PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Ana Lucia Infantozzi Jordão

Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Ana Lucia Infantozzi Jordão

Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini.***

São Paulo

2011

Banca Examinadora

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta".

Carl Friedrich Gauss

*Dedico este trabalho aos meus pais **Salvador** (in memoriam) e **Ivone**, por me darem a vida, ensinarem como trilhar minha jornada e estarem sempre presentes nos momentos difíceis.*

*Aos amores de minha vida, meu marido **Ricardo**, meus filhos **Ana Carolina**, **Renato** e **Juliana** por compreenderem, colaborarem e me incentivarem para que eu pudesse realizar este sonho.*

Obrigada por existirem em minha vida.

Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Divino Espírito Santo, por permitir que eu chegasse até aqui.

*À **Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini**, pelo trabalho de orientação desenvolvido com competência, paciência, dedicação e amizade.*

*Aos Professores Doutores **Silvia Dias Alcântara Machado** e **Antonio Sérgio Cobianchi**, pelas contribuições valiosíssimas para a conclusão deste trabalho.*

*À minha mestra, amiga e companheira de trabalho **Sonia Maria Peirão Dias**, pela ajuda e brilhante revisão deste trabalho, minha eterna gratidão.*

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP, pelas contribuições ao longo de todo o curso.

*Aos meus amados familiares **Ana Cristina e Carlos Eduardo de Campos Sales Sanches**, **Liliane e Marcelo Infantozzi, Marco e Marcos Infantozzi**, aos meus sobrinhos e sobrinhas **André, Daniele, Fabiana, Mariana e Ricardo**, ao meu cunhado **Rubens Frascino Jordão**, à minha tia **Dircea Rodrigues Jordão Enei** e à minha sogra **Ruth Jordão**, por acreditarem na minha capacidade e permanecerem sempre ao meu lado.*

*À irmã **Nilza da Costa Hóss** e à irmã **Lindaci Torres dos Santos**, pela compreensão e colaboração, aos meus estimados alunos que participaram com tanta dedicação na realização do instrumento desta pesquisa e aos meus prezados amigos e funcionários do Colégio Madre Alix, pelo carinho e incentivo.*

Às minhas queridas primas ***Elda Müller de Almeida*** *e* ***Simone Denardi de Almeida*** *e à querida amiga* ***Silvia Kerr Cavalcante Veríssimo****, pelo incentivo, força e carinho nos momentos mais críticos.*

À minha companheira do curso de Mestrado Profissional, ***Edna Ribeiro Cassiari****, que nos momentos mais difíceis desta jornada esteve presente com carinho, amizade, dedicação e incentivo.*

Aos colegas do Grupo de Pesquisa GPEA (Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica), pelas contribuições a esta pesquisa durante as discussões, em especial, ***Adriana Tiago Castro Santos*** *e* ***João Pereira Viana Filho.***

Ao ***Professor Imenes****,* ***Cristiano Peirão Dias****,* ***Cecília Lemann Ferreira, Marisa Tereza P. P. Pereira, Maristela Neves Daher****,* ***Cremilda F. Pinto, Renata Quintanilha de Almeida, Alex Flemming****,* ***Antonio Ribeiro****,* ***Maria de Fátima Pereira de Melo****,* ***Marcos Alexandre Alves****,* ***Maristela Neves Daher****,* ***Marcelo Ranieri****.* ***Francisco Olimpio Silva****, pela contribuição para a elaboração deste trabalho e incentivo para a realização deste trabalho.*

Aos amigos do Mestrado Profissional ***Jacinto Ordem****,* ***Levi de Oliveira Souza****,* ***Mariucha Baptista de Paula*** *e* ***Ana Rebeca Miranda Castillo****, pelo companheirismo e pelas sugestões durante todo o curso.*

Aos meus estimados alunos que participaram, com dedicação, na realização do instrumento desta pesquisa e aos meus prezados amigos e funcionários do Colégio Madre Alix.

À ***CAPES****, pela bolsa de estudos que permitiu desenvolver este trabalho.*

A autora

RESUMO

O presente trabalho relata uma pesquisa qualitativa, cujo objetivo é elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares quadrados com o auxílio do *software* educacional Winplot. A sequência didática foi aplicada para alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Madre Alix, uma instituição privada localizada na cidade de São Paulo. Nossa pretensão foi responder à seguinte questão de pesquisa: “Os alunos do Ensino Médio conseguem compreender a resolução desses sistemas lineares 3x3 quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registro de representação aliados a um ambiente computacional?” Para fundamentar o processo de nossa pesquisa, baseamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) por acreditamos na relevância da conversão de registros, quando da abordagem desse assunto, para a construção do conhecimento do aluno. Como metodologia, optamos pelos pressupostos da Engenharia Didática, segundo descrição feita por Artigue (1996), visto que é usada nas pesquisas de Didática da Matemática, que incluem uma parte experimental. Os resultados de nossa pesquisa mostram a relevância do uso do *software* educacional Winplot como contribuição para a visualização e compreensão da resolução de sistemas lineares em 3D. Esperamos que nossa pesquisa aponte caminhos para novos estudos sobre a conversão do registro gráfico como registro de partida. Esta dissertação gerou um produto a parte que contém uma sequência didática desenvolvida, aplicada e analisada, mediante atividades que abordam o estudo de sistemas lineares 2x2 e 3x3 em que contemplamos os registros e representações da língua natural, algébrico, tabela e gráficos, que poderão melhor instrumentalizar os professores.

Palavras-chave: educação algébrica, sistemas lineares, registro de representação semiótica, método da adição, *software* Winplot.

ABSTRACT

The present study describes a qualitative research whose aim is to design, implement and analyze a didactic sequence that approaches the algebraic and graphical solutions of linear-quadratic systems with the aid of educational software Winplot. The didactic sequence was applied to students in the 2nd year of Colégio Madre Alix High School, a private institution located in Sao Paulo. Our objective was to answer the following research question: “Can the high school students understand the resolution of 3 by 3 linear systems when using an approach that favors the conversion and processing of representation register coupled with a computing environment?” In order to support our research process, we rely on Raymond Duval’s Theory of Semiotic Representation Registers (2003) as we believe in the relevance of the records conversion while approaching to this subject in order to build the students’ knowledge. The chosen methodology was Artigue’s Didactics Engineering assumptions (1996), as it is used in Mathematical Didactics Researches including an experimental part. The results of our research show the relevance of using the educational software Winplot as contributing to the visualization and understanding of solving linear systems in 3D. We hope that our research points towards further studies on the conversion of graphic record as a starting record. This study generated a product that contains a didactic sequence for teaching through activities that address the study of 2 by 2 and 3 by 3 linear systems where we contemplate the records and representations of natural language, algebraic, table and graphs which may better equip teachers.

Keywords: algebraic education, linear systems, semiotic representation register, addition method, software Winplot.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS E QUADROS

INTRODUÇÃO

Minha preocupação como professora do 2º ano do Ensino Médio confirmou-se quando constatei as dificuldades dos alunos na compreensão e interpretação da resolução e solução dos sistemas lineares, tema de estudo do citado ano. Indo ao encontro desta inquietação, iniciei, em agosto de 2008, o curso de mestrado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Em 2009, ingressei no Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA. Em um de nossos encontros, a Profª. Drª. Barbara L. Bianchini, orientadora deste trabalho, sugeriu aos alunos que participassem do IX Encontro de Pesquisa em Educação Matemática da Região Sudeste, na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), a fim de assistir à comunicação científica *Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros Didáticos*, apresentada por Carla Moreno dos Santos Battaglioli, uma de suas orientandas.

Battaglioli (2008) fez uma investigação sob quais registros de representação semiótica os sistemas lineares estão sendo abordados nos livros didáticos e quais conversões de registros estão sendo propostas.

Ao participar daquela apresentação, interessei-me pelo tema, pois veio ao encontro às minhas inquietações por abordar sistemas lineares no Ensino Médio.

A primeira vez que os alunos entraram em contato com o estudo sobre sistemas lineares 2x2 foi na sétima série[1] do Ensino Fundamental. Nesse nível, eles conhecem a resolução algébrica pelos métodos de adição, substituição e comparação. A pesquisadora, quando professora do Ensino Fundamental,

[1] Atual oitavo ano.

abordou, também, a representação gráfica desse tipo de sistema linear, pois entendeu ser relevante a introdução da representação de pares ordenados de números reais no plano cartesiano a fim de enfocar geometricamente o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas para que o aluno pudesse compreender a existência de sistemas sem solução bem como de outros que têm infinitas soluções.

No 2º ano do Ensino Médio, o estudo dos sistemas lineares volta a ser abordado: os livros didáticos iniciam o tema com a retomada do sistema linear 2x2 e aprofundam o conteúdo com algumas discussões. São apresentados outros tipos de sistemas lineares de dimensões maiores. Entretanto, o enfoque é na resolução de sistemas lineares 3x3.

Um desafio apresentou-se quando a pesquisadora se deparou com a ausência da abordagem gráfica dos sistemas lineares 3x3 nos livros didáticos pesquisados. Preocupada em como vencer tal dificuldade, decidiu investigar a contribuição de uma ferramenta computacional para a abordagem do estudo dos sistemas lineares que propiciasse ao aluno a visualização dos três planos no espaço tridimensional.

Juntando-se a isso, o tema de pesquisa de Battaglioli (2008) motivou-me a realizar esta pesquisa que sugere a busca constante de atividades alternativas que levem os alunos a interpretarem resultados e a construirem novos conhecimentos no que diz respeito aos sistemas lineares.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento, a aplicação e a análise de uma sequência didática para alunos do 2º ano do Ensino Médio, visando a resolução nos registros algébrico e gráfico dos sistemas lineares em 2D e 3D com o auxílio do *software* educacional Winplot.

Para situar o leitor a respeito da problemática estudada em nossa pesquisa, apresentamos sua estrutura ao descrever, de forma resumida, os principais pontos de cada capítulo.

A pesquisa está configurada em cinco capítulos, além das considerações finais.

