

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**KATIA VIGO INGAR**

**A Visualização na Aprendizagem dos Valores  
Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas  
Variáveis Reais**

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**SÃO PAULO  
2014**

**KATIA VIGO INGAR**

**A Visualização na Aprendizagem dos Valores  
Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas  
Variáveis Reais**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.*

**PUC-SP**

**2014**

*Banca Examinadora*

---

---

---

---

---

*Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.*

*Assinatura: \_\_\_\_\_ Local e Data: \_\_\_\_\_*

"Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça "

*Leonhard Euler*

## **AGRADECIMENTOS**

---

*À minha família, em especial aos meus pais, Julian e Trinidad, ao meu irmão, à minha tia Edith e à minha prima Ursula, por me incentivarem sempre a seguir em frente e pelo apoio incondicional em minhas decisões.*

*À minha orientadora, Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva, pela paciência, pela dedicação, pelas oportunidades e também pela confiança depositada em mim.*

*Aos Professores Doutores Saddo Ag Almouloud, Jesus Flores Salazar, Benedito Antonio da Silva e Francisco Ugarte, pelas sugestões, comentários e importantes críticas para elaboração e evolução da tese.*

*Ao grupo PEA-MAT, pelo acolhimento, pelas reuniões e pelas discussões acadêmicas.*

*Ao Programa Convênio de Pós-Graduação Internacional da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES-PEC/PG, pela concessão da bolsa de estudos que permitiu a realização de meus estudos de doutorado, deste trabalho e de minha permanência neste país maravilhoso, o Brasil.*

*A Victor, Esther, Marino, Anita, Marilu, amigos incondicionais, pela amizade, apoio, força e disposição irrestrita, que mesmo distantes, fizeram-se sempre presentes ao longo desta caminhada.*

*Aos amigos que fiz durante meu doutorado, em especial, a Lúcia, Jacinto, Michelle, Sylvia, Dalva, Camila, Edson e Amari, por terem também me incentivado a seguir em frente e pela força, carinho, solidariedade e apoio.*

*Aos meus primos, tios, sobrinhos, em especial a Daniela, que é o motivo de minha vida.*

*A Autora.*

## **RESUMO**

---

Esta pesquisa tem por objetivo *analisar o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais, de alunos de engenharia*. A metodologia do estudo é a Engenharia Didática de Artigue. E o referencial teórico está baseado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, especificamente nas apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial de um registro gráfico representado no CAS *Mathematica*, e na articulação entre o registro gráfico e o algébrico. Nossa referencial teórico fundamentou-se, também, na teoria das Situações Didáticas de Brousseau, uma vez que iniciamos com a proposta de situações, em cujo cenário está o professor-pesquisador diante de um grupo de alunos, em um *milieu* constituído por um laboratório de computação, além dos questionamentos e devoluções. Por meio da análise *a posteriori* das situações didáticas, percebe-se que os alunos apresentaram dificuldades em realizar a conversão do registro da língua natural para o algébrico, mas, mesmo assim, coordenaram três registros de representação semiótica: língua natural, algébrico e gráfico. Já no registro gráfico representado no CAS *Mathematica*, pela apreensão operatória e por meio das modificações ótica, posicional e mereológica, identificaram as variáveis visuais próprias do registro gráfico, porém, tiveram dificuldade em articulá-las com os valores significantes do registro algébrico, apresentado nas definições e teoremas de valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais, e em validar os resultados. Portanto, o estudo da visualização, mediante a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, mostrou ser um meio para a aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais.

**Palavras-chave:** Visualização. Cálculo de duas variáveis. Situações didáticas. Máximos e mínimos. CAS *Mathematica*.

## ABSTRACT

---

This work aimed to *analyze the process of visualization during the learning of notions of maximum and minimum local values in functions of two real variables* by students of engineering. The methodology of the study is the Artigue Didactic Engineering. The theoretical reference was based on the theory of Semiotic Register by Duval, particularly in the perceptive, discursive, operational and sequential apprehension of a graphic register represented in the *CAS Mathematica* and in the articulation between the graphic and algebraic registers. Our theoretical referential was also based on the Theory of Didactic Situation by Brousseau, for we got started with situations which have as their main frame the position of the professor-researcher who faces a group of students in a *milieu* formed by a computer laboratory, questionings and feedback. The a posteriori analysis of didactic situations helped us see that the students presented difficulties converting the register from natural language to algebraic but, anyway, they coordinated three registers of semiotics representation: natural language, algebraic and graphic. In the graphic register presented in the *CAS Mathematica*, through operational apprehension and by means of optical, positional and mereologic modifications, the students identified the visual variables inherent to the graphic register. To the students it was not easy to articulate the visual variables with the meaningful values of the algebraic register presented in the definitions and theorems of maximum and minimum values of functions of two real variables. Validating results was not simple for them either. Therefore, the study of visualization through the theory of Semiotic Register by Duval proved itself to be the way to the apprehension of maximum and minimum local values of functions of two real variables.

**Key-words:** Visualization. Calculus of two variables. Didactic Situations. Maximum and minimum. *CAS Mathematica*.

## **RESUMEN**

---

Esta tesis tiene por objetivo analizar el proceso de visualización durante el aprendizaje de las nociones de valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables reales en alumnos de ingeniería. La metodología de estudio es la Ingeniería Didáctica de Artigue; el referencial teórico se basa en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, específicamente en las aprehensiones perceptiva, discursiva, operatoria y secuencial de un gráfico representado en el CAS *Mathematica* y en la articulación entre el registro gráfico y el algebraico. Nuestro referencial teórico se fundamenta también en la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, ya que iniciamos con la propuesta de situaciones que tienen como escenario la posición del profesor investigador enfrente de un grupo de alumnos, en un *milieu* constituidos por un laboratorio de computación, preguntas y devoluciones. El análisis *a posteriori* de las situaciones didácticas ayudó a percibir que los alumnos presentaron dificultades en realizar la conversión del registro en lengua natural para el algebraico, pero coordinaron los tres registros de representación semiótica: lengua natural, algebraica y gráfica. En la representación gráfica representada en el CAS *Mathematica*, por la aprehensión operatoria y por medio de las modificaciones óptica, posicional y mereológicas, los alumnos identificaron las variables visuales propias de la representación gráfica. Para los alumnos, no fue fácil articular las variables visuales con los valores significantes del registro algebraico presentado en las definiciones y teoremas de los valores máximos y mínimos de funciones de dos variables reales. La validación de los resultados, también, no fue fácil para ellos. Por tanto, el estudio de la visualización mediante la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval demostró ser un medio para el aprendizaje de los valores máximos y mínimos locales de funciones de dos variables reales.

**Palabras-clave:** Visualización. Cálculo de dos variables. Situaciones Didácticas. Máximos y Mínimos. CAS *Mathematica*

## RÉSUMÉ

---

Cette thèse vise à *analyser le processus de visualisation lors de l'apprentissage des concepts de valeurs maximales et minimales locaux de fonctions de deux variables réelles d'étudiants en ingénierie*. La méthodologie de l'étude est sur L'Ingénierie Didactique d'Artigue. Le cadre théorique est basée sur la théorie de la représentation registres Sémiotique de Duval, en particulier dans l'apprehension perceptive, discursive, opératoire et séquentielle d'un registre graphique représenté dans la CAS *Mathematica* et l'articulation entre l'enregistrement graphique et l'algébrique. Notre cadre théorique s'est également appuyé sur la théorie des situations didactiques de Brousseau, parce que nous avons commencé avec la proposition de situations qui ont le fond de la position de l'enseignant-chercheur devant un groupe d'étudiants sur un milieu constitué d'un laboratoire d'informatique, des enquêtes et des rendements. Une analyse *a posteriori* des situations didactiques a aidé à apercevoir que les élèves avaient des difficultés dans l'accomplissement de la conversion de l'inscription de la langue naturelle pour algébrique mais même si ils ont coordonné trois registres de représentation sémiotique: langage naturel, algébrique et graphique. Dans le registre graphique représenté dans CAS *Mathematica*, l'apprehension opératoire et à travers des changements optiques, de position et méréologiques, les élèves à identifier leurs propres variables visuelles du graphe. Pour les étudiants, il n'était pas facile d'exprimer les variables visuelles avec des valeurs significatives de l'enregistrement algébrique présentée dans les définitions et les théorèmes de valeurs maximales et minimales de fonctions de deux variables réelles. La validation des résultats, aussi, n'a pas été facile pour eux. Par conséquent, l'étude de la visualisation en utilisant la théorie des dossiers représentation sémiotique Duval s'est avéré être un moyen pour apprendre les valeurs maximales et minimales locaux de fonctions de deux variables réelles.

**Mots-clés:** Visualisation. Calcul de deux variables. Situations Didactiques. Maxima et minima. CAS *Mathematica*.

# LISTA DE FIGURAS

---

<b>FIGURA 1.</b> GRÁFICO DO PONTO $(2, -2, 3)$ .	29
<b>FIGURA 2.</b> GRÁFICO DO PONTO $(2, -2, 3)$ .	30
<b>FIGURA 3.</b> LOCALIZAÇÃO DO PONTO $(2, -2, 3)$ NO SISTEMA CARTESIANO $\mathbb{R}^3$ .	30
<b>FIGURA 4.</b> OCTANTES DO SISTEMA CARTESIANO E ORIENTAÇÃO POSITIVA DOS EIXOS.	31
<b>FIGURA 5.</b> GRÁFICO DO PONTO $(2, -2, 3)$ – EIXOS SE INTERSECTAM EM $(0, 0, 0)$ .	32
<b>FIGURA 6.</b> GRÁFICO DO PLANO $F(Y, Z) = 2$ .	33
<b>FIGURA 7.</b> GRÁFICO DO PLANO $F(Y, Z) = 2$ – EIXOS SE INTERSECAM EM $(0, 0, 0)$ .	33
<b>FIGURA 8.</b> GRÁFICO DA FUNÇÃO DEFINIDA POR $F(X, Y) = X^2 + Y^2 + 4$ .	34
<b>FIGURA 9.</b> A CAIXA MUDA AO TROCAR O DOMÍNIO DA FUNÇÃO.	35
<b>FIGURA 10.</b> GRÁFICO DA FUNÇÃO DEFINIDA POR $F(X, Y) = X^2 + Y^2 + 4$ – EIXOS SE INTERSECAM EM $(0, 0, 0)$ .	35
<b>FIGURA 11.</b> GRÁFICO DA FUNÇÃO DEFINIDA POR $F(X, Y) = X^2 + Y^2 + 4$ .	36
<b>FIGURA 12.</b> FORMAÇÃO DE UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO <i>MATHEMATICA</i> .	45
<b>FIGURA 13.</b> OUTRA FORMAÇÃO DE UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO <i>MATHEMATICA</i> .	45
<b>FIGURA 14.</b> TRATAMENTO EM UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.	47
<b>FIGURA 15.</b> TRATAMENTO DE UMA OUTRA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.	48
<b>FIGURA 16.</b> APREENSÃO PERCEPTIVA DE UMA FIGURA.	55
<b>FIGURA 17.</b> APREENSÃO PERCEPTIVA DE UM REGISTRO GRÁFICO.	56
<b>FIGURA 18.</b> PARABOLOIDE NO REGISTRO GRÁFICO <i>CAS_MATH</i> .	56
<b>FIGURA 19.</b> APREENSÃO DISCURSIVA DE UMA FIGURA.	57
<b>FIGURA 20.</b> APREENSÃO DISCURSIVA DO REGISTRO GRÁFICO.	57
<b>FIGURA 21.</b> APREENSÃO SEQUENCIAL DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO.	58
<b>FIGURA 22.</b> EXEMPLO DE MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICAS DO QUADRADO ABCD.	60
<b>FIGURA 23.</b> EXEMPLO DE MODIFICAÇÃO ÓTICA.	60
<b>FIGURA 24.</b> EXEMPLO DE MODIFICAÇÃO POSICIONAL.	61
<b>FIGURA 25.</b> EXEMPLO DE MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA.	61
<b>FIGURA 26.</b> EXEMPLO DE IMPLANTAÇÃO DA TAREFA.	64
<b>FIGURA 27.</b> EXEMPLO DE FORMA DE TAREFA.	65
<b>FIGURA 28.</b> EXEMPLO DA RELAÇÃO DOS PONTOS DA SUPERFÍCIE COM O EIXO Z.	65
<b>FIGURA 29.</b> EXEMPLO DA POSIÇÃO DO PARABOLOIDE EM RELAÇÃO AO PLANO $Z=0$ .	66
<b>FIGURA 30.</b> EXEMPLO DA VARIAÇÃO DE Z ATÉ ATINGIR O VALOR MÍNIMO.	66
<b>FIGURA 31.</b> VARIÁVEIS VISUAIS PARA $Z = -X^2 - Y^2 + 4$ .	67
<b>FIGURA 32.</b> FUNÇÃO DIFERENCIAL DE PRIMEIRA ORDEM DE $Z$ .	81
<b>FIGURA 33.</b> ENCONTRANDO OS PONTOS CRÍTICOS DE $Z$ .	82
<b>FIGURA 34.</b> ENCONTRANDO A DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM DE $Z$ .	83
<b>FIGURA 35.</b> COMPORTAMENTO DA DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM.	83

<b>FIGURA 36.</b> A FORMA QUADRÁTICA É DEFINIDA NEGATIVA, Z TEM VALOR MÁXIMO .....	84
<b>FIGURA 37.</b> TESTE DA SEGUNDA DERIVADA .....	85
<b>FIGURA 38.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MÍNIMO LOCAL DE $F(X, Y)$ .....	91
<b>FIGURA 39.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM MÁXIMO LOCAL DE $F(X, Y)$ .....	92
<b>FIGURA 40.</b> EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS.....	92
<b>FIGURA 41.</b> CONVERSÃO PARA O REGISTRO GRÁFICO DO MÍNIMO E MÁXIMO LOCAL.....	93
<b>FIGURA 42.</b> REGISTRO EM LÍNGUA NATURAL E ALGÉBRICO .....	93
<b>FIGURA 43.</b> EXEMPLO DE EXERCÍCIO VINCULADO À GEOMETRIA.....	94
<b>FIGURA 44.</b> REGISTRO GRÁFICO CAS DO PONTO DE SELA.....	95
<b>FIGURA 45.</b> ILUSTRAÇÃO DO PONTO DE SELA E TRATAMENTO ALGÉBRICO.....	95
<b>FIGURA 46.</b> TEOREMA APRESENTADO APENAS O REGISTRO DE LÍNGUA FORMAL.....	96
<b>FIGURA 47.</b> EXEMPLO DE APREENSÃO DISCURSIVA.....	96
<b>FIGURA 48.</b> EXEMPLO DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS .....	97
<b>FIGURA 49.</b> REGISTRO GRÁFICO CAS_MATH DA FUNÇÃO $F(X, Y)=X^3+3XY^2-15X-12Y+6$ .....	98
<b>FIGURA 50.</b> MODIFICAÇÕES POSICIONAL E ÓTICA NO REGISTRO GRÁFICO CAS_MATH .....	98
<b>FIGURA 51.</b> MODIFICAÇÕES ÓTICA, POSICIONAL E MEREOLÓGICA NO REGISTRO GRÁFICO CAS_MATH.....	99
<b>FIGURA 52.</b> A SUPERFÍCIE ESTÁ SOBRE O PLANO $Z= -22$ .....	100
<b>FIGURA 53.</b> MODIFICAÇÃO ÓTICA NO REGISTRO GRÁFICO CAS_MATH .....	100
<b>FIGURA 54.</b> MODIFICAÇÃO ÓTICA, POSICIONAL E MEREOLÓGICA NO REGISTRO GRÁFICO CAS_MATH .....	101
<b>FIGURA 55.</b> MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA NO REGISTRO GRÁFICO CAS_MATH.....	102
<b>FIGURA 56.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS PLANOS $Z=-20; Z=32$ .....	104
<b>FIGURA 57.</b> COMPORTAMENTO DO PLANO $Z=-20$ NO TOCANTE À SUPERFÍCIE.....	105
<b>FIGURA 58.</b> RELAÇÃO ENTRE O PLANO $Z=-20$ E A SUPERFÍCIE.....	105
<b>FIGURA 59.</b> REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DA FUNÇÃO DEMANDA.....	119
<b>FIGURA 60.</b> PRODUÇÃO DE UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA PELO GRUPO 2 .....	120
<b>FIGURA 61.</b> CONVERSÃO DE REGISTROS DE FUNÇÃO DEMANDA.....	121
<b>FIGURA 62.</b> CONVERSÃO DE REGISTRO TABULAR PARA O REGISTRO ALGÉBRICO .....	121
<b>FIGURA 63.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO VALOR MÁXIMO.....	122
<b>FIGURA 64.</b> ANÁLISE DA REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA FUNÇÃO LUCRO. ....	122
<b>FIGURA 65.</b> REPRESENTAÇÃO Gráfica e ALGÉBRICA DA FUNÇÃO DEMANDA.....	123
<b>FIGURA 66.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO LUCRO.....	127
<b>FIGURA 67.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS PLANOS PARALELOS AO PLANO $P_1P_2$ NA SUPERFÍCIE .....	127
<b>FIGURA 68.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS CORTES HORIZONTAIS DA SUPERFÍCIE .....	130
<b>FIGURA 69.</b> DESCRIÇÃO DE UMA VARIÁVEL VISUAL ESPECÍFICA.....	132
<b>FIGURA 70.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO VALOR MÁXIMO.....	132
<b>FIGURA 71.</b> Gráfico de PONTOS NA SUPERFÍCIE. ....	133
<b>FIGURA 72.</b> POSIÇÃO DA SUPERFÍCIE EM RELAÇÃO AOS EIXOS COORDENADOS.....	133
<b>FIGURA 73.</b> REGISTRO GRÁFICO CAS EM QUE NÃO SE MOSTRAM OS CORTES VERTICIAIS.....	134

<b>FIGURA 74.</b> EQUAÇÃO NORMAL DO PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE.....	134
<b>FIGURA 75.</b> UMA REPRESENTAÇÃO FIGURAL DO EDIFÍCIO COMERCIAL.....	137
<b>FIGURA 76.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DA FUNÇÃO PERDA DE CALOR $P(X,Y)$ .....	138
<b>FIGURA 77.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DAS INTERCEPÇÕES DOS PLANOS COM A SUPERFÍCIE.....	139
<b>FIGURA 78.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DA FUNÇÃO $P(Y,Z)$ .....	140
<b>FIGURA 79.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DA FUNÇÃO $P(X,Z)$ .....	140
<b>FIGURA 80.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO PERDA DE CALOR.....	142
<b>FIGURA 81.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS CORTES HORIZONTAIS À SUPERFÍCIE .....	143
<b>FIGURA 82.</b> REPRESENTAÇÕES DOS DADOS DA SITUAÇÃO.....	144
<b>FIGURA 83.</b> REPRESENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS E DA FUNÇÃO VOLUME.....	145
<b>FIGURA 84.</b> DISCRIMINAÇÃO DE VARIÁVEIS VISUAIS.....	145
<b>FIGURA 85.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DA FUNÇÃO PERDA DE CALOR.....	146
<b>FIGURA 86.</b> GRÁFICO DA FUNÇÃO NO DOMÍNIO $[0,35] \times [0,30]$ .....	146
<b>FIGURA 87.</b> DISCRIMINAÇÃO DE VARIÁVEL VISUAL E MODIFICAÇÕES MEREOLÓGICAS.....	147
<b>FIGURA 88.</b> REGISTROS GRÁFICOS <i>CAS_MATH</i> DO PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.....	150
<b>FIGURA 89.</b> OUTROS REGISTROS GRÁFICOS <i>CAS_MATH</i> DO PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.....	151
<b>FIGURA 90.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DA FUNÇÃO REPRESENTADA POR $Z=Y^2-2X^2+5$ .....	151
<b>FIGURA 91.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS_MATH</i> DO CORTE NO PLANO $Z=5$ .....	152
<b>FIGURA 92.</b> MODIFICAÇÕES MEREOLÓGICAS, ÓTICAS E POSICIONAIS NO REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> .....	153
<b>FIGURA 93.</b> REPRESENTAÇÃO ICÔNICA DO VALOR MÁXIMO E MÍNIMO.....	155
<b>FIGURA 94.</b> CONVERSÃO DO REGISTRO ALGÉBRICO PARA O REGISTRO GRÁFICO.....	155
<b>FIGURA 95.</b> TRATAMENTO NO REGISTRO ALGÉBRICO PARA ENCONTRAR O VALOR MÍNIMO.....	156
<b>FIGURA 96.</b> MODIFICAÇÕES MEREOLÓGICA E POSICIONAL NO REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> .....	157
<b>FIGURA 97.</b> REPRESENTAÇÃO ICÔNICA DO VALOR MÁXIMO E MÍNIMO.....	157
<b>FIGURA 98.</b> TRATAMENTO NO REGISTRO ALGÉBRICO PARA ACHAR O VALOR MÍNIMO.....	158
<b>FIGURA 99.</b> MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA E POSICIONAL DO REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> .....	159
<b>FIGURA 100.</b> MODIFICAÇÕES MEREOLÓGICA NO REGISTRO GRÁFICO.....	159
<b>FIGURA 101.</b> TRATAMENTO NO REGISTRO GRÁFICO PARA CARACTERIZAR O PONTO CRÍTICO.....	160
<b>FIGURA 102.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DO PONTO CRÍTICO E SUA IMAGEM.....	161
<b>FIGURA 103.</b> REPRESENTAÇÃO ICÔNICA DO VALOR MÁXIMO E MÍNIMO.....	161
<b>FIGURA 104.</b> FORMULAÇÃO SOBRE A NATUREZA DO PONTO CRÍTICO.....	162
<b>FIGURA 105.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DO PONTO CRÍTICO E SUA IMAGEM.....	163
<b>FIGURA 106.</b> REPRESENTAÇÃO ICÔNICA DO VALOR MÁXIMO E MÍNIMO.....	163
<b>FIGURA 107.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS</i> DA FUNÇÃO REPRESENTADA POR $Z=X^3+3X^2-15X-12Y+6$ .....	167
<b>FIGURA 108.</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO VALOR MÍNIMO E MÁXIMO.....	168
<b>FIGURA 109.</b> ERROS NA REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DOS VALORES MÁXIMO, MÍNIMO.....	168
<b>FIGURA 110.</b> REGISTRO GRÁFICO <i>CAS_MATH</i> DA FUNÇÃO REPRESENTADA POR $Z=X^3+3X^2-15X-12Y+6$ .....	169
<b>FIGURA 111.</b> ERROS NA CONCEPÇÃO DO VALOR MÁXIMO E MÍNIMO.....	169

# **LISTA DE QUADROS**

---

<b>QUADRO 1.</b> REPRESENTAÇÕES DE UM MESMO OBJETO EM TRÊS REGISTROS DIFERENTES. ....	48
<b>QUADRO 2.</b> CONVERSÃO DO REGISTRO ALGÉBRICO PARA O REGISTRO GRÁFICO. ....	49
<b>QUADRO 3.</b> CONVERSÃO DO REGISTRO ALGÉBRICO PARA OUTRO REGISTRO GRÁFICO.....	50
<b>QUADRO 4.</b> EXEMPLO DE CONVERSÃO CONGRUENTE. ....	53
<b>QUADRO 5.</b> CONVERSÃO NÃO CONGRUENTE DO REGISTRO GRÁFICO PARA O REGISTRO ALGÉBRICO. ....	54
<b>QUADRO 6.</b> APREENSÃO SEQUENCIAL DO MÁXIMO LOCAL DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS.....	58
<b>QUADRO 7.</b> VARIÁVEIS VISUAIS E UNIDADES SIMBÓLICAS PARA $y=Ax+B$ NO PLANO CARTESIANO. ....	63
<b>QUADRO 8.</b> POSIÇÕES DE UMA SUPERFÍCIE. ....	65
<b>QUADRO 9.</b> ENCONTROS NA EXPERIMENTAÇÃO.....	110
<b>QUADRO 10.</b> OS SUJEITOS DA PESQUISA. ....	112

# SUMÁRIO

---

<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....</b>	<b>17</b>
<b>CAPÍTULO 1 - PROBLEMÁTICA .....</b>	<b>21</b>
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
1.2 APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE MATHEMATICA .....	28
1.3 JUSTIFICATIVA DO TEMA DE PESQUISA .....	37
1.4 REFERENCIAL TEÓRICO .....	41
1.4.1 <i>Registros de Representação Semiótica</i> .....	41
1.4.2 <i>Visualização</i> .....	62
1.4.3 <i>Teoria das Situações Didáticas</i> .....	68
1.5 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA .....	72
1.6 METODOLOGIA DE PESQUISA .....	75
<b>CAPÍTULO 2 - ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA .....</b>	<b>79</b>
2.1 UM OLHAR PARA A HISTÓRIA DO CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS .....	79
2.2 O OBJETO MATEMÁTICO EM LIVROS DIDÁTICOS .....	88
2.3 ESTUDO DIDÁTICO DO OBJETO MATEMÁTICO .....	97
<b>CAPÍTULO 3 - EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES .....</b>	<b>109</b>
3.1 CARACTERIZAÇÃO DA FACULDADE.....	110
3.2 OS SUJEITOS DE PESQUISA .....	111
3.3 ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DAS SITUAÇÕES .....	112
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>171</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>179</b>
<b>APÊNDICE A - A SEQUÊNCIA DE ENSINO .....</b>	<b>183</b>
<b>APÊNDICE B - ROTEIROS PARA OBSERVAÇÃO DOS ENCONTROS.....</b>	<b>188</b>
<b>ANEXO A - EMENTA DA DISCIPLINA MATEMÁTICA III .....</b>	<b>193</b>
<b>ANEXO B - PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA. ....</b>	<b>198</b>
<b>ANEXO C - TERMO DE COMPROMISSO DOS ALUNOS DO CURSO.....</b>	<b>201</b>
<b>ANEXO D - TERMO DE COMPROMISSO DO PROFESSOR DO CURSO .....</b>	<b>202</b>



## CONSIDERAÇÕES INICIAIS

---

A disciplina de “Cálculo Diferencial de funções de duas ou mais variáveis reais” é oferecida como matéria básica no terceiro semestre em todos os cursos de Engenharia na Universidade Nacional do Callao, no Peru. Em razão da característica multidisciplinar do curso, são privilegiadas as áreas de ciências básicas e de tecnologias, pilares da Engenharia na formação do aluno.

Na Faculdade de Engenharia de Alimentos, a mencionada disciplina denomina-se Matemática III, cuja temática visa priorizar a realização de pesquisas, que necessitam de compreensão do Cálculo Diferencial de duas ou mais variáveis reais, que demanda, por sua vez, a utilização de conceitos, expressões e modelos matemáticos. Observamos que esses alunos, ao estudarem o tópico de Multiplicadores de Lagrange com a utilização de representações gráficas, não mobilizam seus conhecimentos prévios para compreensão do assunto.

Constatamos também que profissionais de Engenharia de Alimentos criticam o fato de os professores de Matemática, sem formação didática, ensinarem a matéria sem relacioná-la a problemas de outras disciplinas, que fazem parte da grade curricular.

Em decorrência desse fato e de que nas aulas são utilizados apenas procedimentos algébricos, cujos exercícios são aplicações diretas das definições e teoremas estudados, decidimos, com o objetivo de promover mudanças nos processos de ensino e de aprendizagem, aprofundar o estudo dos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais, visando a mobilização de conhecimentos.

Nesse sentido, concordamos com Neto e Nunes de Almeida (2013, p. 71) quando afirmam:

Essa questão vem sendo discutida pela comunidade de engenharia há décadas e sempre se depara com a necessidade de modernização dos cursos de engenharia no País. Isso inclui necessariamente a qualificação dos docentes que atuam na educação em engenharia. Se por um lado tais profissionais têm sido cada vez mais bem formados em suas áreas de atuação, por outro ainda carecem de formação pedagógica compatível com a responsabilidade de formar os engenheiros do século XXI. Esta ação, por sua vez, implica necessariamente numa melhor articulação dos cursos com a área de atuação do futuro engenheiro.

Para a realização deste trabalho buscamos estudos que tratam dos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais com suporte teórico na didática da matemática. Assim, pudemos notar a falta de compreensão de conceitos matemáticos no processo de aprendizagem do Cálculo em duas variáveis, especificamente, naqueles relacionados à identificação do domínio de uma função de duas variáveis reais, à representação gráfica, ao estudo de limites, às derivadas parciais, entre outras.

Ademais, observamos que o suporte teórico adotado pelos pesquisadores em nossa revisão bibliográfica foi a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Alguns, além dessa teoria, utilizaram a Teoria Antropológica do Didático, ou a Teoria da Instrumentação de Rabardel, ou a Teoria de Fischbein (categorias de Raciocínio intuitivo) ou, ainda a Teoria APOS – Ação, Processo, Objeto, Sistema. Um dos pesquisadores, Alves (2011), apontou a identificação visual de valores máximos, mínimos e pontos de sela em uma dada representação gráfica no espaço e em curvas de nível, ressaltando que os alunos empregaram a intuição para identificar esses valores.

As representações gráficas são importantes no “Cálculo Diferencial de duas variáveis reais” e na “Análise”. Quanto a esta, afirma Guzmán:

[...] as ideias, conceitos e métodos da matemática apresentam uma grande riqueza de conteúdos visuais, representáveis intuitivamente, geometricamente, cuja utilização resulta muito proveitosa, tanto nas tarefas de apresentação e manejo de tais conceitos e métodos como na manipulação com eles para a resolução dos problemas do campo [...] (GUZMAN, 1996, p. 2).

Os gráficos utilizados no estudo de funções de duas variáveis reais são apresentados em lousa apenas para ilustrar as propriedades das noções

matemáticas. Trata-se de uma representação icônica. Entretanto, essa ilustração não permite que os alunos façam uma manipulação direta dos gráficos, dificultando a compreensão.

No laboratório de computação da Faculdade de Engenharia de Alimentos está instalado o software *Mathematica*. No entanto, poucos são os professores, desse curso, que utilizam dessa ferramenta nas aulas. Nossa interesse pelo uso de software levou-nos a pesquisar seu uso no ensino e aprendizagem do Cálculo de duas variáveis.

Em relação ao uso do software, a maioria das pesquisas consultadas utilizou o CAS (*Computer Algebraic System* – Sistema Algébrico Computacional) *Maple* para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, que abordam funções de duas variáveis reais. Essas pesquisas consideraram o *Maple* um instrumento didático e metodológico, em cujas qualidades puderam apoiar-se no desenvolvimento de uma mediação que estimula a formação, tratamento e conversão de registros de representação semiótica.

Todos os pesquisadores de nossa revisão bibliográfica afirmam que os alunos apresentam dificuldades quando estudam funções de duas variáveis reais e que faltam pesquisas sobre a aprendizagem de Cálculo em várias variáveis. Por essa razão e por Alves (2011) ter estudado os valores de máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais, de forma intuitiva, interessamo-nos por estudar esse tema buscando ir além ao relacionar as representações algébricas com as gráficas possíveis.

Portanto, queremos responder a questão: “*Como acontece o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais para alunos de engenharia?*”

Para respondê-la, usaremos como aporte teórico para o estudo da visualização, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995) e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1998), com objetivo geral de análise desse processo. O CAS *Mathematica* será também adotado, porque é uma ferramenta através da qual os alunos podem visualizar, durante a aprendizagem, os valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis.

Escolhemos como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática de Artigue (1988), pois ela nos permite confirmar ou não nossas suposições pela confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

Este trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma:

No capítulo I – *Problemática*, fizemos um estudo bibliográfico de pesquisas voltadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo de duas variáveis reais, tanto no Brasil quanto no exterior. Apresentamos o CAS *Mathematica*, a justificativa do tema de pesquisa, o referencial teórico, a delimitação do problema e a metodologia de pesquisa.

No capítulo II – *Análises preliminares da engenharia didática*, voltamos nossa atenção à história do Cálculo em várias variáveis reais, fizemos um estudo matemático, uma análise de livros didáticos de Cálculo de funções de duas variáveis reais utilizados na faculdade de Engenharia de Alimentos, no Peru. Finalmente, apresentamos um estudo do objeto matemático no ensino.

No capítulo III – *Experimentação e análises*, realizamos a experimentação, a caracterização da faculdade de Engenharia de Alimentos e os sujeitos do estudo. Apresentamos quatro situações didáticas e uma situação de avaliação, bem como suas análises *a priori* e *a posteriori*. Finalmente, apresentamos nossas considerações finais do estudo.

## Capítulo 1 - PROBLEMÁTICA

---

Neste capítulo, apresentaremos a problemática de nossa pesquisa a partir do levantamento de pesquisas relacionadas ao estudo do Cálculo em duas variáveis reais, justificaremos o tema de pesquisa, e anuncaremos a questão de pesquisa, os objetivos e a metodologia. Além disso, contextualizaremos nossa proposta no interior de um quadro teórico que nos possibilitará analisar os dados deste estudo.

### 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Realizamos uma revisão bibliográfica a respeito do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, em relação às funções de variáveis reais. Sobre o assunto, encontramos uma dissertação de mestrado, duas teses de doutorado e três artigos, os quais apresentaremos a seguir.

Imafuku (2008), em um curso de Matemática, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em que se estudam funções de uma variável, suas propriedades, limites, derivadas e integrais, notou que os alunos apresentavam dificuldades, nos períodos finais do curso, para determinar limites de integração tanto para integral dupla como para tripla. Constatou, ainda, que muitos alunos, mesmo aqueles bem-sucedidos nas disciplinas de Cálculo, não obtiveram o mesmo sucesso quando se depararam com funções de mais de uma variável, principalmente, na interpretação de seu significado e de sua representação gráfica.

Assim, o objetivo da pesquisa de Imafuku (2008) foi verificar as dificuldades e os saberes manifestados na transição do estudo de funções de uma variável para

o caso de duas, no que diz respeito às variáveis dependentes e independentes e à interdependência entre elas, ao domínio e ao gráfico de funções, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função, e em relação às derivadas parciais de primeira ordem. Os sujeitos da pesquisa eram estudantes do quarto e quinto semestre do curso noturno de Licenciatura em Matemática, e já haviam estudado tanto as funções de uma variável real quanto as de duas variáveis reais.

O autor elaborou dois questionários fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, pois acreditava que muitas das dificuldades dos estudantes estavam relacionadas à representação. O primeiro questionário, chamado exploratório, foi aplicado a quinze duplas de estudantes do quarto semestre, o que possibilitou verificar a importância das questões, bem como a adequação dos enunciados para o questionário final.

Com a aplicação desse questionário para estudantes do quarto semestre, o autor concluiu que muitas dificuldades são manifestadas no início do estudo de funções de duas variáveis, visto que grande parte não comprehende o sistema tridimensional, ou seja, a representação gráfica em  $\mathbb{R}^3$ . Constatou-se esse fato nas questões que envolviam a conversão do registro numérico para o gráfico de pontos no sistema 3D. Muitos estudantes também não classificam uma função de acordo com o número de variáveis independentes no registro gráfico, pelo contrário, utilizam o número de variáveis que aparecem. Na determinação do domínio de funções de duas variáveis, há confusão entre domínio e função, e na interpretação geométrica das derivadas parciais.

Em sua tese, Alves (2011) apresenta um estudo do ensino e da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis com o objetivo geral de identificar e descrever as categorias do raciocínio intuitivo, de acordo com Fischbein.

O autor, em preparação para sua pesquisa, analisou quatro livros didáticos e constatou que, em relação ao estudo dos valores máximos e mínimos locais de uma função de várias variáveis, a maioria apresenta o comportamento de curvas de nível de uma superfície, nas vizinhanças de um ponto crítico, na forma de elipses ou circunferências. E quanto ao ponto de sela na origem, os livros exibem

hipérboles, cujas assíntotas são as retas  $y = x$  e  $y = -x$ , apesar de existirem outras superfícies que possuem ponto de sela com comportamento diferente.

Em relação a pontos extremos, Alves (2011) observou que as características geométricas são pouco exploradas nos livros didáticos, pois fornecem os critérios analíticos para o teste da Hessiana, a fim de que o aluno possa identificar e formular uma resposta, sem possuir um significado ou uma imagem mental do objeto matemático.

O autor desenvolveu situações-problema em que os alunos exploraram as categorias do raciocínio intuitivo descritas por Fischbein, com base em uma mediação didática que envolveu os Registros de Representação Semiótica com a intenção de superar e evitar alguns problemas em relação aos conceitos principais do Cálculo, em várias variáveis que o autor identificou na etapa de análise dos livros didáticos.

Inicialmente, contou com a participação de 80 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina Cálculo III (do quarto semestre), nos períodos letivos 2009.1; 2009.2; 2010.1 e 2010.2. Entretanto, em um momento posterior, o autor escolheu oito sujeitos para um acompanhamento mais próximo no decorrer de cada semestre. O estudo foi desenvolvido em sala e as entrevistas semi-estruturadas foram realizadas individualmente no decorrer das sessões didáticas, durante as “aulas de tira dúvidas”. Para Alves (2011), nessas aulas, havia um atendimento individual aos estudantes que manifestaram dificuldades, previamente estabelecidas com os sujeitos, em relação ao conteúdo da disciplina Cálculo III no decorrer da aplicação de duas avaliações.

Na elaboração das atividades didáticas, Alves (2011) empregou, como recurso didático e metodológico, o software *Maple*, afirmando que, em muitos casos, a representação gráfica no espaço tridimensional é difícil no ambiente lápis e papel. Para o autor, o uso do software *Maple* como instrumento didático e metodológico é viável em uma aula de cálculo de várias variáveis reais, e as qualidades do *Maple* podem apoiar-se no desenvolvimento de uma mediação que estimula a formação, tratamento e conversão de registros de representação.

Segundo o autor, a exploração didática de categorias do raciocínio intuitivo, com base em uma mediação didática, que envolveu a exploração de registros de representação semiótica, proporciona a evolução do conhecimento do estudante a respeito de conceitos principais do cálculo de várias variáveis reais.

Henriques (2006), em sua tese, ressalta que uma das tarefas preliminares para o cálculo de integrais múltiplas é o estudo isolado de funções de duas variáveis, em que uma única função é examinada em cada tarefa, dificultando a transição para o ensino de integrais múltiplas. Nessa transição, a função não deve ser considerada isoladamente, sendo que, na maioria das situações e exercícios de resolução de problemas, uma função irá interagir com outras funções para formar um domínio tridimensional de integração.

Para o autor, a representação gráfica no espaço assume um *status* diferente no estudo de integrais múltiplas, em comparação dos estudos preliminares ao cálculo de integrais, afirmindo que além do conhecimento da representação de sólidos clássicos e de revolução no ensino de Integrais Múltiplas, o estudante enfrenta os gráficos de sólidos determinados pelas interseções de sólidos convexos por meio da interação de suas representações algébricas. É essa interação que causa dificuldades na aprendizagem da representação gráfica e algébrica. Assim, o objetivo dessa pesquisa foi compreender as dificuldades dos alunos quando estudam integrais múltiplas e analisar em que medida a utilização de um *software*, como o *Maple*, pode ajudá-los a superar essas dificuldades e a favorecer a interação entre sua representação gráfica e algébrica.

Henriques (2006) desenvolveu sua pesquisa com estudantes e professores da Universidade Estadual de Santa Cruz (Bahia), da Universidade do Estado da Bahia e da Universidade Federal de Campina Grande (Paraíba). Dividiu seu estudo em quatro partes: uma análise institucional do ensino de Integrais Múltiplas, uma análise das práticas de alunos e professores sobre Integrais Múltiplas, um estudo do ambiente informático *Maple* e experimentos com ou sem *Maple*.

O autor concluiu que os estudantes amiúde começam a resolução dos exercícios pelos traçados de desenhos à mão livre, predominando em suas práticas a representação gráfica de sólidos com papel e lápis, o que não é suficiente para permitir a visualização do domínio de integração, mostrando a falta de um trabalho

de interação entre a representação algébrica e a gráfica. Ademais, o *Maple* permitiu melhor manipulação do gráfico, compreensão do problema e sua resolução em menos tempo.

Em relação aos professores, Henriques (2006) sustenta que mostraram alguma disposição para as estratégias de interpretação geométrica do sólido e de representação gráfica do sólido, além de terem reconhecido a existência de certas dificuldades ligadas ao ensino das Integrais Múltiplas, particularmente no tratamento dos exercícios que os professores julgaram *a priori*, difíceis.

Em seu artigo, Carvalho e Pereira (2004) apresentam um trabalho sobre a utilização do software *Maple* como ferramenta para o estudo de gráfico de funções de várias variáveis e de curvas de nível, em que as variáveis didáticas referem-se ao *software* e aos objetos matemáticos: domínio e eixos coordenados. Portanto, o objetivo da pesquisa foi dar oportunidade, por meio do estudo de Matemática, para realizar atividades que suscitem a observação, a análise crítica e criativa de uma situação-problema, visando o uso de um programa computacional como ferramenta provocadora da atuação crítica do aluno.

As pesquisadoras interessaram-se pelo funcionamento do gráfico representado no *software* como uma ferramenta heurística na fase de investigação do aluno, observando que o potencial gráfico do *Maple* permitiu visualizar rapidamente as informações do gráfico em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ , além de analisar como as apreensões perceptiva e operatória, segundo Duval, e as interações teórico-gráficas, intervêm no estudo de funções de várias variáveis reais.

As pesquisadoras observaram uma aula dada por dois professores que desenvolveram aulas teóricas intercaladas por aulas práticas no laboratório. Tiveram acesso à sequência didática antes da aplicação em classe e acompanharam duas turmas, uma de Cálculo II e outra de Cálculo B, ministradas nos cursos de Física e Engenharia Civil, respectivamente.

Segundo as autoras, o fato de os alunos não identificarem a superfície que representa a função estudada, leva-os a aceitarem o gráfico apresentado na tela do computador, sem questionamentos, e assim a uma interpretação errônea do gráfico. Outro fato relevante foi a determinação do domínio da função representada.

Quanto às curvas de nível, o aluno não consegue constatar que o conjunto de valores de  $k$  é o conjunto de pontos da imagem da função.

No tocante às pesquisas realizadas fora do Brasil, encontramos a de Trigueiros e Martinez (2010), em que analisam como os alunos trabalham com funções de duas variáveis reais com o objetivo de investigar a relação entre a noção de  $\mathbb{R}^3$  e de seus subconjuntos, e a compreensão de gráficos de funções de duas variáveis reais, com referencial na Teoria APOS e na Teoria de Registros de Representações Semióticas de Duval.

Entrevistaram nove alunos que haviam feito um curso de cálculo em várias variáveis reais, percebendo dificuldades na compreensão de funções de duas variáveis, em particular, na sua representação gráfica, o que pode estar relacionado, segundo os autores, com a construção própria dos alunos do sistema de coordenadas retangulares  $\mathbb{R}^3$ . Embora tenham reconhecido as representações algébricas de planos, os alunos apresentaram dificuldade para compreender sua representação gráfica, nota-se assim que a dificuldade está em realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. De maneira semelhante, os alunos tiveram dificuldades também para representar graficamente outras funções de duas variáveis, ou seja, foi difícil para os alunos realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico e coordenar esses dois registros. Enfim, tais autores mostraram que a passagem de funções de uma variável para funções de duas variáveis, em particular, no caso de representação gráfica, não é direta.

Os pesquisadores Xhonneux e Henry (2010) da Universidade de Namur, Bélgica, discorrem sobre o ensino do Teorema de Lagrange em cursos de Matemática e de Economia. Essa pesquisa tem por objetivo, comparar, por meio da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, a apresentação desse teorema em dois livros didáticos, na disciplina de Matemática para alunos do primeiro ano de estudos de economia da Universidade de Namur e para alunos do primeiro ano de estudos de Matemática da Universidade de Louvain.

Segundo os autores, existe diferença entre o ensino do Teorema de Lagrange para alunos de matemática e para alunos de economia. Os estudantes de economia são confrontados com o bloco *prático-técnico* formado pela seguinte tarefa: encontrar candidatos que apresentem as melhores soluções para o

problema de otimização, sujeita a restrições e utilizam a técnica dos Multiplicadores de Lagrange para resolver completamente o problema, justificando-a com o Teorema de Lagrange. Já os estudantes de Matemática são confrontados com o bloco *prático-técnico* formado pela tarefa: provar o teorema de Lagrange que permite, ao mesmo tempo, encontrar o resultado e justificar seu resultado. Assim, verifica-se que a demonstração é uma das atividades dominantes entre os estudantes de Matemática.

Os autores apontam, em suas conclusões, que existem discrepâncias entre o conhecimento matemático a ser ensinado nos cursos de matemática e economia, dado que seu papel é diferente em cada curso, pois a Transposição Didática fornece classifica os conteúdos que são apresentados nos livros didáticos. É preciso estar ciente de que os livros didáticos não representam o conhecimento matemático “como é realmente ensinado”, portanto, devem-se realizar análises mais profundas para ter acesso às práticas dos professores e às percepções dos alunos.

Essa revisão bibliográfica mostrou-nos que, no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para funções de duas variáveis reais, a abordagem dos conceitos estudados, a partir de sua definição formal, proporciona algumas dificuldades em termos de compreensão. Referindo-se a generalização da transição de funções de uma variável real para funções de várias variáveis reais, os pesquisadores insistem na importância da interação entre diferentes registros de representação semiótica para generalizar os principais aspectos dessas funções. No tocante à conversão entre registros de representação semiótica, os autores verificaram que na conversão do registro algébrico para o registro gráfico, no  $\mathbb{R}^3$ , os estudantes apresentaram dificuldades.

Verificamos que em algumas pesquisas, os autores utilizaram o *software Maple*, pois observaram que o ambiente de lápis e papel para a aprendizagem do cálculo em duas variáveis reais revela barreiras insuperáveis, em relação à interpretação dos tipos de representações e as interações entre eles, tanto para o ensino quanto para a aprendizagem.

Afirma-se que a interação do aluno com o *Maple* facilitou o processo da aprendizagem, pois o aluno pôde perceber ou intuir, analisar os conceitos inerentes ao Cálculo diferencial e integral de duas variáveis reais, e olhar as diferentes representações gráficas de funções de duas variáveis reais sob ângulos distintos, em função da manipulação direita, em tempo real.

Visto que o *software Maple* é um sistema algébrico computacional (CAS) com grande potencialidade no ensino de tópicos de Cálculo de funções de duas variáveis reais, e o *Mathematica* é um sistema algébrico computacional, estamos interessados nos gráficos representados no CAS *Mathematica*, por meio de comandos próprios do *software*, e na manipulação desses gráficos, já que este *software* está instalado no laboratório de computação da faculdade onde vamos realizar nossa experimentação. Assim, consideramos necessário apresentar alguns comandos do *Mathematica* a fim de representar gráficos de uma função de duas variáveis reais nesse *software*.

## 1.2 APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE MATHEMATICA

O *software Mathematica*, segundo Wolfram (2013), é um programa computacional com um Sistema de Computação Algébrica ou CAS (*Computer Algebra Systems*), que combina manipulação simbólica, cálculo numérico, gráficos e uma sofisticada linguagem de programação. Na atualidade, está sendo utilizado por diferentes profissionais em diversas áreas de conhecimentos, tais como Matemática, Engenharia, Medicina, Física, entre outras.

Wolfram (2013) afirma que o *Mathematica* é composto de duas partes: o núcleo(*Kernel*) e a interface gráfica (*front end*). O núcleo é o módulo em que todo processamento matemático é realizado, ou seja, é a parte que interpreta os comandos e as opções do *Mathematica* e retorna os resultados. A interface gráfica é a forma de interação entre o usuário e um programa por meio da tela, permitindo o uso simultâneo de texto e gráfico.

A forma mais comum de trabalhar no *Mathematica* é o uso de documentos interativos conhecidos como cadernos (*notebook*), que é a área de trabalho do usuário. Em um *caderno* digita-se a entrada de um comando próprio do *software*, a

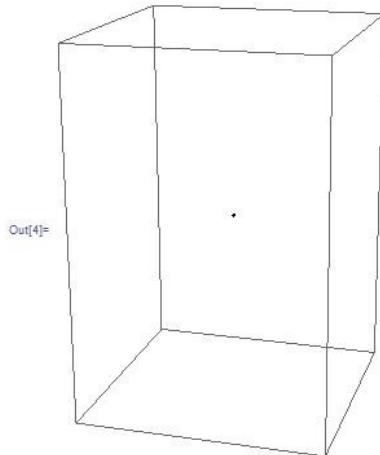
seguir, devem-se usar as teclas *shift* e *enter* para que seja avaliado pelo núcleo. Ao receber esse comando, o núcleo é ativado e gera uma saída que pode ser um texto explicativo, uma representação gráfica, uma representação algébrica ou numérica.

Neste trabalho usaremos os comandos *Graphics3D* para representar um ponto no espaço, *ContourPlot3D*, para representar planos no espaço, e *Plot3D*, para representar funções de duas variáveis reais. Na sequência, explicitaremos esses comandos.

**Gráfico de pontos no espaço.** Para gerar um ponto em coordenadas cartesianas no espaço, digitamos o comando *Graphics3D*. Por exemplo, escrevemos *Graphics3D[Point[{2,-2,3}]]*, para gerar o ponto representado por (2,-2,3), conforme Figura 1.

**Figura 1.** Gráfico do ponto (2,-2,3).

```
In[4]:= Graphics3D[Point[{2, -2, 3}]]
```



**Fonte:** Construção da autora.

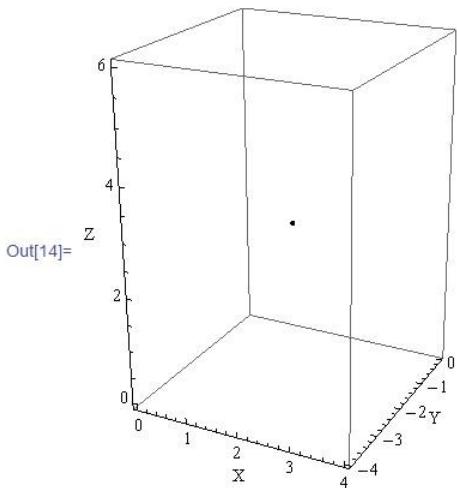
Se quisermos mostrar nesse gráfico os eixos coordenados e nomeá-los com as letras *x*, *y* e *z*, por exemplo, escreveríamos de maneira ordenada e sequencial as seguintes opções *Axes→True* e *AxesLabel → {"x","y","z"}*. Também, poderíamos nomear os eixos com outras letras. Para gerar o ponto (2,-2,3) em que os eixos sejam mostrados e nomeados com as letras *X*, *Y* e *Z*, por exemplo, escrevemos o comando

```
Graphics3D[Point[{2, -2, 3}], Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}],
```

como vemos na Figura 2.

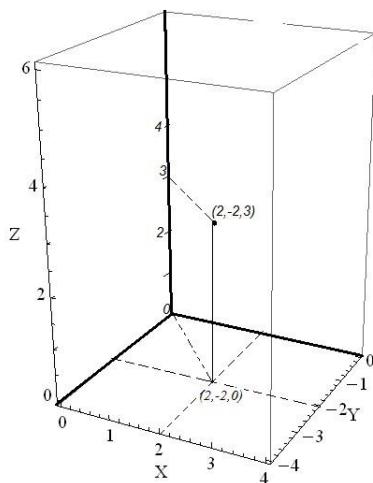
**Figura 2.** Gráfico do ponto  $(2, -2, 3)$ .

```
In[14]:= Graphics3D[Point[{2, -2, 3}], Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]
```



**Fonte:** Construção da autora.

O procedimento para descrever a posição do ponto de coordenadas  $(2, -2, 3)$ , nesse espaço euclidiano desenhado por três retas numéricas perpendiculares entre si, mostrado na Figura 2, é o mesmo que utilizamos para localizar um ponto, em que os eixos coordenados são ortogonais entre si e passam pelo mesmo ponto O, origem comum desses eixos. De fato, para representar o ponto  $(2, -2, 0)$  no plano  $xy$ , como é mostrado na Figura 3, traçamos um segmento paralelo ao eixo  $x$  em direção ascendente do eixo  $y$ , a seguir, traçamos um segmento paralelo ao eixo  $y$  em direção descendente do eixo  $x$ , sendo que os dois segmentos têm como intersecção o ponto de coordenadas  $(0,0,0)$ .

