PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

THEREZA MARIA DE FÁTIMA QUILICI FIGUEIREDO

POSSÍVEIS RELAÇÕES ENTRE COMPETÊNCIAS DE CÁLCULO MENTAL E INICIAÇÃO ALGÉBRICA DE ALUNOS DE 6º E 7º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2013

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

THEREZA MARIA DE FÁTIMA QUILICI FIGUEIREDO

POSSÍVEIS RELAÇÕES ENTRE COMPETÊNCIAS DE CÁLCULO MENTAL E INICIAÇÃO ALGÉBRICA DE ALUNOS DE 6º E 7º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Material apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires.

São Paulo
2013

Banca examinadora:

Dedico este trabalho a meus filhos,
Giordanna e Rodrigo, na esperança de deixar
como herança minha paixão pelo conhecimento.

Agradecimentos

À minha orientadora, Célia Maria Carolino Pires, pelo respeito e confiança em mim depositados. Sobretudo, pela incansável dedicação nos momentos em que dividia comigo seus conhecimentos e sua sabedoria.

Aos professores Armando Traldi Junior, Barbara Lutaif Bianchini, Celina Aparecida Almeida Pereira Abar e Sandra Maria Pinto Magina, pela participação e contribuição, direta ou indiretamente, ao longo das disciplinas cursadas.

Às professoras Edda Curi e Maria Cristina Souza de A. Maranhão, pelas valiosas contribuições na banca examinadora.

À direção e orientação pedagógica do colégio onde trabalho, pelo incentivo e preocupação constantes com a formação continuada de seus professores.

Aos meus colegas de trabalho, com os quais partilho diariamente as dificuldades e alegrias da sala de aula, pelas contribuições que me permitiram chegar até aqui.

Aos meus alunos, sem os quais nada disso teria o menor sentido.

Ao meu esposo, Edson, pelo respeito nos momentos de ausência e pelo apoio, silencioso, porém incondicional.

À minha irmã, Ana Paula, pela ajuda dispensada ao longo desses dois anos, sem a qual este trabalho não teria acontecido. Mas também por transmitir sua paixão pelo campo da pesquisa acadêmica.

Aos meus pais, Lourenço e Maria Thereza, que me educaram e ensinaram a importância da formação do ser humano, acadêmica ou não.

Por fim, a todos aqueles que, nesses vinte e sete meses, possibilitaram de alguma forma a realização deste trabalho.

A todos, minha manifestação de agradecimento.

RESUMO

O presente trabalho insere-se no Grupo de Pesquisa “Desenvolvimento curricular em Matemática e formação de professores”, especificamente no projeto “A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de Matemática, em uma perspectiva construtivista”. Tem o objetivo de identificar, compreender e caracterizar conhecimentos prévios de alunos de 6º e 7º anos em relação ao cálculo mental e como esses conhecimentos articulam-se com a construção de tarefas que costumam ser apresentadas com o intuito de inseri-lo no campo da álgebra. Trata-se de uma pesquisa qualitativa realizada com 13 estudantes, sendo sete alunos de uma turma de 6º ano e seis alunos de outra turma de 7º ano, todos de uma escola particular da cidade de São Paulo. Os estudantes participaram de duas atividades. A primeira teve o objetivo de investigar os procedimentos de cálculo mental utilizados pelos alunos para realizar cálculos envolvendo tanto números naturais como números racionais na forma decimal. A segunda atividade teve a intenção de levantar os procedimentos utilizados por esses alunos para realizar algumas tarefas, que podem ser apresentadas a estudantes de 7º ano, e caracterizam suas primeiras aproximações com cálculos usando letras. Ao término das análises, observamos que a competência revelada pelos alunos relativa ao cálculo mental com números naturais contribuiu de forma positiva para a exploração das situações algébricas apresentadas, o que mostra a importância de usar esses conhecimentos como âncoras. Assim, observamos que esses alunos foram capazes de resolver problemas algébricos utilizando seus conhecimentos aritméticos, sem o uso formal de manipulações algébricas. Pudemos perceber também que essa mesma competência não se verifica para cálculos com números racionais na forma decimal, em função das dificuldades apresentadas em relação a esses números.

Palavras-chave: conhecimentos prévios; cálculo mental; iniciação algébrica; Educação Matemática.

ABSTRACT

The present paper is part of the research group “Desenvolvimento curricular em Matemática e formação de professores” (Curricular development in Math and teacher’s formation”, specifically in the project “A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de matemática, em uma perspectiva construtivista” (Meaningful learning and previous knowledge: researching the Math curriculum, in a constructivism perspective). It aims to identify, understand and characterize previous knowledge of the 6^{th} and 7^{th} grade students in relation to mental calculus and how this knowledge is associated with the construction of tasks that are usually presented with the goal of inserting it in the area of algebra. It is a qualitative research conducted with thirteen students, being seven of a 6^{th} grade group and six of another 7^{th} group, all of them from a private school in São Paulo city. The students took part in two activities. The first one had the objective of researching procedures of mental calculus used by the students to make calculus involving both natural numbers as well as rational numbers in a decimal form. The second activity had the intention of rising procedures used by these students to perform some tasks, that may be presented to students of the 7^{th} grade, that characterize their first approaches with calculus using letters. In the end of the analysis, we noticed that the competence revealed by the students related to the mental calculus with natural numbers contributed in a positive way for the exploring of the algebra situations presented, that shows the importance of using this knowledge as support. Thus, we notice that these students were able to solve algebra problems using their arithmetic knowledge, without the formal use of algebra manipulation. We could also realize this is not verified for calculus with rational numbers in a decimal form, due to the difficulties related to these numbers.

Key-words: previous knowledge; mental calculus; algebra initiation; Mathematic Education.

SUMÁRIO

Apresentação do trabalho

APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

I. Trajetória profissional e inserção deste trabalho no grupo de pesquisas

Ser professora de matemática não foi a minha primeira escolha profissional. Lembro-me, ainda criança, das palavras de minha mãe a todas nós, três filhas mulheres: “Vocês devem estudar e ser professoras. É a melhor profissão para conseguir conciliar casa, filhos, marido e trabalho!”. Claro que, na flor da juventude e com muitos sonhos a conquistar, nenhuma das três filhas pensava em ser professora, muito menos em escolher uma carreira que conciliasse família e trabalho. Fomos cada uma para um segmento diferente. Minha opção foi estudar computação e acabei fazendo faculdade de Processamento de Dados. Conclui meu curso em três anos e trabalhei algum tempo na área. Costumo brincar que a faculdade só serviu para uma boa coisa: conhecer meu marido. Não exerci a profissão por muito tempo e logo procurei outra forma de me realizar profissionalmente. Como a carga horária de Matemática havia sido grande no currículo do curso que havia feito, e a disciplina sempre me agradava, resolvi estudar Matemática e adivinhem só: fazer licenciatura!

Meus quatro primeiros anos como professora de Matemática foram na rede pública de ensino, onde compreendi a real dimensão de ensinar e educar. Comecei a perceber a importância daquela tarefa na vida dos jovens que me eram entregues, mas, acima de tudo, percebi a diferença que eles faziam na minha vida. Descobri o que realmente queria fazer. E sentia muita sede de conhecer mais essa profissão e tornar-me melhor professora a cada dia. Foi quando procurei uma especialização *lato-sensu* em Educação Matemática. Descobrir essa área do conhecimento, nova ainda para as ciências e repleta de descobertas e conquistas, fez-me adentrar nesse ramo do conhecimento e caminhar rumo ao mestrado profissional.

Lembro-me que, na entrevista de seleção para o mestrado, a primeira pergunta que me fizeram foi: “por que você deseja fazer esse curso?”. Não me lembro muito bem da resposta que forneci naquele momento mas penso nessa pergunta muitas vezes e reforço a sensação de busca pelo conhecimento, pelo aprimoramento e pela aproximação com o trabalho científico. Tudo isso na tentativa de compreender um pouco melhor o processo ensino-aprendizagem, tornar-me uma melhor professora e poder contribuir, quem sabe, com essa belíssima ciência que se tornou a Educação Matemática.

Chegando ao Programa de Pós-Graduação, inseri-me no grupo de pesquisa "Desenvolvimento curricular em Matemática e formação de professores", coordenado por minha orientadora Célia Maria Carolino Pires. No grupo, que está vinculado à linha de pesquisa Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores, tive contato com os diferentes projetos de pesquisa que nele se desenvolvem: I) Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de Educação Matemática, em países da América Latina; II) O Currículo de Matemática na Educação de Jovens e Adultos: dos intervenientes à prática em sala de aula; III) Organização Curricular e Formação de professores que ensinam Matemática em diferentes níveis e modalidades de ensino; IV) Relações entre professores e materiais que apresentam o currículo de Matemática: um campo emergencial; V) A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de Matemática em uma perspectiva construtivista.

Em função de minha trajetória profissional e interesses do grupo, optamos por nos integrar ao projeto "A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de Matemática, em uma perspectiva construtivista", que tem como objetivo levantar e analisar implicações curriculares decorrentes dos conhecimentos prévios dos estudantes, em relação a conceitos e procedimentos matemáticos.

O projeto conta com a participação de duas outras mestrandas: 1) Márcia Regina Ramos Costa Ribeiro, que pesquisou as possibilidades e dificuldades no desenvolvimento de situações de aprendizagem envolvendo funções trigonométricas, concluído em 2011 sob a orientação do Prof. Dr. Armando Traldi Junior; e 2) Regina Lúcia da Silva, que pesquisou os conhecimentos prévios de alunos de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental relativos à proporcionalidade, concluindo no presente ano sob a orientação da Profª Dra. Célia Maria Carolino Pires.

Os trabalhos realizados nesse projeto tomam como ponto de partida os trabalhos de David Ausubel, médico psiquiatra de formação, que dedicou sua carreira acadêmica à psicologia educacional. Foi professor emérito da Universidade da Colúmbia, em Nova Iorque. Segundo a concepção ausubeliana, a aprendizagem significativa é o processo pelo qual uma nova informação recebida pelo sujeito interage com uma estrutura de conhecimento específica, orientada por conceitos relevantes, os conceitos subsunçores – ou conceitos incorporadores, integradores, âncoras – determinantes do conhecimento prévio que ancora novas aprendizagens.

Nosso trabalho focaliza o cálculo mental e a educação algébrica de alunos do 6º e 7º anos de Ensino Fundamental.

Como utilizaremos a expressão cálculo mental inúmeras vezes, e frente a diferentes significados atribuídos a ela, faz-se importante adiantar que tratamos aqui como cálculo mental as operações realizadas sem o uso de papel e lápis, calculadoras ou computadores. É o cálculo feito de maneira rápida, podendo ser exato ou aproximado. Mais adiante, trataremos desse assunto sob o enfoque de alguns teóricos.

II. Escolha do tema

Propusemo-nos, no grupo de pesquisas, a estudar possíveis articulações entre procedimentos de cálculo mental e o desempenho em atividades que envolvem, de forma peculiar, a educação algébrica de alunos do 6º e 7º anos de Ensino Fundamental.

Essa escolha surgiu de reflexões, questionamentos e preocupações elaborados como professora de Matemática, trabalhando com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Observando individualmente alunos que mostravam dificuldades com as atividades relacionadas à álgebra, particularmente os de 7º ano, começamos a perceber que, frequentemente, tratava-se de estudantes com pouco domínio de cálculo mental.

Compartilhando essa ideia com colegas do grupo de pesquisa, ela foi avaliada como interessante e importante de ser investigada. Era bastante forte a sensação de que o contato com a álgebra, de modo mais formal, realizado geralmente a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, é um momento crucial na trajetória de aprendizagem dos alunos, nem sempre tranquilo. No entanto, faltam elementos para compreender o que acontece e como se processa essa aparente ruptura no processo de construção de conhecimentos.

Acerca dessa sensação de ruptura, lembramo-nos dos trabalhos de Garcia (1997), que diz que há uma nova significação na álgebra para as ações que se realizavam com os símbolos na aritmética: determinadas regras sintáticas específicas da álgebra são contraditórias com as da aritmética.

Segundo esse autor, a álgebra revoluciona por ser uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e ser um objeto matemático em si, um ramo autônomo da Matemática, de que todas as disciplinas científicas nutrem-se para estabelecer melhores e mais cômodas vias de comunicação entre elas e com o exterior.

Na prática escolar, os currículos elaborados costumam explicitar diferenças entre o ensino de aritmética e de álgebra, em função de objetivos a serem alcançados pelos alunos. A aritmética relaciona-se a números, operações e suas propriedades, resolução de problemas que exigem uma resposta numérica. Já a álgebra lida com padrões e generalizações e faz uso de letras às quais podem ser atribuídos diferentes valores numéricos.

Com tal concepção, o cálculo mental é visto como parte da aritmética e tem sido proposto como conteúdo dos anos iniciais, juntamente com cálculos feitos com papel e lápis e os realizados com a calculadora. Aparece também mais diretamente ligado às operações com números naturais do que com outros tipos de números.

Pensando nas relações entre os procedimentos de cálculo mental e as explorações que os estudantes fazem na álgebra, fizemos uma busca no Banco de Teses da Capes, usando como palavras-chaves “cálculo mental”, “álgebra” e “Educação Matemática”, no período de 2000 a 2012. Nessa busca, não encontramos nenhuma dissertação de mestrado ou tese de doutorado que tratassem do tema.

Identificamos alguns poucos trabalhos a respeito do cálculo mental, todos em nível das séries iniciais. E várias pesquisas envolvendo álgebra na Educação Matemática, porém nenhuma delas associada ao cálculo mental.

Sendo assim, avaliamos ser pertinente desenvolver nossa investigação acerca do cálculo mental e sua possível relação com potencialidades dos estudantes na compreensão de situações algébricas.

III. Objetivos do trabalho e questões de pesquisa

O objetivo de nosso trabalho é inicialmente o de contribuir para as reflexões a respeito da ação pedagógica no campo da Educação Matemática, colocando em jogo conhecimentos que provêm de nossa prática profissional como docente e os que provêm dos estudos realizados no mestrado.

De modo mais específico, nosso objetivo é o de buscar elementos que ajudem professores de Matemática a identificar, compreender e caracterizar conhecimentos prévios de alunos de 6º e 7º anos em relação ao cálculo mental e como esses conhecimentos articulam-se com a construção de tarefas que costumam ser apresentadas com o intuito de inseri-lo no campo da álgebra.

Para atingir esse objetivo, formulamos três questões de pesquisa.

- Que procedimentos de cálculo mental são utilizados por dois grupos de alunos – um de 6º e outro de 7º ano – tanto para cálculos envolvendo números naturais como para cálculos envolvendo números racionais na forma decimal?
- Que procedimentos são utilizados por esses dois grupos de alunos para realizar algumas tarefas, geralmente apresentadas a alunos de 7º ano, que caracterizam suas primeiras aproximações com cálculos usando letras?
- Que relações podem ser observadas no desempenho de alunos, contrapondo-se tarefas aritméticas e tarefas algébricas realizadas por eles?

IV. Procedimentos metodológicos

Formulados os objetivos e questões de pesquisa, passamos a apresentar nossos procedimentos metodológicos.

Em primeiro lugar, cabe destacar que nosso estudo caracteriza-se como uma pesquisa de natureza qualitativa. Consideramos autores como Bogdan e Biklen (1982, apud Ludke e André, 1986, p. 13), para os quais a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.

A metodologia qualitativa teve sua origem na Antropologia. Segundo Marconi e Lakatos (2011), o surgimento desse tipo de pesquisa deu-se quando antropólogos, que estudavam indivíduos e pequenas tribos, perceberam que dados precisavam ser interpretados, não bastando serem quantificados.

Para Richardson (1990, apud Marconi e Lakatos, 2011), a pesquisa qualitativa:

> pode ser caracterizada como a tentativa de uma compreensão detalhada dos significados e características situacionais apresentadas pelos entrevistados, em lugar da produção de medidas quantitativas de características ou comportamentos.

Segundo Menga (1986, apud Marconi e Lakatos, 2011), o estudo qualitativo "é o que se desenvolve numa situação natural; é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma contextualizada".

Lembramos a advertência feita por D'Ambrosio (2006), no sentido de que:

> a pesquisa qualitativa lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer discurso de sentidos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos.

Em nosso trabalho, optamos por obter dados descritivos, a partir de um grupo composto por treze alunos, sete de 6º ano e seis de 7º ano, estudantes de uma escola particular localizada na zona oeste da capital paulista, em que a pesquisadora atua como professora de Matemática. Optamos também por coletar dados por meio de contato direto nosso com esses estudantes. Ao analisar esses dados, vamos colocar mais atenção nos procedimentos desses estudantes, em suas atitudes, questionamentos e produções do que apenas no resultado correto ou incorreto de suas resoluções.

Os encontros com esses alunos aconteceram em duas fases. A primeira fase, que aconteceu no final de 2011, envolveu a aplicação da primeira atividade, cujo objetivo foi identificar quais procedimentos de cálculo mental são utilizados por esses alunos para efetuar cálculos envolvendo números naturais e números racionais na forma decimal. A descrição detalhada das atividades aparece um pouco à frente, no Capítulo 2.

Nessa primeira fase, aconteceram três encontros com os alunos de 6º ano e, separadamente, três encontros com os alunos de 7º ano, com duração média de uma hora e meia cada. Como tínhamos doze sequências e três encontros, os cálculos aconteceram na seguinte ordem: no primeiro encontro foram aplicadas as sequências 1 a 4; no segundo encontro, as sequências 5 a 8; e no terceiro encontro, as sequências 9 a 12. Houve o espaçamento de uma semana entre um encontro e outro.

Cada grupo respondeu as 12 sequências de operações, em que não podiam realizar nenhum tipo de algoritmo no papel, nem fazer uso de calculadora. Era apresentada na lousa uma operação de cada vez e o aluno registrava o resultado numa folha de papel. Durante a realização dos cálculos, não houve comunicação entre os alunos nem interferência da professora. Foi solicitado que não fosse feito uso de borracha.

Após o término de cada sequência, pedíamos aos alunos que indicassem oralmente as respostas dadas e que explicassem ao grupo como chegaram aos resultados. Faz-se importante ressaltar que, nesse momento, os depoimentos eram coletivos e todos ouviam as exposições dos colegas. Os depoimentos foram gravados em áudio.

A segunda fase aconteceu no início do ano letivo de 2012 e envolveu a aplicação da segunda atividade, cujo objetivo foi investigar os procedimentos que esses alunos utilizam para realizar tarefas com cálculos usando letras. Essa atividade era composta de seis questões, que apresentaremos no Capítulo 2. Ela foi realizada individualmente por cada aluno, num encontro com duração de uma hora. As respostas não receberam nenhum tipo de interferência da professora pesquisadora. Foi solicitado aos alunos que não usassem borracha e que registrassem seu raciocínio da maneira mais clara possível. Após uma análise prévia das produções dos alunos, aconteceu uma conversa informal da professora pesquisadora com cada um dos estudantes, a fim de esclarecer algumas formas de pensamento. As colocações dos alunos foram anotadas pela professora em papel.

Passaremos, agora, a descrever melhor os alunos envolvidos em nossa pesquisa.

V. Sujeitos da pesquisa

Participaram dessa pesquisa treze alunos de uma escola particular da cidade de São Paulo. Desses, sete estudantes cursavam o 6º ano do Ensino Fundamental no início das nossas atividades. Os outros seis alunos cursavam o 7º ano. Os trabalhos tiveram início em novembro de 2011 e se estenderam até maio de 2012. Os alunos pertenciam a turmas em que a professora pesquisadora lecionava e todas as atividades foram por ela aplicadas, sempre fora do contexto da sala de aula.

Os participantes escolhidos receberam nomes fictícios, têm idades entre 11 e 13 anos, pertencem a ambos os sexos e têm diferentes níveis de desempenho na Matemática. Para descrevê-los, utilizamos três categorias de aproveitamento na disciplina: bom aluno, para aqueles que alcançam notas superiores a 8,0; aluno mediano, para aqueles cujas notas estão entre 5,0 e 7,5; e aluno com dificuldades, para aqueles cujas notas são inferiores a 5,0. As notas citadas estão numa escala de zero a dez.

Os quadros a seguir descrevem os grupos de alunos participantes das atividades.

Quadro 1: alunos do 6º ano participantes da pesquisa

Grupo	**Nomes fictícios**	**Idade**	**Sexo**	**Aproveitamento na disciplina**
Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental	Fabio	11	M	Bom aluno
	Elaine	11	F	Boa aluna
	Isabel	11	F	Aluna mediana
	Laura	11	F	Aluna mediana
	Valéria	11	F	Aluna com dificuldades
	Guilherme	11	M	Aluno com dificuldades
	Paulo	12	M	Aluno com dificuldades

Quadro 2: alunos do 7º ano participantes da pesquisa

Grupo	**Nomes fictícios**	**Idade**	**Sexo**	**Aproveitamento na disciplina**
Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental	Marcela	12	F	Boa aluna
	Patrícia	12	F	Boa aluna
	Giovanna	12	F	Aluna mediana
	Theo	12	M	Aluno mediano
	Larissa	12	F	Aluna com dificuldades
	Neide	13	F	Aluna com dificuldades, refazendo a série

Todos os sujeitos descritos são da mesma escola desde pequenos. E, embora tenham tido diferentes professoras polivalentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental, foram todos oriundos de um mesmo plano de ensino e de estratégias parecidas de aprendizagem. Por isso, achamos por bem fazer uma breve explanação do histórico dessa escola pela qual passaram esses alunos.

O colégio em questão existe há 50 anos, num bairro de classe média alta da cidade de São Paulo. Possui aproximadamente 1.300 alunos, distribuídos da Educação Infantil ao Ensino Médio. Na grande maioria, os alunos chegam à escola ainda pequenos, com apenas quatro anos, e lá permanecem até o ingresso para o Ensino Superior.

Na tentativa de conhecer um pouco a experiência desses alunos com a Matemática nos anos anteriores aos analisados nessa pesquisa, fizemos a leitura do Plano Anual de Matemática dos 4º e 5º anos e analisamos os cronogramas semanais das professoras dessas turmas. Todo esse material é elaborado pelo corpo docente, sob a supervisão da orientação pedagógica. Nesses documentos prescritos, a metodologia aparece dividida em três ações pedagógicas: situações-problemas, cálculo mental/estimativas e jogos. Além disso, existem atividades permanentes, complementares, sequenciadas, projetos, exercícios de fixação e interação com outras áreas do conhecimento. Diante do foco principal da nossa pesquisa, demos ênfase ao tratamento do cálculo mental e estimativa nesses documentos, tentando conhecer o entendimento e as ações dos professores polivalentes dessa escola nesse campo.

No Plano Anual analisado, observamos a distinção entre cálculo automático ou mecânico, utilizado nos algoritmos e materiais como ábaco ou calculadora; e cálculo pensado e refletido, chamado especificamente de cálculo mental, capaz de analisar cálculos e articulá-los sem algoritmo pré-estabelecido. Nesse contexto, o cálculo mental apoia-se nas propriedades do sistema de numeração e nas propriedades das operações. Ele é visto como uma via de acesso ao algoritmo e, ao mesmo tempo, sua ferramenta de controle. Dentre os vários objetivos de aprendizagem relacionados no documento, aparece o de desenvolver diferentes estratégias de cálculo mental, aproximado ou exato, e utilizar a estimativa como recurso para avaliação da adequação de resultados. Nos conteúdos procedimentais descritos, aparece a reflexão e decisão acerca do uso de um tipo específico de cálculo, mental ou escrito, em função da situação-problema apresentada. Nos conteúdos conceituais listados, o cálculo mental aparece envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, em exercícios e situações-problemas.

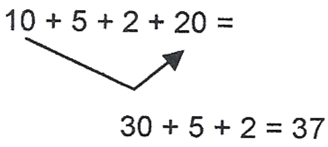
Nos cronogramas semanais, o tópico “cálculo mental e estimativas” é citado como item a ser trabalhado em quase todas as previsões. Fomos, então, buscar entender quais as estratégias de trabalho das professoras de 4º e 5º anos para trabalhar o cálculo mental. Encontramos algumas atividades aplicadas aos alunos com essa finalidade. Elas estão divididas em dois grupos: (1) estratégias de cálculo mental de adição e subtração; e (2) estratégias de cálculo mental de multiplicação e divisão. Vamos discorrer um pouco a respeito de cada uma delas.

As atividades que ensinam estratégias de cálculo mental de adição e subtração estão subdivididas em oito tópicos, colocados a seguir. Os exemplos foram extraídos das próprias atividades realizadas com os alunos.

Adição

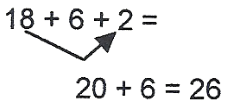
1º. Adicionar primeiro as dezenas exatas e depois os outros números.

Exemplo:



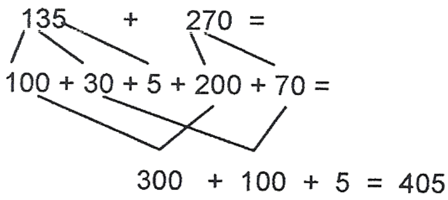
2º. Agrupar números que formam dezenas exatas e, depois, adicionar os números restantes.

Exemplo:



3º. Decompor as parcelas e agrupar em dezenas exatas.

Exemplo:



Subtração

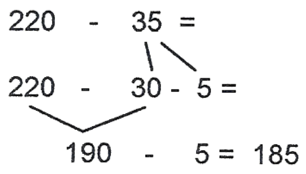
4º. Imaginar quanto falta para chegar a um determinado número.

Exemplo:

Imaginar quanto falta a 182 para 500
De 182 para 200 faltam 18
De 200 para 500 faltam 300
Então, de 182 para 500
Faltam 300 + 18 = 318

5º. Decompor o subtraendo.

Exemplo:



220 - 35 =

220 - 30 - 5 =

190 - 5 = 185

6º. Olhar os números envolvidos.

Exemplo:

138 - 8 = 130
138 - 30 = 108
138 - 38 = 100
138 - 100 = 38

7º. Alterar o subtraendo e compensar o resultado.

Exemplo:

35 - 9

Em vez de tirar **9** de **35**, tira-se **10**, pois é mais fácil.

35 - 10 = 25. Então, para não alterar a subtração, soma-se **1** no resultado, chegando a **26**.

8º. Alterar o minuendo para facilitar o procedimento tradicional, evitando que se desmanche a dezena.

Exemplo:

500 - 182
É mais fácil fazer:
499 - 182 = 317
317 + 1 = 318
Logo, 500 - 182 = 318

As atividades que ensinam estratégias de cálculo mental de multiplicação e divisão estão subdivididas em quatro tópicos, listados a seguir.

Multiplicação

1º. Multiplicar por 100 e dividir o resultado por 4.

Exemplo:

48 X 25 =

Como **25** é a quarta parte de **100**, é mais fácil multiplicar **48** por **100** e dividir o resultado por **4**.

48 X 100 = 4800
4800 : 4 = 1200

2º. Decompor um dos fatores.

Exemplo: **3 X 54**
54 é próximo de **50**. Então, é mais fácil
multiplicar **3 X 50 = 150** e somar **3 X 4 = 12**,
chegando ao resultado **162**.

Divisão

3º. Decompor o dividendo, quando os algarismos que o formam são múltiplos do divisor.

Exemplo: **486 : 2** (**4**, **8** e **6** são múltiplos do 2).
486 é **400 + 80 + 6**, que, divididos por **2**,
resultam em **200 + 40 + 3 = 243**

4º. Fazer simplificações sucessivas.

Exemplo:
$240 \div 48 = \quad \div 2$
$120 \div 24 = \quad \div 2$
$60 \div 12 = \quad \div 2$
$30 \div 6 = 5$

Ainda analisando os planos e cronogramas dos 4º e 5º anos de nossos alunos, não encontramos nenhuma menção a procedimentos, exercícios ou problemas que antecipem a utilização de letras ou símbolos no lugar dos números, numa tentativa de aproximação com a educação algébrica.

Vale lembrar que essas informações foram obtidas por meio de documentos e registros escritos da escola. Não foram feitas entrevistas com as professoras, nem foram assistidas aulas que confirmem ou aprofundem todas essas orientações curriculares.

Depois de um panorama da Matemática e do cálculo mental na escola em que estudam os alunos em questão, passamos a descrever a estrutura de nosso trabalho.

VI. Estruturação do trabalho

Dividimos nosso trabalho em quatro capítulos, que apresentamos a seguir.

No Capítulo 1, organizamos apontamentos acerca dos estudos que realizamos para o desenvolvimento do trabalho. Iniciamos fazendo uma síntese de nossas leituras a respeito das contribuições de David Ausubel e sua Teoria da Aprendizagem Significativa. Prosseguiremos apresentando reflexões acerca do cálculo mental, tomando por base o texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática relativos aos anos iniciais do Ensino Fundamental e autores como Parra e Saiz (1996). Na sequência, a partir do texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática relativos aos anos finais do Ensino Fundamental, analisaremos concepções a respeito do ensino-aprendizagem da álgebra.

No Capítulo 2, vamos descrever o processo de elaboração das atividades que compõem duas sequências e a formulação final, apresentada aos estudantes.

No Capítulo 3, descreveremos e analisaremos o que os alunos de 6º ano responderam e produziram em cada um dos itens que lhes foram apresentados. O estudo será feito aluno por aluno, individualmente.

No Capítulo 4, realizaremos o mesmo procedimento para os alunos de 7º ano. O estudo também será feito aluno por aluno, individualmente.

Por fim, apresentaremos as conclusões de nosso estudo, retomando as questões de pesquisa formuladas e teceremos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1

ALGUNS APONTAMENTOS TEÓRICOS

> Aquilo que ensinamos em aritmética
> e a forma como a ensinamos
> têm fortes implicações para o
> desenvolvimento do pensamento algébrico
> (Ken Milton,1989).

1.1. Introdução

Neste capítulo, dedicado a apresentar uma síntese de nossas leituras, vamos destacar as seguintes obras: Ausubel, Novak e Hanesian (1980), Parra e Saiz (1996) e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997 e 1998).

1.2. Ausubel e o destaque aos conhecimentos prévios

A concepção construtivista de ensino-aprendizagem defende que as mentes dos alunos não são lousas limpas, em branco, na qual podemos escrever o que queremos que eles aprendam. Ela assume que aprender qualquer conteúdo escolar depende do sentido que lhe é atribuído, das conexões que o aluno é capaz de fazer do conceito novo com o conceito que ele já sabe. São os chamados conhecimentos prévios.

Os conhecimentos prévios dos alunos podem abranger tanto informações a respeito do próprio conteúdo novo como conhecimentos que, de maneira direta ou indiretamente, estão relacionados com ele. No contato inicial com o novo conteúdo, esses conhecimentos prévios são fundamentais na construção dos novos conhecimentos.

> Quando um aluno enfrenta um novo conteúdo a ser aprendido, sempre o faz armado com uma série de conceitos, concepções, representações e conhecimentos adquiridos no decorrer de suas

> experiências anteriores, que utiliza como instrumentos de leitura e interpretação e que determinam em boa parte as informações que selecionará, como as organizará e que tipo de relações estabelecerá entre elas (COLL, 1990 apud MIRAS, 2009, p. 61).

Quanto mais relações com sentido um aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece e o novo conteúdo, mais significativa será a sua aprendizagem.

A concepção construtivista de aprendizagem entende que os conhecimentos prévios estão organizados em esquemas de conhecimento. Para Coll (1983, apud MIRAS, 2009, p. 63), um esquema de conhecimento é definido como a representação que uma pessoa possui em um determinado momento de sua história acerca de uma parcela da realidade. Os alunos podem ter uma quantidade maior ou menor desses esquemas, que podem ir desde informações a respeito de fatos e acontecimentos, experiências e casos pessoais, atitudes, normas e valores, até conceitos, explicações, teorias e procedimentos relacionados a essa realidade. Esses esquemas de conhecimento têm origens diferentes: podem vir do meio familiar, de um grupo de colegas, de fontes como leitura, internet, cinema e televisão ou do próprio meio escolar (MIRAS, 2009, p.64).

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), os conhecimentos prévios dos alunos repercutem e incidem diretamente nos processos de ensino e aprendizagem realizados em sala de aula. No prefácio de sua obra *Psicologia educacional* (1980), os autores fazem o seguinte registro:

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.

Os mesmos autores fazem uma distinção entre dois tipos de aprendizagem: a automática e a significativa. Ambas podem acontecer por meio da recepção dos conceitos, ocasião em que o conteúdo é apresentado pronto ao aluno, ou por meio da descoberta, quando o conteúdo não é dado ao aluno, mas descoberto por ele antes de ser incorporado à sua estrutura cognitiva. Condições diversas de aprendizagem irão definir se ela será automática ou significativa como, por exemplo, o material utilizado, a estrutura cognitiva existente e até mesmo a predisposição do aluno em aprender. Porém, no momento, ficamos com a ideia de que, no caso da aprendizagem automática, a tarefa consiste em associações arbitrárias e falta ao aluno o conhecimento prévio necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa. Ao passo que na aprendizagem significativa a tarefa implica estabelecer relações, de forma não arbitrária e substantiva, entre a nova informação e outras com as quais o aluno já esteja familiarizado.

A aprendizagem significativa pode ser dividida em três tipos: 1) representacional: refere-se ao significado de palavras ou símbolos isolados, implicando aprender o que eles representam; 2) proposicional: ideias expressas por grupos de palavras combinadas em sentenças, implicando aprender o significado de uma estrutura; e 3) conceitual: formação de unidades genéricas ou ideias categóricas com atributos próprios, tipo mais complexo da aprendizagem significativa.

Para Ausubel (apud MOREIRA, 1982, p.7), aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto relevante da estrutura do conhecimento do indivíduo. Ou seja, a informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de conceitos subsunçores (ou esteios). O armazenamento das informações no cérebro se processa de maneira organizada e hierárquica, na qual os elementos específicos são ligados a conceitos mais gerais. A estrutura cognitiva passa a ser, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são abstrações da experiência do indivíduo. Entretanto, esse processo de ancoragem do novo conceito resulta em crescimento e modificação do conceito subsunçor. Podemos afirmar, então, que a aprendizagem significativa envolve uma interação entre novas informações e ideias preexistentes na estrutura cognitiva.

Tanto na aprendizagem conceitual como na aprendizagem proposicional, o processo de vincular as novas informações a segmentos preexistentes da estrutura cognitiva chama-se aprendizagem subordinada. Isso implica a subordinação de proposições potencialmente significativas a ideias mais gerais e abrangentes na estrutura cognitiva existente, e isso, por sua vez, resulta na organização hierárquica da estrutura cognitiva (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p. 48).

A aprendizagem subordinada divide-se em dois diferentes tipos.

1) Derivativa, que se dá quando o material aprendido é entendido como um exemplo específico de conceitos estabelecidos na estrutura cognitiva; e

2) Correlativa, que ocorre quando o material aprendido é uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos e proposições previamente aprendidos, não podendo ser adequadamente representado pelos subsunçores (MOREIRA e MASINI, 1982, p. 19).

Além da aprendizagem subordinada, Ausubel et al (1980, p. 49) nos apresentam as aprendizagens superordenada e combinatória. A aprendizagem superordenada se dá quando um conceito mais geral é adquirido a partir de conceitos menores já estabelecidos na estrutura cognitiva. Em outras palavras, ela acontece quando se aprende uma nova proposição inclusiva que condicionará o surgimento de várias outras ideias. A aprendizagem que não apresenta uma relação de subordinação ou superordenação, ou seja, as ideias que não estão subordinadas a determinadas proposições e não podem condicionar o aparecimento de determinadas ideias, chama-se aprendizagem combinatória. Ela induz a aquisição de muitos conceitos novos, não relacionáveis a ideias relevantes particulares de uma estrutura cognitiva. São proposições mais difíceis de aprender e lembrar.

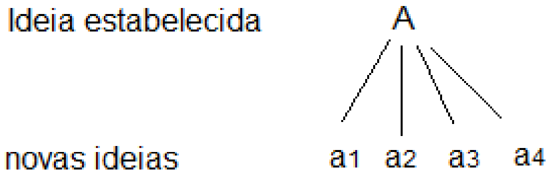
O esquema a seguir é uma adaptação de um quadro da obra de Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 57) e tenta resumir as formas de aprendizagem significativa que vimos até agora.

Formas de Aprendizagem Significativa

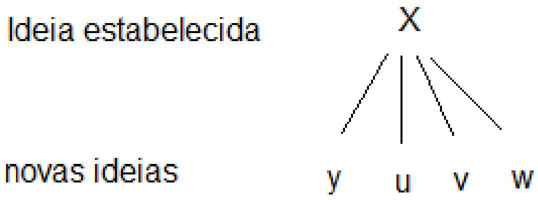
---

1. Aprendizagem Subordinativa

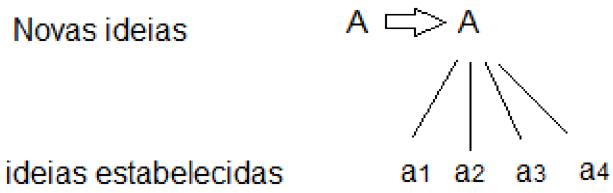
   a) Subordinação derivativa: as informações novas a_1, a_2, a_3 e a_4 representam exemplos de A e estão ligadas diretamente à ideia superior. Os atributos essenciais de A não sofreram alterações, mas os novos exemplos são relevantes.



b) Subordinação correlativa: as novas informações y, u, v, w estão ligadas à ideia principal X, mas não é uma extensão, modificação ou qualificação de X. Seus atributos podem ser ampliados ou modificados com a nova subordinação correlativa.



2. Aprendizagem Superordenada: as ideias estabelecidas a_1, a_2, a_3 e a_4 são consideradas exemplos mais específicos da nova ideia A e passam a associar-se a ela. A ideia superordenada A é definida por um novo conjunto de atributos essenciais que abrange as ideias subordinadas.



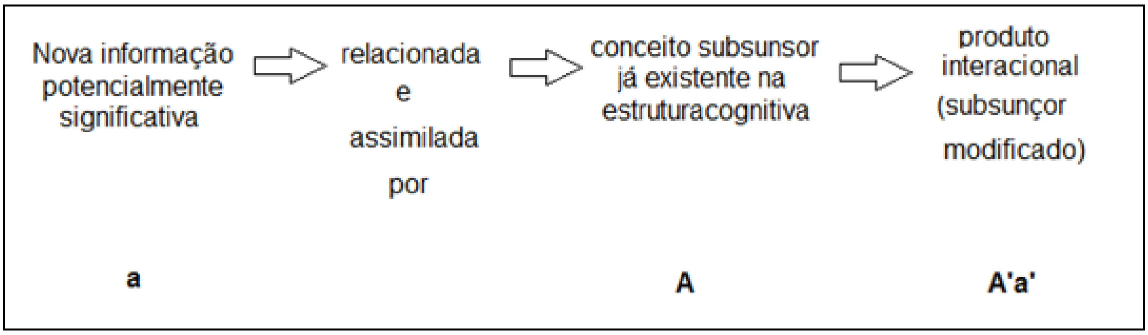
3. Aprendizagem Combinatória: uma nova ideia A é vista como relacionada às ideias existentes B, C e D, mas não é nem mais abrangente nem mais específica que elas. A nova ideia A tem alguns atributos essenciais em comum com as ideias preexistentes.

A → B – C – D

Grande parte da aprendizagem significativa é essencialmente a assimilação da nova informação. A Teoria da Assimilação de Ausubel (1980) ajuda a explicar a organização do conhecimento na estrutura cognitiva. A nova informação está relacionada aos aspectos relevantes da estrutura cognitiva e tanto a nova informação como a estrutura preexistente são modificados no processo.

O diagrama abaixo ajuda a interpretar a Teoria da Assimilação:

Quadro 3: Diagrama da Teoria da Assimilação



Fonte: MOREIRA, 1999, p. 16

A assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição a, potencialmente significativo, é assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração e qualificação do mesmo. O diagrama sugere que, tanto a informação a como o subsunçor A são modificados pela interação, formando A'a'. Além disso, A' e a' permanecem relacionados como coparticipantes de uma nova unidade A'a', que nada mais é do que o subsunçor modificado (MOREIRA,1999, p. 17).

Ausubel (apud MOREIRA e MASINI, 1982) sugere que o princípio da assimilação tem efeito facilitador na retenção. As novas informações recentemente assimiladas, durante o período de retenção, permanecem dissociáveis de suas ideias âncora e, portanto, reproduzíveis como entidades individuais:

$$A'a' \rightleftarrows A' + a'$$

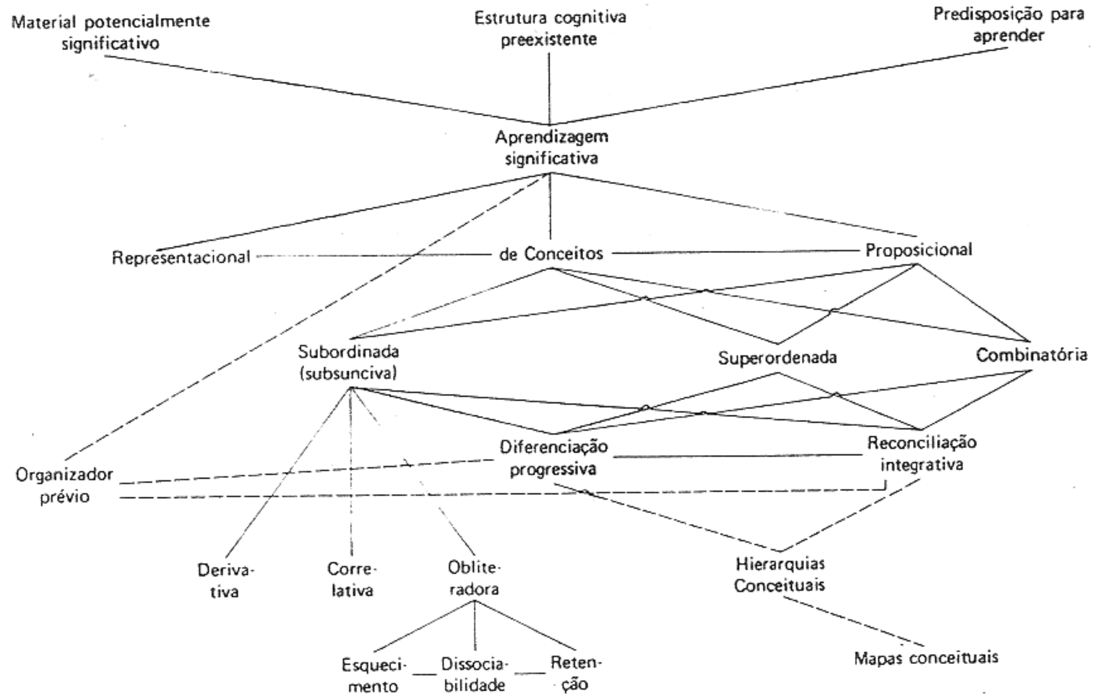
Ou seja, o produto A'a' é dissociável em A' e a' por certo tempo, favorecendo assim a retenção de a'.

Os conhecimentos mais amplos, portanto, ancoram as novas ideias e possibilitam a sua retenção. Entretanto, com o passar do tempo, o significado das novas ideias tende a ser assimilado ou reduzido pelos significados mais estáveis das ideias estabelecidas. Quando esse estágio obliterador (de extermínio, eliminação, destruição) começa, as novas ideias tornam-se menos dissociáveis da estrutura cognitiva até não ser mais possível reproduzi-las isoladamente e poder-se dizer que houve esquecimento. No exemplo de assimilação A'a', pode-se dizer que, imediatamente após a aprendizagem significativa, começa um segundo estágio de subsunção: a assimilação obliteradora. As novas informações tornam-se, espontânea e progressivamente, menos dissociáveis de suas ideias âncora (subsunçores), até que não mais estejam disponíveis, não mais reproduzíveis como entidades individuais. Atinge-se um grau de dissociabilidade em que A'a' passa a ser simplesmente A'. O esquecimento é uma continuação temporal do mesmo processo de assimilação que facilita a aprendizagem e a retenção de novas informações. É, portanto, mais simples e econômico reter apenas as ideias, conceitos e proposições mais gerais do que as novas ideias assimiladas (MOREIRA e MASINI, 1982, p. 18).

Com a intenção de facilitar a aprendizagem significativa, Ausubel et al (1980, p. 143) recomendam o uso de organizadores prévios, que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. Essa é uma estratégia para manipular a estrutura cognitiva. Os organizadores prévios são matérias introdutórias cuja função é servir de ponte entre o que o aluno já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material seja assimilado de maneira significativa. Eles são úteis porque facilitam o estabelecimento de uma disposição significativa para a aprendizagem. Os organizadores prévios são mais eficientes quando apresentados aos alunos antes do início das tarefas de aprendizagem e quando são formulados nos termos familiares aos alunos.

Do ponto de vista ausubeliano, é mais fácil para o ser humano compreender um novo conceito quando lhe são apresentados primeiramente os aspectos mais gerais e inclusivos da disciplina. Os detalhes específicos podem ser apresentados depois, de maneira progressiva. Essa prática de sequenciar o material de aprendizagem de modo que as ideias mais gerais sejam apresentadas primeiro, progressivamente diferenciadas em termos de detalhe e especificidade, resulta numa elaboração hierárquica de proposições e conceitos na estrutura cognitiva. A essa parte da aprendizagem significativa chamamos, na teoria ausubeliana, de Diferenciação Progressiva. Por sua vez, um material de aprendizagem que apresenta similaridades e diferenças entre ideias relacionadas, encontradas em contextos diferentes, resulta em delineamento explícito de relações entre as ideias. Esse processo de aprendizagem significativa, que permite a recombinação dos elementos existentes na estrutura cognitiva, denomina-se Reconciliação Integrativa. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 161), esse princípio pode ser descrito como contrário à prática usual dos escritores de livros-texto e apresenta algumas desvantagens como, por exemplo, a utilização de termos múltiplos para representar conceitos equivalentes, gerador de tensão e confusão cognitiva. Por outro lado, na aprendizagem superordenada, a Reconciliação Integrativa permite que ideias estabelecidas na estrutura cognitiva possam reorganizar-se e adquirir novos significados (MOREIRA, 1999, p. 22). O mapa conceitual abaixo permite reunir os conceitos da teoria ausubeliana num único esquema.

Quadro 4: Mapa conceitual da Teoria de David Ausubel



Fonte: MOREIRA e MASINI, 1982, p. 96.

Aproveitamos o esquema acima para lembrar a influência da teoria em questão na criação dos mapas conceituais, tão utilizados nos dias de hoje em diversos ramos do conhecimento. Como vimos, o desenvolvimento dos conceitos pode ser facilitado quando os elementos mais gerais são introduzidos primeiro e, posteriormente, esse conceito é progressivamente diferenciado. Todavia, o conteúdo deve não só proporcionar a diferenciação progressiva, mas também explorar relações entre conceitos, similaridades e diferenças, proporcionando a reconciliação integrativa. Por isso, os diagramas hierárquicos que estabelecem essas relações entre conceitos, conhecidos como mapas conceituais, são importantes instrumentos na implementação dos princípios ausubelianos no processo ensino-aprendizagem.

1.3. Sobre o cálculo mental nos anos iniciais do Ensino Fundamental

O trabalho com cálculo na escola vem sendo discutido em diferentes documentos curriculares recentes e em alguns artigos publicados a respeito do tema. As propostas mostram a importância do trabalho com diferentes estratégias de cálculos como o mental, com papel e lápis e com uso da calculadora, assim como a relevância em se trabalhar com estimativas e arredondamentos, além dos cálculos exatos.

Tratando-se especificamente do cálculo mental, compreende ressaltar que por ele entendemos:

> O conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados. Os procedimentos de cálculo mental se apoiam nas propriedades de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números (PARRA, 1996, p. 189).

Numa abordagem histórica, recordamos que um dos pilares da escola tradicional constituía-se no domínio das quatro operações básicas. Os cálculos numéricos eram memorizados após uma longa sequência de exercícios. Com o desenvolvimento de novas ideias pedagógicas, a memorização começa a perder valor frente à compreensão. E a escola deixa de ser unicamente transmissora de saberes para se tornar um local de questionamentos e um ambiente de busca pelo conhecimento. Nesse contexto, muitos pesquisadores têm se interessado por conhecer os procedimentos de cálculos utilizados pelos alunos no período escolar.

Um aporte no terreno do cálculo que vamos destacar são as duas categorias de procedimentos consideradas por Groen e Parkman (apud PARRA, 1996, p. 191): os métodos reprodutivo e reconstrutivo. Quando um aluno recupera um resultado de uma operação diretamente de sua memória de longo prazo trata-se, então, do método reprodutivo. Ao passo que, no método reconstrutivo, o aluno chega ao resultado da operação por meio de cálculos. Segundo Fayol (1985, apud PARRA, 1996, p. 191), crianças menores apoiam-se na contagem, em alguns casos de um em um, enquanto adultos recorrem à memória de longo prazo. Ashcraft e Fierman (1982, apud PARRA, 1996, p. 192) estudaram o período de transição do método reconstrutivo para o método reprodutivo e descobriram que ele pode se estender até o fim do Ensino Fundamental.

Tais constatações têm levantado o problema da organização das informações numéricas na memória. Pesquisas realizadas a respeito do assunto são determinantes para que possamos fazer considerações na prática educativa. Fisher (1987, apud PARRA, 1996, p. 193) diz que:

> somente uma automaticidade – ou, no mínimo, um processo reprodutivo mais que um processo reconstrutivo – ao evocar fatos numéricos, conduzirá os alunos a estimar a ordem das grandezas e visualizar certos erros obtidos com calculadoras ou computadores, quer dizer, a exercer um controle mínimo. Uma ativação automática é muito econômica na medida em que não somente é rápida, mas também não consciente, sem esforço, e não interfere na atividade mental em curso.

Neste sentido, surgem reflexões a respeito do papel da escola nessas aprendizagens. Fisher (1987, apud PARRA, 1996, p. 193) formula que é por meio de um trabalho regular e sistemático que os alunos alcançarão o domínio requerido. Cálculos não intencionais e não controlados não são suficientes para o desenvolvimento de um processo reprodutivo. Sem a ação sistemática da escola não é possível para os alunos adquirir e estruturar adequadamente as áreas do conhecimento. E o mesmo acontece, em particular, com o cálculo mental e o seu papel na construção dos conhecimentos matemáticos, aspecto relevante em nossa pesquisa, acerca do qual voltamos a discorrer.

Parra (1996, pp. 195-200) elenca quatro hipóteses didáticas para o ensino do cálculo mental na escola primária: 1) as aprendizagens no terreno do cálculo mental influenciam a capacidade de resolver problemas; 2) o cálculo mental aumenta o conhecimento no campo numérico; 3) o trabalho de cálculo mental habilita para uma maneira de construção do conhecimento que favorece uma melhor relação do aluno com a matemática; e 4) o cálculo mental é uma via de acesso para a compreensão e construção dos algoritmos.

A mesma autora reforça que o cálculo mental é eminentemente particularizante e que, frente ao desafio de seguir esse caminho, o professor precisa ter ferramentas que lhe permitam diagnosticar os conhecimentos de cada aluno, a fim de tornar possível a abordagem e a aquisição de novos conhecimentos, bem como conhecer propostas didáticas com as quais irá avançar nos conhecimentos de seus alunos.

Os currículos atuais já fazem menção ao cálculo mental e à sua importância. Na Espanha, por exemplo, o Diseño Curricular Base Educación Primaria (apud PARRA, 1996, p. 202) aconselha: 1) dar prioridade ao trabalho prático e oral logo que os alunos mostrem uma compreensão dos conceitos matemáticos; 2) conceder prioridade ao cálculo mental antes de passar à formalização dos cálculos; 3) prestar atenção ao desenvolvimento de estratégias pessoais dos alunos; e 4) utilizar experiências escolares e extracurriculares como fonte de experiências matemáticas. Assim, ao terminarem o Ensino Fundamental (chamado de Educação Primária naquele país), os alunos serão capazes de utilizar instrumentos de cálculo de forma adequada a diferentes situações, elaborar estratégias pessoais de cálculo mental na resolução de problemas e valorizar a importância dos cálculos aproximados na vida cotidiana.

Na Argentina, em outro exemplo, o Programa de Matemática da província de Corrientes e o Diseño Curricular da província de Rio Negro incluem uma distribuição dos conteúdos de cálculo mental para o Ensino Fundamental (lá denominados ciclos e séries) elaborada pela licenciada Irma Saiz. Tal distribuição permite precisar, para cada etapa escolar, o nível de cálculo que o aluno deve dominar. Por exemplo, na 2ª série, o estudante deve ser capaz de determinar mentalmente dobros e metades de valores inteiros. Na 5ª série, já se propõe o cálculo de dobros e metades de frações. E na 6ª e 7ª séries, que ele domine o dobro e a metade de números na representação decimal. São muitas as sugestões propostas nesse documento que, apesar de não estarem disponíveis ao público (edição restrita aos professores do município), podem ser encontradas na obra de PARRA e SAIZ (1996, pp. 204-208).

A esta altura, o leitor deve estar se perguntando: e no Brasil? Como se apresentam nossos documentos curriculares?

A Secretaria da Educação de nosso país disponibiliza os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental, divididos em dois grupos: o primeiro direcionado aos professores de 1ª a 4ª séries e o segundo voltado aos profissionais de 5ª a 8ª séries. Em nossas análises, focamos os volumes de Matemática para ambos os grupos.

Na ocasião de nossa pesquisa, já havia sido implantado o Ensino Fundamental de nove anos. Por isso, existe uma diferença de nomenclaturas entre os PCN e nossos trabalhos. Para tal, sugerimos a seguinte relação: 1ª a 4ª séries nos PCN equivalem ao 1º e 5º anos do novo Ensino Fundamental; 5ª a 8ª séries nos PCN equivalem ao 6º e 9º anos do atual modelo.

Nos PCN de 1ª a 4ª séries (1997), encontramos menção ao cálculo mental logo no primeiro bloco de conteúdos, números e operações, quando o documento sugere que o trabalho com as operações deve se concentrar na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas suas relações e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando o exato, o aproximado, o mental e o escrito (p. 39). Como um dos objetivos da Matemática para essas séries, o mesmo documento prevê o desenvolvimento de procedimentos de cálculo – mental, escrito, exato e aproximado – pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (p. 47).

Ainda nesse mesmo documento curricular, na relação de conteúdos conceituais e procedimentais, as operações com números naturais são sugeridas, entre outras formas de trabalho, por meio da utilização da decomposição das escritas numéricas para a realização do cálculo mental exato e aproximado (p. 51). À medida que o aluno avança nas séries e possui uma visão mais ampla do sistema de numeração decimal, os PCN sugerem que sejam ampliados os procedimentos de cálculo mental, pelo reconhecimento das regularidades, das propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados. Até que seu repertório seja suficiente para transferir e utilizar os procedimentos de cálculo mental com os números racionais. O documento ressalva a importância da decisão a respeito da adequação do uso do cálculo mental em função do problema proposto.

Nos PCN de 5ª a 8ª séries (1998), na seleção dos conteúdos, também organizados em blocos, nos deparamos, em números e operações, com a afirmação, anteriormente registrada nos PCN de 1ª a 4ª séries, da necessidade de trabalhar a compreensão das operações, seus diferentes significados e suas relações com o cálculo, contemplando diferentes tipos: exato, aproximado, mental e escrito (p. 50). Como um dos objetivos da Matemática para essas séries finais do Ensino Fundamental, esse documento prevê o desenvolvimento de procedimentos de cálculo – mental, escrito, exato e aproximado – em função da situação-problema proposta (p. 64). Discorre ainda a respeito da necessidade de estimular os alunos a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, inclusive o mental, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais ou convencionais, com ou sem uso de calculadoras. Sugere ao professor que utilize critérios por meio dos quais avalie se seu aluno é capaz de escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas. E reforça que a ausência de um trabalho com estimativas e com cálculo mental pode comprometer a aprendizagem.

No Brasil, especificamente no nosso município, existem as Orientações Curriculares da Secretaria Municipal de São Paulo (2007), em que o assunto também é tematizado quando lembra a importância de desenvolver métodos de cálculo mental e aproximado, além das estratégias de cálculo escrito, com compreensão dos processos nelas contidos.

> Sugere-se um trabalho com os diferentes tipos de cálculo: escrito, mental, aproximado, com calculadora, exato, etc. O cálculo escrito apoia-se no cálculo mental, nas estimativas e aproximações. A importância do estudo do cálculo, em suas diferentes modalidades, justifica-se porque o cálculo permite o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno, possibilita o exercício de capacidades como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização (SME / DOT, 2007, p. 48).

Diante de tantas evidências, nos sentimos confortáveis em afirmar que o cálculo mental apresenta, portanto, enorme relevância na vida e no contexto escolar, ajuda no desenvolvimento da autonomia, na capacidade de criar estratégias, contribui para a aprendizagem com significado e auxilia na memorização e verificação dos resultados.

1.4. Sobre a introdução à álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental

Assim como fizemos no subitem anterior em relação ao cálculo mental, vamos agora discorrer um pouco acerca da álgebra nos documentos curriculares.

Na análise dos PCN de 1ª a 4ª séries (1997), encontramos menção à álgebra quando, na seleção de conteúdos, o documento ressalva a necessidade de interligar os campos da aritmética, da álgebra e da geometria. Comenta, ainda, que:

> embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (p. 39).

Pensando que álgebra também pode ser entendida como a generalização de padrões, citamos Keith Devlin (2002, apud Maranhão e Machado, 2007) que ressalta que:

> para muitos, “álgebra” significa, vagamente, um conjunto de letras, números e operações separados por um sinal de igual ou, para outros, a fórmula para resolver equação do 2º grau, ou apenas resolver equações, sistemas de equações, descobrir o valor desconhecido, ou outro tipo de atividades onde se utilize incógnitas e parâmetros. No entanto, ele indica que o trabalho com padrões deveria ser privilegiado nesse domínio. Em primeiro lugar, porque irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na educação algébrica.

> Outra razão é que esse trabalho com padrões pode ser iniciado desde a educação infantil.

Nesse contexto, nosso trabalho recebeu uma contribuição de Maranhão e Machado quando, abordando o assunto, realizaram uma busca nos PCN que, apesar de não especificarem a generalização de padrões como competência algébrica, exigem habilidades e competências a serem estudadas ao longo da escolaridade. No quadro abaixo, verificamos todos os trechos dos PCN de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental (2007) em que aparecem os termos "regularidades" e "padrões".

Quadro 5: Trechos dos PCN de 1ª a 4ª séries

Trechos cujo termo de busca foi "regularidades"	Trecho cujo termo de busca foi "padrões"
Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática (1º ciclo, p. 47).	
Desenvolver procedimentos de cálculo [...] pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (1º ciclo, p. 47).	
Identificação de regularidades na série numérica para nomear, ler e escrever números... (1º ciclo, p. 50).	
Organização dos fatos básicos das operações pela identificação de regularidades e propriedades (1º ciclo, p. 51).	

Trechos cujo termo de busca foi "regularidades"	Trecho cujo termo de busca foi "padrões"
[...] descobrir regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas (2º ciclo, p. 55).	[...] percebem que algumas regras, propriedades, padrões, que identificam nos números que lhes são mais familiares, também valem para números "maiores" (2º ciclo, p. 55).
Ampliar o significado do número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades (2º ciclo, p. 55).	
Ampliar os procedimentos de cálculo [...] pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados (2º ciclo, p. 55).	[...] embora os alunos possam medir usando padrões não convencionais, é importante conhecerem os sistemas convencionais... (2º ciclo, p. 58).
Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas (2º ciclo, p. 59).	
[...] a observação de regularidades facilita a memorização compreensiva (2º ciclo, p. 74).	
[...] regularidades, presentes nas operações, começam a ser percebidas, tais como: observar que, nas multiplicações por 2, todos os resultados são pares; que, na tabuada do cinco, os resultados terminam em zero ou em cinco, etc. (2º ciclo, p. 74).	— usar regras ou padrões na construção de listas, como, por exemplo: 07 + 5 = 12 = 5 + 07 17 + 5 = 22 = 5 + 17 27 + 5 = 32 = 5 + 27 37 + 5 = 42 = 5 + 37 (2º ciclo, p. 74).

Trechos cujo termo de busca foi “regularidades”	Trecho cujo termo de busca foi “padrões”
[...] procedimentos de cálculo, as técnicas operatórias usualmente ensinadas na escola também apoiam-se nas regras do sistema de numeração decimal e na existência de propriedades e regularidades presentes nas operações (2º ciclo, p. 78).	[...] pode-se medir usando padrões não convencionais, por outro lado, os sistemas convencionais... (2º ciclo, p. 83).

Fonte: MARANHÃO e MACHADO, 2007.

É, porém, nos PCN de 5ª a 8ª séries (1998) que encontramos maiores especificações e orientações em relação ao ensino da álgebra que, apesar de poder já se desenvolver desde as séries iniciais, é ampliada nas séries finais do Ensino Fundamental. Nessas orientações curriculares, fica claro que o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Conforme o documento em questão, algumas das diferentes funções da álgebra são: generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar e resolver problemas aritmeticamente difíceis. Além de possibilitar a resolução de problemas por meio de equações e inequações, diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas e tomando contato com fórmulas. Esse direcionamento dado à álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas, possibilita a exploração da noção de função, cuja abordagem formal será feita nos anos seguintes, no Ensino Médio.

Os mesmos PCN alertam o professor para a importância de não abandonar a aritmética frente ao uso da álgebra.

> É importante salientar que no quarto ciclo não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo; em geral, as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. Pode-se ate afirmar

> que os procedimentos "não-algébricos" (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não e necessária (PCN de 5ª a 8ª séries, p. 83).

O quadro a seguir foi extraído dos PCN em questão (p. 116) e sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras.

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Em nossas leituras e análises, percebemos uma influência das concepções de Usiskin (1995) na elaboração do quadro acima. Por isso, vimos por bem fazer uma pausa em nossas considerações a respeito dos PCN, as quais retomaremos mais a frente, e escrever um breve relato acerca desse teórico.

Zalman Usiskin, atual diretor da Universidade de Chicago, professor e pesquisador com vários artigos na área de Educação Matemática, afirma que as diferentes dimensões da álgebra relacionam-se com os diferentes usos das variáveis. Sintetiza sua teoria em quatro diferentes dimensões algébricas, as quais descreveremos a seguir.

Na primeira dimensão, o autor descreve a álgebra como aritmética generalizada. Neste contexto, é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos. Em seus exemplos, cita que 3 + 5 x 7 = 5 x 7 + 3 pode ser generalizado como a + b = b + a. Dentro dessa ideia, as instruções para o aluno são traduzir e generalizar, técnicas importantes tanto para a álgebra como para a aritmética (USISKIN, 1995, p. 13).

Na segunda dimensão, a álgebra é definida como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Em seus exemplos, coloca o seguinte problema: “adicionado 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número”. A questão pode ser traduzida na linguagem algébrica $5x + 3 = 40$ (p. 14). Alguns alunos podem ser capazes de resolver esse problema aritmeticamente, subtraindo 3 do número 40 e dividindo o resultado por 5, sem recorrer aos procedimentos formais das resoluções algébricas. Enquanto outros, apesar de dominarem as resoluções formais, podem não ter a compreensão de seus procedimentos, tornados mecânicos. Dentro dessa dimensão, as palavras chaves são simplificar e resolver.