No capítulo I, apresentamos a *Problemática* na qual destacamos como surgiu a ideia e o interesse a respeito do tema, o objetivo e a questão de pesquisa.

No capítulo II, abordamos a *Fundamentação Teórica e Metodológica*. Nossa pesquisa fundamenta-se no referencial teórico dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Segundo esse autor, se pretendemos analisar as dificuldades de aprendizagem em Matemática precisamos estudar, prioritariamente, a conversão dos registros de representação.

Como referencial metodológico, usamos a Engenharia Didática, desenvolvida por Artigue (1996), e que, segundo Machado (2003), pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um objeto matemático - no caso, sistemas lineares.

No capítulo III, intitulado *Estudos Preliminares*, apresentamos as leituras realizadas a respeito de sistemas lineares que serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho.

Analisamos dois livros didáticos do Ensino Médio, justificamos a escolha do método de adição para a resolução algébrica dos sistemas lineares 3x3 bem como o uso do *software* Winplot.

Apresentamos, no capítulo IV, *Os procedimentos Metodológicos*, descrevendo todos os passos que viabilizaram a realização do instrumento de nossa pesquisa, assim como a sua descrição.

No capítulo V, descrevemos as análises *a priori* e *a posteriori*. Confrontamos nossas expectativas tanto quanto à realização da sequência didática e aos procedimentos feitos como quanto à experimentação em sala de aula com nossos sujeitos de pesquisa.

Apresentamos protocolos, diálogos e anotações que esclarecem e enriquecem as análises de modo a levar o leitor a uma melhor compreensão e clareza das ideias e pesquisas aqui descritas.

Finalizamos este estudo com a apresentação das *Considerações Finais* e as possíveis conclusões oriundas das análises dos dados coletados em nosso trabalho, seguidas de sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

Iniciamos a dissertação com a apresentação da justificativa da nossa pesquisa que descreve a parte da trajetória profissional da autora, dada a sua relevância para a temática do presente trabalho, as investigações sobre o tema, o objetivo e a questão de pesquisa.

1.1 Justificativa

Ingressei, em 1990, no Colégio Madre Alix – uma escola da rede particular da cidade de São Paulo - como professora de Matemática da 5ª série[2] do Ensino Fundamental ll e lecionei na mesma série por quatro anos. Depois de algum tempo, assumi, sucessivamente, a 6ª, 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental II.

Em 1999, o colégio iniciou as classes do Ensino Médio. Em 2001, encarreguei-me das aulas de matemática do 1º ano e, em 2007, das aulas do 2º ano desse mesmo ciclo. No momento em que abordei o estudo dos sistemas lineares formados por três equações e três incógnitas[3], deparei-me com a dificuldade dos alunos quanto à resolução desse tipo de sistema linear. Ao terminar o ano letivo, esperava que os alunos tivessem superado essas dificuldades.

---

[2] Atual 6º ano do Ensino Fundamental ll.

[3] Doravante denominados sistemas lineares 3x3.

Em agosto de 2008, motivada por vencer os meus próprios desafios de como melhorar a compreensão e o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática e pela possibilidade de me aperfeiçoar na área da Educação Matemática, iniciei o mestrado profissional na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Optei pela linha de pesquisa intitulada *Tecnologias da Informação e Educação Matemática* e passei a ser mais uma integrante do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA, sob a coordenação das professoras Drª Silvia Dias Alcântara Machado, Drª Barbara Lutaif Bianchini e Drª Maria Cristina S. de A. Maranhão.

Uma das preocupações dos integrantes do grupo é responder à questão *Qual é a álgebra a ser ensinada na formação de professores de matemática?*, cujo objetivo investigar como a álgebra é abordada nos diferentes segmentos de ensino e na formação de professores.

Este trabalho está inserido no subprojeto: A aprendizagem de álgebra com a utilização de ferramentas tecnológicas. O objetivo deste projeto é investigar na educação algébrica o papel da tecnologia, avaliar o impacto da tecnologia na educação algébrica e seus efeitos nos campos: institucional, docente e discente.

Reunimo-nos uma vez por semana, na PUC/SP, e em um de nossos encontros semanais discutimos sobre a dificuldade evidenciada por nós, professores, ao abordarmos o estudo de sistemas de equações lineares. Mostrei-me interessada pelo tema, pois coincidia com um dos conteúdos que eu trabalharia com os alunos do 2º ano do Ensino Médio. Assim, a professora Drª Barbara Lutaif Bianchini, minha orientadora, sugeriu que eu participasse do IX Encontro de Pesquisa em Educação Matemática da Região Sudeste, na Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, no período de 8 a 11 de julho de 2009, a fim de assistir à comunicação científica *Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos*, apresentada por Battaglioli, uma de suas orientandas que defendeu sua dissertação em 2008.

Ao término da apresentação, minha orientadora, percebendo minha admiração pelo trabalho apresentado, sugeriu que eu desenvolvesse uma sequência didática a partir da pesquisa e das sugestões para futuras investigações propostas por Battaglioli (2008).

Imediatamente aceitei o desafio, uma vez que além de contribuir com as pesquisas concluídas ou em desenvolvimento, no grupo de pesquisa GPEA, o tema também fazia parte do conteúdo a ser desenvolvido com meus alunos. O desafio aceito deu origem a este trabalho.

1.2 Problema de pesquisa

Uma pergunta para suscitar o leitor a entrar no contexto que abordaremos: "Qual a nossa preocupação para iniciarmos o estudo dos sistemas lineares sob o ponto de vista da proposta sugerida pela dissertação de Battaglioli (2008)"?

Battaglioli (2008) realizou uma pesquisa sobre esta temática, em que ressalta a importância de se explorar o registro gráfico na resolução dos sistemas lineares, uma vez que ele poderia contribuir para que os alunos tivessem maior facilidade não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário.

O estudo do sistema linear formado por duas equações e duas incógnitas consta no currículo do Ensino Fundamental, segundo o PCN (BRASIL, 1998). Neste ciclo, é abordada sua resolução algébrica (métodos de adição, substituição e comparação), a aplicação desse conteúdo matemático em situações-problema, a resolução gráfica e a classificação.

A resolução gráfica de uma equação $ax + by = c$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é uma reta. Segundo Iezzi (2009), dado um sistema linear formado por duas equações lineares, chamamos de solução do sistema a todo par ordenado de números reais que seja solução simultaneamente de ambas as equações do sistema.

> Quando as equações são representadas por duas retas, a solução do sistema fica representada num ponto que pertence a ambas as retas. (IEZZI, 2009, p.178)

Assim, ao realizarem a representação gráfica do sistema linear, os alunos visualizam os três tipos de soluções possíveis do sistema linear 2x2: uma única solução; não admite solução ou infinitas soluções; interpretam e classificam o sistema linear respectivamente de possível e determinado, impossível, ou possível indeterminado. A partir daí, apresentam o conjunto solução.

Quanto à necessidade de dar sentido às soluções dos sistemas lineares 2x2, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem:

> Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. (BRASIL, 2008, p. 78)

Machado (1996), no artigo *O Universitário principiante x Significado de sistema de equações,* conclui:

> [...] urge trabalhar com a mudança de registro tanto do algébrico para o gráfico quanto vice-versa, dando ênfase a essa última modalidade, tanto antes do 3º grau quanto em Geometria Analítica e Cálculo na Faculdade. Se isso não for feito arriscamos a continuar tendo alunos "cegos" no sentido de mexerem com sistemas sem dar sentido algum a eles! (MACHADO, 1996, p. 248)

Quanto à relevância em abordar um mesmo conteúdo matemático de maneira diversificada, os Parâmetros Curriculares Nacionais[4] (BRASIL, 2005) ressaltam:

> Podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos símbolos: matemáticos, língua natural, desenhos, gráficos, ícones, etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos. (BRASIL, 2005, p. 75)

---

[4] PCN

No 2º ano do Ensino Médio, o tema sistema linear volta a ser estudado com a retomada do tipo 2x2, como conhecimento prévio, preparando os alunos para conhecerem os sistemas lineares de dimensões maiores.

Quanto à necessidade da ligação entre os saberes a fim de possibilitar a construção significativa do conhecimento, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem:

> [...] se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e profunda, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades frente à matemática mostram claramente que isso não é verdade". (BRASIL, 1998, p. 86-87)

Pelos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN+ (2002), verificamos a importância de retomarmos os conhecimentos prévios necessários para a abordagem dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para os sistemas 3 por 3 [...] (BRASIL, 2002, p. 122)

A discussão de um sistema linear refere-se à determinação de sua resolubilidade que indica os tipos de soluções possíveis e, a partir daí, a apresentação do conjunto solução.

Freitas (1999), em sua dissertação de mestrado intitulada *Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno*, realizou uma pesquisa, objetivando diagnosticar o sentido que os alunos do final do 2º grau[5] dão às soluções deste tipo de sistemas lineares. Freitas (1999) observa que:

---

[5] Atualmente denominado Ensino Médio.

> [...] as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação[6]. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3. (FREITAS, 1999, p. 24)

Battaglioli (2008), em relação à ausência de exercícios que contemplam o registro gráfico dos sistemas lineares 3x3 no material analisado, conclui:

> Cabe, portanto, ao professor buscar atividades que contemplem esta carência dos livros didáticos, pois acreditamos que o registro gráfico deveria ser mais explorado, visto que ele poderia contribuir para que os alunos tenham maior facilidade não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. (BATTAGLIOLI, 2008, p. 95)

Essa carência de atividades nos livros didáticos é um dos fatores que leva à exploração de novos caminhos, tais como o uso de tecnologias no ensino da Matemática. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) ressaltam a importância, para o aluno, da ferramenta computacional a fim de que ele possa confrontar e conjeturar[7] as diferentes soluções apresentadas, contribuindo, assim, para a construção de seu aprendizado:

> Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela. (BRASIL, 2008, p. 88)

---

[6] Registros de Representação será detalhado no Capítulo II desta pesquisa.
[7] *Do latim* ***conjecturare***,Grande Dicionário Larousse Cultural da Língua Portuguesa, 1999.