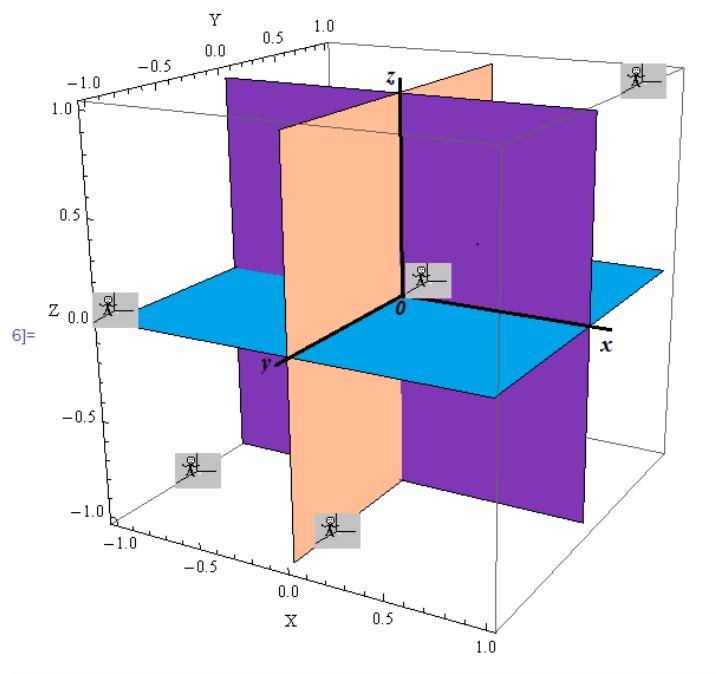
**Figura 3.** Localização do ponto  $(2, -2, 3)$  no sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$ .

**Fonte:** Construção da autora.

Na sequência, traçamos um segmento paralelo ao eixo x de comprimento  $|2|$  e um segmento paralelo ao eixo y do mesmo comprimento  $|2|$ , sendo a interseção desses segmentos o ponto de coordenadas  $(2, -2, 0)$ . A seguir, traçamos uma diagonal do ponto de coordenadas  $(0, 0, 0)$  até o ponto de coordenadas  $(2, -2, 0)$ , logo traçamos um segmento paralelo a essa diagonal que passa pelo ponto  $(0, 0, 3)$  e intersectamos com um segmento paralelo ao eixo z de comprimento  $|z| = 3$ , conforme mostra a Figura 3.

Portanto, esse software apresenta o gráfico do sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$  em uma caixa definida pelos eixos coordenados, que não passam pela origem, já que o gráfico do sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$  é gerado de outra maneira em que se podem observar os octantes do sistema cartesiano, como mostra a Figura 4. No entanto, a localização de um ponto nesse sistema de eixos é a mesma que usamos para localizar um ponto em um sistema de eixos com orientação positiva.

**Figura 4.** Octantes do sistema cartesiano e orientação positiva dos eixos.



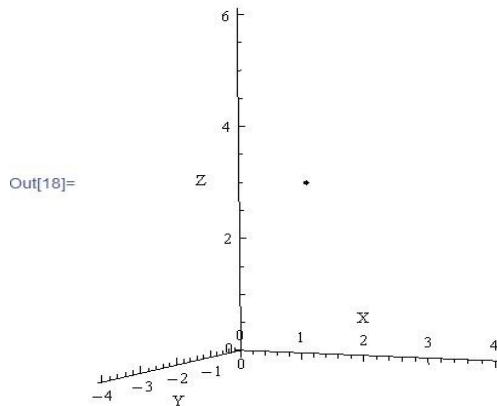
**Fonte:** Construção da autora.

O *Mathematica* gera também um ponto em um sistema de eixos com orientação positiva, ou seja, no espaço em que os eixos de coordenadas estão centrados na origem em que é visto apenas um octante do espaço cartesiano. Para isso, ao acrescentarmos no comando *Graphics3D* a opção *AxesOrigin*  $\rightarrow \{0,0,0\}$ ,

conseguimos que, no gráfico, os eixos coordenados estejam centrados no ponto de coordenadas  $(0,0,0)$ . E com `Boxed → False`, desaparece a caixa, conforme Figura 5.

**Figura 5.** Gráfico do ponto  $(2, -2, 3)$  – eixos se intersectam em  $(0,0,0)$ .

```
In[18]:= Graphics3D[Point[{2, -2, 3}], Axes → True,
AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, 
AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False]
```



**Fonte:** Construção da autora.

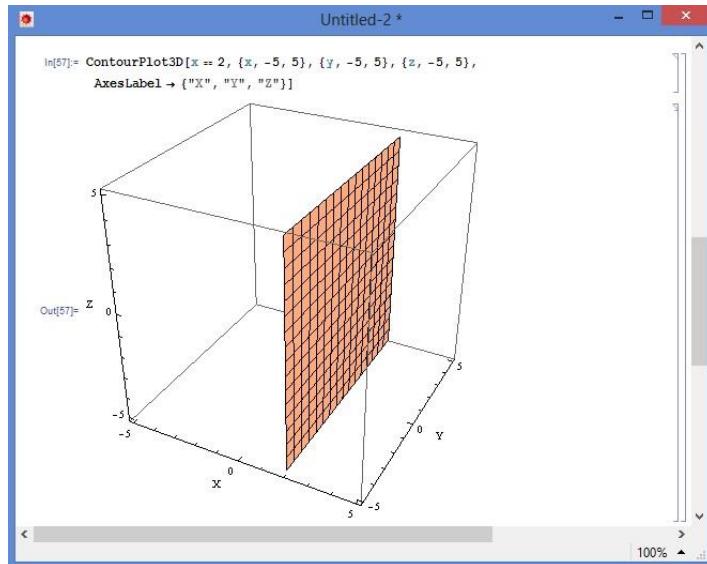
Os procedimentos para identificar o ponto  $(2, -2, 3)$ , conforme mostra a Figura 5, são os mesmos mencionados anteriormente. Assim, notamos que através do *Mathematica* pode-se observar os oitantes do sistema cartesiano e não apenas um oitante. Essas diferentes formas de representar o sistema de coordenadas  $\mathbb{R}^3$  estão presentes também nos gráficos de planos e superfícies como explicitaremos a seguir.

**Gráfico de planos no  $\mathbb{R}^3$ .** Para gerar um plano, digitamos o comando `ContourPlot3D` e em forma sequencial e ordenada digitamos as opções  $f == k$ ;  $\{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ ,  $\{y, y_{\min}, y_{\max}\}$ ,  $\{z, z_{\min}, z_{\max}\}$ . Quando escrevemos  $f == k$ , estamos representando um conjunto conveniente de pontos no espaço, tal que  $\{(x, y, k): (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } f(x, y) = k\}$ , o conjunto  $\{(x, k, z): (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } f(x, z) = k\}$ , ou  $\{(k, y, z): (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } f(y, z) = k\}$ . Quando escrevemos  $\{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ ,  $\{y, y_{\min}, y_{\max}\}$ , estamos definindo um domínio conveniente, dentro do qual estará o gráfico, e quando escrevemos  $\{z, z_{\min}, z_{\max}\}$ , estamos definindo uma imagem conveniente para o gráfico.

Por exemplo, para gerar o plano definido analiticamente por  $f(y, z) = 2$ , conforme mostra a Figura 6, digitamos o comando, `ContourPlot3D[x==2, {x,-5,5},`

$\{y, -5, 5\}, \{z, -5, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}]$ . Como explicamos anteriormente, a opção  $\text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}$  nomeia os eixos coordenados, os quais podem ser também nomeados com outras letras.

**Figura 6.** Gráfico do plano  $f(y,z)=2$ .

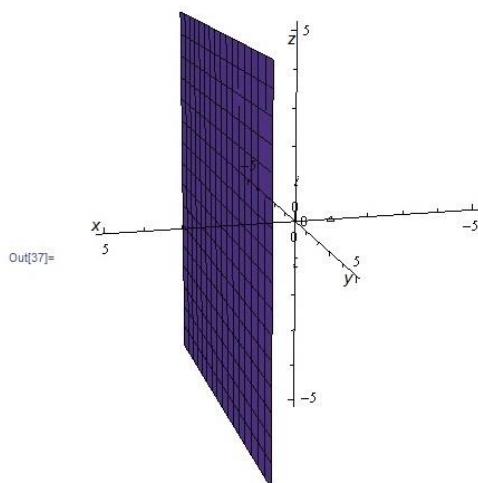


**Fonte:** Construção da autora.

Para gerar o plano  $f(y,z)=2$  com os eixos centrados no ponto  $(0,0,0)$ , digitamos no comando *ContourPlot3D* as opções  $\text{AxesOrigin} \rightarrow \{0,0,0\}$  e  $\text{Boxed} \rightarrow \text{False}$ , conforme Figura 7.

**Figura 7.** Gráfico do plano  $f(y,z)=2$  - eixos se intersejam em  $(0,0,0)$ .

```
In[37]:= ContourPlot3D[x == 2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
AxesLabel \rightarrow {"X", "Y", "Z"}, Axes \rightarrow True, AxesOrigin \rightarrow {0, 0, 0},
Boxed \rightarrow False]
```



**Fonte:** Construção da autora.

Notamos que o gráfico do plano, mostrado tanto na Figura 6 quanto na Figura 7, representa o conjunto  $\{(2, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } f(y, z) = 2\}$ . Mais de uma

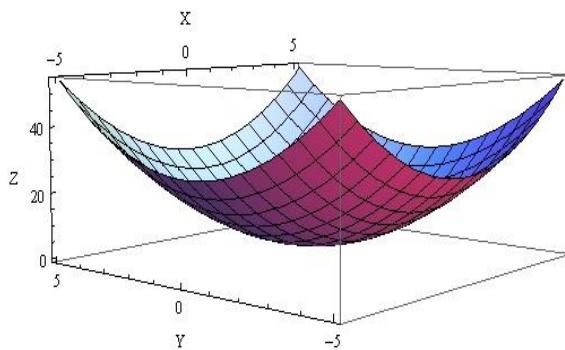
vez, afirmamos que, para gerar o gráfico de planos no espaço, o *Mathematica* apresenta-o de maneiras diferentes: os eixos de coordenadas estão centrados na origem e em uma caixa limitada pelos eixos coordenados não centrados na origem.

**Gráfico de funções de duas variáveis reais.** Para gerar o gráfico de uma função de duas variáveis, digitamos o comando *Plot3D*, e, em forma sequencial, digitamos as opções  $f(x,y)$ ,  $\{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ ,  $\{y, y_{\min}, y_{\max}\}$ . Quando escrevemos  $f(x,y)$ , estamos representando uma função de duas variáveis definida por  $z = f(x,y)$ . Também poderíamos escrever a expressão  $f(y,z)$  para representar uma função de duas variáveis definida por  $x = f(y,z)$  ou uma função definida por  $y = f(x,z)$ .

Quando digitamos  $\{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ ,  $\{y, y_{\min}, y_{\max}\}$ , estamos definindo um domínio conveniente para a função de duas variáveis definida por  $f(x,y)$ . Da mesma maneira, se a função fosse definida por  $x = f(y,z)$ , escreveríamos  $\{y, y_{\min}, y_{\max}\}$ ,  $\{z, z_{\min}, z_{\max}\}$ , da mesma maneira para a função definida por  $y = f(x,z)$ . Por exemplo, para gerar o gráfico da função de duas variáveis definida por  $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$  com domínio  $[-5,5] \times [-5,5]$ , digitamos o comando, conforme mostra a Figura 8: *Plot3D*[ $x^2 + y^2 + 4$ ,  $\{x, -5, 5\}$ ,  $\{y, -5, 5\}$ , *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"}], em que a opção *AxesLabel* → {"X", "Y", "Z"} nomeia os eixos coordenados, os quais podem ser nomeados com outras letras.

**Figura 8.** Gráfico da função definida por  $f(x,y)=x^2+y^2+4$ .

```
Plot3D[x^2 + y^2 + 4, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]
```

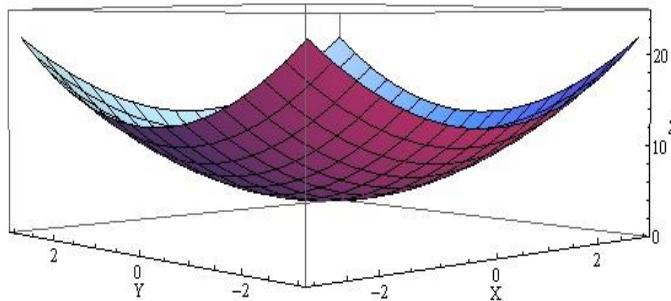


**Fonte:** Construção da autora.

Observamos que o *Mathematica* gera o gráfico de uma função de duas variáveis em uma caixa definida pelos eixos coordenados não centrados na origem. Além disso, observamos na Figura 8 que o *Mathematica* exibe automaticamente, na tela do computador, os valores da imagem da função definida por  $f(x,y) = x^2 +$

$y^2 + 4$  com domínio  $[-5,5] \times [-5,5]$ , isto é,  $z \in [0,54]$ . Os limites da caixa podem mudar, conforme Figura 9, se forem alterados os intervalos das variáveis independentes da função.

**Figura 9.** A caixa muda ao trocar o domínio da função.

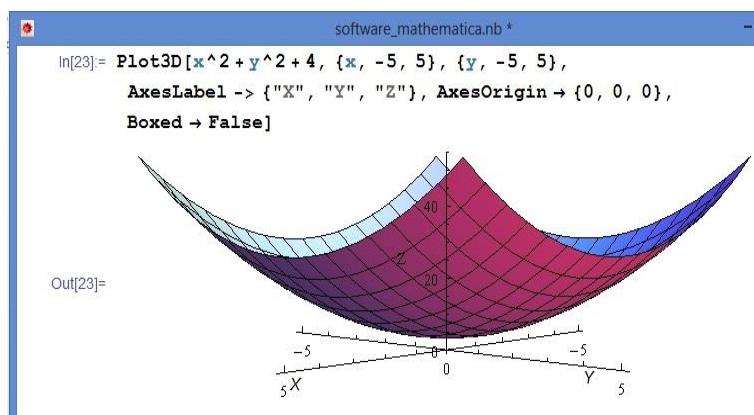


**Fonte:** Construção da autora.

Observamos na Figura 9 que o *Mathematica* exibe automaticamente, na tela do computador, os valores da imagem da função definida por  $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$  com domínio  $[-3,3] \times [-3,3]$ , isto é,  $z \in [0,22]$ . Logo, esses valores de  $z$  dependem dos valores de  $x$  e  $y$ , que digitamos no momento de inserir o comando.

Para gerar o gráfico de uma função de duas variáveis com os eixos coordenados centrados na origem, digitamos no comando *Plot3D* as opções: *AxesOrigin*  $\rightarrow \{0,0,0\}$  e *Boxed*  $\rightarrow \text{False}$ ; o *Mathematica*, conforme mostra a Figura 10, gera o gráfico da função definida analiticamente por  $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$  com domínio  $[-5,5] \times [-5,5]$ .

**Figura 10.** Gráfico da função definida por  $f(x,y)=x^2+y^2+4$  - eixos se intersecam em  $(0,0,0)$ .

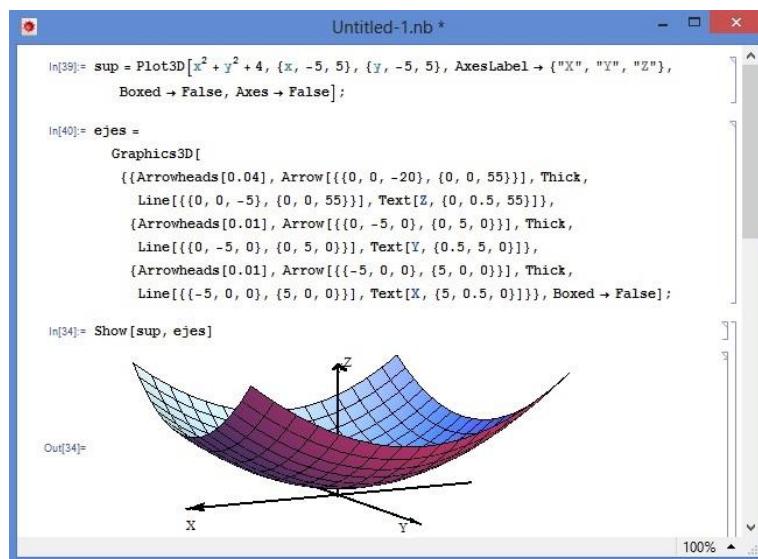


**Fonte:** Construção da autora.

Novamente, afirmamos que, para gerar o gráfico de uma função de duas variáveis reais, o *Mathematica* apresenta-o de formas diferentes: os eixos de coordenadas estão centrados na origem (é um sistema de eixos com orientação positiva) e em uma caixa definida pelos eixos coordenados não centrados na origem (em que se pode observar os octantes do sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$ ), ou seja, o *Mathematica* mostra o gráfico do sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$  de maneiras diferentes, mas o conteúdo do gráfico é o mesmo.

O *Mathematica* gera o gráfico em  $\mathbb{R}^3$ , de outra forma, isto é, com os eixos coordenados interceptados ortogonalmente em suas origens, orientados e denotados por  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Para isso, em primeiro lugar, digitamos o comando *Plot3D* para produzir um gráfico de uma função de duas variáveis sem a caixa e sem os eixos, e em seguida digitamos o comando *Graphics3D* para gerar a representação gráfica do sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$ . Após o uso do comando *Show*, determinamos a representação de uma função de duas variáveis nesse sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$ , combinando os gráficos gerados pelo uso dos comandos *Plot3D* e *Graphics3D*. Por exemplo, para gerar o gráfico da função definida analiticamente por  $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4$  com domínio  $[-5,5] \times [-5,5]$ , como é mostrado na Figura 11, digitamos o comando  $\text{Plot3D}[x^2 + y^2 + 4, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{"X", "Y", "Z"\}, \text{Boxed} \rightarrow \text{False}, \text{Axes} \rightarrow \text{False}]$ .

**Figura 11.** Gráfico da função definida por  $f(x,y)=x^2+y^2+4$ .



**Fonte:** Construção da autora.

As opções usadas para representar os eixos coordenados: *Arrowheads[s]*, onde *s* representa o tamanho da seta em escala *s*; *Arrow[{pt1,pt2}]* representa a seta com ponto inicial, representado por *pt1*, até o ponto final, representado por *pt2*; *Line[{pt1,pt2}]* representa a linha que une os pontos representados por *pt1* e *pt2*, podem ser alteradas de acordo com o gráfico que desejamos representar, ou seja, conforme o domínio, a imagem da função. No entanto, para usar essas opções do comando *Graphics3D*, precisamos ter conhecimento e entender a sintaxe própria de cada um no momento de gerar um gráfico.

Percebemos que o gráfico de uma função de duas variáveis auxilia-nos na observação das características dessa superfície, pois estamos interessados na representação de um conjunto de pontos  $(x,y,z)$  tal que  $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $z = f(x,y)$ , onde *D* representa o domínio da função. Ademais, afirmamos que a vantagem do *Mathematica* no ensino e aprendizagem do Cálculo em duas variáveis reais é que esse software gera gráficos diferentes do sistema de coordenadas retangulares *XYZ*, segundo o que for requerido pelo usuário, mas o conteúdo do gráfico é o mesmo.

Assim, consideramos que essas diferentes formas de apresentar o gráfico de uma função de duas variáveis reais e de “ver” a representação gráfica ajudarão o aluno a mobilizar seus conhecimentos sobre as noções de Cálculo Diferencial em duas variáveis reais, quando tiverem que interpretar e analisar o gráfico de uma função de duas variáveis reais e, assim, dar solução a situações, pois, como afirma Duval (2004), a maneira de ver os gráficos depende da compreensão do funcionamento do sistema de representação.

### 1.3 JUSTIFICATIVA DO TEMA DE PESQUISA

Na leitura das ementas da disciplina de Matemática III, ou equivalentes, da Universidade do Callao, no Peru, permite-nos afirmar que o estudo de funções de duas variáveis reais tem lugar nos programas de Cálculo nos cursos de Engenharia, Economia, Administração, Matemática e Física. Relacionado a esse tema, um dos itens estudados é os valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais, como pode ser visto no **Anexo A** (pag. 193).

Segundo o Ministério de Educação e Cultura de Brasil (MEC), no Parecer CNE/CES 11/2002, a formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos necessários para o exercício de competências e habilidades relacionadas ao saber matemático associado a aspectos sociais e naturais inerentes às graduações de engenharia. Uma delas é aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas.

Essa formação técnico-científica dos alunos de Engenharia é semelhante à formação do futuro engenheiro no Peru, além disso, segundo Nomura (2011), as disciplinas dos Conteúdos Curriculares presentes nas Diretrizes são agrupadas em conteúdos básicos, conteúdos profissionalizantes e específicos de cada engenharia. De maneira semelhante, são agrupadas as disciplinas no curso de Engenharia de Alimentos. Assim, a disciplina de Matemática III pertence ao grupo de conteúdos básicos.

No curso de Engenharia de Alimentos, percebemos a necessária relação entre as disciplinas matemáticas e as disciplinas que compõem os futuros ciclos da graduação, visto que as primeiras são essenciais para a aprendizagem das segundas, por exemplo, a disciplina de Matemática III é essencial para o aprendizado das disciplinas de Termodinâmica, Engenharia I e Engenharia II.

Segundo Cury (apud NOMURA, 2011, grifo nosso), o futuro engenheiro deve aplicar conhecimentos matemáticos, científicos e tecnológicos à engenharia, trabalhar em equipes multidisciplinares, sendo que todas as disciplinas da grade curricular deveriam cumprir essas exigências. Ademais, não se poderia pensar em trabalhar o **Cálculo**, as Equações Diferenciais, entre outros, de forma separada, como se os conteúdos pudessem permanecer guardados na memória do aluno, esperando para serem utilizados.

Assim, de acordo com Nomura (2011), deve existir uma interdependência entre o ensino e aprendizagem, em relação à lógica da sequência do aprendizado e à forma com que os conteúdos são ligados entre si. Esse fato não é levado em conta na Faculdade de engenharia de Alimentos da Universidade Nacional do Callao, no Peru, no que diz respeito às disciplinas de matemática e às que pertencem ao grupo de conteúdos específicos da engenharia de Alimentos.

Visto que é necessário ligar a disciplina de Matemática III com as outras da grade curricular da engenharia de Alimentos, estamos interessados no ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática III, em particular, no ensino e aprendizagem da noção de valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais, buscando estabelecer relações com as demais disciplinas do curso.

Ao lecionarmos essa disciplina, percebemos que os alunos têm dificuldades para se relacionarem com o estudo das funções de duas variáveis reais, o que se reflete no alto nível de reprovados nesse tópico. Nossa interesse pela noção de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais é porque quando os alunos estudam o tópico de Multiplicadores de Lagrange, utilizando representações gráficas, apresentam problemas em compreender esse tópico.

Por isso, decidimos aprofundar o estudo dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais com o objetivo de promover mudanças no processo de ensino e aprendizagem, porque ao darmos aulas no curso de Engenharia de Alimentos utilizamos apenas procedimentos algébricos e exercícios de aplicações diretas das definições e teoremas.

Assim, no decorrer de nossas leituras e reflexões, identificamos que existem poucas pesquisas realizadas, tanto nacional quanto internacional, que tratam do ensino do Cálculo diferencial e integral em duas variáveis reais. Verificamos que essas pesquisas enfatizam a representação gráfica de funções de duas variáveis, na determinação de seu domínio e em curvas de nível, pois os alunos não conseguem interpretar em outro registro o que realizam no algébrico.

Tais pesquisas fundamentaram-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, propondo atividades que possibilitavam a conversão entre registros. Basearam-se também na percepção de registros gráficos no plano e no espaço de tal maneira que os alunos faziam conjecturas a partir da intuição, permitindo a transição do Cálculo de uma variável real para duas variáveis reais, na medida em que o aluno mobilizava seus conhecimentos de cálculo de uma variável real.

Em relação ao ambiente informático usado nas pesquisas, Henriques (2006), Carvalho e Pereira (2004) e Alves (2011) apresentaram as potencialidades de um

programa computacional que implementa um sistema de álgebra computacional (CAS), o *Maple*, para favorecer a aprendizagem de alguns conteúdos de Cálculo diferencial e integral de duas variáveis reais.

Em relação ao Cálculo de integral dupla ou tripla e ao Cálculo diferencial em duas variáveis reais, Henriques (2006) e Alves (2011) afirmaram que o *Maple* pode realizar mudança de variáveis, cálculos de derivadas parciais, cálculo de primitivas de integrais iteradas, entre outras, fornecendo o resultado de maneira rápida, além de oferecer aos estudantes oportunidade de explorar ideias matemáticas, analisar contraexemplos e desenvolver a intuição necessária com a fim de evitar a algoritmização das atividades didáticas.

Há pesquisas que usam como referência a Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de funções de duas variáveis diretamente relacionado ao tratamento e conversão entre os registros algébrico e gráfico. No caso de Alves (2011), ele se interessa em investigar como o aluno percebe ou intui o comportamento das curvas de nível perto dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais, e, no caso de Henriques (2006), como o aluno representa mentalmente uma região sólida. Em relação às representações gráficas em  $\mathbb{R}^3$ , duas pesquisas usaram lápis e papel, e três delas, o ambiente computacional *Maple*.

Tal constatação leva-nos a inferir que nossa contribuição com esta pesquisa será particular, uma vez que estamos interessados em estudar como o aluno desenvolve a visualização durante a aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais e não apenas como os percebe, os intui ou os representa mentalmente. Para isso fizemos uma adaptação das apreensões do registro figural de Duval para o registro gráfico, dado que não existem estudos que expliquem essas apreensões neste registro.

De acordo com os pesquisadores que usaram o software *Maple*, concordamos que constitui ferramenta importante para a visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais. Tanto este quanto o software Mathematica são programas computacionais com um Sistema de Computação Algébrica (CAS). Assim, por já estar instalado no laboratório de computação da faculdade de Engenharia de Alimentos, onde

realizaremos a experimentação, e por não termos encontrado pesquisa alguma que o utilizasse como ferramenta na construção de noções de funções de duas variáveis, especificamente, para a determinação de valores de máximos e mínimos locais dessas funções, optamos por sua utilização.

No próximo passo, esclareceremos nosso referencial teórico que sustenta este trabalho, contribuindo para delimitar nosso problema e formular a questão de pesquisa e os objetivos.

## 1.4 REFERENCIAL TEÓRICO

Nessa parte da pesquisa apresentaremos o referencial teórico que sustenta este estudo: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, segundo Duval (1995), e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1998), com as quais nosso trabalho possui estreita relação.

### 1.4.1 Registros de Representação Semiótica

Duval (1995) afirma que a peculiaridade da aprendizagem das matemáticas considera que as atividades cognitivas essenciais, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos, requerem a utilização de sistemas de expressão, e de representação além da língua natural ou das imagens. Para o autor, o uso frequente de símbolos próprios da Matemática constitui uma maneira particular de comunicar e generalizar determinadas concepções relacionadas a suas diversas áreas, tais como: Aritmética, Geometria, Álgebra, Cálculo, Estatística etc.

Para o autor é fundamental não confundir, em nenhum momento, os objetos matemáticos com suas representações, visto que um mesmo objeto matemático pode ter representações diferentes, pois o que importa é o objeto representado e não suas diversas representações semióticas possíveis.

Assim, Duval (1995, p. 2) afirma que, “por sua pluralidade potencial, as diversas representações semióticas dos objetos matemáticos seriam então secundárias e superficiais à aprendizagem conceitual dos objetos”, pois, a confusão

entre o objeto matemático e sua representação propicia uma perda de compreensão por parte do aluno, dado que os conhecimentos adquiridos tornam-se inutilizáveis no contexto da aprendizagem, seja por falta de atenção ou por permanecem como representações inertes que não sugerem nenhum tipo de tratamento.

O autor considera que as representações podem ser mentais, computacionais e semióticas. As mentais consistem em um conjunto de imagens e de concepções que uma pessoa pode ter sobre um objeto ou sobre uma situação. As computacionais são aquelas cujo significante (o elemento tangível, perceptível ou material do signo) não requer visão do objeto, permitindo transformações algorítmicas de uma sucessão de significantes a outra, isto é, um conjunto de instruções necessárias para executar uma tarefa a fim de produzir uma resposta adequada à situação. “Trata-se de uma **codificação da informação**” (DUVAL, 1995, p. 16).

As representações semióticas, por sua vez, são determinadas por um sistema particular de signos, linguagem, escritura algébrica ou de gráficos cartesianos, podendo ser transformadas em representações equivalentes em outro sistema semiótico, possibilitando que o sujeito atribuia-lhes significados diferentes.

Duval (2004, p. 43, tradução nossa) ressalta a importância da noção de sistema semiótico no estudo das representações semióticas:

Um sistema semiótico considera regras, mais o menos explícitas, que permitem combinar os signos entre si, de modo que a associação formada tenha também um sentido. As possibilidades de combinação são as que dão a capacidade inventiva ao sistema semiótico permitindo efetuar, no seu interior, transformações de expressão ou de representação. Essas regras determinam o funcionamento do sistema, sua sintaxe em sentido amplo [...].

Para o autor, uma representação semiótica não pode ser entendida de forma independente do sistema que a produz. As especificidades do sistema semiótico que permitem a produção de uma representação são as que determinam a relação entre o conteúdo da representação e o objeto representado.

As representações semióticas não podem ser preenchidas pelas representações mentais porque elas desempenham um papel primordial na

realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos. Além disso, “o desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções” (DUVAL, 2009, p. 17).

Segundo o autor, para que um sistema semiótico seja um registro de representação semiótica deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose:<sup>1</sup> a formação, o tratamento e a conversão.

A **formação** de uma representação dentro de um registro semiótico particular, seja para expressar uma representação mental, seja para evocar um objeto real, implica sempre uma seleção em um conjunto de caracteres e de determinações, constituindo o que queremos representar, envolvendo seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. É a atividade que permite representar de alguma forma um determinado conjunto de conhecimentos. Salvo os casos de idiossincrasia, os signos utilizados pertencem a um sistema semiótico já constituído e já utilizado por outros: o enunciado de uma frase em certa língua natural, o desenho de uma figura geométrica, a expressão de uma fórmula, entre outros.

Para Duval (1993), essa atividade implica uma seleção de relações e de dados no conteúdo a ser representado, que é feita em função de unidades e de regras de conformidade que são próprias do sistema empregado em que a representação é produto. As regras de conformidade são aquelas que definem um sistema de representação e, por consequência, os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis em um registro.

Por exemplo, uma formação de uma representação semiótica, relacionada ao Hessiano de uma função no ponto  $(x_0, y_0)$ , pode ser dada conforme a representação a seguir:  $H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$ .

---

<sup>1</sup> É chamada semiose a apreensão ou a produção de uma representação semiótica (DUVAL, 1995, p. 2, tradução nossa).

Essa formação é feita em função das regras de conformidade próprias do sistema algébrico do cálculo diferencial de duas variáveis reais. Podemos considerar outra representação do Hessiano de uma função no ponto  $(x_0, y_0)$ ,

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

cuja formação é feita em função das regras de conformidade próprias do sistema dos determinantes de uma matriz quadrada  $2\times 2$ , em que o conteúdo da representação está dado como uma tabela retangular de  $2\times 2$ .

Concordamos com Duval (2011) quando afirma que a contribuição do computador com seus softwares é outro modo de produção de representações semióticas. Para produzir essas representações, o sujeito precisará compreender os comandos básicos do software em questão, além de conhecer as noções matemáticas envolvidas para uma representação adequada, o que é motivo suficiente para diferenciar o uso de softwares do uso de lápis e papel. Como o autor menciona, “os computadores constituem um modo fenomenológico<sup>2</sup> de produção radicalmente nova” (DUVAL, 2011, p. 137).

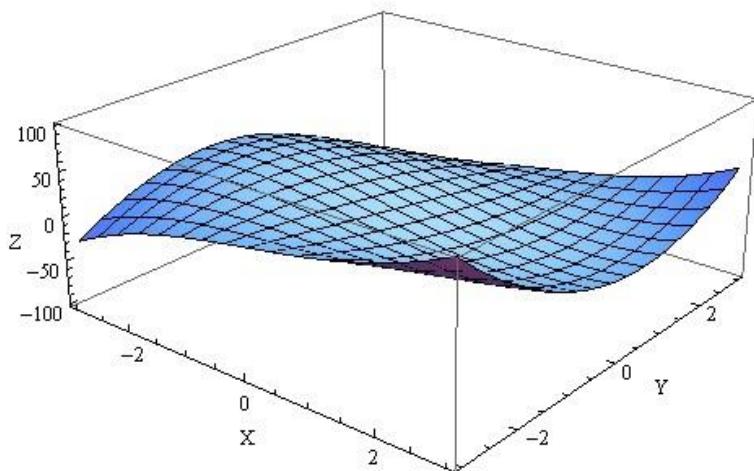
Para explicar a formação de uma representação gráfica de uma função de duas variáveis, com a utilização do software *Mathematica*, temos que considerar sempre o contato do sujeito com uma máquina. O software *Mathematica*, por meio de seu próprio menu de comandos, manda instruções ao seu núcleo para exibir na tela do computador, especificamente no caderno do *Mathematica*, a representação gráfica de uma função de duas variáveis reais. Por exemplo, para formar uma representação gráfica da função representada algebraicamente por  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ , escrevemos o comando com suas opções respectivas: *Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AxesLabel \rightarrow {"X", "Y", "Z"}]*, a seguir, pressionamos a tecla *shift* e *enter*, gerando dessa maneira o gráfico mostrado na Figura 12.

---

<sup>2</sup> Segundo Husserl (2002, p. 11), “A palavra ‘fenomenologia’ agrupa a palavra ‘fenômeno’ e ‘logos’, significando etimologicamente o estudo ou a ciência do fenômeno. Por fenômeno, no sentido originário e mais amplo, entende-se por tudo o que aparece, que se manifesta ou se revela”.

**Figura 12.** Formação de uma representação gráfica no *Mathematica*.

```
Plot3D[x^3 + 3 x y^2 - 15 x - 12 y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]
```



**Fonte:** Construção da autora.

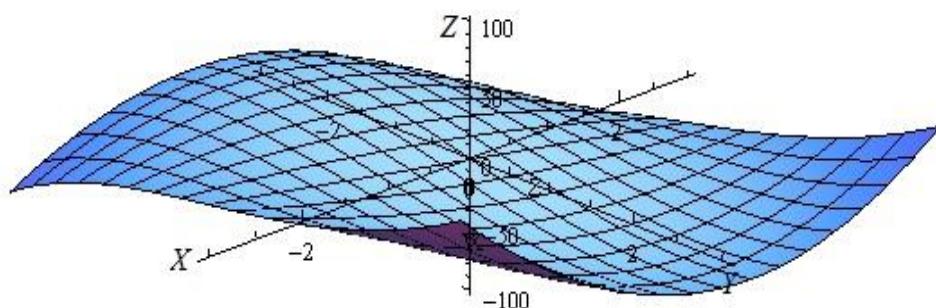
Como mencionamos anteriormente, podemos, com ajuda de um comando do *Mathematica*, formar outra representação gráfica da função representada algebricamente por  $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ , conforme mostra a Figura 13, digitamos o comando:

```
Plot3D[x^3 + 3 x y^2 - 15 x - 12 y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},  
AxesOrigin → {0,0,0}, Boxed → False],
```

a seguir teclamos *shift* e *enter*.

**Figura 13.** Outra formação de uma representação gráfica no *Mathematica*.

```
Plot3D[x^3 + 3 x y^2 - 15 x - 12 y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},  
AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, AxesOrigin → {0, 0, 0}, Boxed → False]
```



**Fonte:** Construção da autora.

Podemos observar outra formação da representação gráfica da mesma função de duas variáveis, mas o conteúdo da representação é o mesmo, pois nos dois casos estamos representando o conjunto de todos os pontos  $(x,y,z)$  tal que  $z=f(x,y)$  e  $(x,y)$  está no domínio de  $f$ .

Segundo Duval (2011), com quem concordamos, o menu de comandos de cada software permite mobilizar atividades cognitivas como, por exemplo, o conhecimento de termos que designam os objetos matemáticos.

O **tratamento** de uma representação semiótica é a transformação de uma representação (inicial) em outra representação (terminal) em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, que fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Para Duval (1995, p.39, tradução nossa), “um tratamento é uma transformação da representação interna em um registro de representação ou em um sistema”. Por exemplo, o cálculo é um tratamento interno no registro de uma escritura simbólica de algarismos e de letras, e a inferência é uma forma de tratamento em língua natural. Duval (1995) ainda explica que há regras de tratamento próprio a cada registro, e que sua natureza e seu número variam consideravelmente de um registro para outro.

Por exemplo, o registro algébrico do cálculo diferencial de funções de duas variáveis oferece o seguinte tratamento para encontrar o valor do Hessiano da função representada algebraicamente por  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$  no ponto de coordenadas  $(0,0)$ ,  $f_x = 4x^3 - 4y$ ,  $f_y = 4y^3 - 4x$ ,  $f_{xx} = 12x^2$ ,  $f_{xy} = -4$ ,  $f_{yy} = 12y^2$ ,  $H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 144x_0^2y_0^2 - 16 = -16$ .

Ou seja, esse tratamento utiliza um sistema de escritura das derivadas parciais de primeira ordem e de segunda ordem, e as regras operacionais intrínsecas à noção de derivadas parciais.

Segundo Duval (2011), quando afirma que o computador constitui um modo fenomenológico de produção de representações semióticas, mostra que está fundamentada na aceleração de tratamentos.

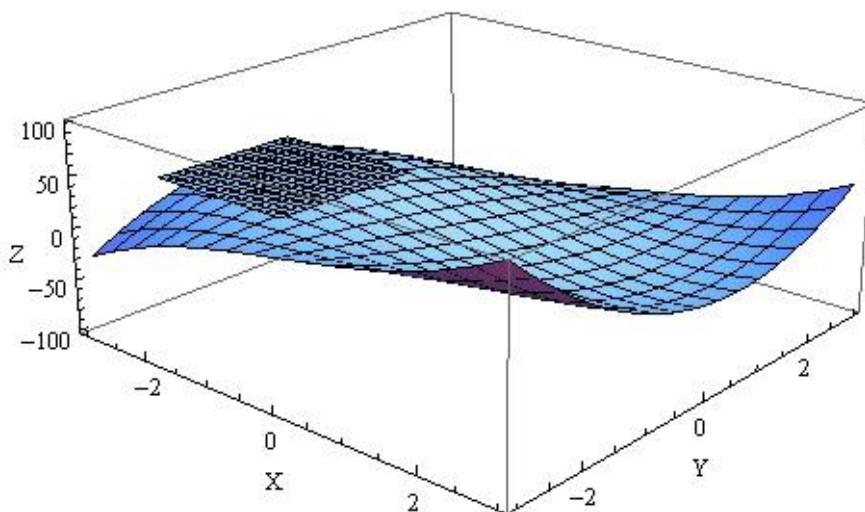
Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com a potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos,

imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 137).

Além disso, o autor sustenta que “a novidade fenomenológica se deve ao fato de que as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais” (DUVAL, 2011, p. 137). Para o autor, o aspecto dinâmico de deslocá-las, fazendo-as rodar, ou estendê-las a partir de um ponto, permite a função de simulação.

Para explicar o tratamento de uma representação gráfica de uma função de duas variáveis com a utilização do software *Mathematica*, temos que considerar o contato do sujeito com uma máquina. O tratamento é feito por meio do menu de comandos e/ou deslocando manualmente o *mouse*. Por exemplo, para transformar a representação gráfica, mostrada na Figura 12, em outra representação, conforme Figura 14, escrevemos o comando *ContourPlot3D[z==28, {x,-3,-1}, {y,-2,0}, {z,0,29}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]*, a seguir, digitamos o comando *Show* para mostrar os dois gráficos juntos, e teclamos *shift* e *enter*.

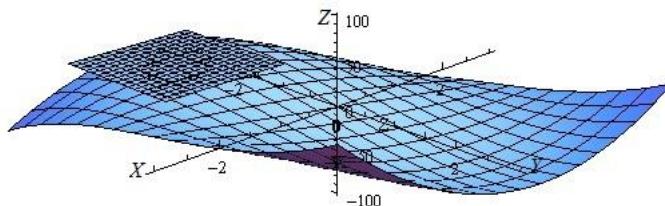
**Figura 14.** Tratamento em uma representação gráfica.



**Fonte:** Construção da autora.

Esse mesmo tratamento poderia ser realizado para transformar a representação gráfica, Figura 13, na representação gráfica na Figura 15. Para isso, digitamos os mesmos comandos, ou seja, *ContourPlot3D[z==28, {x,-3,-1}, {y,-2,0}, {z,0,29}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]* e o comando *Show*, seguido de *shift* e *enter*.

**Figura 15.** Tratamento de uma outra representação gráfica.



**Fonte:** Construção da autora.

Assim, observamos que o tratamento é o mesmo dentro das duas diferentes representações gráficas, geradas pelo *Mathematica*, de uma mesma função de duas variáveis.

Duval (1995) afirma que pela forma de tratamento, os registros são caracterizados como: multifuncionais (tratamentos não algoritmizáveis) e monofuncionais (tratamentos são algoritmizáveis), e suas formas em discursiva (língua natural, sistema de escritas) e não discursiva (figuras geométricas, gráficos cartesianos).

A **conversão** de uma representação semiótica é a transformação de um objeto dado em um registro, em uma representação do mesmo objeto e em um outro registro. A conversão é, então, segundo Duval (1995), uma transformação externa em relação ao registro de representação de partida.

Por exemplo no Quadro 1 evidenciamos representações do mesmo objeto, o Hessiano de uma função de duas variáveis, em três registros diferentes: de língua natural, algébrico e dos determinantes.

**Quadro 1.** Representações de um mesmo objeto em três registros diferentes.

O Hessiano de uma função de duas variáveis em um ponto crítico.	$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$	$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$
---	---	--

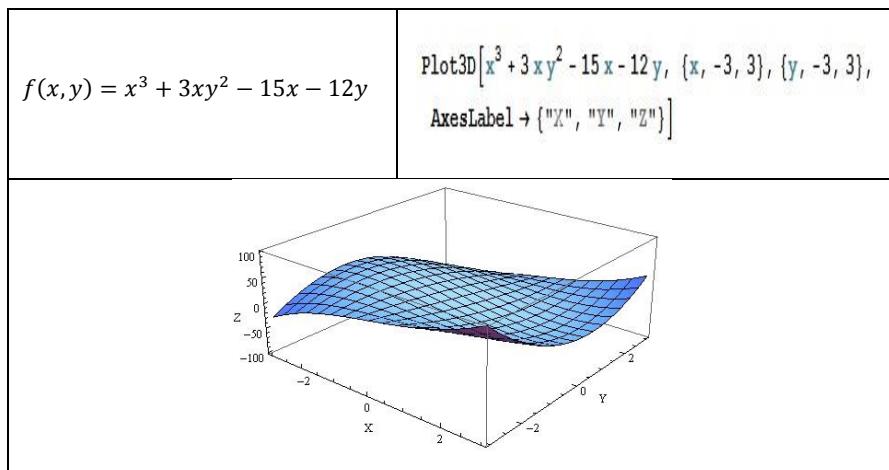
**Fonte:** Próprio da autora.

Percebemos que a operação de conversão requer que entendamos a diferença entre o conteúdo de uma representação e aquilo que representa. “Sem a

percepção dessa diferença, a atividade de conversão torna-se impossível ou incompreensível" (DUVAL, 1995, p. 41, tradução nossa).

Na sequência, explicitamos uma conversão do registro algébrico de uma função de duas variáveis para o registro gráfico, utilizando o *Mathematica*. Começamos, conforme Quadro 2, considerando uma expressão algébrica de uma função de duas variáveis, por exemplo,  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ , em seguida, por meio de uma lista de termos próprios do sistema semiótico do *Mathematica*, digitamos o respectivo comando, ou seja, `Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]`, logo tecemos *shift* e *enter* para mostrar na tela do computador a representação gráfica dessa função de duas variáveis.

**Quadro 2.** Conversão do registro algébrico para o registro gráfico.



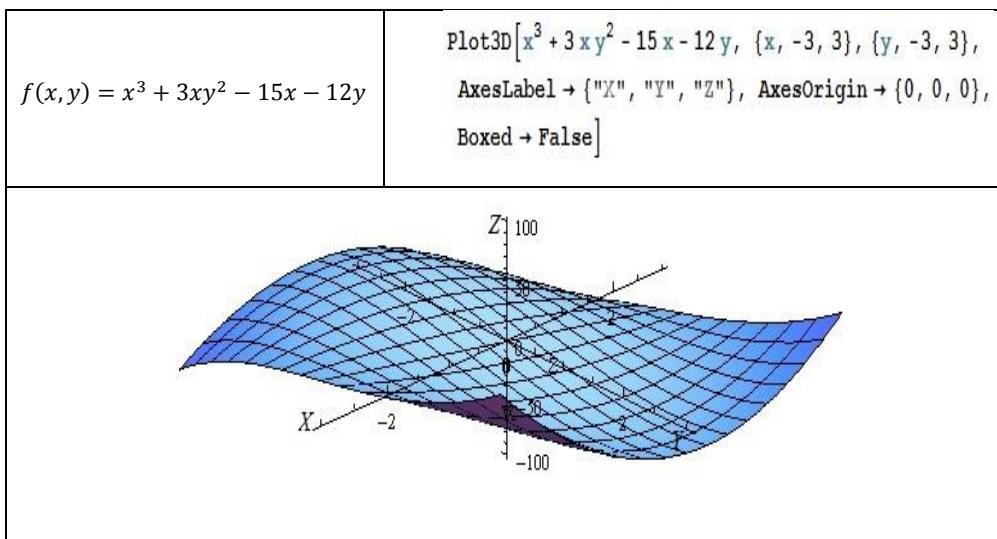
**Fonte:** Próprio da autora.

Nessa etapa em que representamos uma função de duas variáveis em duas representações diferentes: a algébrica e a representação própria do *Mathematica*, mobilizamos atividades cognitivas, conhecendo os termos matemáticos em relação à escolha dos termos do comando. Concordamos com Duval (2011, p. 138) quando afirma que "um menu de comandos privilegia um registro de representação para obter a representação correspondente em outro registro".

No entanto, como afirmamos anteriormente (ver p. 35), o *Mathematica* gera outra representação gráfica, mas com o mesmo conteúdo da representação. Assim, a conversão considera a expressão algébrica da mesma função de duas variáveis, como anteriormente. A seguir, por meio de uma lista de termos próprios do sistema semiótico do *Mathematica*, digitamos o mesmo comando com mais duas opções,

ou seja,  $\text{Plot3D}[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}, \text{AxesOrigin} \rightarrow \{0, 0, 0\}, \text{Boxes} \rightarrow \text{False}]$ , em seguida teclamos *shift* e *enter* para mostrar na tela do computador outra representação gráfica dessa função de duas variáveis.

**Quadro 3.** Conversão do registro algébrico para outro registro gráfico.



**Fonte:** Próprio da autora.

Visto que as duas diferentes representações gráficas realizadas com a utilização do *Mathematica* permitem as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose, denominamo-las de Registros Gráficos representados no CAS *Mathematica*. O registro representado dentro de uma caixa definida pelos eixos coordenados será chamado de **Registro Gráfico CAS\_MATH**, enquanto o outro registro representado de maneira que os eixos coordenados são orientados positivamente será chamado de **Registro Gráfico CAS**.

Os dois registros representam o sistema de coordenadas retangulares no espaço com a regra de mão direita. Isto é, quando os dedos da mão direita são fechados de tal modo que se curvam do eixo  $x$  positivo em direção do eixo  $y$  positivo, então o polegar aponta na direção do eixo  $z$  positivo.

Duval (1993) ressalta que a conversão não deve ser confundida com a codificação, pois:

refere-se a “transcrição” de uma representação em um outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente. Esta transcrição é feita “em meio de uma série de substituições” aplicando regras de correspondência ou utilizando listas de substituições anteriormente estabelecidas. Estas substituições são

realizadas diretamente sobre os significantes que compõem a representação, sem considerar a organização da representação nem o que ela representa. (DUVAL, 1993, p. 43, tradução nossa)

Para Duval (1988), a codificação não é suficiente para construir uma representação gráfica. Neste sentido, afirma que a leitura das representações gráficas, particularmente as representações de uma função de primeiro grau, requer a descriminação das variáveis visuais pertinentes e a percepção das variações correspondentes da escritura algébrica. As variáveis visuais são as unidades significante elementares do registro gráfico. Essa leitura é uma abordagem de interpretação global que supõe uma atitude contrária ao uso das regras de codificação para construir representações gráficas fundamentadas na associação entre um ponto e um par ordenado de números.

O autor distingue três tipos de abordagem que levam em conta diferentes aspectos do gráfico: a *abordagem ponto a ponto*, a *abordagem de extensão* do traçado efetuado e a *abordagem de interpretação global* de propriedades figurais. Duval (1988) afirma que essa última abordagem é deixada de lado no ensino, uma vez que depende de uma análise semiótica visual e algébrica.

Para o autor, as representações gráficas são definidas pela abordagem ponto a ponto, o que permite identificar um ponto por um par de números e vice-versa. Esta abordagem funciona bem quando se quer traçar o gráfico de uma função de primeiro grau ou o gráfico de uma função de segundo grau, mas limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano cartesiano.

A segunda abordagem, segundo Duval (1988), corresponde às atividades de interpolação e extrapolação, as quais se apoiam no que se denominou de aspectos produtores e redutores das representações gráficas. Esta abordagem de extensão mantida é puramente mental, pois não produz traços complementares e explicativos como uma mudança local na graduação dos eixos para ampliar uma parte do traçado. Nesta abordagem, como na anterior, consideram-se os dados do traçado e não as variáveis visuais relativas da representação gráfica. Da mesma forma, o tratamento é orientado para encontrar valores específicos sem se prender à forma da expressão algébrica.

A última abordagem corresponde ao tratamento global e qualitativo das propriedades dos gráficos. Segundo o autor, o conjunto traço/eixo forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na escrita da expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação do gráfico.

É importante então, ver todas as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica. “Com esta abordagem não estamos mais na presença da associação ‘um ponto – um par de números’, mas na associação ‘variável visual de representação – unidade significante da expressão algébrica’”, (DUVAL, 1988, p. 237, tradução nossa). Para o autor, a prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global, porque tira a ênfase das variáveis visuais.

Assim, para Duval (1995), a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que se tende a crer. É necessário

[...] analisar como pode ser efetuado o procedimento de correspondência sobre o qual repousa toda conversão de representação. A correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes pode estar estabelecida localmente por uma correspondência associativa das unidades significantes elementares constitutivas de cada um dos dois registros (DUVAL, 1995, p. 45, tradução nossa).

Nesse sentido, Duval (1995, p. 49) enuncia que para ser congruente, uma conversão entre registros de representação semiótica deve satisfazer três critérios: O primeiro critério é a possibilidade de uma correspondência “semântica” dos elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar. Considerar-se como unidade significante elementar toda unidade que se destaca do “léxico” de um registro.

O segundo critério é a univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada, e o terceiro critério é relativo à organização das unidades significantes. As

organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações.

No Quadro 4, por exemplo, mostra-se uma conversão congruente do registro em língua natural para o registro simbólico, do gráfico de uma função de duas variáveis reais. É congruente porque podemos verificar que há correspondência semântica, pois há uma unidade significante em língua natural para cada unidade significante no registro simbólico.

Constatamos ainda que há univocidade semântica. Cada unidade significante (registro de partida) relaciona-se com um único símbolo no registro de chegada. A conversão atende também ao terceiro critério de congruência, dado que a ordem da sentença, em língua natural, corresponde à ordem dos símbolos utilizados no registro simbólico.