Na terceira dimensão, a álgebra é tratada como estudo de relações entre grandezas. Nesse contexto, uma letra pode depender dos diferentes valores numéricos atribuídos a outra letra. Por exemplo, na sentença $y = 3x + 5$, os valores de y estão diretamente relacionados aos possíveis valores atribuídos a x. Podemos falar em argumento (isto é, a letra representa os valores do domínio de uma função) ou em parâmetro (isto é, a letra representa um número do qual dependem outros números).

Por fim, na quarta dimensão, a álgebra é vista como estudo das estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, todos temas de estudos da álgebra nos cursos superiores. Segundo Usiskin (1995, p. 18), reconhecemos a álgebra como estudo das estruturas também pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios. Como exemplo, o autor cita o polinômio de $3x^2 + 4ax - 132a^2$ e sua forma fatorada $(3x + 22a)(x - 6a)$. Para testar a resposta, normalmente se solicita aos alunos que multipliquem os binômios. Nesse procedimento, as letras são tratadas como sinais (símbolos) no papel, sem nenhuma referência numérica. Na dimensão da álgebra como estudo das estruturas, a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário.

O quadro a seguir é um resumo simplificado dessas relações.

Quadro 6: Concepções da álgebra

Concepção da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: USISKIN, 1995, p. 20.

Após sinalizarmos as similaridades entre as dimensões da álgebra de Usiskin e as citadas nos PCN, voltaremos às nossas considerações a respeito dos parâmetros.

Não poderíamos terminar nossas considerações sem fazer referência às contribuições de Maranhão e Machado e a seus estudos a respeito das generalizações de padrões. No quadro abaixo, verificamos todos os trechos dos PCN de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental (2008) em que aparecem os termos "regularidades" e "padrões".

Quadro 7: Trechos dos PCN de 5ª a 8ª séries

Trechos cujo termo de busca foi "regularidades"	Trecho cujo termo de busca foi "padrões"
A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas (3º ciclo, p. 26).	[...] possibilidades de trabalhar as questões [...] relacionadas à saúde no Brasil [...] a média de nossos padrões de saúde é... (3º ciclo, p. 31).

Trechos cujo termo de busca foi “regularidades”	Trecho cujo termo de busca foi “padrões”
A calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas [...] estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses (3º ciclo, p. 45).	[...] o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas difíceis aritmeticamente) (3º ciclo, p. 50).
O trabalho com noções geométricas [...] estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (3º ciclo, p. 51).	Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas, possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos (3º ciclo, p. 51).
[...] explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas (3º ciclo, p. 63).	
[...] traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades... (3º ciclo, p. 63).	
[...] incorporar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais (3º ciclo, p. 66).	No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais para exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas (3º ciclo, p. 68).

Trechos cujo termo de busca foi “regularidades”	Trecho cujo termo de busca foi “padrões”
Atribuição de significado à potência de expoente nulo e negativo pela observação de regularidades... (3º ciclo, p. 72).	
Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas (3º ciclo, p. 72).	
[...] o professor verifica se o aluno é capaz de utilizar representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas... (3º ciclo, p. 76).	Utilizar linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos (3º ciclo, p. 76).
[...] observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis (3º ciclo, p. 76).	
Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de lados e o de diagonais (4º ciclo, p. 87).	
[...] identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números (4º ciclo, p. 97).	
[...] construção de tabelas que permitam observar regularidades e de padrões de comportamento da série numérica (4º ciclo, p. 99).	

Trechos cujo termo de busca foi “regularidades”	Trecho cujo termo de busca foi “padrões”
As tabelas podem ser usadas no trabalho da multiplicação e da divisão com inteiros [...] que implicam identificar regularidades... (4º ciclo, p. 99).	
Pela observação das regularidades das sequências numéricas construídas, pode-se completar a tabela com os produtos dos negativos pelos positivos e dos negativos pelos negativos, mantendo o padrão numérico observado (acrescentar 3 ou retirar 3) (4º ciclo, p. 99).	[...] construção de tabelas que permitam observar regularidades e de padrões de comportamento da série numérica (4º ciclo, p. 99).
[...] que os alunos compreendam as regularidades das multiplicações de números racionais na forma decimal por 10, 100, 1.000... (4º ciclo, p. 103).	
Pela observação das regularidades das sequências numéricas construídas numa tabela o aluno poderá identificar propriedades da potenciação... (4º ciclo, p. 112).	
Estendendo para as potências de expoente negativo as regularidades observadas... (4º ciclo, p. 113).	
[...] propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos... (4º ciclo, p. 116).	Propriedades das operações, generalizações de padrões aritméticos... (4º ciclo, p. 116).

Trechos cujo termo de busca foi “regularidades”	Trecho cujo termo de busca foi “padrões”
[...] propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades (4º ciclo, p. 117).	[...] propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como [...] expressar regularidades (4º ciclo, p. 117).
No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas (4º ciclo, p. 118).	
[...] campo das figuras geométricas [...]. Por exemplo, as atividades de classificação dessas figuras com base na observação de suas propriedades e regularidades (4º ciclo, p. 123).	

Fonte: MARANHÃO e MACHADO, 2007.

Terminamos, assim, este capítulo com a confirmação da importância dada à observação das regularidades em padrões dentro da perspectiva de uma educação algébrica ao longo do Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 2

O PROCESSO DE ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

2.1. Introdução

Com base nas leituras realizadas e tendo por orientação as questões de pesquisa formuladas, passamos à elaboração das atividades que seriam apresentadas aos estudantes, buscando identificar:

a) procedimentos de cálculo mental utilizados para cálculos envolvendo números naturais e para cálculos envolvendo números racionais na forma decimal; e

b) procedimentos utilizados para realizar algumas tarefas, geralmente apresentadas a alunos de 7º ano, que caracterizam suas primeiras aproximações com cálculos usando letras.

2.2. A primeira atividade

A primeira atividade foi composta de doze sequências, que foram aplicadas aos alunos em três encontros. No primeiro encontro, foram trabalhadas as sequências 1 a 4; no segundo encontro, as sequências 5 a 8; e no terceiro encontro, as sequências 9 a 12.

Cada sequência foi composta de quinze itens, sendo dez cálculos envolvendo números naturais e cinco envolvendo números racionais na forma decimal.

As quatro primeiras sequências referiam-se a cálculos de adição e subtração. O objetivo de cada uma e os itens propostos podem ser observados na transcrição a seguir.

Sequência 1

Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo a + 1, envolvendo números naturais e números racionais na forma decimal.				
19 + 1	**66 + 1**	**100 + 1**	**203 + 1**	**515 + 1**
999 + 1	**1000 + 1**	**2040 + 1**	**3490 + 1**	**9999 + 1**
1,1 + 1	**3,2 + 1**	**24,7 + 1**	**99,3 + 1**	**124,5 + 1**

Comentário: nessa elaboração, nossa hipótese inicial foi a de que os alunos não teriam dificuldades nos cálculos com naturais, mas que poderiam ocorrer respostas incorretas no caso dos cálculos com os números racionais na representação decimal.

Sequência 2

Objetivo Efetuar mentalmente cálculos do tipo a – 1, envolvendo números naturais e números racionais na forma decimal.				
29 – 1	**60 – 1**	**100 – 1**	**302 – 1**	**815 – 1**
999 – 1	**1000 – 1**	**1040 – 1**	**4490 – 1**	**10000 – 1**
1,1 – 1	**4,3 – 1**	**14,8 – 1**	**88,4 – 1**	**238, 5 – 1**

Comentário: também nesse caso avaliamos que os alunos não teriam dificuldades nos cálculos com naturais, mas que poderiam ocorrer respostas incorretas no caso dos cálculos com os números racionais na forma decimal. Mesmo assim, prevíamos maiores dificuldades nesta sequência em relação à anterior.

Sequência 3

Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo a + a, envolvendo números naturais e números racionais na forma decimal.				
5 + 5	**9 + 9**	**12 + 12**	**15 + 15**	**26 + 26**
50 + 50	**90 + 90**	**120 + 120**	**150 + 150**	**260 + 260**
0,5 + 0,5	**0,9 + 0,9**	**0,12 + 0,12**	**0,15 + 0,15**	**0,26 + 0,26**

Comentário: adicionar um número natural com ele mesmo parece ser um dos cálculos realizados com certa facilidade até mesmo pelas crianças menores. Por isso, achamos que os alunos não teriam dificuldades nesses cálculos. Nossa expectativa maior era descobrir como agiriam esses alunos frente aos números racionais na representação decimal.

Sequência 4

<table>
<tr><td colspan="5">Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipos a + (a + 1) envolvendo números naturais e números racionais na forma decimal.</td></tr>
<tr><td>5 + 6</td><td>9 + 10</td><td>12 + 13</td><td>15 + 16</td><td>26 + 27</td></tr>
<tr><td>50 + 51</td><td>90 + 91</td><td>120 + 121</td><td>150 + 151</td><td>260 + 261</td></tr>
<tr><td>0,5 + 1,5</td><td>0,9 + 1, 9</td><td>0,12 + 1,12</td><td>0,15 + 1,15</td><td>0,26 + 1,26</td></tr>
</table>

Comentário: nesse caso, em que o que se coloca em jogo são os procedimentos utilizados nas sequências 1 e 3, avaliamos que os alunos poderiam também ter um bom desempenho e que não teriam dificuldades nos cálculos com naturais mas que poderiam ocorrer respostas incorretas no caso dos cálculos com os números racionais na representação decimal.

As sete sequências seguintes referiam-se a cálculos de multiplicação e divisão. O objetivo de cada uma e os itens propostos podem ser observados na transcrição abaixo:

Sequência 5

<table>
<tr><td colspan="5">Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 2 X a , envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.</td></tr>
<tr><td>2 x 4</td><td>2 x 6</td><td>2 x 7</td><td>2 x 9</td><td>2 x 10</td></tr>
<tr><td>2 x 40</td><td>2 X 60</td><td>2 x 70</td><td>2 x 90</td><td>2 x 100</td></tr>
<tr><td>2 x 0,4</td><td>2 X 0,6</td><td>2 x 0,7</td><td>2 x 0,9</td><td>2 x 1000</td></tr>
</table>

Comentário: o cálculo do dobro é um dos casos em que os estudantes geralmente têm bom desempenho nas multiplicações com naturais; gostaríamos de testar se isso também ocorre no caso de cálculos com números racionais na representação decimal.

Sequência 6

Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 4 X a, envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.				
4 x 4	**4 x 6**	**4 x 7**	**4 x 9**	**4 x 10**
4 x 40	**4 X 60**	**4 x 70**	**4 x 90**	**4 x 100**
4 x 0,4	**4 X 0,6**	**4 x 0,7**	**4 x 0,9**	**4 x 1000**

Comentário: multiplicar por quatro é o mesmo que dobrar duas vezes consecutivas. Gostaríamos de descobrir se os alunos percebem essa regularidade, utilizam-na para realizar os cálculos e se têm a mesma facilidade nessa operação com ambos os formatos dos números apresentados.

Sequência 7

Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 8 X a , envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.				
8 x 4	**8 x 6**	**8 x 7**	**8 x 9**	**8 x 10**
8 x 40	**8 X 60**	**8 x 70**	**8 x 90**	**8 x 100**
8 x 0,4	**8 X 0,6**	**8 x 0,7**	**8 x 0,9**	**8 x 1000**

Comentário: conhecemos a tradicional “rejeição” que os alunos demonstram pela tabuada do oito. Nossa hipótese inicial é de que eles tenham maiores dificuldades com esses cálculos e não se favoreçam com a ideia de regularidade que insinua que multiplicar por oito é o mesmo que dobrar o resultado da tabuada do quatro. Gostaríamos de descobrir se os alunos percebem essa regularidade, utilizam-na para realizar os cálculos e se agem de maneira similar nos cálculos com naturais e com os racionais na forma decimal.

Sequência 8

<table>
<tr><td colspan="5">Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 10 X a, envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.</td></tr>
<tr><td>10 x 3</td><td>10 x 5</td><td>10 x 8</td><td>10 x 9</td><td>10 x 10</td></tr>
<tr><td>10 x 30</td><td>10 X 50</td><td>10 x 80</td><td>10 x 90</td><td>10 x 100</td></tr>
<tr><td>10 x 0,3</td><td>10 X 0,5</td><td>10 x 0,8</td><td>10 x 0,9</td><td>10 x 1000</td></tr>
</table>

Comentário: diferente da sequência anterior, sabemos da facilidade que os alunos têm com a tabuada do dez. Como será que eles reagem frente a esses cálculos com os números racionais na representação decimal? Que técnicas utilizam?

Sequência 9

<table>
<tr><td colspan="5">Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 5 X a, envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.</td></tr>
<tr><td>5 x 3</td><td>5 x 5</td><td>5 x 8</td><td>5 x 9</td><td>5 x 10</td></tr>
<tr><td>5 x 30</td><td>5 X 50</td><td>5 x 80</td><td>5 x 90</td><td>5 x 100</td></tr>
<tr><td>5 x 0,3</td><td>5 X 0,5</td><td>5 x 0,8</td><td>5 x 0,9</td><td>5 x 1000</td></tr>
</table>

Comentário: imaginamos que os alunos não teriam dificuldades em multiplicar números naturais por cinco. Como se sairiam nesses cálculos com os números racionais na forma decimal?

Sequência 10

<table>
<tr><td colspan="5">Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 3 X a, envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.</td></tr>
<tr><td>3 x 4</td><td>3 x 6</td><td>3 x 7</td><td>3 x 8</td><td>3 x 10</td></tr>
<tr><td>3 x 40</td><td>3 X 60</td><td>3 x 70</td><td>3 x 80</td><td>3 x 100</td></tr>
<tr><td>3 x 0,4</td><td>3 X 0,6</td><td>3 x 0,7</td><td>3 x 0,8</td><td>3 x 1000</td></tr>
</table>

Comentário: também nesse caso avaliamos que os alunos não teriam dificuldades nos cálculos com naturais, mas que poderiam ocorrer respostas incorretas no caso dos cálculos com os números racionais na forma decimal.

Sequência 11

Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo 6 X a, envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.				
6 x 4	**6 x 6**	**6 x 7**	**6 x 8**	**6 x 10**
6 x 40	**6 X 60**	**6 x 70**	**6 x 80**	**6 x 100**
6 x 0,4	**6 X 0,6**	**6 x 0,7**	**6 x 0,8**	**6 x 1000**

Comentário: multiplicar por seis é o mesmo que dobrar o resultado da multiplicação por três. Gostaríamos de descobrir se os alunos percebem essa regularidade, utilizam-na para realizar os cálculos e se têm a mesma facilidade nessa operação com ambos os formatos dos números.

Sequência 12

Objetivo: Efetuar mentalmente cálculos do tipo de a : b, envolvendo números naturais e racionais na forma decimal.				
14 : 7	**21 : 7**	**35 : 7**	**49 : 7**	**56 : 7**
140 : 70	**210 : 70**	**350 : 70**	**490 : 70**	**560: 70**
1,4 : 0,7	**2,1 : 0,7**	**3,5 : 0,7**	**4,9 : 0,7**	**5,6 : 0,7**

Comentário: sabemos que alguns alunos não operam as divisões com a mesma desenvoltura com que realizam os produtos. Como agem frente aos quocientes sugeridos?

2.3. A segunda atividade

A segunda atividade foi composta de seis questões abertas e os estudantes poderiam responder da maneira que julgassem correto. Os trabalhos foram individuais, não houve interferência da professora e foi solicitado a cada aluno que não apagasse nenhuma de suas anotações e que registrasse seu raciocínio da maneira mais clara possível.

As questões, subdivididas em itens, foram propostas em função de objetivos específicos, como mostra a transcrição a seguir.

Questão 1

Objetivo:

Calcular o resultado de uma expressão em que aparece uma letra, tendo sido atribuído a ela um valor numérico, em cálculos que envolvem adição, subtração, multiplicação e divisão.

a) Se $x = 39$, qual é o valor da expressão $x + 1$?
b) Se $y = 90$, qual é o valor da expressão $y – 1$?
c) Se $w = 10$, qual é o valor da expressão $4 . w$?
d) Se $m = 140$, qual é o valor da expressão $m : 7$?
e) Se $t = 4{,}5$, qual o valor de $t + 1$?
f) Se $r = 200$, qual o valor de $r – 1$?
g) Se $s = 3{,}6$, qual o valor de $s : 0{,}6$?

Comentário: nessa questão todas as respostas podem ser dadas por meio de cálculo mental. Nossa intenção é verificar se os alunos mobilizam seus conhecimentos anteriores para responder às perguntas.

Questão 2

Objetivo:

Calcular o resultado de uma expressão em que aparecem operações com duas letras, tendo sido atribuído um valor numérico a essa operação, sem que seja necessário dar a cada letra um valor específico.

a) Se $x + y = 100$, qual é o valor de $x + y + 5$?
b) Se $a – b = 80$, qual é o valor de $2 . (a – b)$?

c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

Comentário: também nessa questão todas as respostas podem ser dadas por meio de cálculo mental, embora haja uma demanda de interpretação do enunciado mais complexa do que na situação anterior. Nossa intenção é verificar se os alunos mobilizam seus conhecimentos anteriores para responder às perguntas.

Questão 3

Objetivo:

Calcular o perímetro e a área de figuras planas tendo sido fornecido o valor de uma letra como símbolo abstrato.

a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?
b) Qual é o perímetro de um triângulo equilátero cujo lado é l = 8m?
c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

Comentário: tendo dado interpretação adequada ao enunciado e ao papel da letra, as respostas podem ser dadas por meio de cálculo mental. Novamente, a intenção é verificar se os alunos mobilizam seus conhecimentos anteriores para responder às perguntas ou se já ficam presos à "necessidade" de montar algoritmos.

Questão 4

Objetivo:

Calcular o valor de uma letra numa igualdade, sendo que essa letra se refere a um número específico porém desconhecido, ou seja, funciona como incógnita.

a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71.
b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?
c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

Comentário: A principal intenção é verificar se os alunos mobilizam seus procedimentos de cálculo. No item a), por exemplo na igualdade 2x + 1 = 71, se percebem que 2x deve ser igual a 70 e que portanto, x é a metade de 70, ou seja 35. No caso do item b) se fazem tentativas para obter a resposta. No caso do item c) se recorrem a operações inversas.

Questão 5

Objetivo:

Identificar a letra numa expressão de generalização em situações em que a letra é entendida como uma representação de vários números e não de apenas um.

Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

a) a expressão 2n −1 designa os números ímpares
b) a expressão 2n designa os números pares
c) a expressão n + 1 representa os números ímpares

Justifique suas escolhas:

Comentário: expressões que contêm letras como generalizações do modelo aritmético são parte da álgebra no Ensino Fundamental. Os alunos entendem essas expressões como generalizadoras? Como agem frente a elas?

Questão 6

Objetivo:

Identificar a letra numa expressão funcional em situações em que ela é entendida como variável para expressar relações e funções.

Responda:

a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?
b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

Comentário: como os alunos fazem a leitura dessas relações? Utilizam a ferramenta do cálculo mental para resolver? Ficam presos a resoluções formais?

Terminamos este capítulo na expectativa de iniciarmos nossas análises e verificarmos como procederam nossos alunos nas atividades propostas.

CAPÍTULO 3

OS ALUNOS DO 6º ANO: PROCEDIMENTOS E RESPOSTAS

3.1. Introdução

Fábio, Elaine, Isabel, Laura, Valéria, Guilherme e Paulo são nomes fictícios de sete alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Eles sempre estudaram nessa mesma escola e todos tinham 11 anos completos quando realizamos nossos estudos.

Fabio e Eliane são considerados bons alunos, mas têm visões um pouco diferentes da Matemática. Para ele, a disciplina é muito difícil, porém útil e necessária para a vida. Eliane diz que a Matemática é sua matéria favorita e acha que tem facilidade com os cálculos.

Isabel e Laura são consideradas alunas com desempenho mediano em Matemática. Isabel afirma que gosta da disciplina e associa suas dificuldades à falta de atenção e Laura também diz que gosta da Matemática e reconhece sua utilidade no dia a dia.

Valéria, Guilherme e Paulo são considerados alunos com dificuldades em Matemática. Os três dizem gostar da matéria. Valéria ressalta que sente dificuldades em raciocinar e resolver problemas, Guilherme entende que tudo é uma questão de raciocínio e Paulo afirma que acha tudo muito difícil.

As sessões de trabalho realizadas com esse grupo de alunos aconteceram numa sala de aula, fora do horário letivo. Apesar de serem alunos de diferentes turmas, todos já se conheciam e estavam bastante ansiosos para iniciar nossas atividades. Faziam várias perguntas acerca do que iria acontecer, o porquê de serem os alunos escolhidos, quanto tempo duraria a atividade e se ficariam famosos por estarem contribuindo com o estudo acadêmico. O clima era de descontração e as crianças estavam totalmente disponíveis e satisfeitas em participar. Vamos, agora, analisar as respostas e os procedimentos de cada um desses alunos de 6º ano.

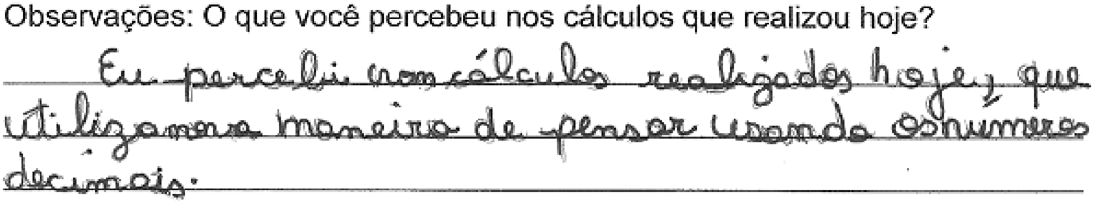
3.2. Fábio e seu desempenho

Fabio começou a primeira atividade demonstrando tranquilidade nos cálculos e externou algumas vezes a facilidade daquelas operações. Anotava os resultados no papel com rapidez. Acertou todos os cálculos das sequências 1 e 2. Quando o grupo foi conferir seus resultados nos cálculos do tipo (a – 1), Fabio até arriscou uma dica aos colegas que externaram maior dificuldade em operar os números racionais na forma decimal: “Para fazer 1,1 – 1, pense que você tem 11 – 10. Daí, então, você coloca a vírgula no lugar certo. É assim que eu faço”.

Nas sequências 3 e 4, por ocasião dos números racionais na representação decimal, Fabio forneceu as seguintes respostas:

Cálculo solicitado	Sequência 3 Cálculos do tipo a + a	Sequência 4 Cálculos do tipo a + (a + 1)
0,12 + 0,12	**2,4**	
0,15 + 0,15	**3,0**	
0,26 + 0,26	**5,2**	
0,26 + 1,26		**0,52**

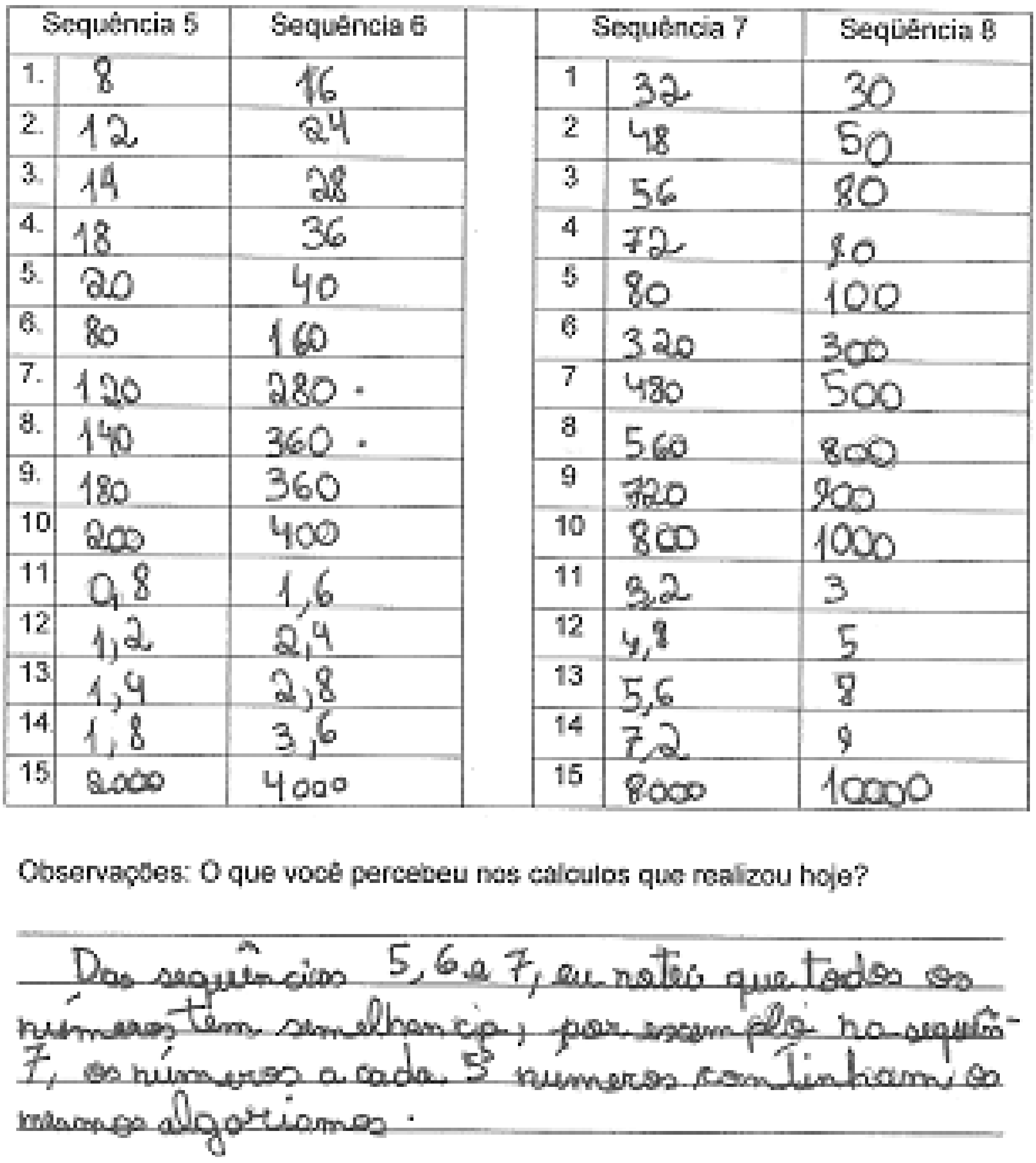
Observamos que o aluno acerta alguns cálculos efetuados mentalmente com os números racionais na forma decimal e erra outros, demonstrando certa falta de familiaridade com esses cálculos. Quando se coloca no grupo, Fabio relata a surpresa em efetuar cálculos mentalmente com esses números. Observe-se o que ele escreveu na sua atividade.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi nos cálculos realizados hoje, que utilizamos a maneira de pensar usando os numeros decimais.

Nas quatro próximas sequências, que tratavam dos cálculos do tipo (2 X a); (4 X a); (8 X a) e (10 X a), Fabio acertou todas as respostas, confundindo-se apenas em dois momentos: 4 x 60 = 180 e 4 x 70 = 360. Logo que colocou os resultados equivocados, percebeu que havia errado na tabuada e relatou sua desatenção, mantendo os valores incorretos no papel porque não deveria utilizar a borracha. No final daquele encontro, observando as regularidades nos resultados, Fabio escreveu:



	Sequência 5	Sequência 6		Sequência 7	Sequência 8
1.	8	16	1	32	30
2.	12	24	2	48	50
3.	14	28	3	56	80
4.	18	36	4	72	80
5.	20	40	5	80	100
6.	80	160	6	320	300
7.	120	280 ·	7	480	500
8.	140	360 ·	8	560	800
9.	180	360	9	720	900
10	200	400	10	800	1000
11	0,8	1,6	11	3,2	3
12	1,2	2,4	12	4,8	5
13	1,4	2,8	13	5,6	8
14	1,8	3,6	14	7,2	9
15	2.000	4000	15	8000	10000

Observações: O que você percebeu nos calculos que realizou hoje?

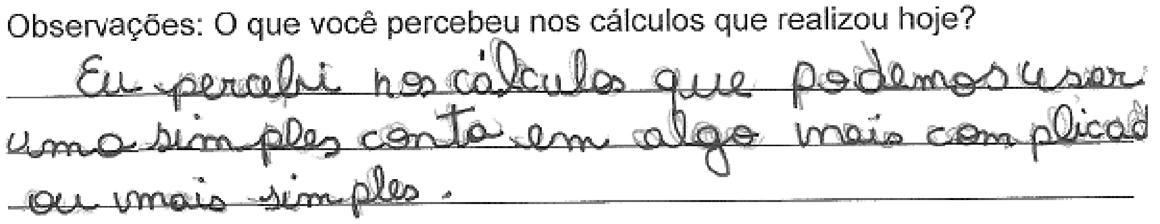
Das sequências 5, 6 e 7, eu notei que todos os números têm semelhança, por exemplo na sequên- 7, os números a cada 5 números continham os mesmos algarismos.

O aluno percebe semelhança entre os cálculos do tipo 8 x a, 8 x (a + 10) e 8 x (a : 10). Daí para frente, ele começou a anotar os resultados dos cálculos antes mesmo que a professora colocasse a conta na lousa.

Por fim, nas quatro últimas sequências da primeira atividade, Fabio acerta todos os cálculos do tipo (5 X a), (3 X a), (6 X a) e comenta que, depois da tabuada do dez, a tabuada do cinco é a mais fácil e todos conhecem seus resultados. Acerta os quocientes de a : b com números naturais, mas observem-se suas respostas nesses cálculos envolvendo os racionais na forma decimal.

Cálculo solicitado	Sequência 12 Cálculos do tipo a : b
1,4 : 0,7	**0,2**
2,1 : 0,7	**0,3**
3,5 : 0,7	**0,5**
4,9 : 0,7	**0,7**
5,6 : 0,7	**0,8**

Notamos uma maior dificuldade em efetuar cálculos mentalmente com esses números. Fabio comenta que: “numa divisão de números com vírgula, o resultado também deve ter vírgula”. E, certo da veracidade de suas respostas, fica satisfeito em descobrir que pode usar o cálculo mental também nos produtos e quocientes de números racionais na forma decimal. Conforme sua última observação:

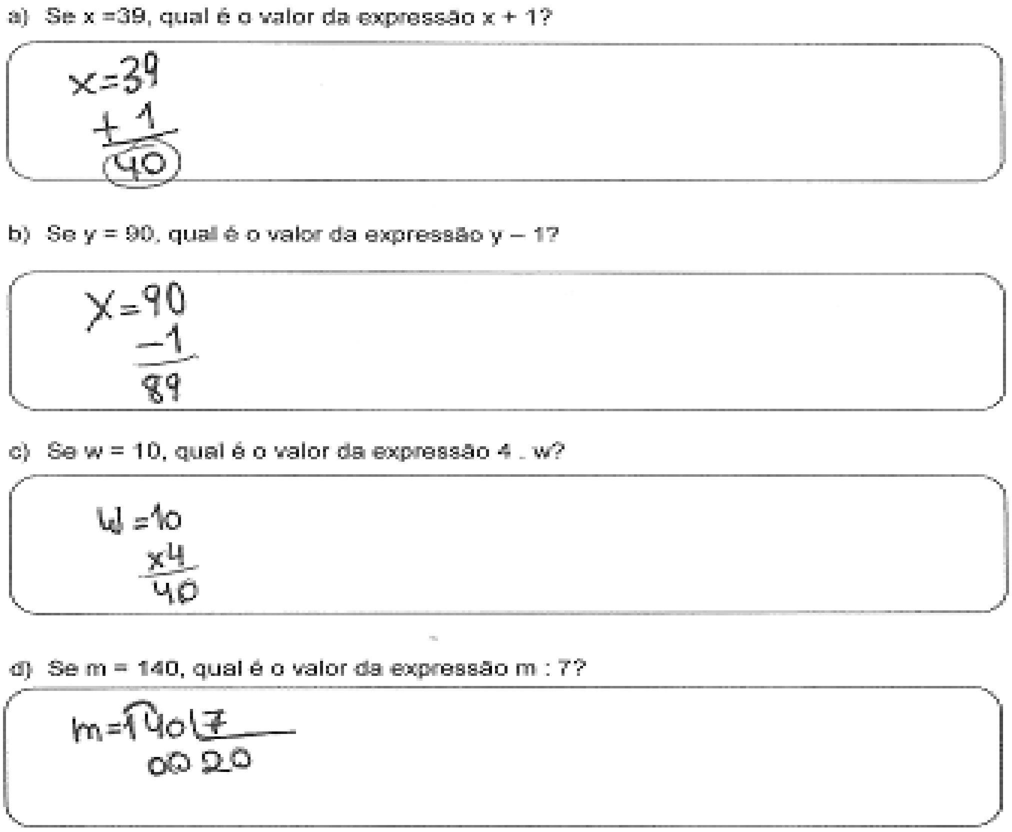


Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi nos cálculos que podemos usar uma simples conta em algo mais complicad ou mais simples.

Fabio participou da segunda atividade com a mesma disposição da anterior. Vamos analisar seu desempenho nessa etapa.

Na questão 1, Fabio reconhece o papel da letra na expressão e a substitui pelo valor numérico com facilidade. Como a professora havia solicitado que todos registrassem seu raciocínio, o aluno monta os algoritmos para resolver as questões, mas declara: “isso é muito fácil, dá para fazer de cabeça”. Percebemos que Fabio utiliza o cálculo mental nos itens b e f abaixo, quando monta o algoritmo para mostrar a conta que efetuou, mas não utiliza os procedimentos próprios da subtração, de “emprestar” uma dezena do algarismo ao lado.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

x=39
+1
40

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

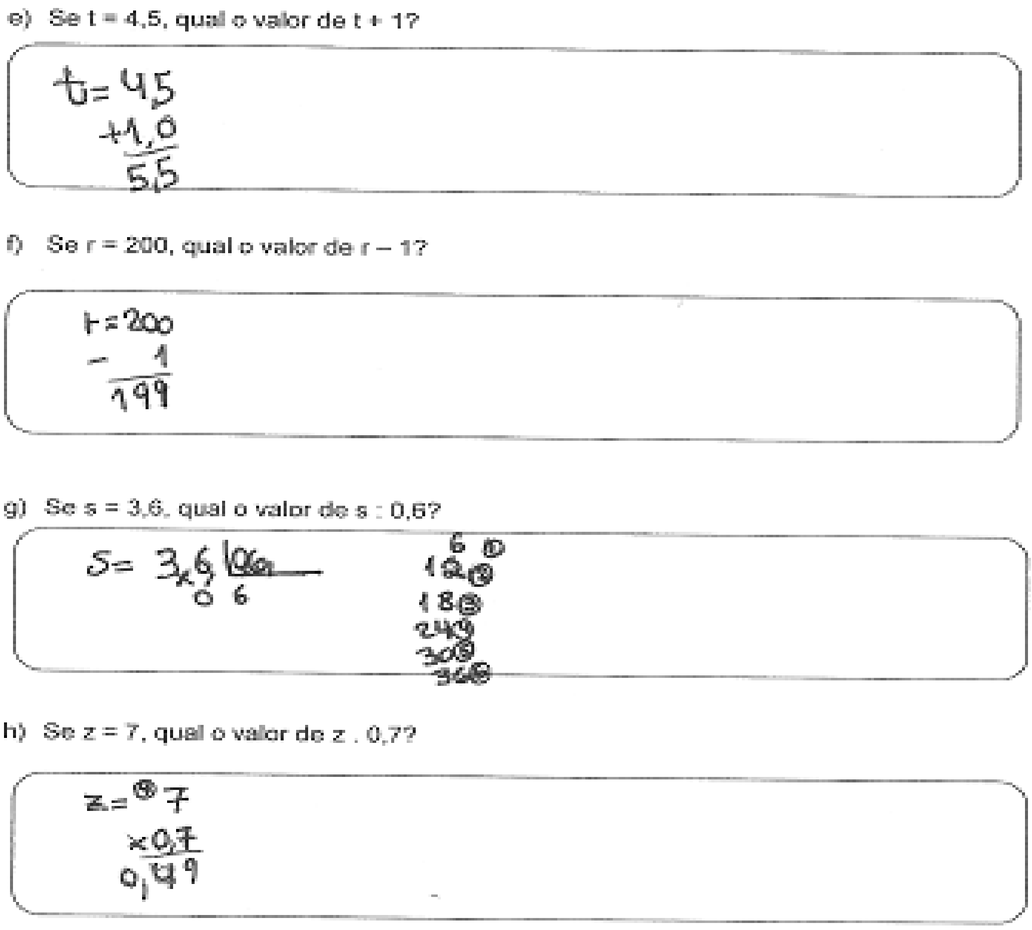
X=90
-1
89

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

W=10
x4
40

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

m=140 |7
00 20



e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

t= 4,5
+1,0
5,5

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

r=200
– 1
199

g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

s= 3,6 |0,6
0 6

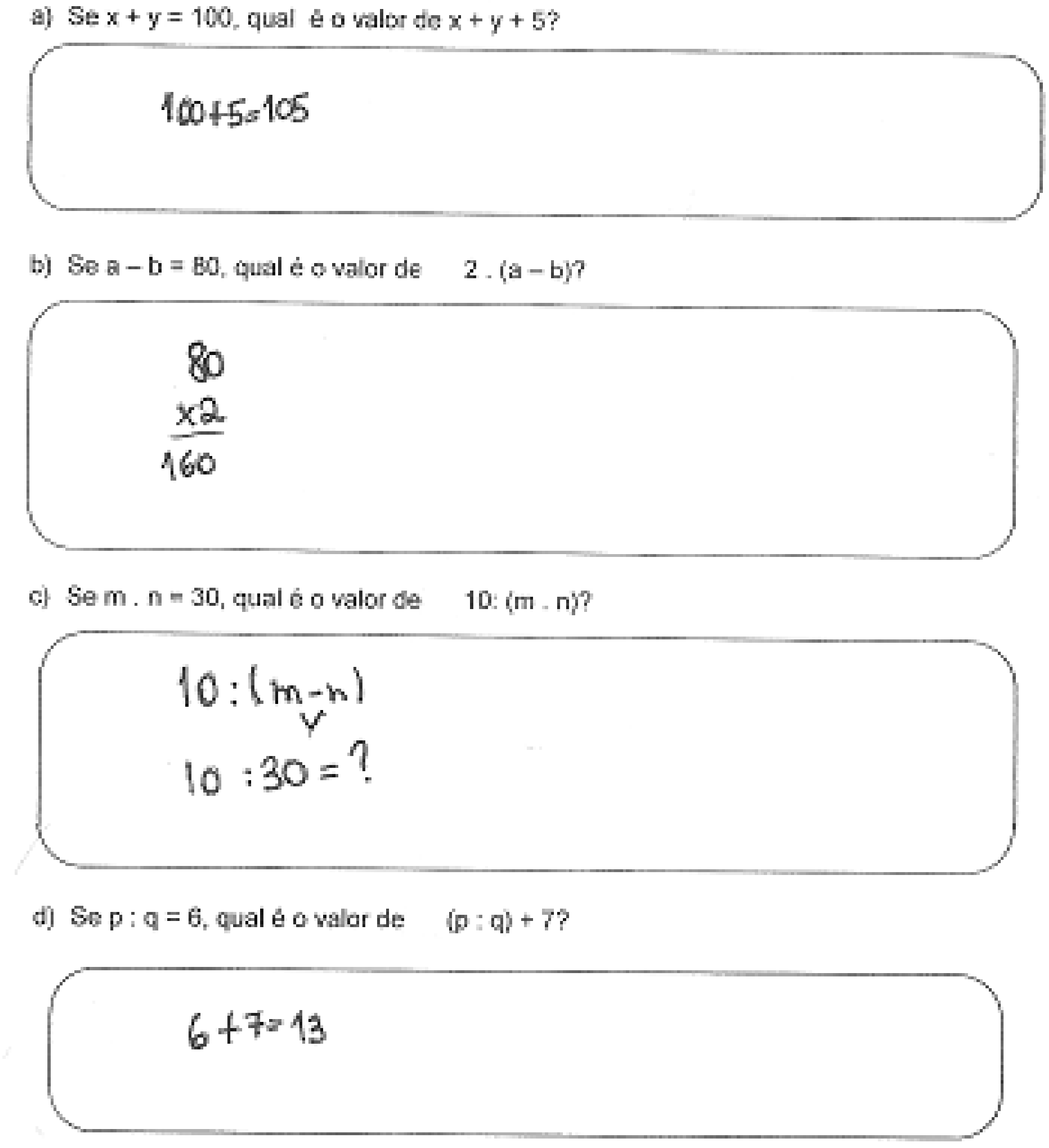
6 ①
12 ②
18 ③
24 ④
30 ⑤
36 ⑥

h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

z= ④ 7
×0,7
0,49

Ainda na mesma questão, pudemos observar que Fabio deixa bastante claro seu raciocínio no item g. Ele primeiro “elimina a vírgula” do dividendo e do divisor, buscando trabalhar com números naturais. Depois, ao lado do algoritmo da divisão, ele conta de seis em seis até descobrir quantas vezes o número 6 cabe dentro do número 36. No item h, erra o posicionamento da vírgula, fornecendo uma resposta incorreta.

Na questão 2, Fabio também reconhece o papel das letras nas expressões e realiza as substituições dessas letras pelo valor numérico dado com relativa facilidade. Percebemos que faz uso do cálculo mental nas resoluções, principalmente nos itens a e d.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

$100+5=105$

b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

$$\begin{array}{r} 80 \\ \times 2 \\ \hline 160 \end{array}$$

c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

$10:(m-n)$

$\vee$

$10 : 30 = ?$

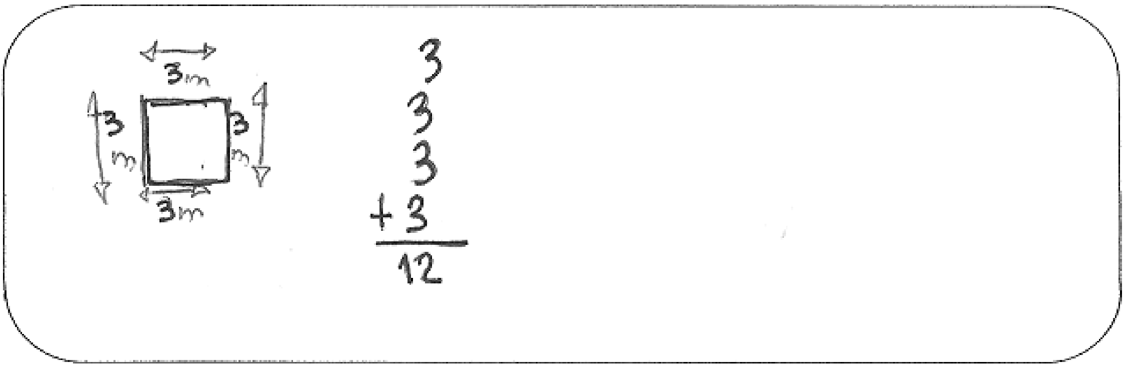
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

$6+7=13$

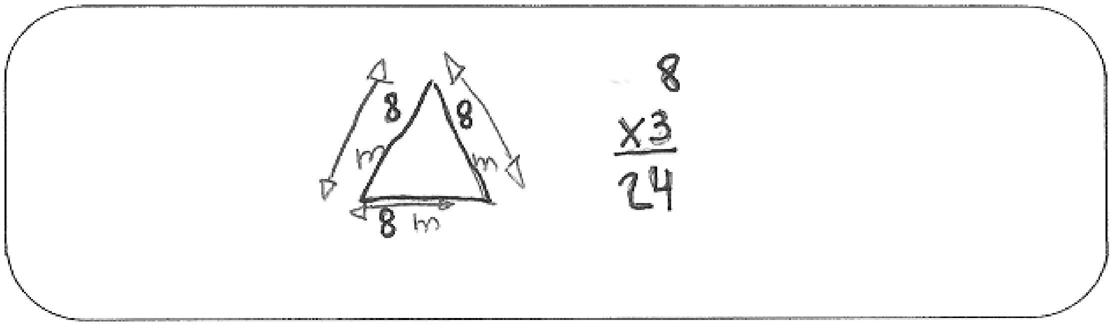
Quando, no item c, precisou efetuar o quociente de um número natural menor por outro natural maior, colocou um ponto de interrogação na resposta e disse: “Não dá pra continuar essa conta. Esse exercício deve estar errado”. O comentário confirma a crença de alguns alunos de que não podemos dividir um número menor por um número maior.

Na análise da questão 3, Fabio compreende o significado da letra “l” nas perguntas e determina os perímetros com facilidade, ilustrando seu raciocínio nos desenhos. Deixou os algoritmos ao lado para esclarecer o procedimento que utilizou nas resoluções. No item a, ele recorreu à adição sucessiva dos lados dos polígonos (3 + 3 + 3 + 3 = 12) para efetuar o cálculo. No item b, fez uso do princípio multiplicativo, efetuando o produto da medida do lado do polígono pelo número de lados da figura (3 x 4 = 12).

a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?



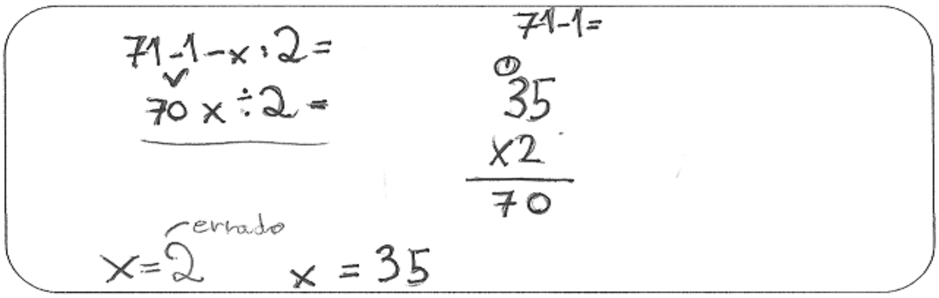
b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?



Não efetuou o item c da questão 3 porque ainda não tinha o conceito de área de figuras planas. Por isso, deixou o exercício em branco.

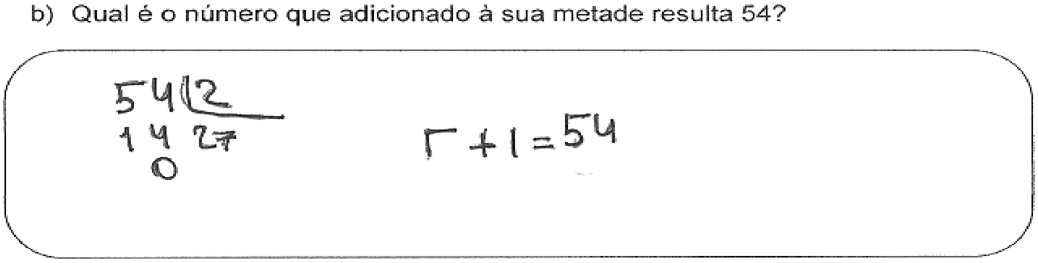
Para resolver a questão 4, Fabio precisou recorrer a maneiras não formais de resolver uma equação, ou problemas que poderiam ser resolvidos por equações, uma vez que esse conteúdo ainda não havia sido trabalhado no 6º ano. Observe-se como o aluno soluciona o item a proposto:

a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71



Ele reconhece o uso da letra como incógnita na equação e tenta descobrir seu valor numérico subtraindo 1 do número 71 e, depois, encontrando o número 35, cujo dobro resulta 70. Faz uso do cálculo mental na subtração e utiliza o algoritmo no produto. Confunde-se na formulação da resposta correta, mas logo corrige e define acertadamente o valor numérico da letra.

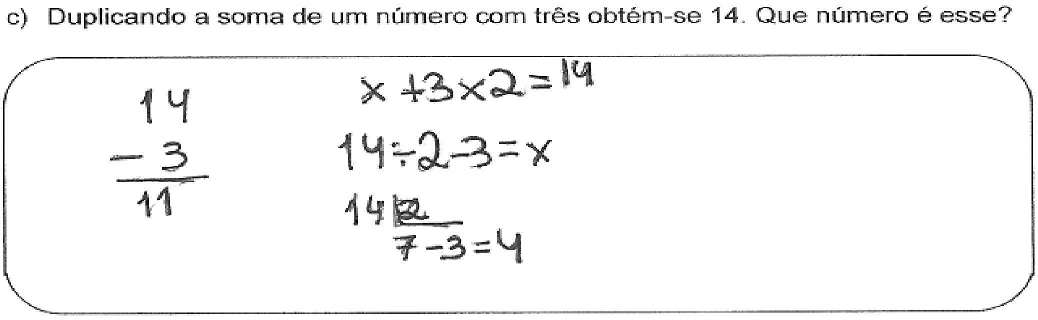
Ainda na mesma questão, foram propostos outros dois problemas para verificar quais procedimentos de cálculo os alunos utilizariam para tentar chegar aos resultados. No primeiro caso, Fabio não conseguiu chegar à resposta correta. No segundo, por meio das operações inversas, chega ao resultado correto (número quatro). Analisem-se suas tentativas.



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

54 | 2
14 27
0

$r + 1 = 54$



c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

$$\begin{array}{r} 14 \\ -\ 3 \\ \hline 11 \end{array}$$

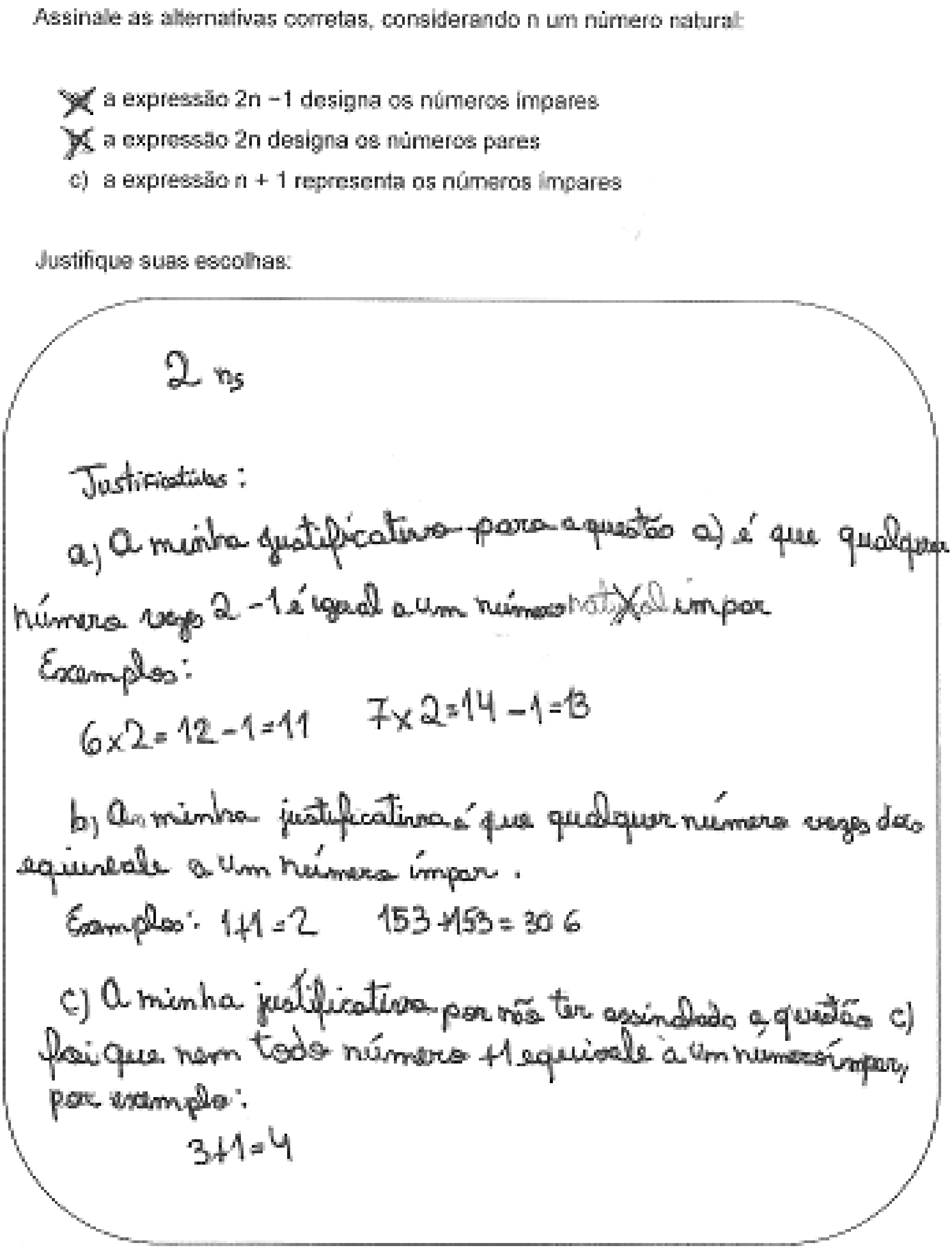
$x + 3 \times 2 = 14$

$14 \div 2 - 3 = x$

14 | 2

$7 - 3 = 4$

Na questão 5, Fabio compreende as expressões com letras como generalizadora do modelo aritmético e tem clareza ao explicar seu raciocínio. Ele faz uso de substituições para testar a veracidade ou não de cada expressão. Observe-se sua resolução.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

☒ a expressão 2n −1 designa os números ímpares
☒ a expressão 2n designa os números pares
c) a expressão n + 1 representa os números ímpares

Justifique suas escolhas:

2 ns

Justificativas :

a) A minha justificativa para a questão a) é que qualquer número vezes 2 -1 é igual a um número ~~natural~~ impar

Examplos:

6x2=12-1=11   7x2=14-1=13

b) A minha justificativa é que qualquer número vezes dois equivale a um número ímpar .

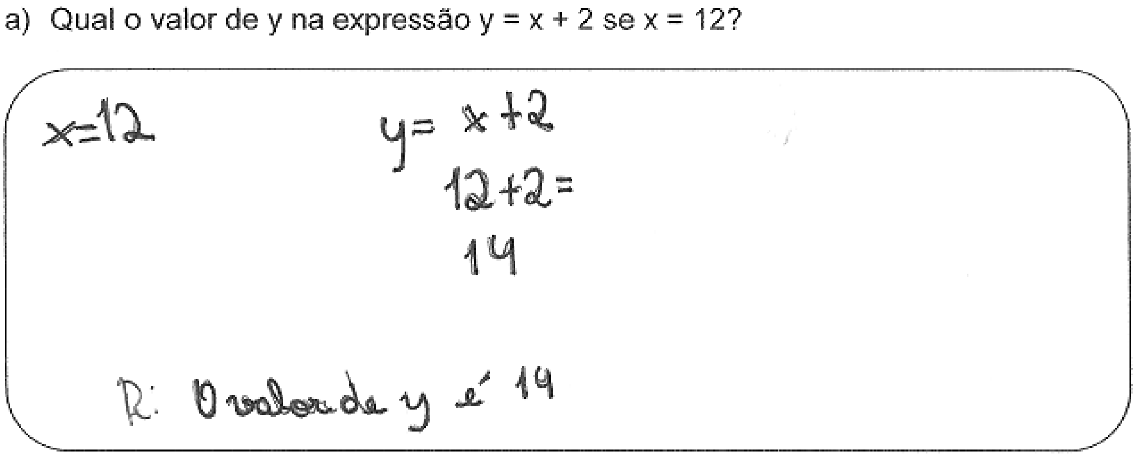
Examplos: 1+1=2   153+153=30 6

c) A minha justificativa por não ter assinalado a questão c) foi que nem todo número +1 equivale a um numero ímpar, por examplo:

3+1=4

Repare que Fabio confunde-se na segunda justificativa, escrevendo que “qualquer número vezes dois equivale a um número ímpar”. Ele errou na hora de escrever “qualquer número vezes dois equivale a um número par”.

Por fim, na questão 6 proposta, Fabio reconhece a dimensão funcional da letra nas relações propostas e utiliza seus conhecimentos de cálculo nas resoluções. Observe-se seu raciocínio:



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

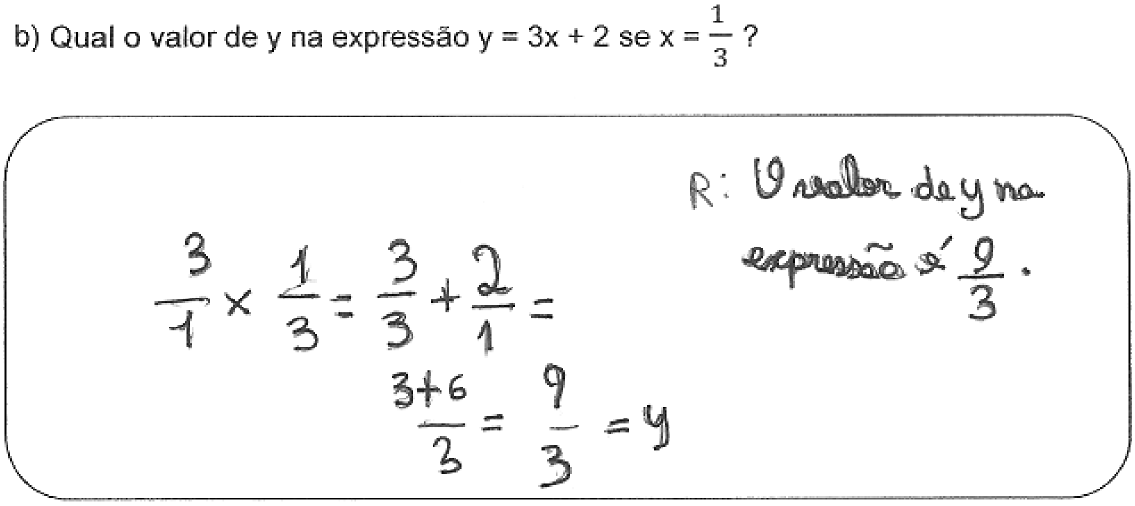
$x=12$

$y= x+2$

$12+2=$

14

R: O valor de y é 14



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

$$\frac{3}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{1} =$$

$$\frac{3+6}{3} = \frac{9}{3} = y$$

R: O valor de y na expressão é $\frac{9}{3}$.

Note que, no item b, o aluno fica preso nas operações formais com racionais na representação fracionária e, apesar de efetuar corretamente os cálculos, não percebe que sua fração final corresponde a três inteiros.

Numa síntese do desempenho de Fabio nas duas atividades, apresentamos o quadro a seguir, como um resumo de seus erros e acertos. Os espaços preenchidos de verde simbolizam os acertos. Os preenchidos de vermelho, os erros. E questões deixadas em branco estão indicadas na cor azul.

Resumo dos acertos e erros de Fabio															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥
Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?					
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h							
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥		Sim					
Questão 2	a	b	c	d											
	🟩	🟩	🟦	🟩						Às vezes					
Questão 3	a	b	c												
	🟩	🟩	🟦							Sim					
Questão 4	a	b	c												
	🟩	🟥	🟩							Às vezes					
Questão 5	a	b	c												
	🟩	🟩	🟩							Sim					
Questão 6	a	b													
	🟩	🟩								Às vezes					

Como pudemos perceber, Fabio mostrou ter bom desempenho no cálculo mental com os números naturais e soube usar suas habilidades na maioria das vezes em que precisou transferir esses conhecimentos para operar mentalmente os números racionais na forma decimal. Sua maior dificuldade envolveu cálculos do tipo a : b. Ao longo das atividades, pudemos identificar em Fabio alguns conhecimentos prévios de cálculo, como: adicionar e subtrair 1 a números naturais e racionais na forma decimal; repertório aditivo dos tipos (a + a) e [a + (a + 1)]; e domínio das tabuadas. O aluno usou seus conhecimentos prévios de cálculo nas situações com a presença de letras e, apesar de não ter sido ainda introduzido nas resoluções formais da álgebra, conseguiu resolver corretamente algumas das situações propostas com seus conhecimentos aritméticos.

Continuaremos, agora, nossas análises com Elaine, outra estudante do 6º ano, também considerada boa aluna.

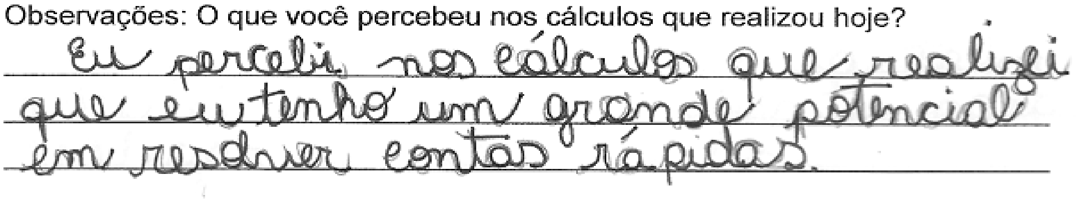
3.3. Elaine e seu desempenho

Elaine esteve presente em nossos encontros com muita disposição e mostrou-se bastante participativa. Reafirmou seu gosto pela Matemática e sua facilidade com os cálculos várias vezes. Durante a primeira atividade, era sempre a primeira a escrever as respostas e logo ficava aguardando o próximo cálculo com ansiedade. Entendeu a atividade como um desafio.

Na resolução das operações propostas nas sequências 1, 2, 3 e 4 Elaine não demonstrou diferença ou surpresa em operar mentalmente números naturais e operar mentalmente números racionais na representação decimal. Acertou a maioria dos resultados e associou seus únicos quatro erros à distração. Foram eles:

Cálculo solicitado	Sequência 1 Cálculos do tipo a + 1	Sequência 3 Cálculos do tipo a + a
24,7 + 1	**23,7**	
26 + 26		**96**
260 + 260		**960**
0,26 + 0,26		**0,96**

Ao término dessas quatro primeiras sequências, Elaine escreveu:

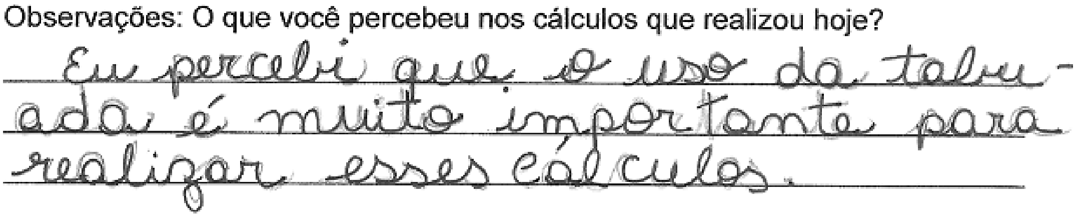


Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi nos cálculos que realizei
que eu tenho um grande potencial
em resolver contas rápidas.

No encontro seguinte, Elaine desenvolveu as sequências 5 a 8. Acertou todos os resultados e atribuiu seu desempenho ao conhecimento que tem da tabuada.