Segundo Santos (2008) as representações de processos matemáticos no meio digital, e aliado às explorações e manipulações dos estudantes, desencadeiam um real aprendizado que dificilmente podem ser obtido com textos e figuras estáticas. O emprego de *softwares* gráficos na educação Matemática aumenta as capacidades natas de exploração, gerando introspecção de conceitos matemáticos envolvidos nas construções de sala de aula.

O uso da ferramenta computacional pode permitir ao aluno: adquirir o domínio do saber, dando significado ao objeto matemático; oferecer diferentes representações inerentes a este objeto; expandir o conhecimento dos diferentes saberes, relacionando-os entre si; e visualizar os planos em 3D em diferentes posições.

Em relação ao método a ser adotado para a resolução dos sistemas lineares, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sugerem o uso do método de escalonamento por apresentar operações elementares. Conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) a respeito do uso do método de escalonamento:

> A resolução de sistemas 2x2 ou 3x3 também deve ser feita via operações elementares (processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem soluções. (BRASIL, 2008, p. 78)

Freitas (1999), para ilustrar de que forma as dificuldades se apresentam quanto à resolução algébrica do sistema linear 3x3 pelo método de escalonamento e as discussões (algébricas) de sistemas lineares parametrizados[8], aplicou um teste diagnóstico, contendo duas questões, a uma classe de 45 alunos após terem estudado durante um bimestre esses conteúdos.

No teste diagnóstico realizado em sua pesquisa, propôs uma questão em que aborda a resolução de um sistema linear 3x3 da seguinte maneira:

1ª questão: Resolver o sistema abaixo:

---

8 Segundo Paiva (2010), sistemas lineares parametrizados são aqueles cujas equações escritas nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ possuem qualquer outra incógnita distinta de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$$

Em relação à resolução deste sistema linear, Freitas (1999) afirma que:

> O método de escalonamento é bastante acessível aos alunos. No entanto o alto índice de acerto na sua aplicação se contrapõe ao baixo índice de acerto (15,5%) com relação à discussão do sistema, o que revela uma distância bastante grande entre "resolver" (que se refere à aplicação de um algoritmo) e "discutir" (que exige algum tipo de interpretação). (FREITAS, 1999, p. 46)

Ancorados em Freitas (1999), acreditamos que estudar os sistemas lineares por outro método que não seja o de escalonamento poderá contribuir para melhor atingirmos o objetivo de nossa sequência didática.

1.3 Objetivo e Questão de pesquisa

Assim como Freitas (1999), concordamos quando ela afirma que é possível trabalhar os sistemas lineares, no Ensino Fundamental e Médio, sob três aspectos – resolução algébrica, tabela e gráficos – e, assim, tentarmos minimizar a dificuldade que o aluno tem na coordenação satisfatória das diferentes interpretações, favorecendo a melhor compreensão dos resultados e soluções. Em relação à abordagem do estudo do sistema linear 3x3, Freitas (1999) ressalta:

> Em sistemas de três incógnitas, é possível utilizar um programa que trabalhe com gráficos de planos, para mostrar aos alunos a relação entre a solução algébrica (que ele já conhece) e a solução gráfica. (FREITAS, 1999, p. 75)

Essa preocupação em utilizar um programa vai ao encontro ao que sugere Battaglioli (2008), que, além de indicar a relevância em abordarmos o estudo dos sistemas lineares no registro gráfico, sugere o uso do *software* Winplot, que possibilita aos alunos do 2º ano do Ensino Médio a construção de gráficos em 3D quando abordam o estudo dos sistemas lineares 3x3.

> Voltamos a afirmar que existem excelentes *softwares* gratuitos que trabalham em três dimensões e que representam muito bem a posição de três planos no espaço. (BATTAGLIOLI, 2008, p. 95)

Diante do exposto, pretendemos realizar uma pesquisa qualitativa para contribuir com o estudo de sistemas lineares, respondendo à questão: “Os alunos do Ensino Médio conseguem compreender a resolução desses sistemas lineares 3x3 quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registro de representação aliados a um ambiente computacional?”

Segundo Lüdke e André (1988), uma pesquisa qualitativa apresenta as seguintes características:

- sua realização ocorre em ambiente natural e é, neste local, onde se coletam os dados, e o pesquisador é o seu principal instrumento;
- os dados são predominantemente descritivos. O pesquisador deve se atentar à maior quantidade de elementos possíveis no ambiente;
- a preocupação com o processo é maior do que com o produto;
- o “significado” que as pessoas (no caso, as que são observadas) dão às coisas são focos da atenção do observador. O que acontece é que o grupo observado pode usar termos de maneira equivocada, mas sua linha de raciocínio está correta, cabendo ao pesquisador verificar essas palavras/informações;
- a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. O pesquisador não busca evidências que comprovem suas hipóteses;
- a pesquisa qualitativa proporciona ao pesquisador condições de realizar novas descobertas e observar novos fatores relevantes que possam surgir durante a realização da pesquisa.

Para as autoras Lüdke e Andre (1988):

> Mesmo que o investigador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, ele procurará se manter constantemente atento a novos

> elementos que possam emergir como importantes durante o estudo [...] novos aspectos poderão ser detectados, novos elementos ou dimensões poderão ser acrescentados, na medida em que o estudo avance. (LÜDKE e ANDRE, 1988, p. 18)

Utilizaremos, como referencial teórico, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval (2003), e como referencial metodológico, os pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1996), apresentados no próximo capítulo, os quais nortearão todo o desenvolvimento desta pesquisa.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Para nortear o desenvolvimento desta pesquisa, escolhemos, como referencial teórico, alguns pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval (2003), e como referencial metodológico, os pressupostos da Engenharia Didática descrita por Artigue (1996).

2.1 Os Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval (2003) enfatiza, em sua Teoria sobre os Registros de Representação Semiótica[9], a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nas atividades matemáticas.

Duval (2003) relaciona a aprendizagem da matemática com os processos de *semiósis* e *noésis*. Entende-se por *semiósis* a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e por *noésis*, a apreensão conceitual de um objeto. Segundo o autor, "não há *noésis* sem *semiósis*", isto é, não se adquire conhecimento de um objeto sem se utilizar dos sistemas de representação semiótica. Segundo o autor, um registro de representação é um sistema semiótico que tem no funcionamento cognitivo consciente as funções cognitivas fundamentais, propiciando a organização de informação a respeito do objeto representado.

[9] É a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido. (SANTAELLA, 1983, p. 13)

O autor preocupa-se com uma maior formação matemática inicial para todos os alunos, a fim de prepará-los para enfrentar um ambiente informático e tecnológico cada vez mais complexo. É, portanto, necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, é contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática caracteriza-se como importante representaçção semiótica.

Para tratarmos da articulação dos registros, considerada por Duval uma condição de acesso à compreensão em matemática, é relevante destacarmos como ele faz sua classificação.

Os chamados **Registros Multifuncionais** são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis. Dentro desta classe, encontram-se os registros de representação discursiva: a língua natural, os registros de representação não-discursiva, as figuras geométricas planas ou em perspectivas.

Encontramos nos **Registros Monofuncionais**, em que os tratamentos são principalmente algoritmos, os registros de representação discursiva, os sistemas de escritas (numéricas, algébricas e simbólicas) e não-discursiva, os gráficos cartesianos.

A figura abaixo mostra a classificação dos registros multifuncionais e monofuncionais.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Figura 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)
Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

Os objetos matemáticos só são acessíveis pela sua representação semiótica e cabe ao professor propor as conversões.

A fim de desenvolvermos a nossa sequência didática e atingirmos nossos objetivos, trabalhamos com a mobilização simultânea de registros de representação por ser apontada por Duval (2003) como fator indispensável para a compreensão do objeto matemático. Para o autor, essa compreensão e a originalidade da atividade matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. As representações semióticas passam por dois tipos de transformações que são diferentes: os tratamentos e as conversões.

Duval (2003) define *Tratamento* como a transformação de representação em uma outra representação, permanecendo no mesmo sistema uma transformação estritamente interna de um registro. Em relação ao tema do nosso trabalho, os sistemas lineares, usamos o *tratamento* ao propormos a resolução de um problema por meio de um sistema linear quando multiplicamos uma equação por um número real diferente de zero a fim de prepararmos as equações de forma a obtermos um dos coeficientes comuns e simétricos, a cada duas equações, como exemplificamos a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 12 \ . \ (-2) \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{-2x} - 2y = -24 \\ \cancel{2x} + 3y = 18 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad y = -6}$$

O autor define as Conversões como transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmo objetos, como por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica e vice-versa. Segundo ele, para analisarmos a atividade de conversão é suficiente compararmos a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada.

Em nossa pesquisa, contemplaremos as conversões conforme mostramos a seguir:

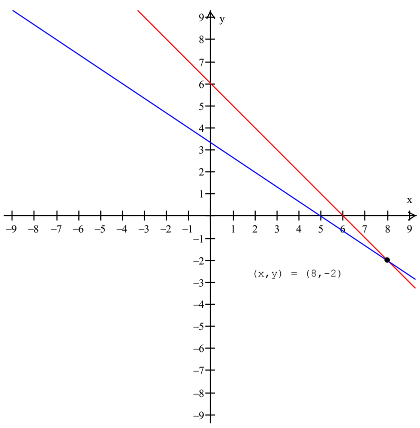
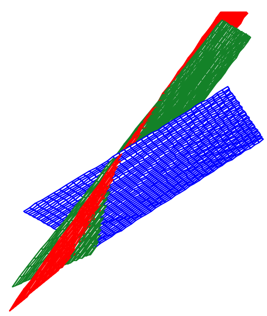
<table>
<tr><th rowspan="2">REGISTROS</th><th colspan="2">SISTEMAS LINEARES</th></tr>
<tr><th>2x2</th><th>3x3</th></tr>
<tr><td>Língua
Natural</td><td>A soma de dois números é 6. O dobro do primeiro mais o triplo do segundo é 10. Quais são os números?</td><td>Carol, junto com suas amigas, foram à lanchonete e pediram 3 refrigerantes, 2 hotdog e 1 sorvete; pagaram R$ 21,50. Na mesa ao lado, sua irmã, Juliana, e suas amigas pediram 8 refrigerantes, 5 hotdog e 3 sorvetes; pagaram R$ 57,00. Sabendo que o preço de 1 refrigerante mais o de um hotdog mais o de um sorvete totaliza R$ 10,00, calcule o preço de cada item.</td></tr>
<tr><td>Algébrico</td><td>$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} 3r + 2h + 1s = 21{,}50 \\ 8r + 5h + 3s = 57{,}00 \\ r + h + s = 10{,}00 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Tabela</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">X+y=6</th></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">2x+3y=10</th></tr>
<tr><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$\frac{10}{3}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>Não abordamos no trabalho</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Figura 2: Exemplos dos registros de representação semiótica usados nesta pesquisa.