**Quadro 4.** Exemplo de conversão congruente.

O conjunto de todas as ternas ordenadas de números reais em que a função associa a cada par ordenado de números reais um único número real, e esse par ordenado está no domínio de uma função de duas variáveis.	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D\}$
--	--

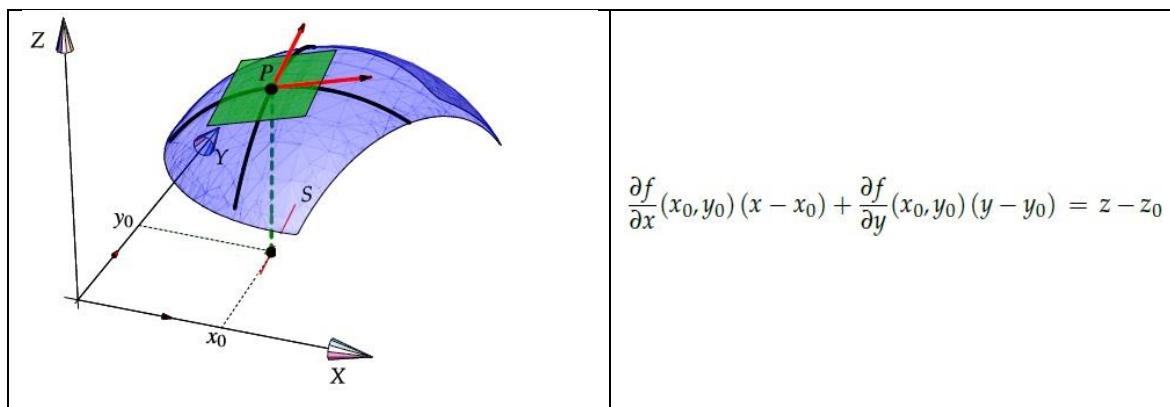
**Fonte:** Próprio da autora.

Desse modo, por congruência, definimos o grau de correspondência semântica, de univocidade semântica terminal e de organização sintática das unidades significantes entre um registro de representação de partida e um registro de representação de chegada, em um processo de conversão. Segundo Duval (1995), quando um desses critérios não for satisfeito, as representações são não congruentes. Além disso, o autor afirma que uma análise de congruência exige a discriminação das unidades significativas próprias a cada registro de representação.

Por exemplo, na atividade de conversão entre a representação gráfica de um plano tangente a uma superfície no ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  e sua respectiva representação algébrica, conforme mostra o Quadro 5, é a interpretação global que nos permite associar as variáveis visuais próprias do gráfico: as coordenadas

$(x_0, y_0, z_0)$  do ponto na superfície, representado por P, a curva de interseção da superfície com o plano  $x=x_0$ , que passa pelo ponto representado por P, a curva de interseção da superfície com o plano  $y=y_0$ , que passa por esse mesmo ponto, as retas tangentes (o vetor tangente é seu vetor direção) a cada curva em P, com as unidades significantes da expressão algébrica, isto é, a derivada parcial de uma função de duas variáveis em direção de  $x$ , a derivada parcial de uma função de duas variáveis em direção de  $y$ , os símbolos de variáveis ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ), o símbolos de operações (+, -, =), o símbolo das coordenadas do ponto ( $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ ).

**Quadro 5.** Conversão não congruente do registro gráfico para o registro algébrico.



**Fonte:** Mora, 2012, p. 122.

Nesta conversão não existe uma correspondência semântica dos elementos significantes de cada registro, pois não há nenhuma variável visual (registro de partida) para cada unidade significante no registro algébrico, porém, não há univocidades semântica, sendo possível verificar que as variáveis visuais não correspondem à sintaxe do registro algébrico.

Notamos, então, que é necessário, para desenvolver a atividade cognitiva requerida pelo Cálculo diferencial em duas variáveis reais, que o aluno, no momento de resolver um problema, transite pelos diversos registros de representação semiótica: o registro em língua natural, o registro algébrico, o registro gráfico e/ou o registro gráfico CAS. Neste último registro, é muito importante, como mencionamos anteriormente (ver p. 45), que o aluno comprehenda os comandos básicos do *Mathematica*, além de conhecer as noções matemáticas envolvidas para uma representação adequada.

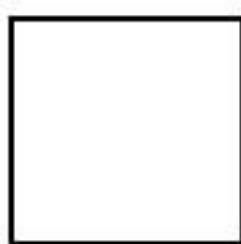
É importante, para uma leitura dos registros gráficos, que o aluno articule os valores visuais do registro gráfico e/ou registro gráfico CAS com os valores significantes dos registros algébricos empregados em definições e com os teoremas, pois é nesse nível de correspondência, como afirma Duval (2004), que se pode efetuar a coordenação de diferentes registros de representação.

Visualizar um gráfico requer a interpretação de uma representação gráfica. Como afirma o autor, para essa interpretação, é importante a descriminação das variáveis visuais, expondo essa representação a todas as variações possíveis, com a condição de que as formadas desse modo ainda continuem tendo sentido. Assim, buscamos em Duval (1994) a noção de apreensão de uma figura geométrica para compreender essas variações possíveis no registro gráfico.

Existem quatro formas de apreender uma figura: a perceptiva, a discursiva, a sequencial e a operatória. A *apreensão perceptiva* é aquela que permite identificar ou reconhecer uma forma ou um objeto matemático, seja no plano ou no espaço. Como afirma Duval (1994, p. 124, tradução nossa), “a apreensão perceptiva tem a função epistemológica de identificação dos objetos em duas ou três dimensões. Isto é feito por processos cognitivos efetuados automaticamente e, assim, de forma inconsciente”.

Por exemplo, temos o seguinte objeto matemático representado no plano, conforme mostra a Figura 16. A apreensão perceptiva da figura permite identificar a representação de um quadrado.

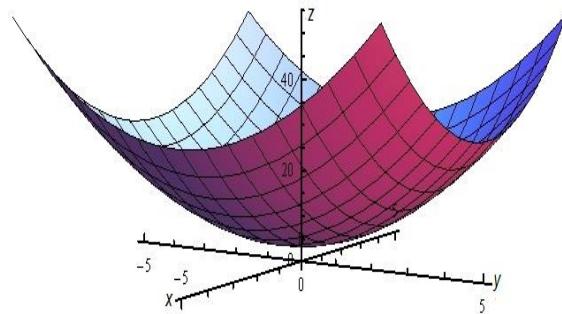
**Figura 16.** Apreensão perceptiva de uma figura.



**Fonte:** Própria da autora.

No Cálculo Diferencial de duas variáveis, por exemplo, a apreensão perceptiva do gráfico, mostrado na Figura 17, permite identificar um paraboloide.

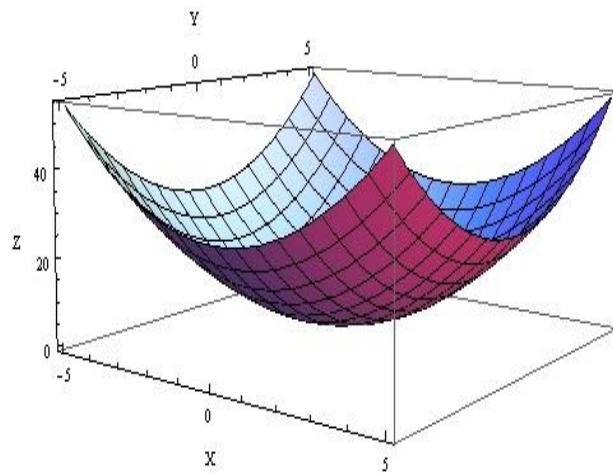
**Figura 17.** Apreensão perceptiva de um registro gráfico.



**Fonte:** Construção da autora.

Do ponto de vista cognitivo, essa apreensão requer mais do sujeito do que a apreensão perceptiva do quadrado, pois no gráfico de uma função de duas variáveis existe o tipo de variável (dependente e independente), os valores das variáveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e uma leitura dos eixos. Isso nos permite afirmar que a apreensão perceptiva do registro gráfico é mais complexa do que na geometria. Esta afirmação é mais evidente quando a apreensão perceptiva do gráfico, mostrado na Figura 18, permite identificar as mesmas características anteriormente mencionadas, porque, como já explicitamos (ver p. 30), a localização do valor mínimo e o valor de mínimo requer mais recursos cognitivos do sujeito do que a segunda (apreensão do registro gráfico mostrado na Figura 17).

**Figura 18.** Paraboloide no registro gráfico *CAS\_MATH*.

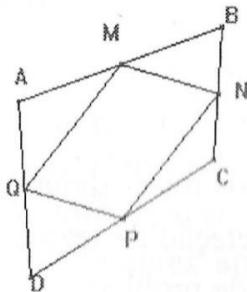


**Fonte:** Construção da autora.

Para os outros tipos de apreensões, fizemos a mesma afirmação: no cálculo diferencial de duas variáveis são mais complexas, em particular, quando se trata do registro gráfico *CAS\_MATH*.

A *apreensão discursiva* de uma figura, para Duval (1994), explicita outras propriedades matemáticas de uma figura, como aquelas indicadas por uma legenda ou pelas hipóteses. Essas explicitações são de natureza dedutiva, e sua função epistemológica é de demonstração, conforme Figura 19.

**Figura 19.** Apreensão discursiva de uma figura.



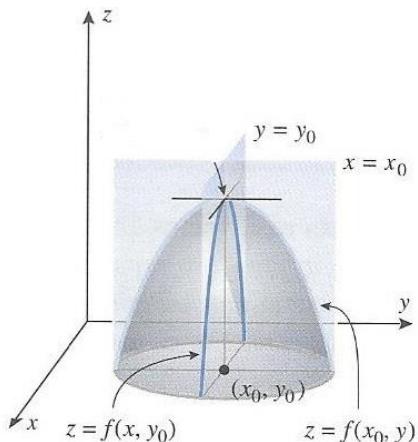
- ABCD quadrilátero convexo;
- M ponto médio de  $\overline{AB}$ ;
- N ponto médio de  $\overline{BC}$ ;
- P ponto médio de  $\overline{CD}$ ;
- Q ponto médio de  $\overline{AD}$ .

O quadrilátero MNPQ é um paralelogramo.

**Fonte:** Almouloud, 2003, p. 129.

No Cálculo diferencial de duas variáveis, podemos estabelecer como exemplo que a apreensão discursiva do gráfico, mostrado na Figura 20, seria a explicitação dos elementos do gráfico, considerando a semântica das propriedades do objeto.

**Figura 20.** Apreensão discursiva do registro gráfico.



Suponha que  $f(x, y)$  tenha um máximo relativo em  $(x_0, y_0)$  e que as derivadas parciais de  $f$  existem em  $(x_0, y_0)$ , as curvas da superfície representada por  $z = f(x, y)$  sobre os planos  $x = x_0$  e  $y = y_0$  tem retas tangentes horizontais em  $(x_0, y_0)$ , logo  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ .

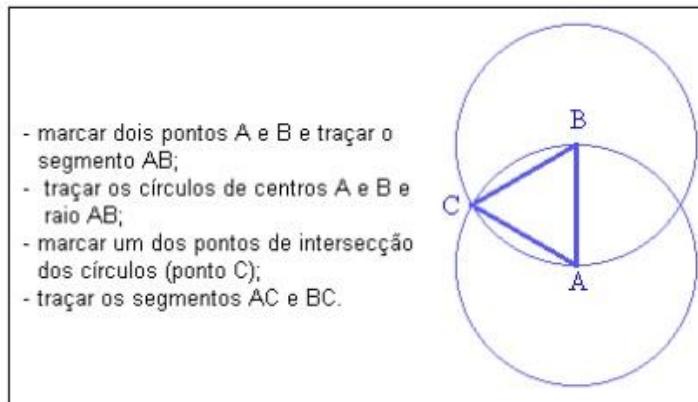
**Fonte:** Anton, 2005, p. 998.

A *apreensão sequencial*, segundo Duval (1994), trata-se da ordem de construção de uma figura. Essa ordem não depende só das propriedades matemáticas da figura, mas também das ferramentas técnicas utilizadas (a régua, o compasso e os comandos do menu de um *software*, por exemplo). Essa

apreensão é requerida sempre que se deseja construir uma figura ou descrever a sua construção.

A apreensão sequencial de um triângulo equilátero, por exemplo, seria a sequência de passos para a construção deste triângulo.

**Figura 21.** Apreensão sequencial de um triângulo equilátero.



**Fonte:** Vieira, 2008, p. 35

No Cálculo diferencial de duas variáveis, podemos estabelecer como exemplo que a apreensão sequencial do gráfico para localizar o valor máximo de uma função de duas variáveis reais no software *Mathematica*, o que seria a sequência de passos, conforme mostra o Quadro 6, para localizar esse valor no gráfico em que a superfície tem um plano tangente horizontal.

**Quadro 6.** Apreensão sequencial do máximo local de uma função de duas variáveis.

Passo 1: Representar graficamente a função de duas variáveis, ou seja, escrever no caderno do *Mathematica*, de maneira sequencial, o comando:

$S = \text{Plot3D}[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}]$ .

Passo 2: Representar graficamente um plano horizontal, isto é, escrever no caderno do *Mathematica*, de maneira sequencial, o comando:

$P = \text{ContourPlot3D}[z == 10, \{x, -4, -1\}, \{y, -4, 0\}, \{z, 8, 15\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}]$ .

Passo 3: Mostrar um corte horizontal, ou seja, escrever o comando  $\text{Show}[S, P]$ .

Passo 4: Representar graficamente outro plano horizontal, isto é, escrever no caderno do *Mathematica*, de maneira sequencial, o comando:

$P1 = \text{ContourPlot3D}[z == 20, \{x, -4, -1\}, \{y, -4, 0\}, \{z, 18, 25\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}]$ .

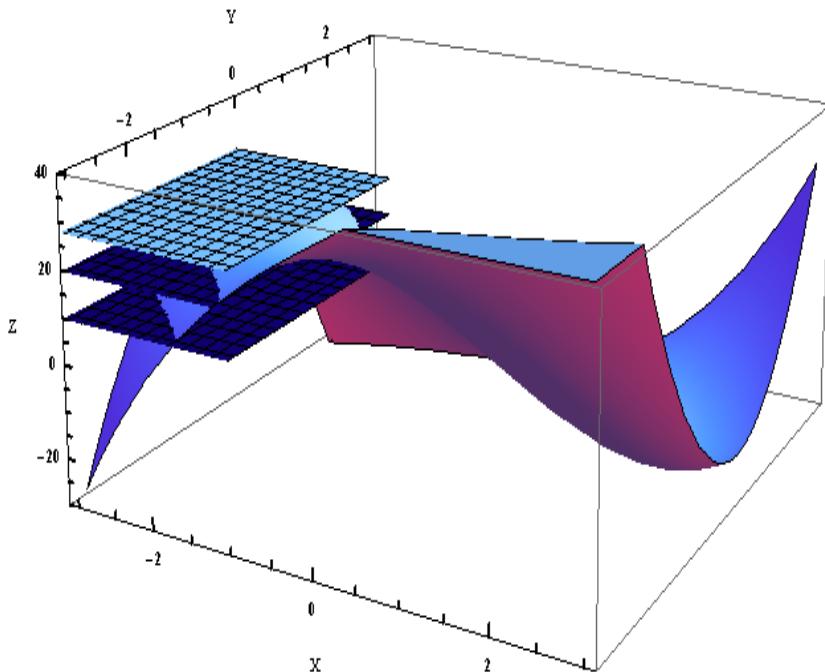
Passo 5: Mostrar outro corte horizontal, ou seja, escrever o comando  $\text{Show}[S, P, P1]$ .

Passo 6: Representar graficamente outro plano horizontal, isto é, escrever no caderno do *Mathematica*, de maneira sequencial, o comando:

$\text{ContourPlot3D}[z == 28, \{x, -4, -1\}, \{y, -4, 0\}, \{z, 25, 30\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"X"}, \text{"Y"}, \text{"Z"}\}]$ .

Passo 7: Mostrar o terceiro corte horizontal, ou seja, escrever o comando `Show[S, P, P1, P2]`.

Passo 8: O plano horizontal representado por  $z=28$  é tangente à superfície em um ponto. O valor  $z=28$  é o possível valor máximo da função de duas variáveis.



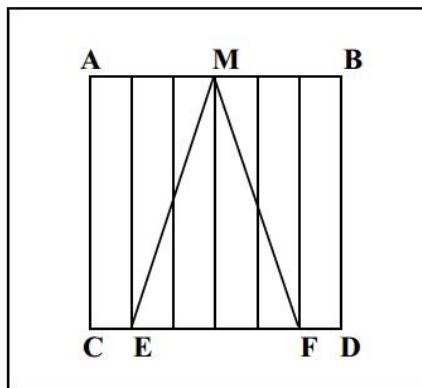
**Fonte:** Construção da autora.

Segundo Duval (1994), a *apreensão operatória* corresponde à transformação e/ou modificação de uma figura inicial em outras figuras possíveis e na reorganização perceptiva dessas modificações para mostrar a ideia de uma solução de uma determinada situação problemática. Sua função é de exploração heurística, porque frequentemente a figura geométrica é transformada em outras para mostrar uma ideia da solução de um problema ou de uma demonstração.

Duval (1993) distingue três tipos de modificações, essas modificações podem ser da mesma forma e orientação, mas com variação de grandeza (modificações óticas), da mesma grandeza e forma, mas com variação de orientação: rotação, translação (modificações posicionais), e de decomposição e recomposição (modificações mereológicas), procurando reciprocidade entre o desenho e a representação mental.

Por exemplo: a modificação mereológicas da figura geométrica, mostrada na Figura 22, em que se destaca a operação de reconfiguração (AMEC, MEF, MBFD) do quadrado ABCD.

**Figura 22.** Exemplo de modificação mereológica do quadrado ABCD.

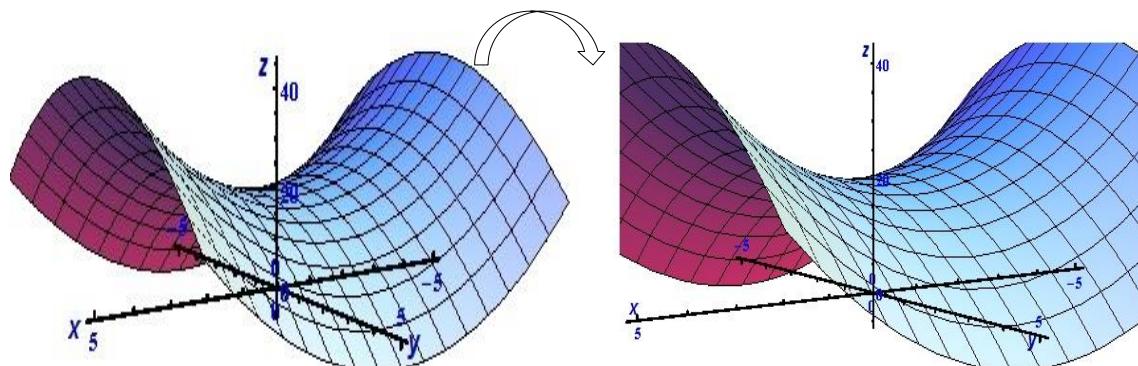


**Fonte:** Duval, 1988, p. 65.

No registro gráfico, distinguimos três modificações:

**Ótica** – quando, pressionando a tecla *Ctrl* e clicando o botão esquerdo do mouse, deslocamos fisicamente o mouse e manipulamos o gráfico de tal maneira que o ampliamos ou o reduzimos, ou seja, há variação de grandeza e constância de forma. Por exemplo, conforme Figura 23, temos a ampliação do gráfico.

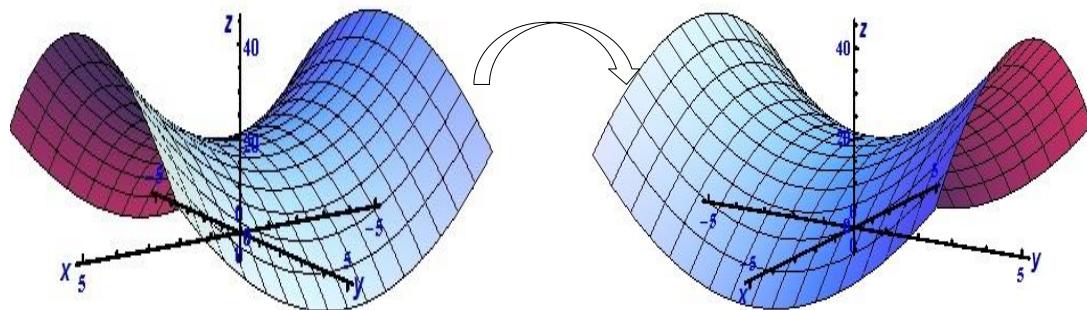
**Figura 23.** Exemplo de modificação ótica.



**Fonte:** Construção da autora.

**Posicional** – quando, por meio de deslocações físicas do mouse, podemos rotar o gráfico ao redor do eixo *z*, rotar ao redor do plano *xy* e trasladá-lo, ou seja, mantendo a mesma grandeza e forma, mas variando a posição. Por exemplo, a Figura 24 mostra a rotação do gráfico ao redor do eixo *z*.

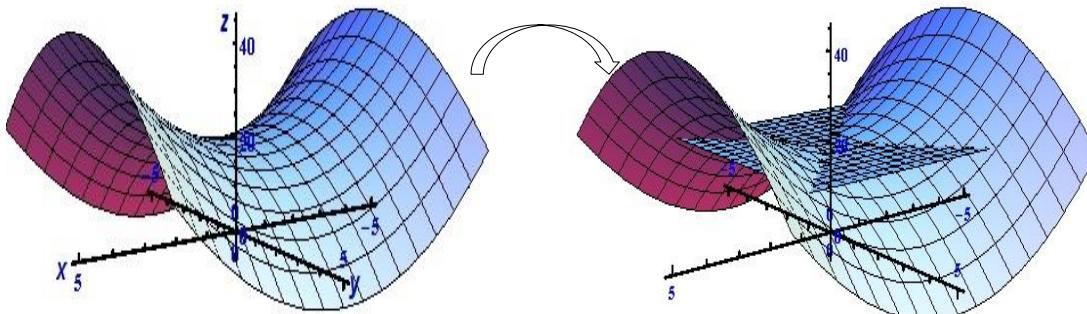
**Figura 24.** Exemplo de modificação posicional.



**Fonte:** Construção da autora.

**Mereológica** – quando, por meio de dois comandos do *software*, geramos os cortes nos planos horizontais  $z=k$ , mostrando onde o gráfico da função de duas variáveis reais tem altura  $k$ . Por exemplo, conforme mostra a Figura 25, temos o corte do gráfico no plano horizontal  $z=0$ . Isto é, escrevemos o comando `ContourPlot3D[{z == 20}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, 0, 25}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]` e a seguir o comando `Show` para gerar os cortes no gráfico.

**Figura 25.** Exemplo de modificação mereológica.



**Fonte:** Construção da autora.

Estamos interessados em estudar as atividades cognitivas que o aluno mobiliza para desenvolver a visualização dos valores máximo e mínimo de uma função de duas variáveis reais, visto que “ver” um gráfico não é suficiente para compreender o que realmente está representado, não permitindo um tratamento global e qualitativo das propriedades do gráfico.

### 1.4.2 Visualização

Segundo Duval (2004), as representações gráficas cartesianas têm um uso relativamente extensivo. São encontrados não somente nos manuais ou nos artigos científicos, mas também nos magazines. Esses gráficos podem ser vistos de duas maneiras: uma pontual, que dá a indicação de um valor em um momento dado, e outra icônica, que evoca o alto e o baixo, as subidas suaves ou abruptas a partir do nível de base. No entanto,

nenhuma das duas maneiras de ver correspondem à maneira útil de ver desde um ponto de vista matemático, ou seja, à maneira de ver que permite visualizar uma relação entre dois conjuntos de valores. Em matemática, os gráficos cartesianos são utilizados sempre em articulação com outro registro de representação e, ademais, devem permitir tratamentos qualitativos próprios a este modo de visualização [...] (DUVAL, 2004, p. 66, tradução nossa).

O autor afirma que, em cada uma destas três maneiras de ver, podemos distinguir o que se observa no gráfico cartesiano e o que os aspectos observados permitem identificar. Um dos problemas específicos da aprendizagem é fazer passar os alunos de uma apreensão local e icônica a uma apreensão global qualitativa. Somente com este tipo de apreensão é que se pode fazer coordenação com o registro da escritura algébrica de relação, podendo os gráficos cartesianos funcionar como uma visualização.

Para Duval (1999), a visualização é uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, ao contrário da visão que fornece um acesso direto ao objeto. Salienta que a visualização baseia-se na produção de uma representação semiótica, visto que mostra relações, ou melhor, organização de relações entre unidades significantes de representação. Essas unidades significantes próprias dos gráficos são as variáveis visuais e podem ser, por exemplo, a inclinação de um traço, interseção com os eixos, etc.

O autor sublinha que, para construir um gráfico, requer-se somente calcular algumas coordenadas e traçar uma reta e uma curva: sempre partindo das tabelas dos dados, ou das equações. Notamos que esse tratamento funciona bem nos casos mais simples, como o traçado de funções de uma variável, particularmente, função afim e função quadrática. Mas, o autor afirma que a visualização requer a

mudança oposta, ou seja, deve partir do gráfico para alguns valores visuais que apontam para as características do fenômeno representado ou que corresponde a um tipo de equação e a alguns valores característicos na equação. É aqui que encontramos o procedimento fundamental de interpretação global e qualitativo.

Para Duval (1988), a discriminação das unidades visuais de uma representação gráfica não é evidente, mas sim a discriminação das unidades significantes de uma expressão algébrica. Têm-se: os símbolos relacionais ( $<$ ,  $>$ ,  $=$ , ...); de operações ou de sinais (+, -); de variável; de expoente, de coeficiente ou de constante. O autor distingue: duas variáveis visuais gerais e três variáveis particulares relativas ao caso em que o gráfico é de uma função afim ou quadrática.

As duas variáveis gerais são: implantação de uma tarefa, isto é, o que se destaca como figura, um traço ou uma zona; a forma de uma tarefa, ou seja, o traçado que delimita ou não uma zona é uma reta ou uma curva. Se for curva, é fechada ou aberta.

As três variáveis particulares, como vemos no Quadro 7, são: o sentido da inclinação de um traço; os ângulos do traço com os eixos, e a posição do traço em relação à origem do eixo vertical. Trata-se das variáveis visuais e das unidades simbólicas correspondentes para a função linear afim representada por  $y = ax + b$ . Segundo Duval (1988), o que importa nessa expressão é o coeficiente  $a$  e a constante  $b$ .

**Quadro 7.** Variáveis visuais e unidades simbólicas para  $y=ax+b$  no plano cartesiano.

Variáveis visuais	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido de inclinação	$a > 0$ $a < 0$
Ângulo com os eixos	$a = 1$ $a < 1$ $a > 1$
Posição sobre o eixo	$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$

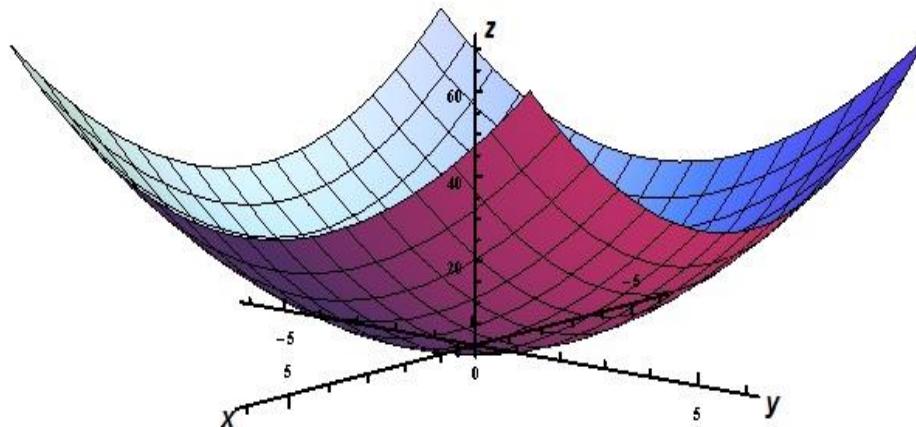
**Fonte:** Adaptado de Duval (1988, p. 240).

Os exemplos considerados pelo autor para explicar esses procedimentos estão particularmente vinculados aos casos mais simples de funções de uma variável. Contudo, os problemas que nos interessam, referentes ao valor máximo e mínimo de uma função de duas variáveis, revelam a seguinte questão, dado que o autor sublinha a importância da discriminação de variáveis visuais na interpretação das representações gráficas: como descriminar as variáveis visuais na representação gráfica de uma função de duas variáveis?

Prolongando, para as funções de duas variáveis, a ideia de variáveis visuais consideradas por Duval (1988), distinguimos:

- Duas variáveis visuais gerais relativas ao caso em que o gráfico é uma superfície:
  - A implantação da tarefa, ou seja, o que se destaca como representação gráfica no espaço: a curva e a superfície cuja representação algébrica é conhecida ou não. Por exemplo, na Figura 26, o que se destaca é uma superfície conhecida chamada paraboloide circular.

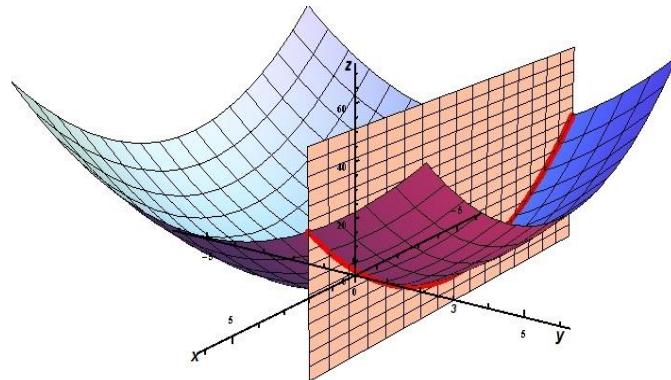
**Figura 26.** Exemplo de implantação da tarefa.



**Fonte:** Construção da autora.

- A forma da tarefa: a curva traçada correspondente aos cortes verticais, são retas ou curvas. Se corresponder aos cortes horizontais, são curvas fechadas ou abertas. A curvatura da superfície (se curva para baixo ou para cima). Por exemplo, a Figura 27 mostra-nos o traço da superfície no plano representado por  $y=3$ , ou seja, um corte vertical.

**Figura 27.** Exemplo de forma de tarefa.

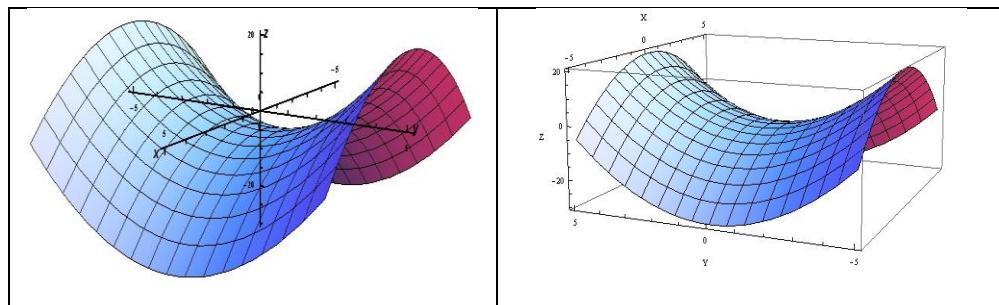


**Fonte:** Construção da autora.

– Variáveis específicas:

- Posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente e traçada dentro de uma caixa definida pelos eixos coordenados, respectivamente, conforme Quadro 8;

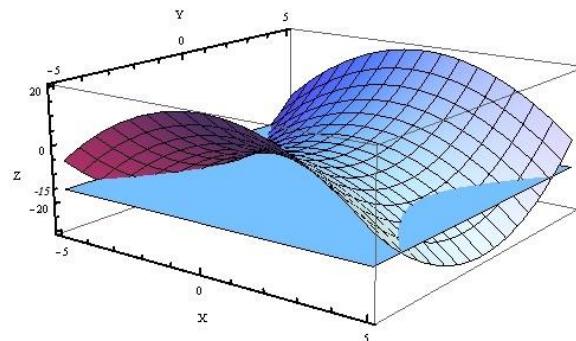
**Quadro 8.** Posições de uma superfície.



**Fonte:** Construção da autora.

- Relação dos pontos da superfície com respeito ao eixo  $z$ . Por exemplo, conforme Figura 28 em que se mostra o conjunto de todos os pontos da superfície com imagem  $z=-15$ ;

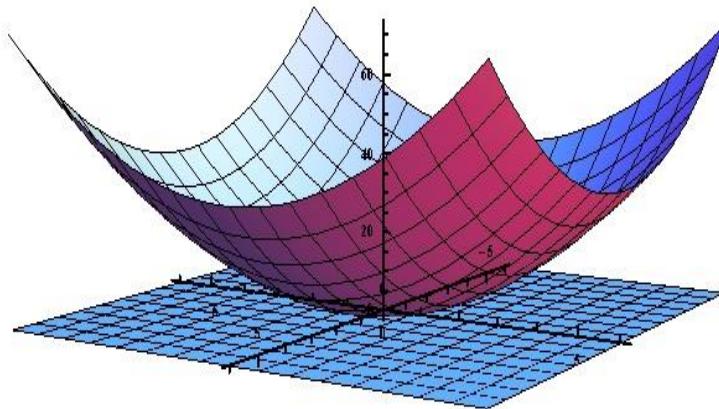
**Figura 28.** Exemplo da relação dos pontos da superfície com o eixo  $z$ .



**Fonte:** Construção da autora.

- A posição da superfície em relação ao plano perpendicular ao eixo  $z$  (está sobre o plano, debaixo de ou atravessa). Por exemplo, conforme mostra a figura, a superfície está completamente sobre o plano  $z=0$ ;

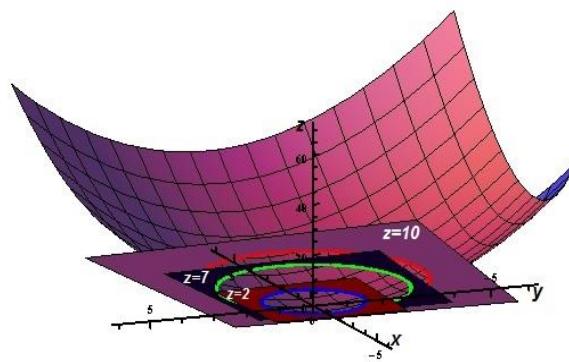
**Figura 29.** Exemplo da posição do paraboloide em relação ao plano  $z=0$ .



**Fonte:** Construção da autora.

- Variação do valor de  $z$  em relação aos valores de  $x$  e  $y$  da curva de interseção da superfície com o plano perpendicular ao eixo  $z$ . Por exemplo, conforme Figura 30, mostramos os traços nos planos  $z=k$  e observamos como o valor de  $z$  decresce até que o traço seja um ponto.

**Figura 30.** Exemplo da variação de  $z$  até atingir o valor mínimo.



**Fonte:** Construção da autora

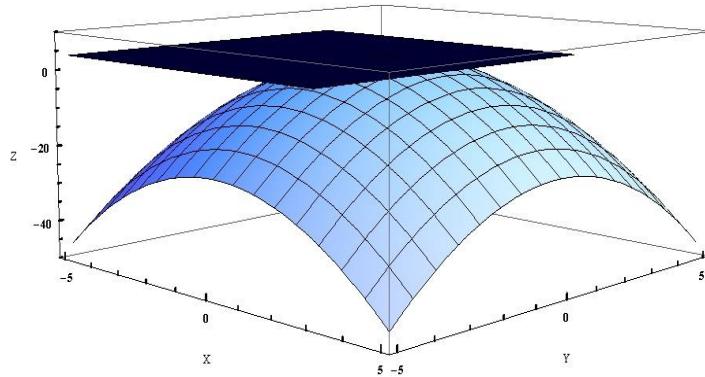
Essas variáveis visuais desempenham um papel importante na interpretação das superfícies, bem como na conversão entre registros de representação e na coordenação dos gráficos, com as diferentes expressões algébricas presentes nos diferentes teoremas e definições apresentadas nas práticas do cálculo diferencial de funções de duas variáveis. Por exemplo, o teorema:

Se  $f$  tiver um extremo relativo em um ponto  $(x_0, y_0)$  e se as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existirem nesse ponto, então  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ .

Neste registro está presente a expressão algébrica  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ . Identificamos, na sequência, as variáveis significantes dessa expressão algébrica: o símbolo relacional ( $=$ ); o símbolo da função de duas variáveis ( $f$ ), a derivada parcial de uma função de duas variáveis em direção de  $x$  ( $f_x$ ), em direção de  $y$  ( $f_y$ ), o símbolo da abcissa do ponto ( $x_0$ ), o símbolo da ordenada do ponto ( $y_0$ ), o par ordenado ( $x_0, y_0$ ) e o número zero.

No registro gráfico, mostrado na Figura 31, por exemplo, identificamos as variáveis: posição da superfície, traçada dentro de uma caixa limitada pelos eixos coordenados (Registro gráfico CAS\_MATH); relação dos pontos da superfície com respeito ao eixo  $z$  (o conjunto de todos os pontos da superfície com imagem  $z=4$ ); a posição da superfície em relação ao plano perpendicular ao eixo  $z$  (está completamente debaixo do plano), isto é, o plano horizontal é tangente à superfície.

**Figura 31.** Variáveis visuais para  $z=-x^2-y^2+4$ .



**Fonte:** Própria da autora.

Articulando esses dois registros, observamos a relação entre o plano tangente horizontal e a expressão simbólica  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ .

Para que o aluno desenvolva a visualização durante a aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis, devemos observar que o gráfico dessas funções permite a realização de tratamentos específicos. Dentro do registro gráfico CAS e das apreensões nesse registro, a mais recorrente é a apreensão operatória, por citar as modificações do gráfico, bem como é

necessário que o aluno faça a articulação das apreensões perceptiva, sequencial, operatória com a apreensão discursiva.

### 1.4.3 Teoria das Situações Didáticas

A teoria das situações didáticas de Brousseau (1998), busca criar um modelo de interação entre o aluno, o saber e o *milieu* no qual a aprendizagem de conceitos matemáticos deve ocorrer. Essa teoria, segundo Almouloud (2007), foi desenvolvida por Brousseau com a finalidade de caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reproduzíveis, orientadas frequentemente para a modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. O objeto central de estudo, nessa teoria, não é o aluno, mas a situação didática que relaciona professor, aluno e saber matemático.

Brousseau (1998) afirma que o aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de contradições, dificuldades e desequilíbrios. De acordo com o autor, tal aprendizagem, fruto dessa adaptação, manifesta-se por meio de respostas novas que derivam dessa aprendizagem. A concepção moderna do ensino demanda que o professor provoque no aluno tais adaptações, por meio de uma escolha judiciosa de situações de aprendizagem que lhe são propostas, as quais devem ser aceitas pelo aluno, além de levá-lo a agir, falar, refletir e evoluir por si só, uma vez que, o aluno aprende por vontade própria aquém a vontade do professor ou da escola. Tal situação culmina na ideia de situação adidática proposta por Brousseau (1998) que, de acordo com o autor, é o momento em que

o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz sua resposta, o professor recusa-se a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para levá-lo a adquirir um conhecimento novo, mas ele deve saber também que esse conhecimento é absolutamente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas (BROUSSEAU, 1998, p. 59, tradução nossa).

O professor faz a devolução para o aluno de uma situação adidática que provoca nele a interação mais independente e mais fecunda possível. A devolução, segundo Brousseau (1997), é definida como um ato do professor para fazer com

que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem ou de um problema, aceitando as consequências dessa transferência.

Para isso, comunica ou abstém-se de comunicar, de acordo com as informações, as questões, os métodos da aprendizagem e as heurísticas. A situação ou problema escolhido pelo professor envolve-o em um jogo com o sistema de interações do aluno e seu *milieu*. O *milieu* é o sistema antagonista do sistema ensinado ou previamente ensinado. Esta situação é chamada de didática.

Brousseau (1997, p. 6) distingue três momentos na situação adidática: ação, formulação e validação.

### **Situação de ação**

Segundo Brousseau (1997), para que um aluno aja é preciso escolher diretamente os estados do *milieu* antagonista em função de suas próprias motivações. Se o *milieu* reage com certa regularidade, o aluno pode antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. Os conhecimentos permitem produzir e mudar essas antecipações, sendo que a aprendizagem é o processo em que esses conhecimentos são modificados.

Segundo Almouloud (2007), depois que o professor transfere para o aluno uma parte da responsabilidade pela sua aprendizagem, apresentando-lhe um problema cuja melhor solução é o conhecimento a ensinar, o aluno pode agir sobre essa situação, esperando retorno de informações. A ação deve permitir ao aluno julgar seu resultado e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do professor, graças à retroação do *milieu*.

Um exemplo de uma situação de ação, em nosso trabalho, o qual será explicitado com detalhe na experimentação, seria quando os alunos leem a situação proposta, fazem anotações, realizam a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico e realizam tratamentos, tanto no registro algébrico quanto no gráfico, para encontrar a solução do problema.

### **Situação de formulação**

Para Brousseau (1997), a formulação de um conhecimento implícito transforma, ao mesmo tempo, suas possibilidades de tratamento, aprendizagem e

aquisição. A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do aluno de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). Portanto, o *milieu*, que exigirá do aluno o uso de uma formulação, deve envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) outro aluno, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação.

Segundo Almouloud (2007), o aluno troca informações com um ou vários alunos, que serão os emissores e receptores por meio da utilização de uma linguagem adequada, escrita ou oral, segundo cada emissor. A linguagem pode ser natural ou matemática. É nesse momento que o aluno ou o grupo de alunos explicita as ferramentas que utilizou e a solução encontrada.

Por exemplo, em nossa experimentação, uma situação de formulação seria quando a dupla de alunos começa a comunicar-se entre si, formulando que no valor máximo a superfície está completamente por baixo do plano perpendicular ao eixo  $z$  e que o valor máximo da superfície localiza-se no ponto onde o plano perpendicular ao eixo  $z$  é tangente à superfície.

### **Situação de validação**

Brousseau (1997) afirma que os momentos de ação e formulação implicam processos de correção empírica ou cultural para assegurar a pertinência, a adequação, a adaptação ou a conveniência dos conhecimentos mobilizados. Porém, a modelagem, em termos de situação, permite distinguir um novo tipo de formulação: o emissor não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Assim, colabora-se no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando existem dúvidas.

Segundo Almouloud (2007), nesse momento o aluno deve mostrar a validade de suas afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada, ao julgamento de um interlocutor. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando-a.

Em nossa experimentação, um exemplo de situação de validação seria quando os alunos mobilizam seus conhecimentos sobre a noção plano tangente à superfície cuja representação algébrica é dada por:  $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) +$

$f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$  e sobre a noção de plano perpendicular ao eixo  $z$  cuja representação algébrica é expressada por  $z = z_0$ , em que  $z_0$  é o valor da função no ponto  $(x_0, y_0)$ , isto é  $f(x_0, y_0) = z_0$ . A seguir, comparam-se essas duas representações dos planos.

Nesses três momentos da situação adidática são considerados essencialmente os processos cognitivos individuais e os desequilíbrios sócio-cognitivos produzidos nas interações com o *milieu* que incorpora intenções de aprendizagem.

É fundamental observar que as situações escolhidas pelo professor e oferecidas ao aluno deveriam ser contextualizadas, isto é, o conhecimento matemático é tratado de forma vinculada a outros conhecimentos, quando o conteúdo a ser aprendido se mostra necessário.

Nesse sentido, Brousseau (1988, p. 14) afirma que o professor assume a responsabilidade de recontextualizar e repersonalizar o saber, procurando situações que deem sentido ao conhecimento a ser ensinado. Enquanto o matemático realiza uma didática prática, que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada e despersonalizada, fora de um contexto temporal.

O professor tem, pois, de simular na sua aula uma microsociedade científica, se quer que os conhecimentos sejam meios econômicos para colocar boas questões e resolver debates, se quer que as linguagens sejam meios para dominar situações de formulação e que as demonstrações sejam provas. Mas, além disto, tem que dar também aos seus alunos meios para descobrirem, [...], o saber cultural e comunicável que se pretendeu ensinar-lhes. (BROUSSEAU, 1998, p. 49, tradução nossa).

Em seguida, a produção dos alunos, na situação adidática, é retomada pelo professor no momento da institucionalização, quando o professor define as relações que os comportamentos ou as produções livres do aluno podem ter com o saber cultural ou científico.

### **Situação de institucionalização**

Brousseau (1988) percebeu que após a validação dos conhecimentos pelos alunos, os professores eram obrigados a dar conta da produção, descrever os fatos

observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento, dar um *status* aos eventos da aula, como resultados dos alunos e do processo de ensino, assumir um objeto de ensino, identificá-lo, relacionar as produções aos conhecimentos dos outros (culturais ou do programa) e indicar o que pode ser reutilizado.

O professor tinha que constatar o que os alunos deviam fazer (e refazer) ou não, tinham aprendido ou deveriam ter aprendido. Esta atividade é inevitável: não podemos reduzir o ensino à organização de aprendizagens. A consideração “oficial” pelo aluno do objeto do conhecimento e pelo professor da aprendizagem do aluno é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático: este duplo reconhecimento constitui o objeto da INSTITUCIONALIZAÇÃO (Brousseau, 1988, p. 16, tradução nossa).

Segundo Almouloud (2007), as *situações de institucionalização* são definidas como aquelas em que o professor fixa e explicita convencionalmente o estatuto cognitivo do saber, retomando e sistematizando tudo aquilo que foi realizado. Depois da *institucionalização*, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, disponibilizando seu uso na resolução de problemas matemáticos.

Por exemplo, em nossa experimentação, a institucionalização poderia ser o teorema a seguir:

**Teorema.** Se  $f$  tiver um valor de máximo ou mínimo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  e se as derivadas parciais de primeira ordem existissem nesse ponto, então  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$

Assim, o modelo proposto por Brousseau (1998) permite a compreensão das interações sociais, que ocorrem na sala de aula entre alunos e professor, e a das condições e da forma, por meio das quais o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido.

## 1.5 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Nossa revisão bibliográfica nos permite perceber que grande parte dos alunos não comprehende a representação gráfica de pontos no espaço, no que diz respeito à conversão do registro numérico para o gráfico. Na determinação do

domínio de funções de duas variáveis reais, há também confusão entre domínio e função, em relação à noção de limite, ao caráter geométrico da noção de derivada parcial e à noção de área e de volume. Isso nos mostra que a possibilidade de utilizar vários registros e de saber efetuar conversões, de um registro para outro, é mais complicada no ensino de Cálculo diferencial de duas variáveis reais.

Em uma das pesquisas analisadas, Alves (2011) estuda a noção de valor máximo e mínimo de funções de duas variáveis reais, apresentando ao aluno apenas uma atividade, cujo objetivo é identificar visualmente, por meio da intuição, a natureza dos pontos marcados, pelo professor, na representação gráfica de uma função de duas variáveis reais, que é gerada com apoio do ambiente *CAS, Maple*. O objetivo é verificar, por meio de tratamentos no registro algébrico, se a natureza desses pontos que o aluno identificou visualmente seriam aqueles determinados no registro algébrico.

As pesquisas analisadas mostram-nos que um estudo acerca da visualização se faz necessário, uma vez que não existem trabalhos em relação ao papel da visualização na compreensão das funções de duas variáveis reais, particularmente, sobre compreensão dos valores máximos e mínimos dessas funções.

Para o estudo da visualização é indispensável ir além da visão e da percepção, é preciso compreender os tratamentos (modificações) no registro gráfico e as diferentes apreensões de um gráfico, isto é, uma abordagem de interpretação global qualitativa das propriedades do gráfico, porque é apenas com este tipo de abordagem que conseguimos a coordenação com o registro algébrico, em que os gráficos cartesianos podem funcionar como uma visualização. Neste sentido usamos Duval (1999), visto que o estudo da visualização dos registros gráficos será feito por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Em relação ao *software* utilizado para representar os gráficos de funções de duas variáveis, nas pesquisas utilizou-se o *CAS Maple*, pois, segundo os pesquisadores, é um *software* que auxiliou na conversão do registro algébrico para o registro gráfico, na percepção dos gráficos, permitindo que o gráfico representado nesse software desempenhasse seu papel heurístico na resolução das atividades propostas em aula.

Como estamos interessados no estudo da visualização de gráficos representados em softwares, mais do que acudir a um software para auxiliar a visualização de gráficos de funções de duas variáveis, é necessário entender como se dá o processo de visualização no Cálculo diferencial de duas variáveis. Quanto ao software utilizado, escolhemos o CAS *Mathematica* por permitir a formação, o tratamento, a conversão e a visualização de registros gráficos de funções de duas variáveis reais. Além de ser um software que está instalado no laboratório de computação da Faculdade de Engenharia de Alimentos.

Pelo exposto anteriormente, formulamos a questão que norteia nosso trabalho:

**“Como acontece o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais para alunos de engenharia?”.**

Para responder à questão, pretendemos como objetivo geral:

*Analizar o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais dos alunos de engenharia.*

Para alcançar esse objetivo geral descrevemos os seguintes objetivos específicos:

- Criar situações que envolvam as noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais.
- Analisar as coordenações entre os registros língua natural, algébrico e gráfico realizadas pelos alunos.
- Analisar no gráfico, representado em software *Mathematica*, as apreensões perceptiva, operatória, sequencial e discursiva dos alunos ao resolver as situações criadas.
- Analisar a articulação entre o registro gráfico e/ou gráfico representado em software *Mathematica* com o registro algébrico realizada pelos alunos na aprendizagem da noção de valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais.

Para alcançar nossos objetivos, pretendemos, também, seguir o modelo de Brousseau (1998), já que sua teoria permite-nos compreender as interações sociais que ocorrem em sala de aula entre os alunos, o professor e o *milieu*, além das condições e da forma como o conhecimento dos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis pode ser apropriado e apreendido. Ademais, a Teoria das Situações Didáticas serve de base à metodologia da Engenharia Didática, que se preocupa com a construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas (Artigue, 1988).

## 1.6 METODOLOGIA DE PESQUISA

Segundo Artigue (1988), a Engenharia Didática vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se primeiramente por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino.

[...] se distinguem, geralmente, dois níveis: o da micro-engenharia e o da macro-engenharia, conforme a importância da realização didática envolvida na pesquisa. As pesquisas de micro-engenharia são as mais fáceis de serem iniciadas, mas permitem levar em conta, de forma local, a complexidade do fenômeno sala de aula, não permitem compor essa complexidade com a complexidade essencial dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem. Elas não permitem necessariamente um recorte coerente dos objetos de conhecimento. As pesquisas de macro-engenharia são, apesar de todas as dificuldades metodológicas e institucionais que apresentam, inevitáveis (ARTIGUE, 1988, p. 286, tradução nossa).

Para a autora, essa metodologia caracteriza-se também, em relação a outros tipos de pesquisas baseados nas experimentações em sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos que lhe estão associados. A Engenharia Didática situa-se no registro dos estudos de casos, cuja validação é essencialmente interna e fundamentada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Assim, esta metodologia é singular não pelos objetivos das pesquisas levadas a cabo mas pelas características do seu funcionamento metodológico.

Nesse processo, Artigue (1988) distingue quatro fases: as análises preliminares, a concepção e análise *a priori*, a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação.

**Análise preliminar:** apoia-se em um quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado, mas se apóia também em uma análise epistemológica: dos conteúdos visados pelo ensino, do ensino habitual e dos seus efeitos, das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos, que marcam a sua evolução, e das limitações em que se situa para realização didática efetiva, considerando os objetivos específicos da pesquisa. Neste trabalho, apoiamo-nos no quadro do Cálculo.

Para Artigue (1988, p. 289, tradução nossa), a análise das limitações efetuar-se-á por meio da distinção de três dimensões:

[...] a dimensão epistemológica associada às características do saber em jogo, a dimensão cognitiva associada às características cognitivas do público ao qual se dirige o ensino, a dimensão didática associada às características do funcionamento do sistema de ensino.

**Concepção e análise *a priori*:** o pesquisador decide agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não definidas pelas restrições, sobre as variáveis de comando, que se supõe serem relativas ao problema estudado. A autora distingue dois tipos de variáveis de comando para facilitar a análise de uma engenharia:

As variáveis macro-didáticas ou globais que são relativas à organização global da engenharia e as variáveis micro-didáticas ou locais, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto quer dizer, à organização de uma sequência ou de uma fase, tanto umas quanto as outras podem ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado. Ao nível micro-didático, esta segunda distinção é clássica visto que distingue as variáveis do problema das variáveis de situação associadas à organização e à gestão do *milieu* [...] as **variáveis didáticas** são aquelas cuja prova do efeito didático foi atestada (ARTIGUE, 1988, p. 291, tradução nossa, grifo nosso).