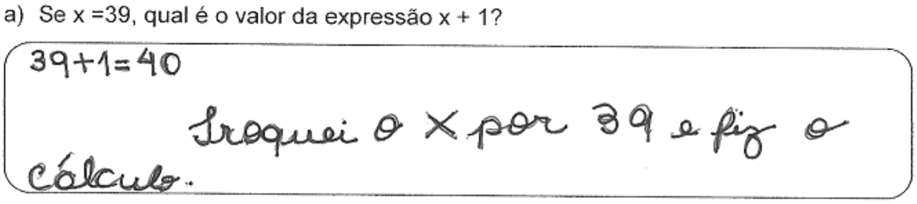
Num certo momento da atividade, enquanto efetuava os cálculos da sequência 7, comentou em voz alta que havia percebido uma certa regularidade nas respostas e que seria capaz de acertar a operação antes mesmo que eu colocasse as contas na lousa. Muito confiante, observe-se o que a aluna registrou ao fim desse momento:


Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi que o uso da tabuada é muito importante para realizar esses cálculos.

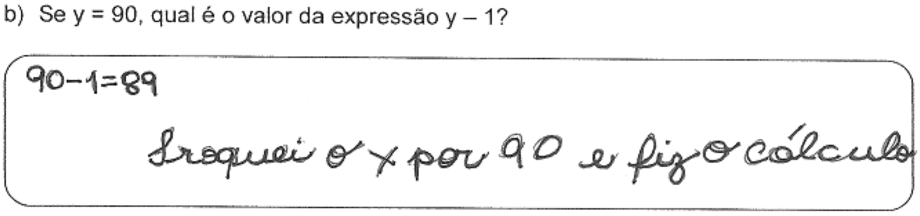
No terceiro encontro, Elaine acertou quase todos os resultados das sequências 9 a 12. Seu único equívoco foi responder que 5 x 10 = 10. Justificou seu erro alegando pressa e distração. Comentou que havia achado aqueles cálculos fáceis e que não teve dificuldades em resolvê-los.

Na análise da segunda atividade de Elaine, pudemos perceber claramente a utilização do cálculo mental em suas resoluções. Mesmo tendo recebido da professora a orientação para registrar todo o seu raciocínio, ela o fez por meio de frases e sentenças, não utilizando o algoritmo. Observe-se como a aluna resolveu a questão 1. Ela reconhece o valor numérico da letra na expressão e efetua o cálculo mentalmente, fornecendo apenas o resultado.


a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

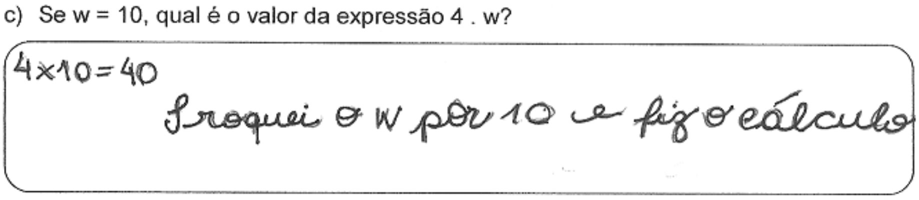
39+1=40

Troquei o x por 39 e fiz o cálculo.


b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

90-1=89

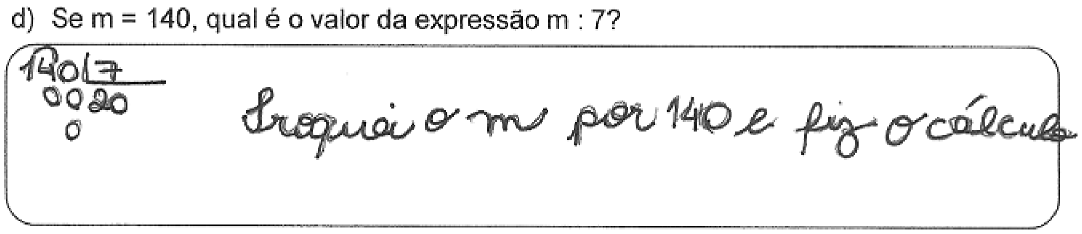
Troquei o x por 90 e fiz o cálculo


c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

4x10=40

Troquei o w por 10 e fiz o cálculo

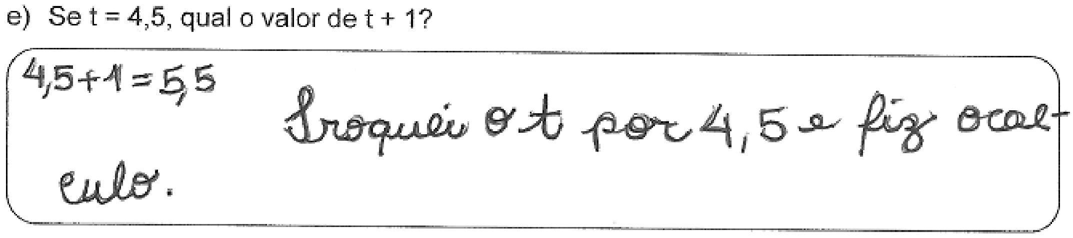
E continuou desenvolvendo os itens d, e, f da questão proposta utilizando o mesmo formato mostrado nos itens anteriores.



d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

140|7
0020
0

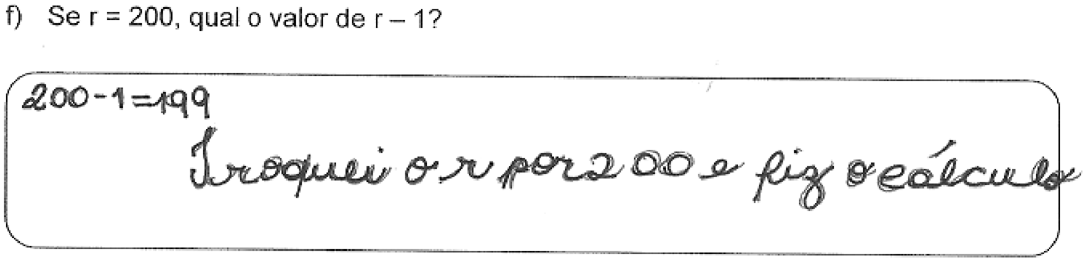
Troquei o m por 140 e fiz o cálculo



e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

4,5+1=5,5

Troquei o t por 4,5 e fiz o cal-culo.

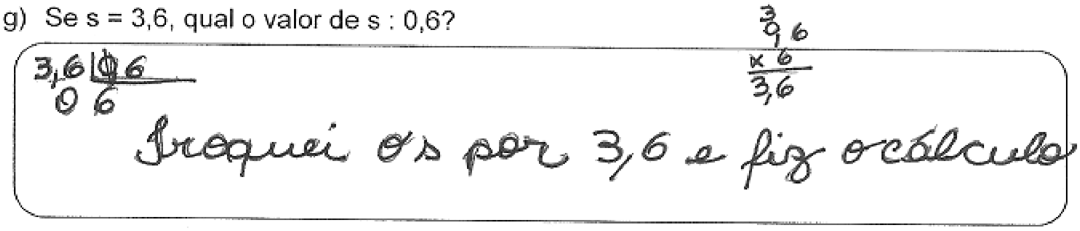


f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

200-1=199

Troquei o r por 200 e fiz o cálculo

Quando chegou nos itens g e h, que envolviam cálculos com números racionais na forma decimal, Elaine resolveu montar o algoritmo para certificar-se do resultado. Demonstrou pequena insegurança. Observe-se um pequeno algoritmo no canto superior direito do quadro, uma verificação da operação. E, no item h, Elaine comete um erro no cálculo, mesmo com algoritmo montado, entendendo que 7 x 0 = 7.

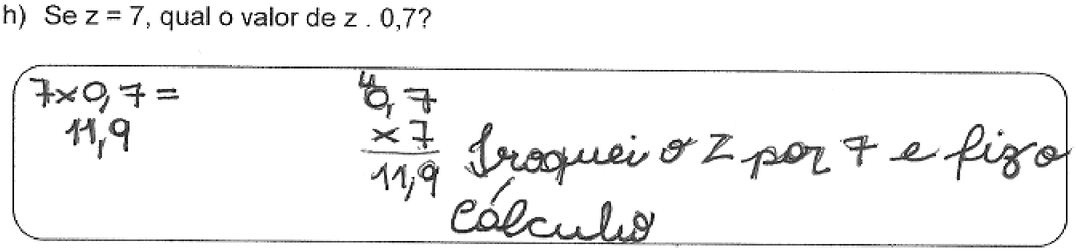


g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

3,6|0,6
0 6

3
0,6
x 6
3,6

Troquei o s por 3,6 e fiz o cálculo



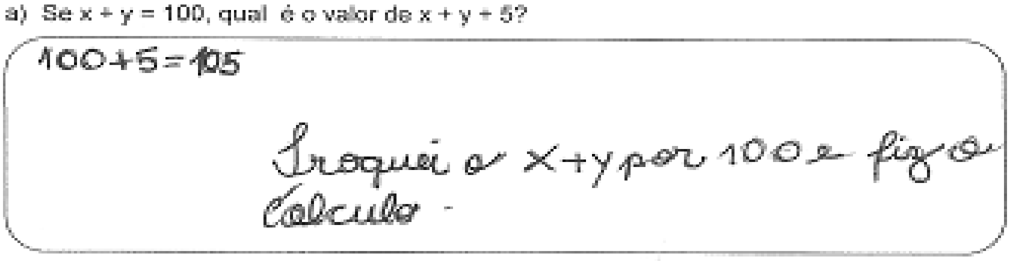
h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

7x0,7 =
11,9

4
0,7
x 7
11,9

Troquei o Z por 7 e fiz o cálculo

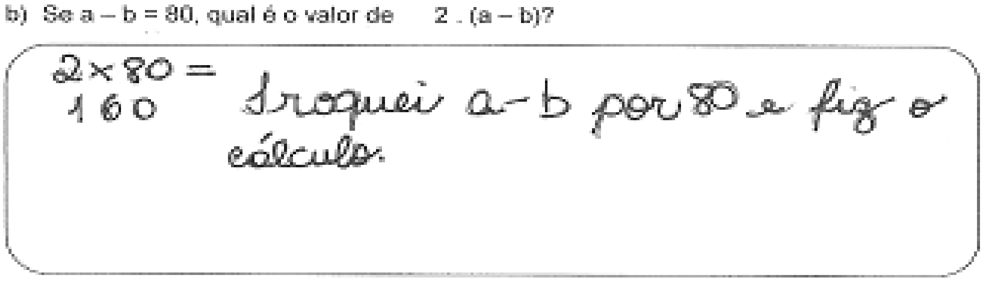
Na questão 2, a aluna reconhece a função das letras na expressão e realiza a substituição correta pelo valor numérico. Expressa seu raciocínio por meio de frases e utiliza os procedimentos de cálculo mental nas operações. Acerta três dos quatro itens propostos. Abaixo, seguem suas resoluções.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

100+5=105

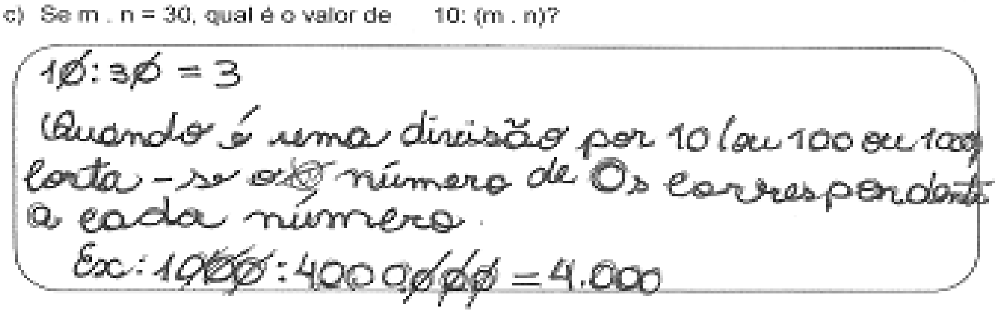
Troquei o x+y por 100 e fiz o cálculo.



b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

2×80 =
160

Troquei a-b por 80 e fiz o cálculo.

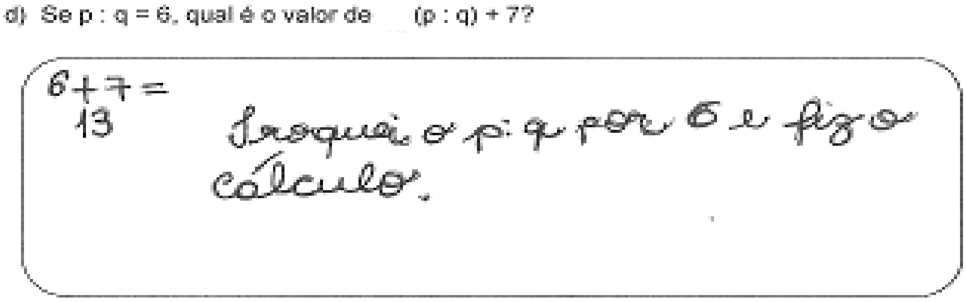


c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

$1\cancel{0}:3\cancel{0}=3$

Quando é uma divisão por 10 (ou 100 ou 1000) corta-se o ~~o~~ número de 0s correspondente a cada número.

Ex: $1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}:4000\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}=4.000$



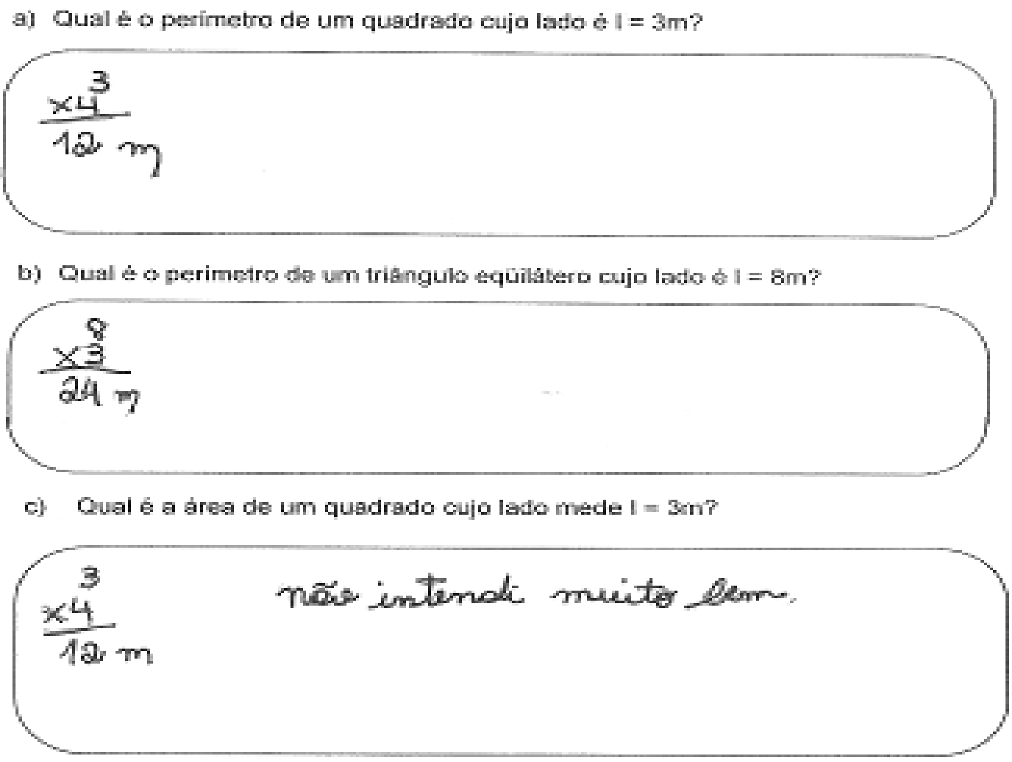
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

6+7=
13

Troquei o p:q por 6 e fiz o cálculo.

No item c, Elaine utiliza o procedimento de dividir o dividendo e o divisor simultaneamente por 10, explicando esse procedimento pela "técnica de cortar zeros". Mas erra quando divide 1 por 3, devolvendo o quociente **3**. A aluna não percebeu seu equívoco e demorou a entender que o cálculo estava incorreto, assim como o exemplo que aparece na resolução.

Na questão 3, Elaine reconhece o papel da letra “l” na pergunta, resolve corretamente os exercícios de perímetro e registra seu raciocínio por meio de um algoritmo. Não acerta o problema do item c porque desconhece o conceito de área de figuras planas. Suas resoluções estão expostas abaixo.



a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \text{ m} \end{array}$$

b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

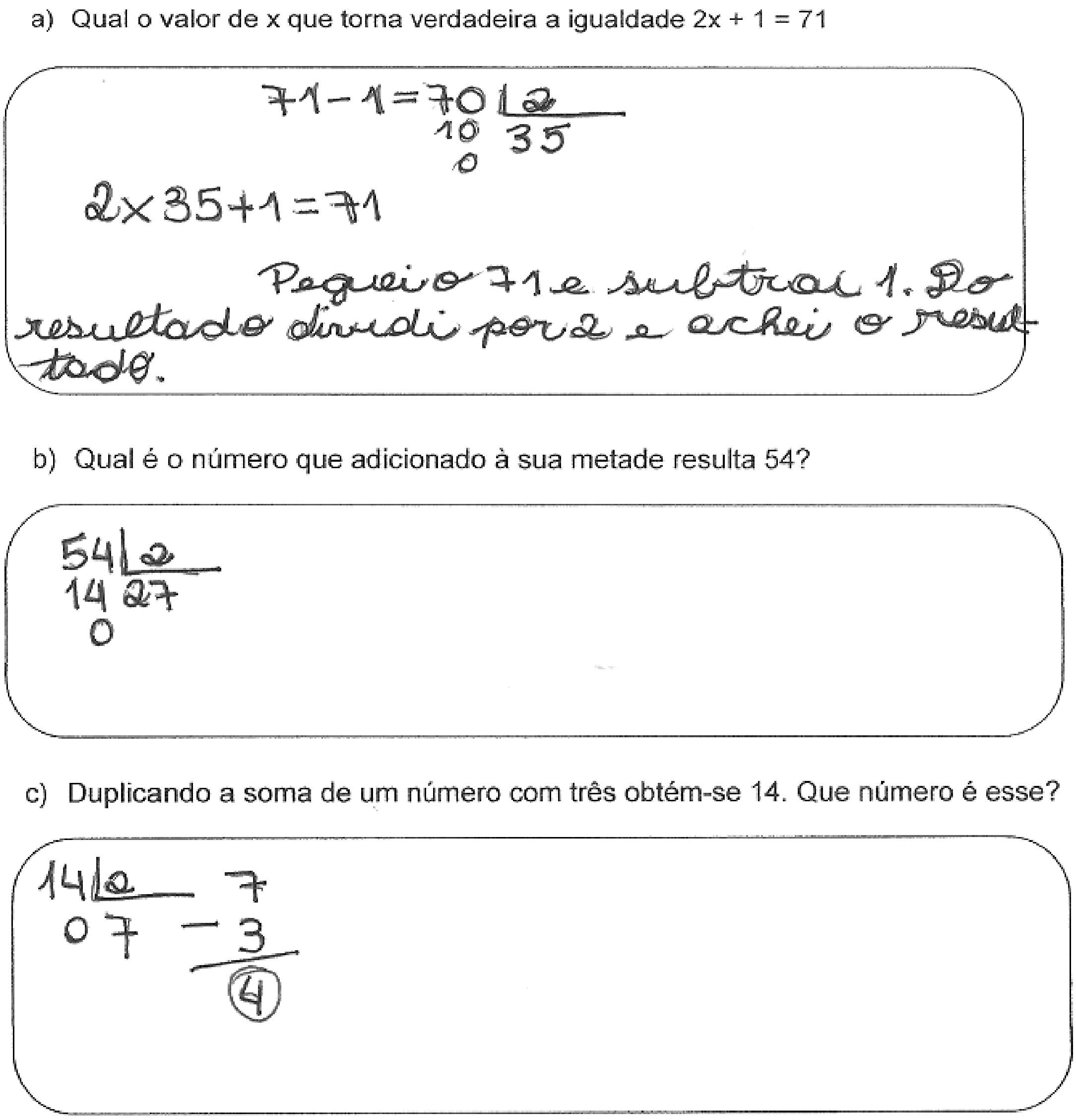
$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline 24 \text{ m} \end{array}$$

c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \text{ m} \end{array}$$

não intendi muito bem.

Na questão 4, Elaine reconhece a letra como incógnita e, por meio de cálculos, consegue resolver corretamente dois dos três itens propostos. Sua linha de raciocínio fica clara nas exposições abaixo. Vale a pena lembrar que a aluna ainda não teve contato com as maneiras formais de resoluções próprias da álgebra. Nem conhece o conceito de equação.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

71 − 1 = 70 |2
10 35
0

2x35+1=71

Peguei o 71 e subtrai 1. Do resultado dividi por 2 e achei o resultado.

b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

54 |2
14 27
0

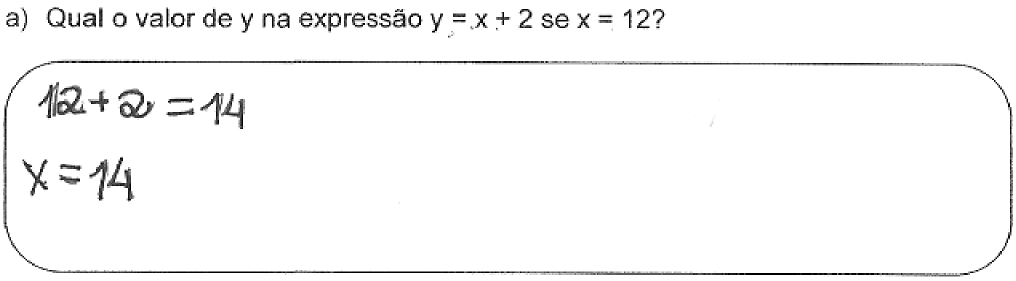
c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

14 |2
07

7
− 3
④

A questão 5, que compreende as expressões com letras como generalizadora do modelo aritmético, ficou em branco e Elaine deixou um recado avisando que não a tinha compreendido.

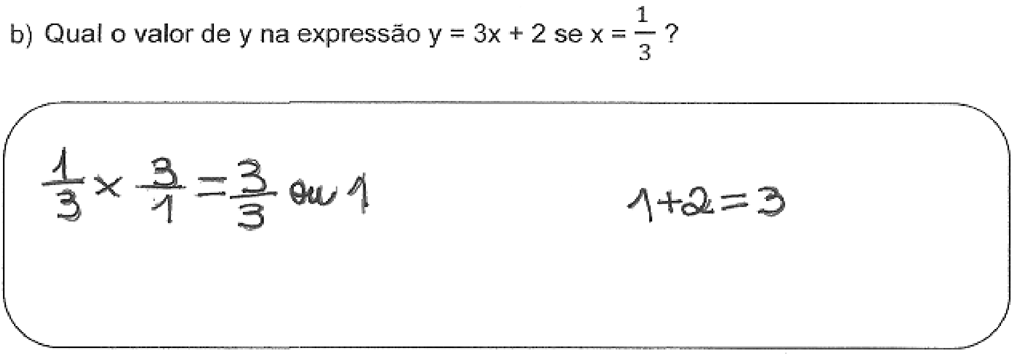
Na análise da questão 6, pudemos perceber que a aluna em questão reconhece o papel funcional da letra nas situações propostas e as desenvolve corretamente. Utiliza seus conhecimentos de cálculo para efetuar operações com números naturais e com números racionais na forma fracionária. Observe-se.



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

12+2 = 14

X = 14



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{3}$ ou 1

1+2=3

Numa síntese do desempenho de Elaine nas duas atividades, apresentamos o quadro a seguir, cujo critério já foi comentado anteriormente.

Resumo dos acertos e erros de Elaine															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥		Às vezes
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟥	🟩						Sim
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟥							Sim
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟥	🟩							Sim
Questão 5	a	b	c							
	🟦	🟦	🟦							
Questão 6	a	b								
	🟩	🟩								Sim

O quadro nos ajuda a afirmar que Elaine não só demonstrou ter bom desempenho no cálculo mental com os números naturais como também operou mentalmente os números racionais na forma decimal. Ao longo das atividades, identificamos que Elaine utiliza seus conhecimentos prévios com produtos de maneira desenvolta e que o domínio que tem das tabuadas a ajuda não só no cálculo mental, mas também no desenvolvimento da autoestima e da confiança. A aluna usou seus conhecimentos prévios de cálculo mental nas situações com a presença de letras e, apesar de não ter sido ainda introduzida nas resoluções formais da álgebra, conseguiu resolver corretamente várias situações propostas com seus conhecimentos aritméticos.

Dando continuidade às nossas análises, vamos relatar o desenvolvimento de mais uma aluna de 6º ano.

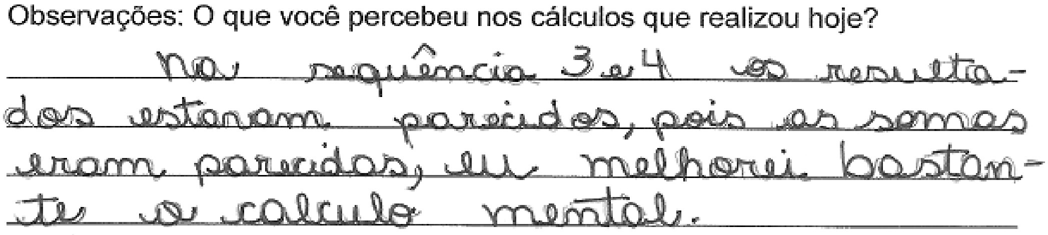
3.4. Isabel e seu desempenho

Isabel começou as atividades um pouco apreensiva e tensa. Parecia assustada ou, talvez, preocupada com o encontro que emanava novidade. Demorou um pouco para sentir-se à vontade. Quando percebeu a tranquilidade do momento e a naturalidade dos colegas, soltou-se mais e participou de forma natural. Segundo nossos critérios expostos anteriormente, Isabel foi classificada como aluna mediana.

Na primeira atividade, a aluna acertou praticamente todos os cálculos das sequências 1 a 4, tanto com os números naturais como com os números racionais na representação decimal. Cometeu apenas dois equívocos, demonstrados abaixo. No primeiro, fez uma confusão com os sucessores de números naturais terminados em 9. No segundo erro, realizou a diferença subtraindo um décimo do número 1,1, no lugar de subtrair um inteiro.

Cálculo solicitado	Sequência 1 Cálculos do tipo a + 1	Sequência 2 Cálculos do tipo a – 1
9 999 + 1	**100 000**	
1,1 – 1		**1,0**

Nas sequências 3 e 4, com cálculos dos tipos (a + a) e [a + (a + 1)] respectivamente, Isabel percebeu alguma similaridade com os resultados, expressa no seu comentário abaixo.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

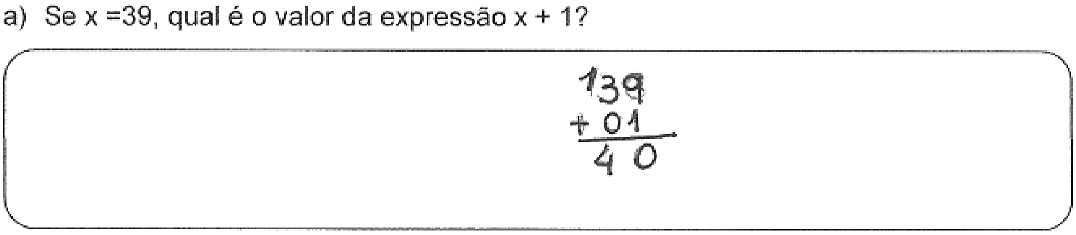
na sequência 3 e 4 os resultados estavam parecidos, pois as somas eram parecidos, eu melhorei bastante o calculo mental.

No segundo encontro, acertou todos os cálculos efetuados mentalmente das sequências 5 a 8, tanto com números naturais como com os racionais na representação decimal. Registrou uma percepção: a de que os resultados da sequência 7 (cálculos do tipo 8 X a) são o dobro dos resultados da sequência 6 (cálculos do tipo 4 X a) que são, por sua vez, o dobro dos resultados da sequência 5 (cálculos do tipo 2 X a).

No terceiro momento de atividades, quando foram propostas as sequências 9 a 12, Isabel acertou os produtos com todos os valores propostos e percebeu a regularidade nas respostas das sequências 10 (cálculos do tipo 3 X a) e 11 (cálculos do tipo 6 X a), registrando que um é o dobro do outro. Teve dúvidas nos quocientes propostos na sequência 12, envolvendo divisões de racionais na forma decimal. E demonstrou ter consciência de que seus cálculos poderiam não estar corretos, comentando: “estou com dúvidas. Não sei como fazer. Vou chutar”. Analise suas resoluções nas divisões com os números racionais na forma decimal.

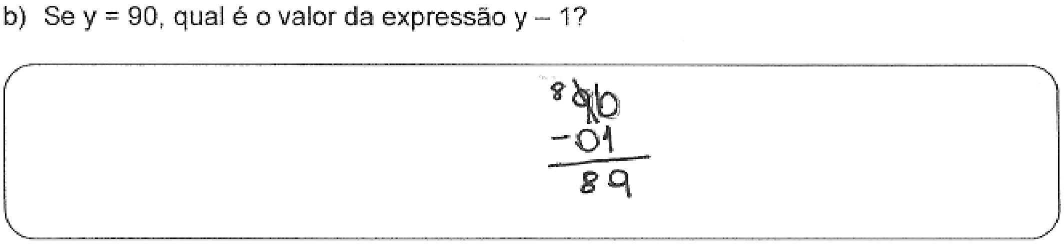
Cálculo solicitado	Sequência 12 Cálculos do tipo a : b
1,4 : 0,7	**0,2**
2,1 : 0,7	**0,3**
3,5 : 0,7	**0,5**
4,9 : 0,7	**0,7**
5,6 : 0,7	**0,8**

Na segunda atividade, Isabel recorre ao algoritmo para resolver as questões propostas, como ferramenta para demonstrar o raciocínio utilizado e como procedimento que lhe oferece segurança. Podemos observar sua resolução na questão 1, colocadas abaixo.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

$$\begin{array}{r} {}^{1}39 \\ +\,01 \\ \hline 40 \end{array}$$



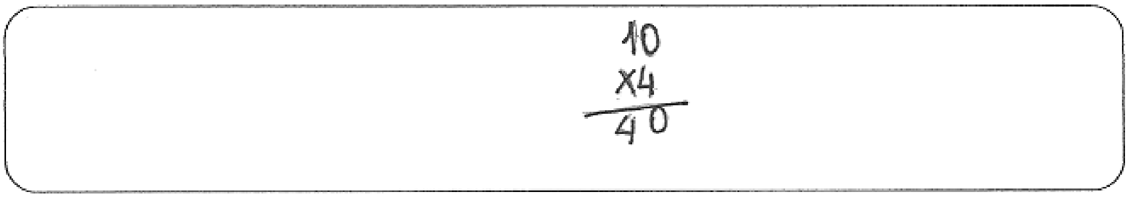
b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

$$\begin{array}{r} {}^{8}\cancel{9}{}^{1}0 \\ -\,01 \\ \hline 89 \end{array}$$

Repare-se no item b que, diferentemente de Fabio que também havia montado o algoritmo apenas para mostrar o raciocínio utilizado na resolução, Isabel realmente efetua os procedimentos do algoritmo da subtração, emprestando uma dezena do algarismo ao lado para encontrar o antecessor do número natural 90. A aluna, apesar de ter demonstrado um bom desempenho na atividade de cálculo mental, disse sentir segurança nas resoluções quando “monta a continha”.

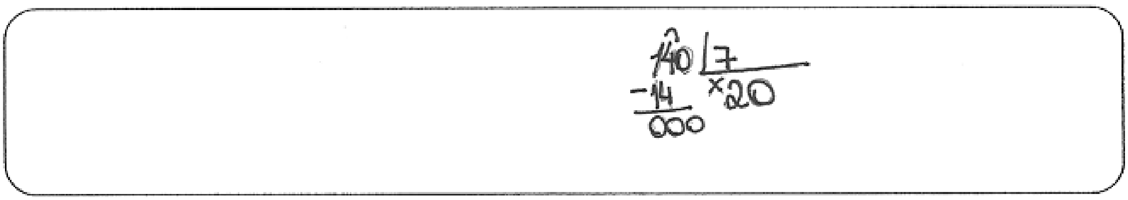
Em relação ao reconhecimento da letra nas expressões, ainda na mesma questão, Isabel não hesitou em substituí-la pelo valor numérico fornecido, reconhecendo assim seu papel. Todas as suas respostas estavam corretas, conforme aparecem abaixo.

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?



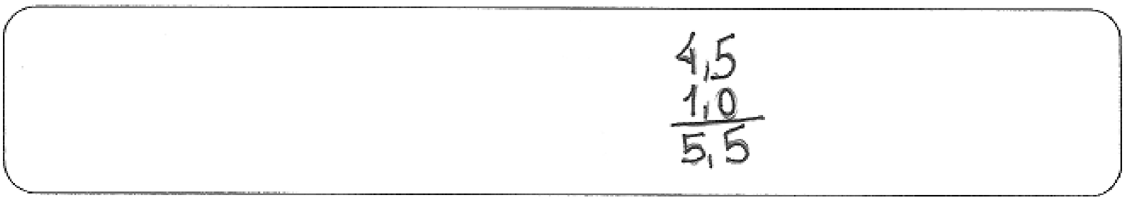
10
x4
40

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?



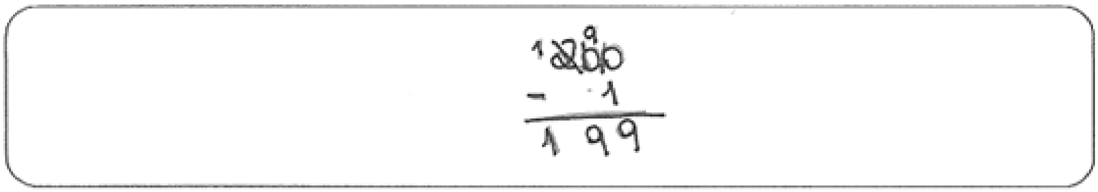
140 |7
-14 ×20
000

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?



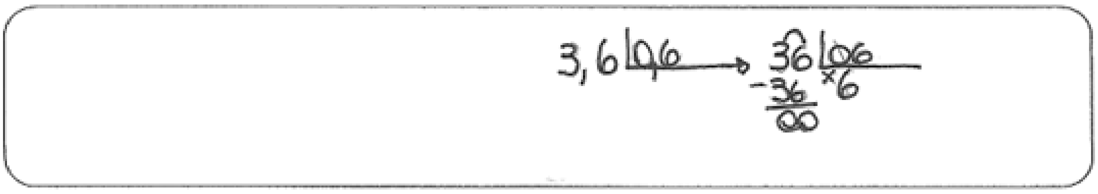
4,5
1,0
5,5

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?



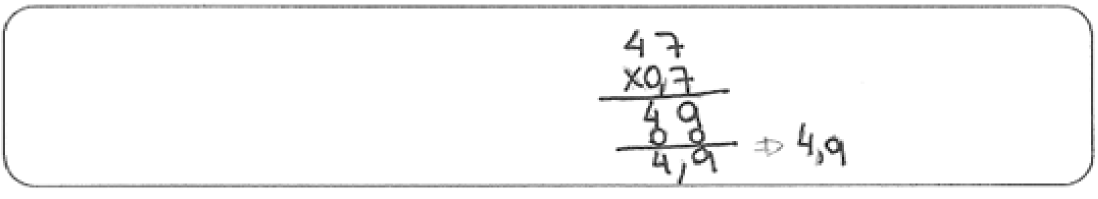
$^{1}\cancel{2}\overset{9}{\cancel{0}}0$
- 1
1 9 9

g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?



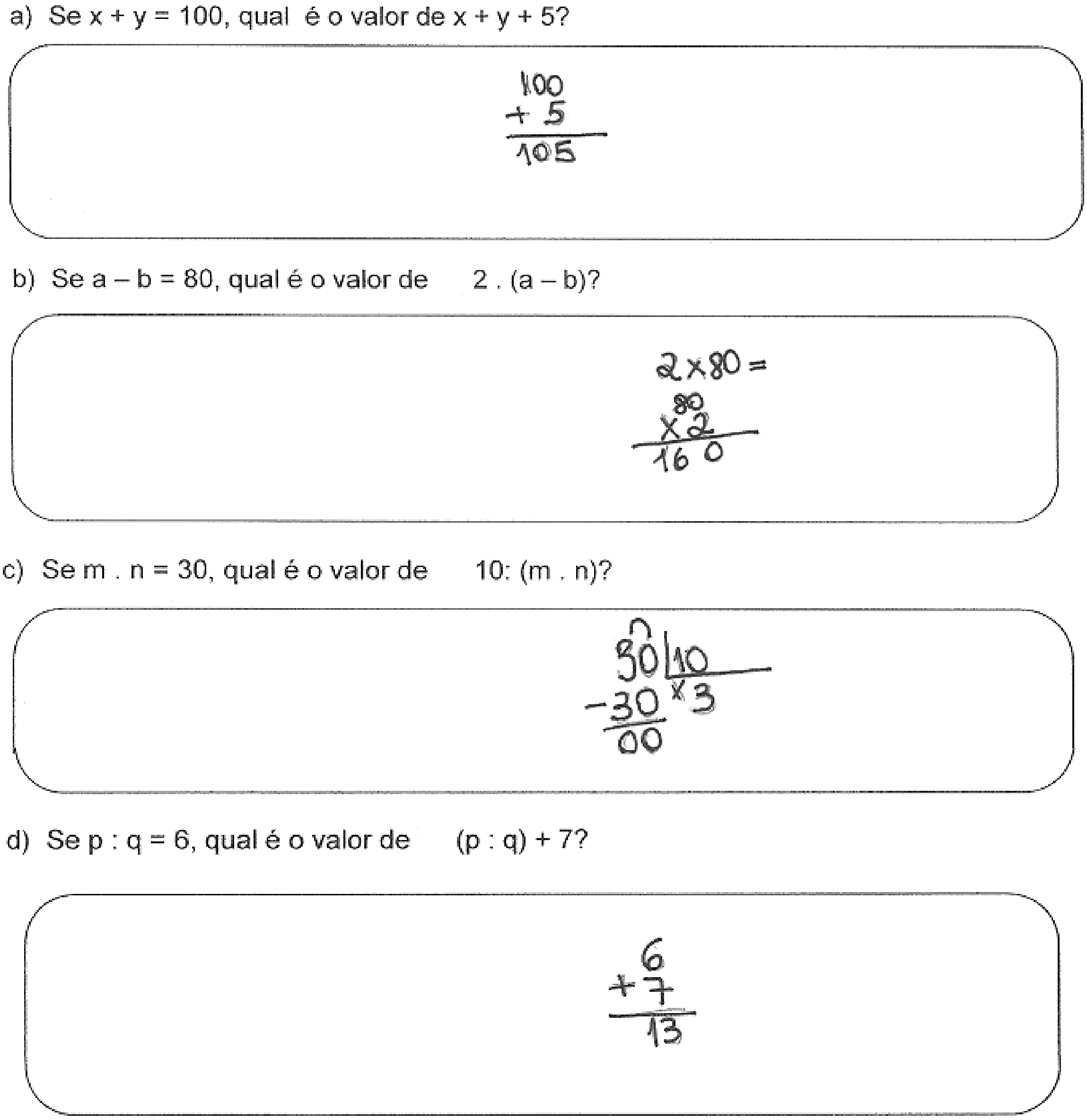
3,6 |0,6 → 36 |06
-36 ×6
00

h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?



4 7
x0,7
4 9
0 0
4,9 ⇒ 4,9

Na questão 2, Isabel reconhece o papel das letras nas expressões e realiza corretamente as substituições das mesmas pelo valor numérico. Encontramos uma peculiaridade na resolução do item c. A aluna trocou a posição de dividendo e divisor, acreditando que a ordem desses elementos não iria alterar o quociente. Observe-se.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

100
+ 5
105

b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

2 x 80 =
80
x 2
160

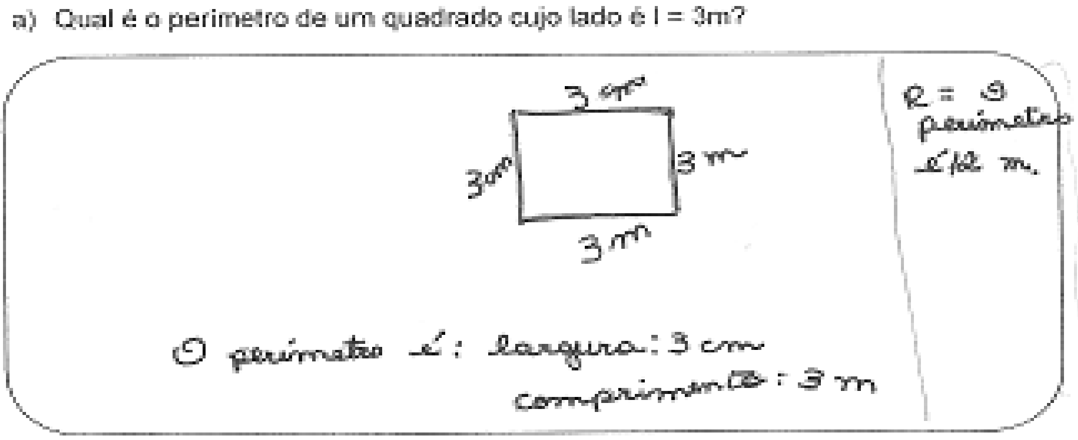
c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

30 | 10
-30 x 3
00

d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

6
+ 7
13

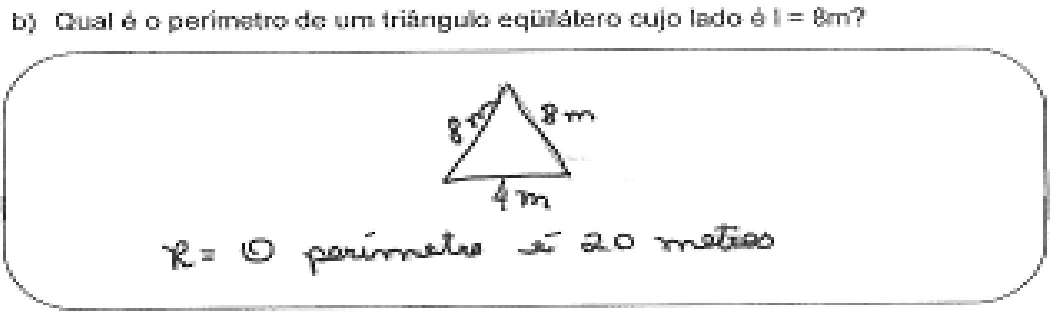
Na análise da questão 3, apesar dos equívocos com alguns conceitos de figuras planas e o desconhecimento do conceito de área, pudemos observar claramente que Isabel fez uso do cálculo mental em suas resoluções, que seguem abaixo para conferência. A aluna também reconheceu o papel da letra “l” utilizada no enunciado dos problemas.



a) Qual é o perimetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

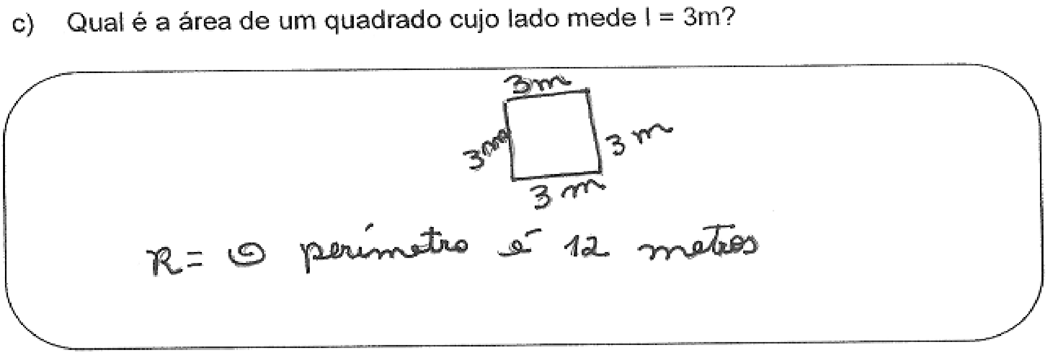
R = O perímetro é 12 m.

O perímetro é: largura: 3 cm
comprimento: 3 m



b) Qual é o perimetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

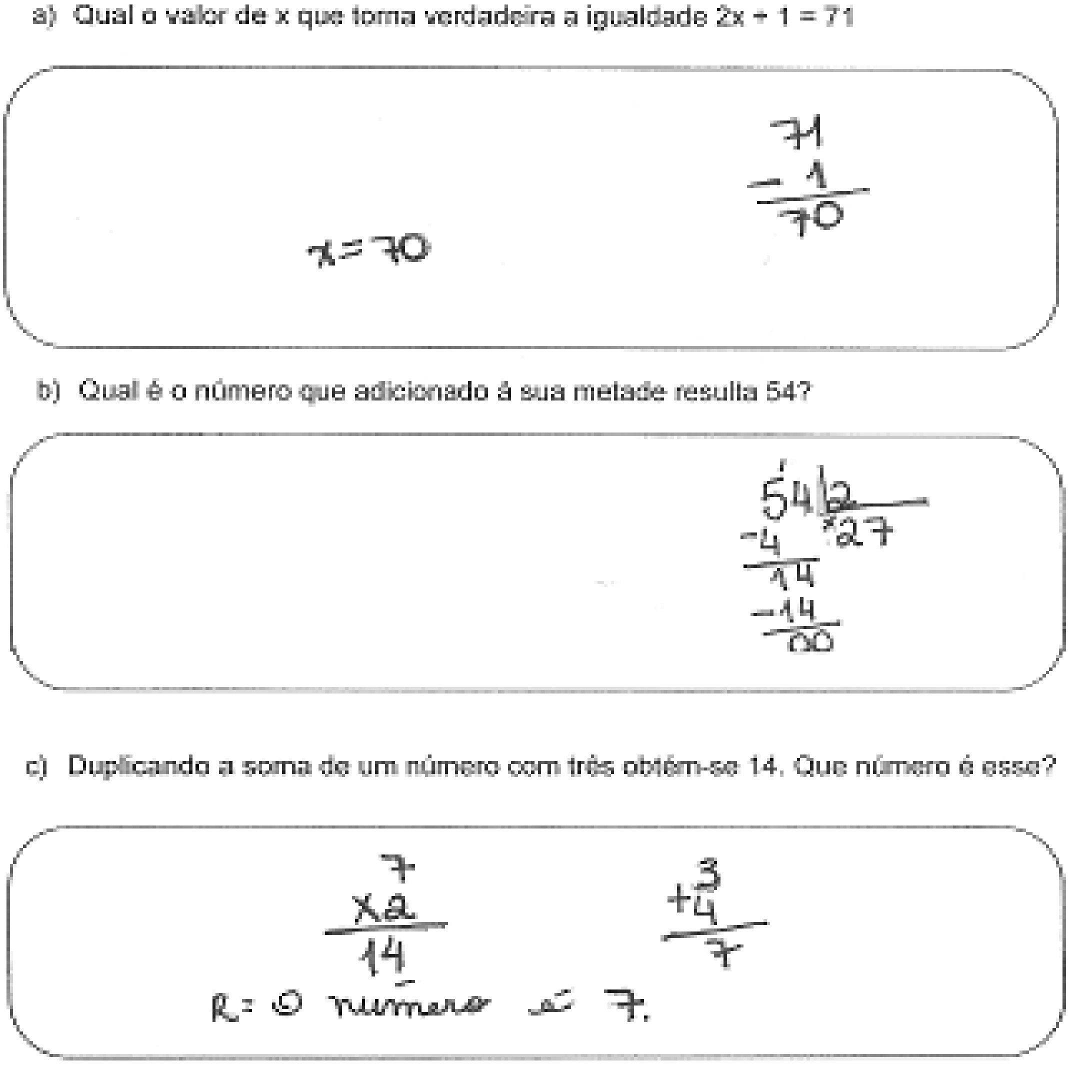
R= O perímetro é 20 metros



c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

R= O perímetro é 12 metros

A questão 4 foi fonte de dúvidas para Isabel que, apesar de reconhecer o papel de incógnita das letras, não conseguiu utilizar seus conhecimentos aritméticos para resolver os problemas. As resoluções abaixo nos mostram que a aluna, apesar de tentar uma saída para cada situação, não conseguiu acertar as respostas.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade $2x + 1 = 71$

$x = 70$

$$\begin{array}{r} 71 \\ -\ 1 \\ \hline 70 \end{array}$$

b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

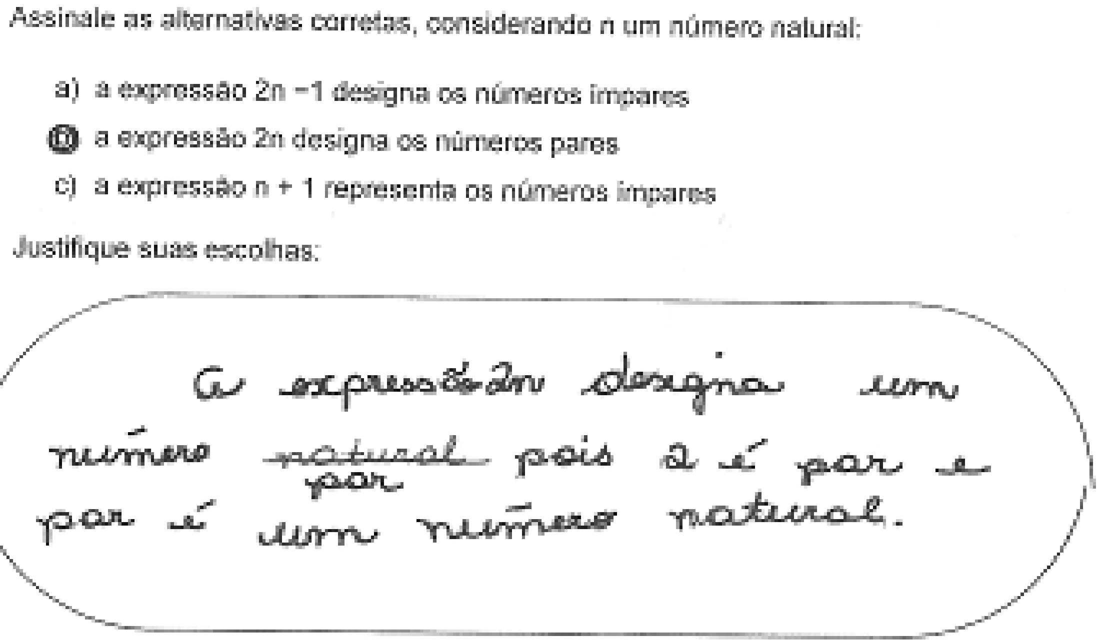
$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ \cline{2-2} -4\ \ & 27 \\ \cline{1-1} 14 & \\ -14 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 2 \\ \hline 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +4 \\ \hline 7 \end{array}$$

R: O número é 7.

Na questão 5, Isabel assinalou apenas uma das alternativas corretas mas não soube justificar sua opção. Percebemos que a aluna não compreendeu a letra como generalizadora de modelos.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

a) a expressão 2n −1 designa os números ímpares

[✓ b)] a expressão 2n designa os números pares

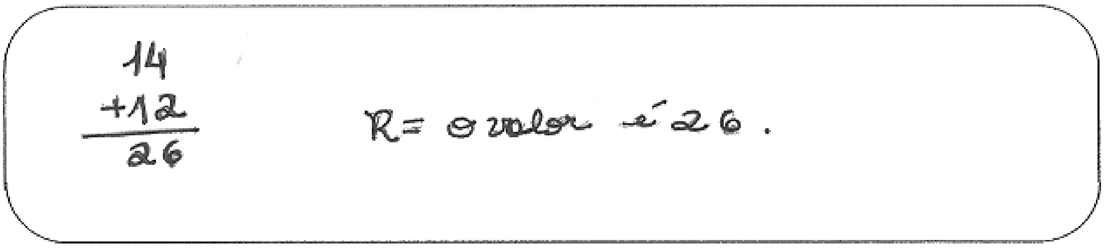
c) a expressão n + 1 representa os números ímpares

Justifique suas escolhas:

a expressão 2n designa um número ~~natural~~ par pois 2 é par e par é um número natural.

Na questão 6, Isabel entende o papel funcional da letra e utiliza algoritmo para resolver o exercício. Acerta o item a e confunde-se no item b, num equívoco envolvendo o cálculo de 3x. Observe-se.

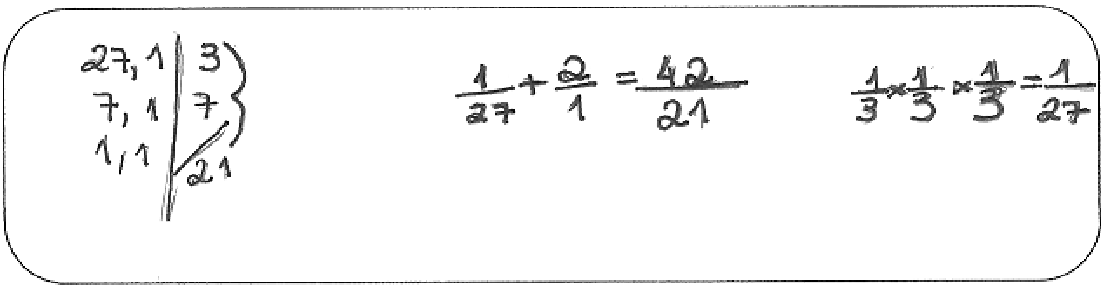
a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?



$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

R= o valor é 26.

b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?



$$\begin{array}{r|l} 27,1 & 3 \\ 7,1 & 7 \\ 1,1 & 21 \end{array}$$

$$\frac{1}{27}+\frac{2}{1}=\frac{42}{21}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

Elaboramos um quadro com os acertos e erros de Isabel.

<table>
<tr><td colspan="16">Resumo dos acertos e erros de Isabel</td></tr>
<tr><td>Atividade 1</td><td colspan="15">Operações</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Sequência 1</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟥</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 2</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟥</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 3</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 4</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 5</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 6</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 7</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 8</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 9</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 10</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 11</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td></tr>
<tr><td>Sequência 12</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟥</td><td>🟥</td><td>🟥</td><td>🟥</td><td>🟥</td></tr>
<tr><td colspan="16"></td></tr>
<tr><td>Atividade 2</td><td colspan="8">Perguntas</td><td></td><td colspan="6" rowspan="2">Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?</td></tr>
<tr><td>Questão 1</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td><td>f</td><td>g</td><td>h</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟩</td><td></td><td colspan="6">Às vezes</td></tr>
<tr><td>Questão 2</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td></td><td>🟩</td><td>🟩</td><td>🟥</td><td>🟩</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6">Às vezes</td></tr>
<tr><td>Questão 3</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td></td><td>🟩</td><td>🟥</td><td>🟥</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6">Sim</td></tr>
<tr><td>Questão 4</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td></td><td>🟥</td><td>🟥</td><td>🟥</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6">Não</td></tr>
<tr><td>Questão 5</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td></td><td>🟥</td><td>🟥</td><td>🟥</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6">Não</td></tr>
<tr><td>Questão 6</td><td>a</td><td>b</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td></td><td>🟥</td><td>🟥</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="6">Não</td></tr>
</table>

Ao término das análises das atividades de Isabel, pudemos perceber que a aluna mobiliza alguns conhecimentos prévios que ajudaram no seu bom desempenho com o cálculo mental, como por exemplo, o domínio da tabuada, o conhecimento do sistema decimal de numeração e um bom repertório aditivo. Foi capaz de efetuar mentalmente os cálculos com os números naturais e com a maioria dos números racionais representados na forma decimal. Mesmo assim, a aluna não sente segurança em utilizar essa habilidade de cálculos nas resoluções sugeridas na segunda atividade. Demonstrou segurança na montagem dos algoritmos para certificar-se dos resultados. E não conseguiu mobilizar seus conhecimentos aritméticos para resolver os problemas que envolvem letras, sinalizando uma compreensão ainda pequena desse tipo de conteúdo.

Continuando nossas análises, passaremos a comentar o desenvolvimento de Laura, ainda aluna do 6º ano.

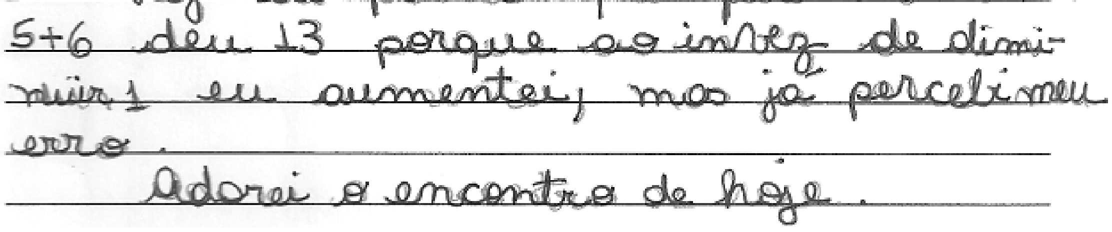
3.5. Laura e seu desempenho

Laura é uma aluna tímida que ficou muito feliz ao ser convidada para participar de nossa pesquisa. Demonstrou estar à vontade com as resoluções sugeridas, mas sua face ficava ruborizada toda vez que era convidada a se colocar no grupo para explicar algum procedimento ou raciocínio. Por isso, algumas falas e colocações da aluna só foram obtidas num momento individual, professora e aluna.

Na primeira atividade, Laura acerta todos os cálculos das sequências 1, 2 e 3, inclusive com os números racionais na forma decimal. Demonstrou desenvoltura nos cálculos e rapidez para fornecer os resultados. Na sequência 4, que trabalha com cálculos do tipo [a + (a + 1)], a aluna errou os cálculos abaixo.

Cálculo solicitado	Sequência 4 Cálculos do tipo a + (a + 1)
50 + 51	**110**
260 + 270	**520**
0,5 + 1,5	**1,1**

Observe-se como Laura percebe e justifica seu equívoco.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

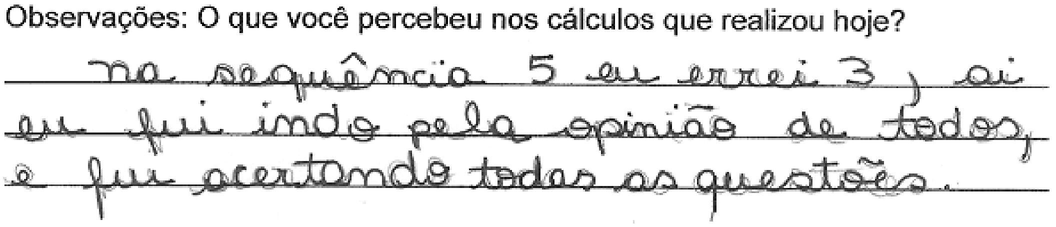
Hoje eu percebi que quando somei
5+6 deu 13 porque ao invez de dimi-
nuir 1 eu aumentei, mas já percebi meu
erro.
Adorei o encontro de hoje.

Seu registro nos permite identificar que, para cálculos do tipo [a + (a + 1)], a aluna utiliza a estratégia de calcular mentalmente a adição de números iguais e, depois, fazer a compensação.

Na sequência 5, que trabalha com cálculos do tipo (2 X a), Laura confunde-se ao calcular o dobro de números racionais na forma decimal. Como mostrado abaixo.

Cálculo solicitado	Sequência 5 Cálculos do tipo 2 X a
2 X 0,6	**0,12**
2 X 0,7	**0,14**
2 X 0,9	**0,18**

Ao término dessa sequência, na conferência dos resultados, outros alunos tinham respostas iguais às de Laura. Surgiu, então, a discussão no grupo de como resolver esses cálculos. Guilherme disse: "ora, como 2 vezes 6 é igual a 12, então pensei que 2 x 0,6 também fosse igual a 12, só que com uma vírgula". Isabel contribuiu: "pense em dinheiro; 0,6 é a mesma coisa que sessenta centavos. Logo, o dobro só pode ser um real e vinte centavos". Após esses comentários, Laura modificou sua maneira de efetuar cálculos mentalmente com os números racionais na forma de decimais e não errou mais as respostas dos próximos produtos. A influência que Laura sofreu do grupo aparece claramente em seu comentário abaixo.



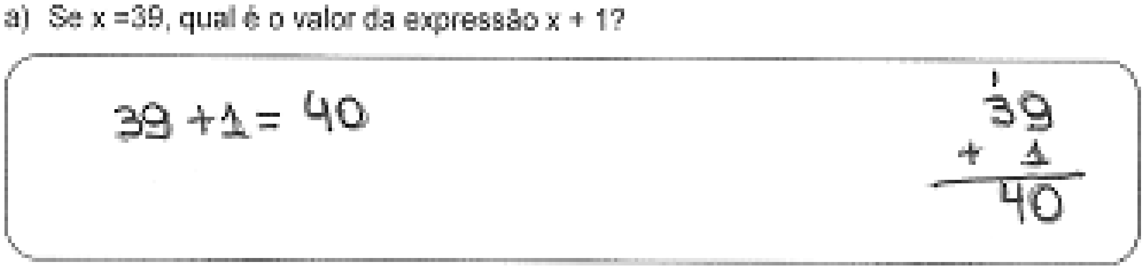
Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

na sequência 5 eu errei 3 , ai eu fui indo pela opinião de todos, e fui acertando todas as questões.

Por fim, Laura acabou acertando todos os cálculos seguintes das sequências 6 a 12, inclusive os que envolvem números racionais na forma decimal.

Na segunda atividade, Laura realizou todos os exercícios propostos registrando o algoritmo no espaço reservado à resolução. Não temos como afirmar que a aluna não mobilizou seus conhecimentos e habilidades com o cálculo mental.