Quanto à utilização do registro de partida e de chegada, contemplamos, em nossa pesquisa, da seguinte forma:

Registro de partida

(Língua Natural)

Para uma partida de futebol, foram colocados à venda três tipos de ingresso:

- *para o setor verde, ao preço de R$ 12,00*
- *para o setor azul, ao preço de R$ 18,00*
- *para o setor branco, ao preço de R$ 25,00.*

Sabendo que 38.000 torcedores pagaram R$ 620.000,00 para assistir a essa partida, sendo que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos vendidos para o setor azul, quantos torcedores pagaram ingresso para o setor verde?

Registro de chegada

(Algébrico)

$$\begin{cases} 12V + 18A + 25B = 620\,000 \\ V + A + B = 38\,000 \\ V - 2A = 0 \end{cases}$$

Registro de partida

(Algébrico)

Construa a tabela e o gráfico das equações dos Sistemas Lineares abaixo no mesmo plano cartesiano, classifique-os como possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível, e indique o seu conjunto solução. Caso encontre um ponto comum às duas retas, determine-o.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

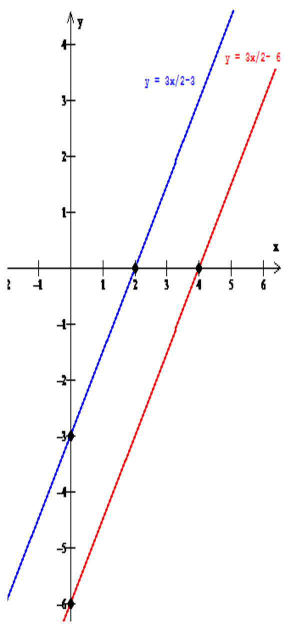
(Tabela)

x	y
0	-3
2	0

x	y
0	- 6
2	0

Registro de chegada

(Gráfico)

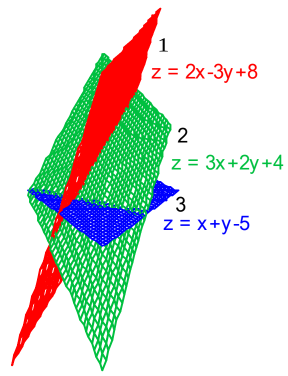


Registro de partida
(Algébrico)

Usar o método de Adição para a resolução do sistema linear 3x3.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$$

Registro de chegada
(Gráfico)



A conversão é abordada em nossa pesquisa de três formas distintas:

- do registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada;
- do registro algébrico para registro de tabelas e registro gráfico;
- do registro algébrico para o registro gráfico.

Desta forma, a mudança de registro poderá contribuir para a compreensão do conteúdo em estudo: os sistemas lineares.

2.2 A Engenharia Didática como Metodologia

Desenvolvemos nossa pesquisa baseadas nos pressupostos da Engenharia Didática segundo Artigue (1996) como referencial metodológico. A metodologia, descrita por Artigue (1996), tem como finalidade analisar situações didáticas da matemática relacionadas à parte experimental em sala de aula, visando entender as relações entre a investigação e a ação do sistema de ensino.

No nosso estudo, elaboramos, aplicamos e analisamos uma sequência didática, objetivando contribuir para a compreensão dos alunos do 2º ano do

Ensino Médio quando de uma abordagem que inclui as representações gráficas para a resolução de sistemas lineares 3x3 com auxílio do *software* Winplot.

Segundo Machado (2008), podemos distinguir dois níveis de Engenharia Didática, o da *microengenharia* e o da *macroengenharia*. As pesquisas de *microengenharia* são aquelas que têm por objeto o estudo de um determinado assunto. Elas são localizadas e levam em conta, principalmente, a complexidade dos fenômenos da sala de aula. Por outro lado, as pesquisas de *macroengenharia* são aquelas que permitem compor a complexidade das pesquisas de *microengenharia* com as dos fenômenos ligados à duração nas relações de ensino e aprendizagem.

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), compreende as seguintes fases: análises prévias ou preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; e análise *a posteriori e validação*. As análises preliminares têm embasamento no quadro teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos já abordados quando da escolha e levantamento sobre o assunto a ser estudado.

Em nosso trabalho, na fase preliminar foram feitas citações envolvendo documentos oficiais PCN (1998), PCN+ (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008), as pesquisas e artigos de: Allevato (2007), Battaglioli (2008), Batista (2004), Borba (2001), Freitas (1999), Machado (1996), Lopes (2008), Oliveira (2009).

A fase de concepção e análise a *priori* consiste na elaboração experimental da ação em sala de aula. Cabe ao aluno o papel principal, e ao professor, o papel da retomada das questões discutidas, restabelecendo os principais resultados da teoria. Segundo Machado (2008):

> [...] fica claro que a análise *a priori* objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: descritivo e o previsivo. Não há nela, tradicionalmente, lugar para o papel do professor, que, quando aparece, é simplesmente no aspecto descritivo. (MACHADO, 2008, p. 244)

Nessa fase, o pesquisador, ancorado nas pesquisas preliminares, opta por variáveis pertinentes ao tema sobre o qual está pesquisando, que lhe propicia fazer uma retomada e aprofundar dados durante sua pesquisa.

A situação-problema deve utilizar, de forma implícita ou explicitamente, os novos objetos matemáticos por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema. Para isso, os alunos devem entender os dados do problema.

Almouloud (2007) ressalta que as situações-problema devem ser desenvolvidas de modo a permitir ao aluno agir, expressar-se, refletir e evoluir por iniciativa própria de forma a adquirir novos conhecimentos, enquanto que o papel do professor é o de mediador e orientador.

Segundo Machado (2008), a fase de *experimentação* é a da realização da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em se dá o contato pesquisador/professor/observador(es) com a população de alunos, objeto da investigação. A fim de evitar fracassos da Engenharia Didática nessa fase, é relevante respeitar ao máximo as escolhas feitas nas análises a *priori*.

Na aplicação e análise das sequências, deve-se prever os instrumentos de coleta de dados, organizar e analisar as produções dos alunos, estudar modificações possíveis no estudo proposto, fundamentos teóricos e metodológicos, analisar os principais resultados em relação à questão de pesquisa e retomar o problema, com síntese das conclusões e avaliação das limitações de pesquisa.

Nesta fase em nossa pesquisa, propusemos uma sequência didática desenvolvida por nós para 45 alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Madre Alix. Porém, 7 desses 45 alunos foram selecionados aleatoriamente como nossos sujeitos de pesquisa.

Foram disponibilizadas duas aulas para a abordagem do estudo de sistemas lineares 2x2, realizadas em classe, e uma aula no laboratório de informática. Para a abordagem do estudo de sistemas lineares 3x3, foram usadas três aulas em classe e duas no laboratório de informática.

A análise *a posteriori* é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos durante a experimentação. A análise se apóia no conjunto desses dados recolhidos durante a experimentação, que é o momento de colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam tal necessidade.

Nessa fase, em nossa pesquisa, analisamos a produção dos sujeitos que dela participaram por meio de protocolos e gravações em áudio e comparamos os dados coletados com a análise *a priori*. Baseamos a validação da nossa pesquisa na confrontação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*.

No próximo capítulo, descreveremos os procedimentos metodológicos segundo as fases da Engenharia Didática.

CAPÍTULO III

ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos: as recomendações dadas pelos documentos oficiais; a análise de dois livros didáticos, adotados no 2º ano do Ensino Médio na escola em que a pesquisadora leciona, sobre a abordagem do estudo de sistemas lineares; leituras sobre o tema; e justificativa pela opção do uso do método de adição para a resolução algébrica do sistema linear 3x3 e pelo uso do *software* educacional Winplot.

3.1 Sistemas Lineares nos Documentos Oficiais

Com a análise do documento oficial Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008), realizadas pelo Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica, buscamos mostrar as recomendações para a prática docente dos professores em relação ao estudo de sistemas lineares.

A escolha do tema *Resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3* responde às recomendações das Orientações Curriculares para o Ensino Médio que, ao enfatizar a importância na escolha dos conteúdos, sugere:

> A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2008, p. 70)

Em relação ao conteúdo, o documento ressalta:

> [...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias. [...]) (BRASIL, 2008, p. 69)

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> Sugestões quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e destacando-se as exigências de memorização, as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de “fixação” ou a aplicação de fórmulas. (BRASIL, 2008, p. 70)

Pelos Parâmetros Curriculares Nacionais Mais (PCN+) (BRASIL, 2002), verificamos a importância de retomarmos os conhecimentos prévios necessários para a abordagem dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas. Assim, iniciamos nossa sequência didática, abordando o estudo dos sistemas lineares 2x2, conhecimento prévio para o estudo dos sistemas lineares 3x3.

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para os sistema 3 por 3 [...] (BRASIL, 2002, p. 122)

Quanto à forma da abordagem dos conceitos matemáticos, os PCN (1998) sugerem que seja feita mediante a exploração de problemas a fim de levar o aluno a construir e aplicar conceitos matemáticos.