Portanto, para Artigue (1988), o objetivo da análise *a priori* é determinar de que maneira as escolhas efetuadas, isto é, as variáveis que assumimos como pertinentes, permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses

comportamentos. Esta análise que tem uma parte descritiva e uma parte preditiva centra-se nas características de uma situação adidática, que se pretendeu constituir e que será devolvida aos alunos. Na análise *a priori* devem ser considerados os seguintes pontos:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;
- Analisar o que poderia estar em jogo nessa situação para o aluno em função das possibilidades de ação, seleção, controle e validação de que dispõe durante a experimentação;
- Prever os comportamentos possíveis dos alunos e procurar mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos e assumir, particularmente, que os comportamentos esperados, se intervierem, sejam resultado da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem.

**Experimentação:** para a autora esta fase é a clássica. Segundo Almouloud e Ferreira (2012, p. 27), esta fase consiste “na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação”.

Para Artigue (1988), os dados recolhidos durante a experimentação são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologia externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

**Análise *a posteriori* e validação:** a análise *a posteriori* apoia-se no conjunto dos dados recolhidos ao longo da experimentação. “[...], é no confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori*, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na pesquisa” (ARTIGUE, 1988, p. 297, tradução nossa). O objetivo é construir conclusões em função das associações apropriadas entre os objetivos delineados *a priori*, relacionando-os às observações, com a intenção de avaliar a reproduzibilidade e a regularidade dos eventos observados.

Assim, a engenharia didática apresenta-se como importante metodologia de pesquisa, por interligar o aspecto científico com a prática didática. Além da pesquisa, essa metodologia constitui um referencial metodológico interessante e viável para o processo de ensino e aprendizagem, pois permite a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

## **Capítulo 2 - ANÁLISES PRELIMINARES DA ENGENHARIA DIDÁTICA**

---

Neste capítulo, a primeira fase da Engenharia, estudaremos a viabilidade de uma abordagem epistemológica associada às características do saber em jogo. Para isso, apresentaremos um olhar para a história do Cálculo de várias variáveis reais para saber como foi construído o conhecimento dos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais. Estudaremos a abordagem cognitiva associada às características cognitivas do aluno, através da análise dos livros didáticos de Cálculo Diferencial de funções de duas variáveis, realizando uma abordagem didática associada às características do funcionamento de ensino.

### **2.1 UM OLHAR PARA A HISTÓRIA DO CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS**

Os séculos XVII e XVIII foram abundantes em resultados matemáticos de diferentes naturezas. “Os matemáticos do século XVIII desenvolveram o poder do cálculo sem introduzir substancialmente conceitos originais, mas exercitando habilidade na técnica” (CORONA e ARELLANO, 2007, p. 91, tradução nossa). Para os autores, o trabalho matemático do século XVIII foi diretamente inspirado por problemas de física.

Pode-se dizer que o interesse do trabalho não foi a matemática, mas a solução de problemas em Física, as matemáticas foram um meio para o objetivo da física, concentrando-se na mecânica de sistemas discretos e de meios contínuos (CORONA e ARELLANO, 2007, p. 92, tradução nossa).

Os autores também afirmam que, nessa época, não havia uma clara separação entre ciência e o que hoje chamamos de engenharia, sendo que os matemáticos eram os responsáveis pelos problemas tecnológicos no cotidiano. É o caso de Euler, que trabalhou no desenho de navios, cartografia, entre outros problemas matemáticos. Qualquer questão de análise, tal como a convergência uniforme das séries e integrais, o intercâmbio da ordem da integração, o uso das diferenciais de ordem superior, os aspectos da existência das integrais e a solução das equações diferenciais, foram totalmente ignoradas. O modo de proceder dos matemáticos era justificável, pois as regras de operação eram claras. “Uma vez formulado matematicamente o problema físico, o virtuosismo entra em ação e novas metodologias e conclusões emergem” (CORONA e ARELLANO, 2007, p. 92).

As autoras ainda sustentam que o significado das matemáticas guiava a trajetória a seguir e frequentemente forneciam argumentos parciais para cobrir as etapas não matemáticas. Finalmente, as conclusões físicas corretas davam a garantia de que a matemática estava certa.

Rosa (2010) afirma que, em razão da estreita vinculação da Matemática com a Física e a Astronomia, matemáticos como os Bernoulli, Euler, Clairaut, D'Alembert, Monge, Lagrange, Laplace e Legendre, entre outros, contribuíram, igualmente, para o desenvolvimento desses ramos da Ciência. Não há dúvida que, “apesar de ter sido importante a herança recebida do século XVII, trabalhos pioneiros, pesquisas inovadoras e criações imaginativas, demonstram a valiosa e adicional contribuição do “Século das Luzes” à evolução da Matemática” (ROSA, 2012, p. 249).

Ao examinar a Matemática no século XVIII, o autor sustenta também que dois países sobressaíram-se nessa evolução: a Suíça, com o clã Bernoulli e Euler, e a França, com Lagrange, Legendre, Monge, Laplace, entre outros. Esses matemáticos, chamados, segundo Rosa (2010), “matemáticos da Revolução”, fariam as principais contribuições, em particular na Análise (Cálculo) e na Geometria. Outros importantes centros como a Itália, a Inglaterra, a Escócia, a Holanda e a Alemanha também colaboraram para o desenvolvimento da Matemática, mas, para o autor, sem o extraordinário brilho de épocas passadas.

Segundo o autor, Lagrange (1736-1813), ao estudar os teoremas de Fermat, descobriu, no ano de 1766, o princípio de uma solução completa para equação de segundo grau com duas variáveis. Sua principal obra foi, entre outras, a *Teoria das Funções Analíticas*, em 1797, em que desenvolveu os princípios do Cálculo infinitesimal,

[...] substituindo as considerações dos infinitamente pequenos e dos “evanescentes”, em que se apoiava Leibniz, e as de limites e fluxões, empregadas por Newton, pelas considerações características do seu método: as derivadas. Embora este método algébrico de fundamentar o Cálculo não fosse totalmente satisfatório, o tratamento abstrato das funções foi um considerável passo à frente, surgindo a primeira “teoria de funções de uma variável real”, com aplicações a uma grande variedade de problemas na Álgebra e na Geometria. (ROSA, 2012, p. 265).

Em relação ao estudo dos valores máximos e mínimos locais de uma função em várias variáveis, Lagrange (1759) apresenta-o por meio da noção de diferencial de primeira e segunda ordem, com respeito às variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , da função em  $\mathbb{R}^n$  e representada por  $Z = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . O autor encontra a função diferencial de primeira ordem concernente a todas as variáveis, como mostra a Figura 32.

**Figura 32.** Função diferencial de primeira ordem de  $Z$ .

2. Tout ceci supposé et bien entendu, que  $Z$  représente une fonction algébrique des variables  $t, u, x, y, \dots$ , et qu'on se propose de la rendre un *maximum* ou un *minimum*. Soit, selon les règles ordinaires,

$$dZ = p dt + q du + r dx + s dy + \dots,$$

**Fonte:** Lagrange<sup>3</sup>, 1759, p. 1.

Podemos observar que o autor, na definição da diferencial, não usa a noção de derivada parcial, mas representa com  $p, q, r, s, \dots$  a função derivada parcial de primeira ordem com respeito às variáveis  $t, u, x, y, \dots$ , respectivamente. Isto é,  $\frac{\partial Z}{\partial t} = p$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial u} = q$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial x} = r$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial y} = s$ , então a diferencial de primeira ordem de  $Z$  estaria representada por  $\partial Z = \frac{\partial Z}{\partial t} dt + \frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \dots$

---

<sup>3</sup> Isso nos faz compreender que  $Z$  representa uma função algébrica, de variáveis  $t, u, x, y, \dots$ , a qual propomos transformar em um máximo e em um mínimo, segundo as regras ordinárias:  $dZ = pdt + qdu + rdx + sdy + \dots$

A fim de estudar as condições necessárias para a ocorrência de um valor máximo ou mínimo da função, Lagrange (1759) estabelece as circunstâncias para que haja um valor extremo. Para tanto, os pontos críticos têm muita importância. A diferencial da função deve tender para zero, independentemente dos valores atribuídos às diferenciais  $dt, du, dx, dy, \dots$  das variáveis  $t, u, x, y, \dots$ . Inversamente, se a equação acima for verificada por valores arbitrários de  $dt, du, dx, dy, \dots$  segue-se que  $p = q = r = \dots = 0$ , como se pode observar na Figura 33.

**Figura 33.** Encontrando os pontos críticos de  $Z$ .

Mais comme la relation entre  $t, u, x, \dots$  est encore indéterminée, de même que celle de leurs différentielles  $dt, du, dx, \dots$ , et que d'ailleurs l'équation donnée doit être vraie quel que soit leur rapport, il est évident que pour les chasser tout à fait de l'équation, il faut égaler séparément à zéro chaque membre  $pdt, qdu, rdx, \dots$ , d'où l'on tire autant d'équations particulières qu'il y a de variables, savoir :

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \dots$$

Par le moyen de toutes ces équations on trouvera les valeurs de chaque inconnue  $t, u, x, \dots$ , qui, substituées dans la fonction proposée  $Z$ , la rendront un *maximum* ou un *minimum*.

**Fonte:** Lagrange<sup>4</sup>, 1759, p. 4.

Da mesma forma, usando apenas a definição de diferencial de uma função de várias variáveis reais, Lagrange (1759) encontra a diferencial de segunda ordem da função representada por  $Z$ , como mostra a Figura 34. Vemos na sequência que não são mostrados todos os tratamentos algébricos realizados.

---

<sup>4</sup> Porém, como a relação entre  $t, u, x, \dots$  é ainda indeterminada, bem como os seus diferenciais  $dt, du, dx, \dots$ , e que ainda a equação dada deve ser verdadeira não importando a relação entre elas, é evidente que para procurar a equação, é necessário igualar, separadamente, a zero, cada membro  $pdt, qdu, rdx, \dots$ , o que leva tantas equações particulares quanto variáveis, a saber:  $p = 0, q = 0, r = 0, \dots$  Por meio de todas essas equações encontraremos os valores de cada variável desconhecida  $t, u, x, \dots$ , que substituindo na função  $Z$ , achamos um máximo ou um mínimo.

**Figura 34.** Encontrando a diferencial de segunda ordem de Z.

3. Passons maintenant à l'examen de la seconde différentielle. En supposant, ce qui est permis, les premières différentielles  $dt, du, dx, \dots$  constantes, on aura

$$d^2Z = dp dt + dq du + dr dx + ds dy + \dots$$

Soit

$$\begin{aligned} dp &= A dt + B du + D dx + G dy + \dots, \\ dq &= B dt + C du + E dx + H dy + \dots, \\ dr &= D dt + E du + F dx + I dy + \dots, \\ ds &= G dt + H du + I dx + L dy + \dots, \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} d^2Z = & A dt^2 + 2B dt du + C du^2 + 2D dt dx + 2E du dx \\ & + F dx^2 + 2G dt dy + 2H du dy + 2I dx dy + L dy^2 + \dots \end{aligned}$$

**Fonte:** Lagrange<sup>5</sup>, 1759, p. 4.

Se a função representada por  $Z$  depender de duas variáveis  $t$  e  $u$ , a diferencial de segunda ordem  $d^2Z$  seria representada pela expressão  $Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$ , conforme mostra a Figura 35, em que, se usássemos as derivadas parciais de segunda ordem, teríamos:  $A = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ ,  $B = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u}$ ,  $C = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ .

**Figura 35.** Comportamento da diferencial de segunda ordem.

$Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$   
cette forme

$$A \left( dt + \frac{B du}{A} \right)^2 + \left( C - \frac{B^2}{A} \right) du^2;$$

et on verra que, comme les carrés  $\left( dt + \frac{B du}{A} \right)^2$  et  $du^2$  ont toujours le même signe +, toute la quantité sera nécessairement positive si les deux coefficients  $A$  et  $C - \frac{B^2}{A}$  sont positifs, et au contraire elle deviendra négative, lorsque ceux-ci seront tous deux négativos, quel que soit le rapport de  $dt$  à  $du$ . On aura donc pour le cas du *minimum*

**Fonte:** Lagrange<sup>6</sup>, 1759, p. 6.

Para estudar o problema dos valores extremos, devemos investigar essa expressão quadrática, homogênea em  $t$  e  $u$ . Segundo Courant (1966), a forma quadrática representada por  $Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$  será definida, se e somente se

<sup>5</sup> Passemos agora ao exame da segunda diferencial. Supondo que seja permitido, e são os primeiros diferenciais  $dt, dx, du, \dots$  constantes, teremos [...]. Seja [...]. Então [...]

<sup>6</sup> [...] essa forma  $A \left( dt + \frac{B du}{A} \right)^2 + \left( C - \frac{B^2}{A} \right) du^2$ ; e veremos que, como os quadrados  $\left( dt + \frac{B du}{A} \right)^2$  e  $du^2$  sempre têm o mesmo sinal +, toda a quantidade será necessariamente positiva, os dois coeficientes  $A$  e  $\left( C - \frac{B^2}{A} \right)$  são positivos, ou ao contrário será negativa quando são ambos negativos, independentemente da relação de  $dt$  e  $du$ . Teremos os mesmos resultados também para o caso do mínimo.

a condição  $AC - B^2 > 0$  for satisfeita. Será, então, positivamente definida, se  $A > 0$  de outro modo, será negativamente definida.

Para que a forma quadrática possa ser indefinida, é necessário e suficiente que  $AC - B^2 < 0$ . Se  $AC - B^2 = 0$ , nenhuma conclusão poder ser tirada. O autor acrescenta ainda que, se a forma quadrática  $Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$  é positivamente definida, a função admite um mínimo, conforme mostra a Figura 35. Se a forma for negativamente definida, a função admite um máximo, como na Figura 36. Contrastando a teoria das formas quadráticas com a teoria apresentada por Lagrange (1759), observamos que há concordância.

**Figura 36.** A forma quadrática é definida negativa, Z tem valor máximo.

6

RECHERCHES SUR LA MÉTHODE

la proposée Z ne pourra pas être un *minimum*. En second lieu on trouvera pour le *maximum*

$$A < 0, \quad C - \frac{B^2}{A} < 0,$$

savoir

$$C < \frac{B^2}{A}, \quad CA > B^2,$$

puisque A est négatif, ce qui donne encore

$$C < 0;$$

donc les conditions pour le *maximum* seront en partie les mêmes, et en partie précisément contraires à celles du *minimum*.

**Fonte:** Lagrange<sup>7</sup>, 1759, p. 6.

O autor afirma que esse mesmo procedimento pode ser usado para funções de três ou mais variáveis. Lagrange (1759) finaliza essa obra apresentando um exemplo de corpos elásticos para que essa teoria seja muito mais clara. Assim, demonstrou-se o seguinte resultado para funções de duas variáveis:

---

<sup>7</sup> Z não poderá ser um mínimo. Em segundo lugar encontraremos para o máximo  $A < 0$ ,  $C - \frac{B^2}{A} < 0$ . A saber,  $C < \frac{B^2}{A}$ ,  $CA > B^2$ , então, A é negativo, o que dará ainda:  $C < 0$ ; também as condições para o máximo serão em parte as mesmas e em parte precisamente contrariam aquelas do mínimo.

**Figura 37.** Teste da segunda derivada.

(4.7) **Theorem** (Lagrange 1759). Let  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be twice continuously differentiable and suppose that (4.24) is satisfied.

- a) The point  $(x_0, y_0)$  is a local minimum, if, at  $(x_0, y_0)$ ,

$$(4.26) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0.$$

- b) The point  $(x_0, y_0)$  is a local maximum, if, at  $(x_0, y_0)$ ,

$$(4.27) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0.$$

- c) In the case where

$$(4.28) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0$$

at  $(x_0, y_0)$ , then this point is a saddle point.  $\square$

**Fonte:** Hairer e Wanner<sup>8</sup>, 2008, p. 325.

O interessante nessa obra é que Lagrange (1759) generaliza os critérios das derivadas parciais de ordem superior para encontrar máximos e mínimos de uma função em várias variáveis.

Pouco depois, em 1795, segundo Rosa (2012), o geômetra Monge (1746-1818) publicou seu estudo de Cálculo aplicado em curvas e superfícies no espaço. Utilizou o Cálculo para definir a curvatura da superfície e determinou a equação diferencial da curvatura. “Além do estudo da sombra, perspectiva e topografia, deu Monge especial atenção à sua Teoria das famílias de superfícies e às propriedades da superfície, incluindo retas normais e planos tangentes, que, segundo Lagrange, bastaria para imortalizá-lo” (Ibid, p. 267).

O estudo sobre as propriedades das curvas e das superfícies, por meio do cálculo, desenvolver-se-ia de forma sistemática, no século XIX, caracterizando-se, segundo Rosa (2010), pelo extraordinário desenvolvimento da Matemática pura e aplicada, pela formulação de conceitos como: grandeza, quantidade, ordem, forma,

<sup>8</sup> Teorema (Lagrange 1759). Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possui todas as derivadas parciais de ordem dois, as quais são funções contínuas e 4.24 (seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico da função). a) o ponto  $(x_0, y_0)$  é mínimo local, si, em  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ , b) o ponto  $(x_0, y_0)$  máximo local, si, em  $(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ , c) No caso em que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0$  em  $(x_0, y_0)$ , então esse ponto é o de sela.

extensão, posição, e pela aplicação do método dedutivo ao pensamento abstrato e lógico.

Pela produtividade em qualidade e quantidade, pela introdução de novos conceitos, pela aplicação de maior rigor metodológico, [...] e pelos significativos avanços nos diversos ramos (Álgebra, Geometria, Análise), [...]. O que caracterizaria a Matemática do século XIX, contudo, seria a ênfase **na abstração**, o retorno ao **rigor** da fundamentação, a criação da Geometria não-euclidiana e a fundação da Lógica matemática (ROSA, 2010, p. 39, grifo nosso).

Para o autor, o principal intodutor do rigor no Cálculo infinitesimal foi Cauchy (1789-1857), em cuja obra *Lições sobre o Cálculo Diferencial* (1829) apresentou a definição de limite, que passaria a ser a base do Cálculo infinitesimal:

[...] esclareceu as noções de convergência de uma série, da continuidade de uma função e da integral de uma função e definiu o “infinitamente pequeno”: uma quantidade variável se transforma em infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente, de maneira a convergir ao limite zero. (ROSA, 2010, p. 41)

Em relação ao campo da Álgebra, o autor acrescenta ainda que haveria um grande desenvolvimento graças aos estudos dos determinantes e das matrizes, das formas algébricas e invariantes. Já nesse século, a Álgebra estender-se-ia, de forma progressiva, para Equações diferenciais e derivadas parciais, uma vez que antes se encontrava confinada ao estudo das Equações algébricas de primeiro grau. Em relação às noções de Determinantes e Matrizes, Rosa (2010) menciona o estudo de Carl Jacobi (1804-1851) sobre o determinante funcional, chamado de “jacobiano”. Em relação à Teoria das Formas e à Teoria dos Invariantes, afirma que na primeira metade do século, em função dos avanços em Geometria analítica, desenvolveu-se o estudo das formas algébricas, ou funções homogêneas de muitas variáveis independentes.

A noção de invariante estava subjacente em diversos trabalhos de Lagrange, Gauss, Cauchy e Jacobi, mas o conceito foi explicitado em 1841, por George Boole, seguido por uma série de estudos, a partir de 1845, de Cayley e Sylvester, sobre as teorias das formas algébricas [...] e dos invariantes (ROSA, 2010, p. 59).

Segundo o autor, a frutífera e estreita colaboração de Cayley (1821-1891) e Sylvester (1814-1897), em diversos temas da Álgebra, seria responsável pelo

grande impulso da Álgebra linear, inclusive no desenvolvimento das teorias dos determinantes, das matrizes, dos invariantes e das formas. Para Rosa (2010), essas teorias seriam estudadas e aperfeiçoadas nos trabalhos, entre outros, de Ludwig Otto Hesse (1811-1874), que empregava regularmente coordenadas homogêneas e determinantes.

Segundo Cajori (2007), as primeiras pesquisas de Hesse foram sobre as transformações lineares das superfícies de segunda ordem e sobre o estudo analítico de curvas de terceira ordem. E, para Colette (1993), um tratado a respeito dos pontos de inflexão das curvas cúbicas foi desenvolvido por Hesse. No âmbito desse tratado surge o determinante funcional, chamado Hessiano, a partir da matriz das segundas derivadas parciais de uma função homogênea  $f(x_1, x_2, x_3)$  no ponto representado por  $x$  de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , expresso por  $(Hf)(x) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ , sendo a matriz Hessiana da função no ponto  $x$  representada por  $[h_{ij}] = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]$ .

Assim, observamos que a construção dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas ou mais variáveis, particularmente, a construção da matriz Hessiana, que permite obter critérios de classificação dos pontos críticos por meio da segunda derivada, está centrada no registro em língua natural e registro algébrico, sobressaindo o tratamento no registro algébrico. Porém, não existe, no ensino e aprendizagem uma articulação entre esses registros, nem a atividade de conversão entre registros de representação semiótica, nem a variedade de representações semióticas, que são condições necessárias para a compreensão dos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis.

Essas limitações não favorecem o desenvolvimento da visualização na compreensão desses valores, visto que a visualização requer a leitura dos gráficos cartesianos, que depende da articulação entre o registro gráfico e o algébrico. Para o estudo da visualização é necessário compreender os tratamentos no registro gráfico e os diferentes tipos de apreensões de um gráfico.

Em relação à formação da representação da matriz Hessiana, vale ressaltar que, do ponto de vista de recursos cognitivos despendidos, esta formação requer

mais do aluno, pois, no terceiro semestre do curso de engenharia, alguns resultados de Álgebra linear, tais como formas quadráticas, a teoria de matrizes e a teoria dos determinantes, não fazem parte de seus conhecimentos prévios, nem está na ementa da disciplina.

Dessa forma, afirmamos o mesmo em relação à representação do Hessiano  $(Hf)(x) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ , pois representa uma forma quadrática, por exemplo, o diferencial de segunda ordem, a respeito das variáveis independentes  $x_1, x_2, x_3$ , sendo que para formar essa representação precisamos mobilizar conhecimentos de sequência de funções, os quais o aluno de terceiro semestre de engenharia ainda não possui.

## 2.2 O OBJETO MATEMÁTICO EM LIVROS DIDÁTICOS

Para Duval (1995), a pergunta sobre a compreensão dos livros tomou uma nova forma com o surgimento da educação massiva. A prolongação da escolaridade e a diversificação dos conhecimentos, que se devem adquirir, evidenciaram que, embora os alunos aprendam a ler durante o primário, não se garante a compreensão dos múltiplos e variados livros que lhes são propostos posteriormente.

Segundo o autor, essa indagação remete-se a um problema cognitivo, relacionados aos processos de elaboração de uma compreensão durante a leitura, durante os primeiros recorridos visuais que faz o leitor. No entanto,

Estes processos não são apenas complexos, mas parecem não funcionar da mesma maneira para todos os livros. Em particular, quando a organização redacional de um livro se afasta muito das formas de organização próprias dos discursos orais espontâneos y [...], muito rapidamente as dificuldades de compreensão podem chegar a ser insuperáveis para muitos alunos [...] (DUVAL, 1995, p. 324, tradução nossa).

Conforme o autor, os modelos de compreensão estão essencialmente concentrados no leitor, em seus conhecimentos, esquecendo todos os fatores relativos às características e às variáveis redacionais dos livros: os graus e os modos de explicação do conteúdo cognitivo do livro, “as distâncias mais ou menos

importantes entre a organização redacional do livro e a organização discursiva de uma elocução oral espontânea” (DUVAL, 1995, p. 324, tradução nossa).

Para Duval (1995), se a compreensão dos livros é o resultado da interação entre um leitor e um livro, essas variáveis redacionais do livro são tão importantes como as variáveis relativas ao leitor: a base de conhecimentos de que dispõe em relação ao conteúdo cognitivo do livro, a compreensão do vocabulário e sua competência para a descodificação sintática. Somente em nível de interação entre estes dois tipos de variáveis é que “realmente se pode realizar uma análise dos processos de compreensão do livro. Os diferentes tipos de interação entre um leitor e um livro, determinam, por sua vez, situações de leitura diferentes” (Ibid, p, 325).

Em relação aos livros didáticos de Matemática, quando Lacroix (1816) observava as obras didáticas de sua época, manifestava sua preocupação sobre o excessivo emprego de definições matemáticas e simbologias, questionando a metodologia empregada nos livros didáticos e o próprio modo de organização e estruturação do *saber matemático*.

Um livro didático deve evitar ser muito detalhado, pois prefere-se lutar contra as dificuldades de um livro um pouco conciso do que seguir passo a passo os detalhes supérfluos que obstam seu avanço e fazem perder de vista o objetivo principal.

[...] o leitor e o autor do livro devem ajudar-se mutuamente. Há em cada ciência coisas que não se podem ensinar, e que o aluno deve adquirir por si mesmo, isto é, o habitual dos procedimentos da ciência, ou de outro modo o mecanismo das operações que ela prescreve: em aritmética e em álgebra são os cálculos, em geometria são as construções. (LACROIX, 1816, p. 207, tradução nossa)

Em relação à quantidade de procedimentos nessas áreas da Matemática, Lacroix (1816) orientava no sentido de que a memória seria ainda necessária para a condução das descobertas. Para o autor, existem duas funções na memória: uma de recordar as coisas em conjunto e uma de reproduzir todos os seus detalhes, sendo que é a primeira que se deveria exigir daqueles que cultivam as ciências exatas. A memória proporciona, quando necessário, o auxílio que não se pensaria buscar nos livros, entretanto, ela apenas se cultiva pelo uso frequente que se faz

das coisas que lhe foram confiadas, e não por um trabalho forçado de repetições contínuas.

Em relação aos objetos mais complicados que os cálculos numéricos, Lacroix (1816) diz que não existe inconveniente em usar os livros didáticos, e enfatiza a não necessidade de carregar a memória de demonstrações e de fórmulas:

O que é necessário possuir é a marcha dos métodos, o valor de seus termos técnicos, a inteligência dos idiotismos na linguagem, ou a faculdade de extrair o sentido das frases e as formas de expressão particulares dos principais escritores que tratam a ciência, a fim de poder a uma simples leitura, compreender suas obras. (LACROIX, 1816, p. 189, tradução nossa)

Enfim, é preciso conhecer a natureza e o encadeamento dos objetos que os livros contêm a fim de poder consultá-los. Como afirma Alves (2011, p. 22, grifo nosso), “a única maneira de o professor cultivar a Matemática, nos seus alunos, é **o uso frequente dos livros**, sem que se caracterize um trabalho forçado e de repetições contínuas, como vemos hoje em dia, as repetições e mecanizações de rotinas matemáticas sem sentido”.

Alves também observa que a linguagem característica de cada área da Matemática pode ser mais ou menos favorável a uma compreensão rápida do leitor, e ainda o uso inapropriado da linguagem algébrica, tradicionalmente explorada pelos autores de livros, depara com o surgimento de sentimentos negativos e repulsão ao conhecimento matemático. Como o autor sustenta: “vale recordar que a mediação impregnada pelo espírito formalista não assume como prioritário o ato de promover de modo frutífero a produção e a diversificação do repertório de representações mentais do estudante” (ALVES, 2011, p. 23).

Assim, analisaremos, na sequência, os livros didáticos usuais adotados no ensino dos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais na faculdade de Engenharia da Universidade Nacional do Callao, a fim de verificar se esses autores proporcionam ao aluno situações que dão sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados, ricos em registros, de forma a lhe propiciar a possibilidade de realização de tratamentos, conversões e a coordenação entre esses registros, verificando se permitem que o gráfico cumpra seu papel

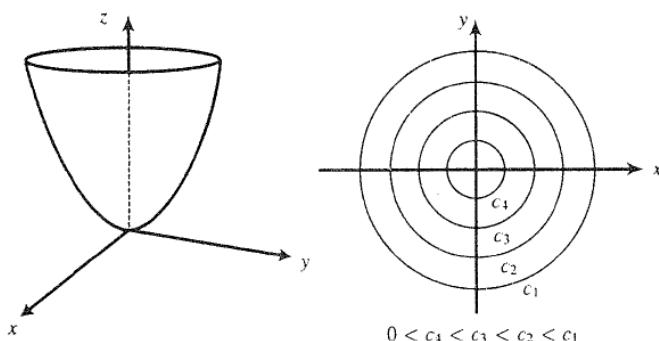
heurístico, se permitem a realização de tratamentos no gráfico e se ocorrerm as apreensões no registro gráfico.

Os livros didáticos a analisar são: RUIZ (1995), MARSDEN E TROMBA (1998) e FINNEY (1999). Em relação aos livros de Ruiz (1995) e Marsden e Tromba (1998), os autores efetuam demonstrações dos teoremas relacionados às primeiras e às segundas derivadas parciais.

Ruiz (1995) inicia a seção com a definição formal dos valores máximo e mínimo, usando um registro gráfico no espaço, mas também um gráfico no plano para mostrar como é o comportamento das curvas de nível perto do valor mínimo, a fim de ter uma apreensão perceptiva do valor mínimo, como mostra a Figura 38. Assim, evidenciamos a realização de um tratamento no registro gráfico.

**Figura 38.** Representação gráfica do mínimo local de  $f(x,y)$ .

**Definición.** Sea  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en el conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  tiene un máximo (mínimo) local o relativo en el punto  $x_0 \in U$  si  $f(x_0) \geq f(x)$  ( $f(x_0) \leq f(x)$  respectivamente) para toda  $x$  en una bola  $B$  de centro en  $x_0$ . ■



**Fonte:** Ruiz, 1995, p. 335.

No que diz respeito aos exercícios resolvidos, como mostra a Figura 39, observamos que o autor utiliza os registros de língua natural, algébrico e gráfico. Realiza a conversão do registro algébrico para o registro gráfico de uma função de duas variáveis. De maneira semelhante, o autor realiza um tratamento no registro gráfico, representando graficamente as curvas de nível de uma função de duas variáveis. Pela apreensão perceptiva, observamos o comportamento das curvas de nível perto do valor máximo, mas esse gráfico apenas ilustra o valor máximo, permitindo uma representação icônica desse valor. Logo, não se utiliza a apreensão

operatória porque nenhuma modificação é feita no gráfico para compreender o valor máximo.

**Figura 39.** Representação gráfica de um máximo local de  $f(x,y)$ .

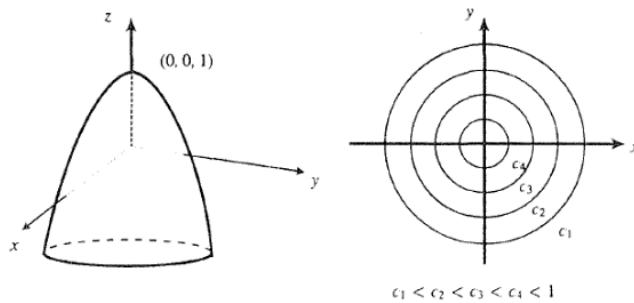
**Ejemplo 2.** La función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

tiene un máximo local en  $x_0 = (0, 0)$ , pues en una bola  $B$  de centro en  $x_0$  se tiene

$$f(0, 0) = 1 \geq 1 - x^2 - y^2 = f(x, y)$$

para toda  $(x, y) \in B$ . Nuevamente llamamos la atención al aspecto geométrico de la superficie  $z = f(x, y)$ , así como el de sus curvas de nivel cerca del origen.



**Fonte:** Ruiz, 1995, p. 336.

Os exercícios propostos, por exemplo, como mostra a Figura 40, tem a característica de ser resolvidos, ao aplicar diretamente os teoremas da derivada de primeira ordem e o teste da segunda derivada, promovendo o tratamento no registro algébrico.

**Figura 40.** Exercícios propostos de máximos e mínimos locais.

En los ejercicios 26–34, determine (si los hay) los extremos locales y/o puntos de ensilladura de las funciones dadas de dos variables.

26.  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 3xy + x + y - 1$
27.  $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy$
28.  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 12xy + 3x + 4y - 2$
29.  $f(x, y) = x^3y^3 + 3x + 3y + 1$
30.  $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y - 1$
31.  $f(x, y) = x^4 - y^2 - x^2 + 5y - 2$
32.  $f(x, y) = x \ln y + x$
33.  $f(x, y) = \arctan(x^2) - \arctan(y^2)$
34.  $f(x, y) = \ln(1 + \exp(-x^2) + \exp(-y^2))$

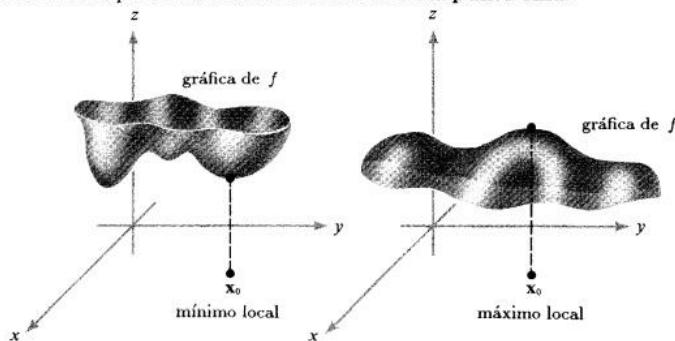
**Fonte:** Ruiz, 1995, p. 363.

Conforme mostra a Figura 41, Marsden e Tromba (1998) começam a seção com a definição formal dos valores máximo, mínimo e ponto de sela, explorando as noções de máximos e mínimos envolvidas nos registros gráficos no espaço, isto é, realizam a operação de conversão do registro algébrico para o gráfico, apenas para

ilustrar a noção de valor mínimo local e máximo local, respectivamente, permitindo ter uma apreensão perceptiva desses valores. A representação dos valores mínimo e máximo é icônica.

**Figura 41.** Conversão para o registro gráfico do mínimo e máximo local.

**DEFINICIÓN** Si  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar dada, un punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  se llama **mínimo local** de  $f$  si existe una vecindad  $V$  de  $\mathbf{x}_0$  tal que para todos los puntos  $\mathbf{x}$  en  $V$ ,  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ . (Ver la figura 4.2.1.) De manera análoga,  $\mathbf{x}_0 \in U$  es un **máximo local** si existe una vecindad  $V$  de  $\mathbf{x}_0$  tal que  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$  para todo  $\mathbf{x} \in V$ . El punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  es un **extremo local o relativo**, si es mínimo local o máximo local. Un punto  $\mathbf{x}_0$  es un **punto crítico** de  $f$  si  $Df(\mathbf{x}_0) = 0$ . Un punto crítico que no es un extremo local se llama **punto silla**.



**Fonte:** Marsden e Tromba, 1998, p. 249.

Na seção de exercícios resolvidos, os autores utilizam a língua natural e os registros algébricos, conforme mostra a Figura 42. Observamos que o exercício resolvido tem a característica de ser uma aplicação direta do teorema, promovendo o tratamento no registro algébrico para encontrar o valor mínimo local.

**Figura 42.** Registro em língua natural e algébrico.

**EJEMPLO 6** Localizar los máximos, mínimos y puntos silla de la función  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ .

**SOLUCIÓN** Primero debemos localizar los puntos críticos de esta función; por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3, calculamos

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\mathbf{j}.$$

Así,  $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$  si y sólo si  $(x, y) = (0, 0)$ , de modo que el único punto crítico de  $f$  es  $(0, 0)$ . Ahora debemos determinar si se trata de un máximo, un mínimo o un punto silla. Las segundas derivadas parciales son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0,$$

lo cual conduce a

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

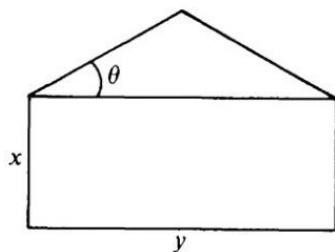
Como  $(\partial^2 f / \partial x^2)(0, 0) > 0$ , concluimos, por el teorema 5, que  $(0, 0)$  es un mínimo local. (¿Pueden mostrar esto a partir sólo del hecho de que  $\log t$  es una función creciente de  $t > 0$ ?)

**Fonte:** Marsden e Tromba, 1998, p. 257.

Ressaltamos que na seção de exercícios propostos, como mostra a Figura 43, esses autores têm um diferencial na maneira de apresentar um exercício vinculado a outros conhecimentos, por exemplo, à área da Geometria.

**Figura 43.** Exemplo de exercício vinculado à Geometria.

- 40.** Suponer que un pentágono está compuesto de un rectángulo debajo de un triángulo isósceles (ver la figura 4.2.5). Si la longitud del perímetro es fija, hallar el área máxima posible.

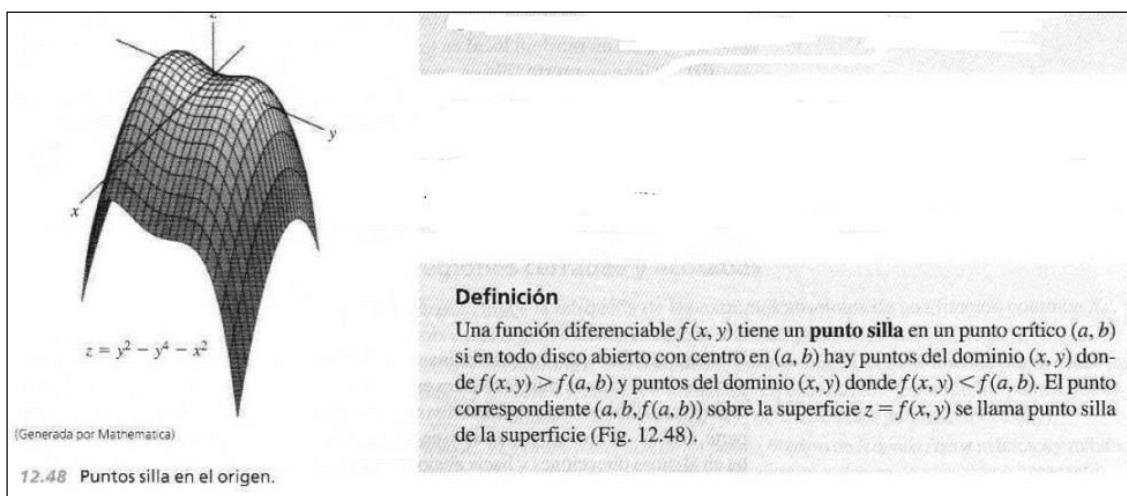


**Fonte:** Marsden e Tromba, 1998, p. 264.

Assim, Ruiz e Marsden e Tromba, a fim de estudar os valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais, não exploram frequentemente os registros gráficos. Ressaltamos novamente que a conversão do registro algébrico para o registro gráfico é feita apenas para ilustrar esses valores e para que o aluno tenha uma representação icônica dos valores máximo, mínimo e ponto de sela, de modo que os autores não propiciam a coordenação entre esses registros. As operações de tratamento no registro gráfico não são exploradas, nem se utiliza a apreensão operatória, porque nenhuma modificação é feita no gráfico para compreender os valores máximos e mínimos. Além disso, não se analisam situações cujas questões levam o aluno a desenvolver o processo de visualização na compreensão desses valores.

Já Finney (1999) apresenta um registro gráfico no espaço, mas é apenas usado como uma ilustração para identificar um ponto de sela. O autor mostra a representação algébrica de uma função de duas variáveis reais e de seu gráfico, representado no software *Mathematica*, como é mostrado na Figura 44, proporcionando a conversão do registro algébrico para o gráfico. Ressaltamos que a função representada no *Mathematica* é apenas para ilustrar o gráfico no sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$ , permitindo a apreensão perceptiva do gráfico.

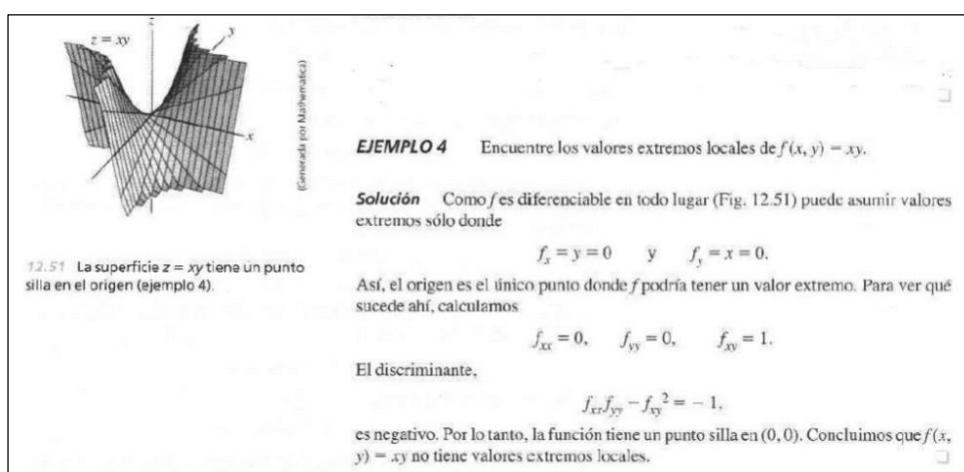
**Figura 44.** Registro gráfico CAS do ponto de sela.



**Fonte:** Thomas e Finney, 1999, p. 971.

Na seção de exercícios resolvidos, como mostra na Figura 45, notamos que a característica desse exercício é a aplicação direta do teorema das primeiras e segundas derivadas parciais. Percebemos que o autor realiza a conversão do registro algébrico para o gráfico, permitindo a apreensão perceptiva do ponto de sela. O gráfico é representado no software *Mathematica*, mas não é mostrado o comando do software que permite a conversão para o registro algébrico. O autor promove a conversão do registro algébrico para o registro gráfico CAS e os tratamentos no registro algébrico para encontrar a solução do exercício. O registro gráfico CAS somente é utilizado para ilustrar um ponto de sela e permitir uma apreensão perceptiva desse ponto.

**Figura 45.** Ilustração do ponto de sela e tratamento algébrico.



**Fonte:** Finney, 1999, p. 973.

De acordo com a Figura 46, podemos dizer que o autor aborda o teorema da segunda derivada parcial para o estudo de valores máximos e mínimos locais empregados apenas em língua formal, mas não efetua as demonstrações.

**Figura 46.** Teorema apresentado apenas o registro de língua formal.

**Teorema 8**

**Prueba de la segunda derivada para valores extremos locales**

Supongamos que  $f(x, y)$  y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en todo un disco con centro en  $(a, b)$  y que  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ . Entonces

- $f$  tiene un **máximo local** en  $(a, b)$  si  $f_{xx} < 0$  y  $f_{xy}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  en  $(a, b)$ ;
- $f$  tiene un **mínimo local** en  $(a, b)$  si  $f_{xx} > 0$  y  $f_{xy}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  en  $(a, b)$ ;
- $f$  tiene un **punto silla** en  $(a, b)$  si  $f_{xy}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$  en  $(a, b)$ .
- La prueba está inconclusa** en  $(a, b)$  si  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$  en  $(a, b)$ . En este caso tenemos que encontrar otra manera de determinar el comportamiento de  $f$  en  $(a, b)$ .

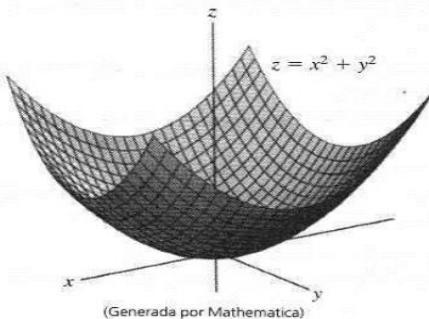
La expresión  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$  se llama **discriminante** de  $f$ . A veces es más fácil recordarlo en forma de determinante,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

**Fonte:** Finney, 1999, p. 972.

Ressaltamos que na seção de exercícios propostos, como mostra a Figura 43, é apresentado um diferencial para permitir a apreensão discursiva dos gráficos CAS.

**Figura 47.** Exemplo de apreensão discursiva.



**12.49** La gráfica de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  es el paraboloide  $z = x^2 + y^2$ . La función sólo tiene un punto crítico, el origen, que da lugar a un valor mínimo local de 0

**Fonte:** Finney, 1999, p. 972.

Os exercícios propostos, conforme mostra a Figura 40, seriam resolvidos ao se aplicarem diretamente os teoremas da derivada de primeira ordem e o teste da segunda derivada, promovendo o tratamento no registro algébrico.

**Figura 48.** Exemplo de exercícios propostos.

Encuentre todos los máximos y mínimos locales, y puntos silla de las funciones en los ejercicios 1-30.

1.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$
2.  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$
3.  $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
4.  $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$
5.  $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
6.  $f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$
7.  $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$
8.  $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$
9.  $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$

**Fonte:** Finney, 1999, p. 975.

Assim, afirmamos que Finney (1999) propicia a coordenação entre os registros de representação semiótica utilizados. O autor não permite que o registro gráfico CAS cumpra seu papel heurístico porque as operações de tratamento nesse registro não são exploradas, nem se utiliza a apreensão operatória, porque nenhuma modificação é feita no gráfico para compreender os valores máximo e mínimo. Além disso, o autor não explora situações que levam o aluno a desenvolver o processo de visualização.

Nesse sentido, afirmamos que a construção de um conjunto de situações, envolvendo o estudo de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais, não está sendo desenvolvida nos livros didáticos. A coordenação de registros de representação semiótica, as modificações no registro gráfico e/ou registro gráfico CAS e a articulação entre este registro e o registro algébrico essenciais no processo de visualização (Duval, 1999) também não são consideradas pelos livros didáticos como fundamental para que o aluno comprehenda e construa seus conhecimentos matemáticos.

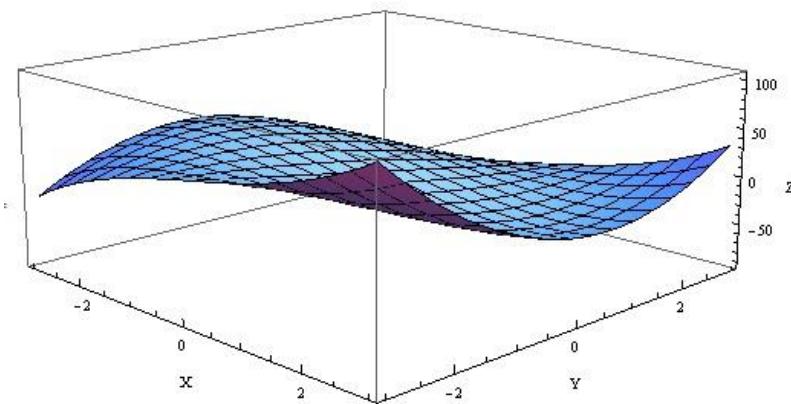
### 2.3 ESTUDO DIDÁTICO DO OBJETO MATEMÁTICO

Nesta parte, analisaremos a representação gráfica de uma função de duas variáveis para verificar se permite que o gráfico cumpra seu papel heurístico, se permite a realização de tratamentos no registro gráfico e quais apreensões ocorrem no registro gráfico, a fim de desenvolver a visualização para identificar os valores

máximo, mínimo e ponto de sela dessa representação gráfica. Além disso, para fazer essa análise, escolhemos a variável visual, posição da superfície, isto é, utilizaremos o registro gráfico *CAS\_MATH*.

Consideramos a função definida algebraicamente por  $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 6$ , no domínio  $[-3,3] \times [-3,3]$ . Sua representação gráfica é mostrada na Figura 49, e para isso escrevemos o comando `Plot3D[x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 6, {x, -3,3}, {y, -3,3}, AxesLabel \rightarrow \{X,Y,Z\}]`. Pela apreensão perceptiva, percebemos que o gráfico tem um valor máximo e um valor mínimo.

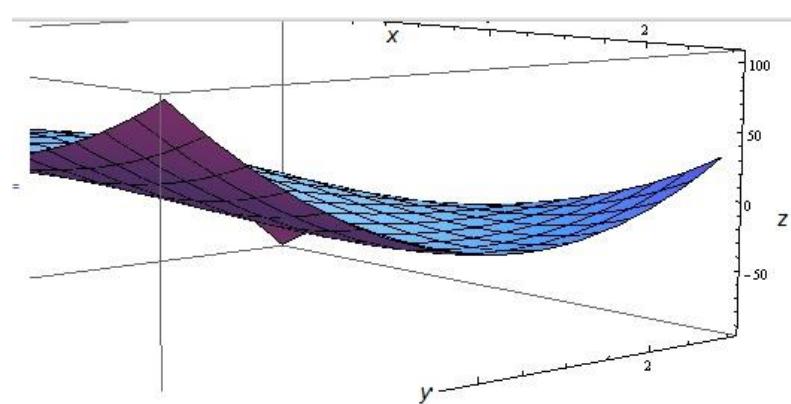
**Figura 49.** Registro gráfico *CAS\_MATH* da função  $f(x, y)=x^3+3xy^2-15x-12y+6$ .



**Fonte:** Construção da autora.

De fato, por meio de tratamentos nesse registro, ou seja, por meio de modificações posicional e ótica, podemos movimentar o gráfico e nos aproximar do possível ponto onde a função tem o valor mínimo, por exemplo, conforme mostra a Figura 50.

**Figura 50.** Modificações posicional e ótica no registro gráfico *CAS\_MATH*.

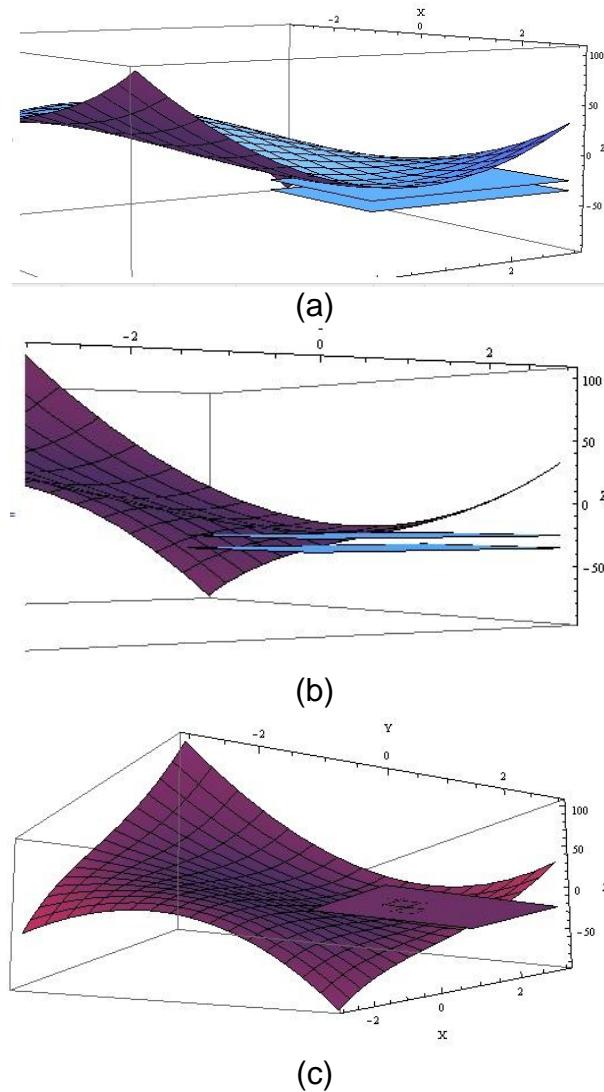


**Fonte:** Construção da autora.

Se focarmos no eixo  $z$ , poderemos conjecturar, por exemplo, que temos um valor mínimo no ponto  $(1,1)$ . Para comprová-lo, pelas modificações ótica, posicional e mereológica, observaremos a relação entre a superfície e os planos perpendiculares ao eixo  $z$  (variável visual do registro gráfico *CAS\_MATH*), conforme mostra a Figura 51. Isso significa que, por meio dessas modificações, identificamos o valor mínimo.

Podemos observar na Figura 51(a) e Figura 51(b) que os planos representados por  $z=-35$  e  $z=-25$ , respectivamente, não intersectam à superfície. No entanto, na Figura 51(c) o plano intersecta a superfície em um ponto, e, pela apreensão operatória do registro gráfico *CAS\_MATH*, observamos que a superfície se curva para cima (variável visual) e está completamente por cima do plano.