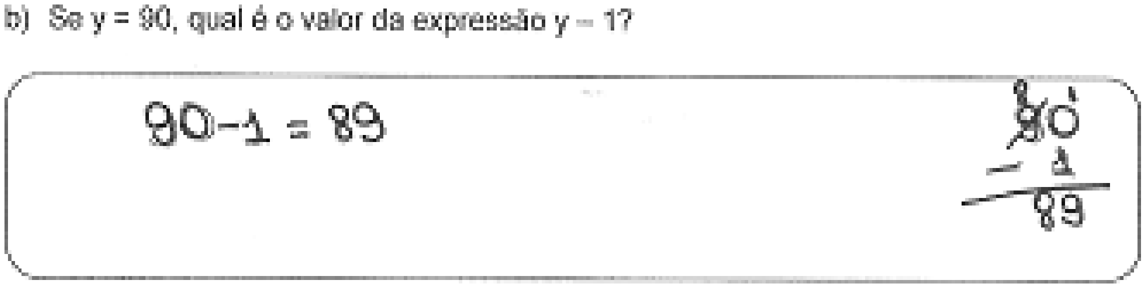
Fica a dúvida de que o algoritmo seja uma maneira de explicitar o raciocínio utilizado, conforme orientação recebida no início da atividade. Ou que o uso do algoritmo forneça segurança nas resoluções, uma vez que nem todos os alunos sentem confiança nos cálculos efetuados mentalmente. Em uma explanação das resoluções de Laura, podemos destacar que, na questão 1, ela soube atribuir o valor numérico à letra e efetuou os cálculos corretamente. Note-se que, nos exemplos abaixo, ela indica a operação que irá realizar e monta “a continha” ao lado. Realiza os procedimentos que aprendeu para resolver esses algoritmos, como emprestar a dezena do algarismo vizinho (item f) ou eliminar as vírgulas do dividendo e do divisor para obter o quociente (item g). Não conseguimos perceber se existe consciência no manuseio desses procedimentos ou se são puramente mecânicos.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

$39 + 1 = 40$

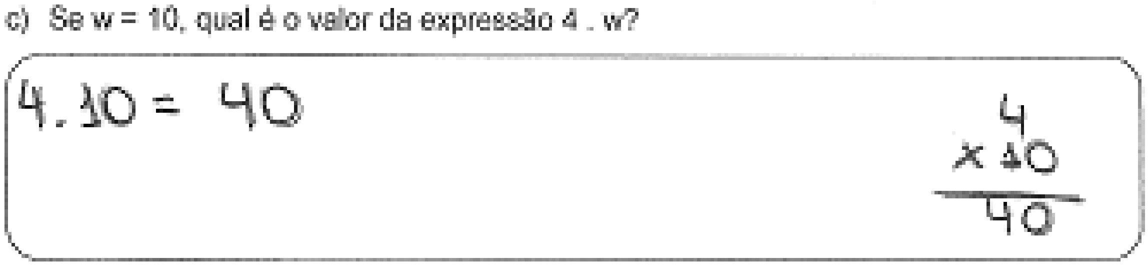
$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 39 \\ +\ \ 1 \\ \hline 40 \end{array}$$



b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

$90 - 1 = 89$

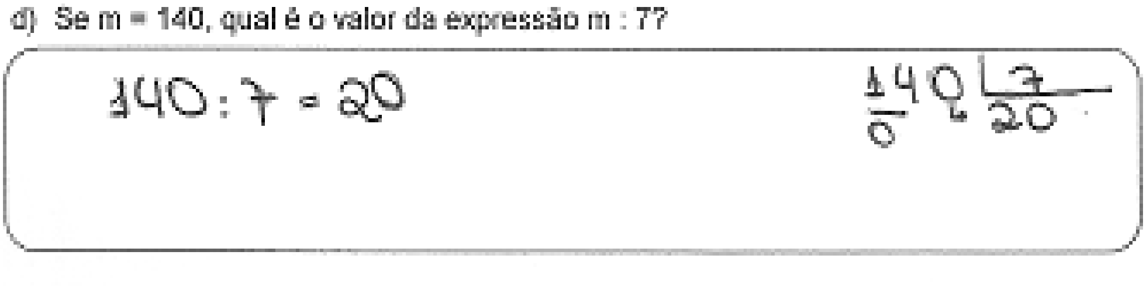
$$\begin{array}{r} \overset{8}{\cancel{9}}{}^{1}0 \\ -\ \ 1 \\ \hline 89 \end{array}$$



c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

$4 . 10 = 40$

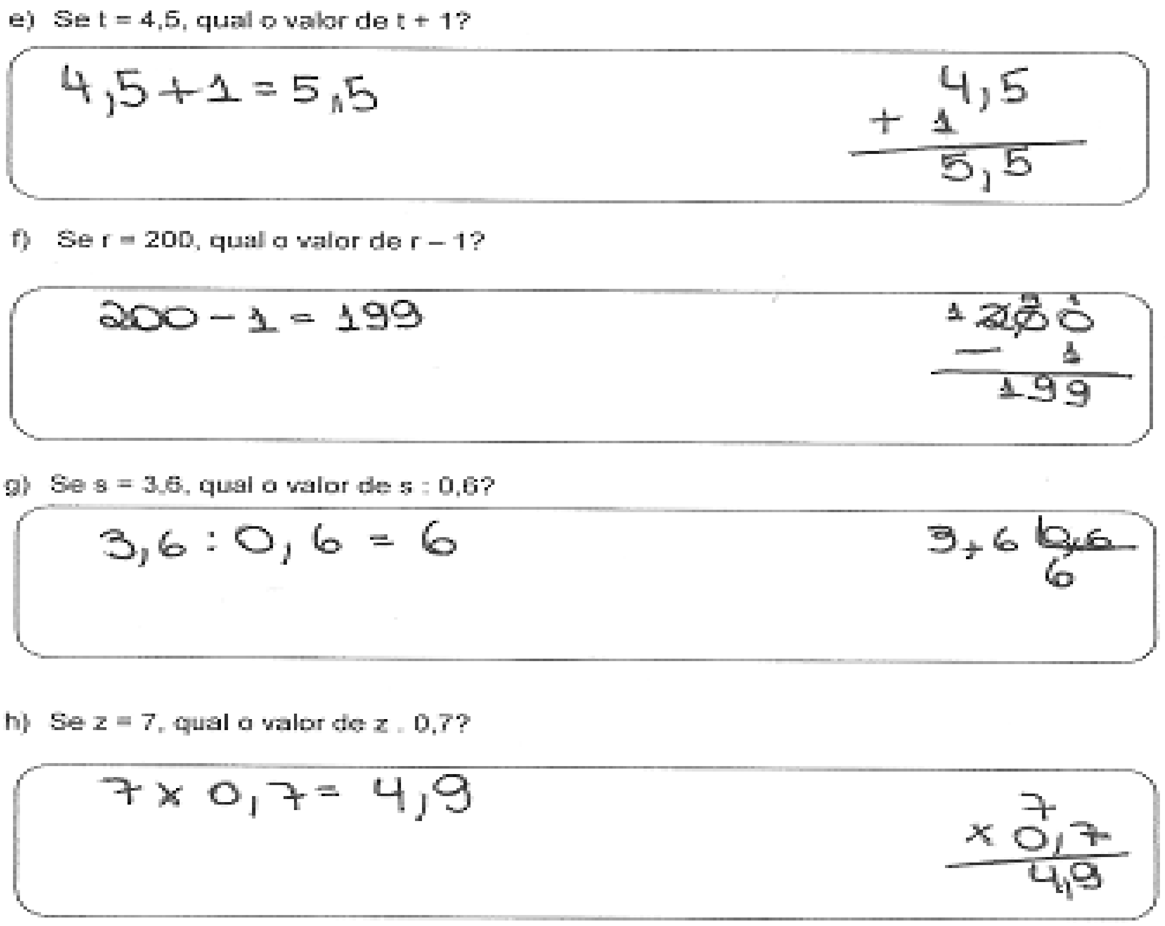
$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 10 \\ \hline 40 \end{array}$$



d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

$140 : 7 = 20$

$$\begin{array}{r|l} 140 & 7 \\ \cline{2-2} 0\ \ 0 & 20 \end{array}$$



e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

4,5 + 1 = 5,5

4,5
\+ 1
5,5

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

200 − 1 = 199

200
− 1
199

g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

3,6 : 0,6 = 6

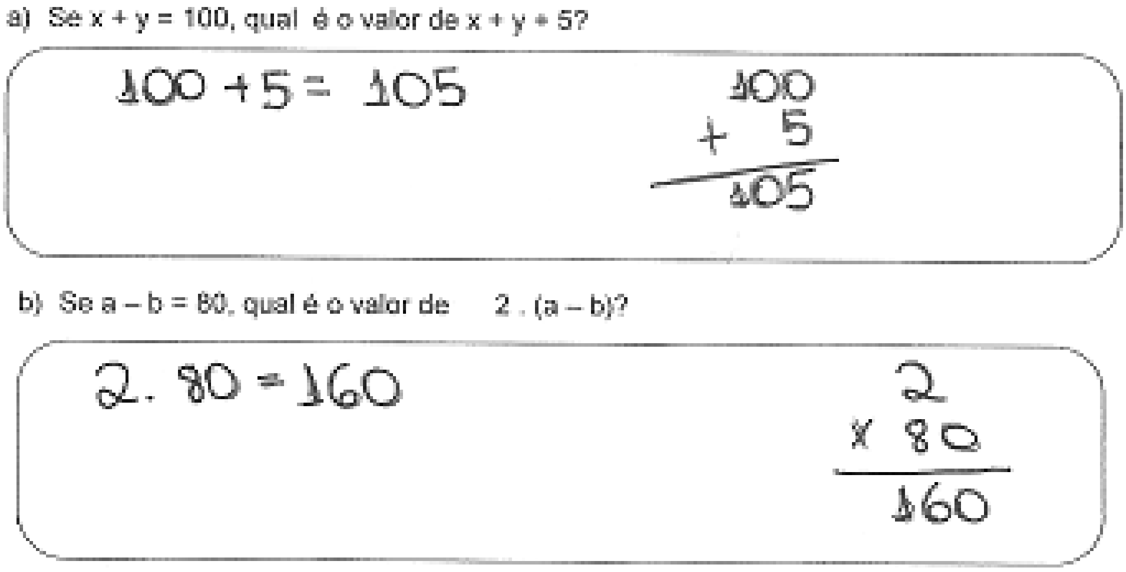
3,6 | 0,6
6

h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

7 x 0,7 = 4,9

7
x 0,7
4,9

Na questão 2, Laura acerta ao realizar as substituições das letras pelos valores numéricos fornecidos e registra uma dúvida no item c proposto. Como ilustrado abaixo.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

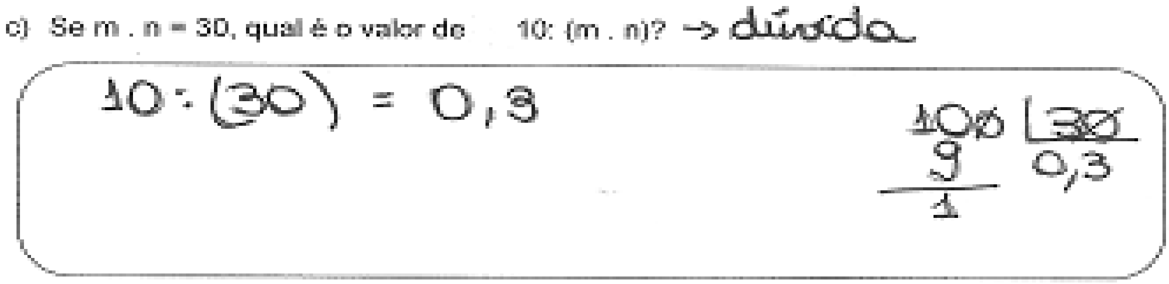
100 + 5 = 105

100
\+ 5
105

b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

2 . 80 = 160

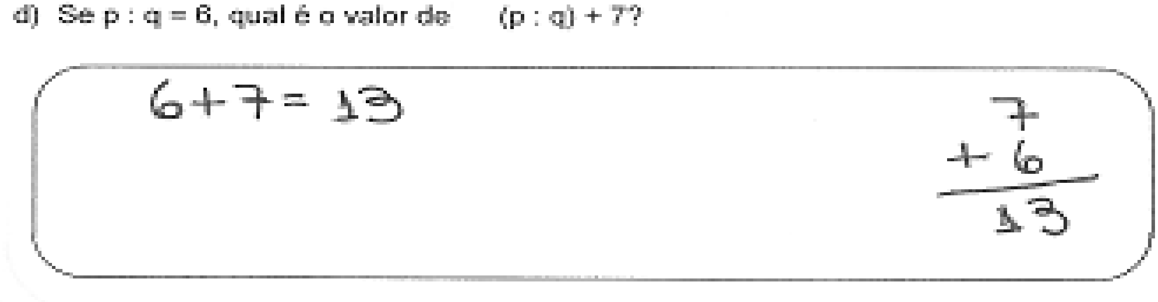
2
x 80
160



c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)? -> dúvida

10 : (30) = 0,3

100 | 30
9 0,3
1



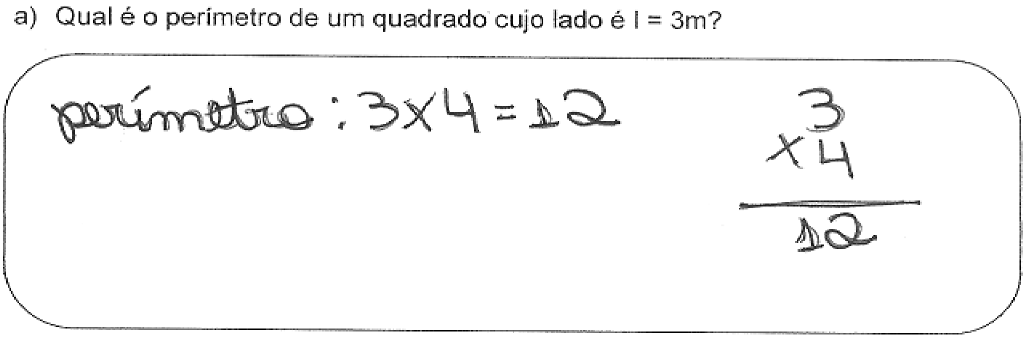
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

6+7= 13

7
+ 6
13

Numa conversa pessoal com a professora, questionada a respeito da dúvida registrada na resolução do item c, ela afirma que não poderia existir resto. “O que fazer com aquele 1? Sempre acho que errei a conta quando não dá exato”. Laura não havia percebido que o resultado de seu cálculo estava correto. Vale aqui comentar que a aluna ainda não conhecia a dízima periódica.

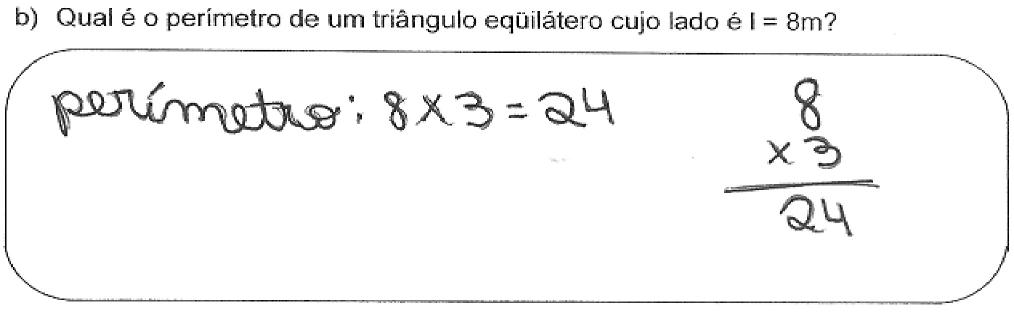
Na questão 3, Laura acerta os exercícios de perímetro e segue a mesma linha de resolução anterior: sinaliza o cálculo e monta o algoritmo ao lado. Não resolve o item c, referente ao cálculo de área, por desconhecer o conceito.



a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

perímetro : 3x4 = 12

3
x4
12

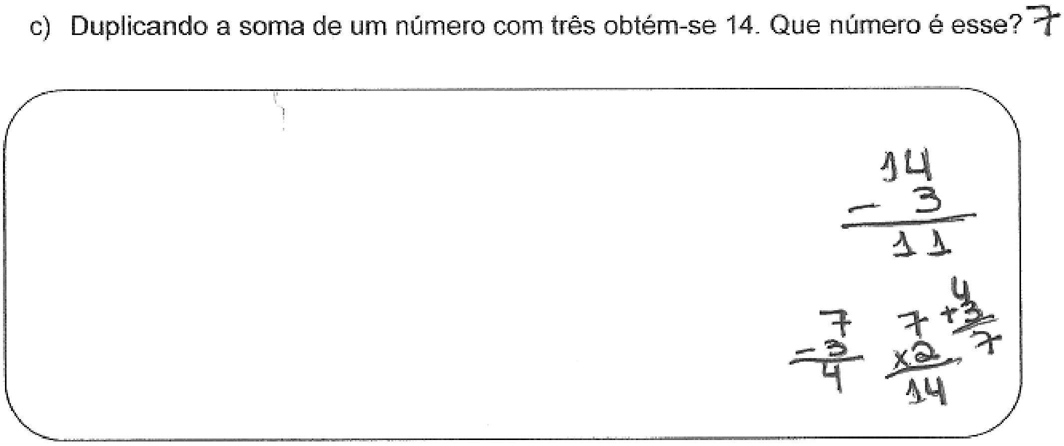


b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

perímetro: 8x3 = 24

8
x3
24

Na questão 4, Laura deixa os itens a e b em branco e escreve que não conseguiu resolver porque não os compreendeu. Esboçou uma tentativa de solucionar o item c, chegou próximo na resposta correta, mas não a percebeu e forneceu, ao lado da pergunta, uma resposta equivocada. Observe-se, na sequência, sua tentativa.

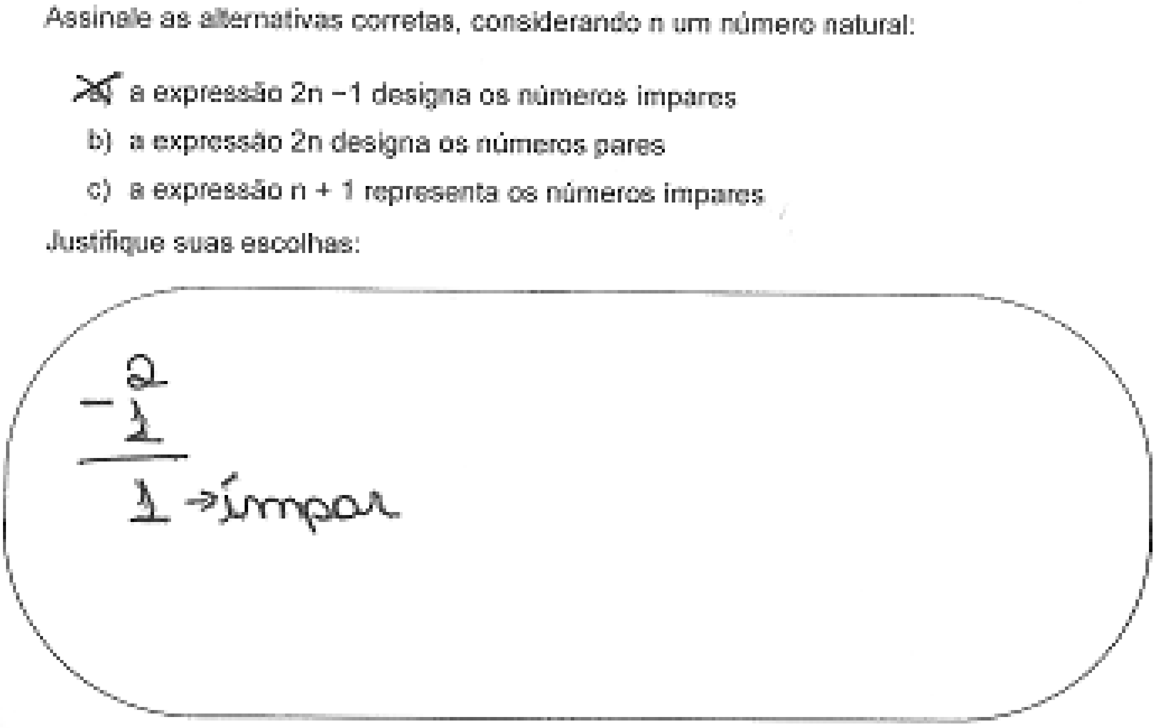


c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse? 7

$\begin{array}{r} 14 \\ -\ 3 \\ \hline 11 \end{array}$

$\begin{array}{r} 7 \\ -3 \\ \hline 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7 \\ \times 2 \\ \hline 14 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \\ +3 \\ \hline 7 \end{array}$

Na questão 5, percebemos que Laura não reconhece o papel da letra como generalizadora de modelos aritméticos e fornece uma resposta sem compreender muito bem a questão. Observe-se.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

[✓ a)] a expressão 2n −1 designa os números impares

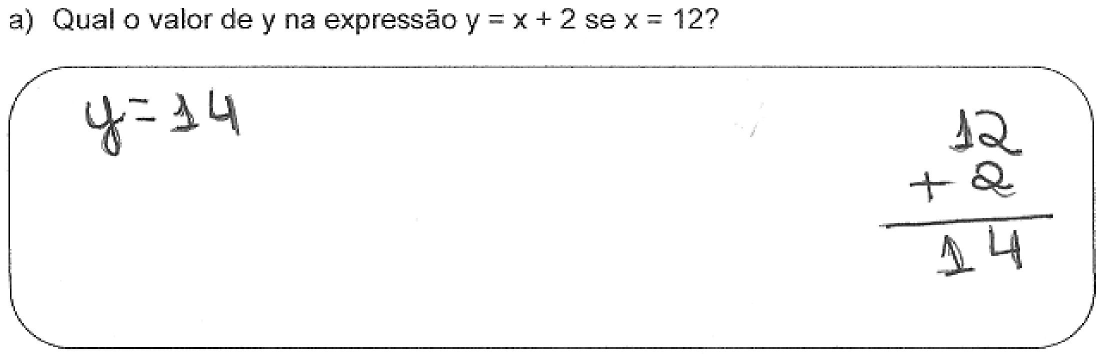
b) a expressão 2n designa os números pares

c) a expressão n + 1 representa os números impares

Justifique suas escolhas:

$\begin{array}{r} 2 \\ -1 \\ \hline 1 \end{array}$ → ímpar

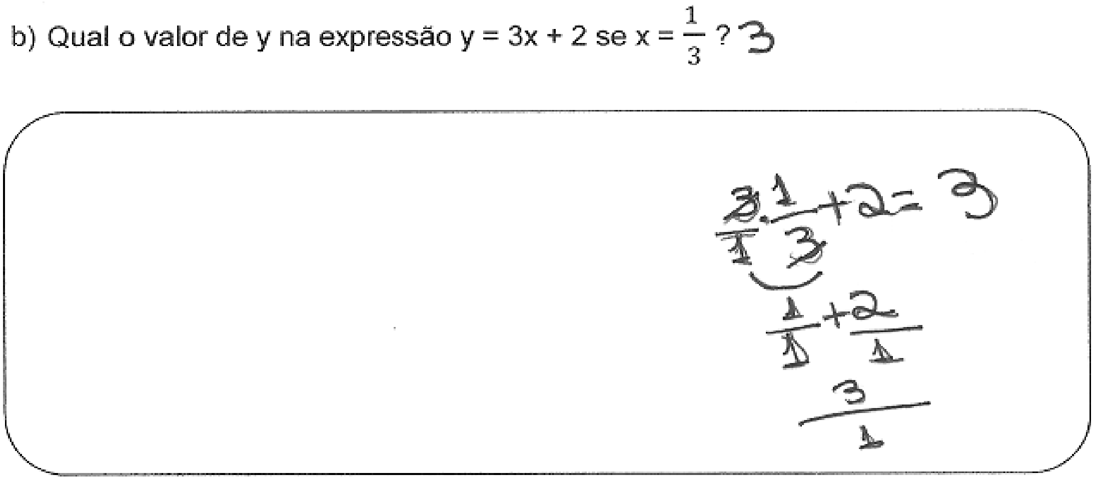
Na questão 6, Laura reconhece o papel funcional da letra e resolve corretamente seus cálculos, acertando o exercício conforme registro abaixo.



a) Qual o valor de y na expressão $y = x + 2$ se $x = 12$?

$y = 14$

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 2 \\ \hline 14 \end{array}$$



b) Qual o valor de y na expressão $y = 3x + 2$ se $x = \frac{1}{3}$? 3

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{1}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}+2=3$$

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{1}$$

$$\frac{3}{1}$$

Ao fim das análises, elaboramos um quadro com o resumo dos acertos e erros de Laura a fim de visualizarmos seu desempenho.

Resumo dos acertos e erros de Laura															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩		Talvez
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟩	🟩						Talvez
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟥							Talvez
Questão 4	a	b	c							
	🟦	🟦	🟥							Talvez
Questão 5	a	b	c							
	🟥	🟥	🟥							Talvez
Questão 6	a	b								
	🟩	🟩								Talvez

Percebemos que Laura obteve um bom resultado nos cálculos efetuados mentalmente, tanto com os números naturais como com os números racionais na forma decimal. Identificamos alguns conhecimentos prévios que Laura mobilizou para os cálculos, como: domínio da tabuada, repertório aditivo de dois números iguais, entre outros. Mas sabemos que, além dos conhecimentos prévios identificados, ela sofreu influência dos colegas na realização desses cálculos, o que acabou alterando sua maneira de calcular produtos com números racionais na forma de decimais ao longo das atividades. Percebemos, também, que apesar do bom desempenho com o cálculo mental, a aluna sempre fez questão de registrar o algoritmo ao lado. Quem sabe para certificar-se das operações, numa busca por maior segurança. Quem sabe para deixar claro para a professora todo o seu raciocínio.

Outro fato observado foi que a aluna nem sempre conseguiu mobilizar seus conhecimentos prévios de cálculos para resolver questões que envolvem letras. Em situações de substituição da letra por um valor numérico, Laura não teve dificuldades. Mas não soube resolver situações em que a letra assume o papel de incógnita ou nas quais exerce papel de generalizar modelos.

Passaremos, agora, a analisar os três últimos alunos de 6º ano, todos classificados como alunos com dificuldades em Matemática, segundo critérios anteriormente descritos.

3.6. Valéria e seu desempenho

Valéria participou das atividades propostas com boa vontade e disposição. Tem um perfil tímido e quase nunca faz perguntas ou questionamentos. Conhece as suas dificuldades e tenta lidar com elas da melhor maneira que pode. Sempre muito dedicada às tarefas e às anotações pessoais, a aluna aceitou participar de nossos encontros com a mesma responsabilidade com que encara seus estudos.

Na primeira atividade, quando resolvia as sequências 1 e 2, Valéria demonstrou confusão com sucessores dos números terminados em 9 e nos cálculos com os números racionais na forma decimal. Observe-se a relação dos erros de Valéria nessas sequências.

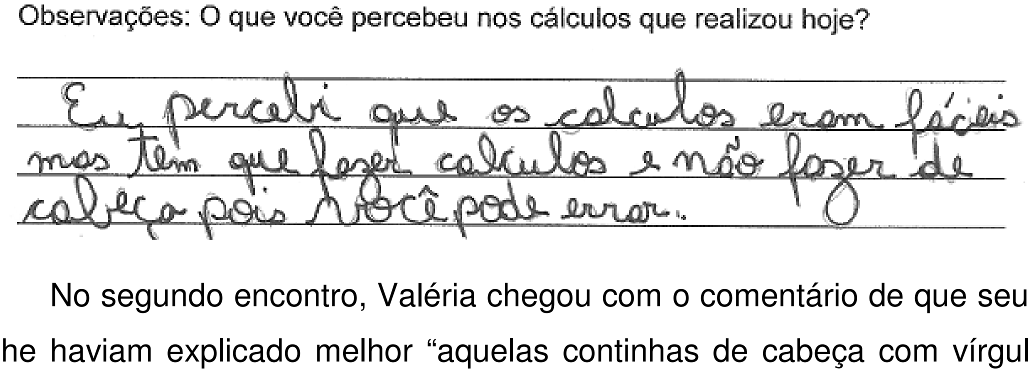
Cálculo solicitado	Sequência 1 Cálculos do tipo a + 1	Sequência 2 Cálculos do tipo a – 1
999 + 1	**200**	
9 999 + 1	**2**	
4 490 – 1		**4 480**
10 000 – 1		**9 000,9**
1,1 + 1	**1,2**	
3,2 + 1	**3,3**	
24,7 + 1	**24,8**	
99,3 + 1	**99,4**	
124,5 + 1	**124,6**	
1,1 – 1		**1**
4,3 – 1		**4,2**
14,8 – 1		**14,7**
88,4 – 1		**88,3**
238,5 – 1		**238,4**

Como podemos observar, há um padrão nas respostas acima apresentadas. A aluna adiciona 1 sempre ao último algarismo da primeira parcela, ignorando a presença da a virgula na escrita do número racional na forma decimal. O procedimento que ela utiliza para realizar os cálculos mentais dos números racionais na representação decimal é uma extensão do que ela fazia no caso dos números naturais.

Nas sequências 3 e 4, Valéria apresentou os seguintes resultados incorretos:

Cálculo solicitado	Sequência 3 Cálculos do tipo a + a	Sequência 4 Cálculos do tipo a + (a + 1)
15 + 15	**20**	
150 + 150	**200**	
120 + 121		**251**
260 + 261		Deixou em branco
0,5 + 0,5	**0,10**	
0,9 + 0,9	**0,18**	
0,15 + 0,15	**0,20**	
0,5 + 1,5		**0,10**
0,9 + 1,9		**1,18**

A aluna continua operando os números racionais na representação decimal como uma continuação daqueles procedimentos que ela já estava acostumada a fazer nos cálculos dos números naturais. Repare que, diferente de outros alunos que sofreram influência de seus colegas na ocasião da troca de resultados, Valéria demorou um tempo maior para perceber o motivo pelo qual suas operações continuavam a dar errado. Ao fim, ela atribui o grande número de erros ao fato de ter realizado cálculos mentalmente. Leia-se seu comentário.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi que os calculos eram fáceis
mas tem que fazer calculos e não fazer de
cabeça pois você pode errar.

No segundo encontro, Valéria chegou com o comentário de que seus colegas já lhe haviam explicado melhor “aquelas continhas de cabeça com vírgula” e que, agora, ela já tinha entendido como fazer. Nas próximas sequências, a aluna diminuiu bastante a quantidade de erros e até parecia mais segura nos cálculos, demorando menos tempo que antes para fornecer as respostas. Na sequência 5, que solicitava o cálculo mental do dobro de alguns valores, Valéria ficou com dúvidas na hora de preencher o produto 2 X 0,4. Pensou alguns instantes e arriscou 0,8, com aparente insegurança. Depois, continuou:

Cálculo solicitado	Sequência 5 Cálculos do tipo 2 X a
2 X 0,6	**0,12**
2 X 0,7	**0,14**
2 X 0,9	**0,18**

Era nítida sua dúvida em anotar esses valores. Chegou a rasurar o valor 0,12 trocando-o por 1,2. Depois, voltou atrás e manteve o primeiro valor anotado.

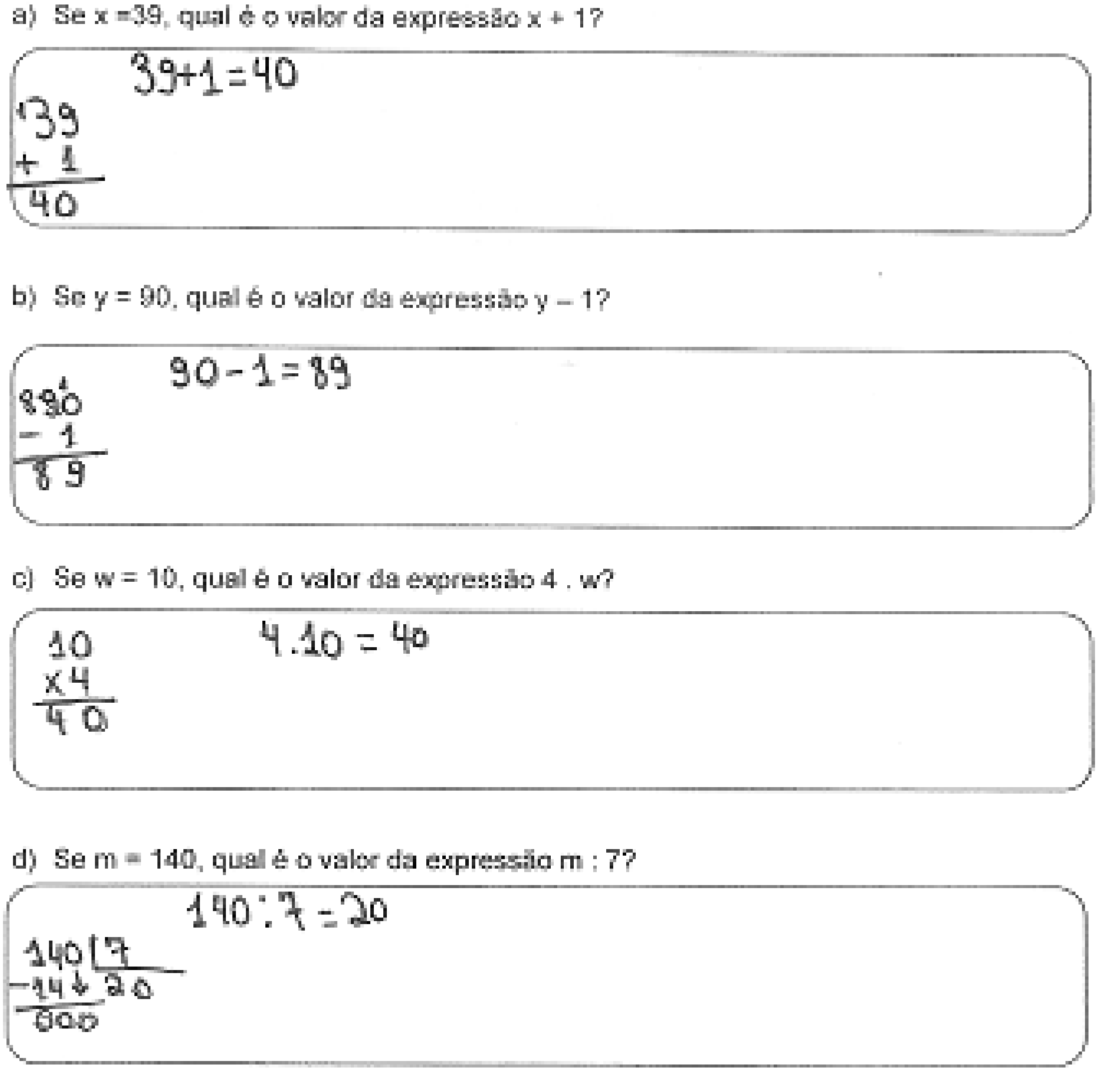
Nas sequências 6 a 10, estava um pouco menos insegura e acertou todos os valores. Vale a pena comentar que a aluna ainda está presa no procedimento de contagem com os dedos para efetuar cálculos com a tabuada. Para resolver, por exemplo, 4 X 6, ela conta de seis em seis até marcar quatro dedos na mão direita.

Nas sequências 11 e 12, Valéria apresentou os seguintes resultados incorretos:

Cálculo solicitado	Sequência 11 Cálculos do tipo 6 X a	Sequência 12 Cálculos do tipo de a : b
6 X 4	**18**	
6 X 40	**180**	
6 X 0,4	**1,8**	
140 : 70		**20**
210 : 70		**30**
350 : 70		**50**
490 : 70		**70**
560 : 70		**80**

No caso da sequência 11, percebemos o equívoco na tabuada. E no caso seguinte, uma aparente confusão com os zeros dos números envolvidos. Ao término dessa etapa, referindo-se aos resultados das divisões efetuadas, Valéria comentou: "ainda estou com dúvidas nessas operações. Não entendi os resultados".

Na segunda atividade, durante o tempo em que Valéria resolveu as questões propostas, disse espontaneamente: "minha mãe falou pra eu fazer sempre a conta porque de cabeça eu acabo errando". Seu comentário explica o fato de todas as suas resoluções estarem sempre acompanhadas do algoritmo. Na questão 1, por exemplo, Valéria não tem problemas em reconhecer o papel da letra na expressão e em substituí-la corretamente pelo valor numérico informado. Como mostramos a seguir.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

39+1=40

$$\begin{array}{r} 39 \\ +\ 1 \\ \hline 40 \end{array}$$

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

90-1=89

$$\begin{array}{r} 890 \\ -\ 1 \\ \hline 89 \end{array}$$

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

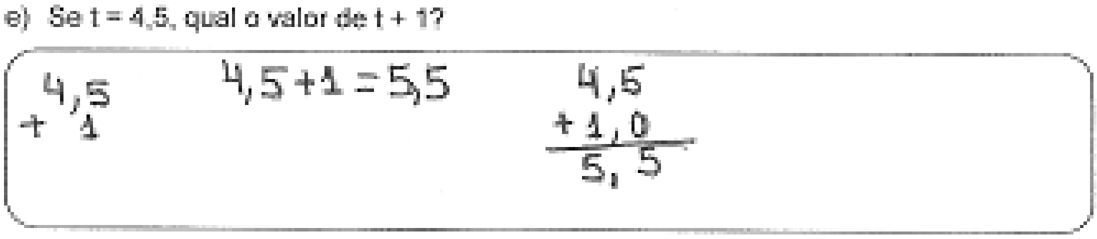
4.10 = 40

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 4 \\ \hline 40 \end{array}$$

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

140:7=20

$$\begin{array}{r|l} 140 & 7 \\ \cline{2-2} -14\downarrow & 20 \\ \hline 000 & \end{array}$$

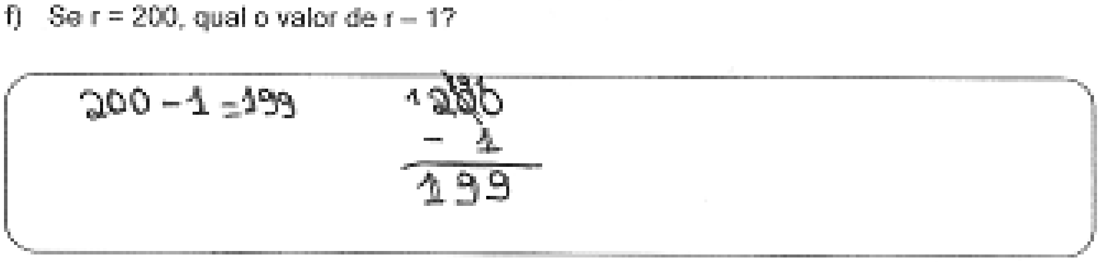


e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

4,5
\+ 1

4,5+1=5,5

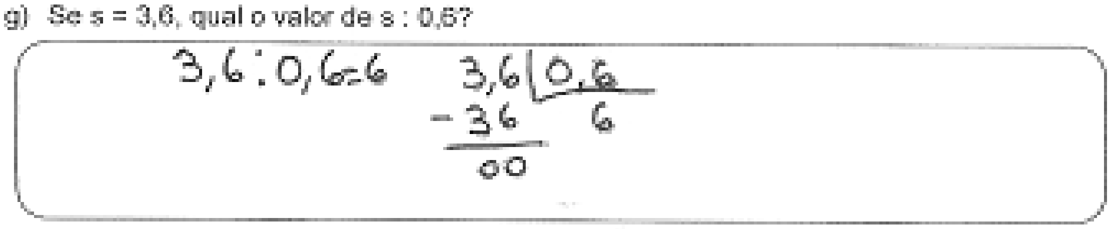
4,5
\+ 1,0
5,5



f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

200 – 1 = 199

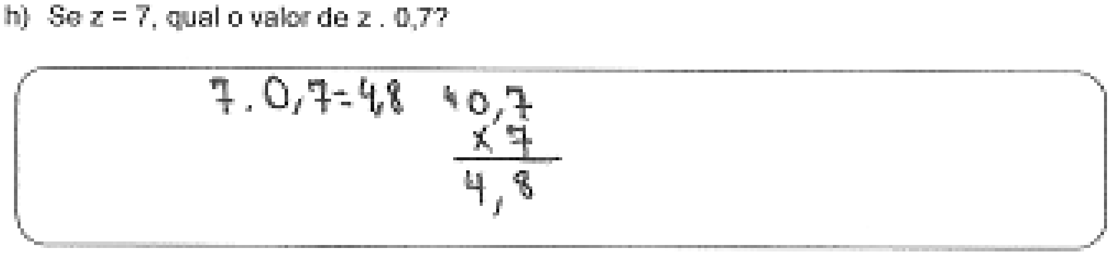
200
– 1
199



g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

3,6 : 0,6 = 6

3,6 | 0,6
–36   6
00



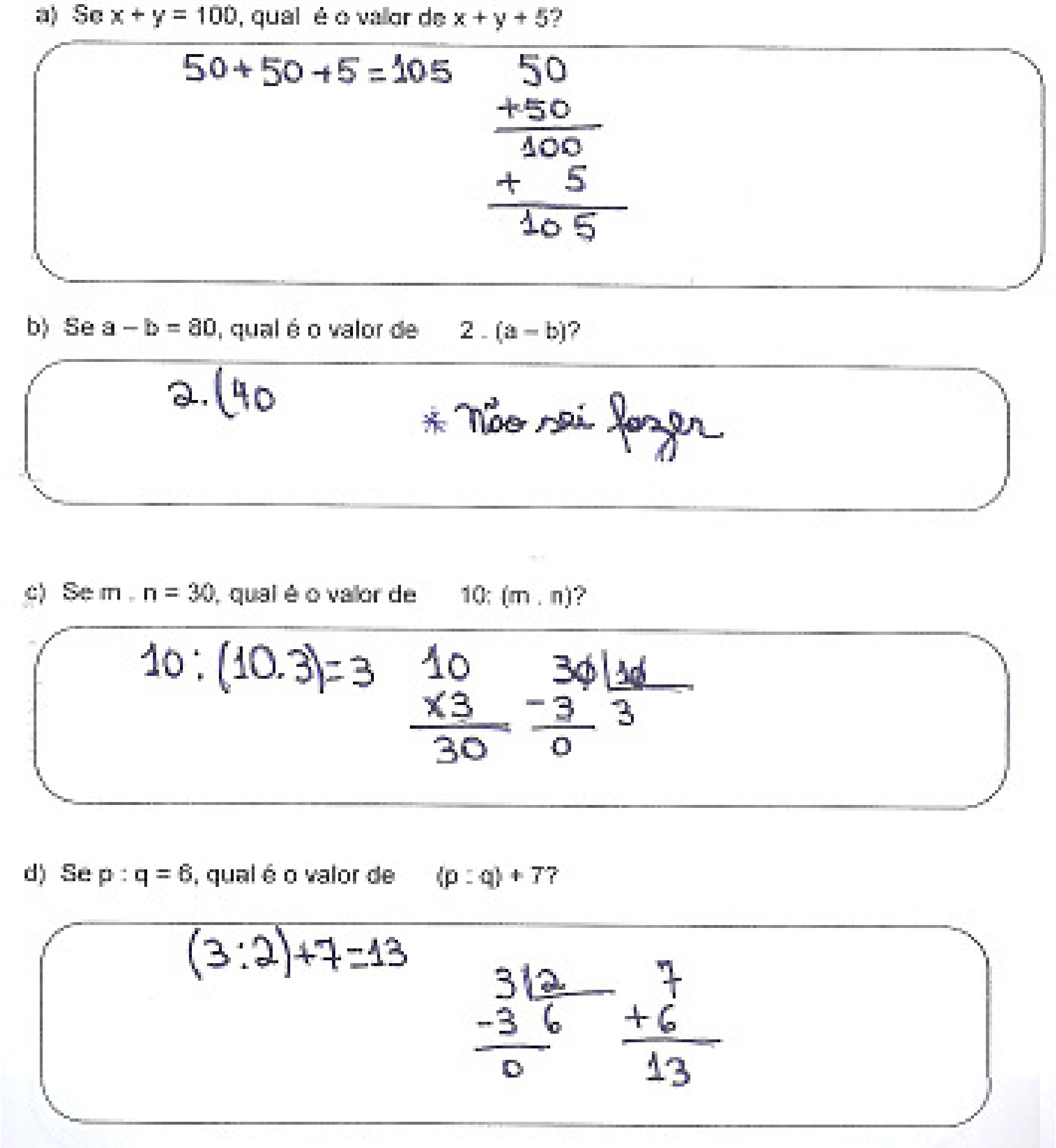
h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

7 . 0,7 = 4,8

0,7
x 7
4,8

Na questão 2, nos deparamos com uma situação interessante. Valéria fez uma interpretação diferenciada para o papel das letras na expressão. Conhecendo o valor da adição de x e y, ela atribuiu prováveis valores a cada uma das letras e realizou a operação. Observem-se sua resolução e um comentário feito pela aluna no momento de conversa com a professora.

“Como x + y vale 100, então é porque x = 50 e y = 50. Daí é só substituir e resolver a conta. O resultado é 105. Agora, na subtração não sei fazer” (comentário de Valéria).



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

50+50+5=105

50
+50
100
+ 5
105

b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

2.(40

* Não sei fazer

c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

10:(10.3)=3

10
x3
30

30|10
-3 3
0

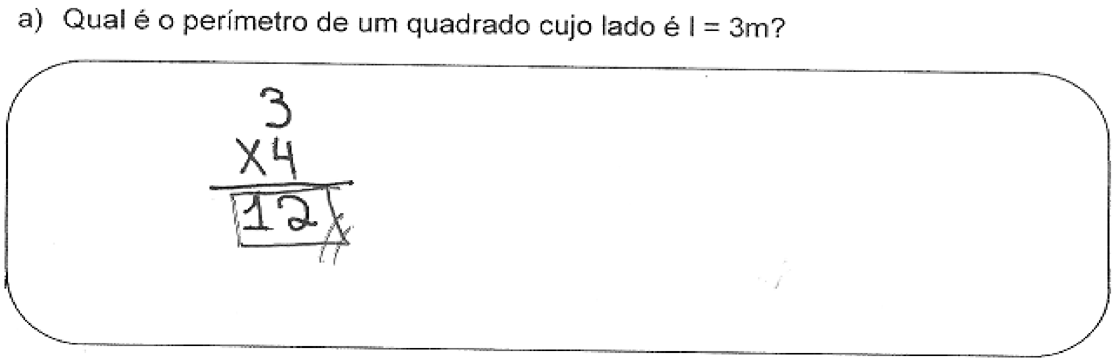
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

(3:2)+7=13

3|2
-3 6
0

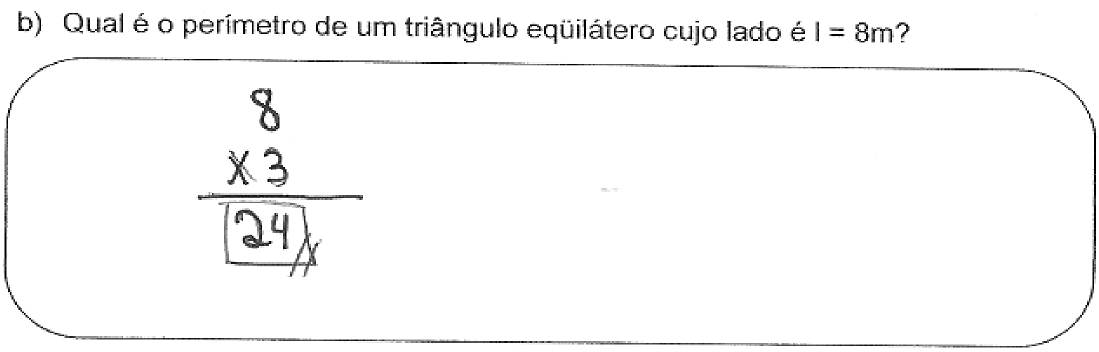
7
+6
13

Na questão 3, a aluna resolve os exercícios de perímetro fazendo uso de um algoritmo de multiplicação. E não consegue fazer o exercício de área porque, como todos os seus colegas de 6º ano, ainda não conhecia o conceito.



a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

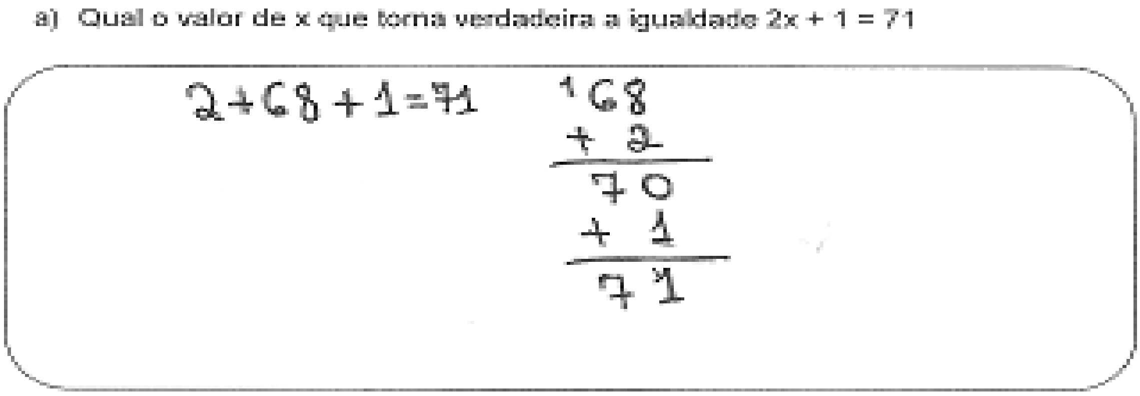
$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline \boxed{12} \end{array}$$



b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline \boxed{24} \end{array}$$

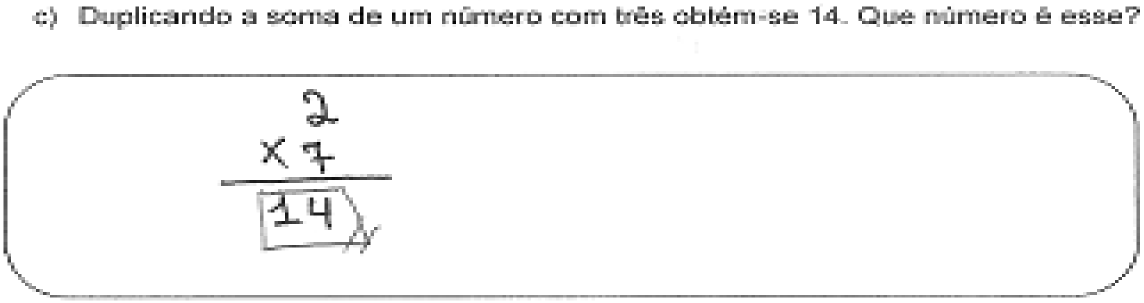
Na questão 4, Valéria não reconhece o papel de incógnita nas situações propostas e não mobiliza corretamente seus conhecimentos aritméticos para resolver os problemas. Não resolveu o item b e disse que não sabia fazer. Observem-se seus registros.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

$2+68+1=71$

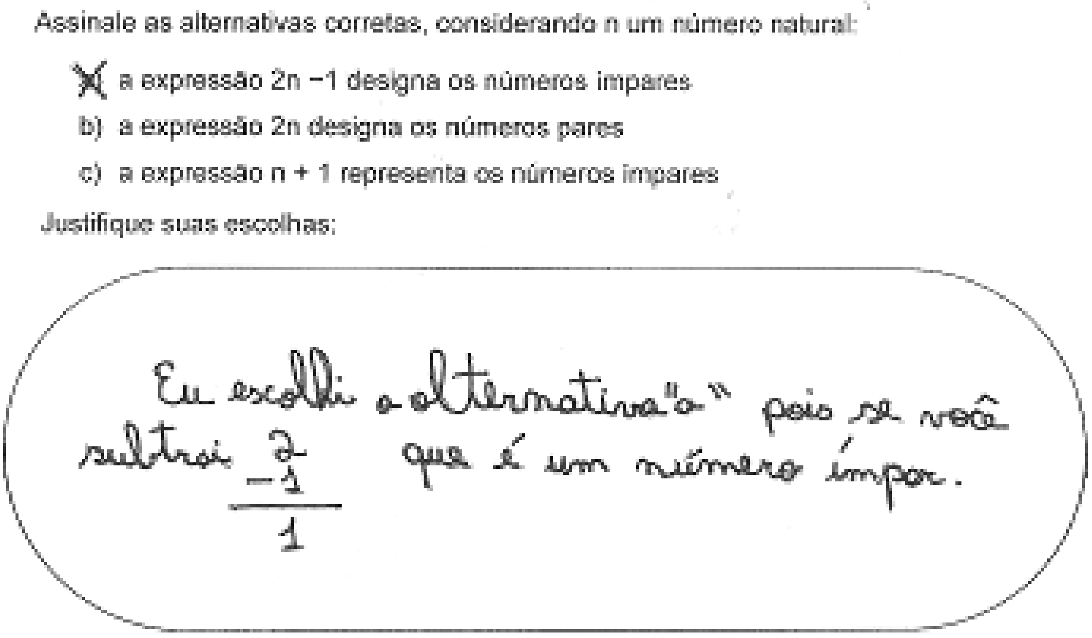
$$\begin{array}{r} {}^{1}68 \\ +\ 2 \\ \hline 70 \\ +\ 1 \\ \hline 71 \end{array}$$



c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 7 \\ \hline \boxed{14} \end{array}$$

A questão 5 também foi resolvida sem a devida compreensão da situação. Valéria assinala a expressão 2n – 1 como a correta e explica a razão da escolha, conforme segue.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

☒ a expressão 2n −1 designa os números impares

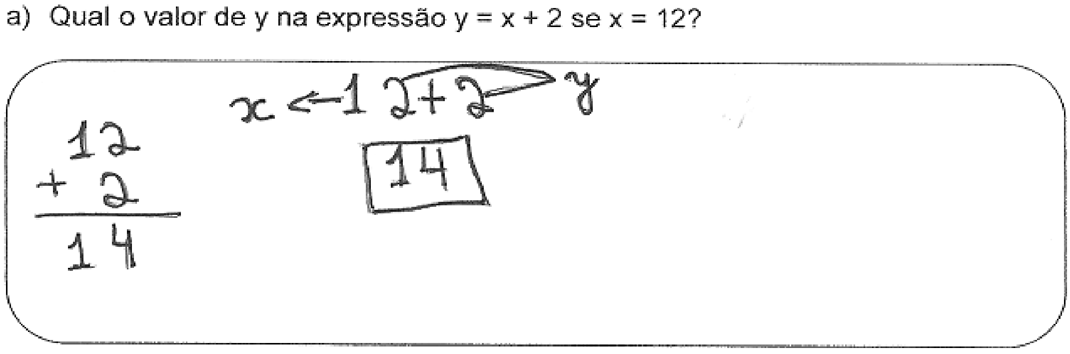
b) a expressão 2n designa os números pares

c) a expressão n + 1 representa os números impares

Justifique suas escolhas:

Eu escolhi a alternativa "a" pois se você subtrai $\begin{array}{r} 2 \\ -1 \\ \hline 1 \end{array}$ que é um número ímpar.

Por fim, Valéria acerta a questão 6, demonstrando reconhecer o valor funcional da letra nas situações propostas. Suas resoluções seguem abaixo.

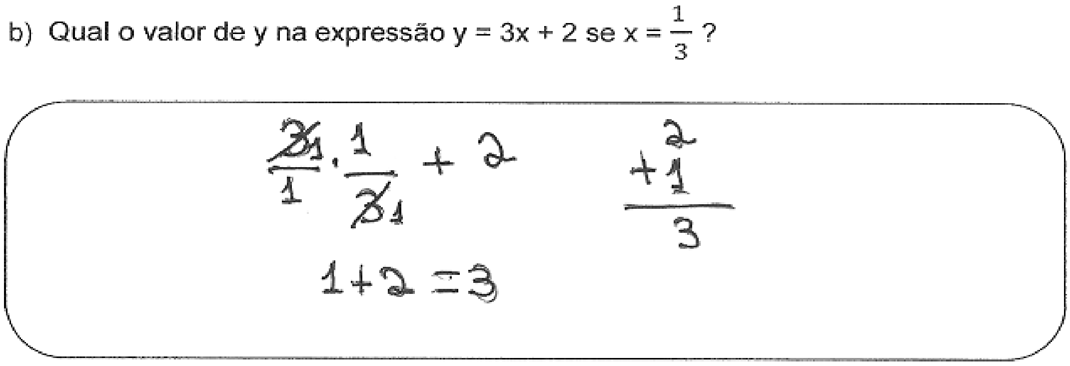


a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 2 \\ \hline 14 \end{array}$

$x \leftarrow 12 + 2 \rightarrow y$

$\boxed{14}$



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

$\frac{\cancel{3}1}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}1} + 2$

$\begin{array}{r} 2 \\ +1 \\ \hline 3 \end{array}$

$1+2=3$

Ao término das análises das atividades de Valéria, elaboramos um quadro com o resumo de seus acertos e erros para visualizarmos seu desempenho.

Resumo dos acertos e erros de Valéria															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟥	🟥	🟩	🟥	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟥	🟩	🟥	🟥	🟥	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?					
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h							
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥		Não					
Questão 2	a	b	c	d											
	🟩	🟦	🟥	🟩						Não					
Questão 3	a	b	c												
	🟩	🟩	🟦							Não					
Questão 4	a	b	c												
	🟥	🟦	🟥							Não					
Questão 5	a	b	c												
	🟥	🟥	🟥							Não					
Questão 6	a	b													
	🟩	🟩								Não					

Podemos perceber que Valéria demonstrou dificuldades em operar os cálculos mentalmente. Não tinha o domínio da tabuada nem dos sucessores dos números terminados com o algarismo 9. Precisava de um tempo maior para fornecer os resultados e utilizava os dedos das mãos na realização dos cálculos. Também não confiava nos resultados dos cálculos mentais, preferindo sempre usar o algoritmo. Alertada, inclusive pela mãe, de que sempre seria melhor fazer “a continha” para não errar, preferiu não usar seus conhecimentos e habilidades de cálculo mental nas resoluções seguintes. Também não utilizou seus conhecimentos aritméticos na resolução de problemas algébricos envolvendo letras.

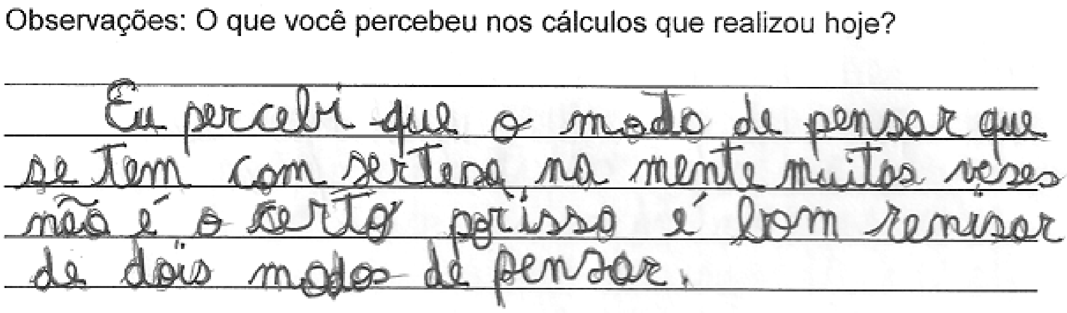
Passamos, agora, para a análise do próximo aluno de 6º ano.

3.7. Guilherme e seu desempenho

Guilherme começou a primeira atividade certo de que acertaria todos os cálculos e chegou a comentar que aquilo seria “moleza”. Muito confiante, sempre dava um palpite ou fazia um comentário engraçado ao longo das atividades. Muito alegre e falante, foi Guilherme que descontraiu nossos encontros e garantiu momentos de risos do grupo. Demonstrava domínio enquanto resolvia os cálculos e não acreditava quando errava. Achava sempre que os colegas que tinham resultados diferentes dos seus é que estariam errados. Acertou praticamente todos os cálculos das sequências 1 e 2, errando apenas o sucessor de 9.999. Para Guilherme, o resultado de 9.999 + 1 seria 100.000. Nas sequências 3 e 4, porém, o aluno começou a perceber que seus resultados incorretos eram mais numerosos do que ele imaginava. Observem-se seus equívocos nesses cálculos.

Cálculo solicitado	Sequência 3 Cálculos do tipo a + a	Sequência 4 Cálculos do tipo a + (a + 1)
0,12 + 0,12	**2,4**	
0,15 + 0,15	**3,0**	
0,26 + 0,26	**5,2**	
0,5 + 1,5		**0,11**
0,9 + 1,9		**1,18**
0,26 + 1,26		**1,50**

Podemos observar que Guilherme confunde-se ao calcular mentalmente os números racionais na forma decimal. Ao término dessas quatro primeiras sequências, Guilherme chegou à conclusão de que não era “tão invencível” no cálculo mental quanto pensava. E comentou que esse “tal cálculo mental” seria muito perigoso. Não dava para confiar. Por isso, deveria sempre certificar-se do resultado “montando a continha na cabeça”. Registrou seu comentário a respeito, mostrado a seguir.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

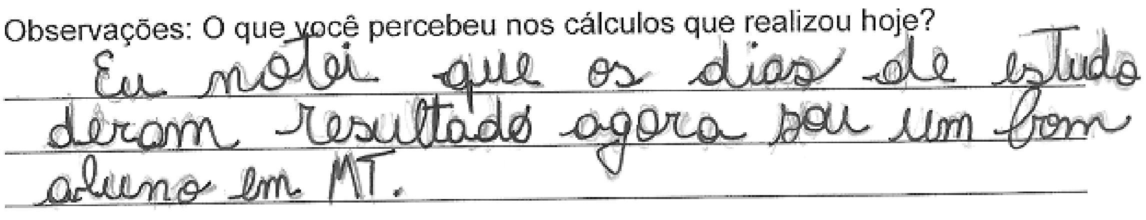
Eu percebi que o modo de pensar que
se Tem com sertesa na mente muitos veses
não é o serto porisso é bom remisar
de dois modos de pensar.

Nas sequências 5 e 6, os equívocos com os cálculos dos números racionais na forma decimal continuaram, como observamos nos itens abaixo.

Cálculo solicitado	Sequência 5 Cálculos do tipo 2 X a	Sequência 6 Cálculos do tipo 4 X a
2 X 0,6	**0,12**	
2 X 0,7	**0,14**	
2 X 0,9	**0,18**	
4 X 0,9		**3,8**

Observe-se que, na sequência 5, Guilherme opera o dobro dos números racionais na forma decimal de maneira mecânica, como se estivesse preocupado apenas com a tabuada. Não faz uma reflexão do significado do número fornecido. Nem percebe, por exemplo, que 0,12 é menor que 0,6. Já na sequência 6, a natureza de seu erro já é outra: tabuada. Em voz alta, comenta: “ora, como 2 vezes 6 é igual a 12, então pensei que 2 x 0,6 também fosse igual a 12, só que com uma vírgula”.

No terceiro encontro, Guilherme acerta todos os resultados das sequências 9, 10 e 11. Fica muito orgulhoso e comenta que esses encontros estão sendo ótimos para que ele fique ainda melhor na Matemática. Observe-se seu registro.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu notei que os dias de estudo
deram resultado agora sou um bom
aluno em MT.