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1998, p. 40)

Quanto ao uso do *software*, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio ressaltam sua importância como ferramenta para o aluno confrontar e conjeturar as diferentes soluções apresentadas, contribuindo, assim, para a construção de seu aprendizado.

> Já se pensando na Tecnologia para a Matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. (BRASIL, 2008, p. 88)

Quanto às características dos programas, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008) sugerem:

> São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela. (BRASIL, 2008, p. 88)

Fundamentadas com o que ressaltam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) e os PCN (1998), abordaremos, em nossa sequência didática, um tema que faz parte do conteúdo programático do 2º ano do Ensino Médio: sistemas lineares 3x3 com auxílio do *software* educacional Winplot.

Para o desenvolvimento desse assunto, contamos com os conhecimentos prévios adquiridos pelos alunos quando do estudo dos sistemas lineares 2x2 no Ensino Fundamental.

A fim de explanarmos nossa sequência didática, apresentamos, na revisão bibliográfica, as leituras que embasaram o desenvolvimento de nossa pesquisa.

3.2 Revisão Bibliográfica

Descrevemos os aspectos mais relevantes encontrados em nosso levantamento bibliográfico, cujo tema versa sobre os sistemas lineares.

Battaglioli (2008), em seu trabalho de mestrado, desenvolveu uma pesquisa intitulada *Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um Olhar sobre os Livros Didáticos*, analisando três livros didáticos: o volume 2 da coleção *Matemática Ensino Médio*, de Kátia S. Smole e Maria Inez Diniz, editado em 2003 pela editora Saraiva; o volume 2 da coleção *Matemática, Contexto e Aplicações*, de Luiz Roberto Dante, 4ª edição, editado em 2007 pela editora Ática; e *Matemática Completa – Vol. Único*, de José R. Giovanni, José R. Bonjorno e José R. Giovanni Jr., editado em 2002 pela editora FTD.

Battaglioli (2008) conclui que a conversão de registros de representação predominante nos exercícios propostos e resolvidos nos livros didáticos analisados, é a do registro da língua natural para o registro algébrico, ressaltando que, em sua análise dos três livros didáticos, foi encontrado apenas um exercício no sentido contrário dessa conversão.

A autora comenta a respeito da carência de exercícios resolvidos em que sejam propostas conversões como: do registro gráfico para o algébrico; do algébrico para o da língua natural; e do gráfico para o da língua natural. Constata apenas um exercício que usa o registro gráfico de um sistema com três equações e três incógnitas como registro de chegada e nenhum exercício que use o registro gráfico como registro de partida.

> Acreditamos que este fato ocorra devido à dificuldade que o aluno tem nesta fase de aprendizagem para trabalhar em três dimensões. Voltamos afirmar que existem excelentes *softwares* gratuitos que trabalham em três dimensões e que representam muito bem a posição dos três planos no espaço. Acreditamos que atividades com estes *softwares* possam solucionar esta lacuna nos livros didáticos. (BATTAGLIOLI, 2008, p. 95)

Finaliza seu trabalho, argumentando que o registro gráfico deveria ser mais explorado, uma vez que poderia contribuir para que os alunos tivessem maior facilidade não apenas para entender o conjunto-solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. Ressalta que, desta forma, a abordagem desse tema não ficaria apenas no desenvolvimento dos algoritmos, mas auxiliaria o aluno no sentido de o mesmo poder analisar e compreender melhor os resultados obtidos.

Freitas (1999), em seu trabalho intitulado *Resolução de Sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno*, objetivou diagnosticar o sentido que os alunos do final do 2º grau, hoje denominado de Ensino Médio, dão às soluções dos sistemas lineares parametrizados mediante questões que estabeleçam a relação entre a solução de um dado sistema de no máximo três incógnitas e sua representação gráfica.

A discussão de sistemas exige que se recorra à interpretação de resultados algébricos – tanto dos que se obtém após a aplicação de algum método de resolução quanto das soluções encontradas algebricamente.

Freitas (1999) conclui que é possível trabalhar os sistemas lineares, utilizando a conversão de registros, passando da escrita simbólica (equações) para o gráfico e do registro gráfico para o algébrico. Essa estratégia pode favorecer a interpretação e, consequentemente, a compreensão dos resultados obtidos. A autora sugere que o recurso que privilegia a mudança de registros, do algébrico para o gráfico e vice-versa, e a conversão de registros podem constituir-se em uma estratégia eficaz que favoreça a compreensão e a atribuição de significado aos sistemas lineares parametrizados.

Uma dificuldade se impõe neste estudo: a limitação da construção de gráficos para dimensões maiores que dois, já que, no momento em que estuda a discussão de sistemas (segundo ano do Ensino Médio), o aluno ainda não tem acesso a um sistema de coordenadas em três dimensões.

> Em sistemas a três incógnitas, é possível se utilizar um programa que trabalhe com gráficos de planos, para mostrar ao aluno a relação entre a solução algébrica (que ele já conhece) e a solução gráfica. (FREITAS, 1999, p. 75)

Machado (1996), no artigo *O Universitário principiante x Significado de sistema de equações*, ressalta a urgência de trabalhar com a mudança de registro tanto do algébrico para o gráfico quanto vice-versa.

Almouloud e Bianchini (1996) publicaram o artigo *O erro ligado ao ensino/aprendizagem de Sistemas Lineares*, nos anais do IV EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática, sobre uma pesquisa cujo objetivo foi estudar o problema do ensino/aprendizagem de sistemas lineares bem como encontrar uma explicação para os erros dos alunos e procurar descobrir suas origens. Os autores ressaltam que os alunos têm mais dificuldade em encontrar as soluções de um sistema indeterminado que em um determinado. A dificuldade pode ser detectada pelos equívocos nas respostas dadas pelos alunos, por isolarem uma incógnita em função de outra e dificilmente apresentarem a solução com o menor número de incógnitas.

Lopes (2008) descreve os resultados de uma pesquisa que objetivou introduzir os conceitos básicos sobre a teoria de matrizes, determinantes e sistemas lineares, utilizando-se da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Médio. As ações foram desenvolvidas mediante um projeto do Núcleo de Ensino da UNESP – Campus de Ilha Solteira, em três escolas, duas na cidade de Andradina (SP) e uma na de Perreira Barreto (SP). O autor conclui que, com a metodologia de resolução de problemas, o aluno torna-se agente da construção do seu próprio conhecimento pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio.

Mesmo não sendo considerado um livro didático, recorremos à leitura e consulta do “Caderno do Professor” e do “Caderno do Aluno” porque fazem parte da última Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2009), o mais recente documento oficial. No “Caderno do Professor” são dadas: orientações para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula; orientações para a avaliação; e sugestões bimestrais para a recuperação dos conteúdos. Além disso, são apresentados materiais disponíveis como textos, *software*, *sites*, vídeos, entre outros. No “Caderno do Aluno” constam atividades para serem trabalhadas tanto em sala de aula como extraclasse.

Verificamos, no capítulo que explora o estudo de sistemas lineares, a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e do registro de tabela para o registro gráfico mediante diferentes tratamentos a serem efetuados nos diversos registros.

Recorremos, também, à leitura de dois livros didáticos – *Matemática e Realidade*, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, 2005; e *Matemática Paratodos*, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Cestari Lellis, 2006 –

porque são indicados pelo Guia de livros didáticos PNLD 2008 e, também, por serem livros adotados no colégio em que a pesquisadora é professora.

Constatamos que no livro *Matemática e Realidade* os autores recorrem ao registro gráfico para apresentarem a solução do sistema de duas equações lineares. Mostram que duas retas concorrentes têm um ponto de intersecção e este par ordenado é a única solução do sistema de equações, denominado de possível determinado. Se o gráfico é de duas retas paralelas, não apresentam ponto comum; logo, o sistema é chamado de impossível. Por outro lado, se forem retas coincidentes, com infinitos pontos, o sistema tem infinitas soluções e será chamado de sistema possível e indeterminado. Os autores também contemplam o registro de tabela e o gráfico na abordagem do estudo do sistema linear 2x2.

Já na leitura do livro *Matemática Paratodos*, constatamos a ausência da abordagem da resolução gráfica do sistema linear 2x2. Entramos em contato com um dos autores, Luiz Márcio Imenes, via e-mail, para saber o porquê da ausência desse conteúdo. Imenes, de imediato e gentilmente, explicou-nos o motivo dessa ausência, ressaltando que a opção por não propor o estudo da representação gráfica de um sistema linear 2x2 no Ensino Fundamental deve-se, essencialmente, aos seguintes fatores:

- essa ausência não compromete o aprendizado dos alunos nessa etapa de sua escolarização;
- outros temas são prioritários;
- a linearidade (que se relaciona com proporcionalidade) e os sistemas lineares e suas representações geométricas são temas relevantes, que merecem ser “bem tratados” pela Matemática escolar – o autor sugere o Ensino Médio como momento adequado para esse estudo.

A transcrição da conversa com o autor consta em anexo.

3.3 Resolução Algébrica e Gráfica abordada nos livros didáticos do Ensino Médio

Para elaborarmos nossa sequência didática, acreditamos ser relevante analisarmos de que forma a resolução gráfica do sistema linear 3x3 é abordada nos livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio.

Optamos por examinar dois dos livros analisados por Battaglioli (2008), em sua dissertação de mestrado – *Matemática, Contexto e Aplicações*, volume 2, de Luiz Roberto Dante (2008); e *Matemática – Ensino Médio*, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, volume 2 (2005) – porque ambos contêm o assunto do nosso interesse: sistemas lineares.

3.3.1 Matemática Contexto e Aplicações

Dante (2008) realiza a abordagem da resolução do sistema linear 3x3 após o estudo de matrizes, determinantes e sistema linear 2x2, retomando a igualdade do tipo ax = b e conhecimentos prévios necessários para a resolução de sistemas lineares, como mostra a Figura 3.