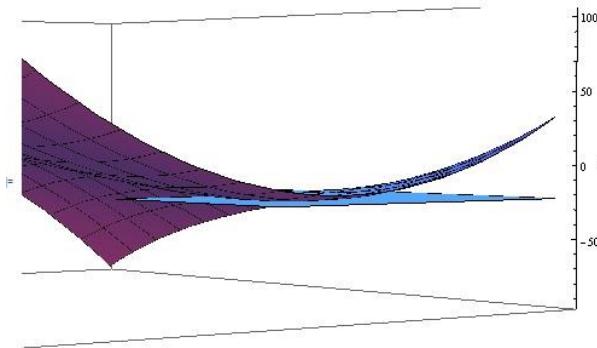
**Figura 51.** Modificações ótica, posicional e mereológica no registro gráfico *CAS\_MATH*.



**Fonte:** Construção da autora.

Podemos conjecturar, então, que o valor mínimo da função encontra-se quando o *plano perpendicular ao eixo z é tangente à superfície*. O plano com essas características seria o plano representado por  $z=-22$ , como mostra a Figura 52.

**Figura 52.** A superfície está sobre o plano  $z = -22$ .

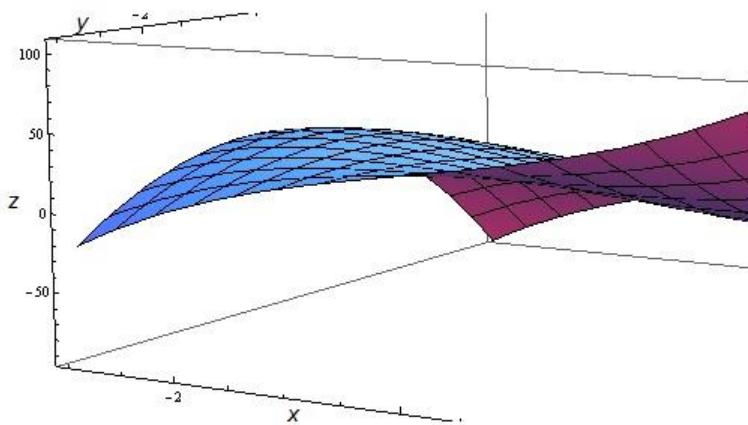


**Fonte:** Construção da autora.

Notamos que esse plano, girando o gráfico ao redor do plano  $xy$  e ao redor do eixo  $z$ , é tangente à superfície, e a superfície encontra-se totalmente sobre esse plano, além de afirmar que isso ocorre perto de um ponto de coordenadas  $(x_0, y_0)$ . Na sequência, encontraremos esse ponto onde a função tem o valor máximo.

Assim, na Figura 53, podemos observar, pela apreensão perceptiva, que essa representação tem um valor máximo. Da mesma maneira, por meio de modificações ótica e posicional no registro gráfico *CAS\_MATH*, movimentamos o gráfico e aproximamos do possível ponto onde a função tem o valor máximo, conforme mostra a Figura 53.

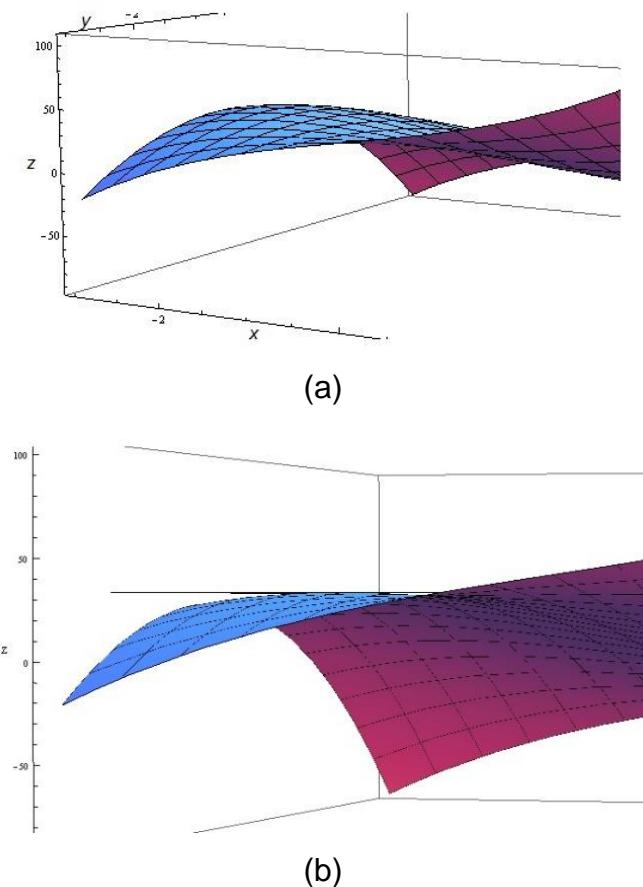
**Figura 53.** Modificação ótica no registro gráfico *CAS\_MATH*.



**Fonte:** Construção da autora.

Na sequência, se focarmos no eixo z, poderemos, também, conjecturar que temos um valor máximo no ponto  $(-1,1)$ . Para comprovar isso, tomaremos a representação gráfica de planos perpendiculares ao eixo z (modificações mereológicas no registro gráfico *CAS\_MATH*) (ver Figura 54a) para assim, discriminando uma variável visual (posição da superfície em relação ao plano perpendicular ao eixo z), observarmos a relação entre a superfície e esses planos, conforme mostra a Figura 54a. Assim, observamos, baseado nessas modificações no registro gráfico *CAS\_MATH*, que a superfície se curva para baixo e está completamente sob o plano (ver Figura 54b).

**Figura 54.** Modificação ótica, posicional e mereológica no registro gráfico *CAS\_MATH*.

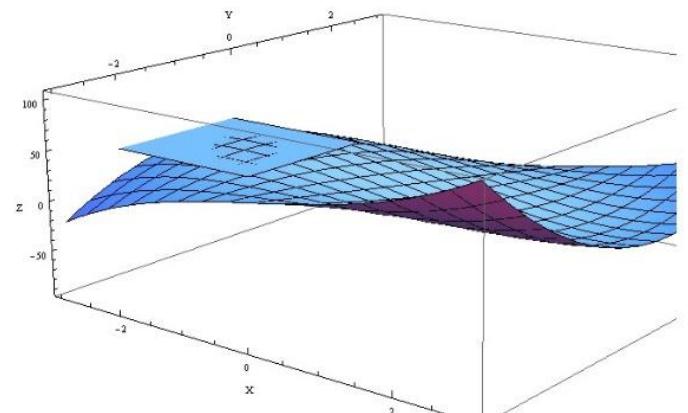


**Fonte:** Construção da autora.

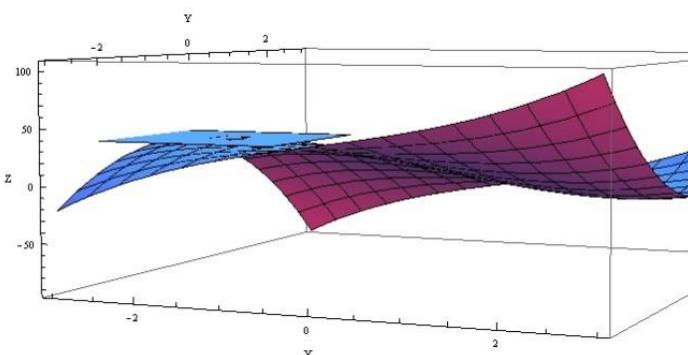
Conjecturamos, então, que o valor máximo da função encontra-se quando o *plano perpendicular ao eixo z é tangente à superfície*. E o comportamento do plano, em relação à superfície, é semelhante ao caso do valor mínimo.

Na Figura 55, podemos verificar que ocorre um máximo local no ponto  $(-2, -1)$ , porque, ao girar o gráfico ao redor do plano  $xy$  (ver Figura 55a) e ao redor do eixo  $z$ , (ver Figura 55b), esse plano é tangente à superfície, e a superfície encontra-se totalmente sob esse plano.

**Figura 55.** Modificação mereológica no registro gráfico CAS\_MATH.



(a)



(b)

**Fonte:** Construção da autora.

Em seguida, afirmamos que o estudo do valor mínimo e máximo é local, pois, aproximamo-nos até ficar bem perto tanto do valor mínimo quanto do valor máximo para formular a relação da superfície com o seu plano tangente. Formalizamos essa afirmação por meio da definição:

**Definição** Uma função de duas variáveis tem um mínimo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  se há um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$ , de modo que  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  para todo ponto  $(x, y)$  no domínio de  $f$  que está situado dentro do círculo. Uma função tem um máximo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  se há um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$ ,

de modo que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  para todo ponto  $(x, y)$  no domínio de  $f$  que está situado dentro do círculo.

Para validar essas conjecturas, no que diz respeito ao valor mínimo e máximo locais de uma função de duas variáveis, sigamos para o registro algébrico, pois sabemos que a representação algébrica do plano tangente está definida por:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

e, a representação algébrica de um plano perpendicular ao eixo z é:

$$z = z_0.$$

Logo, comparando as duas representações algébricas, já que se trata do mesmo plano, afirmamos que as derivadas parciais de primeira ordem no ponto  $(x_0, y_0)$  são zero, isto é,

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Assim, substituindo o valor das derivadas parciais na equação do plano tangente, obtemos  $z - z_0 = 0$  ou equivalentemente,  $z = z_0$ . Formalizamos esse resultado por meio do teorema seguinte:

**Teorema:** Se uma função  $f$  tem um máximo ou mínimo local em  $(x_0, y_0)$  e as derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existem nesses pontos, então  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ . E a definição:

**Definição:** Um ponto  $(x_0, y_0)$  é dito ser um ponto crítico de  $f$  se  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$  ou se uma das derivadas parciais não existe.

Na sequência, no registro algébrico, encontramos as derivadas parciais e as igualamos a zero, obtendo as equações:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \text{ e } f_y(x, y) = 6xy - 12 = 0,$$

Ao resolver esse sistema de equações, obtemos os pontos críticos de coordenadas:  $(2, 1)$ ;  $(-2, -1)$ ;  $(1, 2)$  e  $(-1, -2)$ .

Assim, é preciso notar que, no tocante à visualização do valor máximo e mínimo, o gráfico representado no software *Mathematica* cumpre seu papel heurístico à medida que permite fazer conjecturas em relação à natureza dos

pontos críticos, além de permitir que sejam efetuados tratamentos no registro gráfico e de utilizar a apreensão operatória e discursiva, uma vez que as operações visuais de tipo ótico, posicional e mereológica desenvolvem-se para relacionar esses valores às derivadas parciais de primeira ordem.

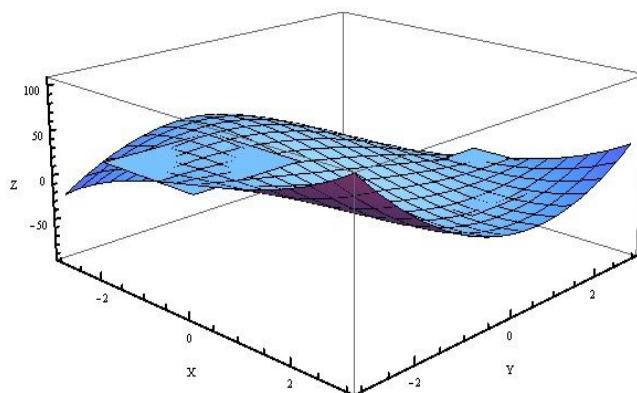
No entanto, existem outros pontos críticos. Para saber sua natureza, apoiamos-nos, de maneira semelhante, na visualização.

Substituindo, no registro algébrico, as coordenadas dos pontos críticos,  $(1,2)$  e  $(-1,-2)$  na lei de formação da função de duas variáveis reais citada anteriormente, obtemos, segundo o teorema, os planos perpendiculares ao eixo  $Z$  e tangentes à superfície, isto é,  $z=-20$  e  $z=32$ , respectivamente. Voltamos para o registro gráfico, representando esses planos (modificação mereológica), conforme Figura 56. Para isso, escrevemos os comandos

```
ContourPlot3D[{z == 32}, {x, -2, 0}, {y, -3, -1}, {z, 30, 35}, AxesLabel → {X,Y,Z},
Mesh → False]; ContourPlot3D[{z == -20}, {x, 0, 3}, {y, 0.5, 2.5}, {z, -25, -10},
AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, Mesh → False, ColorFunction → "RustTones"]
```

e  $\text{Show}[K, k1, k3]$  onde  $K$  representa a superfície,  $k1$  representa o plano  $z=32$  e  $k3$  representa o plano  $z=-20$ .

**Figura 56.** Representação gráfica dos planos  $z=-20$ ;  $z=32$ .

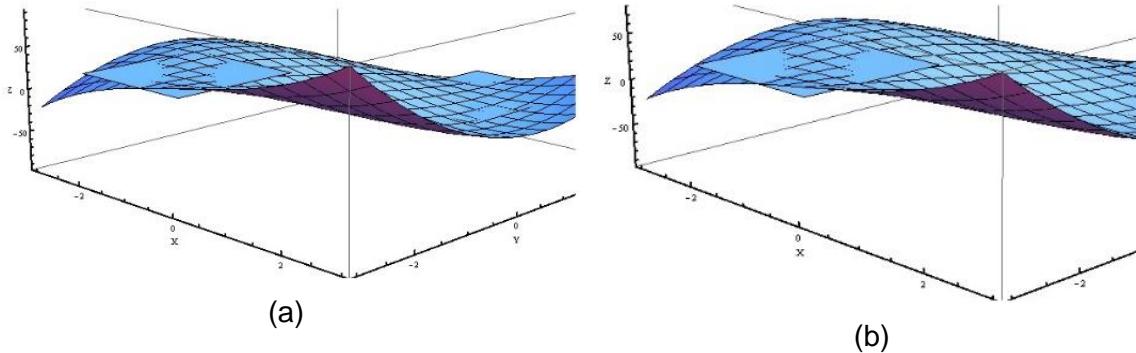


**Fonte:** Construção da autora.

Recorremos à apreensão perceptiva e operatória para conjecturar que a superfície tanto no ponto  $(-1,-2)$  quanto no ponto  $(1,2)$  não está sobre o plano nem sob o plano. Pela apreensão operatória, isto é, realizando modificações óticas (ampliamos o gráfico), aproximamo-nos do ponto  $(-1,-2)$ , conforme Figura 57a, realizando modificações posicionais (ver Figura 57b), identificamos uma variável

visual, isto é, a relação da superfície com o plano  $z=32$  no ponto  $(-1, -2)$ , conforme Figura 57.

**Figura 57.** Comportamento do plano  $z=-20$  no tocante à superfície.

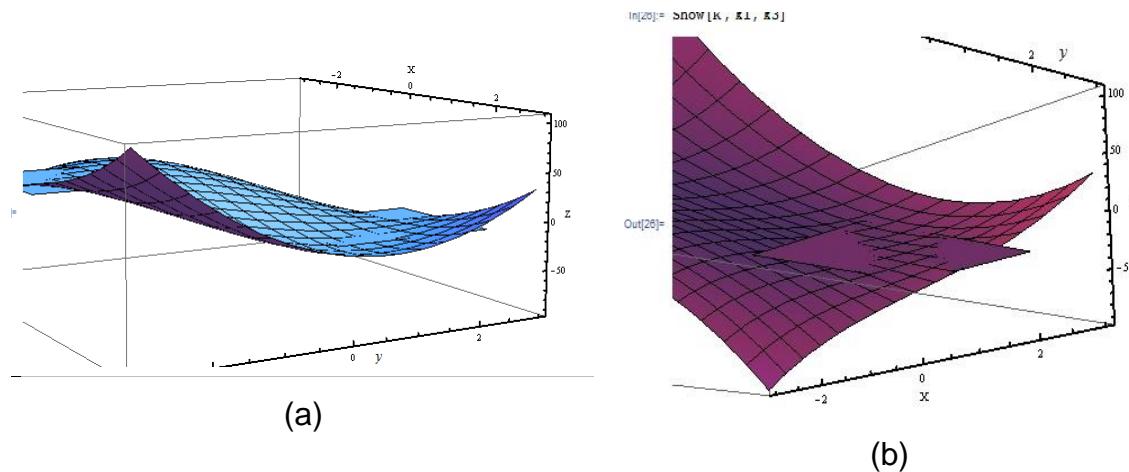


**Fonte:** Construção da autora.

Formulamos, conforme mostra a Figura 57, que o plano representado por  $z=-32$  não está sobre nem sob o plano, ou seja, o plano atravessa a superfície. Então,  $f$  não pode ter um mínimo nem máximo no ponto  $(-1, -2)$ .

No caso do ponto crítico, representado por  $(1,2)$ , recorremos à apreensão operatória, por meio de modificações. Ao realizarmos modificações óticas (ampliamos o gráfico), aproximamo-nos do ponto  $(1,2)$ , conforme Figura 58a, e ao realizar modificações posicionais (ver Figura 58b), identificamos uma variável visual, isto é, a relação da superfície com o plano  $z=-20$  no ponto  $(1,2)$ , conforme Figura 57.

**Figura 58.** Relação entre o plano  $z=-20$  e a superfície.



**Fonte:** Construção da autora.

O plano representado por  $z=-20$  também atravessa a superfície. Então, de maneira semelhante, formulamos que  $f$  não pode ter um mínimo nem máximo no ponto  $(1,2)$ .

Assim, a natureza dos pontos críticos encontrados pode ser determinada graças às condições especiais dadas pelo teorema mencionado anteriormente, mas percebemos que o estudo das derivadas parciais de primeira ordem não é suficiente para a ocorrência de valores máximos e mínimos, porque nesses dois pontos críticos,  $(1,2)$  e  $(-1,-2)$ , a função não tem valor máximo nem mínimo. Isso acontece pela suposição de que a função tinha valor máximo e/ou mínimo nesses pontos críticos. Assim, formalizaremos, por meio de outro teorema, as condições gerais suficientes para a ocorrência de valores extremos locais.

**Teorema:** Suponha que  $f(x, y)$  e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem sejam contínuas em um disco centrado em  $(x_0, y_0)$  e que  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ . Então:

1.  $f$  tem um máximo local em  $(x_0, y_0)$  se  $f_{xx} < 0$  e  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$  em  $(x_0, y_0)$ .
2.  $f$  tem um mínimo local em  $(x_0, y_0)$  se  $f_{xx} > 0$  e  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$  em  $(x_0, y_0)$ .
3.  $f$  tem um ponto de sela em  $(x_0, y_0)$  se  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$  em  $(x_0, y_0)$
4.  $f$  pode ter um máximo local ou mínimo local em  $(x_0, y_0)$ , ou  $(x_0, y_0)$  pode ser um ponto de sela de  $f$ , se  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 0$ .

É necessário destacar que o termo representado algebraicamente por  $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$  é o determinante da matriz Hessiana, ou seja:  $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ .

Dessa forma, também é preciso frisar que, no tocante à visualização do ponto de sela, o registro gráfico *CAS\_MATH* desempenha seu papel heurístico à

medida que permite fazer conjecturas em relação à natureza dos pontos críticos, além de permitir que sejam efetuados tratamentos no registro gráfico e utilizar a apreensão operatória, dado que as operações visuais de tipo ótico, posicional e mereológica se desenvolvem a fim de mostrar a necessidade de condições suficientes para a ocorrência de valores máximos, mínimos e pontos de sela.

No próximo capítulo, apresentaremos a fase de experimentação, as atividades com suas análises *a priori*, *a posteriori* e sua respectiva validação.



## Capítulo 3 - EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISES

---

No presente capítulo, descrevemos as características do curso em que se concretizam o estudo e os sujeitos da pesquisa. Explicamos o desenvolvimento do experimento e analisamos a sequência de atividades segundo o quadro teórico e a metodologia de pesquisa.

Esta pesquisa está relacionada ao tópico, valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais. A partir das situações criadas, supõe-se que os alunos participantes possuam conhecimentos prévios: retas e planos, funções vetoriais de uma variável real, curvas, superfícies quadráticas, domínio de uma função de duas variáveis, limite, continuidade, derivadas parciais, diferenciabilidade, derivadas direcionais e gradientes, planos tangentes e planos normais. Sendo assim, espera-se que os alunos do curso Matemática III estejam aptos a participar de nossa pesquisa, considerando que as noções exigidas para o êxito deste estudo tenham sido trabalhadas.

Por conseguinte, nossa pesquisa ocorreu em cinco encontros, como pode ser visto no **Apêndice A** (p. 183), cujo objetivo foi estudar como se dá o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais, para alunos de engenharia, além de mobilizar seus conhecimentos prévios supostamente adquiridos na sala de aula para chegar à solução de quatro situações didáticas e uma situação de avaliação, conforme Quadro 9.

Os alunos trabalharam tanto com o *CAS Mathematica* quanto com as noções de funções de duas variáveis reais mencionadas anteriormente, reutilizando os recursos do *software*, em especial os comandos que permitem representar

graficamente pontos, planos e superfícies no espaço. O tempo de duração de cada situação didática, mesmo para a atividade de avaliação, foi de três horas.

**Quadro 9.** Encontros na Experimentação

Encontro com os alunos	Conteúdo
1	Uma situação didática: maximizar a função lucro em relação à quantidade.
2	Uma situação didática: maximizar a função lucro em relação aos preços.
3	Uma situação didática: minimizar a função perda de calor de um edifício comercial.
4	Uma situação didática: ponto de sela
5	Situação de avaliação para aplicar os conhecimentos adquiridos.

**Fonte:** Construção da autora.

As situações didáticas e a atividade de avaliação foram apresentadas de maneira sequencial, para levar o aluno a mobilizar noções de superfícies quadráticas, de derivadas parciais, de plano tangente. É importante destacar que os conteúdos de aplicações das derivadas parciais para o estudo dos valores máximos e mínimos eram novos para eles.

Além disso, esta pesquisa tem a aprovação do Comitê de Ética, como pode ser visto no **Anexo B** (p. 198).

### 3.1 CARACTERIZAÇÃO DA FACULDADE

Realizamos a coleta de dados no laboratório de computação do curso de Engenharia de Alimentos da Universidade Nacional do Callao, da disciplina Matemática III, na cidade de Lima, no Peru.

As disciplinas da matriz curricular do curso são divididas por semestres acadêmicos, em um total de dez semestres. A disciplina de Matemática III é oferecida no terceiro semestre do curso. O número de alunos matriculados nessa disciplina é 80, dos quais 28 são alunos que fazem a disciplina pela primeira vez. Esses alunos foram a nossa população-alvo, uma vez que nunca tiveram contato

com as noções de valor máximo, mínimo e ponto de sela, exigidos para resolverem as situações.

Para o desenvolvimento da disciplina, foram necessárias quinze semanas, divididas em teóricas e práticas. Segundo a ementa da disciplina Matemática III, o estudo dos valores extremos de uma função de duas variáveis reais, assim como os temas relacionados às aplicações das derivadas parciais, corresponde à sexta semana, como pode ser visto no **Anexo A** (p. 193).

### 3.2 OS SUJEITOS DE PESQUISA

Os sujeitos de pesquisa de nosso estudo foram escolhidos conforme o critério supracitado, levando em consideração a voluntariedade. Conversamos com os alunos sobre a nossa intenção e os convidamos a participar. Fizemos uma pequena explicação de como se daria o processo.

Para responder as questões levantadas no objetivo geral e analisar as observações feitas na sala de aula: como os alunos participam, interagem, resolvem as questões, quais estratégias adotadas e, considerando o tipo de metodologia e o impacto esperado, decidimos trabalhar com 10 alunos dos 28 que fazem a disciplina pela primeira vez e conhecem os comandos básicos do software *Mathematica*.

Além dos estudantes, participaram o professor do curso (que foi um dos observadores) e quatro observadores (colegas da Universidade do Callao). Tanto os alunos quanto o professor do curso assinaram o termo de compromisso, aceitando que as informações provenientes das análises do material coletado poderiam ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos, como pode ser visto nos **Anexos C e D** (ver p. 201 e 202, respectivamente).

Ressaltamos que os alunos trabalharam em duplas e cada qual, chamada grupo, utilizou um *laptop* durante os encontros. Os grupos são chamados de Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4 e Grupo 5 (Quadro 10). Os alunos também podiam

utilizar calculadora, lápis e papel. Nesta pesquisa, os observadores registraram por escrito as observações do grupo, como pode ser visto no **Apêndice B** (p. 188).

**Quadro 10.** Os sujeitos da pesquisa.

Número de grupo	Alunos
1	– Xiomara – Yorman
2	– Enrique – Misael
3	– Anny – Romario
4	– Patricia – Giancarlo
5	– Sindy – Antony

Além disso, gravamos, no computador, as telas das atividades de todos os grupos observados. Na sequência, apresentaremos as situações didáticas e a atividade de avaliação com suas análises *a priori* e *a posteriori*.

### 3.3 ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DAS SITUAÇÕES

Nesta parte do trabalho, apresentamos as análises *a priori* e *a posteriori* das situações e a atividade final, de acordo com a metodologia da Engenharia didática.

Usamos a teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1998), porque é um modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certos conhecimentos. Assim, as situações dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo. E a visualização, por ser um meio para compreender os valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais, possibilitou a observação de diferentes registros de representação semiótica mobilizados pelos alunos, além das diferentes apreensões e modificações óticas, posicionais e mereológicas do registro gráfico, para discriminar suas variáveis visuais e relacioná-las aos valores significantes do registro algébrico, apresentado nas definições e teoremas, e assim construir a noção de valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais.

Sendo assim, analisamos como os alunos exploraram o significado dos valores máximo, mínimo e ponto de sela de funções de duas variáveis reais por meio da visualização. Propiciamos situações de aprendizagem, para que pudessem construir no papel ou na tela do computador seus próprios gráficos.

Os alunos foram levados a um laboratório de computação da Faculdade, onde receberam uma folha de papel com uma situação cujos procedimentos e justificativa deveriam ser descritos. Em seguida, os participantes resolveram a mesma situação no computador.

O desenvolvimento das situações foi realizado em uma ficha de trabalho que foi entregue aos alunos pela professora investigadora. A professora investigadora observou o trabalho dos grupos e somente se manifestava quando solicitada, limitando-se a esclarecer alguns termos em espanhol. A institucionalização das noções foi realizada ao final de cada situação, levando em conta as considerações e formulações dos grupos.

O esclarecimento do texto, apenas quando solicitado, pretende que o professor não induza os grupos na direção das soluções esperadas. A mediação do professor será por meio de perguntas que impulsionem a mobilizar os supostos conhecimentos prévios.

Neste trabalho, foram abordadas as variáveis microdidáticas, ou locais, que são aquelas relacionadas “à organização local da Engenharia, isto é, à organização de uma sequência ou de uma fase” (ARTIGUE, 1988, p. 291).

As escolhas das variáveis microdidáticas para a elaboração das situações didáticas visam utilizar e enfatizar a mudança entre registros em língua natural, algébrico e gráfico abordados, dentro de contextos da economia e física, assim como o tratamento dentro do registro gráfico e/ou no registro gráfico CAS, a partir das operações visuais nas ações das modificações óticas, posicionais e mereológicas de funções de duas variáveis reais, cujas representações algébricas são conhecidas ou não conhecidas pelos grupos. Essas escolhas permitem a conjectura e a busca de soluções.

### Situação 01<sup>9</sup>

Uma empresa de Smartphone está vendendo para o setor adolescente, por seis meses, um novo modelo de alta tecnologia e desempenho em duas cidades do Peru: Cuzco y Piura. A empresa, para facilitar seu estudo de mercado, considera necessário que o preço unitário esteja determinado linearmente pela quantidade demandada nesse período de tempo. Desse modo, em Cuzco, se o preço é de S/<sup>10</sup>. 300, a demanda é de 700 Smartphones; se o preço é de S/. 500, a demanda é de 500 Smartphones; se o preço é de S/. 1000, nenhum aparelho é vendido. Por outro lado, em Piura, se o preço é de S/. 300, a demanda é de 540 Smartphones; se o preço é de S/. 500, a demanda é de 340 Smartphones e se o preço é de S/. 840, nenhum aparelho é vendido. O Custo fixo de fabricação é de 60 soles e o custo variável que depende da quantidade produzida é quarenta vezes a quantidade vendida nas duas cidades. Quantos Smartphones devem ser vendidos em cada cidade para obter o maior lucro e qual é o valor desse lucro?

#### *Análise a priori*

O objetivo desta situação é levar o aluno a perceber a existência do valor máximo local e do valor de máximo local de uma função de duas variáveis do tipo  $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$  a partir da utilização de algumas noções básicas da área da economia, tais como: função demanda, função oferta, função custo total, função receita, função lucro, visto que os alunos de Engenharia estudam a disciplina de Engenharia Econômica e Financeira no mesmo semestre. Ademais, a representação algébrica da função lucro é uma função de duas variáveis reais, cuja representação gráfica é um paraboloide circular reto conhecido pelos alunos, pois, segundo a ementa da disciplina, essa noção já tinha sido ensinada. Dessa forma, consideraremos que os alunos podem resolver a situação-problema de maneira algébrica.

Expomos, a seguir, a resolução do problema, identificando a variável que representa a quantidade de Smartphone vendida por seis meses, por exemplo,  $q$ ,

<sup>9</sup> Baseado nos dados proporcionados no livro *Matemáticas para administración y economía*. Haeussler, Ernest F. Prentice Hall 2003. p. 776

<sup>10</sup> S/. é o símbolo da moeda corrente no Peru (nuevos soles).

e a variável que representa o preço unitário do Smartphone, por exemplo,  $p$ . Ademais, segundo os dados do problema, o preço está relacionado com a quantidade total demandada de Smartphones e essa relação é linear. Assim, o preço será determinado pela função demanda de mercado, que é a relação entre  $p$  e  $q$ , representada algebricamente por  $p = f(q)$ .

Portanto, o preço unitário na cidade de Cuzco, representado por  $p_1$ , está relacionado com a quantidade de Smartphones vendida por seis meses, na mesma cidade, representada por  $q_1$ . Pode-se fazer uso de uma tabela para registrar os dados, por exemplo:

$q_1$	700	500	0
$p_1$	300	500	1000

De maneira análoga, o preço unitário na cidade de Piura, representado por  $p_2$ , está relacionado com a quantidade de Smartphones vendida por seis meses, na mesma cidade, representado por  $q_2$ . Pode-se, também, recorrer a uma tabela para registrar os dados, por exemplo:

$q_2$	540	340	0
$p_2$	300	500	840

Desse modo, a função demanda para a cidade de Cuzco está definida e representada por  $p_1 = f(q_1)$  e a função demanda para a cidade de Piura está definida e representada por  $p_2 = f(q_2)$ .

Dado que essa relação é linear, definimos a função demanda tanto para a cidade de Cuzco,  $p_1$ , quanto para Piura,  $p_2$ , como:  $p_1 - 300 = m_1(q_1 - 700)$ , em que  $m_1$  representa o coeficiente angular da reta e a função demanda para a cidade de Cuzco, ou seja,  $m_1 = \frac{500-300}{500-700}$ , substituindo na equação anterior resulta:

$$\begin{aligned} p_1 - 300 &= \frac{500 - 300}{500 - 700}(q_1 - 700) \\ p_1 &= -(q_1 - 700) + 300 \\ p_1 &= -q_1 + 1000 \end{aligned}$$

De maneira semelhante,  $m_2$  representa o coeficiente angular da reta que representa a função demanda para a cidade de Piura, ou seja,

$$\begin{aligned} p_2 - 300 &= m_2(q_2 - 540) \\ p_2 - 300 &= \frac{500 - 300}{340 - 540}(q_2 - 540) \\ p_2 &= -(q_2 - 540) + 300 \\ p_2 &= -q_2 + 840 \end{aligned}$$

Como a função lucro é definida como a diferença entre a função receita, representada por  $R$ , e a função custo, representada por  $C$ , é necessário determinar as expressões algébricas que as representam. Chama-se função receita o produto da quantidade vendida de um produto pelo preço de venda, então podemos representá-la, tanto para a cidade de Cuzco quanto para Piura, respectivamente, pela expressão:

$$R_1(q_1) = q_1 f(q_1) \text{ e } R_2(q_2) = q_2 f(q_2)$$

O custo pela venda dos smartphones nas duas cidades juntas é dado por:

$$C(q_1, q_2) = 60 + 40(q_1 + q_2).$$

Logo, a função lucro está definida por:

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2) &= R_1(q_1) + R_2(q_2) - C(q_1, q_2) \\ &= q_1 f(q_1) + q_2 f(q_2) - (60 + 40(q_1 + q_2)) \\ &= q_1(1000 - q_1) + q_2(840 - q_2) - 60 - 40q_1 - 40q_2 \\ &= 1000q_1 - q_1^2 + 840q_2 - q_2^2 - 60 - 40q_1 - 40q_2, \end{aligned}$$

Ou seja,

$$L(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 960q_1 + 800q_2 - 60$$

Para solucionar o problema, determinando o lucro máximo e as quantidades, temos o caminho algébrico.

Algebricamente seria possível uma solução a partir de tratamentos na expressão algébrica, no sentido de transformá-la na forma canônica, isto é,

$$-(L - 390340) = (q_1 - 480)^2 + (q_2 - 400)^2,$$

porque a partir dessa expressão é possível associá-la a uma forma algébrica conhecida, ou seja, associá-la a um paraboloide circular reto que abre para baixo. A partir dessa representação algébrica, pode-se identificar o par ordenado  $(480, 400)$  como o ponto que determina o valor máximo para o lucro, assim  $L(480, 400) = 390340$  é o valor máximo da função.

As variáveis didáticas são as seguintes:

- Os valores dos preços dos smartphones;
- A quantidade de smartphones vendidos;
- A relação do preço unitário de smartphone com a quantidade vendida de smartphone;
- A função custo total;
- A função lucro, cuja representação algébrica é uma função de duas variáveis do tipo  $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e..$

Nessa parte, esperamos que todos os grupos, após lerem o problema, realizassem a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico. Para isso, os grupos poderiam representar o objeto preço com a letra  $p$  e o objeto quantidade de smartphones vendidos com a letra  $q$ , dado que os grupos possuem noções de economia. A venda dos smartphones acontece em duas cidades diferentes, então poderia o grupo representar cada um dos objetos mencionados acima por  $p_1$  e  $q_1$ , respectivamente, para a cidade de Cuzco, e, por  $p_2$  e  $q_2$ , para a cidade de Piura. Logo, organizaram esses dados colocando-os em uma tabela.

Visto que a relação entre o preço e a quantidade é linear, esperamos que os grupos, por meio de tratamentos no registro algébrico, isto é, pelas operações possíveis em equações e expressões algébricas, definissem a função de demanda tanto para Cuzco quanto para Piura, respectivamente, como:  $p_1 = -q_1 + 1000$  e  $p_2 = -q_2 + 840$ . Dessa maneira, os grupos poderiam identificar a função receita e, por meio de tratamento no registro algébrico, defini-la como:

$$R_1(q_1) = q_1 f(q_1) = -q_1^2 + 1000q_1 \text{ e } R_2(q_2) = q_2 p(q_2) = -q_2^2 + 840q_2$$

Uma vez que a função lucro é definida como a diferença entre a função receita e a função custo, esperamos que os grupos de alunos expressassem

algebricamente essa diferença como  $L(q_1, q_2) = R_1(q_1) + R_2(q_2) - C(q_1, q_2)$ , percebendo que é uma função de duas variáveis reais. Por meio de tratamentos no registro algébrico, definiram a função lucro como:

$$L(q_1, q_2) = -q_1^2 - q_2^2 + 960q_1 + 800q_2 - 60.$$

Poderia acontecer que os grupos de alunos percebessem que essa representação algébrica poderia ser expressa de forma canônica como:

$$L = -(q_1 - 480)^2 - (q_2 - 400)^2 + 390340$$

A partir dessa representação, poderiam formular que a expressão algébrica representa uma função de duas variáveis reais, cuja representação gráfica é um paraboloide circular reto, que o possível ponto de valor máximo é o ponto  $(480, 400)$ , e que por meio da substituição desse ponto na função obtém-se o máximo lucro, isto é, o máximo lucro é S/. 390 340.

**Institucionalização local:** Nessa situação generalizamos os resultados a partir das ações e formulações feitas por todos os grupos. A professora investigadora institucionalizou a noção de valor máximo por meio da observação.

**Diz-se que a função de duas variáveis tem um máximo local em um ponto  $(x_0, y_0)$ ; se perto desse ponto, o valor da função é maior ou igual ao valor da função em qualquer outro ponto  $(x, y)$  do domínio dele.**

### Análise a posteriori

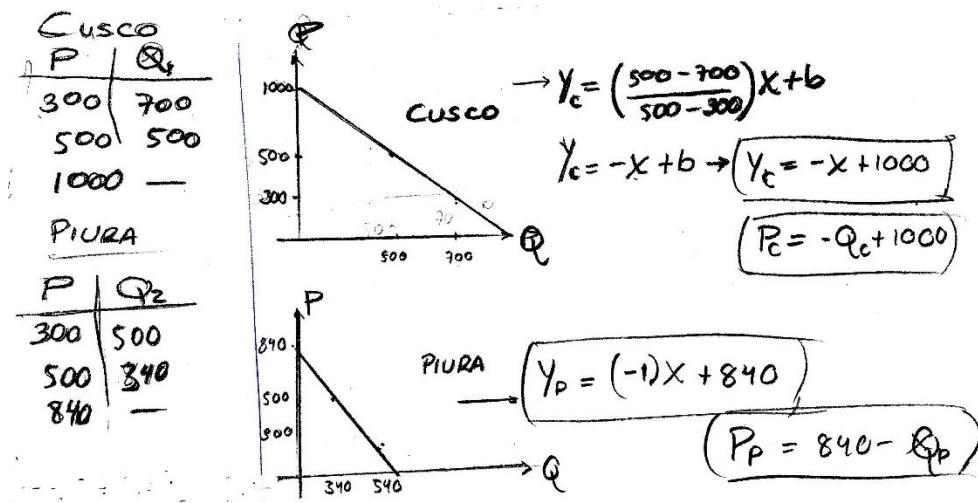
No início dessa situação didática todos os alunos leram o enunciado do problema e começaram a trabalhar em grupos, trocaram ideias, realizaram as ações e formulações para dar solução à situação como tínhamos pressuposto na análise *a priori*. Os tratamentos no registro numérico foram efetuados com uma calculadora científica.

Na sequência, analisaremos com mais detalhe as ações, em relação à função demanda, a qual é uma função de uma variável real, dos grupos 2, 3 e 5, visto que realizaram outras ações que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

O **grupo 2**, no ambiente lápis e papel, representou a função demanda tanto para a cidade de Cuzco quanto para Piura, e coordenou os registros tabular, gráfico e algébrico, conforme a Figura 59. Observamos que o grupo 2 realizou a conversão

do registro em língua natural para o registro tabular, do registro tabular para o registro gráfico, a partir de uma construção ponto a ponto, ou seja, o tratamento da representação gráfica limitou-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial, o que favoreceu o traçado do gráfico.

**Figura 59.** Representações semióticas da função demanda.



**Fonte:** Produção do grupo 2.

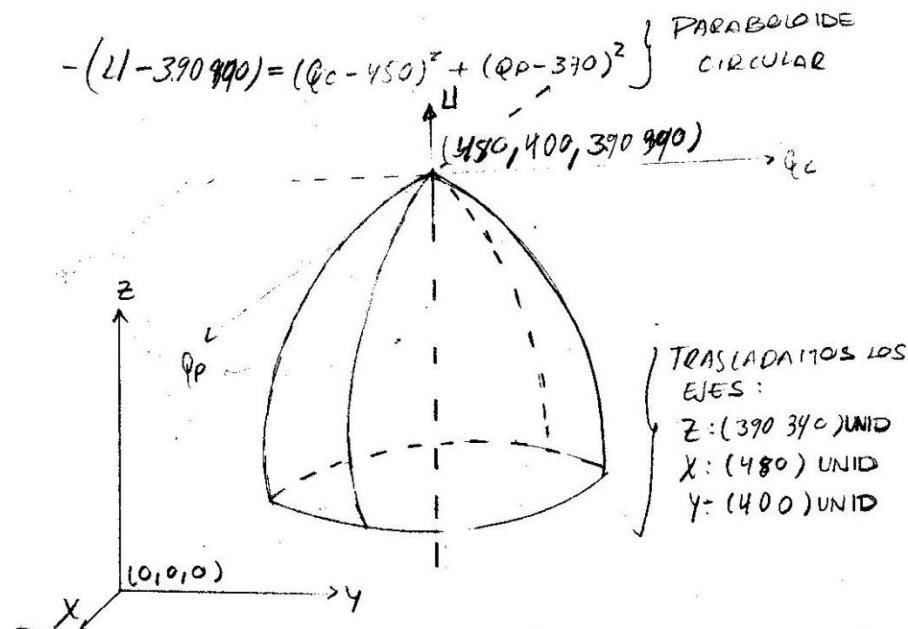
Na passagem do registro gráfico para o registro algébrico, o grupo mobilizou a noção de inclinação de uma reta para encontrar a equação correspondente, identificando as variáveis visuais, definidas por Duval (ver p. 63): sentido de inclinação e posição sobre o eixo  $y$ , correspondentes às unidades significativas da expressão algébrica da função linear afim  $y = ax + b$ , isto é, o coeficiente  $a$  e a constante  $b$ .

Observamos, também, que o grupo 2 representou as variáveis da função demanda de duas formas: as variáveis  $x$  e  $y$ , e  $Q_c$  e  $Q_p$ , que representam as quantidades de smartphones vendidas em Cuzco e Piura, respectivamente,  $P_c$  e  $P_p$ , que representam os preços dos Smartphones tanto em Cuzco quanto em Piura.

Afirmamos que o grupo 2 conseguiu desenvolver o processo de visualização na construção da função demanda, porque organizou as relações entre as variáveis visuais do registro gráfico com as variáveis significantes do registro algébrico, isto é, o tratamento na representação gráfica foi efetivado desde a abordagem de interpretação global das propriedades gráficas, o que garante o processo de visualização na construção de uma função de uma variável real.

Em relação à construção da função lucro (função de duas variáveis reais), uma ação que merece nossa atenção é a produção, no ambiente lápis e papel, do registro gráfico da função lucro feita pelo grupo 2, para entender o significado do valor máximo, como mostra a Figura 60. Tal fato não havia sido pressuposto na nossa análise *a priori*.

**Figura 60.** Produção de uma representação gráfica pelo grupo 2.



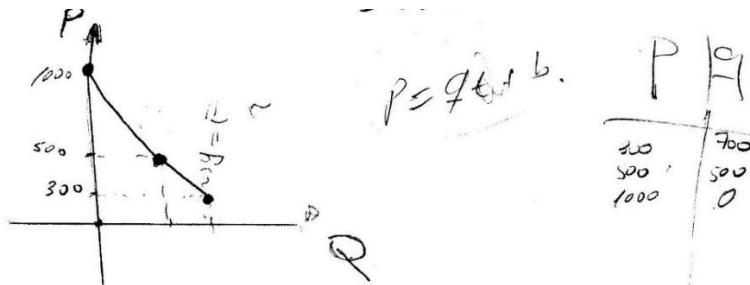
**Fonte:** Produção do grupo 2.

Na passagem do registro algébrico para seu registro gráfico, o grupo 2 identificou no registro algébrico (equação em forma canônica) o vértice do paraboloide circular e o eixo desse paraboloide (eixo  $z$ ), o que ajudou na conversão para o registro gráfico. Pela apreensão operatória nesse registro, isto é, no desenho de algumas variáveis visuais, corte no plano vertical  $y$  e uma curva de contorno (modificação mereológica) e translação do registro gráfico (modificação posicional), o grupo 2 teve uma apreensão perceptiva da superfície e mostrou que a função lucro tem um valor máximo no ponto de coordenadas (480, 400). Isto quer dizer que o grupo identificou uma associação entre valores numéricos, pois mostrou esses valores, representados no registro algébrico, no registro gráfico.

O **grupo 3**, realizou ações diferentes, visto que formou o registro gráfico da função demanda somente para a cidade de Cuzco, realizando a conversão do registro tabular para o registro gráfico, conforme a Figura 61. O tratamento na

representação gráfica limitou-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial.

**Figura 61.** Conversão de registros de função demanda.



**Fonte:** Produção do grupo 3.

Para formar a representação algébrica da função demanda, o grupo 3, a partir da representação tabular, substituiu os valores na equação da função afim,  $P_{(a)} = aQ + b$ , para encontrar a representação algébrica da função demanda, conforme mostra a Figura 62. Observemos que, na representação algébrica dessa função, a representação das variáveis é própria do grupo 3.

**Figura 62.** Conversão de registro tabular para o registro algébrico.

$$\begin{aligned}
 & \text{Função Linear} \\
 & P_{(a)} = aQ + b \\
 & \text{Puta: } P = 300 \text{ e } Q = 700 \\
 & 300 = a \cdot 700 + b \quad (I) \\
 & \text{Puta: } P = 500 \text{ e } Q = 500 \\
 & 500 = a \cdot 500 + b \quad (II) \\
 & \text{Puta } P = 1000 \text{ e } Q = 0 \\
 & 1000 = 0 \cdot a + b \quad (III) \\
 & \rightarrow \text{de } I, II \text{ e } III \Rightarrow b = 1000 \text{ e } a = -1 \\
 & \therefore P(Q) = 1000 - Q, \text{ para cima}
 \end{aligned}$$

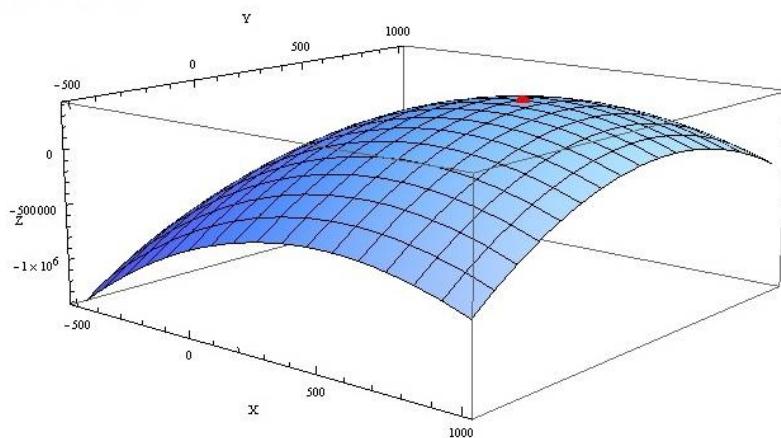
**Fonte:** Produção do grupo 3.

Constatamos que o grupo 3 não realizou modificações no registro gráfico e não identificou nem discriminou as variáveis visuais para, então, associá-las às variáveis significantes,  $a$  e  $b$ , do registro algébrico. Isto quer dizer que na conversão do registro gráfico para o registro algébrico não houve um conhecimento das regras

de correspondência semântica entre o registro gráfico e a expressão algébrica, a qual é necessária para a congruência e para o processo de visualização.

Assim, observamos que o grupo 3, efetuou a conversão do registro algébrico para o registro gráfico *CAS\_MATH* (variável visual). Essa conversão foi realizada para ter uma apreensão perceptiva do valor máximo da função lucro, como mostra a Figura 63, o que permitiu formular que o valor máximo era aquele encontrado no modo algébrico. Isso significa que o registro gráfico *CAS\_MATH*, nesse caso, permitiu uma representação icônica do valor máximo para o grupo 3.

**Figura 63.** Representação gráfica do valor máximo.



**Fonte:** Produção do grupo 3.

No tocante à representação algébrica da função lucro, por meio da análise mostrada na Figura 64, o grupo formulou o valor máximo e o valor de máximo da função lucro, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 64.** Análise da representação algébrica da função lucro.

$$U_T = 390340 - [(Q_P - 400)^2 + (Q_C - 480)^2]$$

Para una max  $\Rightarrow Q_P = 400$  e  $Q_C = 480$

$$(Q_P - 400)^2 = 0 \rightarrow Q_P = 400$$

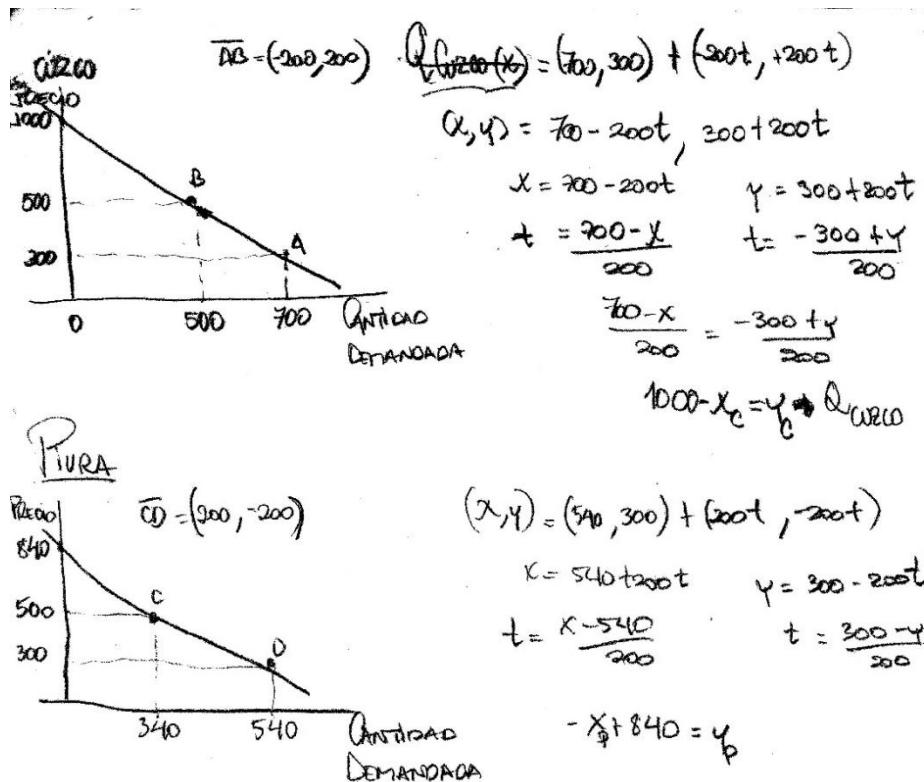
$$(Q_C - 480)^2 = 0 \rightarrow Q_C = 480$$

$$\Rightarrow U_T = 390340$$

**Fonte:** Produção do grupo 3.

O grupo 5, diferente do grupo 2, realizou a conversão do registro em língua natural para o registro gráfico e deste registro para o registro algébrico, conforme mostramos na Figura 65.

**Figura 65.** Representação Gráfica e algébrica da função demanda.



**Fonte:** Produção do grupo 5.

Na passagem do registro gráfico para o registro algébrico, o grupo 5 utilizou a noção de direção para encontrar a equação correspondente, mobilizando a noção de equação vetorial de uma reta, o que não havíamos pressuposto na análise *a priori*. O grupo 5 identificou as variáveis visuais: vetor direção e vetor inicial correspondentes às unidades significativas da representação algébrica vetorial da reta,  $\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{v}$ , isto é,  $\vec{P}_0$  e  $\vec{v}$ : vetor inicial e vetor direção. Por meio de tratamentos no registro algébrico, encontra-se a representação algébrica cartesiana da reta.

Assim, afirmamos que o objetivo dessa situação foi atingido, já que o aluno reconheceu a existência de valor máximo e determinou o valor de máximo para uma função de duas variáveis. Referente ao processo de visualização, os grupos somente construíram as funções lineares de uma variável real. Notamos que as situações mobilizadas foram de ação e formulação.

Logo, com apoio nas formulações feitas pelos grupos, institucionalizamos localmente uma observação, conforme citamos anteriormente.

### **Situação 02<sup>11</sup>**

A contínua necessidade de atender à demanda de produtos variados e saudáveis a todo tipo de consumidores motivou uma empresa a elaborar bolachas naturais e a lançar no mercado dois tipos delas: a bolacha integral e a bolacha de aveia, cuja apresentação é feita em pacotes de 24 unidades. Os custos totais de produção são de dois e três reais por pacote, respectivamente. A demanda (em milhares de pacotes) de bolachas integrais que pode ser vendida é quatro vezes a diferença do preço do segundo produto em relação ao primeiro, e a demanda (em milhares de pacotes) de bolachas de aveia é quatro vezes a diferença do preço do primeiro produto em relação a duas vezes o preço do segundo, mas a preferência dos consumidores por essa bolacha incrementa sua demanda sempre em 36 milhares de pacotes. Quais seriam os preços de venda por pacote de cada tipo de bolacha para obter o maior lucro e qual é o valor desse lucro? Justifique sua resposta.