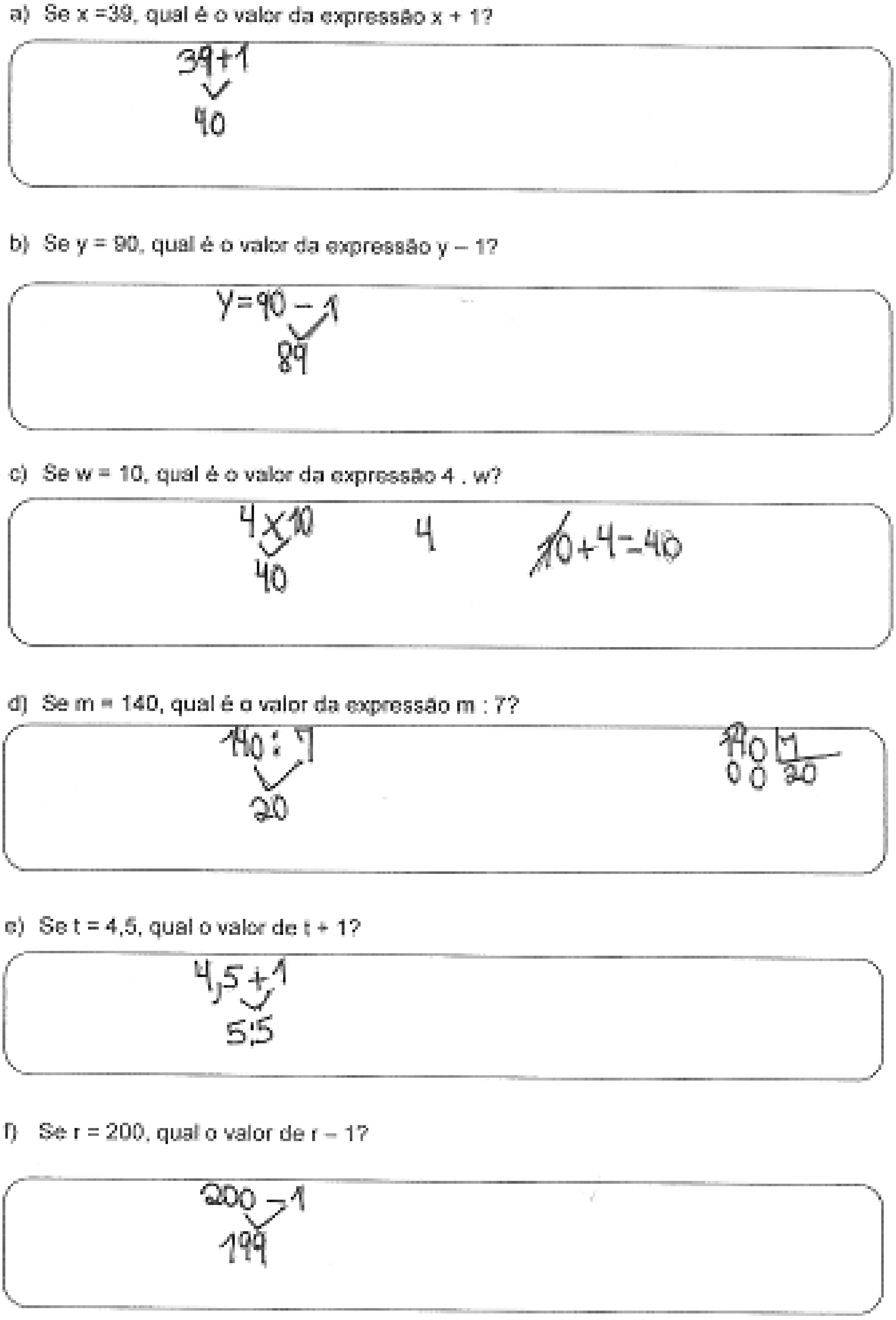
Na sequência 12, porém, Guilherme acha todos os cálculos muito difíceis para fazer mentalmente. Apresenta vários resultados não corretos, listados abaixo.

Cálculo solicitado	Sequência 12 Cálculos do tipo a : b
140 : 70	**20**
210 : 70	**30**
350 : 70	**50**
490 : 70	**70**
560 : 70	**80**
1,4 : 0,7	**0,2**
2,1 : 0,7	**0,3**
3,5 : 0,7	**0,5**
4,9 : 0,7	**0,7**
5,6 : 0,7	**0,8**

Nos cinco primeiros cálculos apresentados acima, percebemos que a quantidade de zeros nos números confunde Guilherme. Ele também não pensou nas quantidades que esses números representam. Senão, teria percebido que 70 não poderia caber vinte vezes em 140. Apenas fez 14 dividido por 7 e acrescentou um zero no final. Nos cálculos dos quocientes entre números racionais na forma decimal, Guilherme mostrou-se surpreso em obter como resultados números inteiros. Exclamou: “como é possível dividir dois números com vírgula e o resultado não ter vírgula? Ela desapareceu? Como assim?”.

Na segunda atividade, Guilherme demonstrou confiança em seus cálculos mentais e utilizou esse procedimento em vários momentos dessa atividade. Não se intimidou com os erros anteriores e não demonstrou receio em tentar resolver os problemas propostos. Tentou sempre, aceitando os desafios com perseverança nas resoluções. Mesmo aqueles exercícios que comentou não saber fazer.

Na questão 1, o aluno reconhece o papel da letra na expressão e a substitui pelo valor numérico com facilidade. Só registra o cálculo com algoritmo nas situações em que não tinha certeza dos resultados efetuados mentalmente.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

39+1

40

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

y=90 – 1

89

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

4x10

40

4

~~1~~0+4=40

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

140 : 7

20

140 | 7

00 20

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

4,5 + 1

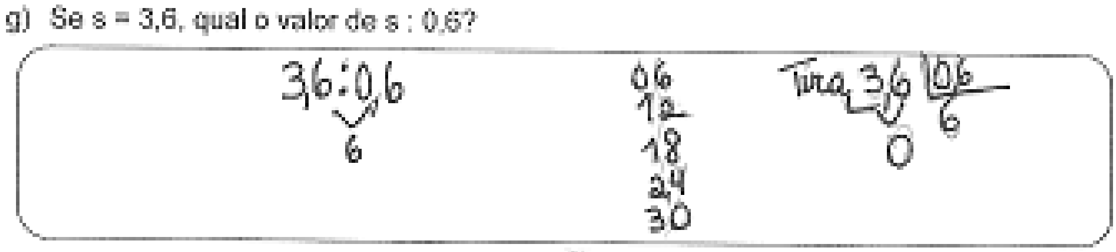
5,5

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

200 – 1

199

Observe-se como Guilherme calculou o quociente sugerido no item g:



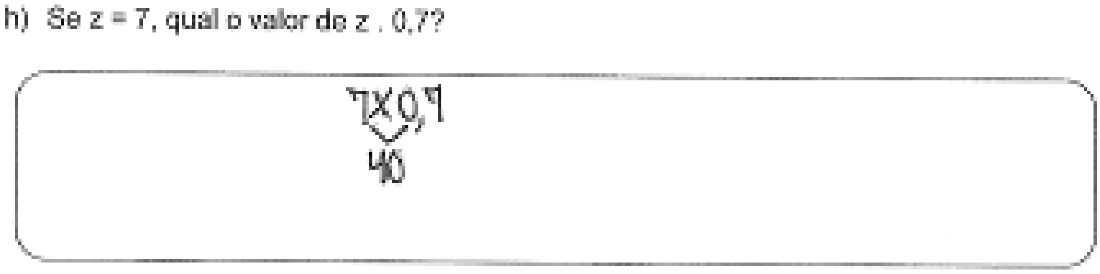
g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

3,6:0,6
6

06
12
18
24
30

Tira 3,6 | 0,6
0 6

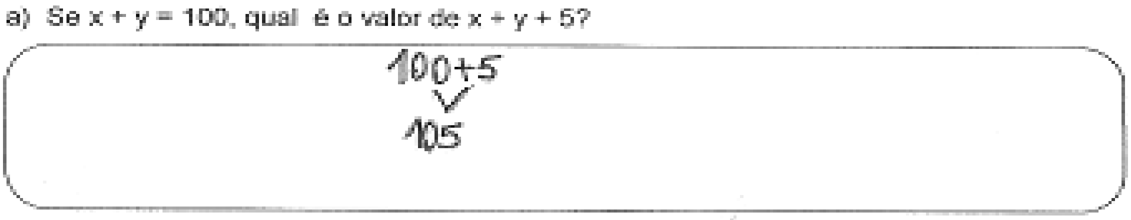
Na montagem do algoritmo, ele escreve que “tirou” a vírgula primeiro, Depois, registra ao lado os números contados de seis em seis para saber quantas vezes o número 6 cabe dentro de 36. Esse procedimento nos mostra que os resultados da tabuada ainda não estão consolidados para Guilherme e, assim como alguns alunos ainda precisam dos dedos das mãos para contagem, ele utiliza a escrita dos resultados da tabuada para auxiliar no cálculo. E, em situações que precisa da tabuada decorada, nem sempre acerta o resultado, como verificamos no item h.



h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

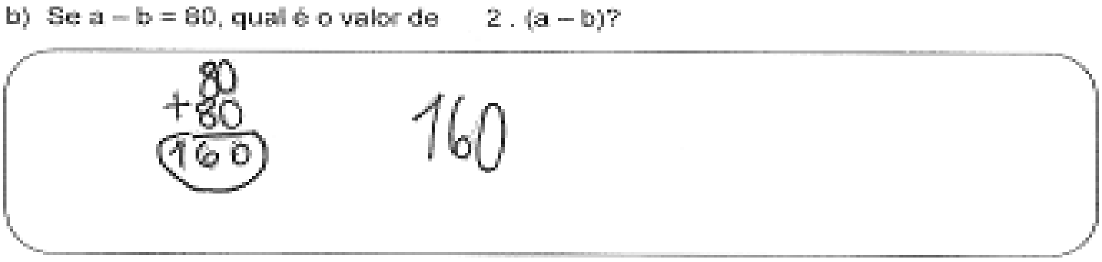
7X0,7
40

Na questão 2, Guilherme faz uso do cálculo mental na maioria das vezes para resolver os exercícios. E reconhece o papel das letras, substituindo-as corretamente pelo valor numérico fornecido. Observe-se.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

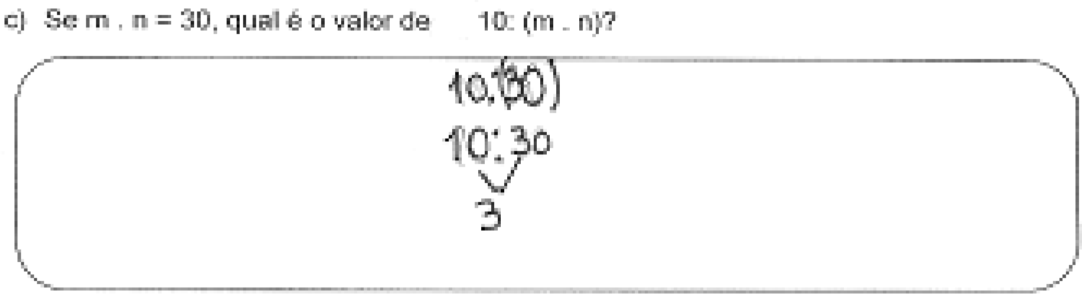
100+5
105



b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

80
+80
160

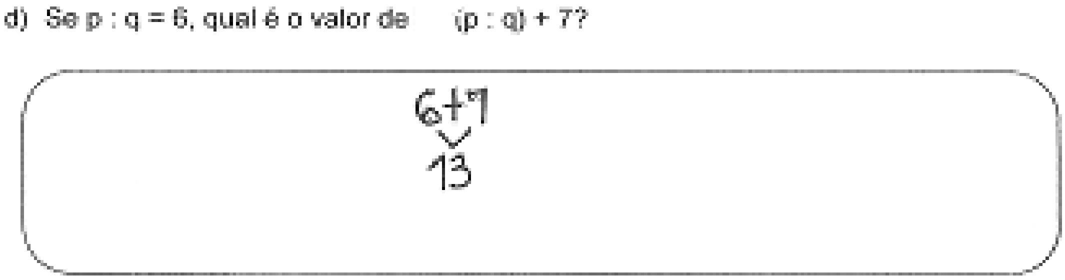
160


c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

10:(30)

10:30

3

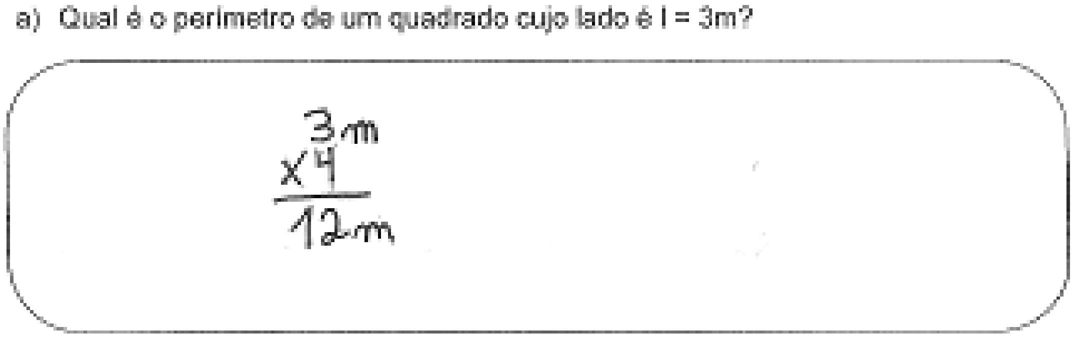

d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

6+7

13

Observamos que, no item b, Guilherme preferiu utilizar a adição de 80 + 80 para resolver o dobro desse número. E, assim como outros de seus colegas, efetuou o quociente 10 : 30 (no item c) invertendo mentalmente a ordem dos números, sem perceber que essa inversão altera o resultado.

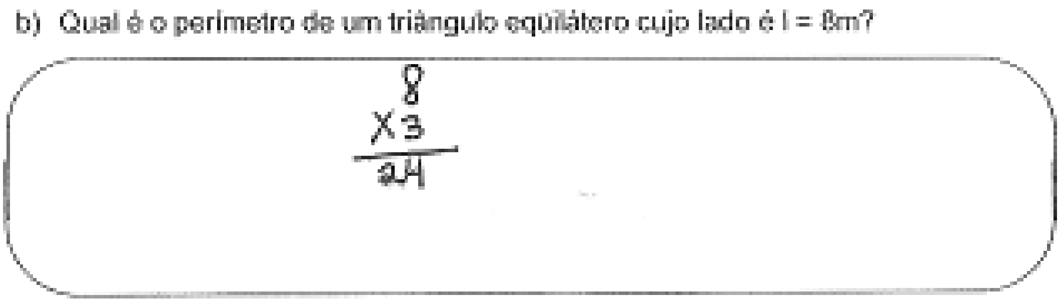
Na questão 3, o aluno resolve os exercícios de perímetro corretamente fazendo uso de um algoritmo de multiplicação. E não consegue fazer o exercício de área pelos mesmos motivos apresentados nos casos anteriores.


a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

3m

x4

12m

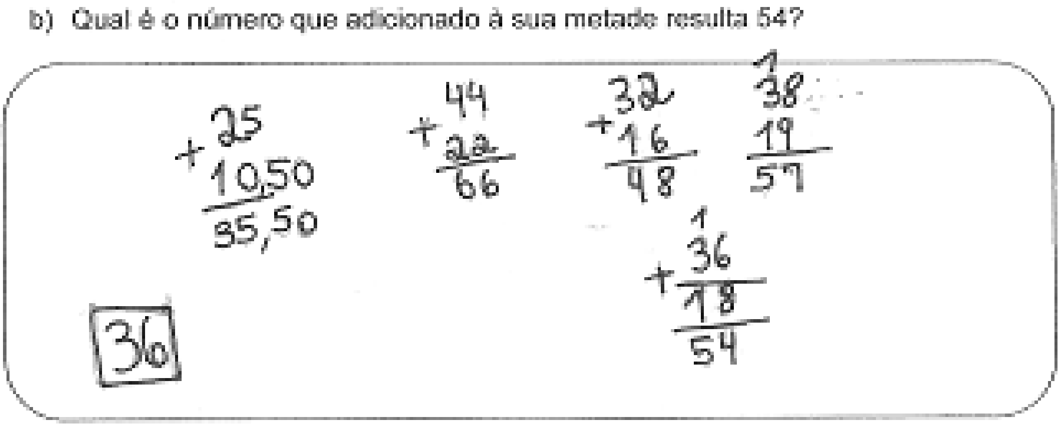

b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

8

x3

24

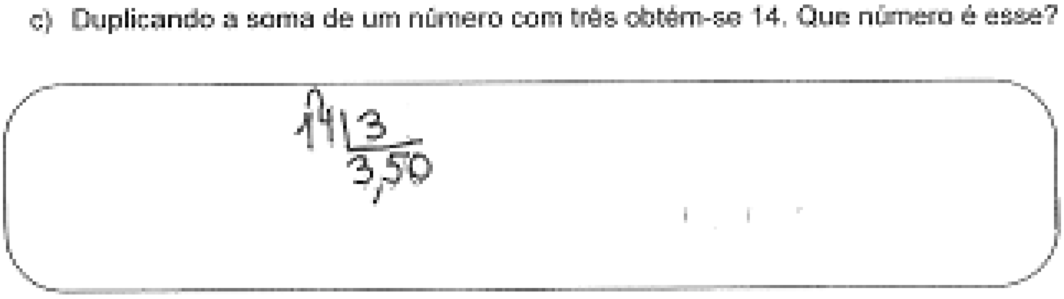
Na questão 4, deixa o item a em branco e comenta que, dessa vez, não imagina nem como começar. Ele, portanto, não reconheceu o papel de incógnita na sentença matemática. Mas Guilherme faz várias tentativas aritméticas para resolver o problema do item b e, mesmo sem conhecer equações ou qualquer desenvolvimento algébrico que o pudesse ajudar na resolução, consegue chegar ao resultado correto por tentativas. Na sequência, no item c, acontece uma pequena tentativa, dessa vez sem êxito.



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 10{,}50 \\ \hline 35{,}50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 44 \\ +\ 22 \\ \hline 66 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ +\ 16 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} {}^{1} \\ 38 \\ 19 \\ \hline 57 \end{array} \quad \begin{array}{r} {}^{1} \\ 36 \\ +\ 18 \\ \hline 54 \end{array}$$

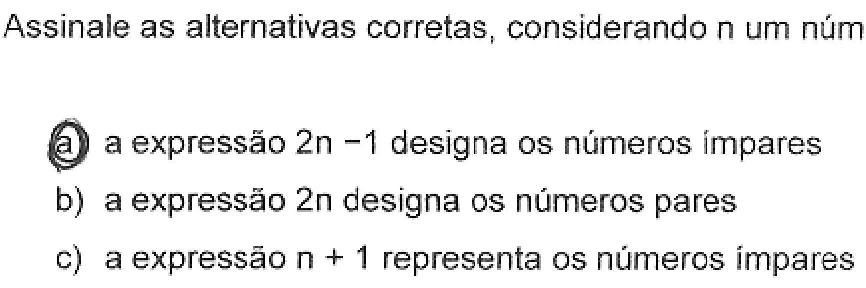
$\boxed{36}$



c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

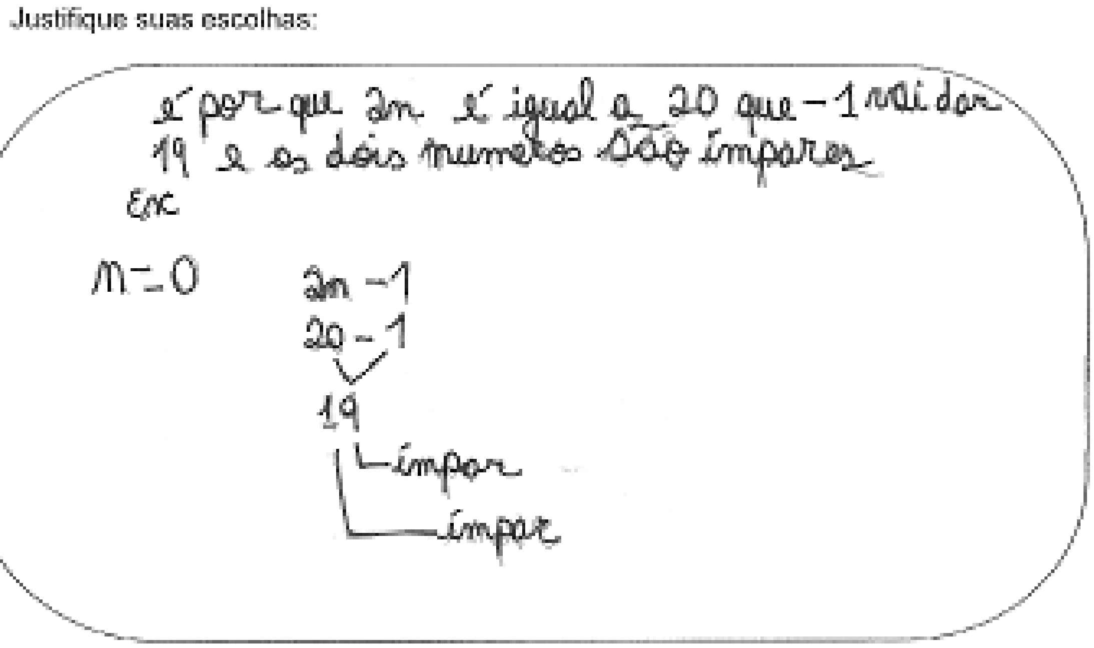
$$14 \,\underline{|\,3\,}\quad 3{,}50$$

Na questão 5, Guilherme não compreende o papel generalizador da letra e escolhe a primeira alternativa como a única correta. Depois, justifica:



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

[✓ a)] a expressão 2n −1 designa os números ímpares
b) a expressão 2n designa os números pares
c) a expressão n + 1 representa os números ímpares



Justifique suas escolhas:

é por que 2n é igual a 20 que -1 vai dar 19 e os dois numeros são impares

Ex

n=0

2n -1

20 - 1

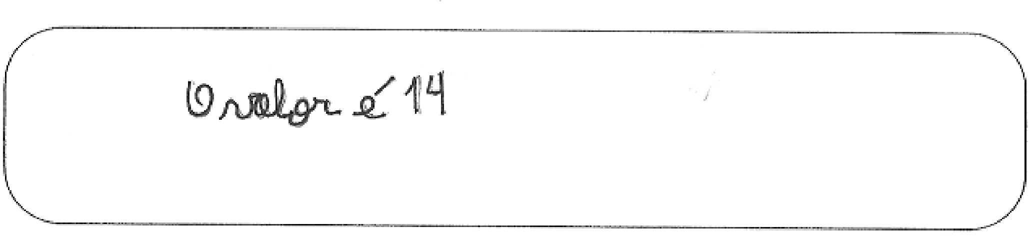
19

impar

impar

Essa resolução nos chamou a atenção. Note-se que Guilherme, ao substituir n pelo número zero, entende que 2n vale 20. Ele despreza o produto existente no monômio "2n" e junta o algarismo dois com o algarismo zero, formando o número 20.

Por fim, na questão 6 proposta, Guilherme reconhece a dimensão funcional da letra na relação proposta e utiliza seus conhecimentos de cálculo na resolução. Mas não resolve o último item porque disse não gostar de fazer contas com frações.



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

O valor é 14

Numa síntese do desempenho de Guilherme nas duas atividades, apresentamos o quadro a seguir, como um resumo de seus erros e acertos.

Resumo dos acertos e erros de Guilherme															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟩	🟩	🟥
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥
Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?					
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h							
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥		Sim					
Questão 2	a	b	c	d											
	🟩	🟩	🟥	🟩						Sim					
Questão 3	a	b	c												
	🟩	🟩	🟥							Talvez					
Questão 4	a	b	c												
	🟦	🟩	🟥							Sim					
Questão 5	a	b	c												
	🟥	🟥	🟥							Sim					
Questão 6	a	b													
	🟩	🟦								Sim					

O quadro nos ajuda a afirmar que Guilherme obteve melhor desempenho no cálculo mental com os números naturais do que com os números racionais na representação decimal. Identificamos alguns conhecimentos prévios de cálculo mental como, por exemplo: o domínio do repertório aditivo para cálculos do tipo a + 1, a – 1, a + a e o conhecimento da tabuada, ainda não totalmente memorizada. Mas também percebemos a ausência de experimentos prévios desse tipo de cálculo para os números racionais na forma decimal, frente ao espanto e surpresa do aluno nessas situações. Apesar de não ter conseguido totalidade de acertos na atividade com cálculo mental, não se intimidou em usá-los na atividade seguinte, recorrendo ao algoritmo apenas quando precisava certificar-se da resposta. Nas situações com a presença de letras, apesar de não ter sido ainda introduzido nas resoluções formais da álgebra, conseguiu resolver corretamente algumas situações propostas com seus conhecimentos aritméticos e por meio de tentativas.

Dando continuidade às nossas análises, vamos relatar o desenvolvimento do nosso último aluno de 6º ano.

3.8. Paulo e seu desempenho

Paulo participou dos encontros com disposição e realizou as atividades propostas de maneira tranquila. Conhecido no grupo por seu temperamento agitado, surpreendeu a todos com sua postura e envolvimento.

Na primeira atividade, obteve um número grande de acertos em relação à Valéria e Guilherme, colegas de Paulo que também estão classificados como alunos com dificuldades em Matemática.

Nas sequências 1 a 4, Paulo efetuou os cálculos corretamente tanto com os números naturais como com os números racionais na representação decimal. Com exceção dos apresentados abaixo, situações em que Paulo não acertou as respostas.

Cálculo solicitado	Sequência 1 Cálculos do tipo a + 1	Sequência 3 Cálculos do tipo a + a
99,3 + 1	**99,4**	
0,12 + 0,12		**2,4**
0,15 + 0,15		**3,0**
0,26 + 0,26		**5,2**

Observamos que, nessas situações, o aluno confunde-se com as adições de números racionais na forma decimal.

Nas sequências 5 a 6, além de acertar todos os resultados calculados mentalmente, Paulo comentou que os resultados da sequência 6 são o dobro dos resultados da sequência 5. E que o mesmo acontece com as sequências 7 e 6. Ele havia percebido a regularidade entre as tabuadas do dois, do quatro e do oito.

Nas sequências 9 a 12, Paulo resolve os produtos com desenvoltura e acerta todos os resultados. Na divisão, porém, fica com dúvidas em como obter mentalmente os quocientes de dois números racionais na forma decimal. E declara: “não consigo efetuar esses cálculos sem montar a conta”. Analisem-se suas respostas.

Cálculo solicitado	Sequência 12 Cálculos do tipo a : b
1,4 : 0,7	**0,2**
2,1 : 0,7	**0,3**
3,5 : 0,7	**0,5**
4,9 : 0,7	**0,7**
5,6 : 0,7	**0,8**

Paulo participou da segunda atividade entusiasmado com os acertos conquistados na atividade anterior e com vontade de repetir seu feito. Vamos analisar seu desempenho nessa etapa.

Na questão 1, reconhece o papel da letra na expressão e a substitui pelo valor numérico com facilidade. Registrou os algoritmos para resolver as questões como forma de mostrar o seu raciocínio. Nas subtrações (itens b e f), realiza os procedimentos próprios de “emprestar” a dezena do algarismo vizinho, indicando que talvez não tenha sido utilizado o cálculo mental nesses casos. E nas divisões (itens d e g), realiza sempre uma conta para verificar o resultado, demonstrando maior insegurança nessas operações. No último exercício (item h), Paulo monta o algoritmo de 7 X 0,7 e efetua a multiplicação pelo algarismo zero. Questionado a respeito, declara: “melhor multiplicar o zero também. Fico com medo de errar”. Na sequência, registramos as resoluções de Paulo nessa questão.

a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

$$\begin{array}{r} +39 \\ 1 \\ \hline 40 \end{array}$$

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

$$\begin{array}{r} \overset{8}{\cancel{9}}\overset{1}{0} \\ -\ 1 \\ \hline 89 \end{array}$$

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

•=X   10x4 =40

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

$$\begin{array}{r|l} 140 & 7 \\ \hline -14\ \ & 20 \\ 000 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ \times\ 2 \\ \hline 14 \end{array}$$

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

$$\begin{array}{r} 4{,}5 \\ +\ 1{,}0 \\ \hline 5{,}5 \end{array}$$

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

$$\begin{array}{r} 1\overset{1}{\cancel{2}}\overset{9}{0}\overset{1}{0} \\ -\ 1 \\ \hline 199 \end{array}$$

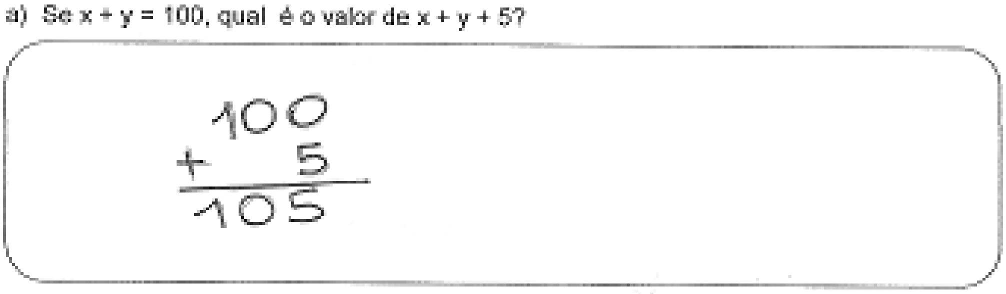
g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

$$\begin{array}{r|l} 3{,}6 & 0{,}6 \\ \hline -3{,}6 & 6 \\ \hline 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}6 \\ \times\ 0{,}6 \\ \hline \end{array}$$

h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

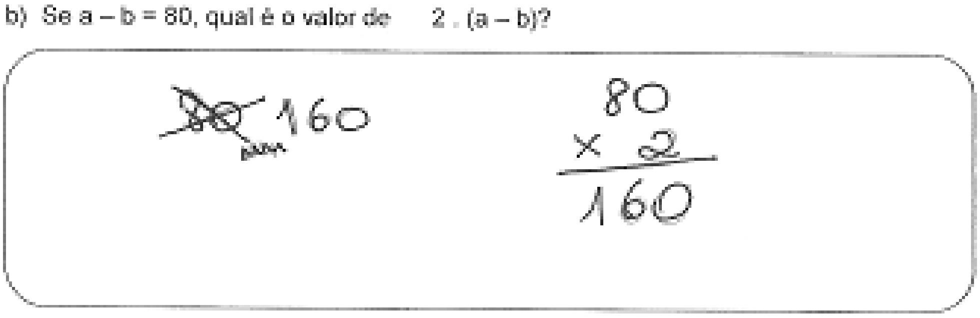
$$\begin{array}{r} {}^{4}\ \ \ 7 \\ \times\ \ 0{,}7 \\ \hline 4{,}9 \\ 000 \\ \hline 949 \end{array} = 0{,}49$$

Na questão 2, o aluno reconhece a função das letras na expressão e realiza a substituição correta pelo valor numérico. Expressa seu raciocínio por meio de algoritmos, o que não nos permite ter a certeza do uso ou não dos procedimentos de cálculo mental nas operações. Acerta três dos quatro itens propostos. Abaixo, seguem suas resoluções.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

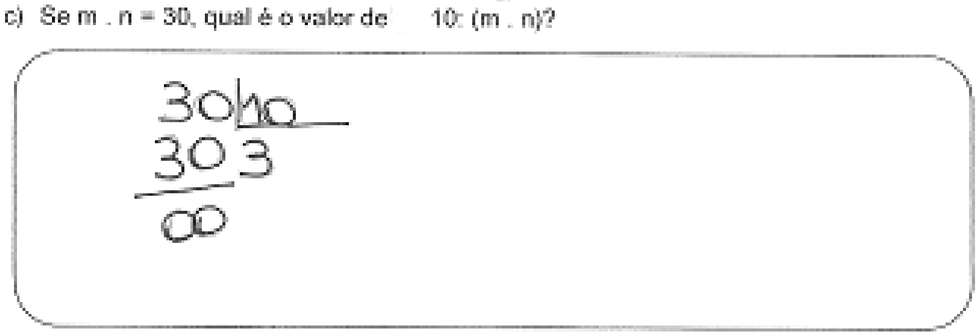
100
\+ 5
105



b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

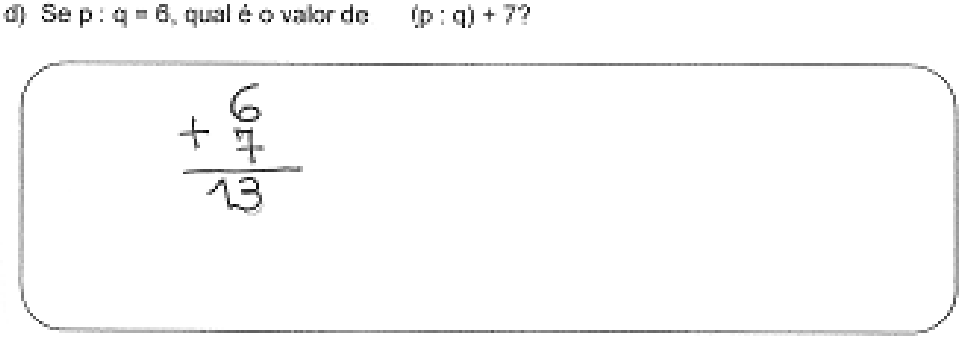
~~80~~ 160

80
× 2
160



c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

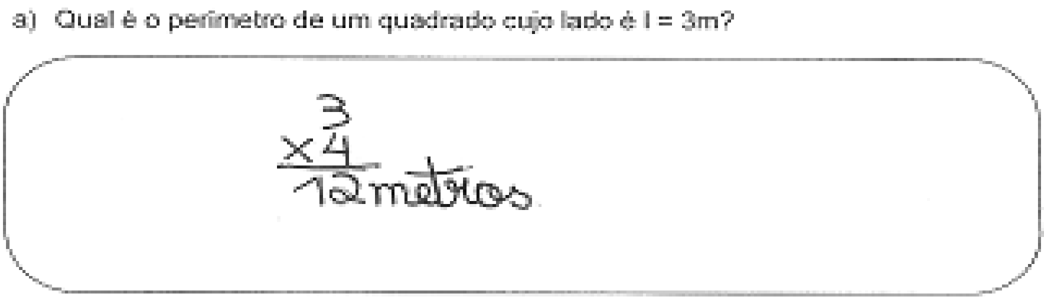
30 | 10
30 3
00



d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

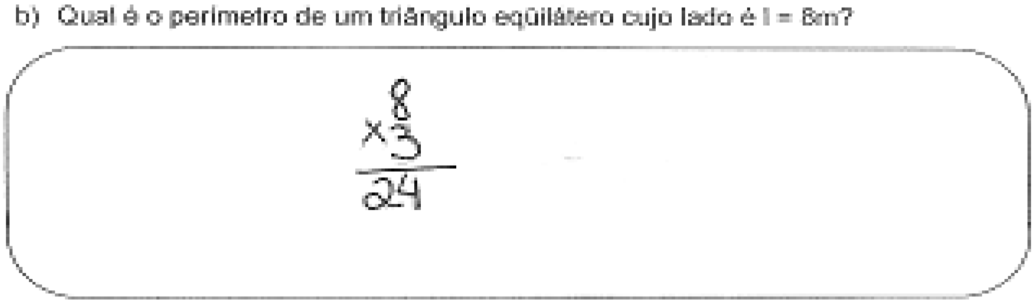
6
\+ 7
13

Na questão 3, o aluno resolve os exercícios de perímetro fazendo uso de um algoritmo de multiplicação. E não consegue fazer o exercício de área porque, como comentado anteriormente nos outros casos, também ainda não conhecia o conceito.



a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

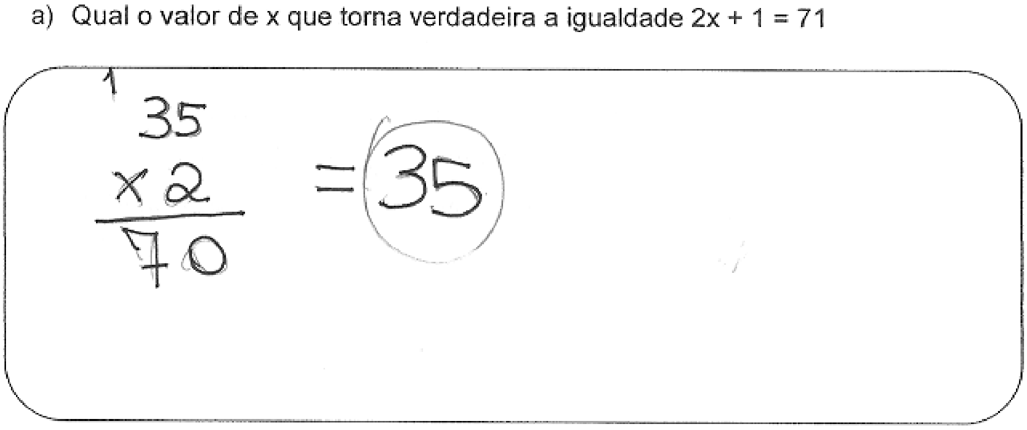
$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$ metros



b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline 24 \end{array}$$

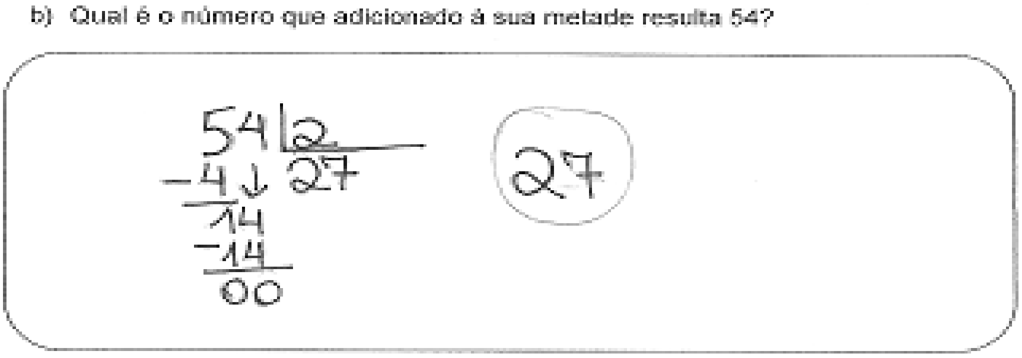
Na questão 4, no item a, Paulo realiza uma multiplicação para verificar o dobro de 35 e circula a resposta correta. Observando sua resolução mostrada a seguir, podemos deduzir que ele operou mentalmente 71 – 1. E identificou a metade de 70 também mentalmente, fazendo apenas o algoritmo da verificação de seus cálculos mentais. Foi, portanto, capaz de determinar o valor da incógnita sem utilizar os procedimentos formais de resolução de equações.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,35 \\ \times 2 \\ \hline 70 \end{array} = \bigcirc\!\!\!\!\!\!\;35$$

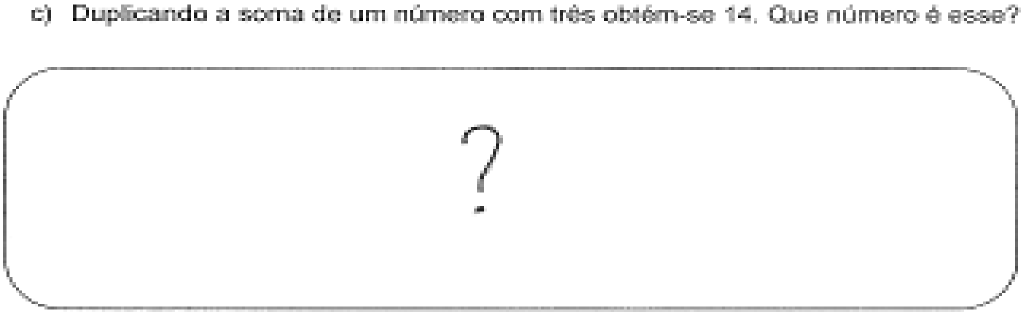
No item b da mesma questão, Paulo faz uma tentativa para resolver o problema proposto mas não chega no resultado correto. E desiste no item c, deixando apenas um ponto de interrogação.



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

54 | 2
−4 ↓ 27
14
−14
00

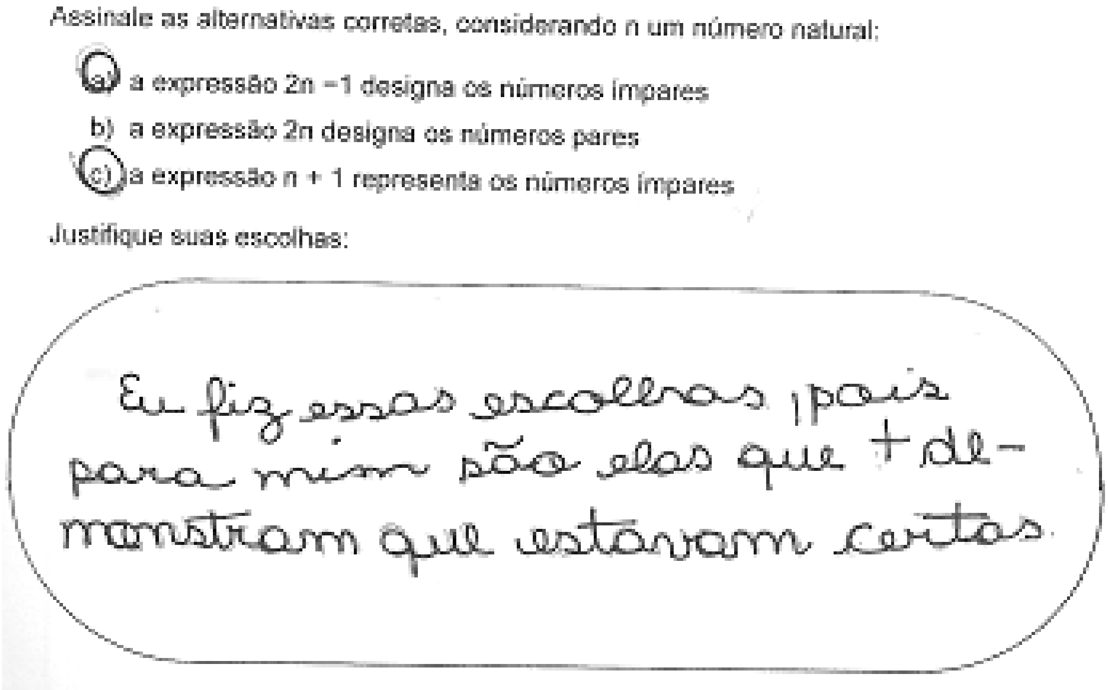
27



c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

?

Na questão 5, Paulo assinala aleatoriamente dois itens e não consegue justificar suas escolhas.



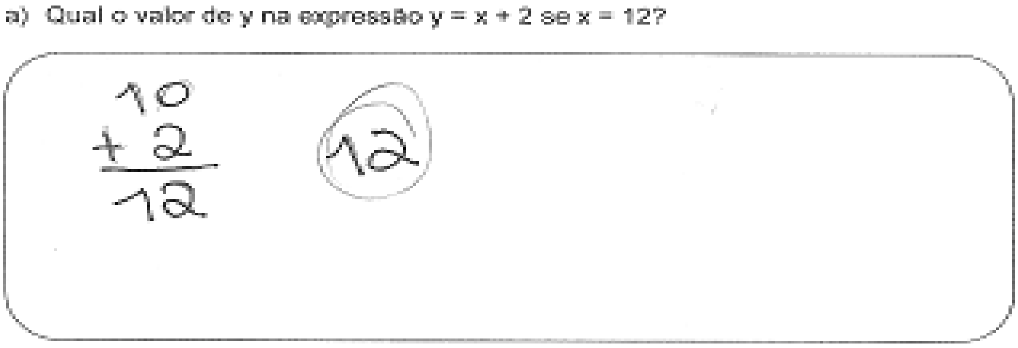
Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

[✓ a)] a expressão 2n −1 designa os números ímpares
b) a expressão 2n designa os números pares
[✓ c)] a expressão n + 1 representa os números ímpares

Justifique suas escolhas:

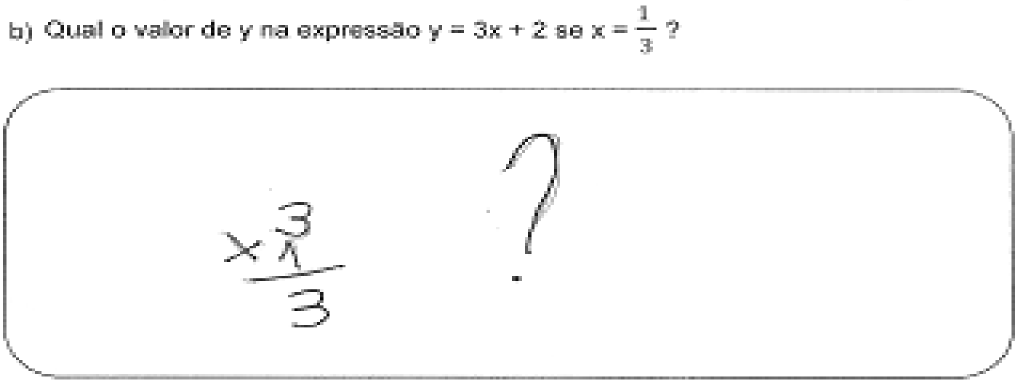
Eu fiz essas escolhas, pois para mim são elas que + demonstram que estavam certas.

Na questão 6, Paulo parece reconhecer o valor funcional da letra, mas realiza a substituição da letra x por um valor numérico incorreto (item a). Na situação seguinte, em que aparecem números racionais na forma fracionária, o aluno não consegue efetuar os cálculos e deixa um ponto de interrogação ao lado, sinalizando dúvida. Observe-se:



a) Qual o valor de y na expressão $y = x + 2$ se $x = 12$?

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 2 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \boxed{12}$$



b) Qual o valor de y na expressão $y = 3x + 2$ se $x = \frac{1}{3}$?

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r} 3 \\ 1 \end{array} \\ \hline 3 \end{array} \qquad ?$$

Apresentamos, a seguir, o quadro de acertos e erros de Paulo.

Resumo dos acertos e erros de Paulo															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥		Talvez
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟥	🟩						Talvez
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟥							Talvez
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟥	🟦							Sim
Questão 5	a	b	c							
	🟥	🟥	🟥							Não
Questão 6	a	b								
	🟩	🟥								Talvez

Observamos que Paulo, apesar de ser considerado um aluno com dificuldades em Matemática, conseguiu um bom desempenho no cálculo mental, tanto para os números naturais como para a maioria dos números racionais na forma decimal. Demonstrou certa insegurança na hora de utilizar esses conhecimentos na resolução de problemas envolvendo letras. Acredita que o algoritmo oferece maior certeza na obtenção dos resultados. Em relação à álgebra, foi capaz de identificar variáveis e substituí-las por valores numéricos e, em algumas situações, mobilizou seus conhecimentos aritméticos para tentar resolver problemas com letras. Intimidou-se nos trabalhos com números racionais na forma fracionária, mesmo tendo sido esse conteúdo já estudado pelo aluno.

Encerramos aqui a análise dos procedimentos utilizados pelos alunos de 6º ano em nossas atividades. Iniciaremos, na sequência, a análise do desempenho dos alunos do 7º ano.

CAPÍTULO 4

OS ALUNOS DO 7º ANO: PROCEDIMENTOS E RESPOSTAS

4.1. Introdução

Marcela, Patrícia, Giovanna, Theo, Larissa e Neide são nomes fictícios de seis alunos de uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental. Assim como os alunos anteriores, eles também estudaram nessa mesma escola desde pequenos. Todos tinham 12 anos completos quando realizamos nossos estudos.

Marcela e Patrícia são consideradas boas alunas e gostam muito da Matemática. Enquanto Marcela relata que sempre teve facilidades com cálculos, Patrícia reconhece que possui algumas dificuldades, apesar de obter boas notas na matéria.

Giovanna e Theo são considerados alunos com desempenho mediano em Matemática. Giovanna não gosta muito da disciplina porque sente que não tem tanta facilidade nas resoluções dos exercícios. Theo afirma que gosta da matéria e que consegue resolver problemas com relativa facilidade.

Larissa e Neide são consideradas alunas com dificuldades em Matemática. A primeira diz que "até gosta da Matemática, mas a Matemática não gosta dela". Neide, que está refazendo o 7º ano, reconhece suas dificuldades e diz que, apesar de tudo, gosta da disciplina.

As sessões de trabalho realizadas com esse grupo de alunos também aconteceram numa sala de aula, fora do horário letivo. Como na situação anterior, apesar de serem alunos de diferentes turmas, todos já se conheciam e estavam entrosados e disponíveis para iniciar nossas atividades. O clima era de curiosidade a respeito do que iria acontecer.

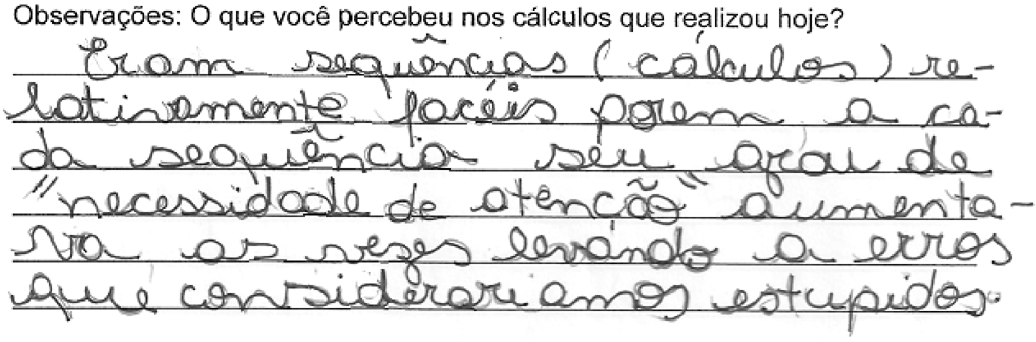
Vamos, agora, analisar as respostas e os procedimentos de cada um desses alunos de 7º ano.

4.2. Marcela e seu desempenho

Marcela é uma ótima aluna em todas as disciplinas. Além de obter boas notas, é atuante em sala de aula e fora dela. Movimenta-se em busca de melhorias na escola, participa de reuniões do grêmio estudantil, relaciona-se com alunos de outros níveis e é muito querida por todos. Ajudou muito na organização de nossos encontros e na convocação dos colegas. Era Marcela que não deixava ninguém esquecer as datas das reuniões nem perder a hora dos encontros. Com facilidade para comunicar-se, contribuiu de maneira positiva para que nossa pesquisa acontecesse.

Na primeira atividade, Marcela acertou todos os cálculos efetuados mentalmente, tanto com os números naturais quanto com os números racionais na forma decimal. Fornecia as respostas rapidamente, sem hesitar.

Após terminar as sequências 1 a 4, Marcela comentou a simplicidade dos cálculos e deixou o registro abaixo.



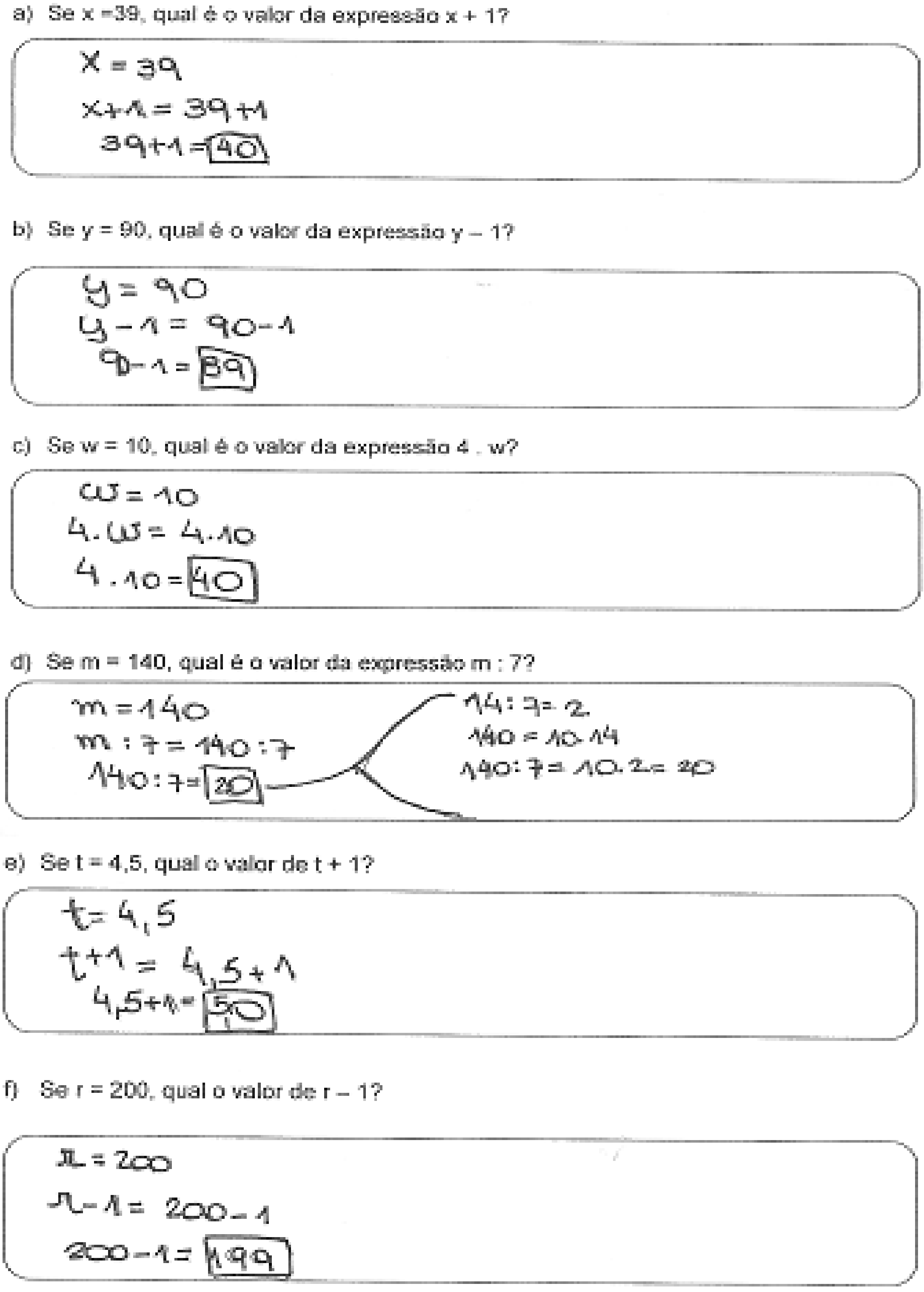
Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eram sequências (cálculos) relativamente fáceis porem a cada sequência seu grau de "necessidade de atenção" aumentava as vezes levando a erros que consideraríamos estupidos.

Nas discussões em grupo acerca dos resultados que cada um havia obtido, Marcela fez a seguinte colocação a respeito de efetuar cálculos mentalmente com os números racionais na forma decimal: “às vezes é mais fácil arredondar antes de somar, e depois acertar o resultado subtraindo o excesso. Por exemplo: 0,9 é quase 1 e 1,9 é quase 2. Por isso, para somar 0,9 com 1,9 eu pensei em 1 + 2 = 3 e subtrai 0,2, resultando 2,8”.

Nas sequências 5 a 12, Marcela atribuiu seus acertos ao domínio que tem da tabuada. E percebeu uma regularidade nos cálculos que lhe permitia arriscar o resultado antes mesmo da professora fornecer o cálculo.

Na segunda atividade, Marcela teve muita clareza em suas resoluções e pudemos perceber o uso frequente do cálculo mental nas situações que seguem. Observe-se, na questão 1 abaixo, o recurso de escrita, organizada e acessível, ao qual a aluna recorre para explicar para a professora sua linha de raciocínio.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

$x = 39$
$x+1 = 39+1$
$39+1 = \boxed{40}$

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

$y = 90$
$y-1 = 90-1$
$90-1 = \boxed{89}$

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

$w = 10$
$4 . w = 4 . 10$
$4 . 10 = \boxed{40}$

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

$m = 140$
$m : 7 = 140 : 7$
$140 : 7 = \boxed{20}$

$14 : 7 = 2$
$140 = 10 . 14$
$140 : 7 = 10 . 2 = 20$

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

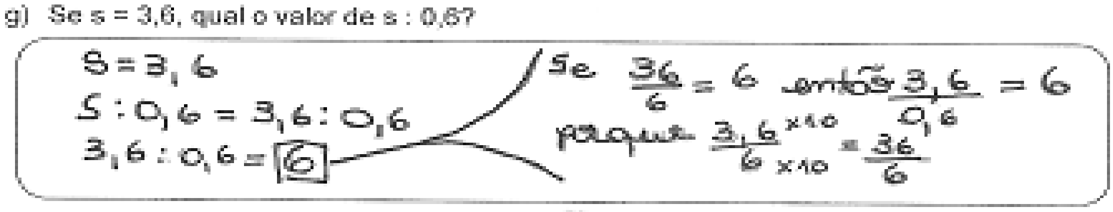
$t = 4,5$
$t+1 = 4,5+1$
$4,5+1 = \boxed{5,0}$

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

$r = 200$
$r-1 = 200-1$
$200-1 = \boxed{199}$

Note-se que, num momento de distração, a aluna confunde-se com a resposta do item e. Minutos depois, percebe o erro e lamenta não poder utilizar a borracha.

Ainda na mesma questão, Marcela resolve o item g e faz um comentário para justificar sua resolução: “lembrei que podemos multiplicar uma fração por 10 sem alterar seu valor. Desde que seja feito no numerador e no denominador. Então, percebi que fazer 3,6 : 0,6 era a mesma coisa que fazer 36 : 6”.



g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

$S = 3,6$

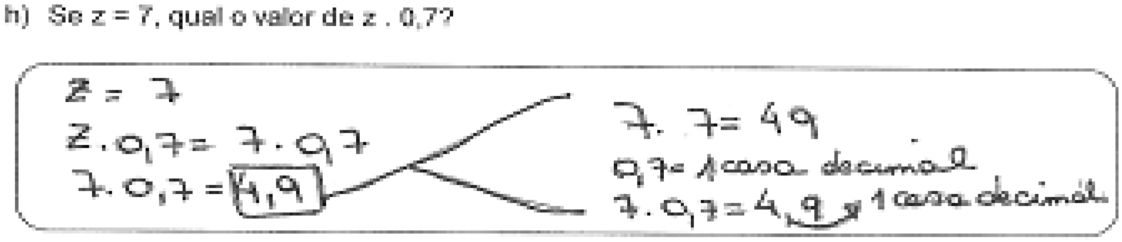
$S : 0,6 = 3,6 : 0,6$

$3,6 : 0,6 = \boxed{6}$

Se $\frac{36}{6} = 6$ então $\frac{3,6}{0,6} = 6$

porque $\frac{3,6 \times 10}{6 \times 10} = \frac{36}{6}$

Finaliza a questão mostrando, no produto sugerido no item h, como proceder em caso de multiplicações com números racionais na forma decimal: verificar o número de casas decimais e ajustar o resultado. Observe-se.



h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

$z = 7$

$z . 0,7 = 7 . 0,7$

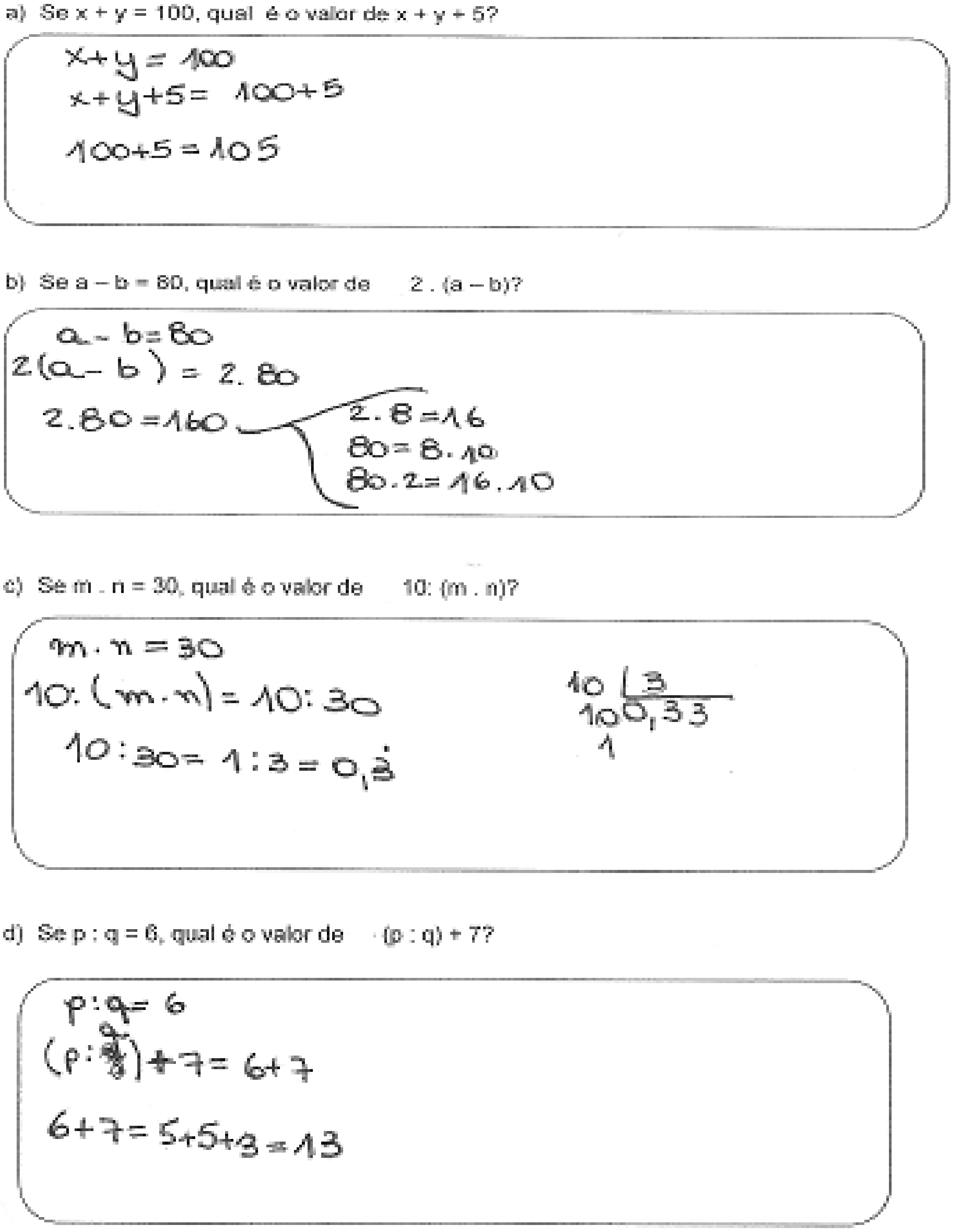
$7 . 0,7 = \boxed{4,9}$

$7 . 7 = 49$

0,7 = 1 casa decimal

$7 . 0,7 = \underbrace{4,9}$ → 1 casa decimal

Na questão 2, Marcela também reconhece o papel da letra na expressão e faz as substituições de maneira correta, assim como havia feito na questão anterior. Continua fazendo uso do cálculo mental nas resoluções.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

$x + y = 100$
$x + y + 5 = 100 + 5$
$100 + 5 = 105$

b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

$a - b = 80$
$2(a - b) = 2.80$
$2.80 = 160$
$2.8 = 16$
$80 = 8.10$
$80.2 = 16.10$

c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

$m \cdot n = 30$
$10 : (m \cdot n) = 10 : 30$
$10 : 30 = 1 : 3 = 0,\dot{3}$

10 | 3
10 0,33
1

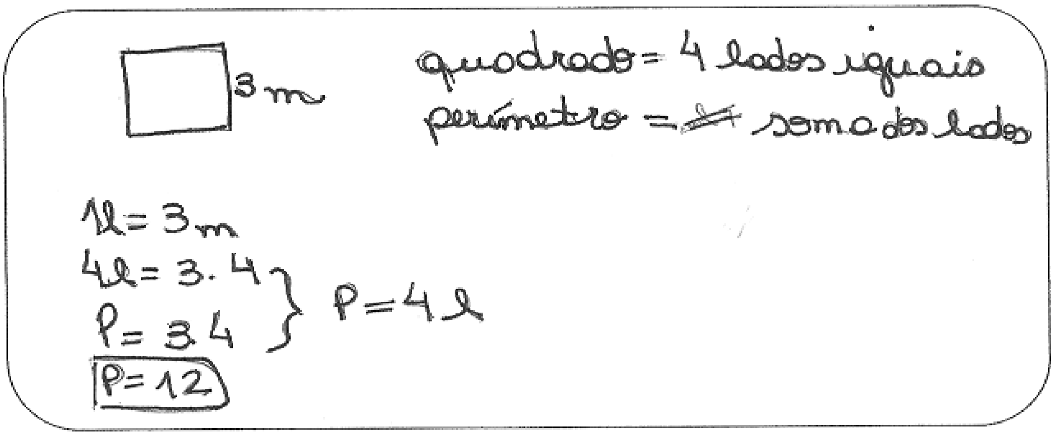
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

$p : q = 6$
$(p : q) + 7 = 6 + 7$
$6 + 7 = 5 + 5 + 3 = 13$

Observe-se que, dessa vez, a aluna percebe que no item c a divisão envolve um dividendo menor que o divisor, resultando um quociente racional na representação decimal. Vale a pena lembrar que o conceito de dízima periódica, identificada por Marcela, havia sido trabalhado nesse mesmo ano.