Quanto à abordagem do estudo do sistema linear 2x2, o autor mostra a resolução do sistema pelo método de adição e, em seguida, apresenta a interpretação gráfica do sistema. Verificamos que o autor contempla o método de adição para a resolução desse tipo de sistema linear.

4 A igualdade $ax = b$, com incógnita real x, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$

Observe igualdades desse tipo nos exemplos:

1º) Em $2x = 6$, temos $x = \frac{6}{2} = 3$ como o único valor real possível para **x**.

2º) Em $0x = 7$, não temos valor real para **x**, pois não existe número real que multiplicado por 0 dê 7.

3º) Em $0x = 0$, **x** pode assumir qualquer valor real, pois todo número real multiplicado por 0 dá 0.

De modo geral:

- $ax = b$, com $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ é o valor único de **x**
- $ax = b$, com $a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow$ não existe valor real para **x**
- $ax = b$, com $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow$ **x** pode assumir qualquer valor real

Veremos sua aplicação nas resoluções de sistemas lineares.

5 Sistemas lineares 2 × 2

Resolução pelo método da adição

Resolver um sistema linear significa descobrir o seu conjunto solução **S**, formado por todas as soluções do sistema.

A resolução dos sistemas lineares 2 × 2, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, já foi vista no ensino fundamental por meio de alguns métodos como *adição*, *substituição*, *comparação* e outros.

Para refletir

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: conjunto de todos os pares ordenados de números reais.

Vamos retomar, com exemplos, a resolução pelo *método da adição*:

1º) $\begin{cases} 3x - y = 10 \quad \cdot (5) \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x - \cancel{5y} = 50 \\ 2x + \cancel{5y} = 1 \end{cases}$$

$$17x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{17} = 3 \text{ (valor único de } \mathbf{x}\text{)}$$

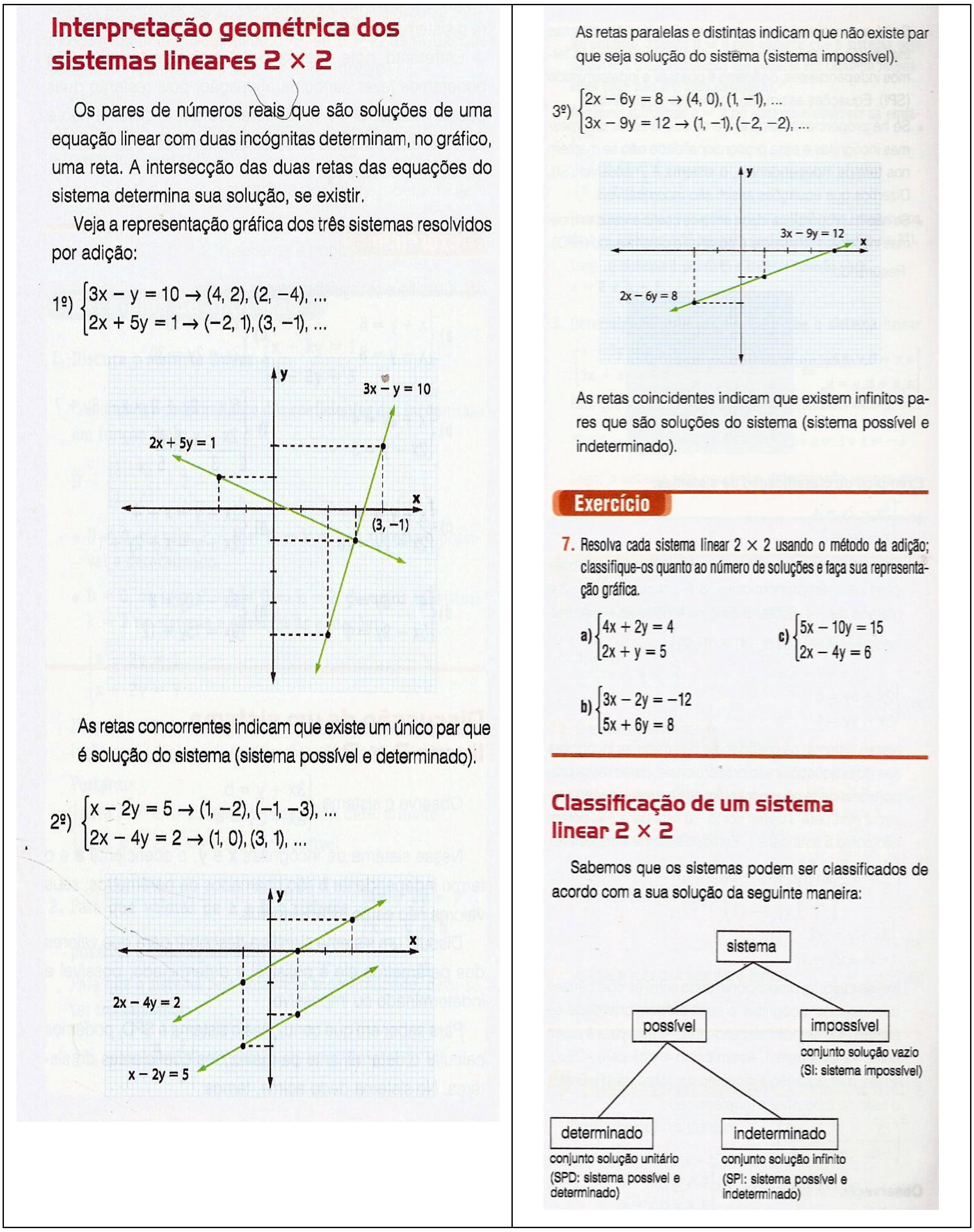
$$\begin{cases} 3x - y = 10 \quad \cdot (-2) \\ 2x + 5y = 1 \quad \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{6x} + 2y = -20 \\ \cancel{6x} + 15y = 3 \end{cases}$$

$$17y = -17 \Rightarrow y = \frac{-17}{17} = -1 \text{ (valor único de } \mathbf{y}\text{)}$$

Figura 3: Retomada sobre a igualdade da equação e resolução do sistema 2x2 pelo método da adição
Fonte: DANTE, 2008, p. 382.

Dante (2008) prossegue o estudo do sistema linear 2x2 com a interpretação geométrica. Constatamos que ele não utiliza o registro de tabelas. Para exemplificar, ele apresenta, diretamente, alguns possíveis pares ordenados que satisfaçam cada uma das equações do sistema linear e sua solução.



Interpretação geométrica dos sistemas lineares 2 × 2

Os pares de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta. A intersecção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

Veja a representação gráfica dos três sistemas resolvidos por adição:

1º) $\begin{cases} 3x - y = 10 \rightarrow (4, 2), (2, -4), \ldots \\ 2x + 5y = 1 \rightarrow (-2, 1), (3, -1), \ldots \end{cases}$

As retas concorrentes indicam que existe um único par que é solução do sistema (sistema possível e determinado).

2º) $\begin{cases} x - 2y = 5 \rightarrow (1, -2), (-1, -3), \ldots \\ 2x - 4y = 2 \rightarrow (1, 0), (3, 1), \ldots \end{cases}$

As retas paralelas e distintas indicam que não existe par que seja solução do sistema (sistema impossível).

3º) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \rightarrow (4, 0), (1, -1), \ldots \\ 3x - 9y = 12 \rightarrow (1, -1), (-2, -2), \ldots \end{cases}$

As retas coincidentes indicam que existem infinitos pares que são soluções do sistema (sistema possível e indeterminado).

Exercício

7. Resolva cada sistema linear 2 × 2 usando o método da adição; classifique-os quanto ao número de soluções e faça sua representação gráfica.

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

Classificação de um sistema linear 2 × 2

Sabemos que os sistemas podem ser classificados de acordo com a sua solução da seguinte maneira:

Figura 4: Abordagem da Interpretação geométrica e Classificação.
Fonte: DANTE, 2008, p. 383.

Dante (2008) recorre ao estudo da proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas nas duas equações para estabelecer a classificação dos sistemas lineares e sua solução.

- Se há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas e essa proporcionalidade se mantém nos termos independentes, o sistema é possível e indeterminado (SPI). Equações assim são chamadas *equivalentes*.
- Se há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas e essa proporcionalidade **não** se mantém nos termos independentes, o sistema é impossível (SI). Dizemos que equações assim são *incompatíveis*.
- Se **não** há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas, o sistema é possível e determinado (SPD).

Resumindo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{k_1}{k_2} \Rightarrow \text{SPI} \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{k_1}{k_2} \Rightarrow \text{SI} \\ \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Rightarrow \text{SPD} \end{array}$$

Exemplos de classificação de sistemas:

1º) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

Os coeficientes das mesmas incógnitas nas duas equações não são proporcionais: 3 é o triplo de 1 e −2 é metade de −4. Então, o sistema é possível e determinado $\left(\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{-4} \text{ ou } 3(-4) \neq 1(-2)\right)$.

2º) $\begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x - 9y = 1 \end{cases}$

Nesse sistema, os coeficientes das mesmas incógnitas nas duas equações são proporcionais, porém essa proporcionalidade não se mantém nos termos independentes: 2 está para 3 assim como −6 está para −9, porém não como 5 está para 1. Então, o sistema é impossível $\left(\frac{2}{3} = \frac{-6}{-9} \neq \frac{5}{1}\right)$.

3º) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -6x - 2y = 4 \end{cases}$

Nesse caso, há proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas e essa proporcionalidade se mantém nos termos independentes: –6 está para 3 assim como –2 está para 1, assim como 4 está para –2 (ou, ainda, a 2ª equação é o oposto do dobro da 1ª). Então, o sistema é possível e indeterminado $\left(\frac{3}{-6} = \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4}\right)$.

Figura 5: Classificação por meio da observação quanto à proporcionalidade dos coeficientes das equações.
Fonte: DANTE, 2008, p. 384.