### **Análise a priori**

Essa situação tem por finalidade levar o aluno a compreender as noções de valor máximo local e do valor de máximo local de uma função de duas variáveis do tipo  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$  permitindo que os alunos mobilizem seus conhecimentos a respeito de plano tangente a uma superfície e derivadas parciais em um ponto que já foram construídas pelos alunos.

Apresentamos, a seguir, a resolução do problema. Para construir a representação algébrica da função lucro – função de duas variáveis reais – oferecemos dois procedimentos: O primeiro, de acordo com os dados do problema, representa, por exemplo, o objeto custo total de produção tanto do pacote de bolacha integral quanto do de aveia por  $c_1$  e  $c_2$ , sendo a função custo total por pacote dada por:  $c_1=2$  e  $c_2=3$ , respectivamente.

---

<sup>11</sup> Baseado nos dados proporcionados do livro *Matemáticas para administración y economía*. Haeussler, Ernest F. Pretince Hall 2003, p. 776.

A função de demanda é a relação entre o preço, representado por  $p$ , e a quantidade demanda, representada por  $q$ ; de acordo com os dados do problema, representam, por exemplo, os preços de venda em reais por pacote de cada tipo de bolacha por  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, e a quantidade demanda de pacotes de cada tipo de bolacha por  $q_1$  e  $q_2$ , respectivamente. Logo, segundo o problema, a função demanda de bolachas integrais é representada algebricamente por:

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 4(p_2 - p_1),$$

e a função demanda de bolachas de aveia é representada algebricamente por

$$q_2 = f(p_1, p_2) = 36 + 4(p_1 - 2p_2).$$

Como o lucro por pacote de bolacha integral depende da receita por pacote e do custo de produção, é necessário determinar a expressão algébrica que a represente. A função Receita é o produto da quantidade vendida por pacote de bolacha integral pelo preço de venda, então podemos representá-la pela expressão:

$$R_1(q_1) = p_1$$

Do mesmo modo, definimos e representamos a função Receita por pacote de bolacha de aveia por:

$$R_2(q_2) = p_2$$

Como o lucro, representado por  $l$ , por pacote de bolacha integral é a diferença entre a receita e o custo total, temos que:  $l(p_1) = R_1(q_1) - c_1 = p_1 - 2$ . O lucro por pacote de bolacha de aveia é expresso por  $l(p_2) = R_2(q_2) - c_2 = p_2 - 3$ . Logo, o lucro total é a soma do produto do lucro por pacote de bolacha integral pela demanda (em milhares) de pacotes de bolacha integral mais o produto do lucro por pacote de bolacha de aveia pela demanda (em milhares) de pacotes de bolacha de aveia. Assim, a função lucro é uma função de duas variáveis representada por:

$$\begin{aligned} l(p_1, p_2) &= (p_1 - 2)q_1 + (p_2 - 3)q_2 \\ &= (p_1 - 2)[4(p_2 - p_1)] + (p_2 - 3)[36 + 4(p_1 - 2p_2)] \\ &= (4p_1 - 8)(p_2 - p_1) + ((p_2 - 3)(36 + 4p_1 - 8p_2)) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$l(p_1, p_2) = 8p_1p_2 + 52p_2 - 4p_1^2 - 4p_1 - 8p_2^2 - 108.$$

Em um primeiro momento, defini-se a função receita total como a soma da receita pela venda (em milhares de pacotes) de bolacha integral mais a receita pela venda (em milhares de pacotes) de bolacha de aveia, representando-a algebraicamente como:

$$R_T(p_1, p_2) = R_1(p_1, p_2) + R_2(p_1, p_2),$$

em que, segundo os dados do problema, a receita pela venda (em milhares de pacotes) de bolacha integral é representada algebraicamente por:

$$R_1(p_1, p_2) = 4(p_2 - p_1) \cdot p_1$$

e, a receita pela venda (em milhares de pacotes) de bolacha de aveia, é representada algebraicamente por:

$$R_2(p_1, p_2) = [36 + 4(p_1 - 2p_2)] \cdot p_2.$$

Em um segundo momento, defini-se a função custo total pela produção de milhares de bolachas, tanto integrais quanto de aveia, e representá-las algebraicamente como:

$$C(p_1, p_2) = 2q_1 + 3q_2.$$

Logo, representa-se a função lucro por:

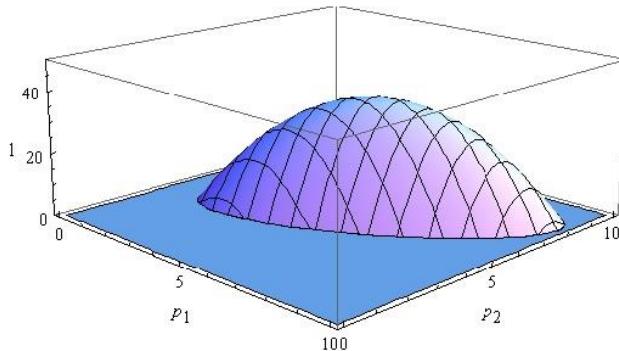
$$\begin{aligned} l(p_1, p_2) &= R_T(p_1, p_2) - C(p_1, p_2) \\ &= 4(p_2 - p_1) \cdot p_1 + [36 + 4(p_1 - 2p_2)] \cdot p_2 - [2q_1 + 3q_2] \\ &= 8p_1p_2 - 4p_1^2 - 8p_2^2 + 52p_2 - 4p_1 - 108 \end{aligned}$$

Para determinar o lucro máximo e os preços por sacola de cada tipo de bolacha que gera esse lucro, usamos o caminho gráfico, embora só esse registro não seja suficiente para resolver o problema.

Dado que a expressão algébrica da função lucro é desconhecida pelo aluno, mesmo que se tente expressá-la de maneira canônica, busca-se o registro gráfico para ter uma percepção e perceber seu comportamento. Para isso, escrevemos o comando do CAS *Mathematica* `Plot3D[8p1p2 + 52p2 - 4p1^2 - 4p1 - 8p2^2 - 108, {p1, 0, 10}, {p2, 0, 10}, PlotRange → {0, 50}, AxesLabel → {p1, p2, l}]`, para gerar o registro gráfico *CAS\_MATH* da função lucro como mostra a Figura 66, em que, por exemplo, o domínio da função é  $[0,10] \times [0,10]$ , dado que o ponto de valor de máximo fica perto desse intervalo e o valor máximo de  $l$  se acha no intervalo  $[0,50]$ . Além disso,

nesses intervalos, pode-se observar a natureza do ponto crítico de uma maneira local.

**Figura 66.** Representação gráfica da função lucro.



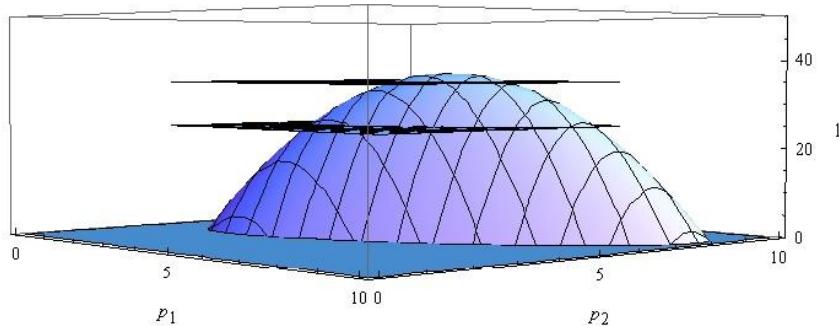
**Fonte:** Construção da autora.

Por meio de tratamentos nesse registro gráfico (modificações de tipo ótico e posicional) e pela apreensão perceptiva, distinguimos o possível valor máximo. A seguir, por meio do comando

```
ContourPlot3D[{l == 25, l == 35}, {p1, 2, 8}, {p2, 2, 8}, {l, 0, 50}, AxesLabel → {p1, p2, "l"}],
```

traçamos planos paralelos ao plano  $p_1p_2$  que passam perto do possível valor máximo, como é mostrado na Figura 67.

**Figura 67.** Representação gráfica dos planos paralelos ao plano  $p_1p_2$  na superfície.



**Fonte:** produção da autora com apoio do software *Mathematica*.

Pelo que observamos, inferimos que o valor máximo acontece quando o plano paralelo ao plano  $p_1p_2$  é tangente à superfície. Na sequência, voltamos ao registro algébrico, considerando a representação algébrica do plano tangente:  $z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$ .

Como os planos são paralelos ao plano  $p_1p_2$ , ou seja, são paralelos ao plano paralelo a  $XY$ , então as derivadas parciais respeito a  $x$  e  $y$  são zero. Encontramos, assim, o ponto em que essas derivadas são zero, isto é,

$$\frac{\partial l}{\partial p_1} = 8p_2 - 8p_1 - 4 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial l}{\partial p_2} = 8p_1 + 52 - 16p_2 = 0.$$

Ao resolver essas equações, encontramos um único ponto cujas coordenadas são (5,5,6), logo o valor máximo acontece nesse ponto, o qual chamaremos de ponto crítico. Substituímos as coordenadas desse ponto na função lucro para obter o máximo lucro, cujo valor é  $l = 37\,000$ .

As variáveis didáticas são as seguintes:

- A função custo total de produção dos pacotes de bolacha;
- A função demanda dos pacotes de bolacha;
- Os preços de venda dos pacotes de bolacha;
- A função lucro, cuja representação algébrica é do tipo  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ .

Nessa parte, esperamos que todos os grupos, após terem lido o enunciado do problema, realizassem a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, podendo representar o objeto custo total de produção com a letra  $C$ , por exemplo; o objeto função demanda, por exemplo, por  $q = f(p_1, p_2)$ , dado que, segundo os dados da situação, este relaciona a quantidade de pacotes de bolacha (em milhares) aos preços unitários de cada pacote de bolacha, e o objeto receita total à venda de pacotes de bolachas por  $R_T$ . Para representar algebricamente cada um dos objetos, os grupos poderiam representá-los tanto para as bolachas integrais quanto para as de aveia, ou seja:

Para as bolachas integrais, a função de demanda de bolachas seria representada por:

$$q_1 = 4(p_2 - p_1),$$

a função receita seria representada como:

$$R_1(p_1, p_2) = 4(p_2 - p_1)p_1,$$

De maneira semelhante para as bolachas de aveia, a função de demanda de bolachas seria representada por:  $q_2 = 36 + 4(p_1 - 2p_2)$ , e a função receita poderia ser representada como:  $R_2(p_1, p_2) = [36 + 4(p_1 - 2p_2)]p_2$ .

Esperamos que os grupos, por meio de tratamentos no registro algébrico (operações possíveis em equações e expressões algébricas), expressem de maneira algébrica a função lucro representada por:

$$l(p_1, p_2) = 8p_1p_2 + 52p_2 - 4p_1^2 - 4p_1 - 8p_2^2 - 108.$$

Poderiam tentar expressá-la de forma canônica, mas perceberiam que não é possível e que essa representação algébrica não é conhecida. Na sequência, supomos que os grupos, para terem uma apreensão perceptiva da função lucro, perceberiam a necessidade de representá-la graficamente. Para isso, realizariam a conversão do registro algébrico para o gráfico usando como meio o CAS *Mathematica*, podendo escrever, por exemplo, o comando:

```
Plot3D[8p1p2 - 4p1^2 - 8p2^2 + 52p2 - 4p1 - 108, {p1, 0, 10}, {p2, 0, 10}, PlotRange
→ {0, 50}, AxesLabel → {"p1", "p2", "l"}]
```

Assim, esperamos que, apoiados na situação anterior, os grupos percebessem que, para representar o gráfico no *Mathematica* da função lucro, era recomendável que o domínio da função estivesse perto do possível valor de máximo, porque o estudo dessa noção é local, além de considerar os dados do problema  $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ . Supomos, também, que nesse registro gráfico identificassem uma das variáveis visuais, isto é, a posição da superfície traçada dentro de uma caixa definida pelos eixos coordenados. Nesse sentido, os grupos poderiam considerar o domínio da função lucro no intervalo  $[0, 50]$ , tendo assim uma apreensão perceptiva imediata do valor máximo, como mostra a Figura 66.

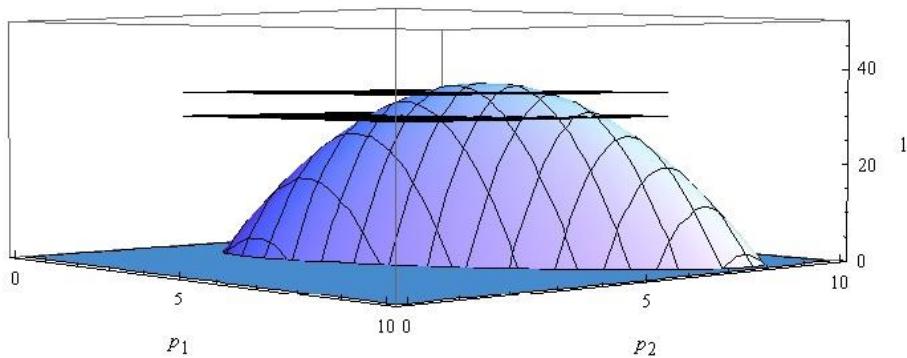
Do mesmo modo, supomos que os grupos realizassem tratamentos no registro gráfico a partir de uma modificação de tipo ótico e posicional, identificando as variáveis visuais: relação dos pontos da superfície com respeito ao eixo  $z$  e à curvatura da superfície, o que lhes permitiria ter uma apreensão perceptiva do possível valor máximo da função lucro e do comportamento dessa superfície perto desse valor, respectivamente.

Na sequência, esperamos que os grupos, por meio de modificações mereológicas dentro do registro gráfico *CAS\_MATH*, traçassem planos perpendiculares ao eixo  $l$ , por exemplo, os planos  $l=30$  e  $l=35$ . Para isso, utilizaram o comando representado por:

```
ContourPlot3D[{j == 30, j == 35}, {x, 2, 8}, {y, 2, 8}, {z, 0, 50}, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}].
```

E, assim, pela apreensão perceptiva e operatória, identificariam outra variável visual, isto é, a posição da superfície em relação ao plano perpendicular ao eixo  $z$ , como é mostrado na Figura 68.

**Figura 68.** Representação gráfica dos cortes horizontais da superfície



**Fonte:** Construção da autora.

Supomos, também, que os grupos, por meio de tratamentos no registro gráfico *CAS\_MATH*, isto é, modificações de tipo ótico e posicional, descriminassem outra variável visual, variação do valor de  $z$  em relação aos valores de  $x$  e  $y$  da curva de interseção da superfície com o plano perpendicular ao eixo  $z$ , o que permitiria, junto às variáveis visuais consideradas anteriormente, que conjecturassem e formulassem que no valor máximo a superfície está por baixo, completamente, do plano perpendicular ao eixo  $l$ , e que o valor máximo da superfície se localiza no ponto onde o plano perpendicular ao eixo  $l$  é tangente à superfície.

Assim, esperamos que todos os grupos percebessem que isso não é suficiente para dar resposta à situação, podendo sentir a necessidade de voltar para o registro algébrico e mobilizar seus conhecimentos sobre a noção plano tangente à superfície, cuja representação algébrica é dada por:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

e sobre a noção de plano perpendicular ao eixo  $z$ , cuja representação algébrica é expressada por  $z = z_0$ , em que  $z_0$  é o valor da função no ponto  $(x_0, y_0)$ , isto é

$f(x_0, y_0) = z_0$ . Portanto, supomos que no registro algébrico os grupos comparassem as duas representações algébricas dos planos, mencionados anteriormente, e formulassem que as derivadas parciais no ponto  $(x_0, y_0)$  são zero, sendo que, nesse ponto, o gráfico da função tem um plano tangente perpendicular ao eixo  $z$ , além de ser um ponto de máximo.

Na sequência, os grupos poderiam, no registro algébrico, validar suas afirmações, isto é, encontrar as derivadas parciais da função lucro e igualá-las a zero, por meio de tratamentos algébricos. Visto que o tratamento no registro algébrico se dá pelas operações possíveis em equações e expressões algébricas, os grupos resolveriam um sistema de equações como resultado de igualar a zero as derivadas parciais e encontrar o ponto representado por  $(5.5, 6)$ , substituindo-o na equação do plano tangente, validando que esse plano, nesse ponto, é perpendicular ao eixo  $z$ , ou seja,  $z = 37$ . Desse modo, o aluno encontra o valor da função nesse ponto, isto é,  $l(5.5, 6) = 37$ , dando assim resposta à situação-problema.

**Institucionalização local:** Nessa situação, generalizamos os resultados a partir das produções dos grupos. A professora investigadora ordena, resume e organiza essas produções por meio da seguinte propriedade.

**Se  $f(x,y)$  tiver um valor de máximo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  e se as derivadas parciais de primeira ordem lá existirem, então as derivadas parciais nesse ponto são zero.**

### Análise a posteriori

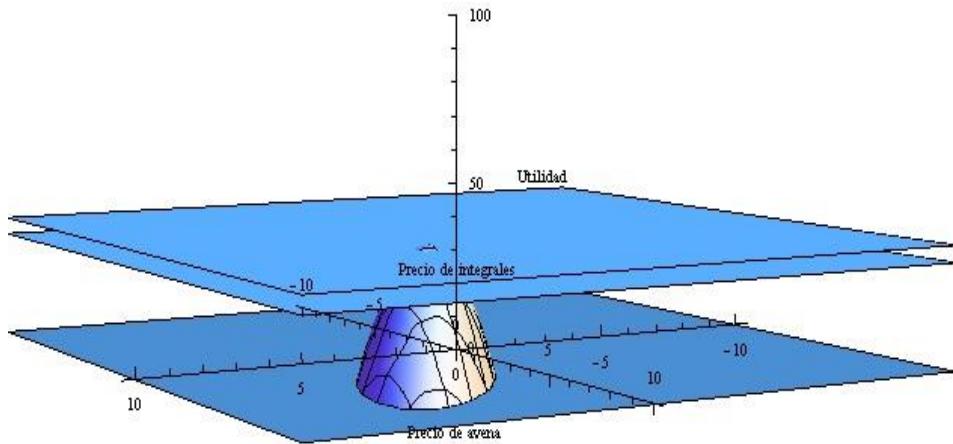
De maneira semelhante à situação anterior, todos os alunos trabalharam em grupos, trocaram ideias, reconheceram as variáveis didáticas declaradas na análise *a priori* e realizaram as ações, formulações e validações para solucionar a situação, como tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

A seguir, examinaremos com mais detalhe as ações de cada um dos grupos, visto que realizaram outras ações que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

O **grupo 1**, para ter uma apreensão perceptiva do valor máximo no registro gráfico CAS, discriminou-se a variável visual, posição da superfície em relação aos

eixos coordenados orientados positivamente, nesse registro gráfico, como mostra a Figura 69.

**Figura 69.** Descriminação de uma variável visual específica.



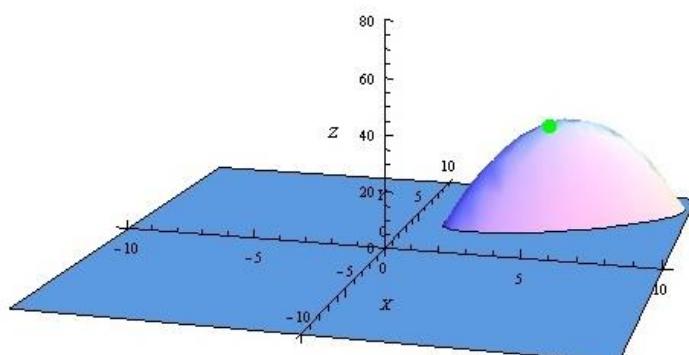
**Fonte:** Produção do grupo 1.

Isso significa que começou a desenvolver processo de visualização para identificar o valor máximo da função lucro.

O **grupo 2**, após modificações de tipo ótico no registro gráfico CAS, discriminou-se uma variável visual, a relação dos pontos da superfície com respeito ao eixo  $z$ , e, pela percepção perceptiva, representou-se graficamente um ponto. Fato que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

O grupo discriminou as variáveis visuais no registro gráfico CAS e as relacionou com uma terna de números (terna ordenada), a qual permitiu identificar um ponto no registro gráfico CAS; isto quer dizer que a percepção do grupo 2 foi icônica, conforme a Figura 70.

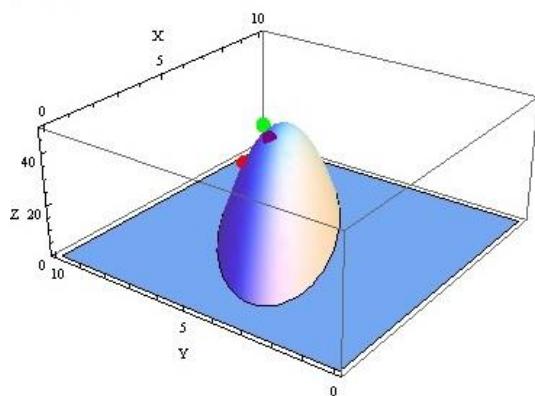
**Figura 70.** Representação gráfica do valor máximo.



**Fonte:** Produção do grupo 2.

O **grupo 3**, diferente do grupo 1 e do grupo 2, para identificar o valor máximo da função lucro no registro gráfico, discriminou a variável visual, posição da superfície traçada dentro de uma caixa definida pelos eixos coordenados, conforme mostra a Figura 71. Na sequência, pela apreensão perceptiva, representou-se graficamente alguns pontos, o que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

**Figura 71.** Gráfico de pontos na superfície.

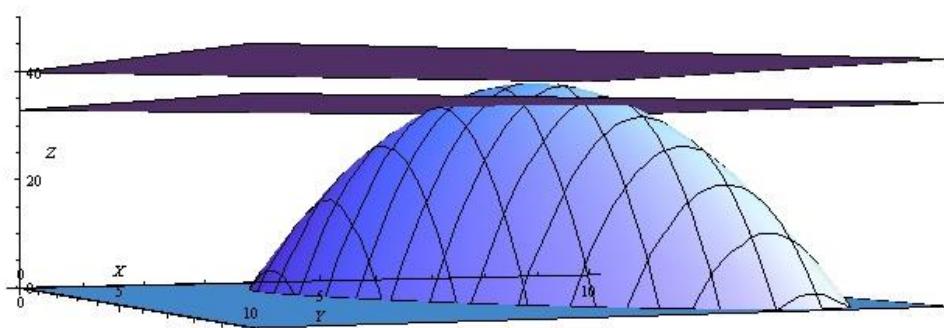


**Fonte:** Produção do grupo 3.

Observamos que o grupo discriminou as variáveis visuais no registro gráfico, e as relacionou com uma terna de números (terna ordenada), a qual permite identificar um ponto no registro gráfico *CAS\_MATH*, e isto quer dizer que a apreensão do grupo 3, analogamente ao grupo 2, foi icônica.

O **grupo 4**, para identificar o valor máximo no registro gráfico, discriminou a variável visual, posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente, nesse registro gráfico, como mostra a Figura 72, o que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

**Figura 72.** Posição da superfície em relação aos eixos coordenados.

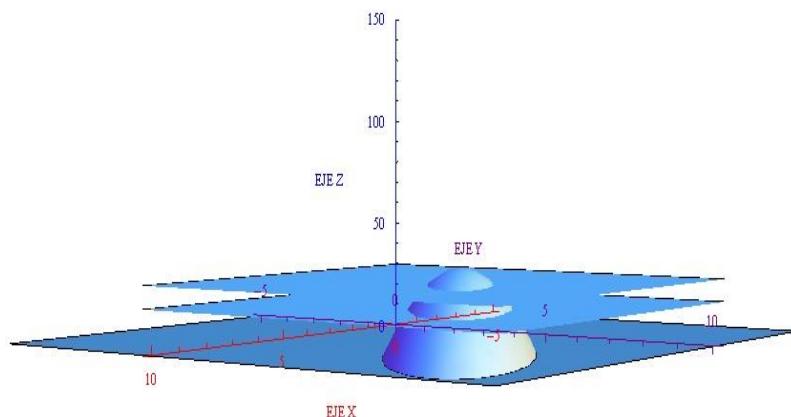


**Fonte:** Produção do grupo 4.

Constatamos que o grupo 4 começou a desenvolver processo de visualização para identificar o valor máximo da função lucro.

O **grupo 5**, para identificar o valor máximo no registro gráfico CAS, diferente do grupo 1 e do grupo 4, escolheu não mostrar os cortes verticais (variáveis visuais do registro gráfico), como mostra a Figura 73, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 73.** Registro gráfico CAS em que não se mostram os cortes verticais.



**Fonte:** Produção do grupo 5.

Isso significa que o grupo 5 começou a desenvolver processo de visualização para reconhecer o valor máximo da função lucro. Na situação de validação, o grupo 5, diferente dos outros grupos, representou algebraicamente o plano tangente utilizando a equação normal do plano, conforme mostra a Figura 74, o que não havíamos pressuposto na análise *a priori*.

**Figura 74.** Equação normal do plano tangente à superfície.

Entonces, formando la ecuación del plano tangente obtendremos  $\vec{P} = (x, y, z)$  y  $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in P_T$

$$\vec{P}_T: \vec{n}_{P_T} [\vec{P} - \vec{P}_0] = 0,$$

Pero la Normal al plano tangente es igual a:

$$\vec{n}_{P_T} = \left( \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y}, 1 \right) = (0, 0, 1)$$

**Fonte:** Produção do grupo 5.<sup>12</sup>

<sup>12</sup> Então, por meio da equação do plano tangente temos: [...]. Mas o vetor normal ao plano tangente é igual a [...]. (Tradução nossa)

Até esse momento, todos os grupos tinham coordenado os registros da língua natural, algébrico e gráfico CAS. Este último permitiu que todos os grupos fizessem modificações de tipo ótico e posicional, identificassem e discriminassem as variáveis visuais próprias do registro gráfico CAS.

Validar as formulações e terminar o processo de visualização do valor máximo, para dar solução à situação, foi uma tarefa difícil, porque os grupos não articularam todas essas modificações no gráfico, representado no *Mathematica*, para identificar o valor máximo, com a noção de derivadas parciais de primeira ordem estudadas em um teorema.

Visto que todos os grupos não tiveram uma apreensão global na construção do conhecimento do valor máximo de uma função de duas variáveis, necessárias para terminar o processo de visualização e dar solução à situação, os professores investigadores fizeram perguntas gerais para ajudá-los a mobilizar seus conhecimentos prévios a fim de que pudessem solucionar a situação-problema, realizando a conversão do registro gráfico CAS para o registro algébrico.

Portanto, afirmamos que o objetivo desta situação foi atingido, já que os grupos determinaram o valor máximo e o valor de máximo para uma função de duas variáveis reais, cuja representação algébrica não era conhecida.

Sobre o processo de visualização na identificação do valor máximo de uma função de duas variáveis, o registro gráfico representado no *Mathematica* favoreceu seu desenvolvimento nos grupos, sem que as situações mobilizadas fossem de ação, formulação e validação.

Logo, com apoio das formulações feitas pelos grupos, institucionalizamos localmente com uma propriedade, conforme citamos anteriormente.

### Situação 03<sup>13</sup>

Os bons resultados da economia brasileira nos últimos anos surtiram efeito positivo sobre o mercado imobiliário voltado para empreendimentos comerciais. Uma construtora trouxe para São Paulo um novo conceito de empreendimento comercial, de flexibilidade, conforto e modernidade. Pensando no conforto, projeta-se construir edifícios onde a perda de calor em relação à estrutura do edifício seja mínima. Para isso, a construtora requer que o edifício comercial tenha a seguinte característica: As paredes laterais direita e esquerda perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m<sup>2</sup> por dia, as paredes de frontal e posterior a uma taxa de 8 unidades/m<sup>2</sup>, o piso, a uma taxa de 1 unidade/m<sup>2</sup> por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m<sup>2</sup> por dia. O espaço que ocupa o edifício é exatamente de 3750 m<sup>3</sup>. Quais seriam as dimensões do edifício para minimizar a perda de calor? E qual seria essa perda? Justifique sua resposta.

#### Análise *a priori*.

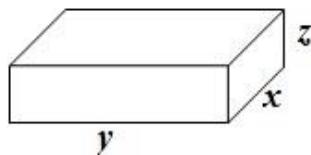
Essa situação tem por objetivo levar o aluno a mobilizar os conhecimentos adquiridos na situação anterior para o estudo do mínimo local e do valor de mínimo local de uma função de duas variáveis mais geral do que as tratadas anteriormente. A situação possibilita a utilização de conhecimentos a respeito da noção perda de calor que já foi estudada na disciplina de Física no primeiro semestre, de plano tangente a uma superfície e de derivadas parciais em um ponto, também já estudada de acordo com a ementa da disciplina.

Apresentamos, na sequência, o procedimento para construir a representação algébrica da função de duas variáveis reais: perda de calor. Segundo os dados do problema, devem-se reconhecer os objetos que representam as dimensões do edifício e o objeto que representa o espaço ocupado pelo edifício, o qual é fixo, por exemplo,  $x, y, z$  e  $V$ , respectivamente. Pode-se também elaborar uma representação figural (opcional), conforme exemplo na Figura 77, para representar o edifício comercial e localizar os objetos representantes das dimensões.

---

<sup>13</sup> Dados adaptados do livro *Matemáticas para administración y economía*. Haeussler, Ernest F. Prentice Hall, 2003, p. 777.

**Figura 75.** Uma representação figural do edifício comercial.



**Fonte:** Construção da autora.

A partir dessa figura, podemos reconhecer o objeto área das paredes laterais direita e esquerda representados pela função definida algebraicamente por  $A(x,z)=2xz$ , o objeto área das paredes frontal e posterior representado pela função definida algebraicamente como  $A(y,z)=2yz$ , e os objetos teto e piso representado pela função definida algebraicamente por  $A(x,y)=2xy$ . Assim, o objeto espaço que ocupa o edifício comercial é representado pela função definida algebraicamente como  $V(x,y,z)=xyz=3750$ .

Logo, segundo os dados do problema, temos que a função perda total de calor depende das dimensões do edifício, a qual definimos algebraicamente por  $P(x,y,z) = 10(2xz) + 8(2yz) + xy + 5xy$ , com  $x > 0, y > 0, z > 0$ , porque a perda total de calor é a soma da perda de calor nas paredes laterais mais a perda de calor nas paredes frontal e posterior mais a perda de calor no teto e no piso.

No tocante ao objeto volume do edifício comercial, podemos representar o objeto  $z$  em termos de  $x, y$ , isto é,  $z = \frac{3750}{xy}$ , ou o objeto  $y$  em termos de  $x, z$ , ou seja,  $y = \frac{3750}{xz}$ , ou o objeto  $x$  em termos de  $y, z$ , quer dizer,  $x = \frac{3750}{yz}$ , substituindo qualquer desses objetos na função perda total de calor, só para exemplificar,  $z = \frac{3750}{xy}$ , teremos:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 20x\left(\frac{3750}{xy}\right) + 16y\left(\frac{3750}{xy}\right) + 6xy \\ P(x,y) &= \frac{75000}{y} + \frac{60000}{x} + 6xy. \end{aligned}$$

Para resolver o problema proposto, isto é, determinar as dimensões do edifício a fim de minimizar a perda de calor e encontrar essa mínima perda de calor em relação à estrutura do edifício, apresentamos a seguinte estratégia de resolução.

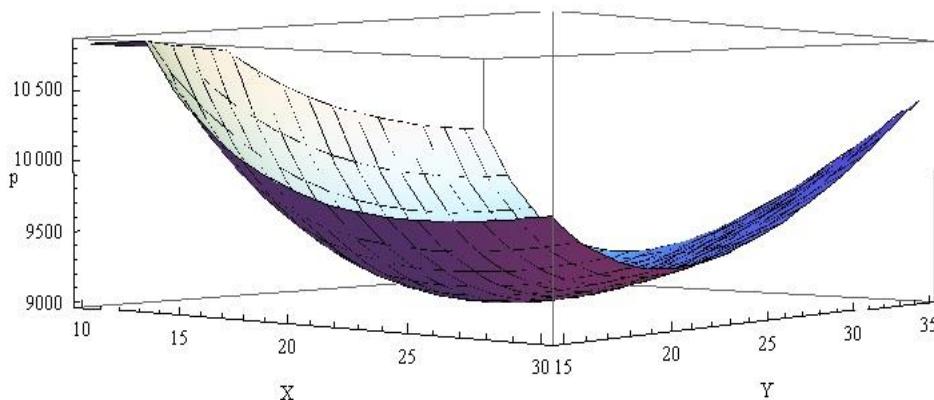
Uma vez que a representação algébrica da função é desconhecida pelo aluno, apoiamos-nos no registro gráfico. Assim, supomos que o aluno busque o registro gráfico para entender o comportamento da função, embora somente esse registro não seja suficiente para resolver o problema.

Representamos o gráfico no software *Mathematica* e graficamente a função perda de calor, cuja representação algébrica é:

$$P(x, y) = \frac{75000}{y} + \frac{60000}{x} + 6xy$$

com domínio, por exemplo,  $(x, y) \in [10, 30] \times [15, 35]$ , porque, baseados na situação anterior, o estudo do valor de mínimo é local, isto é, o domínio da função está nas proximidades do valor de mínimo. Para isso, escrevemos o comando `Plot3D[75000/y + 60000/x + 6xy, {x, 10, 30}, {y, 15, 35}, AxesLabel \rightarrow {"X", "Y", "Z"}]` e obtemos o registro gráfico *CAS\_MATH* mostrado na Figura 76.

**Figura 76.** Registro gráfico *CAS* da função perda de calor  $p(x, y)$ .

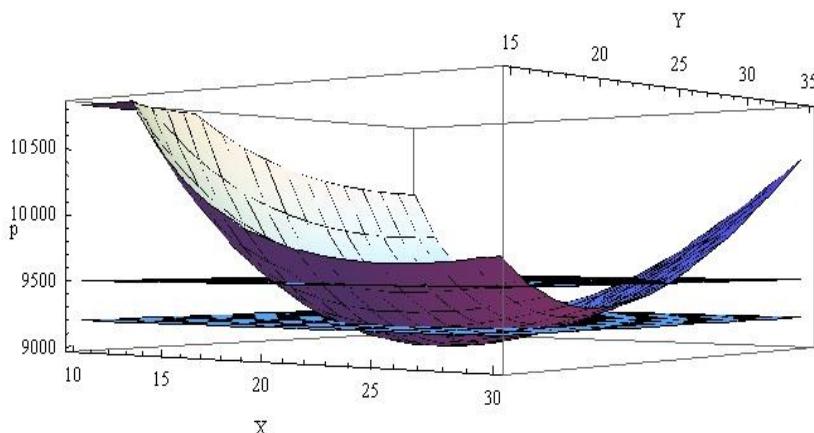


**Fonte:** Construção da autora.

No registro gráfico *CAS\_MATH*, baseado na situação anterior, utilizamos o mesmo procedimento de solução, traçando planos perpendiculares ao eixo  $p$  que interceptem a superfície por meio do comando, conforme mostra a Figura 77.

```
ContourPlot3D[{p == 9500, p == 9600}, {x, 10, 30}, {y, 13, 35}, {p, 0, 50}, AxesLabel \rightarrow {"X", "Y", "p"}].
```

**Figura 77.** Registro gráfico CAS das intercepções dos planos com a superfície.



**Fonte:** Construção da autora.

A partir da Figura 77, inferimos, da mesma forma que na situação anterior, que no valor mínimo da função perda de calor o plano perpendicular ao eixo  $p$  é tangente à superfície. A seguir, apoiamos na institucionalização local realizada na situação-problema anterior, voltamos ao registro algébrico em que encontramos as derivadas parciais e as igualamos a zero, para assim encontrar o valor de mínimo.

Ou seja, encontramos  $P_x = \frac{-60000}{x^2} + 6y$ ,  $P_y = \frac{-75000}{y^2} + 6x$ , igualando essas derivadas parciais a zero, obtemos as equações  $\frac{-60000}{x^2} + 6y = 0$  e  $\frac{-75000}{y^2} + 6x = 0$ .

Para resolvê-las, substituímos  $y = \frac{10000}{x^2}$  da primeira equação na segunda, resultando:  $0 = \frac{-75000}{\left(\frac{10000}{x^2}\right)^2} + 6x = \frac{3x^4}{20000} - 6x = x \left( \frac{3x^3}{4000} - 6 \right)$

Portanto, existem duas raízes reais positivas:  $x = 0$  ou  $x = 20$ , a seguir substituímos o valor de  $y$  na expressão  $y = \frac{10000}{x^2}$  para obter o ponto  $(20, 25)$ , pois  $x > 0$ . O valor de mínimo é o ponto de coordenadas  $(20, 25)$ . Substituindo este valor na função perda de calor obtemos a mínima perda de calor, Ou seja,  $z = 9\,000$ .

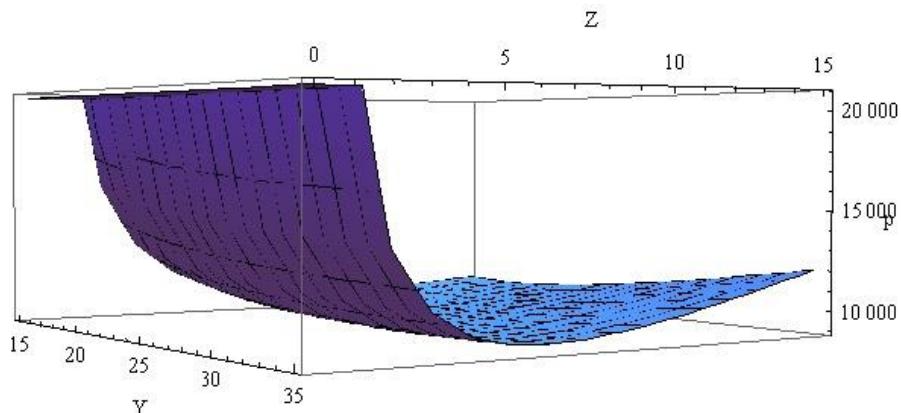
A estratégia de solução anteriormente citada será semelhante ao substituir a variável  $x$  definida por  $x = \frac{3750}{yz}$ , na função perda de calor, representada algebricamente por:  $P(y, z) = 20z \left( \frac{3750}{yz} \right) + 16yz + 6y \left( \frac{3750}{yz} \right)$

$$P(y, z) = \frac{75000}{y} + \frac{22500}{z} + 16yz$$

cuja representação gráfica é mostrada na Figura 78, em que, somente para exemplificar, o domínio da função é  $[15,35] \times [0,15]$ . Para isso, usamos o comando

$$\text{Plot3D}\left[\frac{75000}{y} + \frac{22500}{z} + 16yz, \{y, 15, 35\}, \{z, 0, 15\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"Y"}, \text{"Z"}, \text{"p"}\}\right]$$

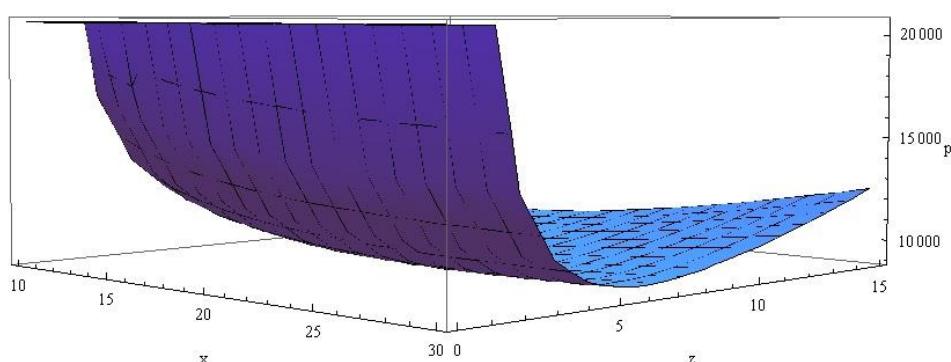
**Figura 78.** Registro gráfico CAS da função  $p(y,z)$



**Fonte:** Construção da autora.

Podemos observar que, no tocante ao gráfico mostrado na Figura 78, embora a função perda de calor esteja definida em termos de  $y,z$ , a imagem dessa função está no eixo vertical. Assim também, ao substituir a variável  $x$  definida por  $y = \frac{3750}{xz}$  na função perda de calor, essa função estaria representada algebricamente como:  $P(x,z) = 20xz + \frac{60000}{x} + \frac{22500}{z}$  cuja representação gráfica é mostrada na Figura 79, em que, por exemplo, o domínio da função é  $[10,30] \times [0,15]$ . Para isso, usamos o comando  $\text{Plot3D}[20xz + \frac{60000}{x} + \frac{22500}{z}, \{x, 10, 30\}, \{z, 0, 15\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{"x"}, \text{"z"}, \text{"p"}\}]$ .

**Figura 79.** Registro gráfico CAS da função  $p(x,z)$



**Fonte:** Construção da autora.

Igualmente, observamos que em relação ao gráfico mostrado na Figura 79, mesmo que a função perda de calor esteja definida em termos de  $x, z$ , a imagem dessa função está no eixo vertical.

As variáveis didáticas são as seguintes:

- A função área: da parede lateral direita e esquerda, da parede frontal e posterior, o piso e o teto;
- O espaço que o edifício comercial ocupa;
- A função perda total de calor, cuja representação algébrica é uma função de duas variáveis qualquer.

Esperamos que os grupos, após terem lido o enunciado do problema, realizassem a conversão do registro em língua natural para uma representação figural do edifício comercial, apenas para ilustrar, semelhante à Figura 75, e reconhecer os objetos que representariam as dimensões do edifício. A seguir, os grupos poderiam realizar a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico, isto é, representar algebraicamente a função área total do edifício comercial como  $A(x, y, z) = 2xz + 2yz + 2xy$ , em que, por exemplo, a área da parede lateral direita e esquerda poderia ser representada por  $A(x, z) = 2xz$ , a área da parede frontal e posterior representada por  $A(x, y) = 2xy$  e a área do teto e piso representada por  $A(x, y) = 2xy$ .

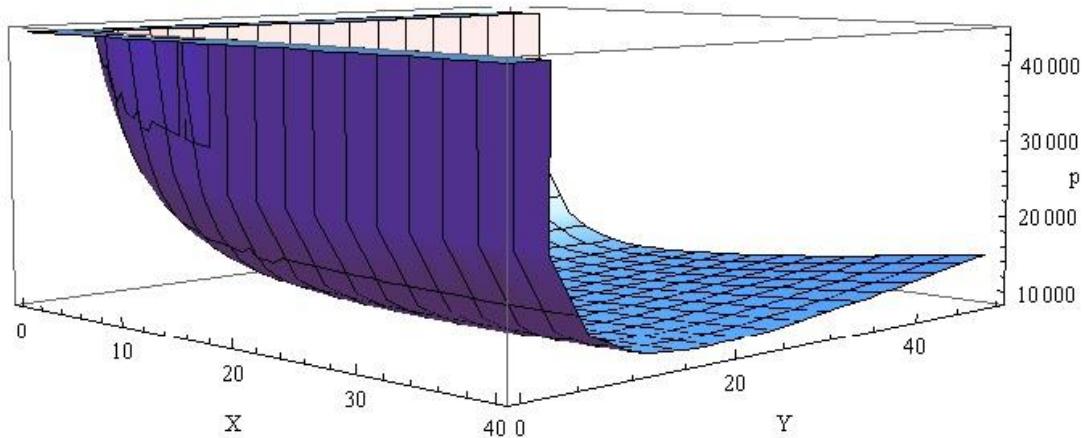
Na sequência, esperamos que os grupos reconhecessem também o objeto espaço, que ocupa o edifício, representando-o algebraicamente por:  $V(x, y, z) = xyz = 3750$ . A partir dos dados do problema, o aluno reconheceria a função perda de calor do edifício por metro quadrado e a representaria algebraicamente como:

$$P(x, y, z) = 10(2xz) + 8(2yz) + xy + 5xy.$$

Dado que essa função não pode ser representada em  $\mathbb{R}^4$ , esperamos que por meio de tratamentos nesse registro, isto é, dado que  $xyz = 3750$ , os grupos pudessem, por exemplo, representar a variável  $z$  em termos de  $x, y$  e substituí-la na expressão algébrica da função, dessa maneira representariam algebraicamente a função perda de calor por  $P(x, y) = \frac{75000}{y} + \frac{60000}{x} + 6xy$ .

Como a representação algébrica da função perda de calor é desconhecida pelos grupos, esperamos que, para terem uma apreensão perceptiva da função perda de calor, percebessem a necessidade de representá-la graficamente. Para isso, realizariam a conversão do registro algébrico para o registro gráfico representado no *Mathematica*, conforme mostra a Figura 80, podendo utilizar, por exemplo, o comando `Plot3D[ $\frac{75000}{y} + \frac{60000}{x} + 6xy$ , {x, 0,40}, {y, 0,50}, AxesLabel → {"X", "Y", "p"}]`.

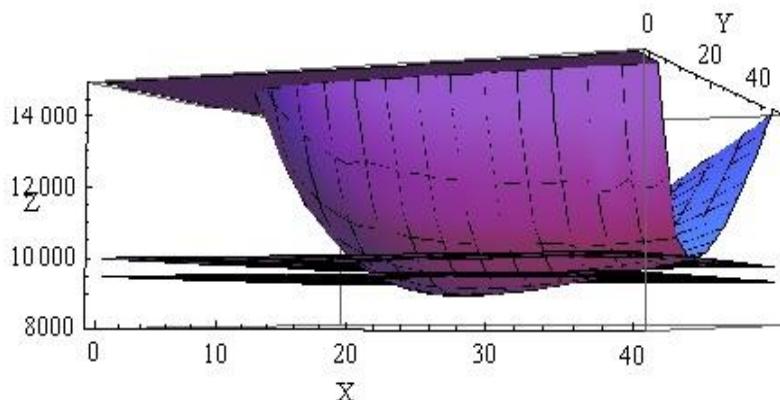
**Figura 80.** Representação gráfica da função perda de calor.



**Fonte:** Construção da autora.

Por meio de tratamentos dentro do registro gráfico *CAS\_MATH*, isto é, movimentar o gráfico, ficar mais perto do possível ponto de mínimo (modificação ótica) e mudar os pontos de observação (modificação posicional), esperamos que os grupos identificassem as variáveis visuais: relação dos pontos da superfície com respeito ao eixo  $z$  e a curvatura da superfície, o que lhes permitiria ter uma apreensão perceptiva do possível valor mínimo da função perda de calor. Na sequência, no mesmo registro gráfico, os grupos poderiam realizar modificações de tipo mereológica (cortes horizontais  $z=k$ ), próximos ao possível valor mínimo e, assim, identificariam outra variável visual, ou seja, a posição da superfície em relação ao plano perpendicular ao eixo  $z$  e conjecturar a possível mínima perda de calor, conforme a Figura 81.

**Figura 81.** Representação gráfica dos cortes horizontais à superfície



**Fonte:** Construção da autora.

Esperamos que os grupos, por meio de modificações de tipo ótico e posicional, discriminassem outra variável visual, variação do valor de  $z$  em relação aos valores de  $x$  e  $y$  da curva de interseção da superfície com o plano perpendicular ao eixo  $z$ , e também formulassem que no valor mínimo o plano tangente à superfície, é perpendicular ao eixo  $z$ .

Apoiados na institucionalização local da segunda situação, esperamos que os grupos mobilizassem seus conhecimentos até agora trabalhados para validar suas formulações. Para isso, no registro algébrico, os grupos realizariam tratamentos (dado pelas operações possíveis em equações e expressões algébricas) para encontrarem o valor de mínimo, isto é, encontrarem as derivadas parciais de primeira ordem da função perda de calor e igualá-las a zero. Em seguida, o aluno formularia que no ponto  $(20,25)$  a função tem valor mínimo. A seguir, os grupos substituiriam o ponto  $(20,25)$  na função perda de calor, isto é,  $P(20,25)=9000$ , encontrando assim o valor mínimo da função e a resposta à situação-problema.

**Institucionalização local:** Nessa situação, generalizamos os resultados a partir das produções e formulações dos grupos. A professora investigadora organiza a situação didática com as propriedades para finalmente institucionalizar as noções a que está associada, por meio da propriedade:

**Se  $f(x, y)$  tiver um valor mínimo local no ponto  $(x_0, y_0)$  e se as derivadas parciais de primeira ordem lá existirem, então as derivadas parciais nesse ponto são zero.**

E por meio das observações:

**Um ponto  $(x_0, y_0)$  de uma função  $f(x, y)$  em que tanto  $f_x(x_0, y_0)$  como  $f_y(x_0, y_0)$  sejam zero, chama-se ponto crítico de  $f$ .**

**Os valores máximos e mínimos locais de uma função  $f$  chamam-se valores extremos locais da função  $f$ .**

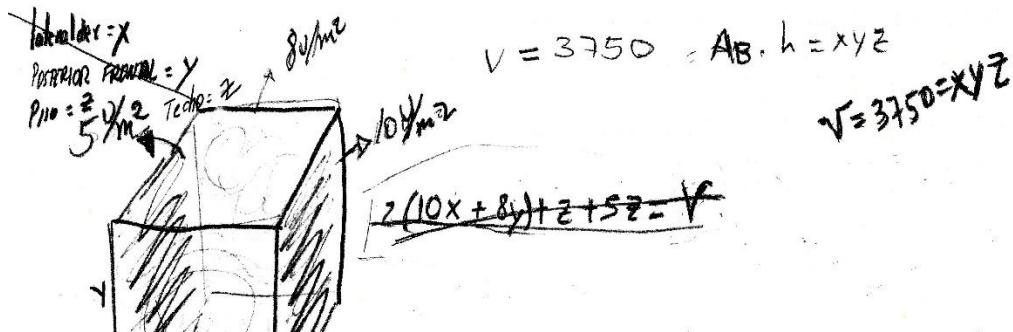
### Análise a posteriori

De maneira semelhante à situação anterior, os grupos leram o enunciado do problema, trocaram ideias, reconheceram e discriminaram as variáveis didáticas declaradas na análise *a priori*, as ações, formulações e validações para solucionar a situação, assim como tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

Na sequência, analisaremos com mais detalhe as ações de alguns dos grupos, uma vez que realizaram outras ações que não havíamos pressuposto na análise *a priori*.

O grupo 1 não tinha certeza do significado da expressão “perda de calor a uma taxa de ... unidades/m<sup>2</sup>”, visto que, conforme a Figura 82, o grupo estava cometendo erros no momento de representar a medida da área das paredes do edifício comercial e a função volume, de tal forma que não conseguia realizar a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.

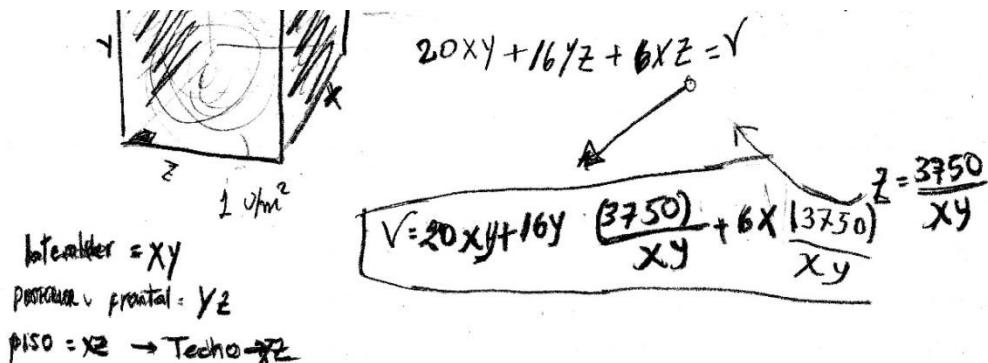
**Figura 82.** Representações dos dados da situação.



**Fonte:** Produção do grupo 1.

Após ter lido a situação didática mais duas vezes, perceberam que a perda de calor do edifício comercial era medida em unidades por metro quadrado e era usada para calcular a medida da área. Logo, o grupo reconheceu que as variáveis utilizadas não representavam a medida da área. A seguir, reescreveram-nas para representar sua função volume, conforme mostra a Figura 83.