Na questão 3, a aluna reconhece o papel da letra “l” nos problemas de perímetro e área. E, conhecedora desses conceitos, resolve a questão de maneira clara, fazendo uso do cálculo mental nas operações envolvidas.

a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?



3 m

quadrado = 4 lados iguais

perímetro = ~~4~~ soma dos lados

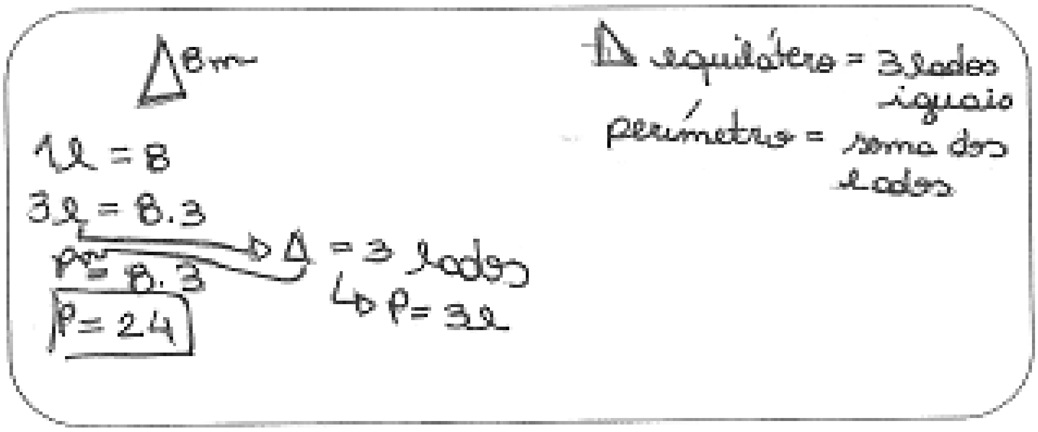
$1l = 3m$

$4l = 3 . 4$

$P = 3 4$ } $P = 4l$

$\boxed{P = 12}$

b) Qual é o perímetro de um triângulo equilátero cujo lado é l = 8m?



8m

△ equilátero = 3 lados iguais

perímetro = soma dos lados

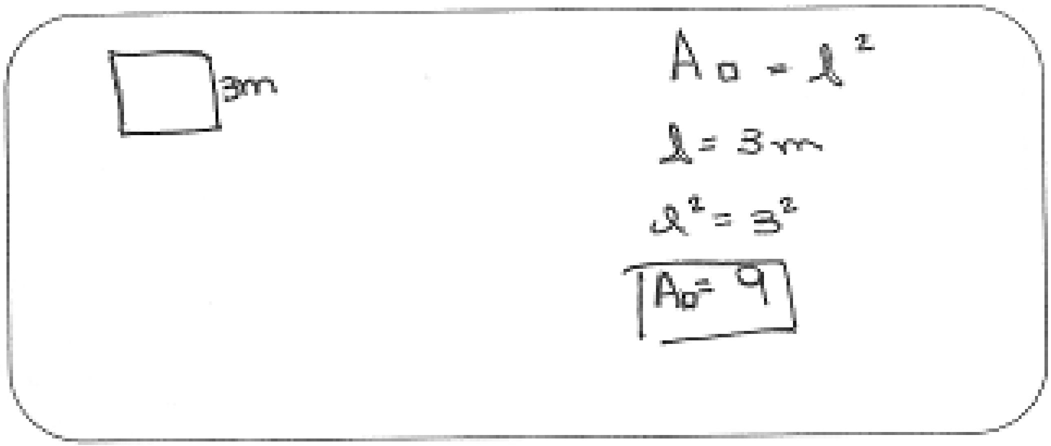
$1l = 8$

$3l = 8.3$ → △ = 3 lados

$P = 8.3$ ↳ $P = 3l$

$\boxed{P = 24}$

c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?



3m

$A_{\square} = l^2$

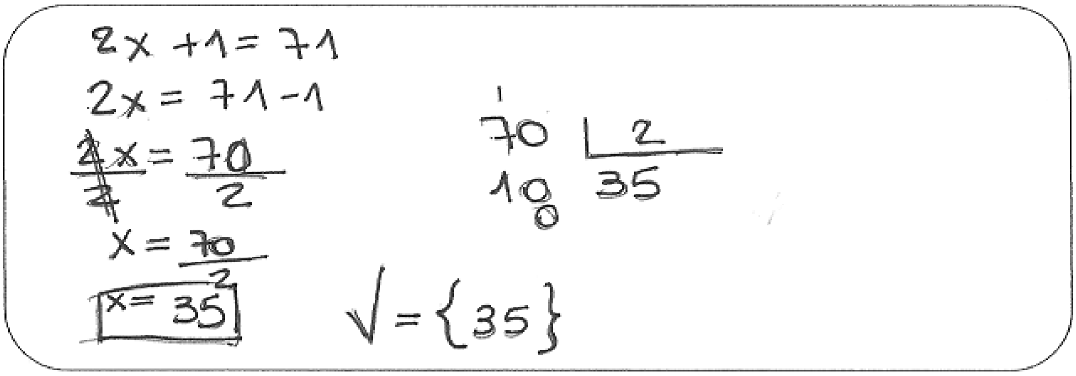
$l = 3m$

$l^2 = 3^2$

$\boxed{A_{\square} = 9}$

Na questão 4, Marcela recorre aos procedimentos formais que aprendeu para resolver equações. E utiliza o cálculo mental na maioria das operações envolvidas. Recorre ao algoritmo em dois momentos, como observamos nos itens b e c a seguir.

a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71



$2x + 1 = 71$

$2x = 71 - 1$

$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{70}{2}$

$x = \frac{70}{2}$

$\boxed{x = 35}$

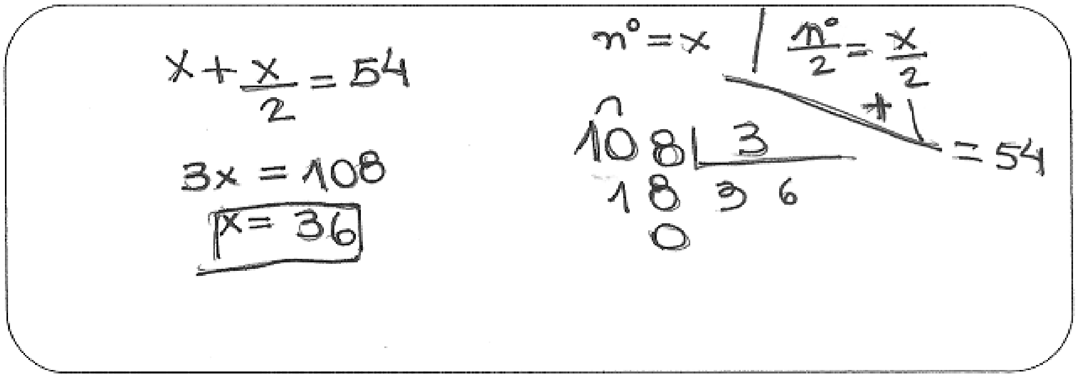
$70 \,\underline{|\, 2}$

$10 \quad 35$

0

$V = \{35\}$

b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?



$x + \frac{x}{2} = 54$

$3x = 108$

$\boxed{x = 36}$

$n^o = x$ | $\frac{n^o}{2} = \frac{x}{2}$

$+$

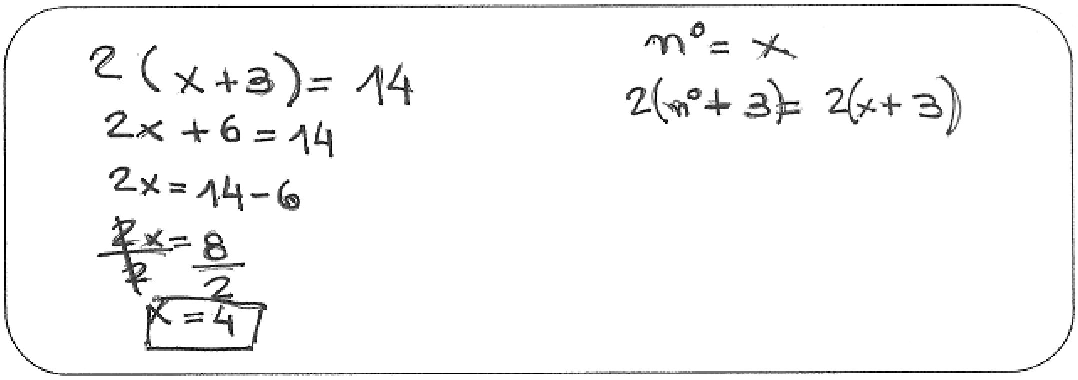
$= 54$

$108 \,\underline{|\, 3}$

$18 \quad 36$

0

c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?



$2(x + 3) = 14$

$2x + 6 = 14$

$2x = 14 - 6$

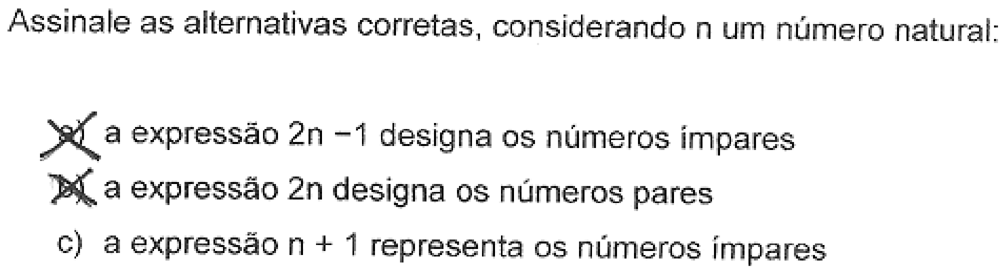
$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{8}{2}$

$\boxed{x = 4}$

$n^o = x$

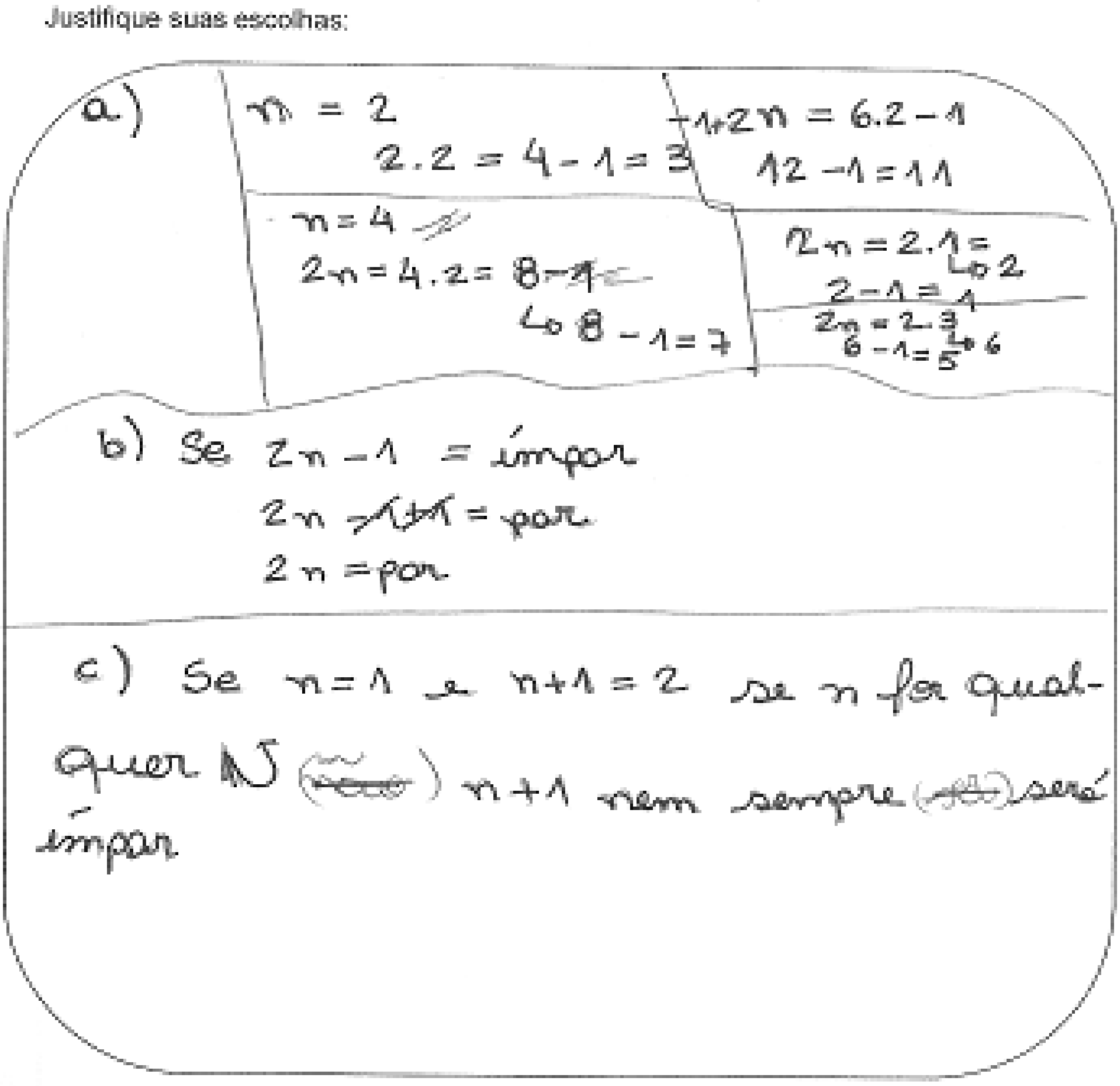
$2(n^o + 3) = 2(x + 3)$

Na questão 5, Marcela reconhece o papel generalizador da letra, realiza algumas substituições e assinala as alternativas corretas. Justifica suas escolhas a seguir.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

☒ a expressão $2n - 1$ designa os números ímpares
☒ a expressão $2n$ designa os números pares
c) a expressão $n + 1$ representa os números ímpares



Justifique suas escolhas:

a)

$n = 2$
$2.2 = 4 - 1 = 3$

$n = 4$
$2n = 4.2 = 8 - 1$
$\hookrightarrow 8 - 1 = 7$

$-1+2n = 6.2 - 1$
$12 - 1 = 11$

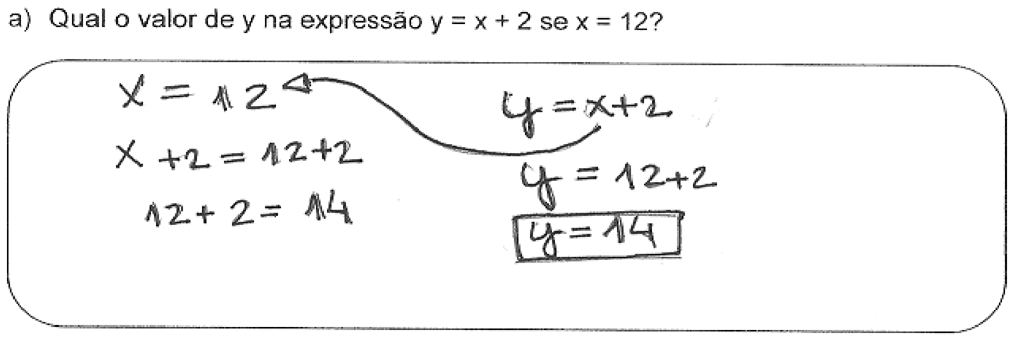
$2n = 2.1 = \hookrightarrow 2$
$2 - 1 = 1$

$2n = 2.3 \hookrightarrow 6$
$6 - 1 = 5$

b) Se $2n - 1$ = ímpar
$2n$ ~~$-1+1$~~ = par
$2n$ = par

c) Se $n = 1$ e $n+1 = 2$ se n for qualquer N (~~[illegible]~~) $n+1$ nem sempre (~~[illegible]~~) será ímpar

Na questão 6, Marcela reconhece o papel funcional da letra e resolve corretamente as propostas abaixo, operando os números racionais na forma fracionária com a mesma tranquilidade com a qual opera os números naturais.



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

$x = 12$

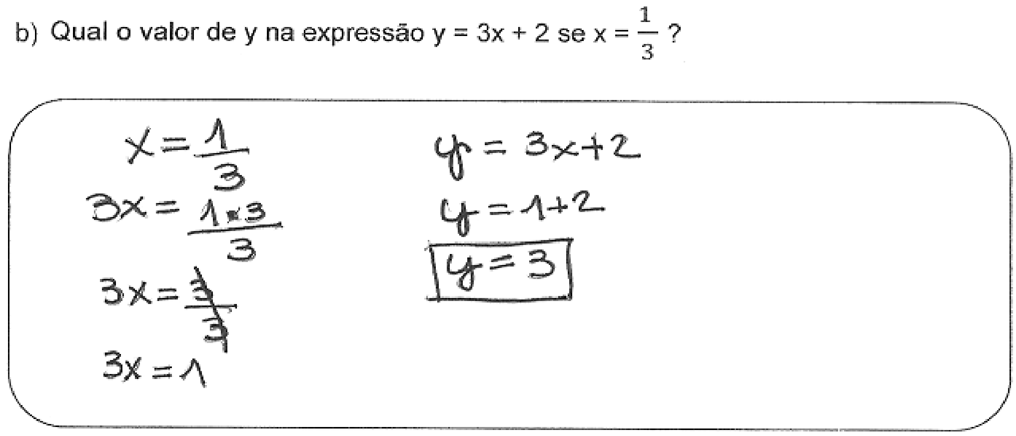
$x + 2 = 12 + 2$

$12 + 2 = 14$

$y = x + 2$

$y = 12 + 2$

$\boxed{y = 14}$



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

$x = \frac{1}{3}$

$3x = \frac{1 \times 3}{3}$

$3x = \cancel{\frac{3}{3}}$

$3x = 1$

$y = 3x + 2$

$y = 1 + 2$

$\boxed{y = 3}$

Segue o quadro para resumir os acertos e erros de Marcela.

Resumo dos acertos e erros de Marcela															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩		Sim
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟩	🟩						Sim
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Sim
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Às vezes
Questão 5	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Sim
Questão 6	a	b								
	🟩	🟩								Sim

Acompanhando as resoluções de Marcela, percebemos que a aluna mobiliza vários conhecimentos prévios para resolver mentalmente os cálculos sugeridos. Dentre eles, identificamos as estratégias de cálculo mental na adição, como alterar as parcelas e compensar o resultado; o domínio da tabuada e o uso de recursos de simplificação de dividendo e divisor para facilitar encontrar o quociente. Percebemos que Marcela utiliza suas habilidades de cálculo na resolução de problemas envolvendo letras, mas também mobiliza procedimentos formais da álgebra nessas resoluções.

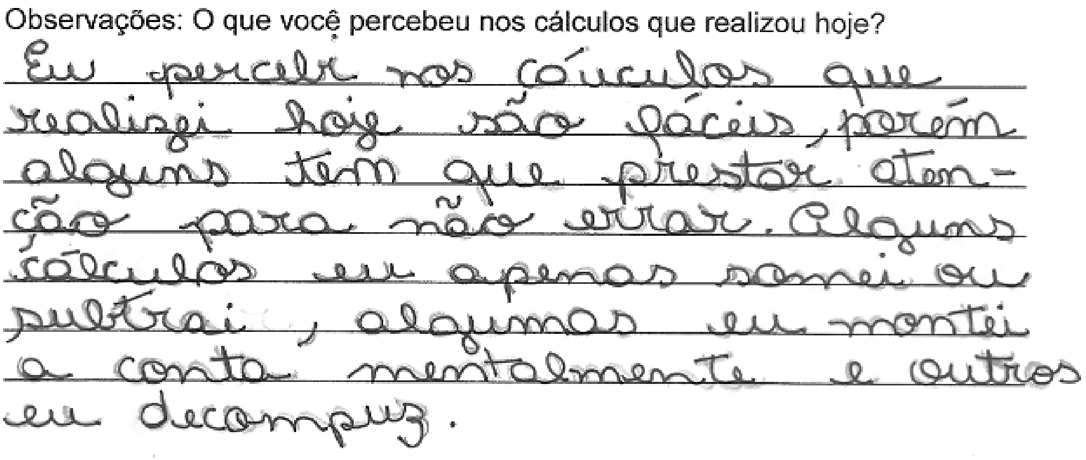
Passaremos, agora, à análise das questões de outra aluna do 7º ano, também considerada boa em Matemática conforme os critérios utilizados na nossa pesquisa.

4.3. Patrícia e seu desempenho

Patrícia participou dos encontros com entusiasmo, comemorando empolgada cada acerto e opinando sempre que possível nas situações colocadas no coletivo. Muito comunicativa e alegre, contribuiu para descontrair o grupo e incentivar que todos colocassem seus resultados sem constrangimento.

Na primeira atividade, Patrícia acertou todos os cálculos das sequências 1 a 4. No momento de trocas entre os alunos, quando todos falavam suas respostas e comentavam os cálculos, a aluna explicou como pensou para resolver as adições com sucesso e cita dois procedimentos diferentes: a montagem visual do algoritmo, chamada por ela de “montagem da conta na cabeça”, e o recurso da decomposição dos números, estratégia de cálculo mental trabalhada na escola nas séries anteriores. Durante a sequência 3, que trabalhava cálculos do tipo (a + a), Patrícia explicou que preferiu trocar a adição de números iguais pela tabuada do dois. E na sequência 4, com cálculos do tipo [a + (a + 1)], ela fez a seguinte observação ao grupo: “para fazer esse tipo de conta basta somar os números iguais e depois somar 1 ao resultado”.

Comentou que achou tudo muito fácil e no final do encontro fez o registro a seguir.



Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi nos cáuculos que realizei hoje são fáceis, porém alguns tem que prestar atenção para não errar. Alguns cálculos eu apenas somei ou subtrai, algumas eu montei a conta mentalmente e outros eu decompuz.

Nas sequências 5 a 8, Patrícia percebeu a regularidade nos resultados das tabuadas do dois, do quatro e do oito. Comentou que cada resultado era o dobro do anterior. Acertou a maioria das respostas, confundindo-se em três momentos, todos envolvendo cálculos do tipo 8 X a. Abaixo, os erros de Patrícia, que os justifica dizendo: “a tabuada do oito é a mais difícil. Sempre faço confusão”.

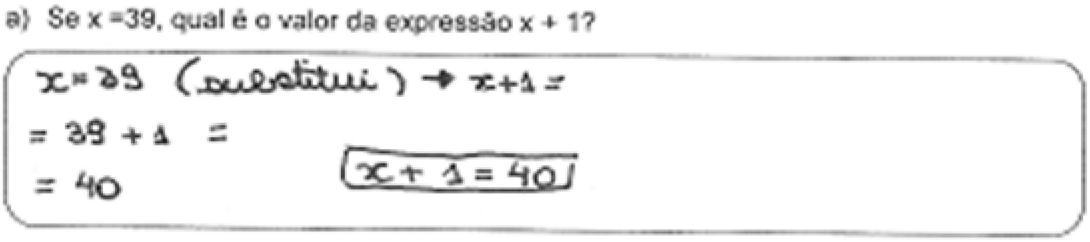
Cálculo solicitado	Sequência 7 Cálculos do tipo 8 X a
8 X 6	**42**
8 X 60	**420**
8 X 0,6	**4,2**

Observamos que a natureza dos erros de Patrícia não está ligada ao conjunto numérico envolvido, e sim aos valores da tabuada. A aluna opera mentalmente com facilidade, oferecendo os resultados rapidamente, tanto envolvendo números naturais quanto números racionais na forma decimal.

Nas sequências 9 a 12, Patrícia resolve os produtos com tranquilidade e acerta todos os resultados. Na divisão, porém, fica com dúvidas em como obter mentalmente os quocientes de dois números racionais na forma decimal. Analisem-se suas respostas.

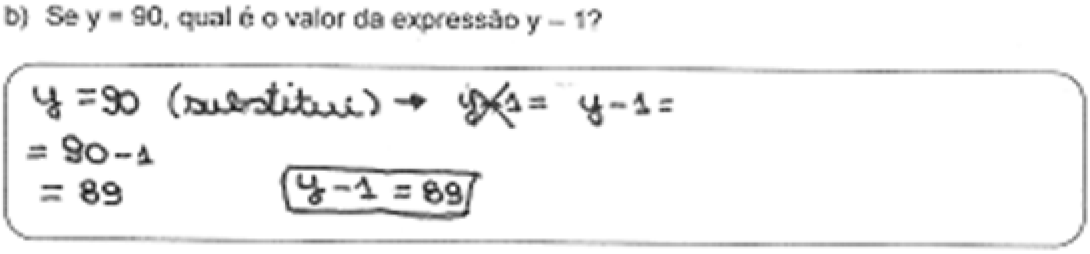
Cálculo solicitado	Sequência 12 Cálculos do tipo a : b
1,4 : 0,7	**0,2**
2,1 : 0,7	**0,3**
3,5 : 0,7	**0,5**
4,9 : 0,7	**0,7**
5,6 : 0,7	**0,8**

Na segunda atividade, Patrícia utiliza uma maneira clara e organizada de registrar seu raciocínio. Não utiliza algoritmos, mas faz uso do cálculo mental nas resoluções. E, em alguns casos, deixa um recadinho ao lado, circulado numa nuvem, para explicar algum procedimento. Mostramos, agora, suas resoluções na questão 1.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

x = 39 (substitui) → x+1 =
= 39 + 1 =
= 40
x + 1 = 40



b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

y = 90 (substitui) → [illegible]= y-1 =
= 90-1
= 89
y-1 = 89

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

w = 10 (substitui) → 4 . w =
= 4 . 10 =
= 40 $\boxed{4 . w = 40}$

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

m = 140 (substitui) → m : 7 =
= 140 : 7 =
= 20

Se 14 é 2 vezes 7, 140 é 20 vezes 7

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

t = 4,5 (substitui) → t + 1 =
= 4,5 + 1 → soma no 1º número (4)
= 5,5 $\boxed{t + 1 = 5,5}$

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

r = 200 (substitui) → r – 1 =
= 200 – 1 =
= 199 $\boxed{r - 1 = 199}$

g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

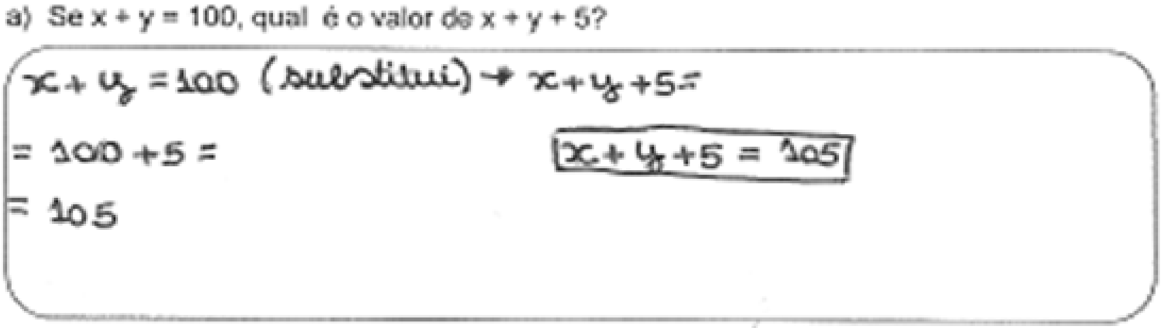
s = 3,6 (substitui) → ~~[illegible]~~ $\frac{3,6}{0,6}$ $\boxed{s : 0,6 = 0,6}$
$= \frac{3,6^{\times 10}}{0,6^{\times 10}}$ → (multiplica por 10)
$= \frac{36}{6}$ = 6 (ajusta para decimas) = 0,6

h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

z = 7 (substitui) → z . 0,7 =
= 7 . 0,7 = ~~(multiplica por 10)~~
$\boxed{\begin{array}{l} 7 . 7 = 49 \\ \text{ajusta p/decimal} \end{array}}$ = 4,9 $\boxed{z . 0,7 = 4,9}$

Repare-se que, no item g mostrado anteriormente, Patrícia demonstra a crença de alguns alunos de que quando operamos racionais na representação decimal o resultado deve ser um número não inteiro. Observe-se que ela calcula corretamente o quociente e erra quando ajusta o resultado, colocando uma vírgula na resposta final. Quando questionada a respeito desse procedimento, fala: "não tenho certeza, mas acho que é preciso ajustar a resposta final e colocar uma casa decimal. Não é assim?".

Assim como Patrícia reconheceu o papel da letra na questão anterior, ela também o faz na questão 2, realizando as substituições das letras pelos respectivos valores numéricos de maneira adequada. O cálculo mental se fez presente nessas resoluções, como podemos perceber nas transcrições a seguir.



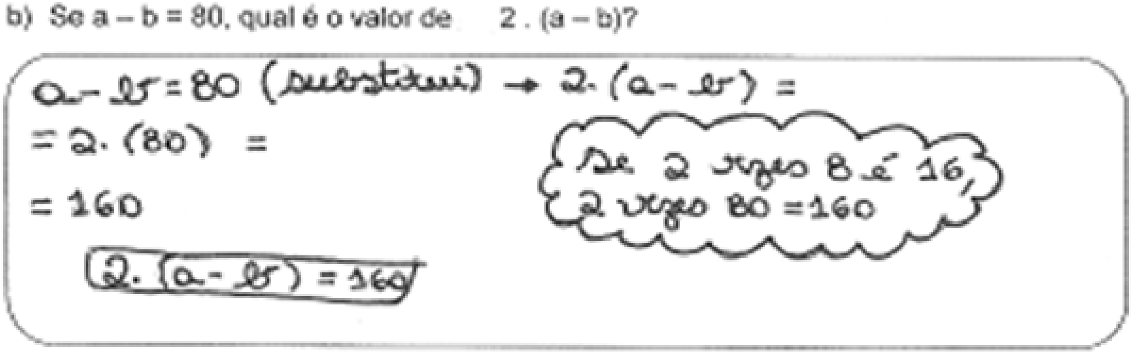
a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

x + y = 100 (substitui) → x + y + 5 =

= 100 + 5 =

= 105

$\boxed{x + y + 5 = 105}$



b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

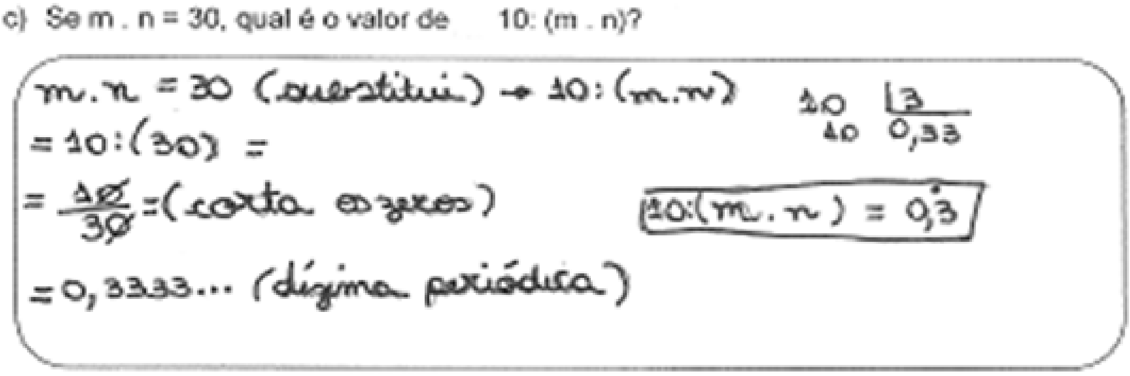
a − b = 80 (substitui) → 2.(a − b) =

= 2.(80) =

= 160

Se 2 vezes 8 é 16,
2 vezes 80 = 160

$\boxed{2.(a - b) = 160}$



c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

m.n = 30 (substitui) → 10:(m.n)

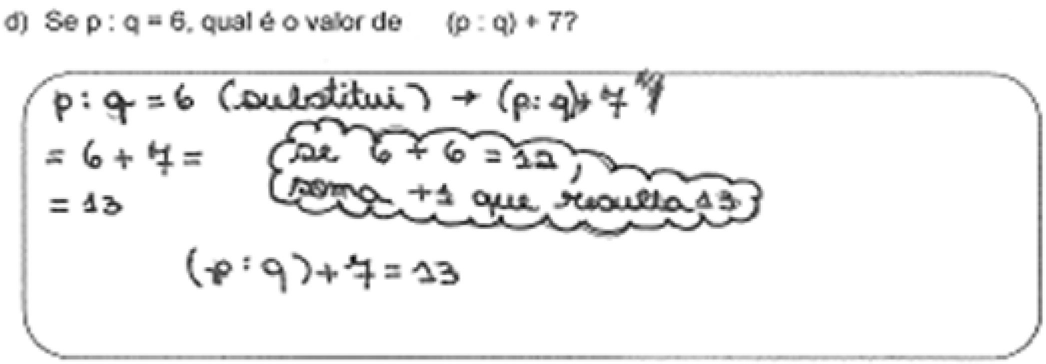
= 10:(30) =

= $\frac{1\cancel{0}}{3\cancel{0}}$ = (corta os zeros)

= 0,3333... (dízima periódica)

10 |3
10 0,33

$\boxed{10:(m.n) = 0,\dot{3}}$



d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

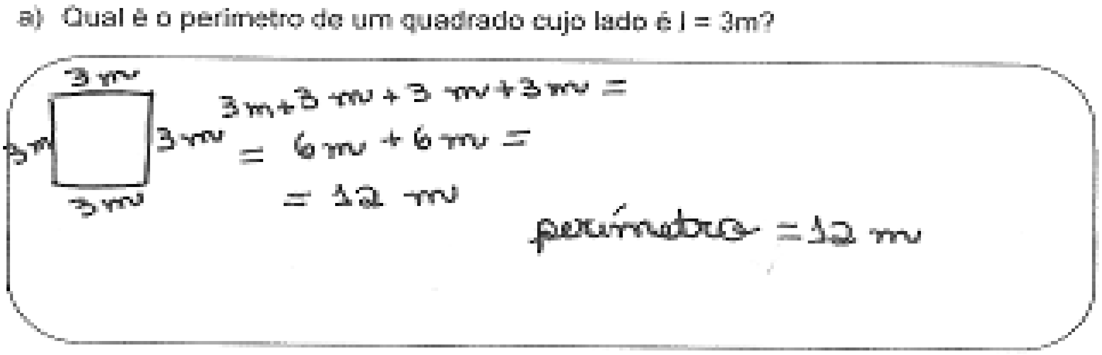
p : q = 6 (substitui) → (p : q) + 7

= 6 + 7 = se 6 + 6 = 12, soma +1 que resulta 13

= 13

(p : q) + 7 = 13

Patrícia resolve a questão 3, que envolve cálculo de perímetro e área, com clareza e não encontra problemas em registrar seu raciocínio. Faz uso do cálculo mental também nessa questão. Seguem suas resoluções.



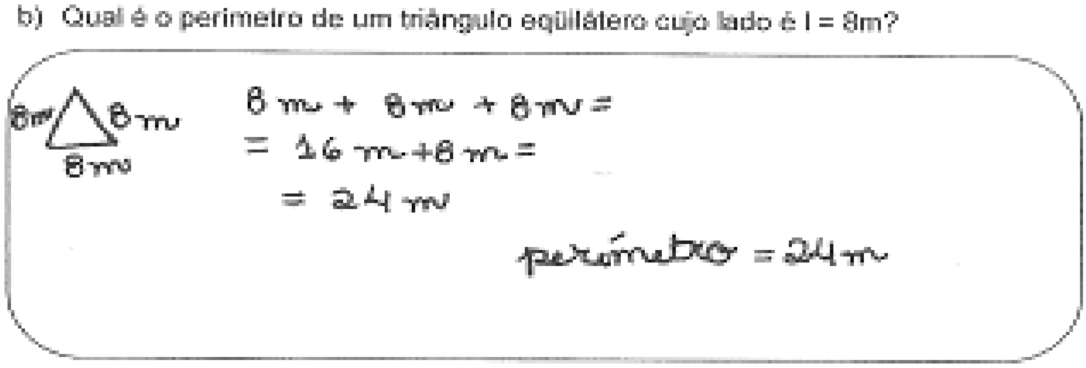
a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

3m + 3 m + 3 m + 3 m =

= 6 m + 6 m =

= 12 m

perímetro = 12 m



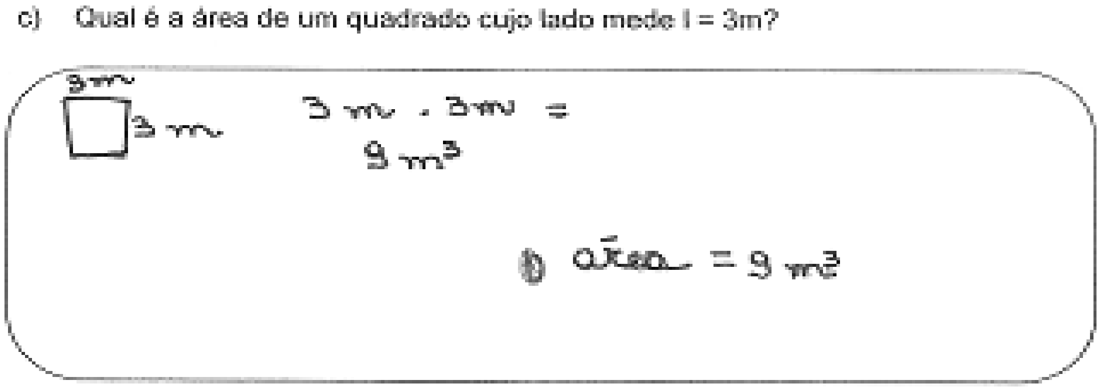
b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

8 m + 8 m + 8 m =

= 16 m + 8 m =

= 24 m

perímetro = 24 m



c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

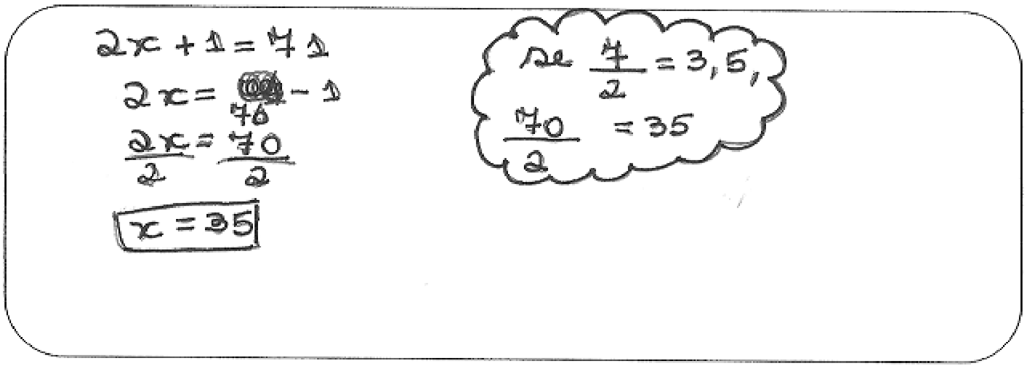
3 m . 3 m =

$9 m^3$

área = $9 m^3$

Quando chega na questão 4, Patrícia resolve a equação utilizando procedimentos formais da álgebra, já aprendidos no 7º ano. Observe-se o item a dessa questão.

a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71



$2x + 1 = 71$

$2x = \cancel{71} - 1$

70

$\frac{2x}{2} = \frac{70}{2}$

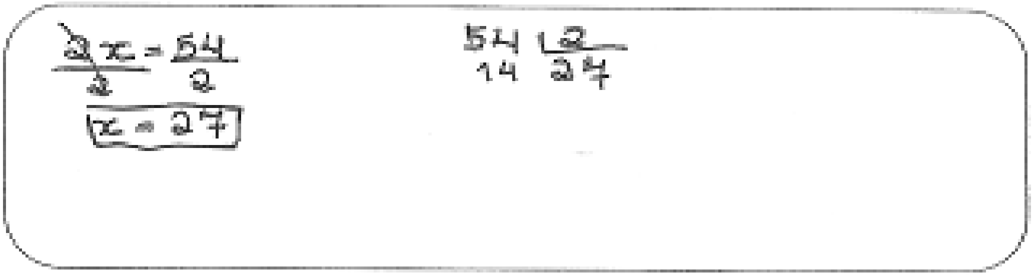
$\boxed{x = 35}$

se $\frac{7}{2} = 3,5$,

$\frac{70}{2} = 35$

Nos próximos dois itens, b e c da questão 4, a aluna tentou utilizar a equação na resolução dos problemas apresentados. Não consegue resolver o primeiro problemas, mas resolve o segundo de maneira correta e deixa, numa nuvem, uma dica de como operou mentalmente a subtração 14 – 6. Ela utilizou uma estratégia de cálculo mental que transforma o minuendo numa dezena e, depois, compensa o resultado. Observe-se.

b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?



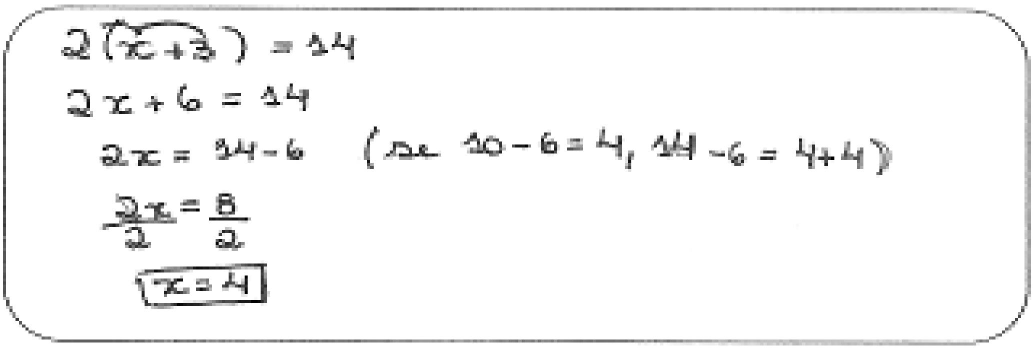
$\frac{2x}{2} = \frac{54}{2}$

$\boxed{x = 27}$

$54 \,|\, 2$

$14 \quad 27$

c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?



$2(x+3) = 14$

$2x + 6 = 14$

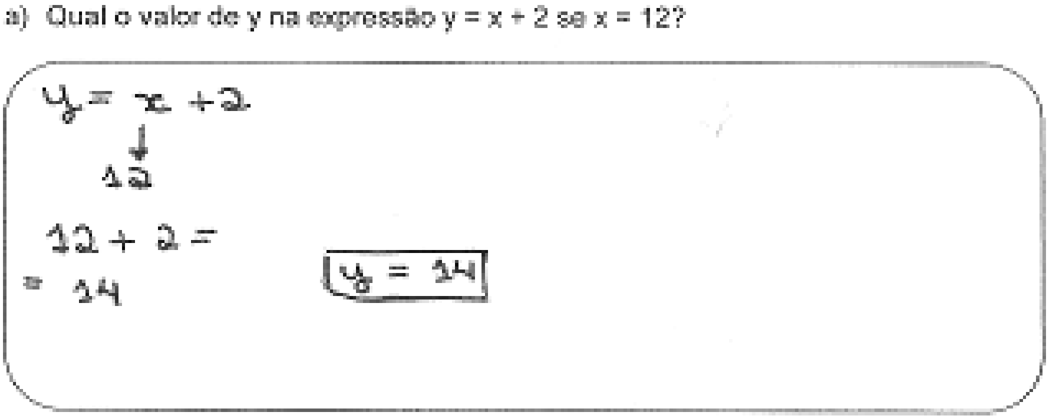
$2x = 14 - 6$ (se $10 - 6 = 4$, $14 - 6 = 4 + 4$)

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

$\boxed{x = 4}$

A questão 5 ficou totalmente em branco, sem nenhuma anotação. Quando perguntei à Patrícia o que ela havia entendido daquele exercício, a aluna relatou que não sabia nem sequer ler aquelas frases. O que nos indica a dificuldade no entendimento da letra como generalizadora de modelos aritméticos.

Na questão 6, a aluna demonstrou reconhecer a letra como variável para expressar relações. Realizou a substituição de maneira adequada e utilizou o cálculo mental na primeira resolução. Já na segunda, que operava números racionais na forma fracionária, Patrícia acaba errando no procedimento de adição de frações com denominadores diferentes. Nesse caso, ela não percebeu que $\frac{3}{3}$ correspondem a 1 inteiro e não utilizou o cálculo mental nessa simples adição. Podemos observar as resoluções de Patrícia nos quadros abaixo.



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

$y = x + 2$

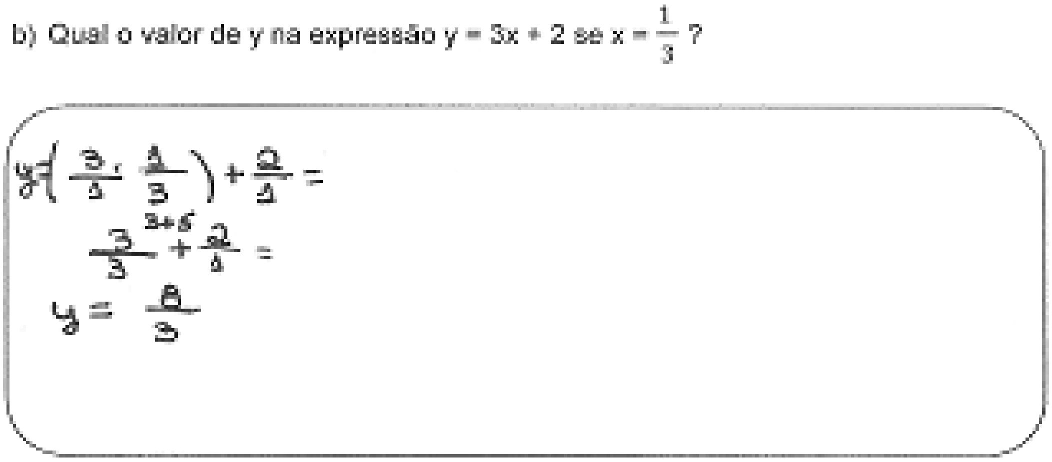
$\quad\downarrow$

$\quad 12$

$12 + 2 =$

$= 14$

$\boxed{y = 14}$



b) Qual o valor de y na expressão $y = 3x + 2$ se $x = \frac{1}{3}$?

$y = \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{1} =$

$\overset{3+6}{\frac{3}{3}} + \frac{2}{1} =$

$y = \frac{8}{3}$

Elaboramos um quadro com os acertos e erros da aluna.

Resumo dos acertos e erros de Patrícia															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩		Sim
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟩	🟩						Sim
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Sim
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟥	🟩							Sim
Questão 5	a	b	c							
	🟦	🟦	🟦							
Questão 6	a	b								
	🟩	🟥								Sim

Fazendo um resumo do desempenho de Patrícia, podemos identificar alguns conhecimentos prévios que a aluna utilizou em suas resoluções: estratégias de cálculo mental como a decomposição de números e a transformação do minuendo numa dezena para, depois, compensar o resultado; o domínio de cálculos simples do tipo (a + 1) e (a – 1); a troca da adição de duas parcelas iguais pelo uso da tabuada do dois; e o domínio da tabuada. A aluna demonstrou utilizar o cálculo mental com desenvoltura, tanto com os números naturais como com os números racionais na forma decimal. E soube utilizar essa habilidade nas resoluções dos exercícios que envolviam letras. Para resolver esses exercícios que caracterizavam uma aproximação com a álgebra, Patrícia mobilizou seus conhecimentos de resolução formal de equações e obteve sucesso na maioria deles. Dentre os diferentes papéis das letras na álgebra do Ensino Fundamental, Patrícia só não compreendeu a letra como generalização do modelo aritmético, mostrando dominar as situações em que a letra assume as dimensões funcional, estrutural e nas equações.

O quadro acima nos ajuda a localizar os erros de Patrícia, que envolvem, além da distração com a tabuada, a divisão de números racionais na forma decimal, resultando números inteiros. Também nos ajuda a afirmar que a aluna realiza cálculos mentalmente com facilidade, sendo capaz de transferir esse conhecimento para a resolução de situações de cálculos que usam letras.

Passaremos à analise de outra aluna do 7º ano, agora classificada como aluna mediana em Matemática.

4.4. Giovanna e seu desempenho

Giovanna aceitou o convite para participar dos nossos encontros com reservas, deixando claro que não gosta muito da Matemática. Foi-se desarmando a medida que percebia seus vários acertos.

Na primeira atividade, acertou todos os resultados das sequências 1 a 4. Na socialização das respostas, fez dois comentários interessantes. Na sequência 3, com cálculos do tipo (a + a), Giovanna declarou: “para efetuar 90 + 90, pensei em dois ângulos retos que resultam um ângulo raso”. Isso nos permitiu perceber que a aluna mobilizou conhecimentos prévios de geometria para efetuar um cálculo mental. Outro comentário aconteceu na mesma sequência, quando Giovanna disse que quase errou o resultado de 0,9 + 0,9. Num primeiro momento, pensou em escrever como resultado 0,18. Depois, pensou em dinheiro e percebeu que noventa centavos mais noventa centavos resultam um real e oitenta centavos. Mudou de ideia e respondeu 1,8 como resultado daquela adição.

Na sequência 4, com cálculos do tipo [a + (a + 1)], Giovanna concordou com colegas que também acham mais simples primeiro adicionar os números iguais e depois adicionar 1 ao resultado. Relatou também ter usado essa estratégia.

Nas sequências 5 a 8, Giovanna apresentou alguns equívocos nas respostas, a maioria associados aos números racionais na forma decimal. Observem-se seus erros.

Cálculo solicitado	Sequência 5 Cálculos do tipo 2 X a	Sequência 6 Cálculos do tipo 4 X a
2 X 0,6	**0,12**	
2 X 0,7	**0,14**	
2 X 0,9	**0,18**	
4 X 100		**4 000**

Apesar de tratar-se de uma aluna já de 7º ano, Giovanna ainda faz uso dos dedos e da contagem para chegar aos resultados da multiplicação. A aluna, por exemplo, externou a dificuldade na tabuada e contou ao grupo que, para fazer 4 x 7, ela efetuou primeiro 4 x 5 = 20 e foi adicionando 4 aos próximos resultados.

Nas sequências 9 a 12, Giovanna acertou todos os cálculos e comentou que estava mais segura em realizar cálculos mentalmente, principalmente com os números racionais na forma decimal, por causa das dicas que recebeu dos colegas ao longo dos encontros.

Na segunda atividade, observando as resoluções de Giovanna na questão 1, observamos que a aluna compreende o papel da letra na expressão e a substitui corretamente pelo valor numérico fornecido. Expressa seu raciocínio fazendo uso de expressões matemáticas e utiliza o cálculo mental na maioria das resoluções, sem necessidade de montar os algoritmos. São exceções os itens g e h, ocasiões em que a aluna prefere montar o algoritmo para certificar-se das respostas. Vale ressaltar que nesses casos, as expressões envolviam números racionais na representação decimal. As resoluções de Giovanna na questão 1 seguem abaixo.

a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

39 + 1 = 40 | x = 39

O valor da expressão x+1 é 40.

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

90 – 1 = 89 | y = 90

O valor da expressão é 89.

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

4 . 10 = 40 | w = 40

O valor da expressão é 40.

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

140 : 7 = 20 | m = 140

O valor da expressão é 20.

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

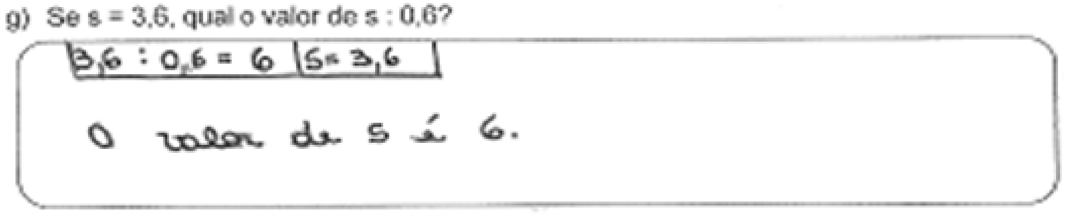
4,5 + 1,0 = 5,5 | t = 4,5

O valor de t + 1 é 5,5.

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

200 – 1 = 199 | r = 200

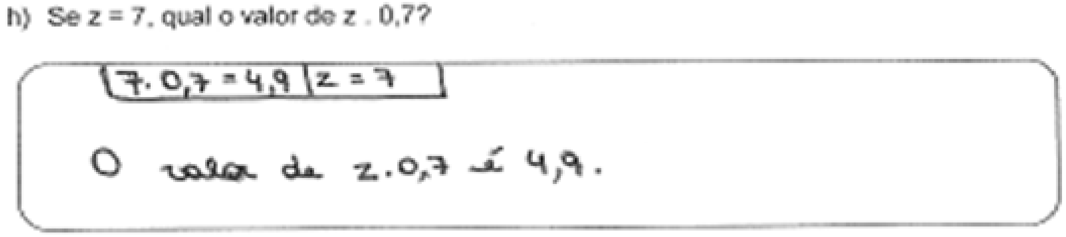
O valor de r – 1 é 199.



g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

3,6 : 0,6 = 6 | s= 3,6

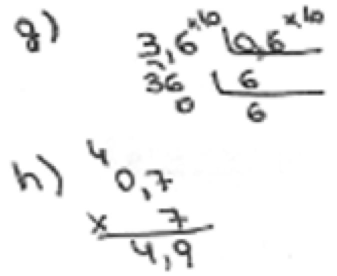
O valor de s é 6.



h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

7. 0,7 = 4,9 | z = 7

O valor de z.0,7 é 4,9.



g) $3{,}6^{\times 10} \; | \; 0{,}6^{\times 10}$

$36 \; | \; 6$

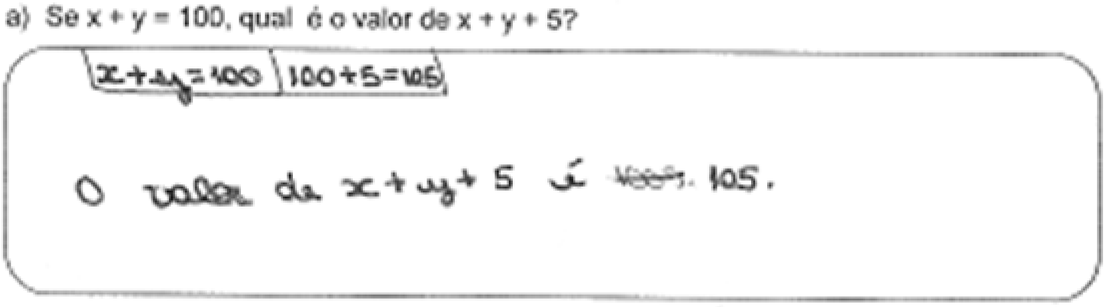
$0 \quad 6$

h) $\overset{4}{0{,}7}$

$\times \; 7$

$4{,}9$

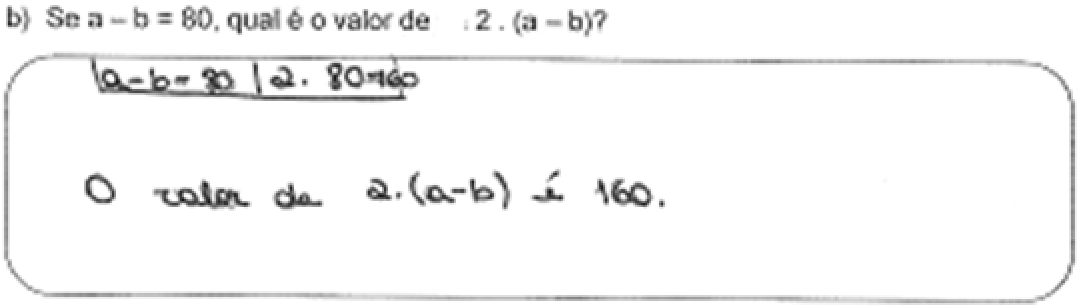
Na questão 2, Giovanna compreende o papel das letras envolvidas nas expressões e as substitui corretamente pelo valor numérico fornecido. Recorre ao cálculo mental nas situações que envolvem números racionais na forma decimal e utiliza o algoritmo no item c, ocasião em que precisa efetuar uma divisão com dividendo menor que o divisor. Suas resoluções seguem nas imagens seguintes.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

x+y=100 | 100+5=105

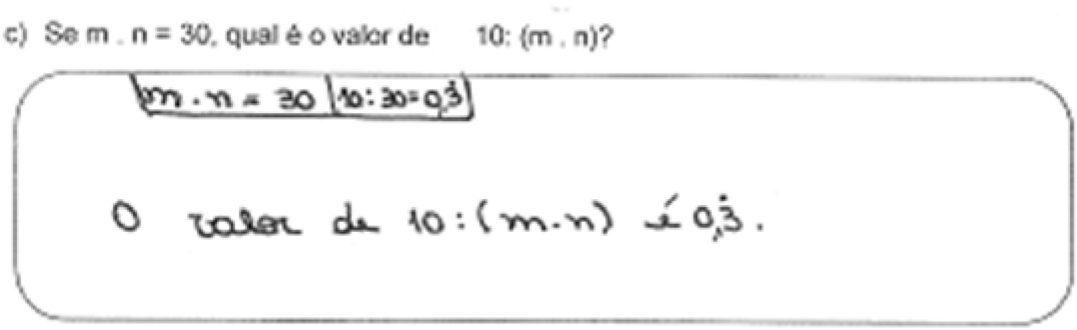
O valor de x+y+5 é ~~100~~. 105.



b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

a-b= 80 | 2. 80=160

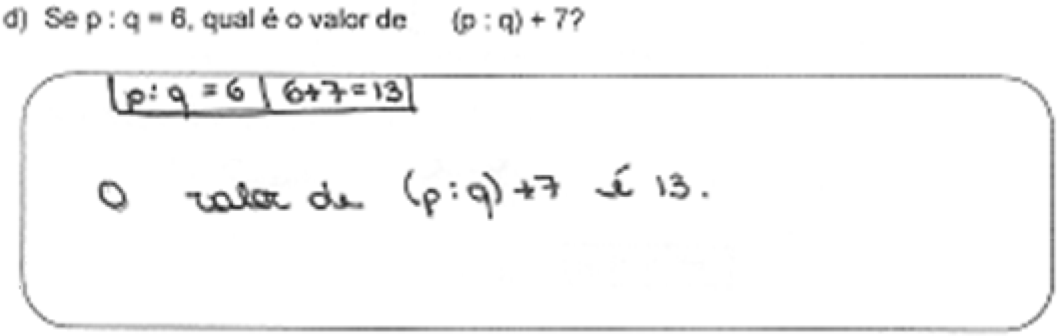
O valor de 2.(a-b) é 160.



c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

m . n = 30 | $10:30=0,\dot{3}$

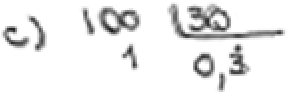
O valor de 10:(m.n) é $0,\dot{3}$.



d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

p : q = 6 | 6+7=13

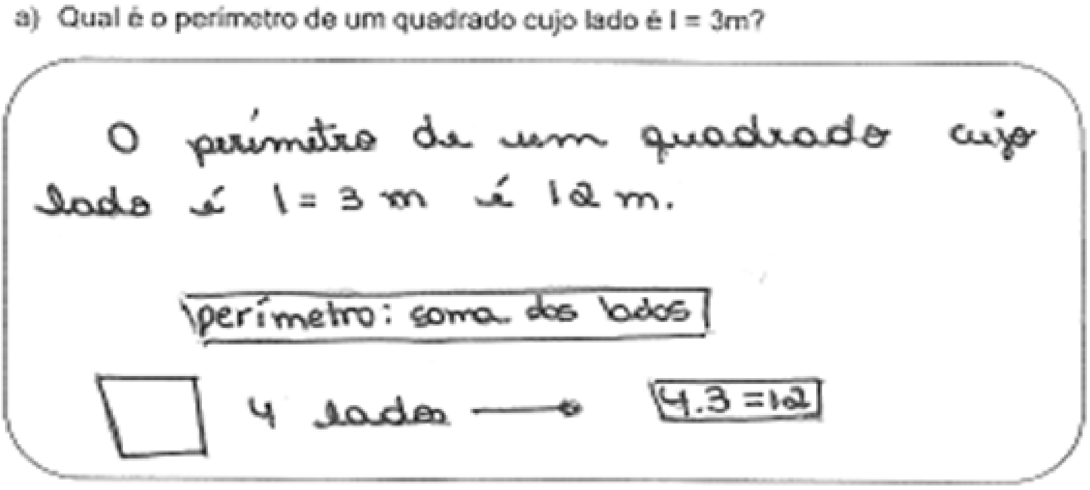
O valor de (p:q)+7 é 13.



c) 100 |30

1 $0,\dot{3}$

Na questão 3, Giovanna identifica o significado da letra “l” no enunciado e resolve corretamente os problemas de perímetro e área. Recorre ao cálculo mental nas resoluções e deixa seu raciocínio muito claro, conforme observamos abaixo.