Dante (2008, p. 385) define sistemas lineares 3x3 da seguinte forma:

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

de três equações com três incógnitas. Geometricamente, cada uma das equações, nessa ordem, define os planos π_1, π_2 e π_3 respectivamente. O terno (x, y, z) é a solução desse sistema quando o ponto P (x, y, z) pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja, quando P está simultaneamente nos três planos.

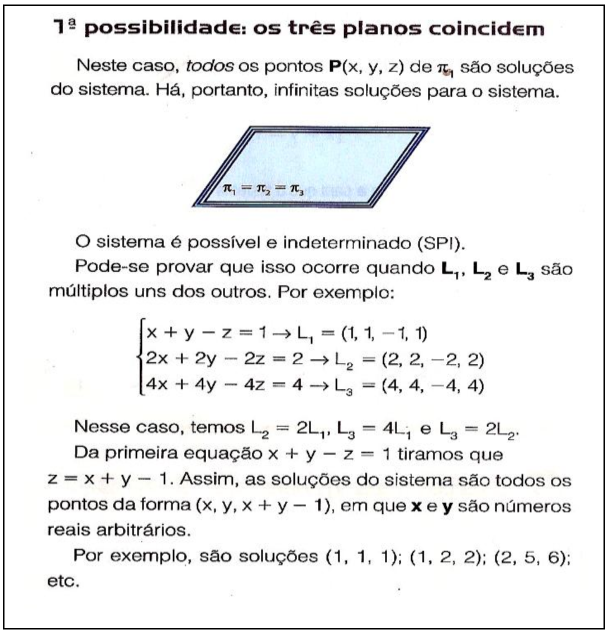
Associadas a esse sistema, há duas matrizes: a incompleta ① e a completa ②.

$$① \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{e} \quad ② \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

Os vetores linha da matriz incompleta são $\ell_1 =$ (a_1, b_1, c_1), $\ell_2 =$ (a_2, b_2, c_2) e $\ell_3 =$ (a_3, b_3, c_3), e os vetores linha da matriz completa são $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, sendo todos não nulos.

Dante (2008) apresenta uma das oito possíveis posições relativas dos três planos: π_1, π_2 e π_3. Uma delas corresponde ao sistema determinado, com uma única solução; quatro delas correspondem a sistemas impossíveis, sem nenhuma solução; e três, a sistemas indeterminados, com infinitas soluções.

Para ilustrar como o autor procede, optamos por mostrar a possibilidade em que os três planos coincidem.



1ª possibilidade: os três planos coincidem

Neste caso, *todos* os pontos **P**(x, y, z) de π_1 são soluções do sistema. Há, portanto, infinitas soluções para o sistema.

$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

O sistema é possível e indeterminado (SPI).

Pode-se provar que isso ocorre quando $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ e $\mathbf{L_3}$ são múltiplos uns dos outros. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \rightarrow L_1 = (1, 1, -1, 1) \\ 2x + 2y - 2z = 2 \rightarrow L_2 = (2, 2, -2, 2) \\ 4x + 4y - 4z = 4 \rightarrow L_3 = (4, 4, -4, 4) \end{cases}$$

Nesse caso, temos $L_2 = 2L_1$, $L_3 = 4L_1$ e $L_3 = 2L_2$.

Da primeira equação $x + y - z = 1$ tiramos que $z = x + y - 1$. Assim, as soluções do sistema são todos os pontos da forma $(x, y, x + y - 1)$, em que **x** e **y** são números reais arbitrários.

Por exemplo, são soluções (1, 1, 1); (1, 2, 2); (2, 5, 6); etc.

Figura 6: Associação dos três planos com a notação dos vetores.
Fonte: DANTE, 2008, p. 386.

Constatamos que Dante (2008) aborda o estudo de sistemas lineares no registro da língua natural, algébrico e gráfico. Apresenta exercícios que contemplam tanto o registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como o registro de chegada como também o registro algébrico como registro de partida e o registro gráfico como registro de chegada.

O autor usou o método de adição para resolução algébrica do sistema linear 3x3. Entretanto, ao abordar a representação gráfica deste sistema, associa-o a vetores-linha de matriz completa e incompleta, como explicado anteriormente. Acreditamos ser prematuro esta estratégia de abordagem para alunos do 2º ano do Ensino Médio, visto que ainda não tiveram contato com o estudo da Geometria Analítica Espacial em que o objeto de estudo é o espaço euclidiano tridimensional; portanto, desconhecem o estudo sobre vetores no espaço.

3.3.2 Matemática Ensino Médio

Smole e Diniz (2005) abordam o estudo sobre sistemas lineares que antecedem a matrizes e determinantes. As autoras iniciam o capítulo “Sistemas Lineares” com a retomada do estudo do sistema linear 2x2 no registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como de chegada.

2. Sistema linear 2 × 2

João e Ana resolveram aproveitar os saldos de uma livraria para comprar livros e CDs. João gastou R$ 100,00 comprando 1 livro e 4 CDs. Ana, por sua vez, comprou 2 livros e 3 CDs, gastando ao todo R$ 90,00.

Quando Luiz perguntou a eles quanto tinham pago em cada livro e em cada CD, eles não souberam dizer. Apenas se lembravam de que todos os livros eram vendidos pelo mesmo preço e que os CDs, embora mais caros, também tinham preço único.

Afinal, quanto custou cada livro e cada CD que João e Ana compraram?

Para resolver este problema, podemos montar um sistema de duas equações com duas variáveis.

Sendo **x** o preço de cada livro e **y** o preço de cada CD, temos:

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

As equações que formam esse sistema são do 1º grau, por isso o sistema é **linear**. Como há duas equações e duas incógnitas, dizemos que esse é um **sistema linear dois por dois (2 × 2)**.

Figura 7: Situação problema, iniciando a abordagem do estudo do sistema 2x2.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 122.

Constatamos o tratamento ao resolver o sistema linear pelo método de adição.

Resolução do sistema linear 2 × 2

Se quisermos encontrar a solução do problema de Ana e João, devemos resolver o sistema $\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$.

Resolver esse sistema significa encontrar pares de números reais que sejam soluções das duas equações.

Existem várias formas de resolver um sistema linear 2 × 2. Vamos resolver o sistema proposto de duas formas: uma algébrica, usando o método da adição, e outra gráfica.

Método da adição

Para resolver o sistema $\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$ pelo método da adição, devemos adicionar as duas equações de modo a obter uma equação final com apenas uma incógnita.

Acompanhe como podemos fazer isso nesse caso.

Para eliminarmos a incógnita **x**, vamos multiplicar os dois membros da 1ª equação por –2, o que não altera a igualdade:

$$\begin{cases} -2(x + 4y) = 100(-2) \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 8y = -200 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} \cancel{-2x} - 8y = -200 \\ \cancel{2x} + 3y = 90 \end{cases}$$
$$-5y = -110$$

Adicionamos as duas equações, membro a membro, obtendo uma equação com apenas uma variável:

$$\boxed{y = 22}$$

Substituímos **y** por 22 em x + 4y = 100, obtendo:

$$x + 4 \cdot 22 = 100$$
$$x + 88 = 100$$
$$\boxed{x = 12}$$
$$S = \{(12, 22)\}$$

Ou seja, cada livro custou 12 reais e cada CD custou 22 reais.

Figura 8: Resolução do sistema linear pelo método de adição.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 127.

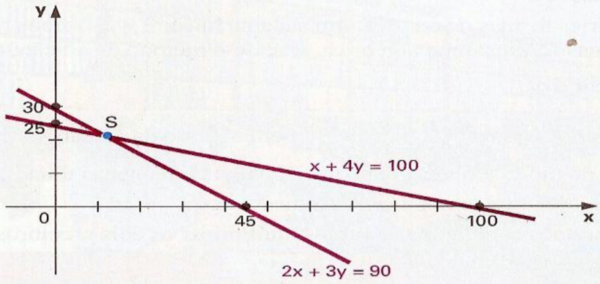
Em seguida, Smole e Diniz (2005) optam por apresentar a representação gráfica como outra forma de resolução do sistema linear 2x2. Constatamos a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, como mostramos a seguir.

Representação gráfica

Outra forma de resolvermos um sistema é através de uma representação gráfica.

Nesse caso, resolver o sistema significa encontrar os pontos comuns às duas retas que representam as equações do sistema.

Como $x + 4y = 100$ e $2x + 3y = 90$ são funções do 1º grau, o gráfico de cada equação é uma reta. Veja:



A partir dos gráficos, podemos achar valores aproximados de **x** e de **y** que são coordenadas do ponto **S** e solução do sistema. Assim, temos $x \cong 10$ e $y \cong 20$. De fato, já vimos que a solução é $x = 12$ e $y = 22$.

Observando os gráficos, concluímos que há apenas um par de números que verifica simultaneamente as duas equações, portanto o problema tem apenas uma solução. Nesse caso, dizemos que esse sistema linear é **possível e determinado**.

Figura 9: Situação-problema que requer sistema linear 3x3.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 127.

Na abordagem da representação do registro gráfico de sistema impossível, Smole e Diniz (2005) utilizaram o registro da língua natural como registro de partida e o registro gráfico como registro de chegada.

As autoras desenvolvem o registro da língua natural para o algébrico, conforme pode ser observado a seguir, na Figura 10:

Vejamos outros exemplos:

a) A soma de dois números é 100 e a sua média aritmética é 45. Quais são esses números?

O sistema que traduz o problema é:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \dfrac{x+y}{2} = 45 \end{cases}$$

Para resolvermos esse sistema, multiplicamos os dois membros da 1ª equação por -1 e os dois membros da 2ª por 2. Depois, somamos as equações obtidas:

$$\begin{cases} (-1)(x+y) = 100 \cdot (-1) \\ 2 \cdot \left(\dfrac{x+y}{2}\right) = 45 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \oplus \begin{cases} -x - y = -100 \\ x + y = 90 \end{cases}$$
$$0x + 0y = -10$$

Figura 10: Resolução gráfica do sistema linear impossível, partindo do registro da língua natural.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 128.