**Figura 83.** Representação das variáveis e da função volume.

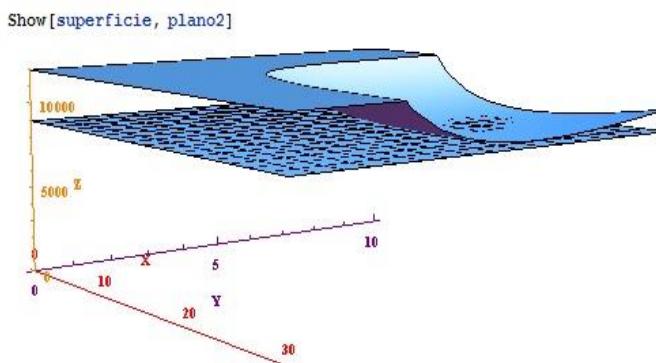


**Fonte:** Produção do grupo 1<sup>14</sup>.

O grupo, após releitura, conseguiu realizar a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, como tínhamos previsto na análise *a priori*.

Evidenciamos que o grupo 1, no registro gráfico representado no *Mathematica*, discriminou a variável visual, posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente, sem mostrar os cortes nos planos verticais  $x$  e  $y$  nesse registro cuja função representa perda de calor, conforme a Figura 84, o que não previmos na análise *a priori*.

**Figura 84.** Discriminação de variáveis visuais.



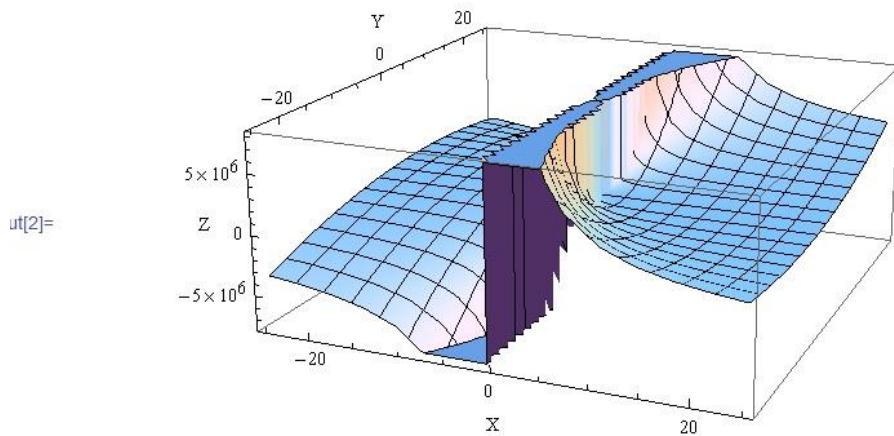
**Fonte:** Produção do grupo 1.

<sup>14</sup> Lateral direito =  $XY$ ; posterior frontal  $YZ$ ; piso =  $XZ$ ; teto =  $XZ$

Isso significa que o grupo 1 começou a desenvolver o processo de visualização ao construir a noção de valor mínimo de uma função de duas variáveis reais.

O **grupo 2** realizou a conversão do registro algébrico para o gráfico representado no *Mathematica*, da função perda de calor, conforme mostra a Figura 85, o que não havíamos pressuposto na análise *a priori*.

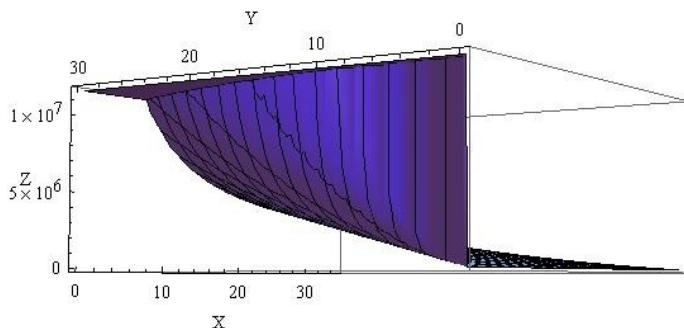
**Figura 85.** Registro gráfico CAS da função perda de calor.



**Fonte:** Produção do grupo 2.

Após as modificações óticas e posicionais nesse registro, o grupo não conseguiu ter uma apreensão perceptiva do valor mínimo. Na sequência, o grupo 2 leu o problema novamente, realizou, outra vez, a conversão de registro em língua natural para o registro algébrico. Depois da análise no registro algébrico, o grupo 2 percebeu que a função perda de calor não estava definida no ponto  $(0,0)$ , ou seja, a função não era contínua no ponto  $(0,0)$ , de tal forma que decidiu mudar o domínio da função, conforme mostra a Figura 86.

**Figura 86.** Gráfico da função no domínio  $[0,35] \times [0,30]$

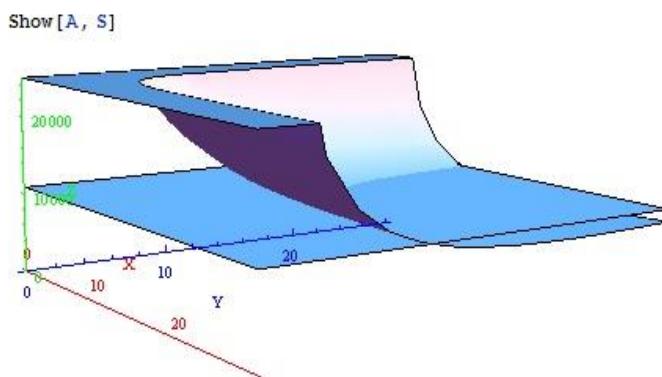


**Fonte:** Produção do grupo 2.

Isso significa que para o grupo 2, ainda, não é fácil compreender a noção de função contínua e, assim, a falta de conhecimento das regras de correspondência semântica entre o registro de representação em língua natural e o registro da expressão algébrica.

O **grupo 5** discriminou a variável visual, posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente, sem mostrar os cortes nos planos verticais  $x$  e  $y$  no gráfico representado no *Mathematica*. Além disso, realizou as modificações mereológicas, optando também, para mostrá-las na tela do computador, não apresentar os cortes nos planos verticais, tanto na representação do plano, quanto na da função perda de calor, conforme mostra a Figura 87, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 87.** Discriminação de variável visual e modificações mereológicas.



**Fonte:** Produção do grupo 5.

Isso significa que o grupo 5 começou a desenvolver o processo de visualização para construir a noção de valor mínimo de uma função de duas variáveis.

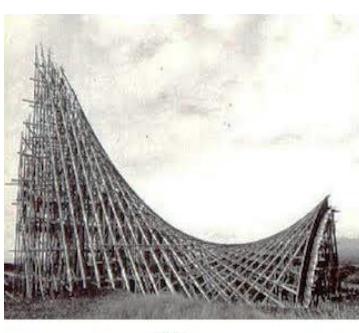
Diferente da situação anterior, nesta não foi difícil articular, para os grupos, por meio das modificações: os tratamentos dentro do gráfico, representado no software *Mathematica*, e as variáveis visuais desse registro, com a noção de derivadas parciais de primeira ordem, ao se construir a noção de valor mínimo de uma função de duas variáveis. Assim, todos os grupos mobilizaram os conhecimentos adquiridos até o momento por meio das situações estudadas para culminar o processo de visualização na identificação do valor mínimo de uma função de duas variáveis reais.

Com efeito, o gráfico representado no software *Mathematica* favoreceu o processo de visualização, sendo que as situações mobilizadas foram de ação, formulação e validação. Dessa forma, o objetivo dessa situação foi atingido, isto é, todos os grupos determinaram as dimensões do edifício para minimizar a perda de calor e a mínima perda de calor.

Logo, com apoio das formulações feitas pelos grupos, institucionalizamos localmente com uma propriedade e duas observações conforme citamos anteriormente.

#### Situação 04

Na atualidade, observamos muitas construções com desenhos arquitetônicos modernos, por exemplo: o edifício Copam<sup>15</sup>, em São Paulo, cuja arquitetura em forma de “S” é um símbolo da cidade, e a Capela Lomas de Cuernavaca<sup>16</sup>, no México, mostrada na figura a seguir.



(1)



(2)

Figuras: (1) Capela em construção (2) Capela terminada

A dupla curvatura dessa capela é ótima para suportar as tensões, pressão e flexão da construção, que tem resistência de carga e custo de construção barato. Considerando situações anteriores, o que você observa neste desenho arquitetônico particular? Justifique sua resposta.

#### Análise *a priori*

Essa situação tem por objetivo que o aluno faça conjecturas sobre o fato de que nem todo ponto crítico é um máximo ou um mínimo local levando-o a reconhecer, na superfície mostrada na figura, a representação gráfica de uma

<sup>15</sup> Disponível em: <<http://arqnobrasil.wordpress.com/240/>>. Acesso em: 14 out. 2013.

<sup>16</sup> Disponível em: <<http://www.di-conexiones.com>>. Acesso em: 14 out. 2013.

função de duas variáveis conhecida, chamada paraboloide hiperbólico. Acreditamos que essa situação possa provocar um desequilíbrio cognitivo, pois os alunos acreditam que a anulação das derivadas parciais em um ponto de uma função de duas variáveis sempre indica a presença de valor máximo ou valor mínimo. Na sequência, apresentaremos a resolução do problema.

A representação figural mostrada é similar a um paraboloide hiperbólico, cuja representação algébrica é dada por  $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ . E se quisermos trasladar  $k$  unidades no eixo  $z$ , a representação algébrica seria  $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + k$ . Os valores de  $b$ ,  $a$  e  $k$  são constantes, e dependem da escolha do aluno no momento de fazer a representação gráfica e algébrica.

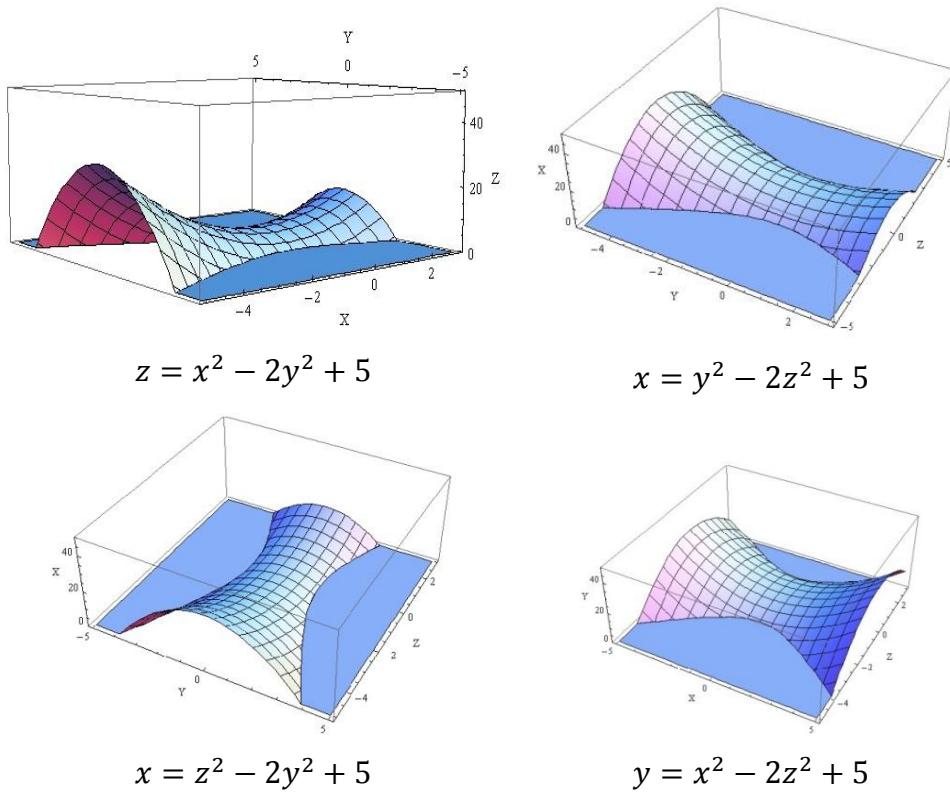
Outras representações algébricas a considerar podem ser  $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} + k$ ,  $x = \frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} + k$ ,  $z = \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} + k$ ,  $y = \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + k$  ou  $y = \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} + k$ , cujos gráficos representados no *Mathematica* podem ser visualizados na Figura 88, com os dados valores de  $a$ ,  $b$ ,  $k$  para representá-las graficamente. Para exemplificar, usaremos representações, em que  $x \in [-5,3]$ ,  $y \in [-5,5]$ , e a imagem  $z \in [0,50]$ , em que os comandos usados, respectivamente, são:

```

Plot3D[x^2 - 2y^2 + 5, {x, -5, 3}, {y, -5, 5}, PlotRange → {0, 50}, Axes →
    True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}];
Plot3D[y^2 - 2z^2 + 5, {y, -5, 3}, {z, -5, 5}, PlotRange → {0, 50}, Axes →
    True, AxesLabel → {"Y", "Z", "X"}];
Plot3D[z^2 - 2y^2 + 5, {y, -5, 5}, {z, -5, 3}, PlotRange → {0, 50}, Axes →
    True, AxesLabel → {"Y", "Z", "X"}];
Plot3D[x^2 - 2z^2 + 5, {x, -5, 5}, {z, -5, 3}, PlotRange → {0, 50}, Axes →
    True, AxesLabel → {"X", "Z", "Y"}];

```

**Figura 88.** Registros gráficos CAS\_MATH do paraboloide hiperbólico.



**Fonte:** Construção da autora.

Outras representações algébricas a considerar poderiam ser definidas por:

$$\frac{x-h}{c} = \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{a^2}, \quad \frac{x-h}{c} = \frac{(z-l)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2}, \quad \frac{z-l}{c} = \frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2}, \quad \frac{z-l}{c} = \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2},$$

$$\frac{y-k}{c} = \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} \quad \text{e} \quad \frac{y-k}{c} = \frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2}, \quad \text{alguns dos registros gráficos}$$

CAS\_MATH são mostrados na Figura 89, com os dados valores de  $a, b, c, h, k$  para representá-las graficamente, em que  $x \in [-2,3]$ ,  $y \in [0,6]$  e a imagem,  $z \in [0,15]$ .

Para isso, usamos os comandos respectivos:

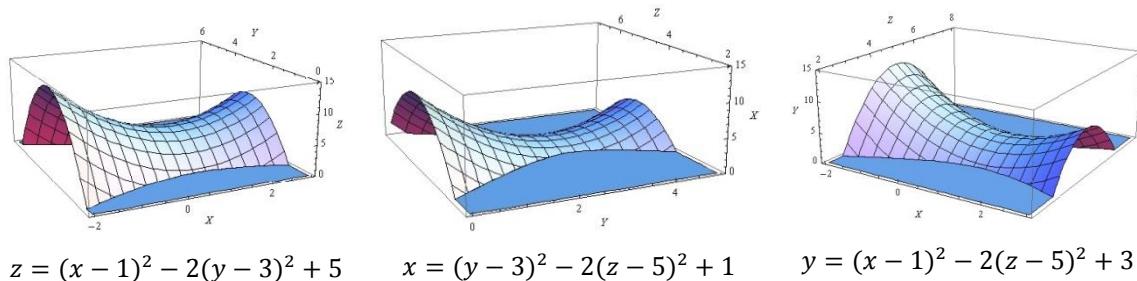
```

Plot3D[(x - 1)^2 - 2(y - 3)^2 + 5, {x, -2, 3}, {y, 0, 6}, PlotRange ->
{0, 15}, AxesLabel -> {X, Y, Z}];

Plot3D[(y - 3)^2 - 2(z - 5)^2 + 1, {y, 0, 5}, {z, 2, 7}, PlotRange -> {0, 15}, AxesLabel ->
{Y, Z, X}];

Plot3D[(x - 1)^2 - 2(z - 5)^2 + 3, {x, -2, 3}, {z, 2, 8}, PlotRange ->
{0, 15}, AxesLabel -> {X, Z, Y}].
```

**Figura 89.** Outros registros gráficos CAS\_MATH do paraboloide hiperbólico.



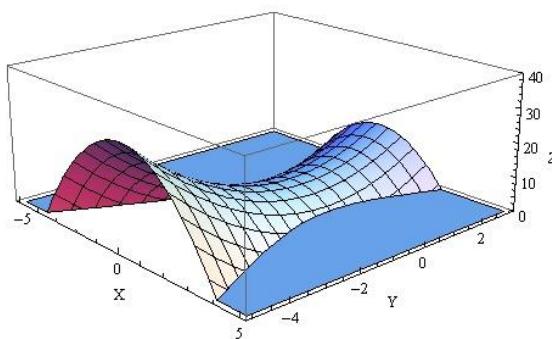
**Fonte:** Construção da autora.

Como se pode observar, o comportamento da superfície no ponto crítico é o mesmo, seja esta: dilatada, trasladada, ou o eixo do paraboloide seja a variável  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . O que nos interessa aqui é o comportamento da função nas proximidades de um ponto crítico.

Podemos observar em relação às representações gráficas estudadas nas situações anteriores que o ponto crítico tem uma característica particular. Para determinar essa característica vemos o caminho gráfico. O aluno, no gráfico representado no software *Mathematica*, analisará o comportamento da função nas proximidades de um ponto crítico e inferirá sua natureza, embora só esse gráfico não seja suficiente para resolver o problema.

Por exemplo, poderíamos considerar a função representada por  $z = y^2 - 2x^2 + 5$  cujo registro gráfico CAS\_MATH é similar à figura mostrada na situação 04, conforme a Figura 90, com domínio  $(x, y) \in [-5,5] \times [-5,3]$  e a imagem  $z \in [0,40]$ . Escrevemos o comando `s = Plot3D[y^2 - 2x^2 + 5, {x, -5, 5}, {y, -5, 3}, PlotRange → {0, 40}, Mesh → None, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}]` representa no *Mathematica* o paraboloide hiperbólico.

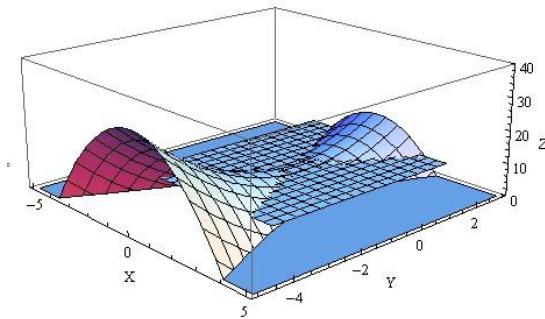
**Figura 90.** Registro gráfico CAS da função representada por  $z=y^2-2x^2+5$ .



**Fonte:** Construção da autora.

Apoiados nas institucionalizações locais anteriormente citadas, encontramos no registro algébrico as derivadas parciais e as igualamos a zero, isto é,  $f_x = -4x = 0$  e  $f_y = 2y = 0$ . Resolvendo as equações, encontramos que o único ponto crítico é o ponto  $(0,0)$ . Para estudar a natureza desse ponto crítico no registro gráfico e apoiados nas situações anteriores, representamos graficamente o plano tangente à superfície no ponto  $(0,0)$  paralelo ao plano  $xy$  representado algebricamente por  $z=5$ , conforme Figura 91.

**Figura 91.** Registro gráfico CAS\_MATH do corte no plano  $z=5$ .



**Fonte:** Construção da autora.

Observamos que no ponto crítico  $(0,0)$ , o plano tangente atravessa a superfície, permitindo-nos formular aqui que a função não tem nem máximo nem mínimo. Então, já que as primeiras derivadas são zero não é condição suficiente para determinar se uma função de duas variáveis tem um valor extremo em um ponto crítico. Para isso, precisamos das segundas derivadas parciais.

A variável didática levada em conta durante a escolha e construção da situação proposta é referente à imagem de uma Capela.

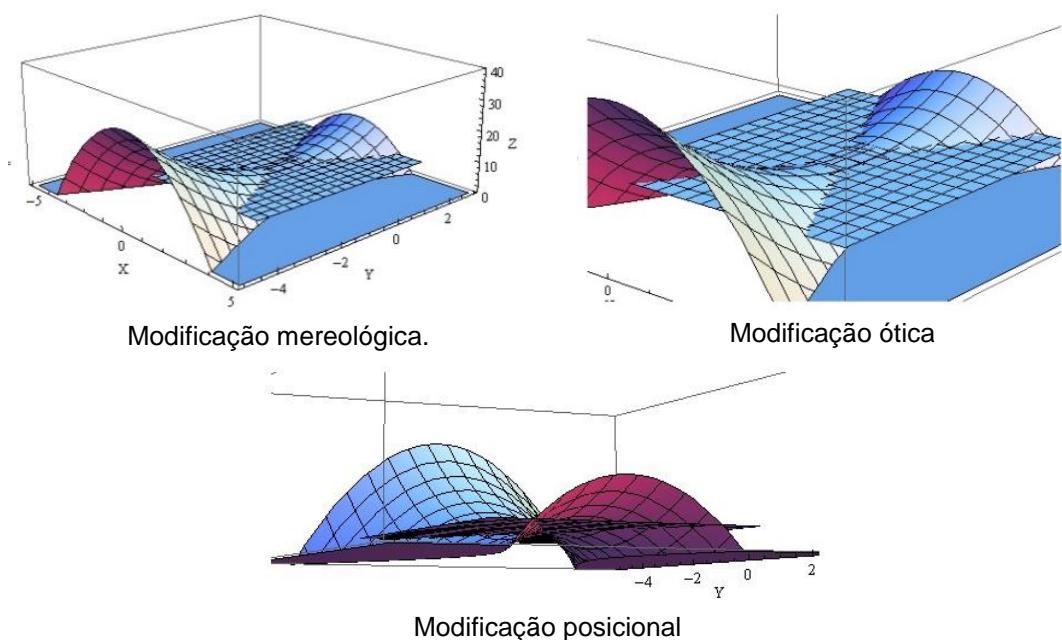
Esperamos que os grupos a partir das representações figurais apresentadas no problema reconhecessem e formulassem que essas representações são semelhantes à representação gráfica de uma função de duas variáveis, chamada paraboloide hiperbólico. Apoiados nas situações desenvolvidas anteriormente, os grupos poderiam representar algebricamente essa função de duas variáveis, apenas para exemplificar,  $\frac{z-l}{c} = \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2}$  e dar valores numéricos às constantes  $l, k, h, c, a, b$ .

Assim, supomos que os grupos realizem a conversão do registro algébrico para o gráfico representado no *Mathematica*. Ademais, esperamos que os grupos

coordenassem os registros algébricos (formados por eles mesmos) com os registros gráficos *CAS\_MATH*, até conseguirem a representação gráfica semelhante à figura mostrada no problema. Para isso, poderiam levar em consideração as variáveis significantes do registro algébrico da função de duas variáveis (um termo linear; dois termos quadráticos com sinais opostos) e as variáveis visuais do registro gráfico (o eixo da representação gráfica da função de duas variáveis e os traços nos planos  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$ ).

A seguir, supomos que os grupos, baseados na institucionalização local feita na situação-problema anterior, por meio de tratamentos (operações possíveis em equações e expressões algébricas) no registro algébrico, indiquem o ponto crítico da função e duas variáveis. Para saber sua natureza, poderiam ir para o registro gráfico e por meio de modificações mereológicas (cortes horizontais  $z=k$ ), modificações ótica e posicional, discriminar uma variável visual (posição da superfície em relação ao plano perpendicular ao eixo  $z$ ) e formular que no ponto crítico o plano é tangente, mas não está nem para cima nem para baixo da superfície, isto é, o plano atravessa a superfície. Por exemplo, ver a Figura 92, em que consideramos o registro gráfico *CAS\_MATH* da função representada por  $z = y^2 - 2x^2 + 5$  e suas modificações mereológicas, ótica e posicional. Assim, pela apreensão operatória, poderíamos conjecturar sobre a natureza do ponto crítico.

**Figura 92.** Modificações mereológicas, óticas e posicionais no registro gráfico *CAS*.



**Fonte:** Construção da autora.

A seguir, os grupos poderiam também formular que a função, cujo registro gráfico *CAS\_MATH* simula uma Capela, não tem nem valor máximo nem valor mínimo, e que as derivadas parciais de primeira ordem não são suficientes para conhecer a natureza de valores máximos e mínimos. Esperamos que formulassem a necessidade de usar as segundas derivadas parciais.

**Institucionalização local:** Nessa situação, generalizamos os resultados a partir das produções dos grupos. A professora pesquisadora organiza essas produções por meio da observação.

Uma função diferenciável  $f(x,y)$  tem um ponto de sela em um ponto crítico  $(x_0, y_0)$ , se em  $f$  existem pontos  $(x, y)$  em que a função nesses pontos é maior ou igual ao valor da função no ponto crítico, e os pontos  $(x, y)$ , em que o valor da função nesses pontos é menor ou igual ao valor da função no ponto crítico.

### Análise a posteriori

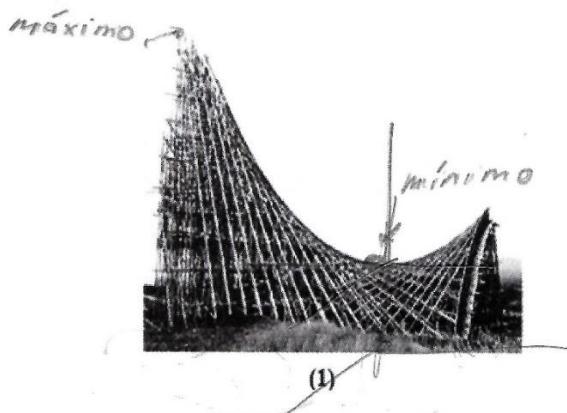
De maneira semelhante à situação anterior, os alunos leram o enunciado do problema, trabalharam em grupos, trocaram ideias, reconheceram e discriminaram as variáveis didáticas enunciadas na análise *a priori*, realizando as ações, formulações e validações para solucionar a situação, como tínhamos pressuposto na análise *a priori*. Na sequência, analisaremos com mais detalhe as ações de cada um dos grupos, pois realizaram outras ações que não havíamos pressuposto na análise *a priori*.

O **grupo 1** mostrou, pela apreensão perceptiva, na representação figural do enunciado do problema, os possíveis valores máximos e mínimos, conforme a Figura 93. Este grupo começou a desenhar um sistema de coordenadas na representação figural, o que significa um sinal de apreensão operatória, mas ainda com uma percepção icônica do valor máximo e mínimo, fato que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

O grupo 1, antes de realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico representado no *Mathematica*, da função representada por  $z = x^2 - y^2$ , começou a desenhar as variáveis visuais (cortes nos planos verticais), o que é um sinal de apreensão operatória. A seguir, o grupo 1 realizou a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, representado em lápis e papel, conforme a Figura 94. Isso

significa que o grupo 1 coordenou esses dois registros, ou seja, relacionou as variáveis significantes do registro algébrico da função de duas variáveis (um termo linear; dois termos quadráticos com sinais opostos) com as variáveis visuais do registro gráfico (o eixo da representação gráfica da função de duas variáveis; os traços nos planos  $yz$  e  $xz$ ).

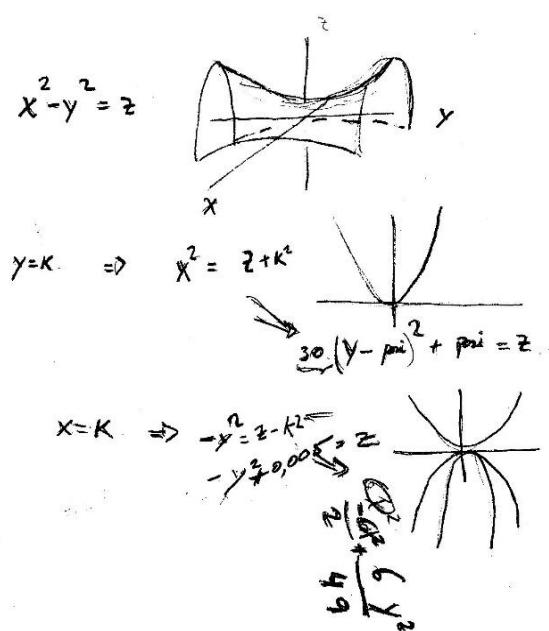
**Figura 93.** Representação icônica do valor máximo e mínimo.



**Fonte:** Produção do grupo 1.

Ademais, para o caso de funções de uma variável, especificamente, da função de segundo grau, o grupo 1 não articulou os registros algébrico e gráfico, conforme mostra a Figura 94, não explicitando a correspondência entre o coeficiente,  $k$ , da expressão algébrica,  $z = ax^2 + k$ , e a variável visual (intersecção com o eixo das ordenadas).

**Figura 94.** Conversão do registro algébrico para o registro gráfico.



**Fonte:** Produção do grupo 1.

Isso significa que, para o grupo 1, ainda não é fácil articular esses dois registros de representação de uma função de uma variável real. No caso da função de duas variáveis, evidenciamos que o grupo 1 começou a desenvolver o processo de visualização na identificação do ponto de sela.

Comprovamos que o grupo 1, baseado em sua representação icônica do valor mínimo, para validar sua conjectura, realizou tratamentos (operações possíveis em equações e expressões algébricas), no registro algébrico, a fim de encontrar o ponto crítico  $(-3,0)$  e o valor mínimo, conforme mostra a Figura 95.

**Figura 95.** Tratamento no registro algébrico para encontrar o valor mínimo.

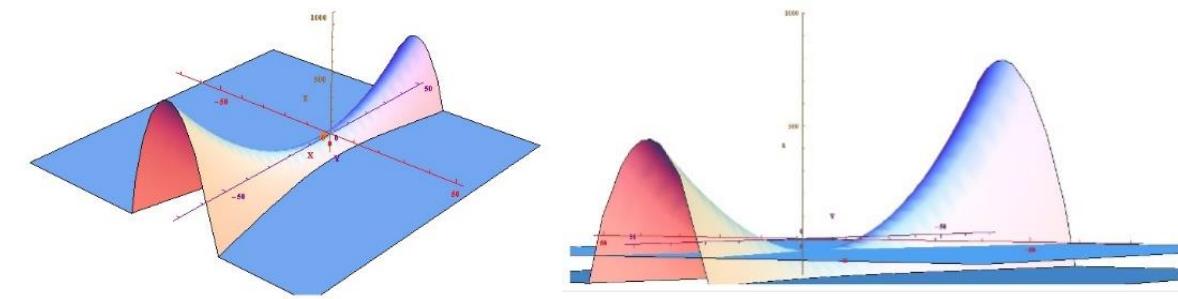
$$\begin{aligned}
 F_{(x,y)} &= -3(x+3)^2 + \cancel{\frac{3}{8}}y^2 - 48 \\
 \frac{df}{dx} &= -6(x+3) \\
 \frac{df}{dy} &= \frac{3}{8}y \quad \begin{array}{l} 3y=0 \\ \boxed{y=0} \end{array} \quad \text{Ponto mínimo } (-3, 0, -48) \\
 -6x - 18 &= 0 \\
 -x &= 3 \\
 \boxed{x = -3} \\
 z &= -48
 \end{aligned}$$

**Fonte:** Produção do grupo 1.

É necessário ressaltar que o grupo 1 não tem a clareza de como representar algebraicamente o valor mínimo e o valor de mínimo. Embora tivéssemos institucionalizado as noções de ponto crítico, valor máximo e mínimo nas situações-problema anteriores, este grupo ainda não compreendeu o significado de valor mínimo e valor de mínimo.

Já no registro gráfico CAS, o grupo 1 representou o ponto crítico e sua imagem. Pela apreensão operatória, ou seja, por meio de modificações mereológica (cortes horizontais  $z=k$ ) e posicional dentro do mesmo registro, discriminou uma variável visual (posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente). Notamos que o grupo 1 não mostrou os cortes nos planos  $xz$  e  $yz$  no registro gráfico CAS, conforme mostra a Figura 96, o que não havíamos pressuposto na análise *a priori*.

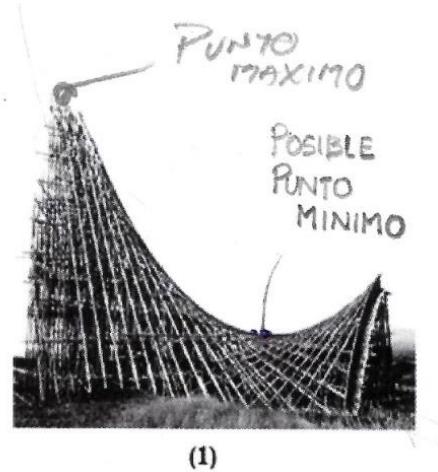
**Figura 96.** Modificações mereológica e posicional no registro gráfico CAS.



Isso significa que o grupo 1 começou a desenvolver o processo de visualização para identificar o ponto de sela de uma função de duas variáveis.

O **grupo2**, diferente do grupo 1, não desenhou nenhum sistema de coordenadas na representação figural, conforme mostra a Figura 97.

**Figura 97.** Representação icônica do valor máximo e mínimo.



**Fonte:** Produção do grupo 2.

O grupo 2 ainda tem uma percepção icônica do valor máximo e mínimo, fato que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

Comprovamos que o grupo 2, baseado em sua representação icônica do valor mínimo, para validar sua conjectura, realizou tratamentos (operações possíveis em equações e expressões algébricas), no registro algébrico, a fim de encontrar o ponto crítico (0,0) e valor mínimo, conforme mostra a Figura 98, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 98.** Tratamento no registro algébrico para achar o valor mínimo.

→ BASANDONOS EN LA SIGUIENTE FUNCION:

$$\therefore Z = 9(x-10)^2 - 50(y-10)^2$$

PARA EL PUNTO MINIMO OBSERVAMOS SI EXISTE LA DERIVADA, CONCLUIDOS QUE LAS DERIVADAS PARCIALES SON IGUALES A CERO.  
 $Z = 9(x^2 - 20x + 100) - 50(y^2 - 20y + 100)$   
 $Z = 9x^2 - 180x + 900 - 50y^2 + 1000y - 5000$   
 $Z = 9x^2 - 50y^2 - 180x + 1000y - 4100$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial x} &= 18x - 180 = 0 \rightarrow x = 10 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} &= -100y + 100 = 0 \rightarrow y = 10 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &Z = 0 \\ &\text{EL PUNTO } P(0, 0, 0) \text{ SERIA MAX E MIN} \end{aligned} \right.$$

Fonte: Produção do grupo 2.<sup>17</sup>

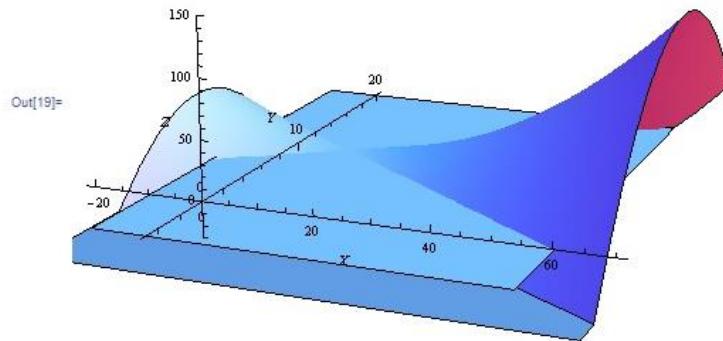
É necessário ressaltar que o grupo 2, de maneira análoga ao grupo 1, não tem a clareza de como representar algebricamente o valor mínimo e o valor de máximo. Embora tivéssemos institucionalizado as noções de ponto crítico, valor máximo e mínimo nas situações anteriores, este grupo ainda não compreendeu o significado de valor mínimo, valor de mínimo, valor máximo e valor de máximo.

Já no gráfico representado no *Mathematica*, o grupo 2 discriminou uma variável visual, posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente, e realizou a modificação mereológica, mas essas duas ações foram realizadas sem mostrar os cortes nos planos  $xz$  e  $yz$ , no registro gráfico CAS, conforme Figura 99, o que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

Isso significa que o grupo 2 começou a desenvolver o processo de visualização na identificação do ponto de sela.

<sup>17</sup> Baseado na seguinte equação: [...] Para o ponto mínimo, observamos que, se existisse a derivada, concluiríamos que as derivadas parciais são iguais a zero [...]. O ponto (0,0,0) seria máximo e mínimo. (Tradução nossa).

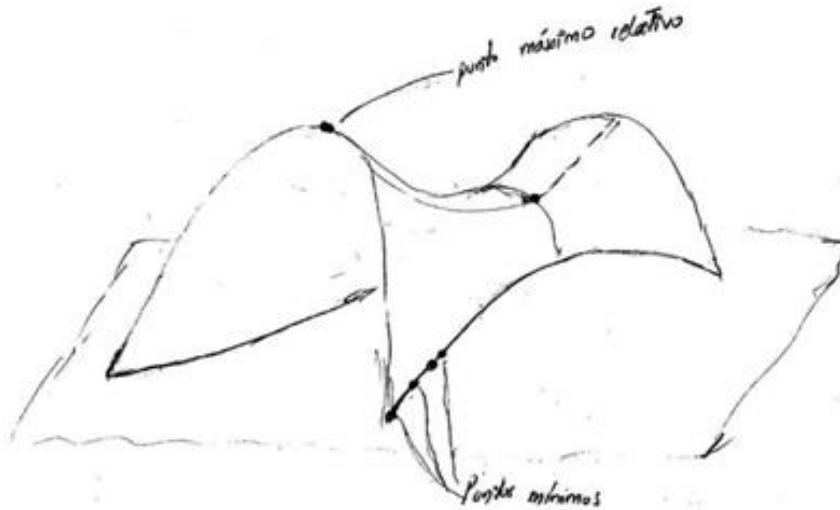
**Figura 99.** Modificação mereológica e posicional do registro gráfico CAS.



**Fonte:** Produção do grupo 2.

O **grupo 3**, diferente dos grupos anteriores, mostrou os pontos mínimos e os pontos de mínimo no registro gráfico da função de duas variáveis em um ambiente de lápis e papel, e, por meio de modificações mereológicas no mesmo registro, desenhou algumas variáveis visuais (cortes nos planos  $yz$  e  $xz$ ), conforme Figura 100.

**Figura 100.** Modificações mereológicas no registro gráfico.



**Fonte:** Produção do grupo 3.

Isso significa que o grupo 3 deu um sinal de desenvolvimento da apreensão operatória dentro da representação figural. No entanto, a representação dos valores máximo e mínimo ainda é icônica.

O grupo 3, para validar suas conjecturas, voltou para o registro algébrico e por meio de tratamentos nesse registro, isto é, operações possíveis em equações e expressões algébricas, formulou que, nesse ponto crítico, existe o valor máximo

e mínimo em simultâneo, conforme Figura 101, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

Ressaltamos que o grupo 3, de maneira análoga aos grupos anteriormente mencionados, não tem a clareza de como representar algebraicamente o valor mínimo, o valor máximo, o valor de mínimo e o valor de máximo. Embora tivéssemos institucionalizado as noções de ponto crítico, valor máximo e mínimo nas situações anteriores, o grupo 3, de maneira semelhante ao grupo 2, ainda não compreendeu o significado de valor mínimo, valor de mínimo, valor máximo e valor de máximo.

**Figura 101.** Tratamento no registro gráfico para caracterizar o ponto crítico.

*Si existen puntos máximos y mínimos relativos y las derivadas parciales de primera orden existen, las derivadas parciales en dichos puntos serán iguales a cero*

$$f(x,y) = z = y^2 - x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \rightarrow y = 0$$

*Entonces el punto {0,0,0}, de acuerdo a lo anterior sería un punto máximo y mínimo*

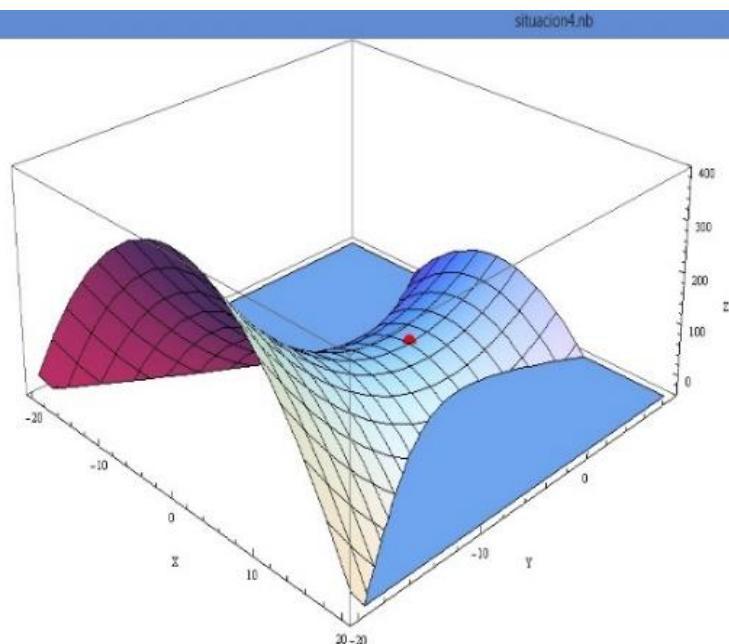
Fonte: Produção do grupo 3.<sup>18</sup>

O grupo 3 representou em um gráfico do *Mathematica*, o ponto crítico e sua imagem, conforme Figura 102, situação que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

Isso significa que o grupo 3 realizou a conversão da representação algébrica do ponto crítico e sua imagem para o registro gráfico *CAS\_MATH*, apenas para ilustrar.

<sup>18</sup> Se existirem pontos máximos e mínimos locais e as derivadas parciais de primeira ordem, as derivadas parciais nesses pontos são iguais a zero. [...] Então, o ponto {0,0,0}, conforme mencionado anteriormente, seria o ponto máximo e mínimo. (Tradução nossa)

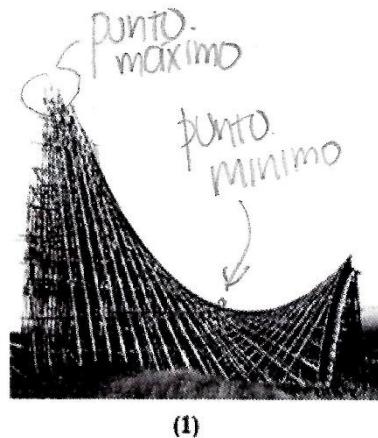
**Figura 102.** Registro gráfico CAS do ponto crítico e sua imagem.



**Fonte:** produção do grupo 3.

O **grupo 4**, de maneira semelhante ao grupo 2, pela apreensão perceptiva mostrou o valor máximo e mínimo da função de duas variáveis reais na representação figural apresentada no problema, conforme Figura 103.

**Figura 103.** Representação icônica do valor máximo e mínimo.



**Fonte:** Produção do grupo 4.

Isso significa que o grupo 4, como os grupos anteriores, ainda tem uma percepção icônica do valor máximo e mínimo, o que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

O grupo 4, para validar suas conjecturas, voltou para o registro algébrico, e por meio de tratamentos nesse registro, isto é, de operações possíveis em

equações e expressões algébricas, formulou que, nesse ponto crítico, existe o valor máximo e mínimo em simultâneo, conforme Figura 104, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 104.** Formulação sobre a natureza do ponto crítico.

*Si existen puntos máximos y mínimos relativos y las derivadas parciales de primera orden existen, las derivadas parciales en dichos puntos serán iguales a cero*

$$f(x,y) = z = y^2 - x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \rightarrow y = 0$$

*Entonces el punto  $\{0,0,0\}$ , de acuerdo a lo anterior sería un punto máximo y mínimo*

**Fonte:** Produção do grupo 4.<sup>19</sup>

Ressaltamos que o grupo 4, de maneira análoga aos grupos anteriormente mencionados, não tem a clareza de como representar algebraicamente o valor mínimo, o valor máximo, o valor de mínimo e o valor de máximo. Embora tivéssemos institucionalizado as noções de ponto crítico, valor máximo e mínimo nas situações anteriores, o grupo 4 ainda não compreendeu o significado de valor mínimo, valor de mínimo, valor máximo e valor de máximo.

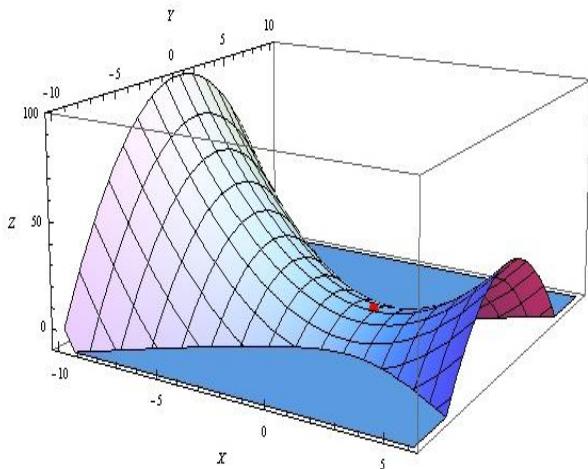
Já no registro gráfico *CAS\_MATH*, o grupo 4, como o grupo 3, representou o ponto crítico e sua imagem, conforme Figura 105, fato que não tínhamos pressuposto na análise *a priori*.

Isso significa que o grupo 4 realizou a conversão da representação algébrica do ponto crítico e sua imagem para o registro gráfico *CAS\_MATH*, apenas para ilustrar.

---

<sup>19</sup> Existem pontos máximos e mínimos relativos e existem as derivadas parciais de primeira ordem, sendo que as derivadas parciais nesses pontos são iguais a zero. [...]. Então o ponto  $\{0,0,0\}$ , de acordo com que foi dito anteriormente, seria um ponto máximo e mínimo. (Tradução nossa)

**Figura 105.** Registro gráfico CAS do ponto crítico e sua imagem.



**Fonte:** produção do grupo 4.

O grupo 5 mostrou, pela apreensão perceptiva, o valor máximo e mínimo da função de duas variáveis na representação figural apresentada no problema, conforme Figura 106.

**Figura 106.** Representação icônica do valor máximo e mínimo.



(1)

**Fonte:** Produção do grupo 5.

Isso significa que a representação dos valores máximos e mínimos ainda é icônica.

Até o momento, evidenciamos que todos os grupos, ao validarem suas formulações em relação ao possível valor máximo ou mínimo, mobilizaram seus conhecimentos adquiridos nas institucionalizações locais previamente apresentadas, articulando a representação desses valores com a noção de derivadas parciais de primeira ordem.

A seguir, para dar solução à situação e responder à pergunta, notamos que foi uma etapa difícil para todos os grupos. Não tinham clareza em relação ao que perceberam, pela apreensão perceptiva, representando-a de maneira icônica, no que diz respeito aos valores máximo e mínimo, com seus resultados encontrados, após a validação.

Com efeito, esse problema provocou nos grupos um desequilíbrio cognitivo, porque acreditaram que a anulação das derivadas parciais, em um ponto de uma função de duas variáveis, indica sempre a presença de valor máximo ou valor mínimo. Tendo em vista que foi difícil responder o problema, os professores investigadores decidiram que o grupo 5 deveria comunicar aos seus colegas sua formulação sobre a natureza do ponto crítico, pois foi o único grupo que formulou conforme suposto na análise *a priori*. Após troca de ideias com os outros grupos em relação ao ponto crítico, todos concordaram em formular que nesse ponto crítico não existe um valor máximo, nem um valor mínimo.

Notamos que levou mais tempo do que previsto na etapa da concepção da situação didática para conseguir que os grupos sentissem a necessidade da noção das segundas derivadas parciais para caracterizar os pontos críticos.

Assim, o objetivo dessa situação foi atingido. Os grupos fizeram conjecturas em relação ao fato de que nem todo ponto crítico é um extremo local, ou seja, a existência das primeiras derivadas parciais nesse ponto não é suficiente para afirmar que a função de duas variáveis diferenciáveis tenha um extremo local, por isso, foram necessárias as segundas derivadas parciais.

No tocante ao processo de visualização na identificação do ponto de sela de uma função de duas variáveis reais, acreditamos que o gráfico representado no software *Mathematica* favoreceu o desenvolvimento das apreensões perceptiva, discursiva e operatória, por meio de modificações ótica, posicional e mereológica dentro desse registro, e, assim, discriminaram-se as variáveis visuais para identificar o ponto de sela de uma função de duas variáveis reais.

Em seguida, com apoio das formulações feitas pelos grupos, institucionalizamos localmente com uma observação, conforme citamos anteriormente.

Portanto, ao considerar as situações de ação, formulação, validação e a institucionalização local, vimos a necessidade de fazer um encerramento desses conhecimentos de uma maneira formal. Apresentamos, a seguir, as definições e teoremas necessários para o estudo dos valores máximo e mínimo locais de uma função de duas variáveis reais por meio de uma institucionalização global.

### **Institucionalização Global**

**Definições.** Diz-se que uma função  $f$  de duas variáveis tem:

1. Um máximo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  se há um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$ , de modo que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$  que estão dentro de um círculo.
2. Um mínimo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  se há um círculo centrado em  $(x_0, y_0)$ , de modo que  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  para todos os pontos  $(x, y)$  do domínio de  $f$  que estão dentro de um círculo.

**Teorema.** Se  $f$  tiver um valor de máximo ou mínimo local em um ponto  $(x_0, y_0)$  e se as derivadas parciais de primeira ordem existirem nesse ponto, então  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$ .

**Definição.** Um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio de uma função  $f(x, y)$  é denominado ponto crítico da função se  $f_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) = 0$  ou se uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em  $(x_0, y_0)$ .

**Definição.** Uma função diferenciável  $f(x, y)$  tem um ponto de sela em um ponto crítico  $(x_0, y_0)$  se em todo círculo centrado em  $(x_0, y_0)$  existirem ponto do domínio  $(x, y)$  em que  $f(x, y) > f(x_0, y_0)$  e ponto do domínio  $(x, y)$  em que  $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ .

**Teorema.** Seja  $f$  uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico  $(x_0, y_0)$  e seja  $D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$  o Hessiano de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ ,

- a)  $f(x_0, y_0)$  tem um mínimo local em  $(x_0, y_0)$  se  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  e  $D > 0$

- b)  $f(x_0, y_0)$  tem um máximo local em  $(x_0, y_0)$  se  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  e  $D > 0$
- c)  $f(x_0, y_0)$  não é máximo local nem mínimo local em  $(x_0, y_0)$  se  $D < 0$ .
- d) O teste é inconclusivo em  $(x_0, y_0)$  se  $D = 0$ .

### Situação de avaliação

Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  representada por  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 6$ . Estude os pontos críticos dessa função para determinar os valores máximos e mínimos locais. Justifique sua resposta.

O intuito desta situação foi levar o aluno a mobilizar os conhecimentos construídos a respeito de máximos e mínimo locais de funções de duas variáveis e, disponibilizá-lo na resolução dessa situação.

### Resolução do problema

A função definida algebraicamente por  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 6$  é definida e diferenciável para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Para achar os valores extremos dessa função vemos o caminho algébrico.

Achamos as derivadas parciais de primeira ordem e as igualamos a zero para achar os pontos críticos, isto é,

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, f_y = 6xy - 12 = 0$$

Resolvemos as equações e obtemos os pontos críticos:  $(1,2), (-1,-2), (2,1), (-2,-1)$ . O hessiano é dado pela expressão  $D = (6x)(6x) - (6y)^2$ , então calculamos seu valor em cada ponto crítico:

$$D(1,2) = 36 - 144 < 0, \text{ então } f(1,2) \text{ é um ponto de sela.}$$

$$D(-1,-2) = 36 - 144 < 0, \text{ então } f(-1,-2) \text{ é um ponto de sela.}$$

$D(2,1) = 144 - 36 > 0$  e  $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$ , então  $f(2,1) = -22$  é um mínimo local.

$D(-2,-1) = 144 - 36 > 0$  e  $f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$ , então  $f(-2,-1) = 34$  é um máximo local.

A variável didática levada em conta durante a escolha da situação de availação é a representação algébrica da função de duas variáveis reais.

Esperamos que os grupos mobilizassem todos os seus conhecimentos apreendidos na construção dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis. Assim, por meio de tratamentos no registro algébrico, das operações possíveis em equações e expressões algébricas, ao utilizar os teoremas e as definições mencionadas na institucionalização global, os grupos poderiam resolver a atividade proposta.