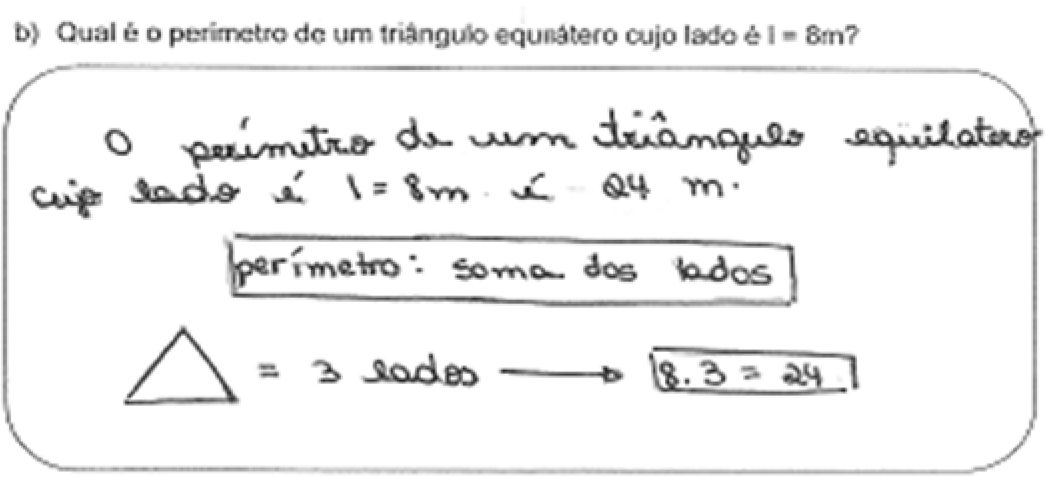


a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

O perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3 m é 12 m.

perímetro: soma dos lados

4 lados → 4.3 =12

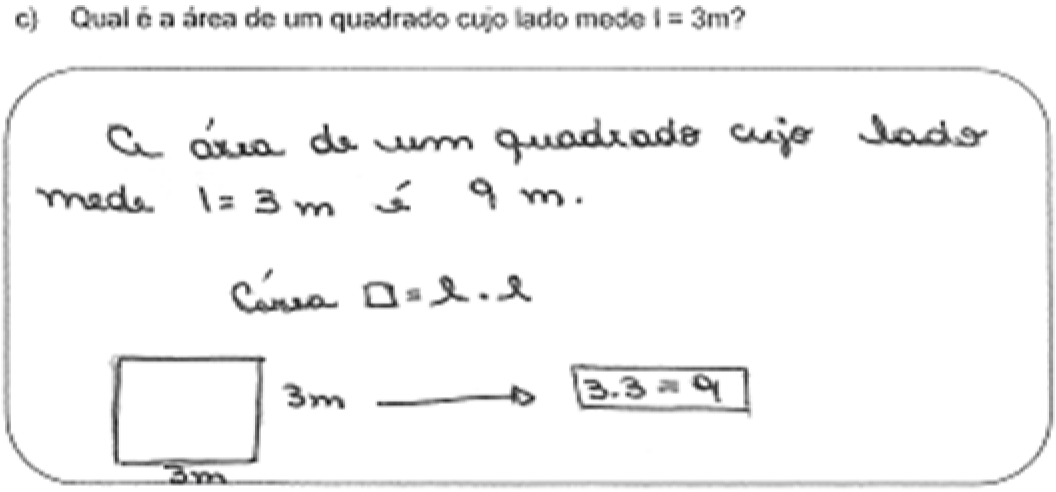


b) Qual é o perímetro de um triângulo equilátero cujo lado é l = 8m?

O perímetro de um triângulo equilatero cujo lado é l = 8m é 24 m.

perímetro: soma dos lados

= 3 lados ⟶ 8.3 = 24



c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

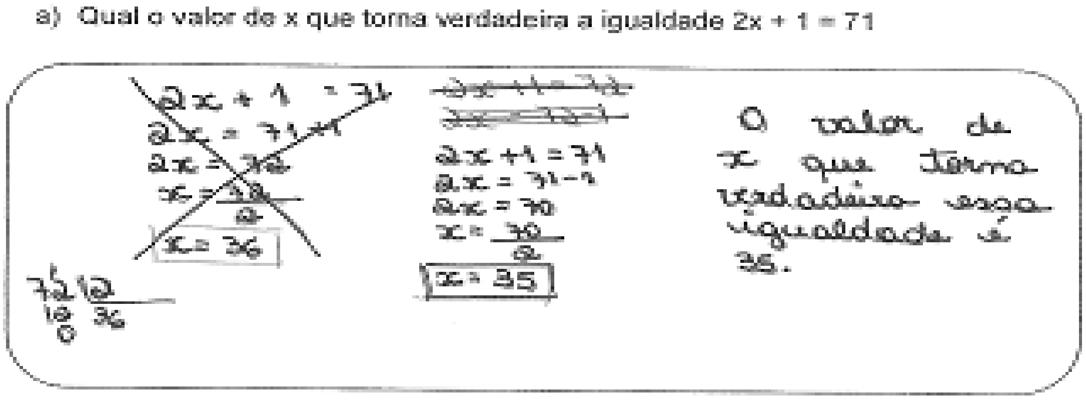
a área de um quadrado cujo lado mede l = 3 m é 9 m.

Área □ = l . l

3m ⟶ 3.3 = 9

3m

Na questão 4, Giovanna recorre aos procedimentos formais de resolução da álgebra que já havia aprendido. No item a, a aluna resolve a equação uma primeira vez e comete um erro na resolução, logo na segunda linha. Depois, percebe seu equívoco e a refaz ao lado. Repare que, no item b, Giovanna também erra na resolução da equação, logo na terceira linha. Mas rasura e refaz a operação. Nesses dois casos, o algoritmo foi utilizado para efetuar alguns cálculos. E no item c, Giovanna não utiliza um parêntese quando monta a equação para resolver o problema e modifica sua estrutura, errando a resolução.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

~~$2x + 1 = 71$~~

~~$2x = 71 + 1$~~

~~$2x = 72$~~

~~$x = \frac{72}{2}$~~

~~$\boxed{x = 36}$~~

$72 \underline{|2}$
$12 \quad 36$
0

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$2x + 1 = 71$

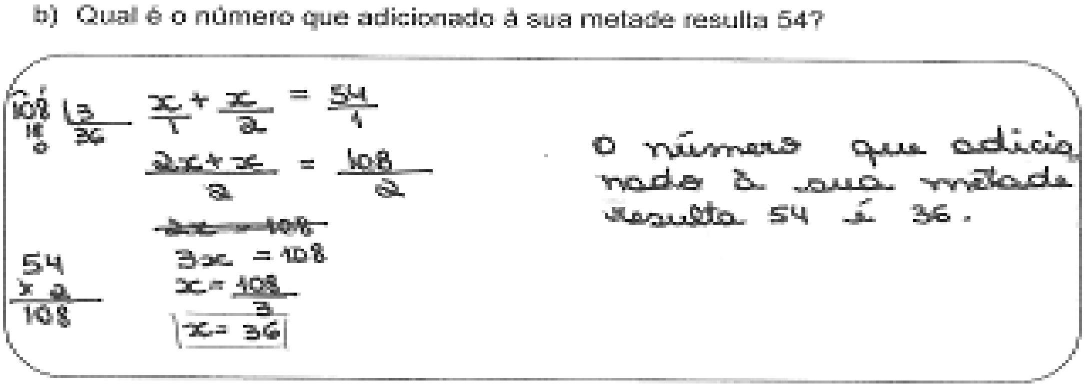
$2x = 71 - 1$

$2x = 70$

$x = \frac{70}{2}$

$\boxed{x = 35}$

O valor de x que torna verdadeira essa igualdade é 35.



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

$108 \underline{|3}$
$18 \quad 36$
0

$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} = \frac{54}{1}$

$\frac{2x + x}{2} = \frac{108}{2}$

~~$2x = 108$~~

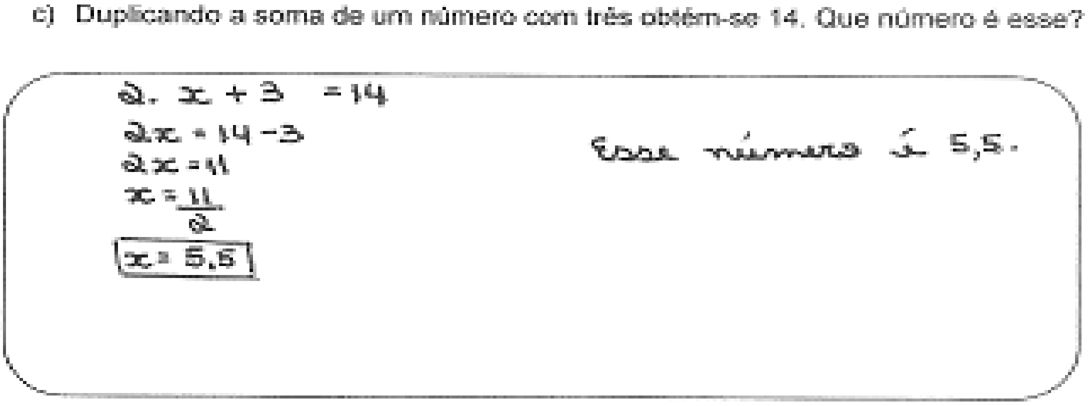
$3x = 108$

$x = \frac{108}{3}$

$\boxed{x = 36}$

54
$\times 2$
108

O número que adicionado à sua metade resulta 54 é 36.



c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

$2 . x + 3 = 14$

$2x = 14 - 3$

$2x = 11$

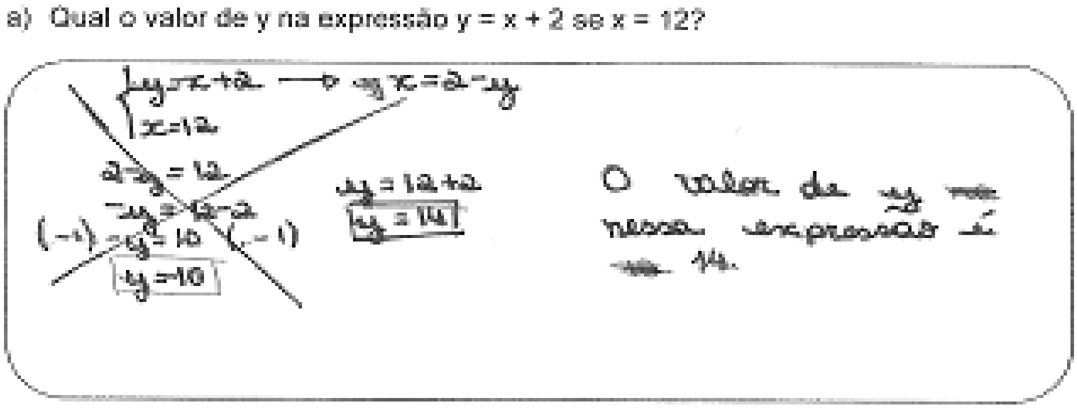
$x = \frac{11}{2}$

$\boxed{x = 5,5}$

Esse número é 5,5.

Giovanna não respondeu a questão 5 deixando um recado escrito: “não entendi!”. Encontramos, mais uma vez, indícios da dificuldade no entendimento da letra como generalizadora de modelos aritméticos.

Na questão 6, Giovanna pensa em utilizar um sistema de equações para resolver o item a. Depois, perdida na resolução, muda a estratégia e determina corretamente o valor da letra fazendo uma simples substituição. Observe-se.



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

~~$\begin{cases} y = x+2 \\ x = 12 \end{cases} \longrightarrow x = 2 - y$~~

~~$2 - y = 12$~~

~~$-y = 12 - 2$~~

~~$(-1)\ -y = 10\ (-1)$~~

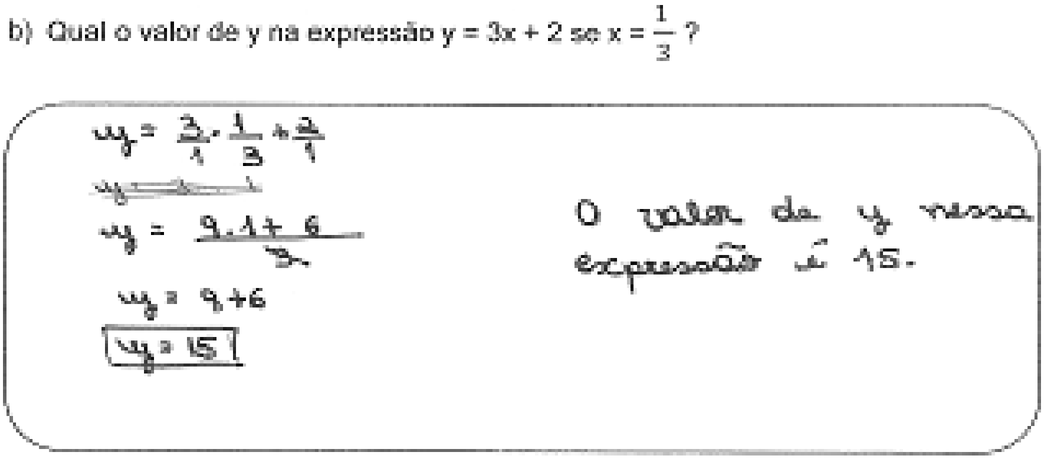
~~$\boxed{y = 10}$~~

$y = 12 + 2$

$\boxed{y = 14}$

O valor de y ~~y~~ nessa expressão é 14.

Ainda na mesma questão, no item b, percebemos que a aluna realiza corretamente a substituição da letra pelo valor numérico e acaba errando nos cálculos com os números racionais na forma fracionária. Observe-se que ela efetuou o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) ignorando o produto na expressão. Usando o m.m.c. como se estivesse adicionando, Giovanna erra a resposta da questão.



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se $x = \frac{1}{3}$?

$y = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{1}$

$y = \frac{9.1 + 6}{3}$

$y = 9 + 6$

$\boxed{y = 15}$

O valor de y nessa expressão é 15.

Na sequencia, apresentamos o quadro dos acertos e erros de Giovanna.

Resumo dos acertos e erros de Giovanna															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?					
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h							
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩		Às vezes					
Questão 2	a	b	c	d											
	🟩	🟩	🟩	🟩						Às vezes					
Questão 3	a	b	c												
	🟩	🟩	🟩							Sim					
Questão 4	a	b	c												
	🟩	🟩	🟥							Sim					
Questão 5	a	b	c												
	🟦	🟦	🟦												
Questão 6	a	b													
	🟩	🟥								Sim					

Fazendo uma síntese do desempenho de Giovanna, podemos identificar alguns conhecimentos prévios que a aluna utilizou em suas resoluções: o domínio de cálculos simples do tipo (a + 1) e (a – 1) para os números naturais e racionais na forma decimal; a troca da adição de duas parcelas iguais pelo uso da tabuada do dois; o uso da estratégia de adicionar primeiro parcelas iguais para, depois, acrescentar 1 ao resultado para efetuar cálculos do tipo [a + (a + 1)]; o resgate de conceitos da geometria para efetuar cálculos aritméticos; e o costume de comparar números racionais na forma decimal com valores em dinheiro para facilitar os cálculos. A aluna não demonstrou dificuldades em calcular mentalmente com os números racionais na forma decimal, mas reconheceu a influência de seus colegas que, com dicas e comentários a respeito, a ajudaram. Giovanna soube utilizar suas habilidades com os cálculos efetuados mentalmente nas resoluções dos exercícios que envolviam letras. Para resolver esses exercícios que caracterizavam uma aproximação com a álgebra, Giovanna também mobilizou seus conhecimentos de resolução formal de equações e atrapalhou-se em alguns deles. Dentre os diferentes papéis das letras na álgebra do Ensino Fundamental, Giovanna só não compreendeu a letra como generalização do modelo aritmético, mostrando dominar as situações em que a letra assume as dimensões funcional, estrutural e nas equações.

Vamos agora às análises das atividades de Theo, nosso próximo aluno de 7º ano.

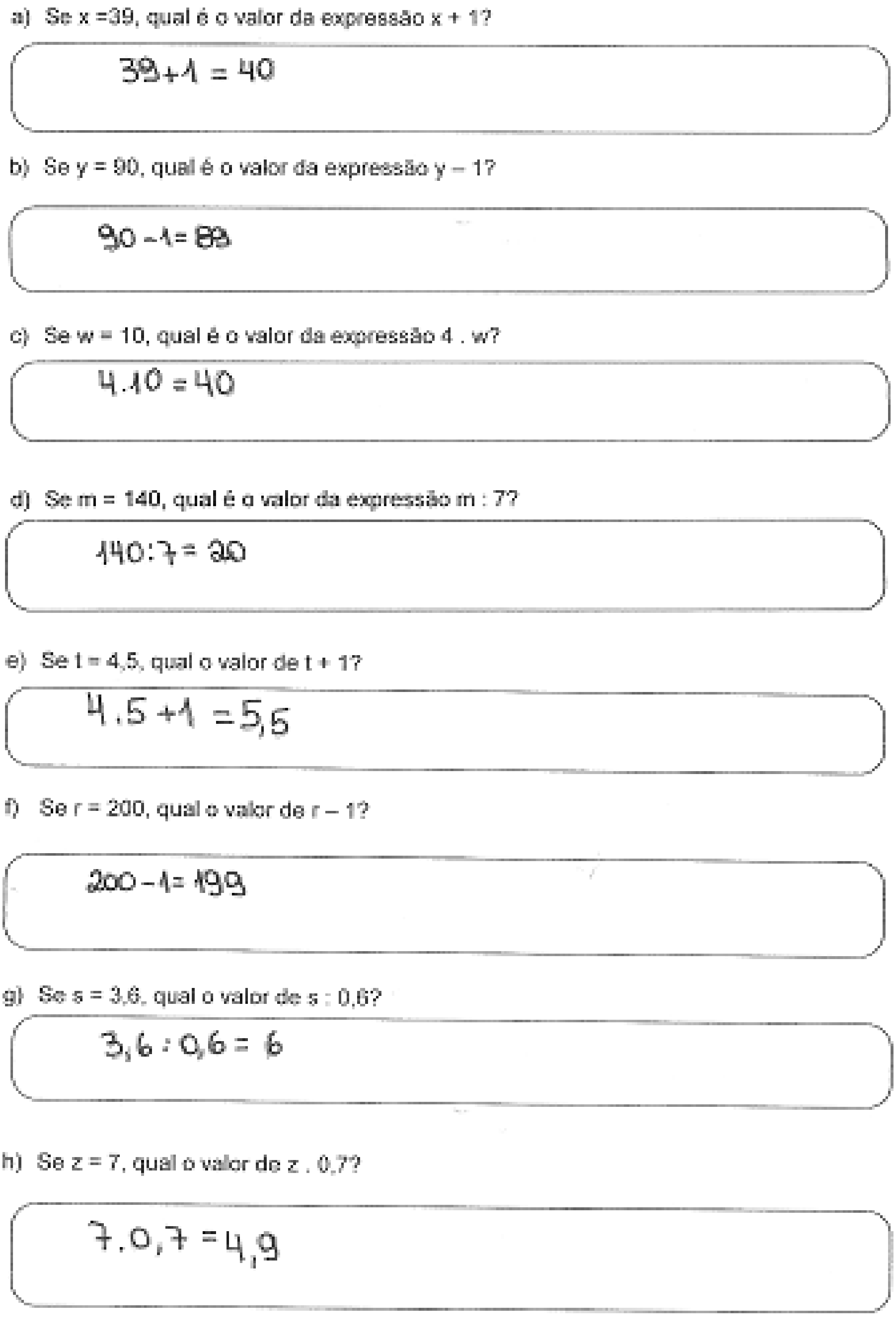
4.5. Theo e seu desempenho

Theo é um aluno perfeccionista, que gosta de fazer tudo com muito capricho e organização. Está sempre em busca de melhorar seu desempenho e aprimorar conhecimentos. Gosta de desafios matemáticos e nunca desiste da resolução, até chegar à resposta correta. Aceitou prontamente o convite para participar dos nossos encontros, mesmo tendo que cancelar outros compromissos. Seu temperamento reservado e discreto o diferenciam do grupo.

Na primeira atividade, acertou todos os resultados em todas as sequências. Nas discussões coletivas, Theo concordava com as colocações dos colegas, mas quase nunca expunha suas próprias ideias. Quando questionado a respeito de como realizava mentalmente alguns cálculos, o aluno teve muita dificuldade para externar sua linha de raciocínio. Não conseguiu descrever nenhuma estratégia. Depois de ouvir algumas estratégias de seus colegas, contou ao grupo que, na sequência 3 (cálculos do tipo a + a), para adicionar 26 + 26, fez a decomposição dos números: 26 + 26 = 20 + 20 + 6 + 6.

Na segunda atividade, também obteve um excelente desempenho, acertando praticamente todas as questões.

Na questão 1, registrou seu raciocínio por meio de sentenças matemáticas e, em momento algum, fez uso dos algoritmos para efetuar os cálculos, conforme observamos abaixo.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

39+1 = 40

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

90 -1= 89

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

4.10 = 40

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

140:7= 20

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

4.5 +1 = 5,5

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

200-1= 199

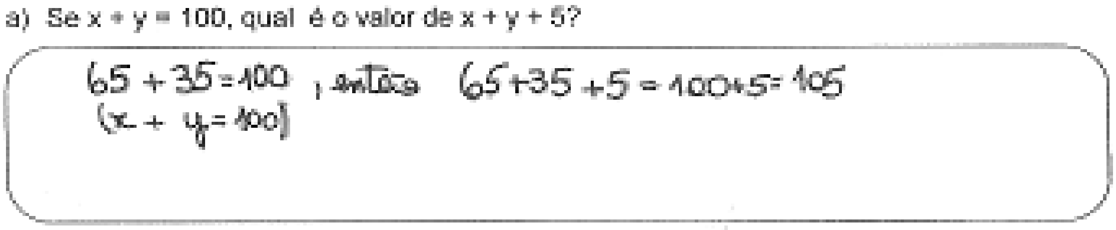
g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

3,6 : 0,6 = 6

h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

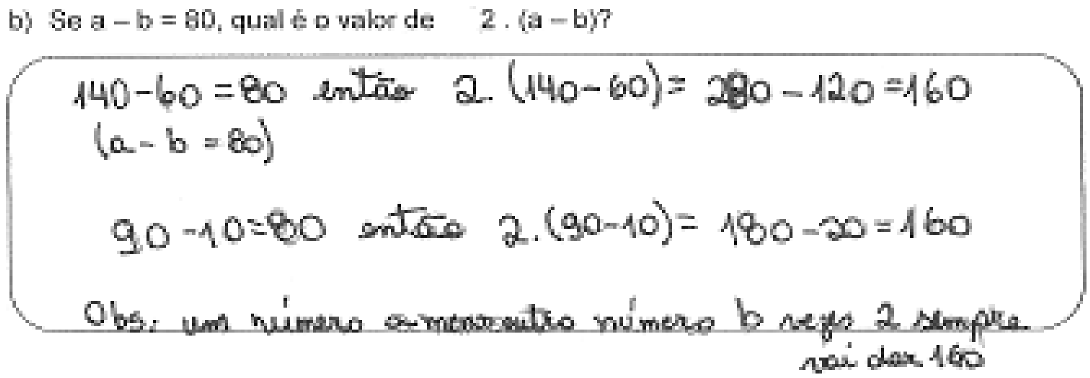
7.0,7 = 4,9

Na questão 2, Theo atribui valores aleatórios às letras, individualmente. Por exemplo, no item a, como x + y = 110, o aluno entende que x = 65 e y = 35. Realiza as substituições e determina o valor da expressão. Utilizou o cálculo mental nas resoluções e recorreu ao algoritmo somente na divisão especificada no item c, ocasião em que o dividendo é menor que o divisor. Suas resoluções estão colocadas a seguir.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

65 + 35 = 100 , então 65 + 35 + 5 = 100 + 5 = 105
(x + y = 100)

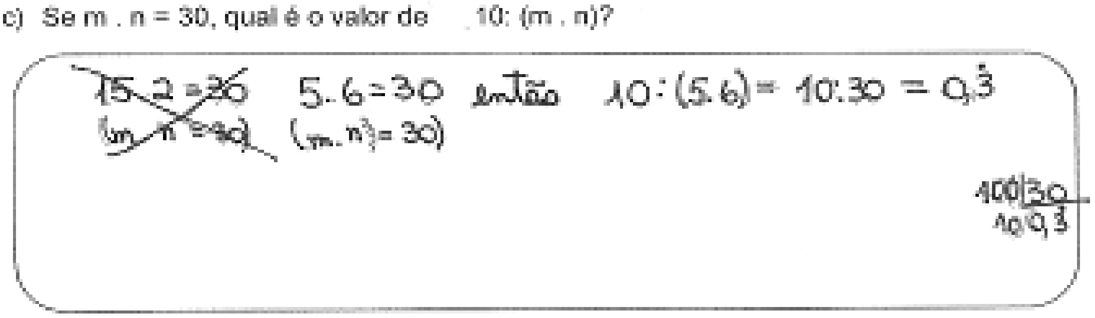


b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

140 - 60 = 80 então 2. (140 - 60) = 280 - 120 = 160
(a - b = 80)

90 - 10 = 80 então 2.(90 - 10) = 180 - 20 = 160

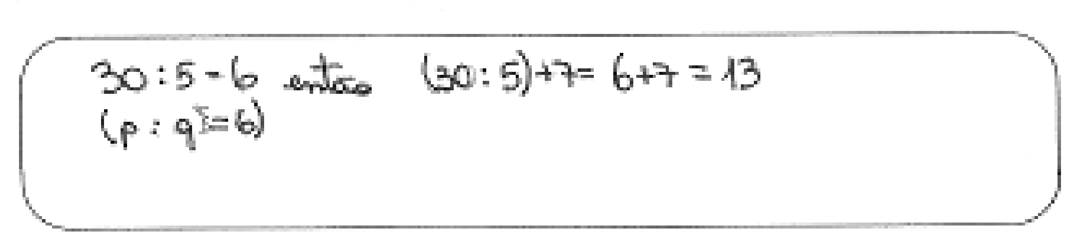
Obs: um número a menos outro número b vezes 2 sempre vai dar 160



c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

~~15.2 = 30~~ 5.6 = 30 então 10 : (5.6) = 10:30 = $0,\overset{\frown}{3}$
~~(m.n = 30)~~ (m.n) = 30)

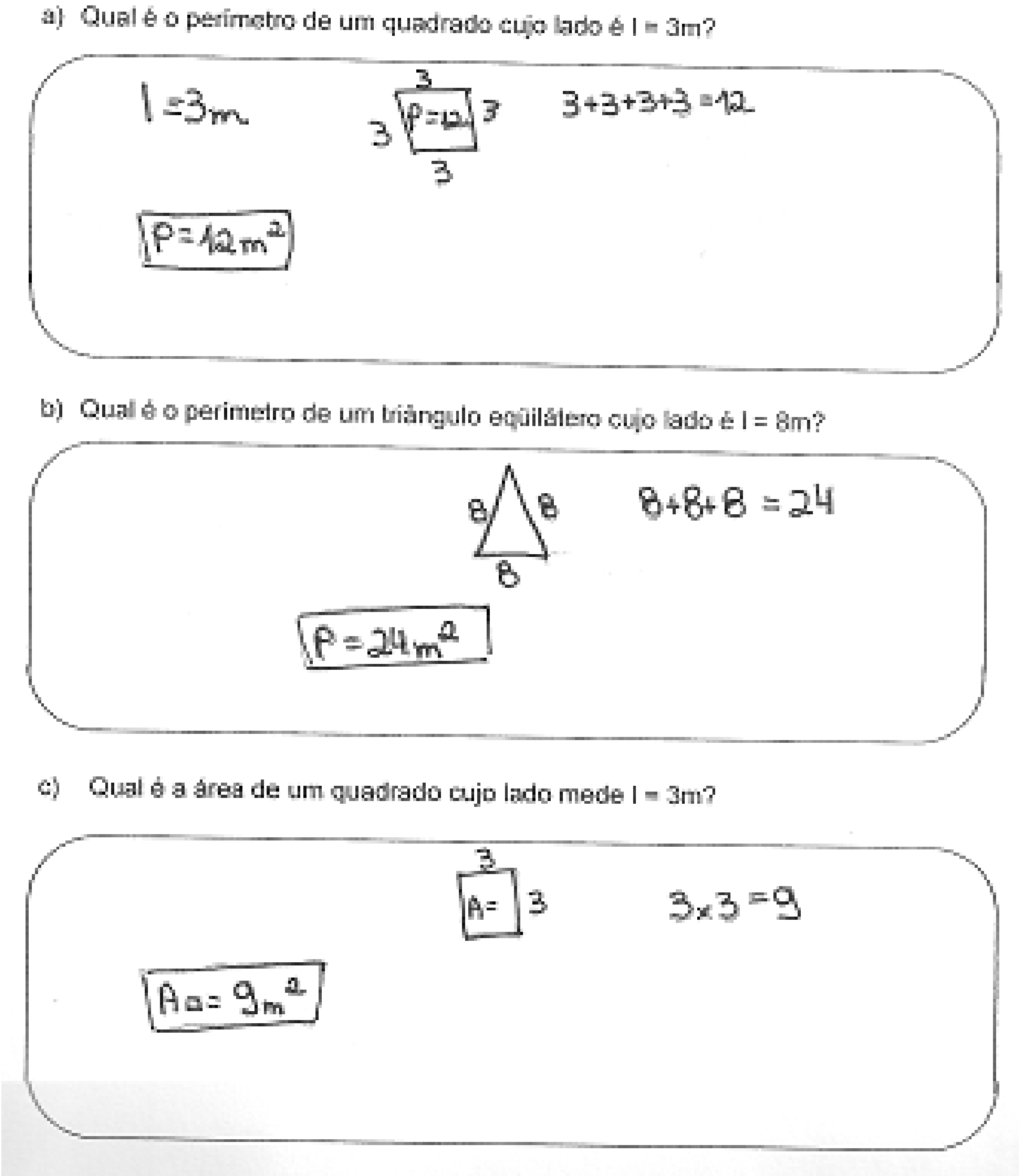
100|30
10 $0,\overset{\frown}{3}$



d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

30 : 5 = 6 então (30 : 5) + 7 = 6 + 7 = 13
(p : q) = 6)

Theo resolve a questão 3, que envolve cálculo de perímetro e área, com clareza e utiliza um esboço da figura para registrar seu raciocínio. Faz uso do cálculo mental também nessa questão. Seguem suas resoluções.



a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

l = 3m

3 3 $P=12$ 3 3

3+3+3+3 = 12

$\boxed{P = 12m^2}$

b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

8 8 8

8+8+8 = 24

$\boxed{P = 24m^2}$

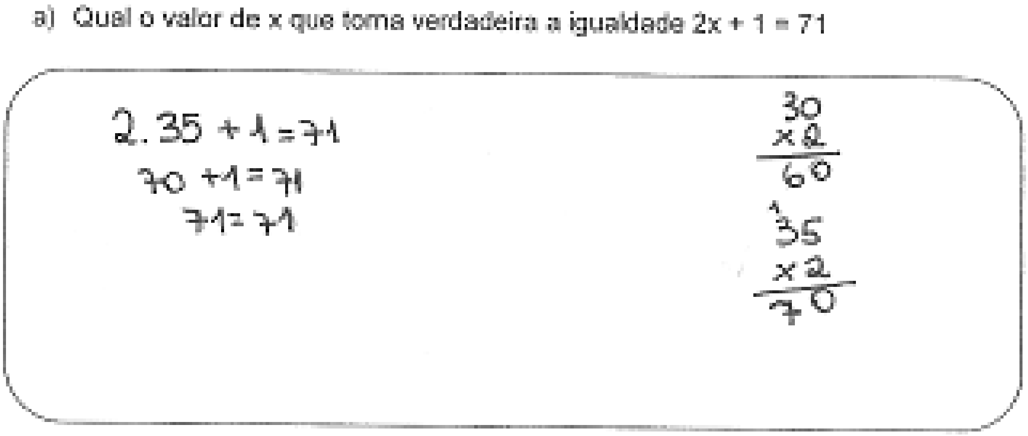
c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

3 $A=$ 3

3×3 = 9

$\boxed{A\square = 9m^2}$

Na questão 4, verificamos diferentes estratégias de resolução. No item a, Theo resolve a equação por tentativas. Notem-se as continhas no canto direito do espaço. Ele procura um número que, multiplicado por dois, resulte 70. Depois, substitui na equação para verificação. Já no próximo exercício, Theo recorre aos procedimentos formais de resolução de equações, conteúdo já estudado pelo aluno. E por fim, no item c, ele tenta elaborar uma equação para resolver o problema, mas não consegue. Seguem suas resoluções.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

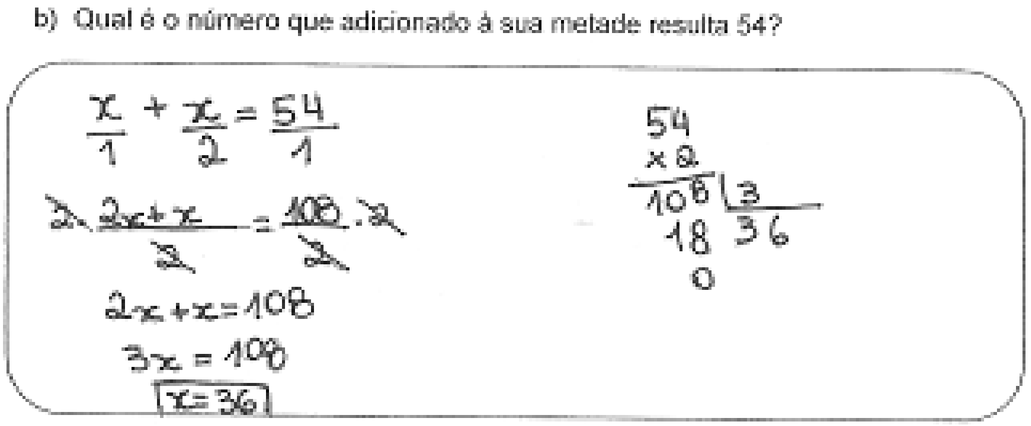
$2.35 + 1 = 71$

$70 + 1 = 71$

$71 = 71$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{1}35 \\ \times 2 \\ \hline 70 \end{array}$$



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} = \frac{54}{1}$

$\cancel{2}.\frac{2x+x}{\cancel{2}} = \frac{108}{\cancel{2}}.\cancel{2}$

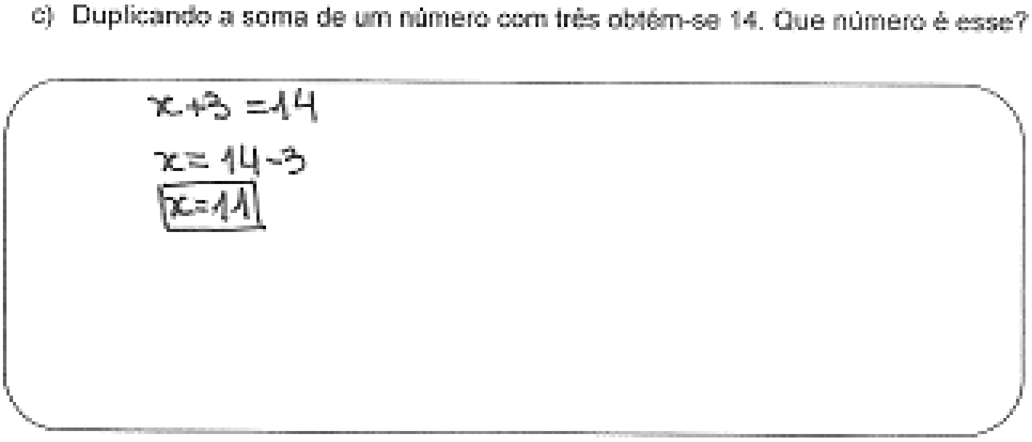
$2x+x=108$

$3x=108$

$\boxed{x=36}$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 2 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 3 \\ \hline 18 & 36 \\ 0 & \end{array}$$



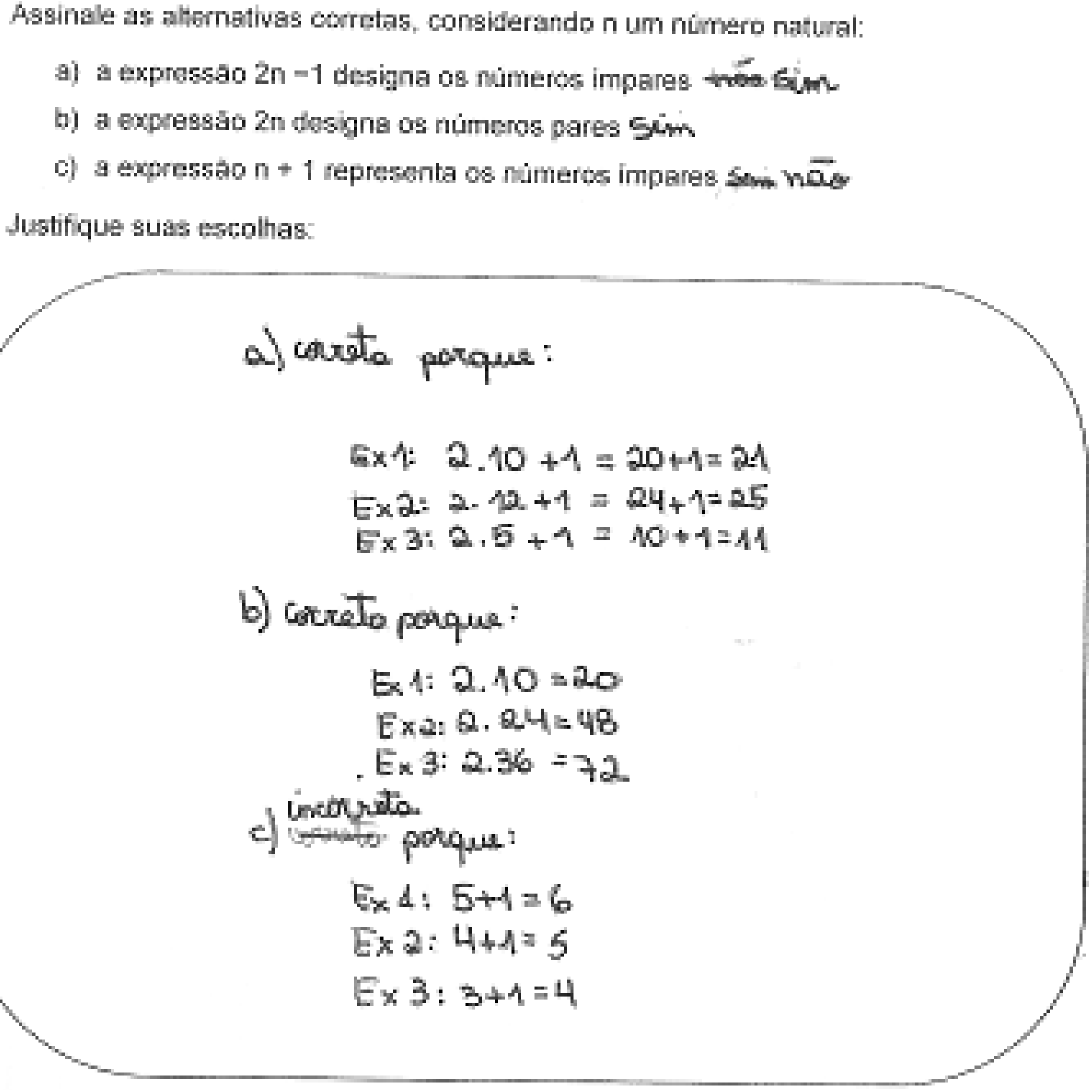
c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

$x+3=14$

$x=14-3$

$\boxed{x=11}$

Na questão 5, pudemos identificar claramente sua estratégia de pensamento: Theo foi atribuindo valores a “n” e verificando a veracidade ou não de cada uma das sentenças. A sua justificativa demonstra seu raciocínio, mostrando sua crença de que alguns exemplos justificam a generalização.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

a) a expressão 2n −1 designa os números impares ~~não~~ Sim

b) a expressão 2n designa os números pares Sim

c) a expressão n + 1 representa os números impares ~~sim~~ não

Justifique suas escolhas:

a) correta porque:

Ex1: 2.10 +1 = 20+1= 21
Ex2: 2. 12 +1 = 24+1= 25
Ex3: 2 . 5 + 1 = 10 + 1 = 11

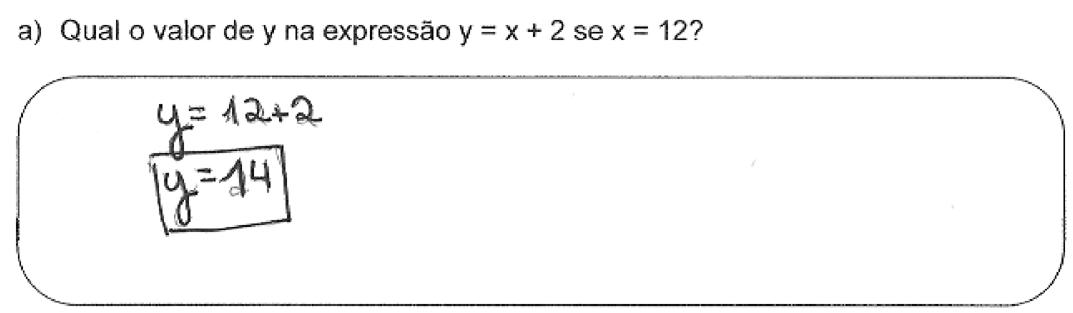
b) correto porque:

Ex 1: 2.10 = 20
Ex2: 2 . 24 = 48
Ex 3: 2.36 = 72

c) ~~correto~~ incorreta porque:

Ex 1: 5+1 = 6
Ex 2: 4+1 = 5
Ex 3: 3+1 = 4

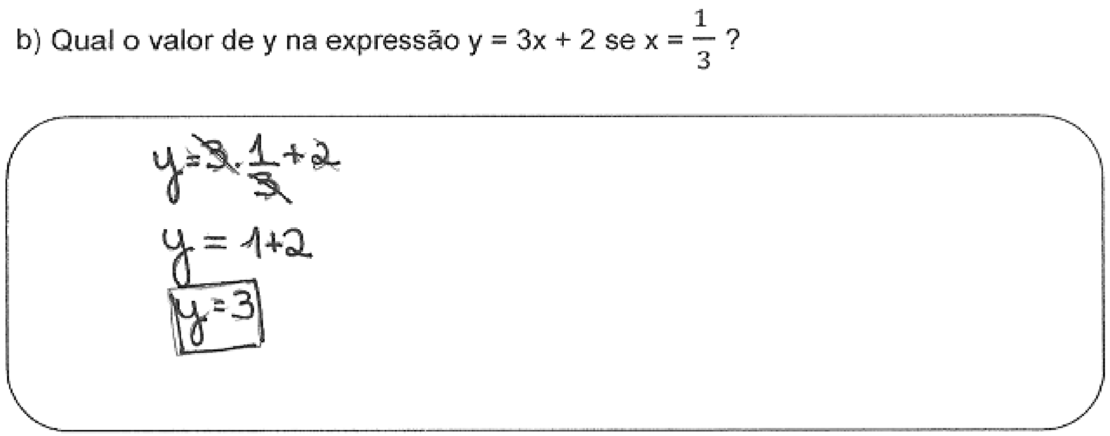
Finalmente, na questão 6, Theo não tem dificuldades em reconhecer o papel funcional da letra nas situações propostas. Realiza as substituições com tranquilidade e efetua os cálculos. Acerta os resultados, tanto os que envolvem números naturais como os que envolvem números racionais na forma fracionária. E utiliza, para isso, seus conhecimentos de cálculo.



a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

$y = 12+2$

$\boxed{y=14}$



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

$y=\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}+2$

$y = 1+2$

$\boxed{y=3}$

Segue o quadro de acertos e erros de Theo e, depois, um breve comentário a respeito de seu desempenho.

Resumo dos acertos e erros de Theo															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩		Sim
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟩	🟩						Sim
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Sim
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟩	🟥							Não
Questão 5	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Sim
Questão 6	a	b								
	🟩	🟩								Sim

Não foi muito simples fazer um levantamento dos conhecimentos prévios utilizados por Theo nessas atividades. Seu temperamento reservado e sua dificuldade em externar estratégias foram fatores significativos. Mesmo assim, pudemos perceber alguns conhecimentos prévios utilizados no cálculo mental como a decomposição dos números e facilidade com os resultados da tabuada. O aluno demonstrou domínio com o cálculo mental tanto para os números naturais como para os números racionais na forma decimal e usou essa habilidade na maioria das resoluções de situações com letras, recorrendo ao algoritmo poucas vezes. Em relação às diferentes dimensões da álgebra, Theo soube reconhecer o papel das letras nas diferentes situações, mas ainda tem consigo a crença de que letras possuem sempre algum valor numérico, não compreendendo ainda a dimensão de generalização das mesmas.

Nosso próximo passo será a análise do desempenho de outra aluna do 7º ano, agora classificada como aluna com dificuldades na Matemática.

4.6. Larissa e seu desempenho

Larissa é uma menina muito espontânea e alegre. Muito distraída também. Seus colegas costumam dizer que ela “vive no mundo da Lua”. Para que não se esquecesse dos dias e horários corretos dos nossos encontros, fizemos uma escala de voluntários que a lembravam dos compromissos. No final, tudo deu certo e Larissa participou de todas as reuniões com dedicação e empenho.

Na primeira atividade, nas sequências 1 a 4, Larissa acertou praticamente todos os cálculos, cometendo um único equívoco, mostrado abaixo.

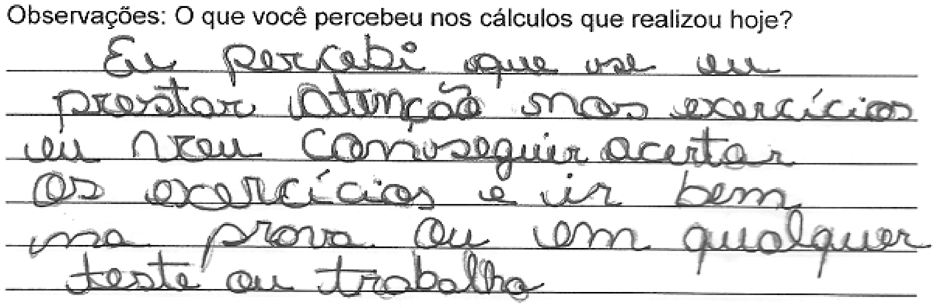
Cálculo solicitado	Sequência 2 Cálculos do tipo a – 1
14,8 – 1	**14,7**

Nos momentos de socialização das respostas, enquanto discutíamos os cálculos da sequência 3, com cálculos do tipo a + a, Larissa fez o seguinte comentário: "quando fui resolver 0,12 + 0,12 iria responder 2,4. Imediatamente pensei em dinheiro e percebi que 12 centavos mais 12 centavos não poderiam resultar dois reais e quarenta centavos. Daí, respondi que 0,12 + 0,12 = 0,24".

Na análise das respostas da sequência 4, com cálculos do tipo [a + (a + 1)], quando os alunos contavam ao grupo de que maneira fizeram esses cálculos mentalmente, Larissa disse: "eu montei a conta na cabeça e somei as unidades, depois as dezenas".

A aluna acertou todos os cálculos das sequências 5 a 8, declarando ser tudo muito fácil, era preciso só continuar prestando bastante atenção. No coletivo, quando percebemos que todos haviam acertado por completo a sequência 8, cálculos do tipo 10 X a, vários alunos comentaram já conhecer esses resultados desde pequenos. Por isso, tiveram bastante facilidade em resolver essas multiplicações. Mas acrescentaram que produtos com racionais na forma de decimais são considerados mais difíceis. Larissa disse, então, ao grupo que, "nesse tipo de conta, basta acrescentar um zero ao final do número ou deslocar a vírgula".

Nas sequências 9 a 12, Larissa também acertou todos os cálculos que efetuou mentalmente, tanto com os números naturais quanto com os números racionais na forma decimal. Por fim, a aluna ficou surpresa com suas habilidades de cálculo e associou seu grande número de acertos ao fato de ter prestado atenção. Deixou seu recado.

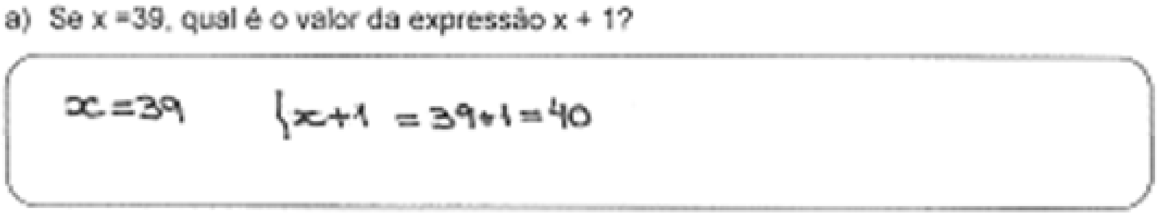


Observações: O que você percebeu nos cálculos que realizou hoje?

Eu percebi que se eu prestar atenção nos exercícios eu vou conseguir acertar os exercícios e ir bem na prova ou em qualquer teste ou trabalho

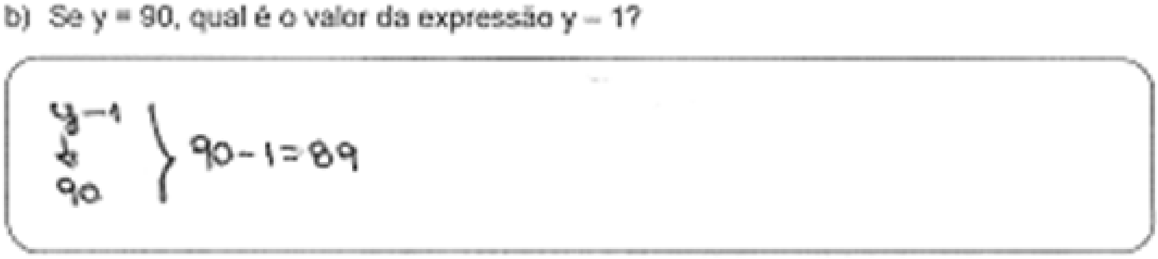
Na segunda atividade, Larissa estava tão feliz com seu desempenho na atividade anterior que lembrou sozinha da data e do horário do novo encontro, sem precisar ser lembrada por ninguém. Queria obter um bom desempenho agora também.

Na questão 1, a aluna compreendeu o papel da letra na expressão e realizou a substituição da mesma pelo valor numérico indicado. Deixou claro seu raciocínio, como observamos abaixo. Fez uso do cálculo mental nas suas resoluções.



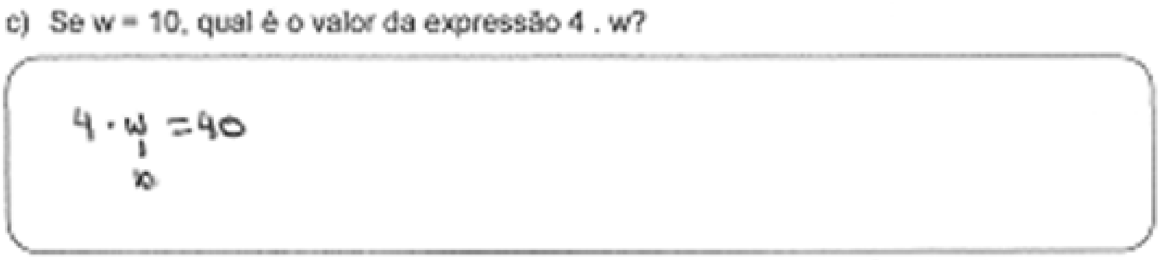
a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

$x = 39 \quad \{ x+1 = 39+1 = 40$



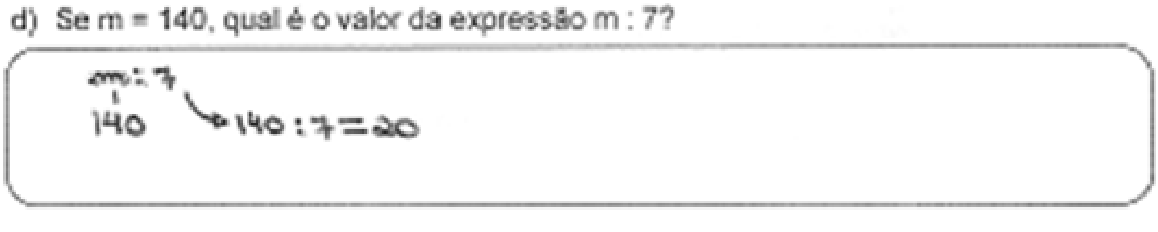
b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

$\left.\begin{matrix} y-1 \\ \downarrow \\ 90 \end{matrix}\right\} 90-1=89$



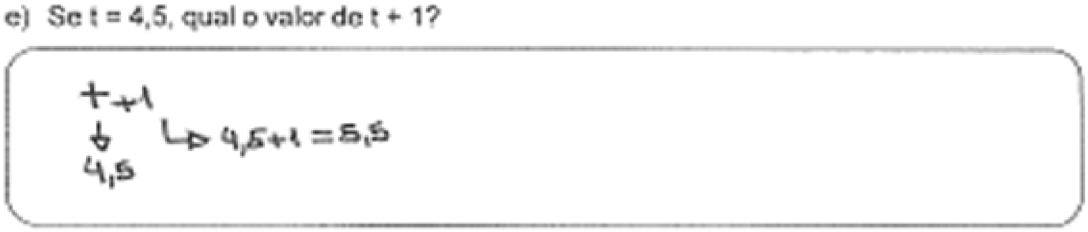
c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

$4 \cdot \underset{\underset{10}{\downarrow}}{w} = 40$



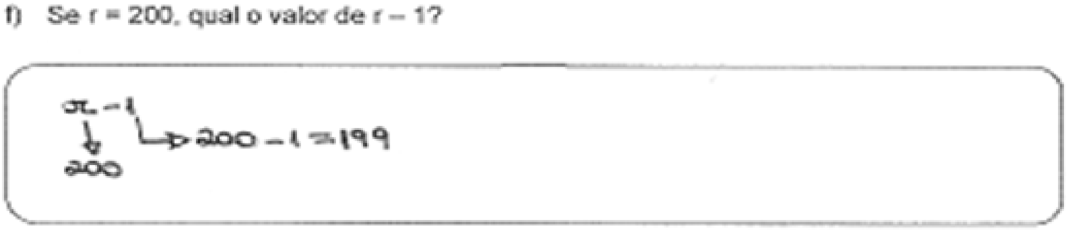
d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

$\begin{matrix} m:7 \\ \downarrow \\ 140 \end{matrix} \searrow 140:7=20$



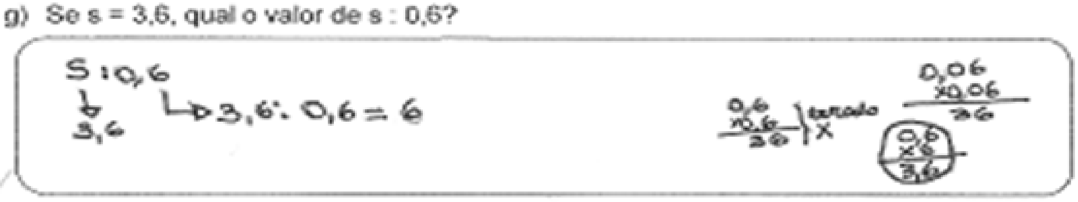
e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

t+1
↓ ↳ 4,5+1 = 5,5
4,5



f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

r-1
↓ ↳ 200 - 1 = 199
200



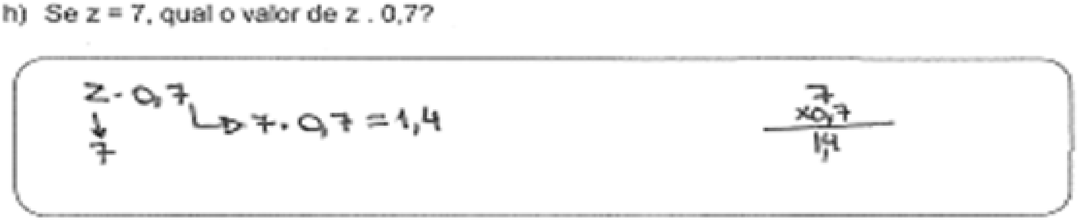
g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

S : 0,6
↓ ↳ 3,6 : 0,6 = 6
3,6

0,6 ×0,6 = 36 } errado X

0,06 ×0,06 = 36

0,6 ×6 = 3,6



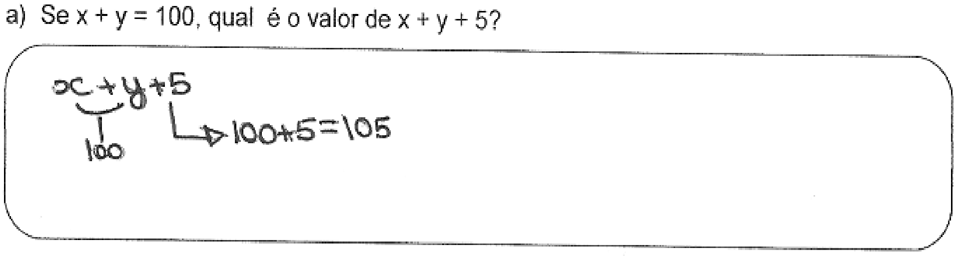
h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

z · 0,7
↓ ↳ 7 · 0,7 = 1,4
7

7 ×0,7 = 1,4

Note-se que, no item h acima, Larissa confunde-se e determina o dobro de sete, ao invés de multiplicar 7 X 7. Enquanto resolvia sua atividade, ao deparar-se com uma divisão de números racionais na forma decimal (item g), a aluna declarou: “não sei fazer essa conta. Então, fui tentando acertar as multiplicações até achar o resultado”. Nesse momento, a aluna não foi capaz de mobilizar seus conhecimentos de cálculo para resolver o problema. Afinal, ela já havia resolvido cálculo semelhante na primeira atividade, com sucesso.

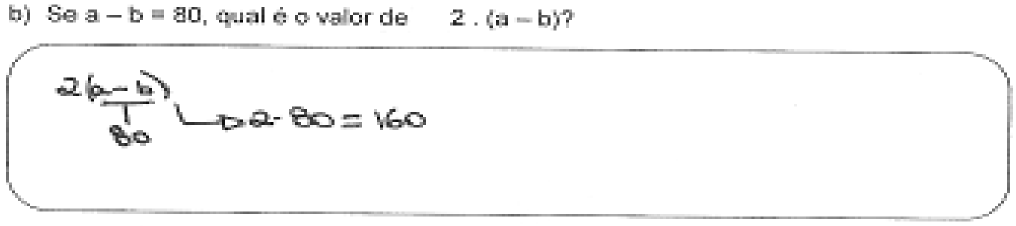
Na questão 2, Larissa identifica o papel das letras na expressão e as substitui com facilidade. Resolve o item a, mostrado abaixo, e faz um comentário: “se x + y é igual a 100, então eu já tenho a parte desconhecida da expressão. Foi só somar o 5”.



a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

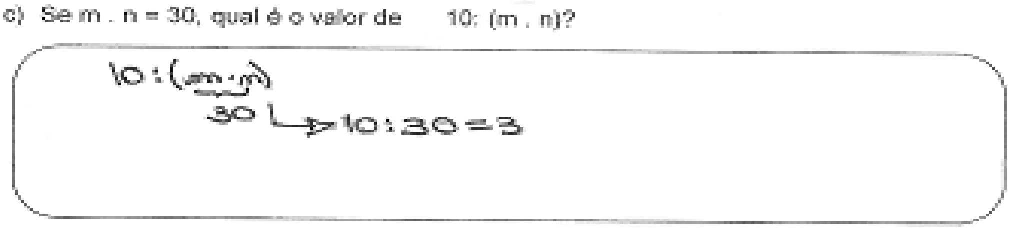
$\underbrace{x+y}_{100}+5$ ⟶ $100+5=105$

Continua a questão 2 com tranquilidade e comete apenas um erro no item c, invertendo dividendo e divisor na hora de efetuar o cálculo.



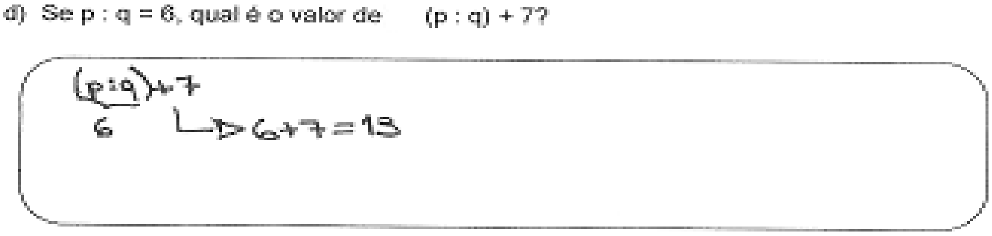
b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

$2\underbrace{(a-b)}_{80}$ ⟶ $2\cdot 80=160$



c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

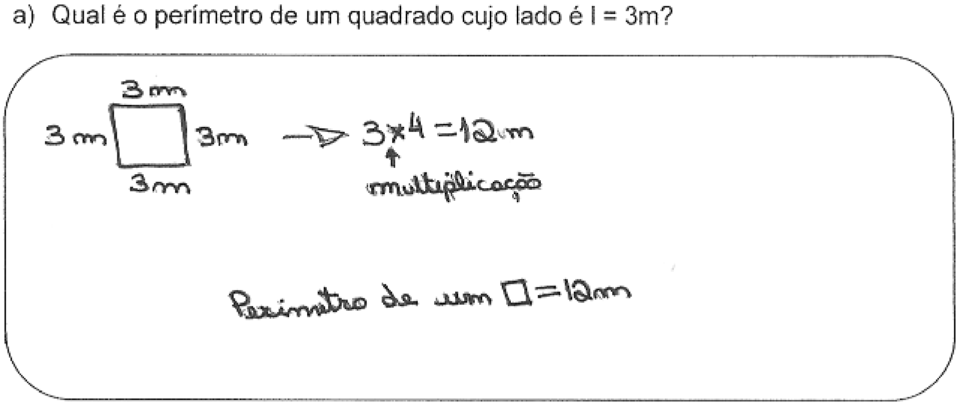
$10:\underbrace{(m\cdot n)}_{30}$ ⟶ $10:30=3$



d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

$\underbrace{(p:q)}_{6}+7$ ⟶ $6+7=13$

Na questão 3, Larissa resolve corretamente os exercícios de perímetro e área e utiliza o cálculo mental nas resoluções. Observe-se.