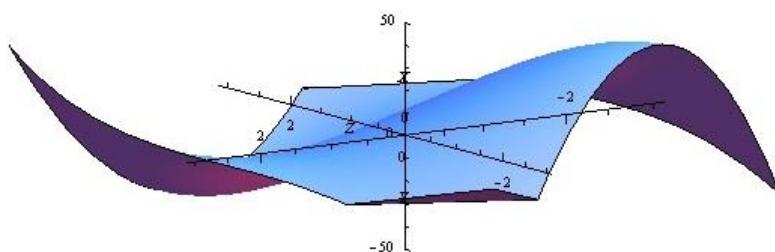
### *Análise a posteriori.*

Analisaremos com mais detalhe as ações dos grupos 1, 2, 4 e 5, pois realizaram outras ações que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

O **grupo 1** realizou a conversão do registro algébrico para o registro gráfico CAS da função de duas variáveis reais. No registro gráfico, há um tratamento, a partir das modificações ótica e posicional, na ação de ter uma apreensão perceptiva imediata da representação da função de duas variáveis, conforme Figura 107.

Observamos que, dentro do gráfico representado no software *Mathematica*, o grupo 1 discriminou uma variável visual, ou seja, posição da superfície traçada em relação aos eixos coordenados orientados positivamente, mesmo que não tenha mostrado, nesse registro, os cortes nos planos  $xz$  e  $yz$ . Isso significa que o grupo 1 realizou a conversão para o registro gráfico CAS, apenas para ilustrar o gráfico da função de duas variáveis reais, mostrando sinais de apreensão operatória para ter uma apreensão perceptiva dessa função nos pontos críticos, fato que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 107.** Registro gráfico CAS da função representada por  $z=x^3+3x^2-15x-12y+6$ .



**Fonte:** Produção do grupo 1.

Observamos, conforme mostra a Figura 108, que o grupo 1 ainda manifesta erros na representação algébrica dos valores máximo (mínimo) e dos valores de máximo (mínimo) de uma função de duas variáveis reais, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 108.** Representação gráfica do valor mínimo e máximo.

$$\begin{aligned} \text{Se } x = 2 \\ \frac{df}{dx} = 12 \quad \frac{df}{dy} = 12 \Rightarrow \text{Valor mínimo.} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x} \quad \frac{\partial y^2}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } x = -2 \\ \frac{df}{dx} = -12 \quad \frac{df}{dy} = -12 \Rightarrow \text{Valor Máximo} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x} \quad \frac{\partial y^2}{\partial y} \end{aligned}$$

**Fonte:** Produção do grupo 1.

O grupo 1 ainda não tem clareza de domínio e imagem de uma função de duas variáveis, porque não diferencia, por exemplo, o valor mínimo do valor de mínimo.

O **grupo 2**, de maneira semelhante ao grupo 1, ainda manifesta erros na representação algébrica dos valores máximo (mínimo) e dos valores de máximo (mínimo) de uma função de duas variáveis reais, conforme mostra a Figura 109, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 109.** Erros na representação algébrica dos valores máximo, mínimo.

$$f_{xx}(2,1) = 6(2) = 12 > 0 \text{ y como } D_H = 108 > 0; \text{ el punto } (2,1) \text{ es mínimo.}$$

$$f_{xx}(-2,-1) = 6(-2) = -12 < 0 \text{ y como } D_H = 108 > 0; \text{ el punto } (-2,-1) \text{ es máximo.}$$

$$f_{xx}(-1,-2) = 6(-1) = -6 < 0, \text{ y como } D_H = -108 < 0; \text{ el punto } (-1,-2) \text{ es punto de Silla.}$$

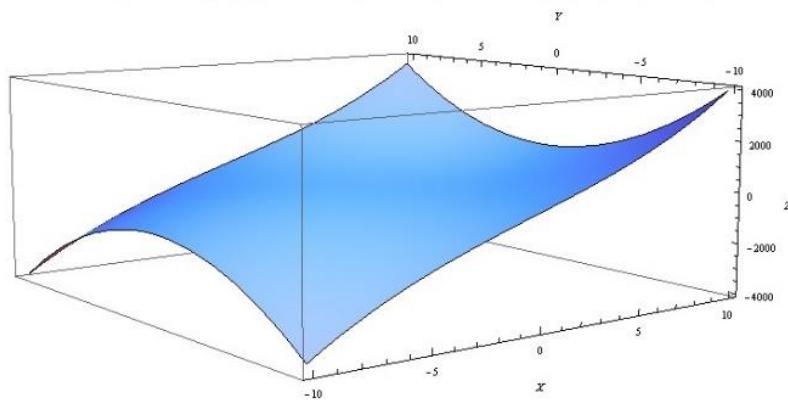
$$f_{xx}(1,2) = 6(1) > 0 \text{ y como } D_H = -108 < 0; \text{ el punto } (1,2) \text{ es ponto de Silla.}$$

**Fonte:** Produção do grupo 2.

Isso significa que o grupo 2 também não tem clareza de domínio e imagem de uma função de duas variáveis reais, dado que não diferencia, por exemplo, o valor máximo do valor de máximo.

O **grupo 4**, de maneira semelhante ao grupo 1, realizou a conversão do registro algébrico para o gráfico, representado no software *Mathematica*, da função de duas variáveis. No registro gráfico, há um tratamento, a partir das modificações ótica e posicional, na ação de ter uma apreensão perceptiva da representação da função de duas variáveis reais, conforme Figura 110.

**Figura 110.** Registro gráfico CAS\_MATH da função representada por  $z=x^3+3x^2-15x-12y+6$ .



**Fonte:** Produção do grupo 4.

Observamos que, dentro do registro gráfico CAS\_MATH, o grupo 4 não mostrou os cortes nos planos  $xz$  e  $yz$ . Isso significa que o grupo 1 realizou a conversão para o gráfico representado no software *Mathematica* apenas para ilustrar o gráfico da função de duas variáveis reais, diferente do grupo 1 – situação não prevista na análise *a priori*.

O **grupo 5**, de maneira semelhante aos grupos anteriores, também manifesta erros na representação algébrica dos valores máximo (mínimo) e dos valores de máximo (mínimo) de uma função de duas variáveis reais, conforme Figura 111, o que não tínhamos previsto na análise *a priori*.

**Figura 111.** Erros na concepção do valor máximo e mínimo.

PARA (2, 1);  $f_{xx} = 12$ ; HESSIANA: 108  
 $\therefore$  SI  $D > 0 \wedge f_{xx} > 0$ ; EL PUNTO ES MÍNIMO  
 PARA (-2, 1);  $f_{xx} = -12$  HESSIANA: 108  
 $\therefore$  SI  $D > 0 \wedge f_{xx} < 0$ ; EL PUNTO ES MÁXIMO.

**Fonte:** Produção do grupo 5.

O grupo 5, também, não tem clareza de domínio e imagem de uma função de duas variáveis, já que não diferencia, por exemplo, o valor mínimo do valor de mínimo.

Observamos que, embora tivéssemos institucionalizado e os alunos tivessem construído a noção de valor máximo e mínimo de funções de duas variáveis reais, o erro na representação algébrica do valor máximo (mínimo) e do valor de máximo (de mínimo) ainda permanece, ou seja, a falta de clareza na determinação e representação do domínio e imagem de uma função de duas variáveis na própria construção cognitiva dos alunos não desapareceu. Dessa forma, afirmamos que esses conhecimentos tornaram-se obstáculo, segundo Brousseau (1976), e, como sabemos, o próprio conhecimento de função é um obstáculo epistemológico.<sup>20</sup>

Finalmente, acreditamos que a elaboração de um conjunto de situações proporcionou aos alunos de engenharia construir as noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais. Assim, o estudo da visualização dos gráficos representados no software *Mathematica*, mediante a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, mostrou ser um meio para a compreensão dessa noção matemática.

---

<sup>20</sup> Segundo Brousseau (1976), os obstáculos epistemológicos são aqueles referentes à construção do conhecimento ao longo do decorrer da História e da própria construção cognitiva do aluno. O conhecimento de função é um exemplo de obstáculo epistemológico.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

A disciplina matemática, que faz parte da grade curricular dos cursos de Engenharia, é o Cálculo diferencial e integral de várias variáveis. Já na Faculdade de Engenharia de Alimentos na Universidade Nacional do Callao, no Peru, onde demos aulas, é chamada de Cálculo III.

Segundo minha experiência, como professora desse curso, os alunos apresentam problemas quanto à aprendizagem dos conteúdos envolvidos nessa disciplina. Quanto à revisão bibliográfica, observam-se duas características no processo de ensino de matemática na Engenharia: as dificuldades de compreensão de conceitos matemáticos, especialmente aqueles relacionados ao Cálculo diferencial e integral de funções de duas variáveis reais, e a falta de situações relacionadas ao campo de atividade profissional do futuro engenheiro nas aulas de Matemática.

A partir dessa revisão bibliográfica, percebe-se que há poucas pesquisas relacionadas ao ensino do Cálculo III, especificamente na área da Engenharia, que tratam da visualização como meio de compreender esses conhecimentos matemáticos, principalmente quanto à visualização no espaço. E foi justamente essa falta de pesquisas sobre a utilização do CAS, especificamente do *Mathematica*, no ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo III, que motivou a realização deste estudo.

Acreditamos que os alunos, por meio das situações propostas na tese, apropriaram-se das noções de valores máximo e mínimo locais de funções de duas variáveis reais, a partir de seus conhecimentos prévios. É o caso das noções de superfícies quadráticas, das derivadas parciais e dos planos tangentes, pois suas ações, formulações e validações evidenciaram a mobilização desses

conhecimentos para construir seus próprios novos conhecimentos, relacionados aos valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis reais na parte experimental da pesquisa.

O uso do CAS *Mathematica* facilitou a ocorrência das apreensões perceptiva, discursiva e operatória do gráfico representado no *Mathematica* na resolução dessas situações, isto é, os alunos desenvolveram a visualização no gráfico representado nesse software para identificar os valores máximo e mínimo de funções de duas variáveis reais, apoiando-se nela para compreender essa noção matemática. Assim, o estudo da visualização no Cálculo em duas variáveis reais, por intermédio da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, mostrou ser um meio para a compreensão dos valores máximo e mínimos locais de funções de duas variáveis.

A presente tese teve como objetivo *analisar o processo de visualização durante a aprendizagem das noções de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais dos alunos de engenharia*. Portanto, faremos nossas considerações finais sobre a fundamentação teórica e metodológica utilizada, sobre a parte experimental, os principais resultados e as novas perspectivas de estudo.

### **Fundamentação teórica e metodológica**

Entendemos que a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1998) foi pertinente ao nosso estudo por acreditarmos que, embora os alunos de Engenharia não estejam acostumados a trabalhar com atividades e/ou situações que articulem os temas matemáticos com os não matemáticos, as situações propostas levaram-nos a mobilizar seus conhecimentos para tomar decisões e estudar suas razões na construção dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis.

Organizamos as situações didáticas com base em um problema que, embora fosse real, não era comum nos livros didáticos. Em termos de conteúdo, as situações referem-se ao estudo de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais. A resolução das situações envolveu os conhecimentos prévios dos alunos, tais como: funções vetoriais de variável real, superfícies

quadráticas, funções de duas variáveis, domínio, imagem, derivadas parciais e planos tangentes.

As situações foram apresentadas a partir do registro da língua natural e do registro figural, como a situação 04, por exemplo. Para a solução dessas situações ocorreram conversões para o registro algébrico e posteriormente para o registro gráfico, e vice-versa. Nos registros gráficos houve tratamentos a partir das modificações ótica, posicional e mereológica na ação de observar a relação entre as superfícies e os planos perpendiculares ao eixo  $z$ .

Nos registros algébricos, os tratamentos se deram pelas operações possíveis com as derivadas parciais e na solução de sistemas de equações de duas variáveis. Além disso, as situações apresentaram uma questão aberta cuja resposta se deu por caminhos próprios dos alunos.

Para que os alunos compreendessem e construíssem efetivamente seus conhecimentos de valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis foram imprescindíveis as conversões entre registros e seus respectivos tratamentos, e a coordenação de esses registros de representação semiótica. Justamente por isso, a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995) possibilitou-nos maneiras de atenuar os efeitos de uma aprendizagem baseada no algorítmico, oferecendo-nos subsídios para compreender como os alunos visualizam, segundo Duval (1999), um gráfico de uma função de duas variáveis para identificar seus valores máximos e mínimos. Considera-se também, que o estudo do registro gráfico no sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$  tenha facilitado o reconhecimento das diferentes apreensões dos alunos na interação com o CAS *Mathematica*.

Por outro lado, utilizamos como metodologia uma Engenharia Didática de Artigue (1988) para orientar tanto nossas experiências em sala de aula, já que visa um estudo de processos de aprendizagem de certo saber matemático, quanto para estudar nossos resultados após a exploração dos dados recolhidos. Assim, ao longo da tese, desenvolvemos as quatro fases dessa metodologia.

Apresentamos, então, um olhar para a história, que mostra como foram construídos os conhecimentos matemáticos relacionados ao Cálculo em várias

variáveis reais. Percebemos que o estudo matemático dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis reais é o mesmo estudo feito por Lagrange (1759), pois os coeficientes presentes vêm a ser as derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

Assim, observamos que a construção dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas ou mais variáveis, está centrada no registro em língua natural e registro algébrico, sobressaindo-se o tratamento no registro algébrico. Porém, não existe uma articulação entre esses registros, nem a atividade de conversão entre registros de representação semiótica, nem a variedade de representações semióticas, que são condições necessárias para a compreensão dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis.

Essas limitações não favorecem o desenvolvimento da visualização na compreensão desses valores, pois a visualização requer a leitura dos gráficos cartesianos que depende da articulação entre o registro gráfico e o algébrico, sendo necessário compreender os tratamentos no registro gráfico e os diferentes tipos de apreensões de um gráfico.

Na análise *a priori* das situações didáticas, delineamos as variáveis microdidáticas, as possíveis ações, formulações, validações dos alunos e, em seguida, as institucionalizações locais depois de finalizada cada situação, assim como a institucionalização global. Na análise *a posteriori*, no entanto, validamos ou não nossas hipóteses levantadas na análise *a priori*.

### **Principais resultados**

Os alunos envolveram-se com o problema proposto pelas situações. Podemos observar e analisar de maneira detalhada suas ações e formulações quando interagiram com a situação. Na situação de ação, os alunos utilizaram para a resolução do problema proposto seus conhecimentos prévios anteriormente mencionados.

Na primeira situação, os grupos 2 e 3 realizaram a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. O grupo 2 efetuou a conversão no ambiente lápis e papel, usando os tratamentos no registro gráfico, a partir das modificações posicional e mereológica, para mostrar o valor máximo da função. Diferentemente

do grupo 3, que realizou a conversão para o registro gráfico CAS, o grupo 2 representou graficamente o valor máximo da função e, a partir da apreensão perceptiva, constatou que esse ponto era o valor máximo da função. Na ação de formulação, os alunos mobilizaram a noção de superfícies quadráticas para a resolução do problema.

Nas segunda e terceira situações, os alunos, por meio de modificações mereológicas dentro do gráfico representado no software *Mathematica*, traçaram planos perpendiculares ao eixo  $z$ , interceptando-os com a superfície até atingir o valor máximo e mínimo da função de duas variáveis. Na situação de formulação, mobilizaram a noção de plano tangente para a resolução do problema.

Verificamos também que nas segunda e terceira situações os alunos tiveram dificuldade no momento de vincular as noções de plano perpendicular ao eixo  $z$  e de plano tangente com suas respectivas definições matemáticas, particularmente a noção das derivadas parciais. Por isso, apontamos que a ação de validação e a culminância do processo de visualização, por parte dos alunos, não foram fáceis.

Com o apoio do CAS *Mathematica*, essas situações provocaram o tratamento no registro gráfico no sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$  (gráfico representado no software *Mathematica*), a partir das modificações ótica, posicional, mereológica, articulando a apreensão perceptiva, a apreensão operatória com a apreensão discursiva, relacionando-as com os conhecimentos matemáticos de plano perpendicular ao eixo  $z$  e plano tangente.

Após a validação das formulações dos alunos na conclusão de cada situação, institucionalizamos de maneira local, ou seja, a partir de suas produções, ordenamos, resumimos e organizamos essas produções por meio de observações e propriedades, vinculando os resultados obtidos em diferentes momentos do desenvolvimento da situação didática, a fim de estabelecer relações entre as produções dos alunos e o saber matemático, por exemplo, as noções de valor máximo local, valor mínimo local, ponto crítico e a condição necessária para a existência desses valores.

Por outro lado, na quarta situação, provocamos um desequilíbrio cognitivo nos alunos referente à noção de valor máximo e mínimo de uma função de duas

variáveis, o que propulsionou a busca de um novo saber: o uso das segundas derivadas parciais. Após as formulações feitas pelos alunos, institucionalizamos localmente apresentando suas produções em relação à noção de ponto de sela.

Assim, essa situação provocou o tratamento no registro gráfico CAS a partir das operações de tipo ótico, posicional, mereológica, articulando também a apreensão perceptiva, a apreensão operatória com a apreensão discursiva, e relacionando-os aos conhecimentos matemáticos de plano perpendicular ao eixo  $z$ , às derivadas parciais e à condição necessária para a existência dos valores máximos e mínimos.

Na procura desse novo saber, fomos levados a institucionalizar de forma global, vinculando as institucionalizações locais em diferentes momentos do desenvolvimento de todas as situações didáticas, estabelecendo as relações dessas institucionalizações locais e o saber matemático por meio da formalização e generalização, ou seja, apresentando as definições e teoremas relacionados à condição suficiente para a existência dos valores máximos e mínimos de uma função de duas variáveis.

Observamos as ações dos alunos, ao utilizarem o registro gráfico CAS, na procura de relações entre unidades significativas de representação do objeto com a intenção de identificar propriedades específicas de interesse em cada situação. Nesses casos, estimulamos a visualização, a qual não é explorada pelos livros didáticos que consultamos.

Neste sentido, o *CAS Mathematica* permitiu aos alunos explorar os gráficos de funções de duas variáveis reais de maneira dinâmica. Esse registro gráfico CAS facilitou a apreensão operatória dos gráficos no sistema cartesiano  $\mathbb{R}^3$ , isto é, sua modificação ótica, visto que, no momento de identificar os valores máximo, mínimo e ponto de sela, observaram as relações entre a superfície e os planos perpendiculares ao eixo  $z$  e variaram a localização dessas superfícies em relação aos seus eixos coordenados, identificando e discriminando suas variáveis visuais. O registro gráfico CAS facilitou também a modificação posicional e mereológica no momento de identificar os valores máximo, mínimo e ponto de sela, por meio do qual os alunos mudaram os pontos de observação, traçaram planos perpendiculares ao eixo  $z$ , giraram a superfície e trasladaram-na.

Verificamos que o CAS *Mathematica* contribuiu para a aprendizagem de Matemática III, uma vez que o aluno pode ver, manipular, conjecturar e visualizar as representações gráficas de funções definidas algebraicamente, sobretudo se essas representações algébricas não são reconhecidas pelo aluno.

Afirmamos que os alunos não apresentaram problemas em usar os comandos do CAS *Mathematica*, necessários para representar os gráficos em software.

Esta pesquisa revelou que o erro apresentado pelos alunos, ao construírem a noção de máximos e mínimos locais de uma função de duas variáveis reais, como o erro na representação algébrica do valor máximo (mínimo) e do valor de máximo (de mínimo), é decorrente da falta de clareza na determinação e representação do domínio e imagem de uma função de duas variáveis reais.

Constatamos pela análise das situações que levamos os alunos a transitar pelos diversos registros de representação: língua natural, tabular, algébrico e gráfico. Neste último efetuar tratamentos (modificações) que permitiram a ocorrência das apreensões do registro gráfico, além da realização da coordenação de registros de representação semiótica e a articulação entre o registro gráfico e o algébrico.

### **Perspectivas futuras**

Em relação aos resultados, pensamos em outras pesquisas que aprofundem os estudos dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis, especialmente, o estudo dos Multiplicadores de Lagrange com o CAS *Mathematica* (ou com outros CAS), articulando ainda mais os ambientes informáticos e de lápis e papel, com situações que levem os alunos a fazer conjecturas e validar as propriedades dos Multiplicadores de Lagrange.

Além disso, o estudo dos valores máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis merece um estudo mais detalhado daquele que conseguimos realizar neste trabalho e um estudo mais aprofundado das apreensões do registro gráfico de funções de duas variáveis e suas possíveis articulações.

Do mesmo modo, consideramos que são necessárias outras pesquisas sobre funções de duas variáveis como: geometria analítica no cálculo, funções vetoriais, campos vetoriais, integrais de linha, integrais de superfície, baseadas na visualização de Duval, dos registros gráficos e na iteração com outros ambientes CAS.

## REFERÊNCIAS

---

- ALMOLOUD, S. "Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos". In: MACHADO, S. D. A (org). **Aprendizagem em Matemática: Registro de representação semiótica**. Campinas. Papirus, 2003, p. 125-147.
- ALMOLOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná. Editora da Universidade Federa de Paraná, 2007.
- ALMOLOUD, S; FERREIRA, M. J. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**. Florianópolis. v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.
- ALVES, V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. 397f. Tese (Doutorado em Educação)- Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- ANTON, H. **Cálculo**. Porto Alegre. V. II. Editora Bookman, 2005.
- ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9/3, p. 281-308. Grenoble, La pensée Sauvage Éditions, 1988.
- BRASIL. MEC/Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 11/2002. Diário Oficial da União, Brasília, 9 de abril de 2002. Seção 1, p. 32. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES112002.pdf>>. Acesso em 23 de julho de 2014.
- BROUSSEAU, G. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques**. In J. Vanhamme e W. Vanhamme (eds.), La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIII et recontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (pp. 101-117). Louvain la Neuve. 1976.
- \_\_\_\_\_. **Les différents rôles du maître**. Bulletin de l'A.M.Q. Montréal. n° 23, pp. 14-24. 1988. Disponível em: <<http://guy-brousseau.com/1372/les-differents-roles-du-maitre-1988/>> Acesso em 14 de agosto de 2014.

\_\_\_\_\_. **La théorie des situations didactiques.** Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Montreal. 1997

\_\_\_\_\_. Théorie des Situations Didactiques. La Pensée sauvage, éditions. 1998.

**CAJORI, F. Uma História da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

**CARVALHO, N. T. B.; PEREIRA, R. O Software MAPLE no estudo de funções de várias variáveis.** *Educação Matemática em Revista*, ano 11, n. 17, p. 52-60, dezembro, 2004.

**COLLETTE, J. P. Historia de las matemáticas II.** España. Siglo veintiuno de España Editores, S.A. 1993.

**CORONA, G; ARELLANO, S.** "Euler y la cuerda vibrante". In: Anzaldo, A. M. (Org). **El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos años de su Nacimiento.** 1. Ed. México, Innovación Editorial Lagares de México, S.A de C.V., 2007. Cap.4. p. 91-106.

**COURANT, R. Cálculo Diferencial e Integral.** Brasil. Editora Globo. 1966.

**DUVAL, R.** "Graphique et équations: l'articulation de deux registres". **Annales de didactique et de sciences cognitives**.IREM de Strabourf, v.1, p. 235-253, 1988.

\_\_\_\_\_. "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée". **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

\_\_\_\_\_. **Les différents fonctionnements possibles d'une figure dans une démarche géométrique.** Repères, 17, p.121-138, 1994.

\_\_\_\_\_. **Semiósing et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berna: Peter Lang, 1995.

\_\_\_\_\_. **Representation, vision and visualization:** Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for learning. In F. Hitt and M. Santos (Eds.), Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, p. 311-335. Columbus, OH: ERIC.1999.

\_\_\_\_\_. **Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo.** Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

\_\_\_\_\_. **Ver e ensinar a matemática de outra forma.** Primeira Edição. São Paulo: PROEM, 2011.

- FINNEY, R. L; THOMAS, G. B. **Cálculo varias variables**. 9<sup>a</sup>. Edição. Addison Wesley Longman de México, S.A. 1999.
- GUZMAN, M. **El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis**. Editorial Pirámide. Madrid. 1996.
- HAIRER, E; WANNER, G. **Analysis by its History**. Springer, USA, Editorial Board, 2008.
- HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple**. 550f. Tese (Doutorado em Didática das Matemáticas)- Université Joseph Fourier, Grenoble, Alpes, França, 2006.
- HAEUSSLER, E. F. **Matemáticas para administración y economía**. Prentice Hall, 2003.
- HUSSERL, E. **A crise da humanidade europeia e a filosofia**; introd. e trad. Urbano Zilles. 2 ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. 96 p. Coleção Filosofia; 41.
- IMAFUKU, R.S. **Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis**. 2008. 235p. Dissertação de mestrado, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- J. L. DE LAGRANGE. **Recherches sur la méthode de maximis et minimis**, Misc. Taurinensis, Torino 1 (1759), Ouvres I, p. 3-20. Disponível em <<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2155691/f54.image>> Acesso em Maio de 2013.
- LACROIX,S.F. **Essais sur L'enseignement en général et sur celui de Mathématique en particulier**. Paris, Imprimeur – Libraire pour les Mathématiques, quais des Augustins, N° 57. An XIV-1816.
- MARSDEN, J.; TROMBA, A. **Cálculo Vectorial**. Trad. Manuel López Mateos. 4 Ed. U.S.A: Addison Wesley Iberoamericana, 1998.
- MORA, F. W. **Cálculo em Várias Variáveis**. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Primera Edición. Revista Diginal Matemática Educación e Internet, 2012.
- NETO, B. M.; NUNES DE ALMEIDA, N. Perspectivas para Engenharia Nacional Desafios e Oportunidades. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 32; n. 3; 2013.
- NOMURA, J. I. Sobre os documentos governamentais e institucionais do curso de Engenharia Eléctrica: uma análise da relação institucional esperada. In: II CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011. Rio Grande do Sul. **Anais eletrônicos**. Disponível em <<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/>>. Acesso em 23 de julho de 2014.
- ROSA, C.A. **História da Ciência: O Pensamento Científico e a Ciência no Século XIX**. Brasília. 2010. Fundação Alexandre de Gusmão. V.2. Tomo 2.

ROSA, C.A. **História da Ciência: O Pensamento Científico e a Ciência no Século XIX.** Brasília. 2012. Fundação Alexandre de Gusmão. V.2. Tomo 1. 2da edição.

RUIZ, P.C. **Cálculo Vectorial.** 1<sup>a</sup>Ed. Mexico: Prentice Hal Hispanoamericana, 1995.

TRIGUEROS, M.; MARTÍNEZ, R. **Geometrical representations in the learning of two-variable functions.** Educational Studies Mathematical 73, p. 3-19. 2010.

VIEIRA, Márcia. **Análise exploratória de dados: Uma abordagem com alunos do ensino Médio.** 2008. 186f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

WOLFRAM, S. **Virtual Book**, 2013. Disponível em:<<http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/TheStructureOfMathematica.html>.> Acesso em Maio de 2014.

XHONNEUX, S.; HENRY, V. **A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's theorem in mathematics and in economics.** Cerme 7: Working Group 14, p. 1-10. 2010.

## APÊNDICES



### PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO Centro das Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

#### Apêndice A - A Sequência de Ensino

##### Situación 01

Una empresa de celulares Smartphone pone a la venta para el sector adolescente durante seis meses, un nuevo modelo de alta tecnología y desempeño en dos ciudades del Perú, Cuzco y Piura. Además, la empresa para facilitar su estudio de mercado considera necesario que el precio esté determinado linealmente por la cantidad demandada en este periodo de tiempo. De esta forma, en Cuzco si el precio es de S/.300, la demanda es de 700 Smartphone; si el precio es de S/.500, la demanda es de 500 Smartphone y si el precio es de S/.1000, ningún equipo es vendido. En Piura, si el precio es de S/.300, la demanda es de 540 Smartphone; si el precio es de S/.500, la demanda es de 340 Smartphone y si el precio es de S/.840, no se vende ningún equipo. El costo fijo de fabricación de los Smartphone es de 60 soles y el costo variable es de cuarenta veces la cantidad vendida en las dos ciudades. ¿Cuántos Smartphone deben ser vendidos en cada ciudad para obtener la mayor utilidad, y cuál es el valor de esta utilidad?



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

### **Situación 02**

La permanente necesidad de atender la demanda de productos variados y saludables a todo tipo de consumidores, llevó a una empresa a elaborar galletas naturales; para esto lanzó al mercado dos tipos de galletas: la galleta integral y la galleta de avena, cuya presentación es en bolsas de 24 unidades. Los costos totales de producción son de 2 y 3 soles por bolsa, respectivamente. La demanda (en miles de bolsas) de galletas integrales que pueden venderse cada semana es cuatro veces la diferencia del precio del segundo producto con relación al primero y la demanda (en miles de bolsas) de galletas de avena es cuatro veces la diferencia del precio del primer producto con relación al doble del segundo; pero la preferencia de los consumidores por esta galleta, incrementa su demanda siempre en 36 miles de bolsas. ¿Cuál será la mayor utilidad que obtiene la empresa y cuáles serían los precios de venta de cada tipo de galleta? Justifique su respuesta



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

### Situación 03

Los buenos resultados de la economía peruana en los últimos años produjeron un efecto positivo sobre el mercado inmobiliario dirigido a empresas comerciales. Una constructora trajo a Lima un nuevo concepto de empresa comercial basada en la flexibilidad, confort y modernidad. Pensando en el confort, se proyecta construir edificios donde la pérdida de calor en relación a la estructura del edificio sea mínima. Para eso, la constructora requiere que el edificio tenga la siguiente característica: las paredes laterales derecha e izquierda pierden calor a una tasa de 10 unidades/ $m^2$  por día, las paredes frontal y posterior a una tasa de 8 unidades/ $m^2$  por día, el piso a una tasa de 1 unidad/ $m^2$  por día y el cielo raso a una tasa de 5 unidades/ $m^2$  por día. El espacio que ocupa el edificio es exactamente de 3750  $m^3$ . ¿Cuáles deberían las dimensiones del edificio que minimizan la pérdida de calor y cual sería esa pérdida? Justique su respuesta.

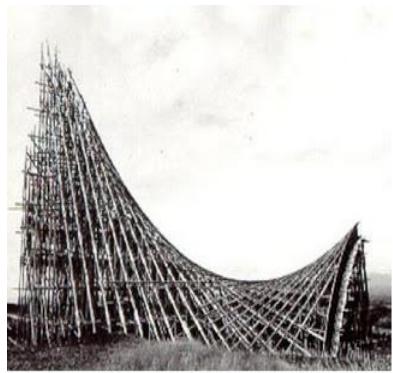


## PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO Centro das Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

### Situación 04

En la actualidad observamos construcciones con diseños arquitectónicos modernos, por ejemplo: El edificio Copan en São Paulo, su arquitectura en forma de "S" se constituye en un símbolo de esa ciudad; la Capilla de Lomas de Cuernavaca en México, mostrada en la figura de abajo, entre otros.



(1)



(2)

Figura: (1) Capilla en construcción y (2) Capilla finalizada

La doble curvatura de esta capilla permite resistir los esfuerzos de presión, tensión y flexión de la construcción, por lo que de forma barata pueden obtenerse techados con gran resistencia de carga. Utilizando los conocimientos estudiados hasta el momento en las situaciones anteriores, ¿qué puedes observar de este diseño arquitectónico particular? Justifique su respuesta.



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

### **Situación de evaluación**

Considere la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 6,$$

Estudie los puntos críticos de esta función para determinar los valores máximos y mínimos locales. Justifique su respuesta.



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

## Apêndice B - Roteiros para observação dos encontros

---

### Ficha de observación 01

Fecha:

Nombre del observador: \_\_\_\_\_

Nombre de los alumnos observados:

\_\_\_\_\_

Nº de Grupo

\_\_\_\_\_

Condiciones de la observación:

- El observador no debe interactuar con los alumnos observados durante el desarrollo de la situación didáctica.
- Después de terminada la situación didáctica, recoger la ficha de trabajo del alumno.
- Tener presente que la situación didáctica se desarrollará en parejas, una pareja por computador, luego observe el trabajo de la pareja como un todo.
- Describir detalladamente las acciones de la pareja de alumnos de manera ordenada durante el desarrollo de cada actividad.
- Enfóquese especialmente en las acciones y los comentarios que la pareja de alumnos hace en el momento que se va adueñando de la actividad.
- En caso el alumno use el computador, indicarle que cree una carpeta <Nº de grupo\_situación01> y guarde todo su trabajo en esa carpeta.

--



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

## Ficha de observación 02

Fecha:

Nombre del observador: \_\_\_\_\_

Nombre de los alumnos observados:

Nº de grupo

Condiciones de la observación:

- El observador no debe interactuar con los alumnos observados durante el desarrollo de la situación didáctica.
- Después de terminada la situación didáctica, recoger la ficha de trabajo del alumno.
- Tener presente que la situación didáctica se desarrollará en parejas, una pareja por computador, luego observe el trabajo de la pareja como un todo.
- Describir detalladamente las acciones de la pareja de alumnos de manera ordenada durante el desarrollo de cada actividad.
- Enfóquese especialmente en las acciones y los comentarios que la pareja de alumnos hace en el momento que se va adueñando de la actividad.
- Indicarle a la pareja crear una carpeta <Nº de grupo\_situación02> y guardar todo su trabajo en esa carpeta.

--



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

### Ficha de observación 03

Fecha:

Nombre del observador: \_\_\_\_\_

Nombre de los alumnos observados:

\_\_\_\_\_

Nº de grupo

\_\_\_\_\_

Condiciones de la observación:

- El observador no debe interactuar con los alumnos observados durante el desarrollo de la situación didáctica.
- Después de terminada la situación didáctica, recoger la ficha de trabajo de la pareja de alumnos.
- Tener presente que la situación didáctica se desarrollará en pareja de alumnos, una pareja por computador, luego observe el trabajo de la pareja como un todo.
- Describir detalladamente las acciones de la pareja de alumnos de manera ordenada durante el desarrollo de cada actividad.
- Enfóquese especialmente en las acciones y los comentarios que la pareja de alumnos hace en el momento que se va adueñando de la actividad.
- Indicarle a la pareja crear una carpeta <Nº de grupo\_situación03> y guardar todo su trabajo en esa carpeta.

--



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

## Ficha de observación 04

Fecha:

Nombre del observador: \_\_\_\_\_

Nombre de los alumnos observados:

Nº de grupo

Condiciones de la observación:

- El observador no debe interactuar con los alumnos observados durante el desarrollo de la situación didáctica.
- Después de terminada la situación didáctica, recoger la ficha de trabajo de la pareja de alumnos.
- Tener presente que la situación didáctica se desarrollará en pareja de alumnos, una pareja por computador, luego observe el trabajo de la pareja como un todo.
- Describir detalladamente las acciones de la pareja de alumnos de manera ordenada durante el desarrollo de cada actividad.
- Enfóquese especialmente en las acciones y los comentarios que la pareja de alumnos hace en el momento que se va adueñando de la actividad.
- Indicarle a la pareja crear una carpeta <Nº de grupo\_situación04> y guardar todo su trabajo en esa carpeta.

--



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

### Ficha de observación 05

Fecha:

Nombre del observador: \_\_\_\_\_

Nombre de los alumnos observados:

Nº de grupo

Condiciones de la observación:

- El observador no debe interactuar con los alumnos observados durante el desarrollo de la situación didáctica.
- Despues de terminada la situación didáctica, recoger la ficha de trabajo de la pareja de alumnos.
- Tener presente que la situación didáctica se desarrollará en pareja de alumnos, una pareja por computador, luego observe el trabajo de la pareja como un todo.
- Describir detalladamente las acciones de la pareja de alumnos de manera ordenada durante el desarrollo de cada actividad.
- Enfóquese especialmente en las acciones y los comentarios que la pareja de alumnos hace en el momento que se va adueñando de la actividad.
- En caso la pareja de alumnos use o computador, indicarle crear una carpeta <Nº de grupo\_actividad\_cierre> y guardar todo su trabajo en esa carpeta.

--

## ANEXOS

---

### Anexo A - Ementa da disciplina Matemática III

---



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA PESQUERA Y DE ALIMENTOS**  
**DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE INGENIERÍA DE ALIMENTOS**

#### SYLLABUS

##### **I. INFORMACIÓN GENERAL**

1.1. Nombre de la asignatura	:	MATEMÁTICA III
1.2. Número y Código	:	IA - 305
1.3. Tipo de Asignatura	:	Obligatoria
1.4. Pre- requisito	:	Matemática II
1.5. Créditos	:	04
1.6. Horas	:	Teoría: 03 h // Práctica: 03 h.
1.7. Duración	:	17 semanas
1.8. Ciclo Académico	:	2012-B
1.9. Profesor	:	Lic. Carlos Bravo Quispe.

##### **II. DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA**

Matemática III es un curso curricular, teórico-práctico que ofrece al estudiante otra oportunidad para aumentar su comprensión y apreciación de las ideas fundamentales del análisis. La Geometría y el cálculo se extienden en dimensión con los vectores " $n$ "-dimensionales. Para ello se tratan tópicos como: Funciones vectoriales. Funciones de varias variables. Integrales dobles y triples: usos y aplicaciones.

##### **III. SUMILLA**

Se estudia en este curso los siguientes temas: Funciones vectoriales de una variable real: límite, continuidad. Derivación e Integración. Tangente unitaria, Normal principal y vector Binormal. Curvatura y Torsión. Aplicaciones. Funciones reales de un vector: Derivadas Parciales, Derivadas Direccionales, Derivadas parciales de orden superior. Máximos y mínimos: Métodos. Aplicaciones. Funciones vectoriales de un vector: Operador Nabla. Divergencia y rotacional. Integral de Línea. Integrales Múltiples: Integrales dobles. Integrales iteradas. Integrales triples. Aplicaciones. Integrales de superficie. Teorema de Green. Teorema de Stokes. Teorema de Gauss. Aplicaciones.

##### **IV. OBJETIVOS**

###### **A. GENERALES:**

- Brindar al estudiante los conceptos y herramientas matemáticas del cálculo multivariable.
- Iniciar al estudiante en la modelación y resolución de problemas relacionados a su especialidad y a la Ingeniería.
- Ampliar su base matemática que les permita afrontar mejor los retos de futura actividad profesional.

###### **B. ESPECÍFICOS:**

- Definir y Operar funciones vectoriales.
- Aplicar las funciones de varias variables a problemas de Optimización en Ingeniería.
- Analizar, Plantear y Resolver problemas usando el modelo de las integrales múltiples.



## **V. METÓDICA**

### **5.1. PAUTAS:**

- El profesor expondrá las clases teóricas utilizando técnicas didácticas que propicie y estimule la participación activa de los alumnos en clase.
- El profesor implementará prácticas grupales dirigidas que permitirán reforzar los conocimientos adquiridos.
- El alumno asistirá, revisando los temas tratados y estudiando el tema a desarrollar en clase.

### **5.2. MATERIALES:**

- Bibliografía Básica, Intermedia y Avanzada
- Separatas de Ejercicios y Problemas de Aplicación.
- Software matemático disponible en Internet para la parte gráfica fundamentalmente.
- Links en Internet que permiten acceder a información especializada relacionada a las aplicaciones de cada uno de los tópicos del curso.

## **VI. PROGRAMACIÓN DE LA ASIGNATURA**

### **SEMANA N° 1: RECTAS Y PLANOS**

La Recta: ecuación vectorial, continua y paramétrica. El Plano: ecuaciones. Planos paralelos y perpendiculares. Aplicaciones.

### **SEMANA N° 2: FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL**

Definición. Operaciones algebraicas. Límite y Continuidad. Derivada e Integración de una Función Vectorial. Aplicaciones.

### **SEMANA N° 3: CURVAS**

Curva parametrizada. Curva Regular. Longitud de arco. Vectores unitarios: tangente, normal y binormal. Curvatura y Torsión. Aplicaciones.

### **SEMANA N° 4: SUPERFICIES CUADRÁTICAS**

Superficies Cuadráticas: Definición de Superficie. Superficies cuadráticas. Gráficos. Ejemplos y aplicaciones.

### **SEMANA N° 5: FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES**

Definición. Dominio y Rango. Curvas de nivel. Superficies de nivel. Límites y Continuidad. Derivadas Parciales: Interpretación Geométrica, Derivadas Parciales de orden superior. Aplicaciones. Derivada Direccional.

### **SEMANA N° 6: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS PARCIALES**

Derivada de una función compuesta. Derivación Implícita. Diferencial: Interpretación geométrica. Gradiente. Valores Extremos de Funciones de Varias Variables. Punto crítico. Criterio de la matriz Hessiana. Caso de la 2da. Derivada. Extremos condicionados: Método de los multiplicadores de Lagrange. Ejemplos y aplicaciones.



**SEMANA N° 7: INTEGRALES DOBLES**

Definición. Funciones integrables. Cálculo de integrales dobles por medio de integrales iteradas. Teorema de Fubini. Cambio de variable. Integrales dobles mediante coordenadas polares. Aplicaciones.

**SEMANA N° 8: EXAMEN PARCIAL**

**SEMANA N° 9: INTEGRALES TRIPLES**

Integrales Triples: Definición. Cálculo mediante integrales iteradas. Volúmenes mediante integrales triples. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas. Aplicaciones.

**SEMANA N° 10: INTEGRAL DE LINEA**

Definición. Propiedades. Independencia de la trayectoria en integrales curvilíneas. Aplicaciones. Teorema de Green en el plano. Aplicaciones.

**SEMANA N° 11: INTEGRAL DE SUPERFICIE**

INTEGRAL DE SUPERFICIE: Superficie parametrizada. Área de una superficie. Definición de Integral de Superficie. Orientación de una Superficie.

**SEMANA N° 12: OPERADORES DIFERENCIALES EN IR<sup>3</sup>**

Campos vectoriales y escalares. Ejemplos. Operadores Diferenciales en IR<sup>3</sup>: Nabla, Divergencia y Rotacional. Algunas relaciones entre ellos.

**SEMANA N° 13:**

Teorema de la Divergencia. Interpretación física. Aplicaciones. Teorema de Stokes. Interpretación física. Aplicaciones.

**SEMANA N° 16: EXAMEN FINAL**

**SEMANA N° 17: EXAMEN SUSTITUTORIO**

**VII. ACTIVIDADES ACADÉMICAS**

- Práctica dirigida : Funciones vectoriales de variable real.
- Práctica dirigida : Curvas y Superficies regulares.
- Práctica dirigida : Funciones de varias variables. Curvas de nivel.
- Práctica dirigida : Derivación parcial e implícita.
- Práctica dirigida : Aplicaciones de Máximos y mínimos
- Práctica dirigida : Integrales dobles. Aplicaciones.
- Práctica dirigida : Integrales triples. Aplicaciones.
- Práctica dirigida : Teorema de Green. Divergencia. Stokes.

**VIII. EVALUACIÓN ACADÉMICA**

La Evaluación valora y mide los logros del aprendizaje en función de los objetivos propuestos en el curso. Para ello, se tiene en cuenta una evaluación esencialmente formativa, que permite formar juicio o calificación y que nos lleve a tomar decisiones de mejora. Se considerará la



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE INGENIERIA PESQUERA Y DE ALIMENTOS**  
**DEPARTAMENTO ACADEMICO DE INGENIERIA DE ALIMENTOS**

evaluación valorativa: actitudes positivas, reflexiones y otros, que bonificarán puntos en lo referente a la Práctica.

Los instrumentos de evaluación son:

**Un (01) examen parcial y un (01) examen final** los que se rendirán en forma obligatoria de acuerdo al cronograma académico de la Universidad.

Los exámenes serán de tipo mixto, incluyendo aspectos teóricos y prácticos.

**Forma de calificación:** Las pruebas se calificarán teniendo en cuenta: El planteamiento del problema, el procedimiento realizado y la respuesta e interpretación de la misma de ser el caso. Para ello, se sugiere que después de haber leído la pregunta procure esbozar un gráfico o diagrama que represente el problema y que permita asociar a la resolución las propiedades o conceptos necesarios.

**La Práctica (PP),** es el resultado del promedio aritmético de las actividades obligatorias en cada semana, y las participaciones en carpeta y/o pizarra.

El Promedio Final (PF) se obtendrá de acuerdo a la siguiente ponderación:

$$\boxed{\mathbf{PF = 40\% \, PP + 30\% \, EP + 30\% \, EF}}$$

donde: PF = promedio final. PP = promedio de práctica. EP = Examen parcial.  
EF = Examen final.

**Inasistencias a exámenes:** El alumno que faltase a alguna de los exámenes parcial o final expondrá su caso ante el Profesor quien tomará decisión sobre el particular.

**Observación a evaluaciones:** Todo estudiante podrá presentar observaciones a alguna de sus calificaciones en el momento mismo que recibe su calificación.

#### **IX. REQUISITOS DE APROBACIÓN**

- Rendir los exámenes y prácticas calificadas programadas.
- Presentar todos sus trabajos obligatorios y
- Alcanzar una nota final igual a 11, en concordancia con las normas de la Universidad.

#### **X. BIBLIOGRAFÍA**

- |                    |   |   |
|--------------------|---|---|
| 1. PITA RUIZ       | : | Cálculo Vectorial.<br>Ed. Prentice Hall, 1995                                       |
| 2. STEWART, JAMES  | : | Cálculo Multivariable.<br>Ed. Thomsom. 3 <sup>a</sup> .ed.1999.                     |
| 3. FINNEY, THOMAS  | : | Cálculo de Varias Variables.<br>Ed. Pearson Educación. 9 <sup>a</sup> . Edic. 1999. |
| 4. TROMBA, MARSDEN | : | Cálculo Vectorial.<br>Edit. Addison Wesley Longman. 4 <sup>a</sup> . Edic. 1998.    |



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
*FACULTAD DE INGENIERIA PESQUERA Y DE ALIMENTOS*  
*DEPARTAMENTO ACADEMICO DE INGENIERIA DE ALIMENTOS*

---

5. GARCIA-LOPEZ-RODRIGUEZ : Cálculo II. Teoría y Problemas de funciones de Varias Variables. Ed. CLAGSA. Madrid. 1997.
6. O'NEILL PETER V. : Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería. Ed. Continental México 1994

**CONTACTO CON EL DOCENTE:**

E mail: [cbravoquispe@yahoo.es](mailto:cbravoquispe@yahoo.es)

## Anexo B - Parecer do comitê de Ética.

---



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE  
CATÓLICA DE SÃO PAULO-  
PUC/SP



### PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

#### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** O USO DA VISUALIZAÇÃO PARA A COMPREENSÃO DOS VALORES EXTREMOS LOCAIS DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS.

**Pesquisador:** KATIA VIGO INGAR

**Área Temática:**

**Versão:** 1

**CAAE:** 14660713.0.0000.5482

**Instituição Proponente:** Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia

**Patrocinador Principal:** FUND COORD DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NIVEL SUP

#### DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 627.939

**Data da Relatoria:** 06/05/2013

#### Apresentação do Projeto:

Trata-se de protocolo de pesquisa para elaboração de Tese de Doutorado no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (EDM), vinculado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FCET) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Projeto de pesquisa de autoria de Katia Vigo Ingard, sob a orientação da Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva.

A proposta "(...) trata do ensino, aprendizagem do valores extremos de funções de várias variáveis. Seu objetivo geral é implementar uma Engenharia Didática envolvendo o estudo do teorema: Teste da Segunda Derivada para valores extremos locais de funções de duas variáveis. A estruturação e a concepção de situações didáticas de ensino envolvendo situações-problemas diferenciadas. A teoria a usar é a visualização e a teoria das situações didáticas."

#### Objetivo da Pesquisa:

Implementar uma Engenharia Didática envolvendo o estudo do teorema: Teste da Segunda Derivada para valores extremos locais de funções de duas variáveis.

<b>Endereço:</b>	Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C	<b>CEP:</b>	05.015-001
<b>Bairro:</b>	Perdizes	<b>Município:</b>	SAO PAULO
<b>UF:</b>	SP	<b>Fax:</b>	(11)3670-8466
<b>Telefone:</b>	(11)3670-8466	<b>E-mail:</b>	cometica@pucsp.br



Continuação do Parecer: 627.939

**Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Segundo a autora, os riscos apresentados são mínimos. E no que diz respeito aos benefícios, menciona: "dar ênfase final à descrição da Cálculo em Várias Variáveis, em seguida, com a intenção de delinear, caracterizar, discutir e compreender a natureza do principal raciocínio que quer registrar, discutir a natureza epistemológica dos pontos críticos."

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

A exposição do Projeto é clara e objetiva, feita de maneira concisa e muito bem fundamentada, permitindo-se concluir que a proposta de pesquisa em tela, possui uma linha metodológica bem definida, base da qual será possível auferir conclusões consistentes e, portanto, válidas.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Apresentados a contento, conforme orienta a Resolução CNS/MS nº 466/12, os Regimento e Regulamento Interno do Comitê de Ética em Pesquisa, campus Monte Alegre da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - CEP-PUC/SP e o Manual Ilustrado da Plataforma Brasil, disponíveis para consulta no site: [www.pucsp.br/cometica](http://www.pucsp.br/cometica)

**Recomendações:**

Recomendamos que o desenvolvimento da pesquisa siga os fundamentos, metodologia, proposições, pressupostos em tela, do modo em que foram apresentados e avaliados por este Comitê de Ética em Pesquisa. Qualquer alteração deve ser imediatamente informada ao CEP-PUC/SP, indicando a parte do protocolo de pesquisa modificada, acompanhada das justificativas.

Também, a pesquisadora deverá observar e cumprir os itens relacionados abaixo, conforme indicado pela Res. 466/12:

- a) desenvolver o projeto conforme delineado;
- b) elaborar e apresentar o relatório final;
- c) apresentar dados solicitados pelo CEP, a qualquer momento;
- d) manter em arquivo, sob sua guarda, por um período de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa, os seus dados, em arquivo físico ou digital;
- e) encaminhar os resultados para publicação, com os devidos créditos aos pesquisadores associados e ao pessoal técnico participante do projeto;
- f) justificar, perante o CEP, interrupção do projeto.

**Endereço:** Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C

**Bairro:** Perdizes

**CEP:** 05.015-001

**UF:** SP

**Município:** SAO PAULO

**Telefone:** (11)3670-8466

**Fax:** (11)3670-8466

**E-mail:** [cometica@pucsp.br](mailto:cometica@pucsp.br)



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE  
CATÓLICA DE SÃO PAULO-  
PUC/SP



Continuação do Parecer: 627 939

#### **Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Não há, portanto, recomendamos à aprovação da pesquisa ao Colegiado do CEP-PUC/SP.

## Situação do Parecer:

Aprobado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

#### **Considerações Finais a critério do CEP:**

SAO PAULO, 28 de Abril de 2014

Assinador por:  
Edgard de Assis Carvalho  
(Coordenador)

**Endereço:** Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C  
**Bairro:** Perdizes **CEP:** 05.015-001  
**UF:** SP **Município:** SAO PAULO  
**Telefone:** (11)3670-8466 **Fax:** (11)3670-8466 **E-mail:** cometica@pucsp.br



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

**Anexo C - Termo de compromisso dos alunos do curso**

---

**TERMO DE COMPROMISSO**

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado, atividades realizadas, gravações em áudio e em vídeo, transcrições e registros escritos servirão de base para melhor entender em que medida e de que forma as situações de resolução de problemas, com apoio do *Mathematica*, influencia no desenvolvimento da atividade Matemática do aluno.

O acesso aos registros em vídeo será exclusivo dos pesquisadores e só poderá ser apresentado com a autorização dos participantes. Nas transcrições e registros escritos, os mesmos terão seus nomes substituídos por pseudônimos, preservando-se a identidade dos sujeitos, no material escrito, produzido a partir dos dados coletados durante a realização da pesquisa.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, Fevereiro de 2014.

---

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Sivila

---

Katia Vigo Ingar

---

Aluno



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**  
**Centro das Ciências Exatas e Tecnologia**

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

## **Anexo D - Termo de compromisso do professor do curso**

---

### **TERMO DE COMPROMISSO**

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado, atividades realizadas, gravações em áudio e em vídeo, transcrições e registros escritos servirão de base para melhor entender em que medida e de que forma as situações de resolução de problemas no contexto da engenharia, com apoio do *Mathematica*, influencia no desenvolvimento da atividade Matemática do aluno.

O acesso aos registros em vídeo será exclusivo dos pesquisadores e só poderá ser apresentado com a autorização dos participantes. Nas transcrições e registros escritos, os mesmos terão seus nomes substituídos por pseudônimos, preservando-se a identidade dos sujeitos, no material escrito, produzido a partir dos dados coletados durante a realização da pesquisa.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, Fevereiro de 2014.

---

Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva  
Orientadora

Katia Vigo Ingar

---

Professor responsável