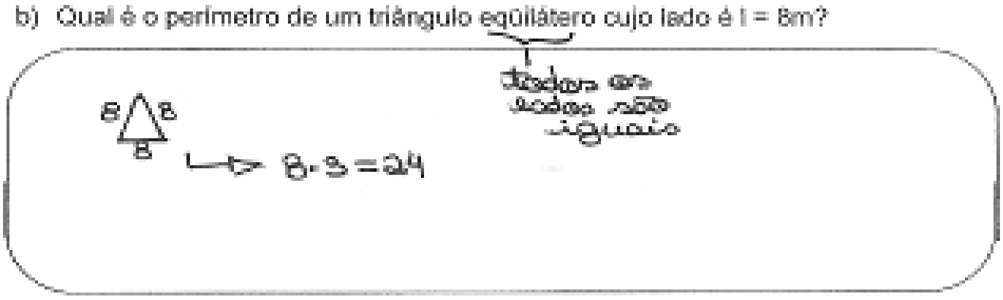


a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

⟶ $3\times 4=12m$

↑ multiplicação

Perimetro de um □=12m

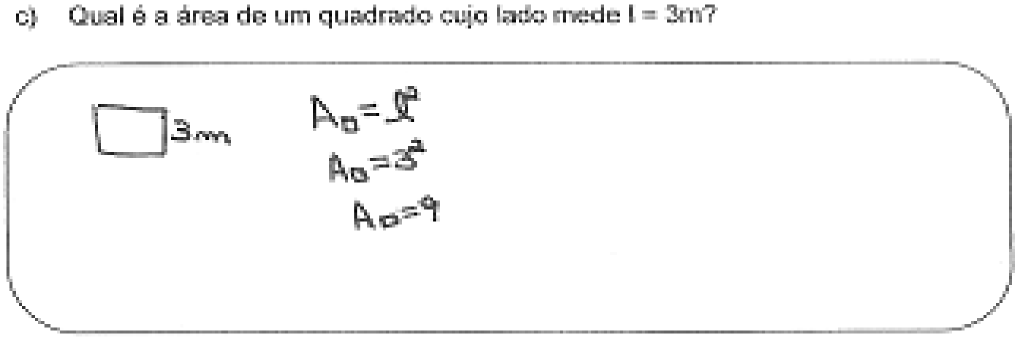


b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

todos os lados são iguais

8 8 8

$\rightarrow 8 \cdot 3 = 24$



c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

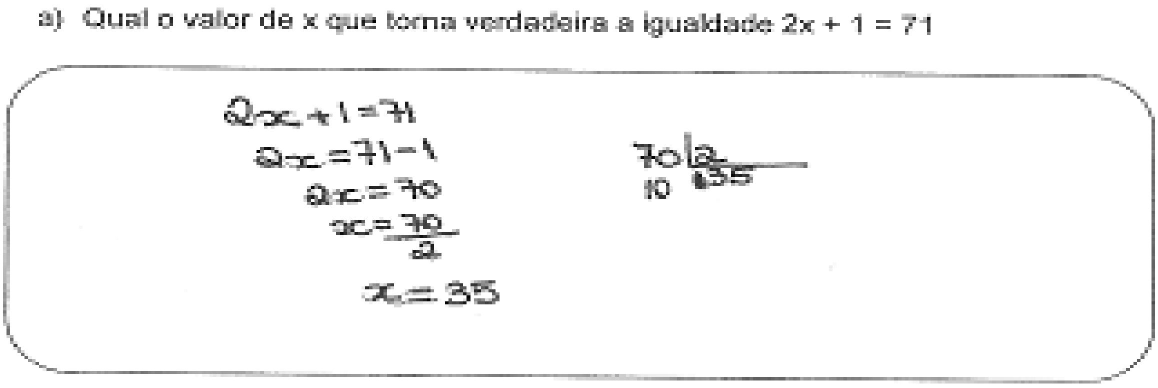
3m

$A_\square = \ell^2$

$A_\square = 3^2$

$A_\square = 9$

Na questão 4, Larissa recorre aos procedimentos que já conhece para resolver equações nos itens a e c. No item b, porém, ela não consegue utilizar o mesmo recurso e tenta chegar à resposta por meio de cálculos aritméticos. E acaba errando o exercício. Suas resoluções estão colocadas a seguir.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

$2x + 1 = 71$

$2x = 71 - 1$

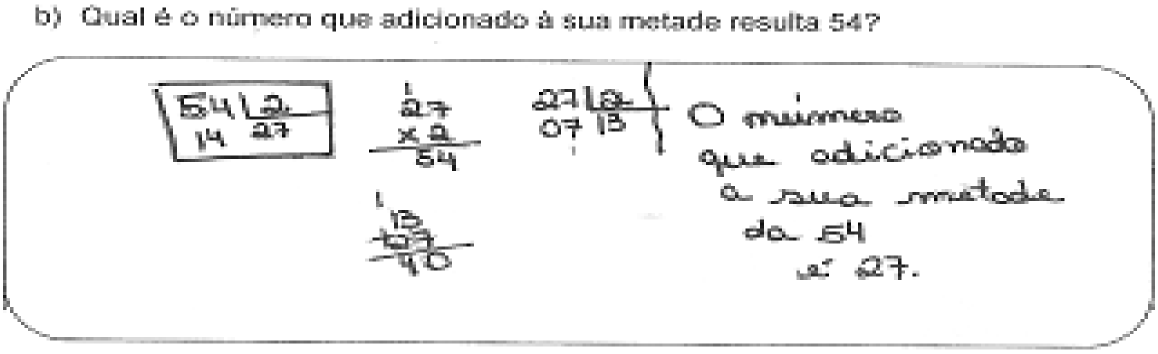
$2x = 70$

$x = \frac{70}{2}$

$x = 35$

$70 \underline{|2}$

$10 \quad 35$



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

$\boxed{54 \underline{|2} \quad 14 \quad 27}$

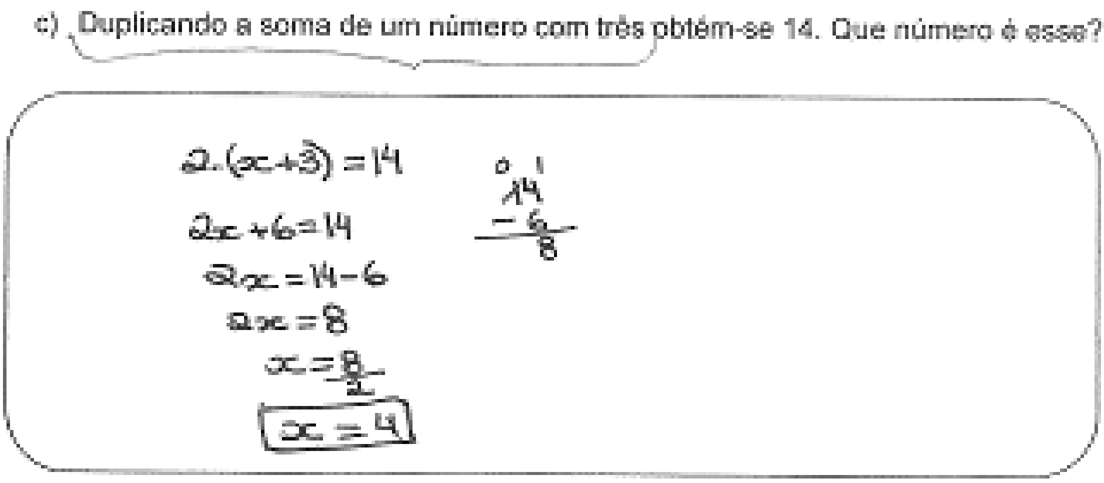
$27 \times 2 = 54$

$13 + 27 = 40$

$27 \underline{|2}$

$07 \quad 13$

O número que adicionado a sua metade da 54 é 27.



c) $\underbrace{\text{Duplicando a soma de um número com três}}$ obtém-se 14. Que número é esse?

$2.(x+3)=14$

$2x+6=14$

$2x=14-6$

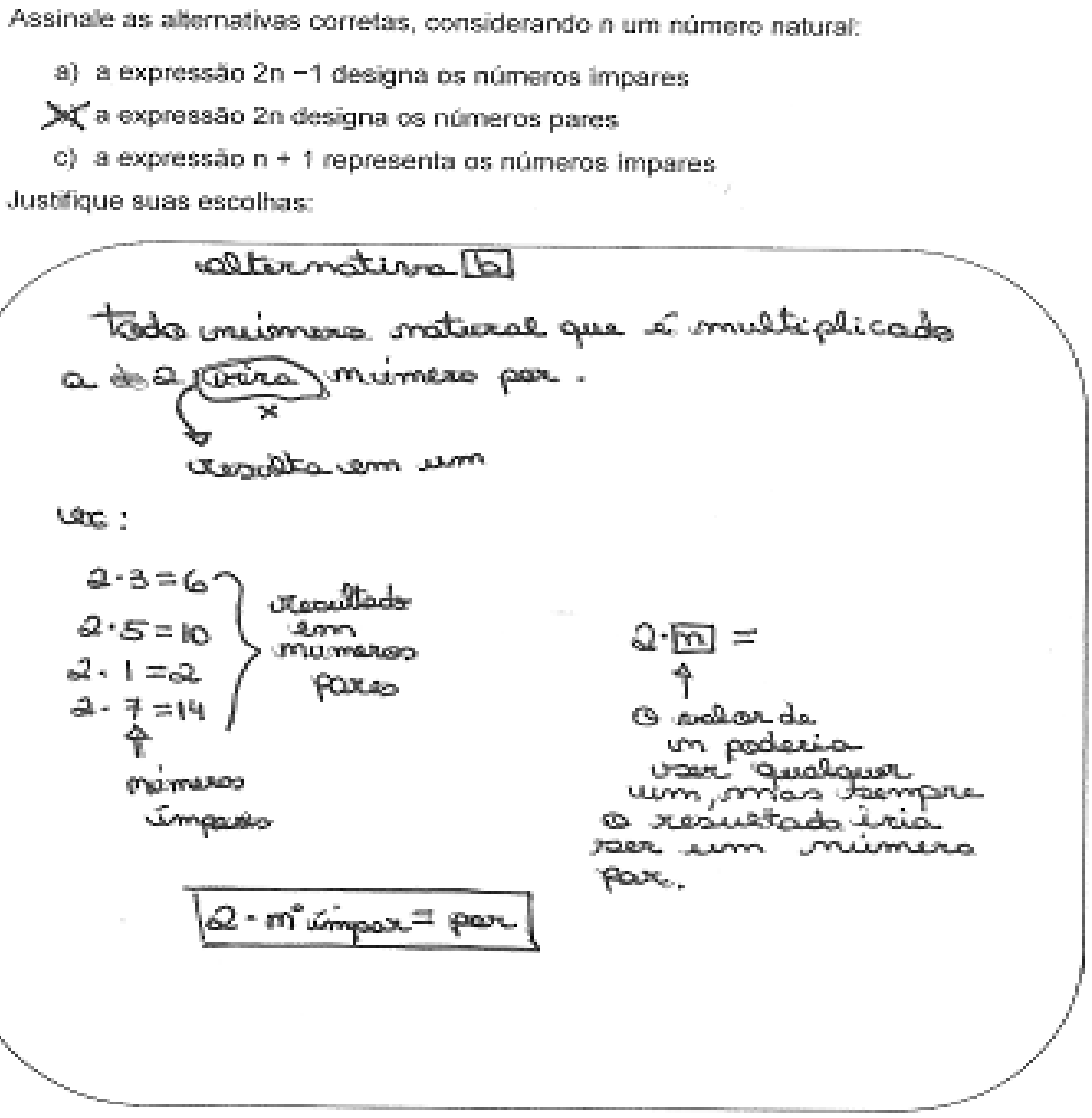
$2x=8$

$x=\frac{8}{2}$

$\boxed{x=4}$

$$\begin{array}{r} \overset{0}{1}\overset{1}{4} \\ -\ 6 \\ \hline 8 \end{array}$$

Na questão 5, Larissa escolhe apenas uma das alternativas como correta e justifica sua escolha por meio de substituições.



Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

a) a expressão 2n −1 designa os números impares

[✓ b)] a expressão 2n designa os números pares

c) a expressão n + 1 representa os números impares

Justifique suas escolhas:

alternativa $\boxed{b}$

Todo número natural que é multiplicado a ~~de~~ 2 ~~vira~~ número par.

resulta em um

ex:

$2\cdot3=6$

$2\cdot5=10$

$2\cdot1=2$

$2\cdot7=14$

resultado em números pares

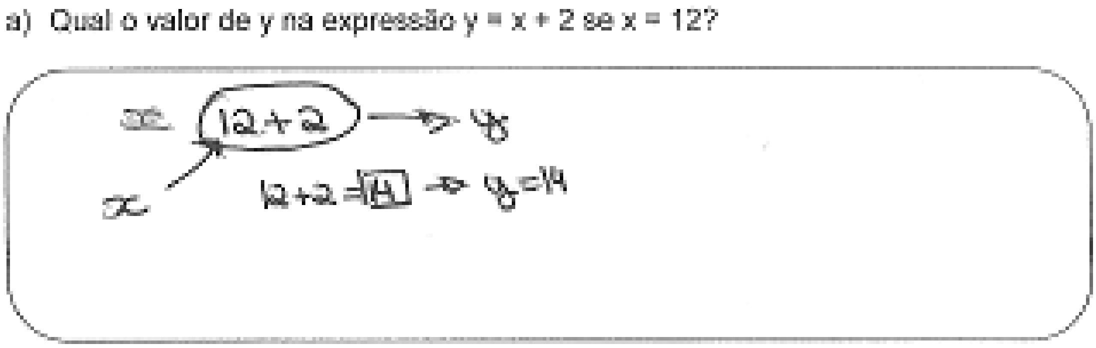
números ímpares

$2\cdot\boxed{n}=$

o valor de n poderia ser qualquer um, mas sempre o resultado iria ser um número par.

$\boxed{2\cdot n^{\circ}\ \text{ímpar}=\text{par}}$

Na questão 6, Larissa reconhece o papel funcional da letra e resolve corretamente os exercícios. Faz uso do cálculo mental nessas resoluções.

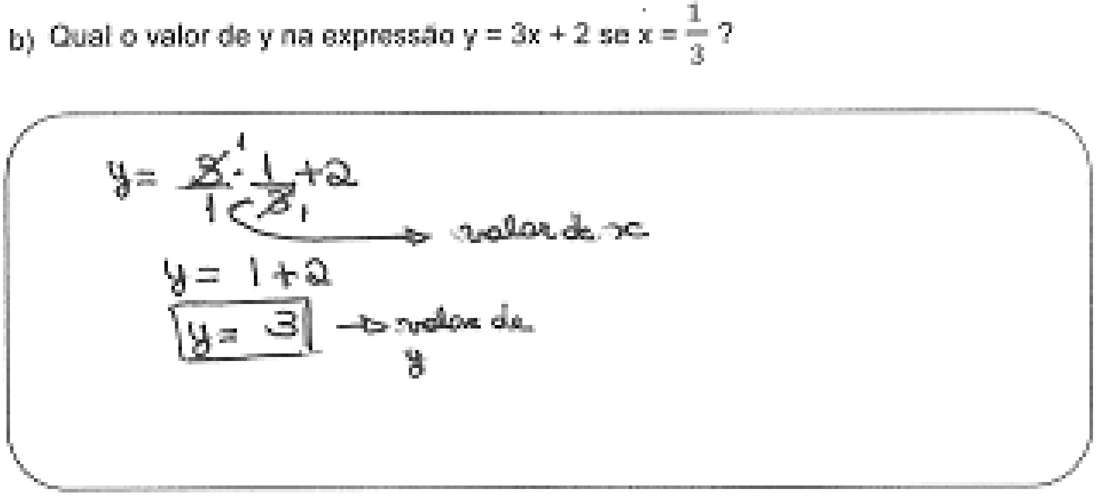


a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

~~x~~ $\boxed{12+2} \longrightarrow y$

$x \nearrow$

$12+2=\boxed{14} \rightarrow y=14$



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se x = $\frac{1}{3}$?

$y = \frac{\cancel{3}^{1}}{1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_{1}} + 2 \longrightarrow$ valor de x

$y = 1+2$

$\boxed{y = 3} \rightarrow$ valor de y

Elaboramos um quadro com os acertos e erros de Larissa.

Resumo dos acertos e erros de Larissa															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥		Sim
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟥	🟩						Sim
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟩							Sim
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟥	🟩							Às vezes
Questão 5	a	b	c							
	🟥	🟩	🟩							Sim
Questão 6	a	b								
	🟩	🟩								Sim

Fazendo uma síntese do desempenho de Larissa, podemos identificar alguns conhecimentos prévios que a aluna utilizou em suas resoluções: a estratégia de comparar números racionais na forma decimal com o sistema monetário; o domínio de cálculos simples dos tipos (a + 1) e (a – 1) para os números naturais e racionais na forma decimal; e o domínio da tabuada. A aluna utilizou, em momentos de cálculo mental, a visualização do algoritmo. Ela “montava a conta na cabeça”, como falou algumas vezes. Soube utilizar suas habilidades com os cálculos efetuados mentalmente nas resoluções dos exercícios que envolviam letras. Para resolver esses exercícios que caracterizavam uma aproximação com a álgebra, Larissa também mobilizou seus conhecimentos de resolução formal de equações. Dentre os diferentes papéis das letras na álgebra do Ensino Fundamental, Larissa mostrou dominar as situações em que a letra assume as dimensões funcional, estrutural e nas equações. Mas ainda sinaliza pouca compreensão da dimensão generalizadora das mesmas.

Vamos agora às análises da nossa última aluna de 7º ano.

4.7. Neide e seu desempenho

Neide é a única aluna do nosso grupo com 13 anos completos. Está refazendo o 7º ano e reconhece suas dificuldades com a Matemática. Aceitou participar dos nossos encontros com desconfiança e pensou várias vezes em desistir. Seus colegas não a deixaram.

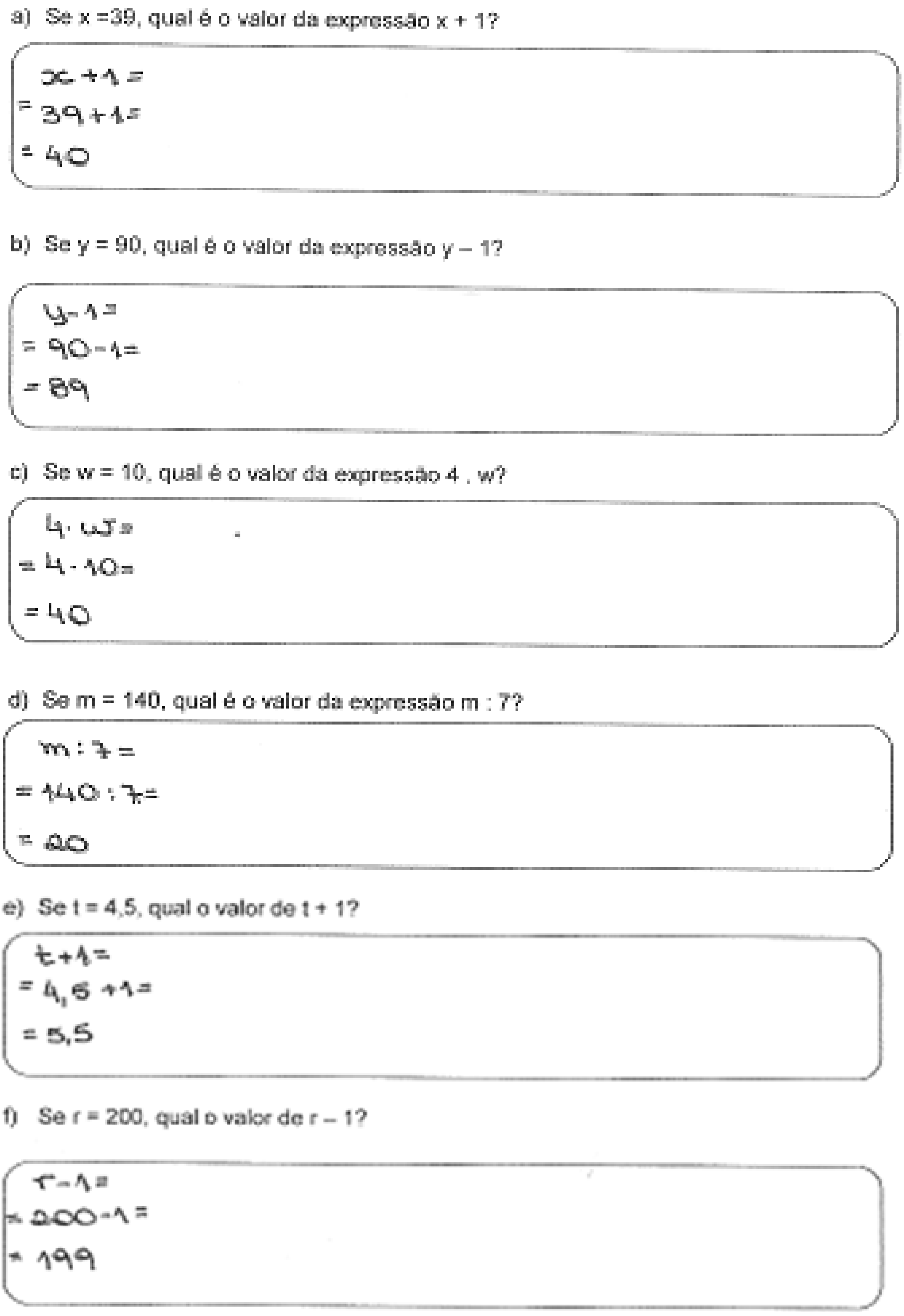
Na primeira atividade, Neide acertou os resultados de todos os cálculos das sequências 1 a 11. Precisava de um tempo maior na hora de resolver adições e multiplicações com os números racionais na forma decimal. Nessas ocasiões, sempre falava: “professora, espera mais um pouco”. Disse que achou essas contas mais difíceis e nem acreditou que acertou os resultados. Quando questionada a respeito de suas estratégias, a aluna disse “que costuma imaginar a conta montada na cabeça”.

Nas sequências 9 a 12, Neide resolve os produtos com tranquilidade e acerta todos os resultados. Na divisão, porém, fica com dúvidas em como obter mentalmente os quocientes de dois números racionais na forma decimal. Exclamou: “essa foi a sequência mais difícil de todas”. Analisem-se suas respostas.

Cálculo solicitado	Sequência 12 Cálculos do tipo a : b
1,4 : 0,7	**0,2**
2,1 : 0,7	**0,3**
3,5 : 0,7	**0,5**
4,9 : 0,7	**0,7**
5,6 : 0,7	**0,8**

Ao longo das discussões em torno dos resultados, Valéria, Paulo e Neide consideraram 2 e 2,0 valores diferentes. Por isso, no momento da discussão dos quocientes, houve discordância quanto às soluções dos últimos cálculos.

Na segunda atividade, na questão 1, Neide reconhece o papel da letra na expressão e a substitui pelo valor numérico com facilidade. Utiliza o cálculo mental nas resoluções e acerta todos os exercícios. Seguem suas resoluções.



a) Se x =39, qual é o valor da expressão x + 1?

$x + 1 =$
$= 39 + 1 =$
$= 40$

b) Se y = 90, qual é o valor da expressão y – 1?

$y - 1 =$
$= 90 - 1 =$
$= 89$

c) Se w = 10, qual é o valor da expressão 4 . w?

$4 \cdot w =$
$= 4 \cdot 10 =$
$= 40$

d) Se m = 140, qual é o valor da expressão m : 7?

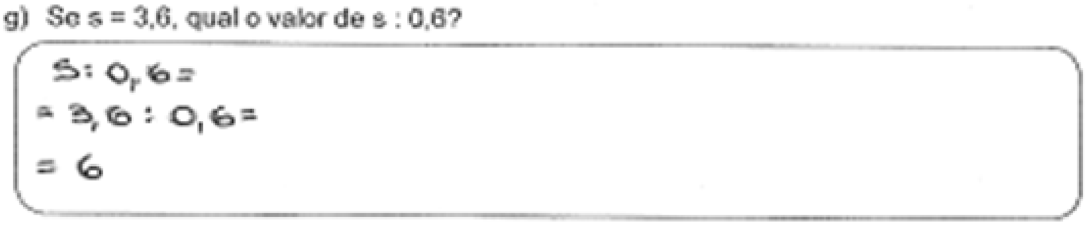
$m : 7 =$
$= 140 : 7 =$
$= 20$

e) Se t = 4,5, qual o valor de t + 1?

$t + 1 =$
$= 4,5 + 1 =$
$= 5,5$

f) Se r = 200, qual o valor de r – 1?

$r - 1 =$
$= 200 - 1 =$
$= 199$

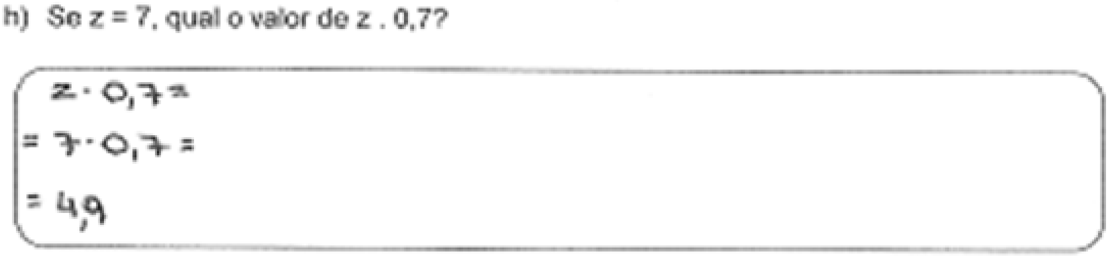


g) Se s = 3,6, qual o valor de s : 0,6?

$s : 0,6 =$

$= 3,6 : 0,6 =$

$= 6$



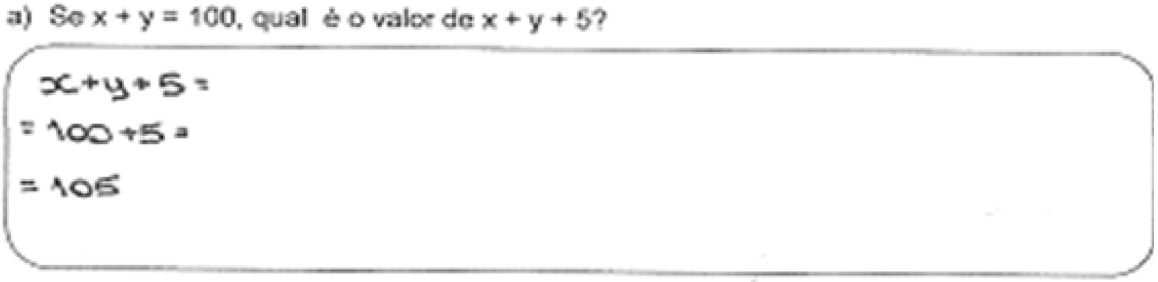
h) Se z = 7, qual o valor de z . 0,7?

$z \cdot 0,7 =$

$= 7 \cdot 0,7 =$

$= 4,9$

Na questão 2, Neide também reconhece o papel das letras nas expressões e as substitui pelo valor numérico corretamente. Utiliza o cálculo mental nas resoluções, mas não finaliza o item c, demonstrando dúvida na divisão com dividendo menor que o divisor. Observe-se.

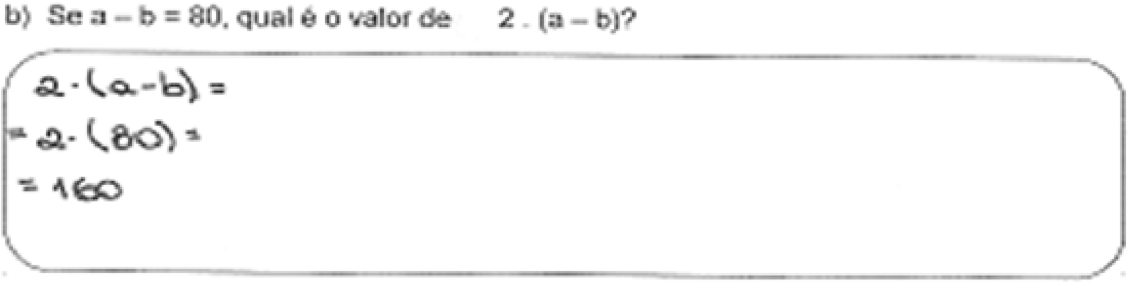


a) Se x + y = 100, qual é o valor de x + y + 5?

$x+y+5 =$

$= 100+5 =$

$= 105$

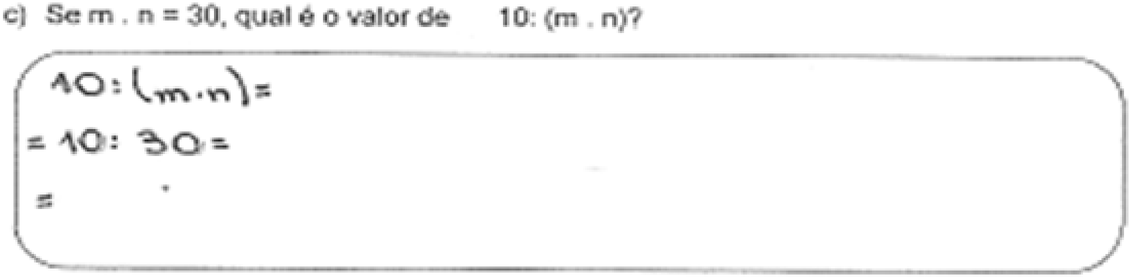


b) Se a – b = 80, qual é o valor de 2 . (a – b)?

$2 \cdot (a-b) =$

$= 2 \cdot (80) =$

$= 160$

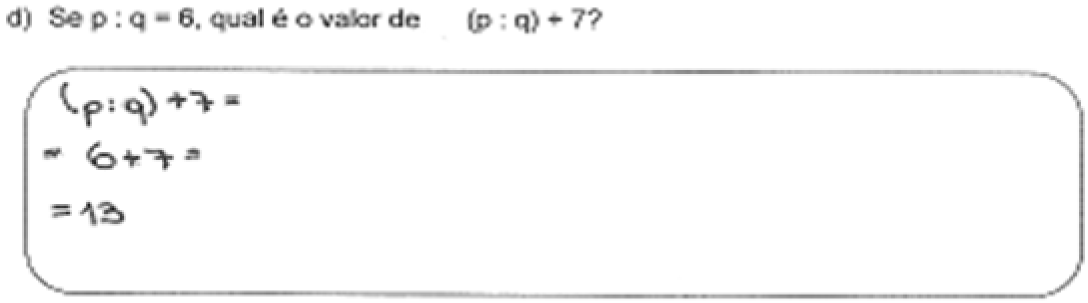


c) Se m . n = 30, qual é o valor de 10: (m . n)?

$10 : (m \cdot n) =$

$= 10 : 30 =$

$=$



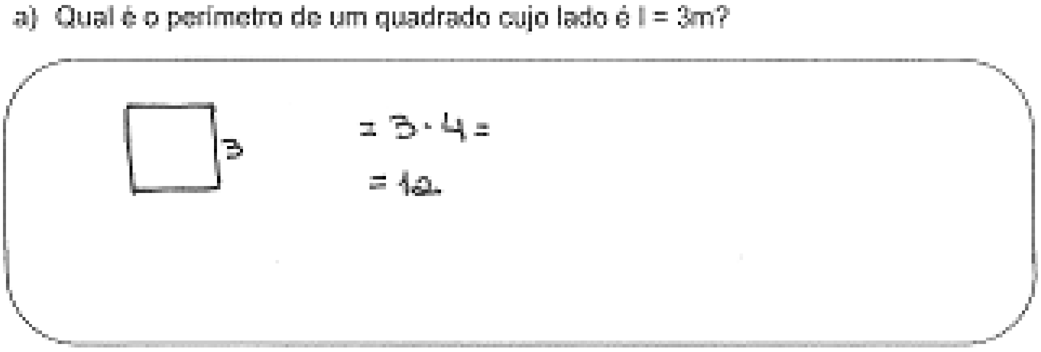
d) Se p : q = 6, qual é o valor de (p : q) + 7?

$(p:q)+7=$

$=6+7=$

$=13$

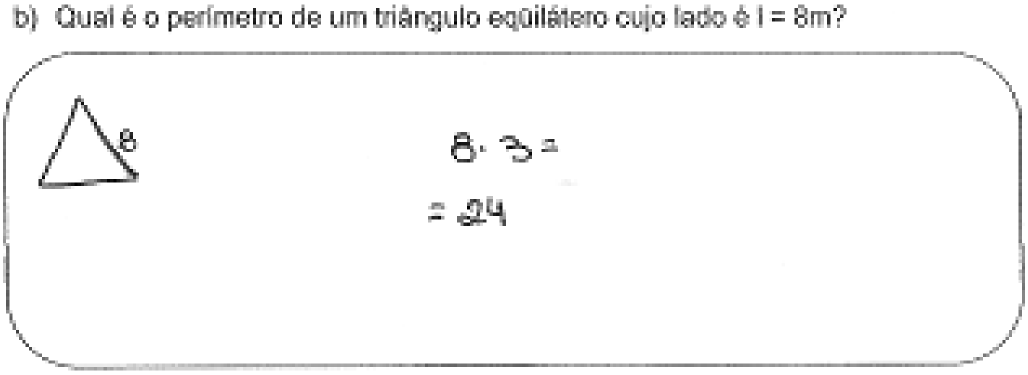
Na questão 3, Neide reconhece o papel da letra “l” na pergunta, resolve corretamente os exercícios de perímetro e utiliza o cálculo mental nas resoluções. Não acerta o problema do item c, confundindo o conceito de área com o de perímetro. Suas resoluções estão expostas abaixo.



a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado é l = 3m?

$=3\cdot 4=$

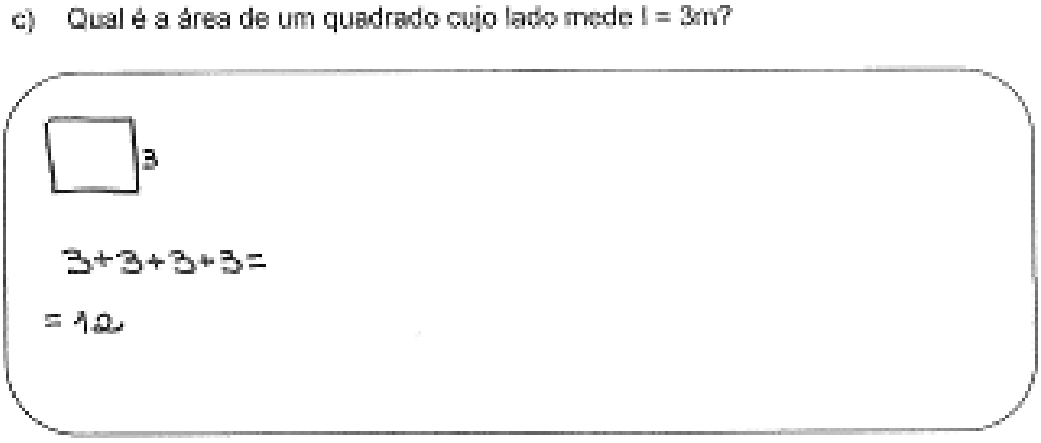
$=12$



b) Qual é o perímetro de um triângulo eqüilátero cujo lado é l = 8m?

$8\cdot 3=$

$=24$

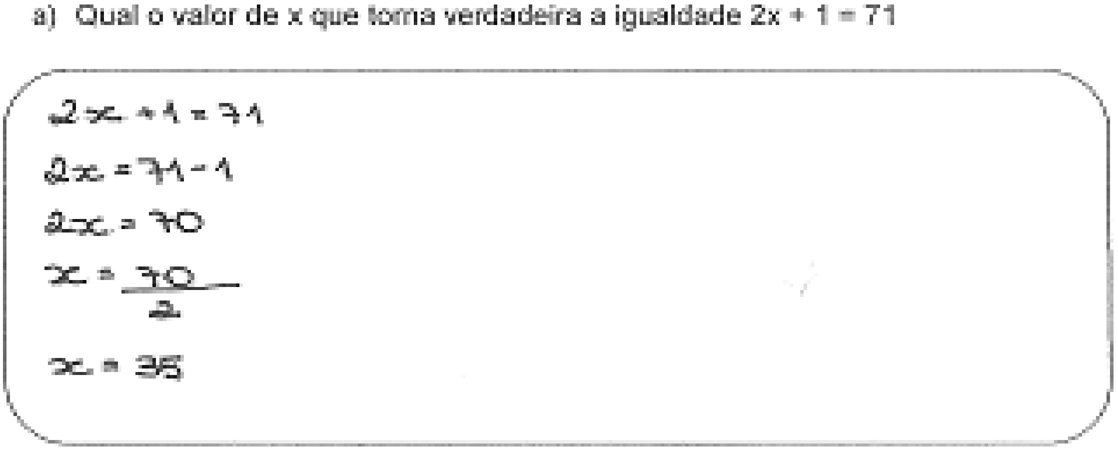


c) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede l = 3m?

$3+3+3+3=$

$=12$

Na questão 4, Neide resolve a primeira equação por meio de procedimentos formais. Também faz uso desses recursos para resolver os problemas propostos nos itens seguintes. Acerta os itens a e c, mas erra o item b no momento em que realiza o mínimo múltiplo comum (2ª linha). Observe-se.



a) Qual o valor de x que torna verdadeira a igualdade 2x + 1 = 71

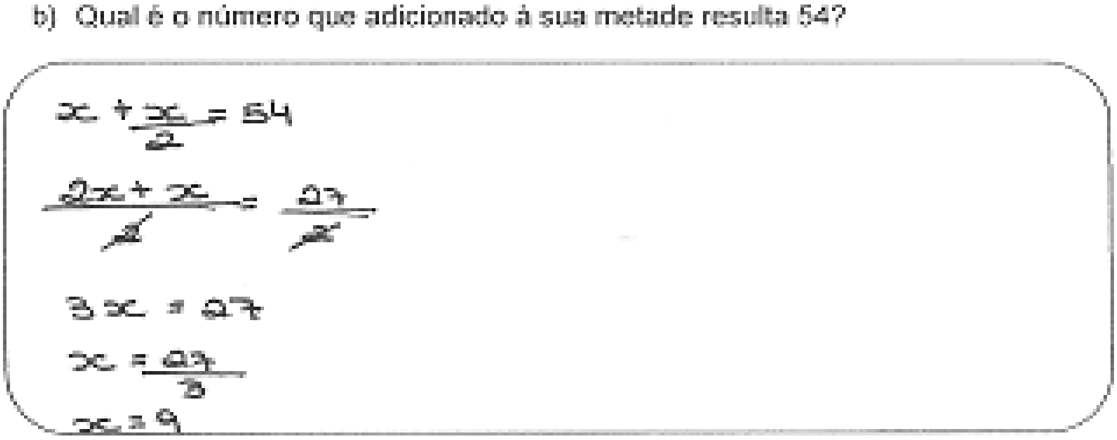
$2x + 1 = 71$

$2x = 71 - 1$

$2x = 70$

$x = \frac{70}{2}$

$x = 35$



b) Qual é o número que adicionado à sua metade resulta 54?

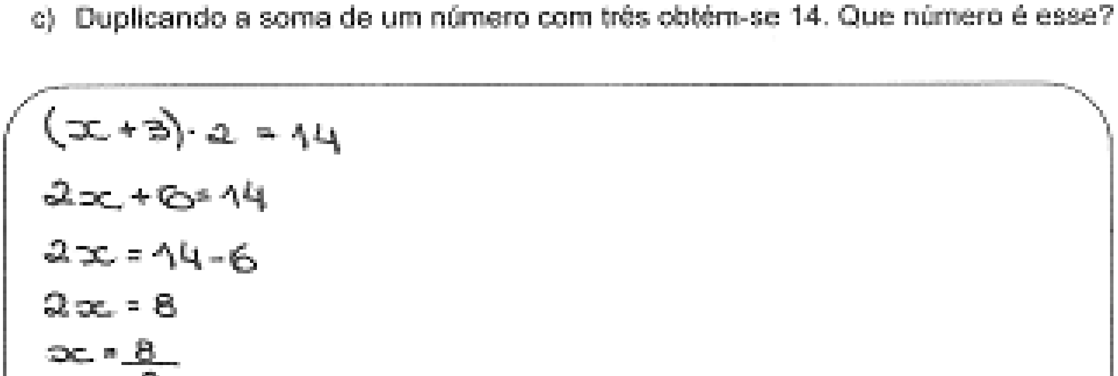
$x + \frac{x}{2} = 54$

$\frac{2x + x}{\cancel{2}} = \frac{27}{\cancel{2}}$

$3x = 27$

$x = \frac{27}{3}$

$x = 9$



c) Duplicando a soma de um número com três obtém-se 14. Que número é esse?

$(x + 3) \cdot 2 = 14$

$2x + 6 = 14$

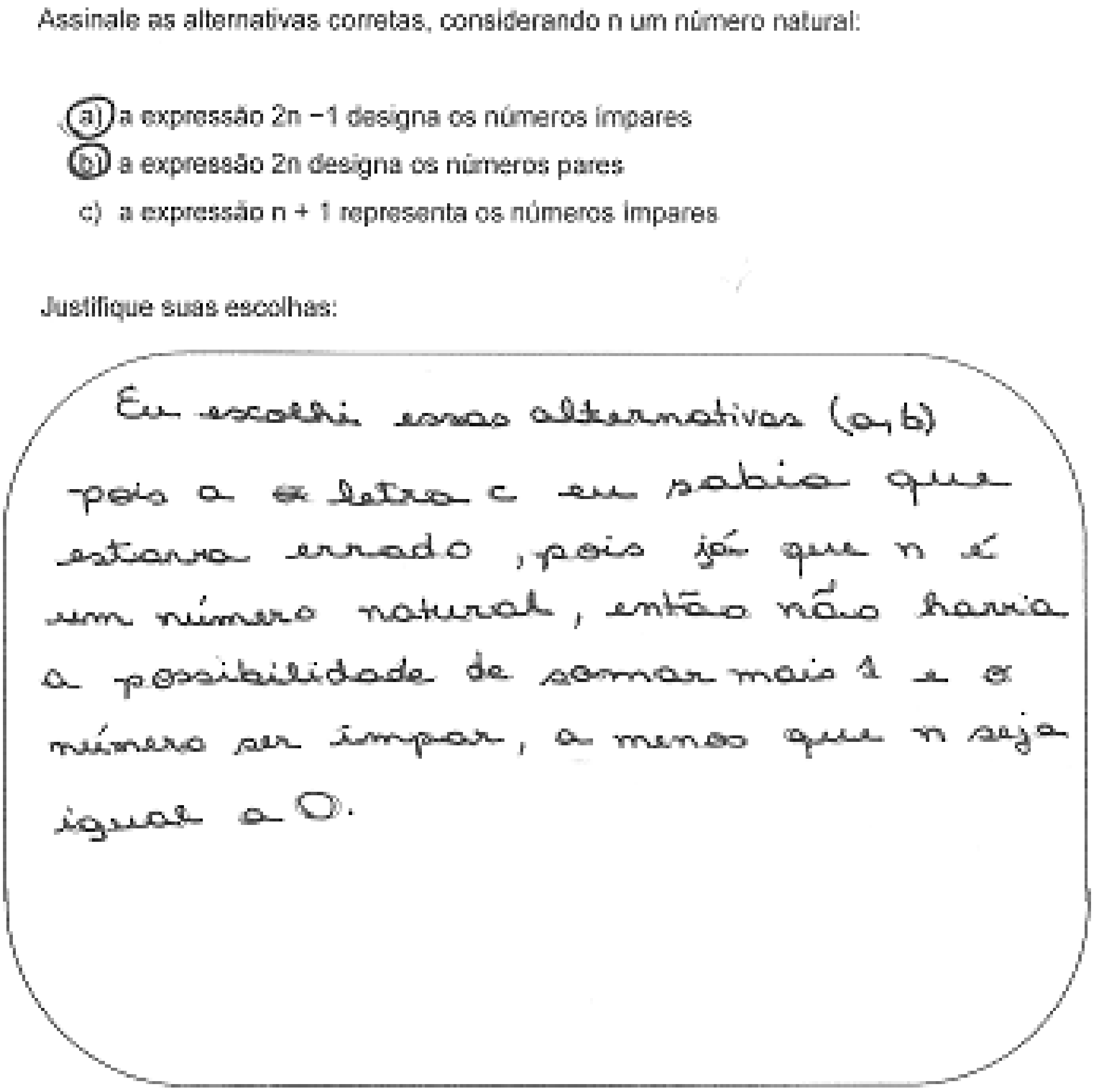
$2x = 14 - 6$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

Na questão 5, Neide assinala as duas primeiras alternativas, mas não consegue justificar suas escolhas. Demonstra não compreender o papel de generalização da letra e realiza uma tentativa de resolução, não correta. Na sua justificativa, mostrada a seguir, notamos que mesmo quando tenta substituir a letra n por um número não chega a nenhuma conclusão. E indica uma dúvida ou confusão com o termo “número natural”.



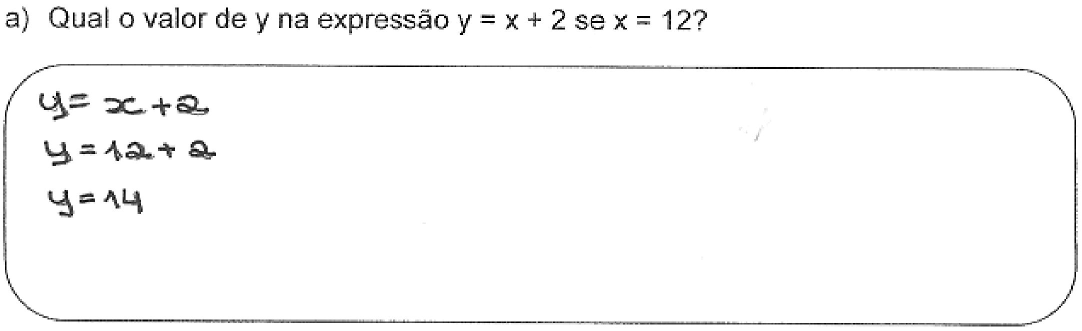
Assinale as alternativas corretas, considerando n um número natural:

[✓ a)] a expressão 2n −1 designa os números ímpares
[✓ b)] a expressão 2n designa os números pares
c) a expressão n + 1 representa os números ímpares

Justifique suas escolhas:

Eu escolhi essas alternativas (a, b)
pois a letra c eu sabia que
estava errado, pois já que n é
um número natural, então não havia
a possibilidade de somar mais 1 e o
número ser impar, a menos que n seja
igual a 0.

Na questão 6, Neide reconhece o papel funcional da letra e resolve corretamente o exercício do item a. No próximo item, comete dois erros na resolução: multiplica o número natural três pelo numerador e pelo denominador do número racional na forma fracionária (2ª para 3ª linha) e realiza um procedimento não correto na adição de número racional na forma fracionária com número natural (3ª para 4ª linha). Pela segunda vez, Neide erra um procedimento considerado comum para os alunos desse ano, o mínimo múltiplo comum. Não fez uso do cálculo mental nessa última resolução.

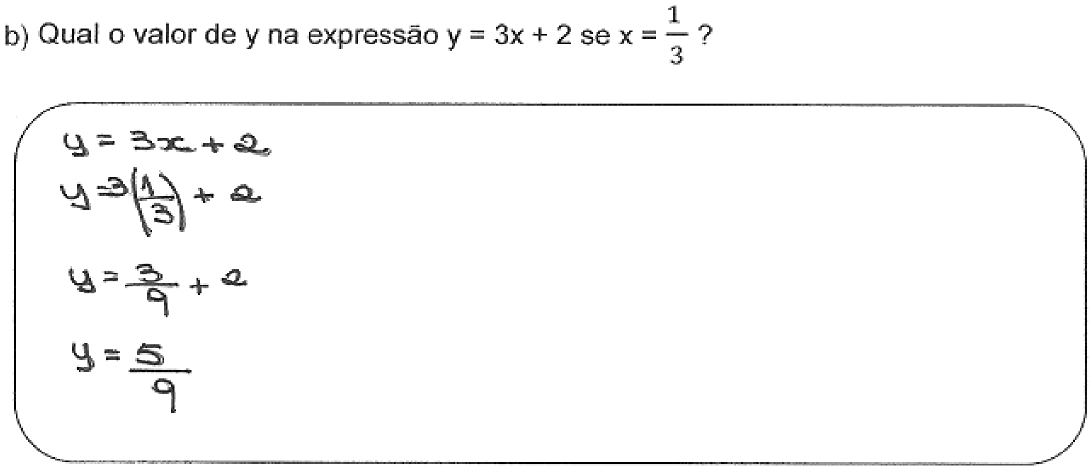


a) Qual o valor de y na expressão y = x + 2 se x = 12?

$y = x + 2$

$y = 12 + 2$

$y = 14$



b) Qual o valor de y na expressão y = 3x + 2 se $x = \frac{1}{3}$?

$y = 3x + 2$

$y = 3\left(\frac{1}{3}\right) + 2$

$y = \frac{3}{9} + 2$

$y = \frac{5}{9}$

Segue o quadro dos acertos e erros de Neide.

Resumo dos acertos e erros de Neide															
Atividade 1	Operações														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Sequência 1	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 2	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 3	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 4	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 5	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 6	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 7	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 8	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 9	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 10	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 11	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
Sequência 12	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟥	🟥	🟥	🟥	🟥

Atividade 2	Perguntas									Mobilizou seus conhecimentos de cálculo mental nas resoluções?
Questão 1	a	b	c	d	e	f	g	h		
	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩		Sim
Questão 2	a	b	c	d						
	🟩	🟩	🟥	🟩						Sim
Questão 3	a	b	c							
	🟩	🟩	🟥							Sim
Questão 4	a	b	c							
	🟩	🟥	🟩							Sim
Questão 5	a	b	c							
	🟥	🟥	🟥							Sim
Questão 6	a	b								
	🟩	🟥								Sim

Numa síntese do desempenho de Neide, identificamos um bom desempenho no cálculo mental nas adições e nas multiplicações de números naturais e racionais na forma decimal. Percebemos, porém, que a aluna não transfere essas habilidades na resolução de situações com números racionais na forma fracionária. Erra em passagens que, num primeiro momento, parecem não fazer o menor sentido para a aluna, como se estivesse fazendo um procedimento mecânico e não refletido. Neide também sinalizou maior dificuldade nas divisões que envolvem números racionais na forma decimal. Não conseguimos identificar estratégias de cálculo mental utilizadas por Neide, sabendo apenas que a aluna costuma visualizar o algoritmo para calcular mentalmente. Como ela diz, “monta a continha na cabeça”. Em relação aos diferentes papéis das letras na álgebra, Neide mostrou dominar as situações em que a letra assume as dimensões funcional, estrutural e nas equações. Mas ainda indica pouca compreensão da dimensão generalizadora das mesmas.

Depois de concluirmos as análises dos desempenhos dos treze alunos participantes de nossa pesquisa, teceremos nossas considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nas observações dos resultados da primeira atividade e na análise dos comentários feitos pelos alunos, pudemos levantar alguns procedimentos de cálculo mental utilizados por dois grupos de alunos – um de 6º e outro de 7º anos – para cálculos envolvendo números naturais e para cálculos envolvendo números racionais na forma decimal.

1) Os alunos têm relativa facilidade em adicionar ou subtrair 1 aos números naturais menores. Quando as adições envolvem parcelas maiores, eles demandam maior tempo para pensar e ainda cometem erros nas operações cujas parcelas terminam por nove. Encontrar o sucessor e o antecessor de números naturais como 99, 999 ou 9.999 não é uma tarefa considerada fácil pelos alunos.
2) Os estudantes que possuíam um bom repertório aditivo manifestaram esse domínio ao longo de todos os cálculos e ofereceram os resultados com maior rapidez que os alunos que não possuíam esse repertório. Demonstravam, também, maior segurança nas operações mentais quando escreviam suas respostas rapidamente.
3) Alguns alunos apresentaram facilidade na realização de cálculos básicos, como, por exemplo, adicionar números iguais, multiplicar por dez ou identificar parcelas cuja adição resulta dez. Esses alunos foram capazes de resolver operações mais complexas utilizando-se desses cálculos como âncoras.
4) Nas diversas situações foram comuns os equívocos com as operações envolvendo os números racionais na forma decimal. Os erros cometidos são quase sempre decorrentes da falta de significado atribuído à notação escrita desses números, o que os leva a produzir respostas equivocadas.
5) Muitos alunos apoiaram-se em diferentes recursos para operar mentalmente: fizeram uso da decomposição dos números; usaram a tabuada do dois para adicionar parcelas iguais; modificaram os valores envolvidos para operar com maior facilidade e fizeram a compensação no final; usaram estratégias de arredondamento e simplificação; associaram números racionais na forma decimal

ao sistema monetário para facilitar as contas; e usaram as propriedades associativa e comutativa, mesmo sem tê-las nomeado ou mesmo as identificado.

6) Alguns alunos mostraram habilidade no cálculo mental. Quando precisaram, porém, operar com números racionais na forma fracionária, abandonaram essa habilidade e utilizaram recursos formais para resolver o exercício, confundindo-se com o procedimento utilizado e errando o exercício. Demonstravam estar fazendo a tarefa mecanicamente, sem compreensão dos procedimentos.
7) Para realizar cálculos sem o uso de papel e lápis, alguns alunos imaginam o algoritmo em suas mentes e realizam os mesmos procedimentos mecânicos que fariam se pudessem “montar a conta”. Eles pareciam desconhecer os recursos e as estratégias muitas vezes utilizados por seus colegas para facilitar as operações.
8) As tabuadas do dois, do cinco e do dez foram consideradas pelos alunos as mais fáceis e todos utilizaram-se do método reprodutivo, no sentido atribuído por Groen e Parkman (apud PARRA, 1996, p. 191), para resolver essas contas. Os cálculos que envolviam a tabuada do 8 foram descritos como difíceis e mais demorados. Os alunos recorreram ao método reconstrutivo. Poucos estudantes observaram regularidades com as presentes nas tabuadas do dois, do quatro e do oito.
9) A divisão foi eleita pelos alunos como a operação mais difícil de todas. Principalmente nas situações que envolvem números racionais na representação decimal. Muitos evidenciaram a crença de que divisões com números racionais na forma decimal precisam ter, obrigatoriamente, resultados também racionais na forma decimal.
10) Nem todos os alunos têm consciência do que sabem e não reconhecem os recursos que utilizam para efetuar cálculos mentalmente. Mas é possível considerar a hipótese de ter havido uma dificuldade na forma de cada aluno se expressar.
11) Na medida em que os alunos comentavam suas resoluções no grupo, os erros foram diminuindo e muitos alunos que antes não sabiam escolher recursos pertinentes para auxiliar os cálculos ao final do processo já se mostravam mais seguros em suas opções e até conseguiam fundamentar suas decisões. Ficou

clara a importância de socializar resultados e reconhecer a utilização de determinados recursos.

Percebemos ainda que existem situações em que o aluno, apesar de realizar o cálculo mental com desenvoltura, não o utiliza por insegurança. Desconfia desse procedimento. E até situações que fogem do domínio escolar, como uma mãe que pede ao filho para sempre fazer o algoritmo para não correr o risco de errar o exercício, são influências negativas que desestimulam o uso do cálculo mental em diferentes situações.

Verificamos que realizar cálculos mentalmente com os números racionais na forma decimal trouxe surpresa a vários alunos. Apesar de terem sido capazes de realizar esses cálculos, muitos não imaginavam que fosse possível fazê-lo. Isso nos remete a uma reflexão: o cálculo mental é trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental com os números naturais. E parece ser abandonado nos anos seguintes (6º e 7º), quando os alunos estudam os números racionais. Trabalhar as estratégias de cálculo mental parece ser importante para a continuidade desse procedimento, de relevância na vida e no contexto escolar, que ajuda no desenvolvimento da autonomia e da autoconfiança, na capacidade de criar estratégias, contribui para a aprendizagem com significado e auxilia na memorização e verificação dos resultados.

Com base nas observações dos resultados da segunda atividade e na análise dos comentários feitos pelos alunos, pudemos levantar alguns procedimentos que são utilizados por esses dois grupos de alunos para realizar algumas tarefas, geralmente apresentadas a alunos de 7º ano, e que caracterizam suas primeiras aproximações com cálculos usando letras.

1) Os alunos souberam lidar muito bem com as situações de cálculo de "valor numérico". Os alunos de 6º ano, na sua maioria, utilizaram o algoritmo para mostrar o seu raciocínio e o próprio algoritmo acaba sendo a resposta do exercício. Os alunos de 7º ano já utilizaram maneiras diferentes de resolução, a maioria substituindo a letra pelo valor numérico na expressão matemática e

calculando o resultado. Eles estão mais próximos da linguagem formal das resoluções algébricas.

2) Em situações em que a letra aparece como variável para expressar relações e funções (dimensão funcional da álgebra), os alunos souberam, na sua maioria, reconhecer seu papel e resolveram corretamente os exercícios.
3) Na resolução de equações, ou de problemas que poderiam ser resolvidos com o uso das equações, a maioria dos alunos de 7º ano preferiu recorrer aos procedimentos formais desse tipo de resolução. Por sua vez, os alunos de 6º ano, desconhecedores desses procedimentos formais, tiveram que mobilizar seus conhecimentos aritméticos para resolver essas situações. Alguns conseguiram, outros não.
4) Vários alunos utilizaram-se da ideia de operação inversa para resolver problemas que envolveriam equações.
5) A dimensão da álgebra que utiliza as letras como generalizações do modelo aritmético, a aritmética generalizada, foi aquela que demonstrou maior complexidade de compreensão por parte dos alunos. A maioria deles sequer entendeu o que significavam aquelas expressões. Os poucos alunos que conseguiram compreendê-la, fizeram uso de substituições aleatórias para checar resultados. E justificaram a generalização por meio de alguns exemplos.
6) A maioria dos alunos fez uso do cálculo mental enquanto resolvia os exercícios com letras. Alguns recorrem ao algoritmo por sentirem maior segurança. Outros, para demonstrar o raciocínio utilizado com clareza. Mas ficou claro que o algoritmo aparecia, na maioria das vezes, em situações que envolviam os números racionais na forma decimal e na forma fracionária. Nesses casos, até mesmo os alunos que utilizavam o cálculo mental com desenvoltura, recorriam ao algoritmo como forma de verificação.

Por fim, retomamos nossa pergunta: que relações podem ser observadas no desempenho de alunos, contrapondo-se tarefas aritméticas e tarefas algébricas realizadas por eles?

Muitos alunos foram capazes de resolver problemas simples sem o uso formal das manipulações algébricas. Por isso, é preciso lembrar que, ao introduzirmos esse formalismo próprio da educação algébrica, a nova ferramenta deve facilitar as resoluções sem anular aquilo que o aluno já sabia.

É importante salientar que nos anos finais do Ensino Fundamental as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. E, muitas vezes, os procedimentos que não utilizam equações e sistemas para resolver problemas são desestimulados, mesmo em situações em que uso da álgebra não é obrigatoriamente necessário. É importante que as soluções aritméticas não sejam abandonadas, mas que passem a conviver como as novas ferramentas disponíveis.

Desse modo, é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, e que valorize as resoluções aritméticas tanto quanto as algébricas.

Concluímos, destacando a importância de participar de um Grupo de Pesquisa e de realizar uma investigação como elemento importante para nosso desenvolvimento profissional. Nesse percurso aprendi a ser mais reflexiva, a fazer questões a respeito da minha própria prática e também a buscar em trabalhos de outros pesquisadores, ideias, questionamentos, proposições.

Passei a entender melhor o ponto de vista de Escudero, quando ele diz:

> a formação e a mudança tem de ser pensadas em conjunto; como duas faces da mesma moeda. Hoje é pouco defensável uma perspectiva sobre a mudança para a melhoria da educação que não seja, em si mesma, capacitadora, geradora de sonho e compromisso, estimuladora de novas aprendizagens e, em suma, formativa para os agentes que têm de desenvolver na prática as reformas. Simultaneamente, a formação, se bem entendida, deve estar preferencialmente orientada para a mudança, ativando reaprendizagens nos sujeitos e na sua prática docente que dever ser, por sua vez, facilitadora de processos de ensino e de aprendizagens dos alunos (Escudero, 1992, p.57, apud Garcia, 1999, p. 28).

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

ARAUJO, Elizabeth Adorno de. Ensino de álgebra e formação de professores. In: *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 10, n. 2, pp. 331-346, 2008.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

BRASIL, Secretaria da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática, Ensino de 1ª a 4ª série*. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

BRASIL, Secretaria da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática, Ensino de 5ª a 8ª série*. Brasília: Ministério da Educação, 1998.

COLL, Cesar, et al. *O construtivismo na sala de aula.* São Paulo: Ática, 2009.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L.. (Org). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, L. P.F.; CRISTOVÃO, E. M. *Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico*. 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm, acesso em jan/2013.

GARCIA, Carlos Marcelo. *Formação de professores: para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora, 1999.

GARCIA, Francisco Fernandes. Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. In: *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Barcelona, n. 14, ano IV, outubro de 1997.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. A. *A construção do saber*: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução: Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI. Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Metodologia Científica*. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A. A generalização de padrões nos PCN e sua ressonância entre professores de matemática. In: *Anais do IV CIEM*. Canoas, 2007.

MILTON, Ken. Fostering algebraic thinking in children. *The Australian Mathematics Teacher*, v. 45, n. 4, pp. 14-16, 1989.

MIRAS, Mariana. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula***.** São Paulo: Ática, 2009.

MOREIRA, Marco Antônio. *Teorias de aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, Marco A. MASINI, Elcie F. Salzano. *Aprendizagem significativa*: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 1982.

OLIVEIRA, Ana Teresa de C. C. Reflexões sobre a aprendizagem da álgebra. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo: SBEM, ano 9, n. 12, pp. 35-39, jun. 2002.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma. et al. *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

PONTE, J. P. Estudo de caso em educação matemática. *Bolema* 25, ano 19, 2006. Disponível também em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880/1657 – acessado em 03 jul 2012.

SÃO PAULO, Secretaria Municipal de Educação. *Orientações Curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem para o ensino fundamental: ciclo II: Matemática*. São Paulo: Secretaria Municipal de Educação, 2007.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. A aritmética e a álgebra na Matemática escolar. Recife: SBEM, julho de 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC58937242400.pdf - acessado em 10 jan 2013.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

YIN, Robert K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ANEXOS

Anexo 1: Primeiro Termo de Consentimento

São Paulo, 16 de novembro de 2011.

Prezados pais ou responsáveis,

Venho, por meio desta, convidar seu filho(a) ______________________ a participar de alguns encontros para a coleta de dados da minha pesquisa acadêmica, cujo foco de estudo é o pensamento aritmético do aluno. Propus-me a estudar a maneira como raciocina o aprendiz nessa faixa etária, relacionando seu pensamento com algumas teorias de aprendizagem.

A pesquisa faz parte do Grupo Organização, Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, coordenado pela Profª Drª Célia Maria Carolino Pires.

Aproveito para ressaltar que as identidades dos alunos serão preservadas e não haverá imagem de nenhum participante, bem como não será divulgado o nome da instituição de ensino da qual fazem parte.

Serão três encontros semanais, que acontecerão nos dias 21 e 28 de novembro e 05 de dezembro, sempre às segundas-feiras, com duração de uma hora e meia, no período da tarde.

Agradeço a participação e coloco-me à inteira disposição para qualquer esclarecimento.

Thereza Maria de Fátima Quilici Figueiredo

Autorizo meu filho(a), ____ a participar dos encontros acima mencionados.

____

Nome legível – pai ou responsável

____

Assinatura e data

Anexo 2: Segundo Termo de Consentimento

São Paulo, 02 de maio de 2012.

Prezados pais ou responsáveis,

No final do ano passado, seu filho(a) ____________________________ participou de três encontros na escola para coleta de dados da minha pesquisa acadêmica, cujo foco de estudo é o pensamento aritmético do aluno. Esses grupos de discussão foram muito ricos em informações e deram origem a um segundo estudo, dessa vez visando o pensamento algébrico do estudante.

A participação de ____________ nesse segundo momento é de fundamental importância para a continuidade da pesquisa. E será o último momento que teremos juntos antes da finalização da dissertação. Nessa etapa, o encontro será individual, aluno por aluno, e terá duração de aproximadamente uma hora (podendo, em alguns casos, se estender a uma hora e meia, no máximo).

Aproveito para relembrar que as identidades dos alunos serão preservadas e não haverá imagem de nenhum participante, bem como não será divulgado o nome da instituição de ensino da qual fazem parte.

Com o intuito de facilitar a permanência do aluno na escola, peço que sinalize o melhor dia para que o encontro aconteça, sempre no período contrário às aulas. Com base nessas informações, farei o agendamento e enviarei novo comunicado.

Conto, mais uma vez, com a participação e com a compreensão de vocês.

Thereza Maria de Fátima Quilici Figueiredo

Autorizo meu filho(a), _____________________________________ a participar dos encontros acima mencionados.

____
Nome legível – pai ou responsável

____
Assinatura e data