Smole e Diniz (2005) ilustram a representação gráfica da situação-problema da seguinte forma (Figura 10):

Nesse caso, não existem valores de **x** e **y** que satisfaçam a igualdade. Assim, dizemos que esse sistema é **impossível** ou **incompatível** e o seu conjunto solução é vazio (S = ∅).

Representando graficamente a solução, obtemos a figura ao lado.

Na interpretação dos gráficos das duas equações, verificamos que as retas possuem coeficiente angular igual (–1) e coeficientes lineares diferentes (90 ≠ 100), logo são paralelas e não possuem pontos em comum, o que indica que o sistema é **impossível**.

O problema que gerou esse sistema também não terá solução, ou seja, se dois números possuem soma 100, sua média aritmética não pode ser 45!

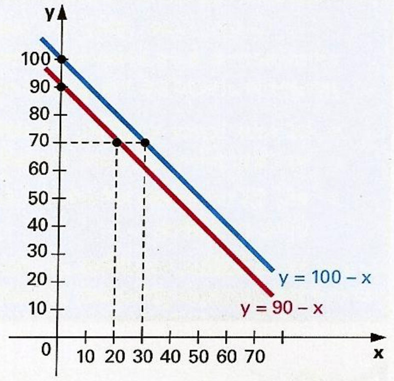


Figura 11: Resolução gráfica do sistema linear impossível, partindo do registro da língua natural.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 129.

Na abordagem do sistema linear possível indeterminado, as autoras usaram a mesma situação-problema no registro da língua natural, alterando o valor da média aritmética de 45 para 50, conforme pode ser visto na Figura 12.

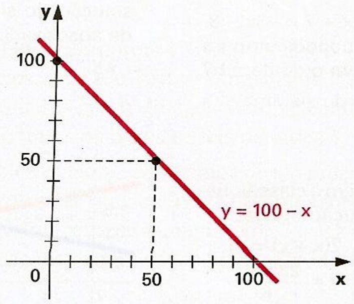
b) A soma de dois números é 100 e sua média aritmética é 50. Quais são esses números?

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ \dfrac{x+y}{2} = 50 \end{cases}$ encontramos a solução do problema. Para isso, vamos multiplicar os dois membros da 1ª equação por –1 e os dois membros da segunda por 2. Em seguida, somamos as equações obtidas:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \dfrac{x+y}{2} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \oplus \begin{cases} -x - y = -100 \\ x + y = 100 \end{cases} \quad \overline{0x + 0y = 0}$$

Nesse caso, existe uma infinidade de números que satisfazem a igualdade. A solução do sistema são todas as duplas de números do tipo (x, 100 – x). Assim, esse sistema é **possível**, porém **indeterminado**, ou **compatível e indeterminado**.

Graficamente, temos:



As retas são coincidentes porque as duas equações do sistema têm mesmo coeficiente angular e mesmo coeficiente linear. Portanto, existe uma infinidade de pares que verificam simultaneamente as duas equações. A solução do sistema é dada por $S = \{(x, 100 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Figura 12: Resolução gráfica do sistema linear possível indeterminado partindo do registro da língua natural.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 129.

Constatamos que Smole e Diniz (2005) utilizam os registros de representação da língua natural, algébrico e gráfico. Elas iniciam o estudo do sistema linear 3x3 com a apresentação de uma situação-problema no registro da língua natural e optam pelo método de adição como tratamento algébrico, ilustrado a seguir, na Figura 13.

O sistema que representa o problema é **linear três por três** (3×3) porque é formado por três equações lineares com três incógnitas.

De modo geral:

Sistema linear 3×3 com as incógnitas **x**, **y** e **z** é um conjunto de três equações lineares simultâneas em **x**, **y** e **z**, com coeficientes reais:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & \text{(onde } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{c} \text{ não são simultaneamente nulos)} \\ ex + fy + gz = h & \text{(onde } \mathbf{e}, \mathbf{f} \text{ e } \mathbf{g} \text{ não são simultaneamente nulos)} \\ kx + ly + mz = n & \text{(onde } \mathbf{k}, \mathbf{l} \text{ e } \mathbf{m} \text{ não são simultaneamente nulos)} \end{cases}$$

O conjunto de todos os ternos de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que satisfazem simultaneamente as três equações do sistema é chamado de **conjunto solução do sistema**.

Resolução do sistema linear 3 × 3

Veja como podemos resolver, pelo **método da adição**, o sistema que construímos para descobrir os preços dos livros, CDs e fitas de vídeo:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 70 & \text{(I)} \\ 2x + 2y + 2z = 80 & \text{(II)} \\ 3x + y + z = 75 & \text{(III)} \end{cases}$$

Adicionamos a equação I, multiplicada por -2, à equação II:

$$\oplus \begin{cases} \cancel{-2x} - 6y - \cancel{2z} = -140 \\ \cancel{2x} + 2y + \cancel{2z} = 80 \end{cases}$$
$$-4y = -60$$
$$\boxed{y = 15} \quad \text{(IV)}$$

Adicionamos a equação I, multiplicada por -3, à equação III:

$$\oplus \begin{cases} \cancel{-3x} - 9y - 3z = -210 \\ \cancel{3x} + y + z = 75 \end{cases}$$
$$-8y - 2z = -135 \quad \text{(V)}$$

As equações IV e V formam um sistema linear 2×2:

$$\begin{cases} y = 15 \\ -8y - 2z = -135 \end{cases}$$

Utilizando na equação V o valor de **y** obtido na equação IV, temos:

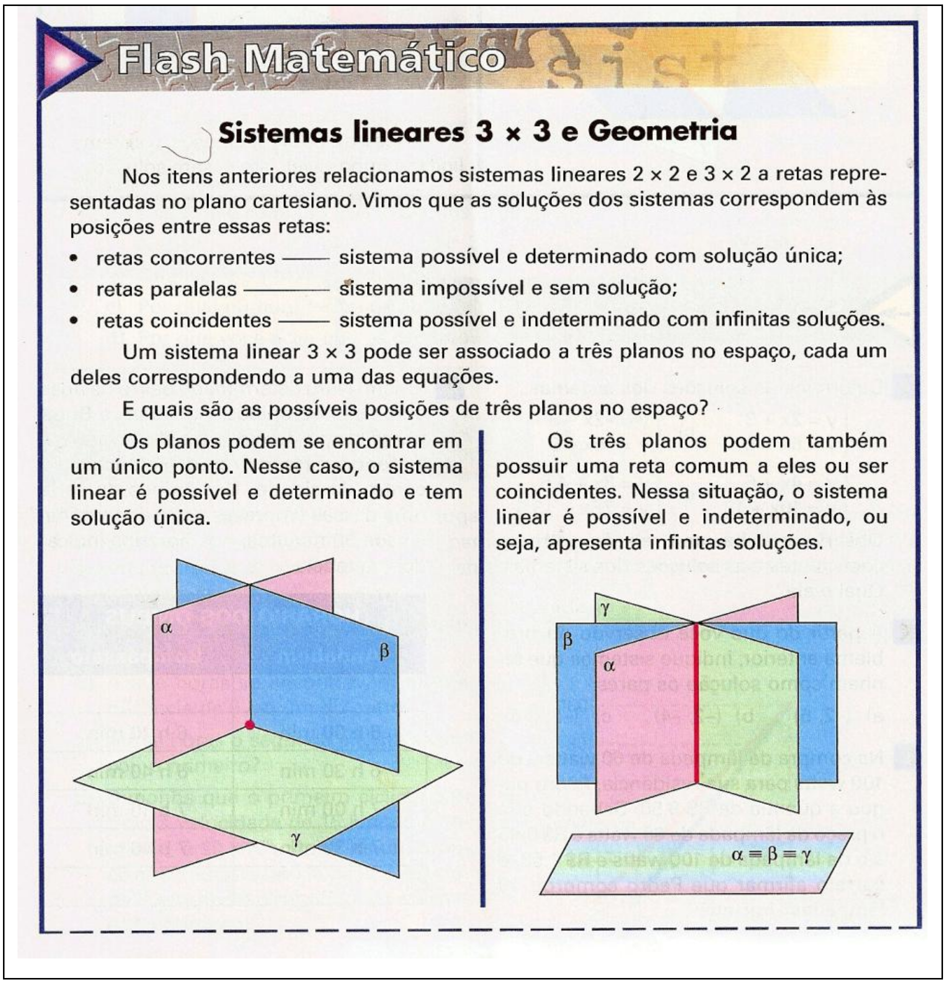
$$-8 \cdot 15 - 2z = -135$$
$$\boxed{z = 7{,}5}$$

Podemos, assim, substituir as incógnitas **y** e **z** da equação I pelos valores encontrados:

$$x + 3 \cdot 15 + 7{,}5 = 70$$
$$x + 45 + 7{,}5 = 70$$
$$\boxed{x = 17{,}5}$$

Figura 13: Resolução algébrica do sistema linear 3x3 pelo método de adição.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 132.

Smole e Diniz (2005) mostram, na seção *Flash Matemático* (Figura 14), a representação gráfica de seis das oito possíveis posições relativas dos três planos no espaço:



Flash Matemático

Sistemas lineares 3 × 3 e Geometria

Nos itens anteriores relacionamos sistemas lineares 2 × 2 e 3 × 2 a retas representadas no plano cartesiano. Vimos que as soluções dos sistemas correspondem às posições entre essas retas:

- retas concorrentes —— sistema possível e determinado com solução única;
- retas paralelas ———— sistema impossível e sem solução;
- retas coincidentes —— sistema possível e indeterminado com infinitas soluções.

Um sistema linear 3 × 3 pode ser associado a três planos no espaço, cada um deles correspondendo a uma das equações.

E quais são as possíveis posições de três planos no espaço?

Os planos podem se encontrar em um único ponto. Nesse caso, o sistema linear é possível e determinado e tem solução única.

Os três planos podem também possuir uma reta comum a eles ou ser coincidentes. Nessa situação, o sistema linear é possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções.

Figura 14: Resolução gráfica do sistema 3x3.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 137.

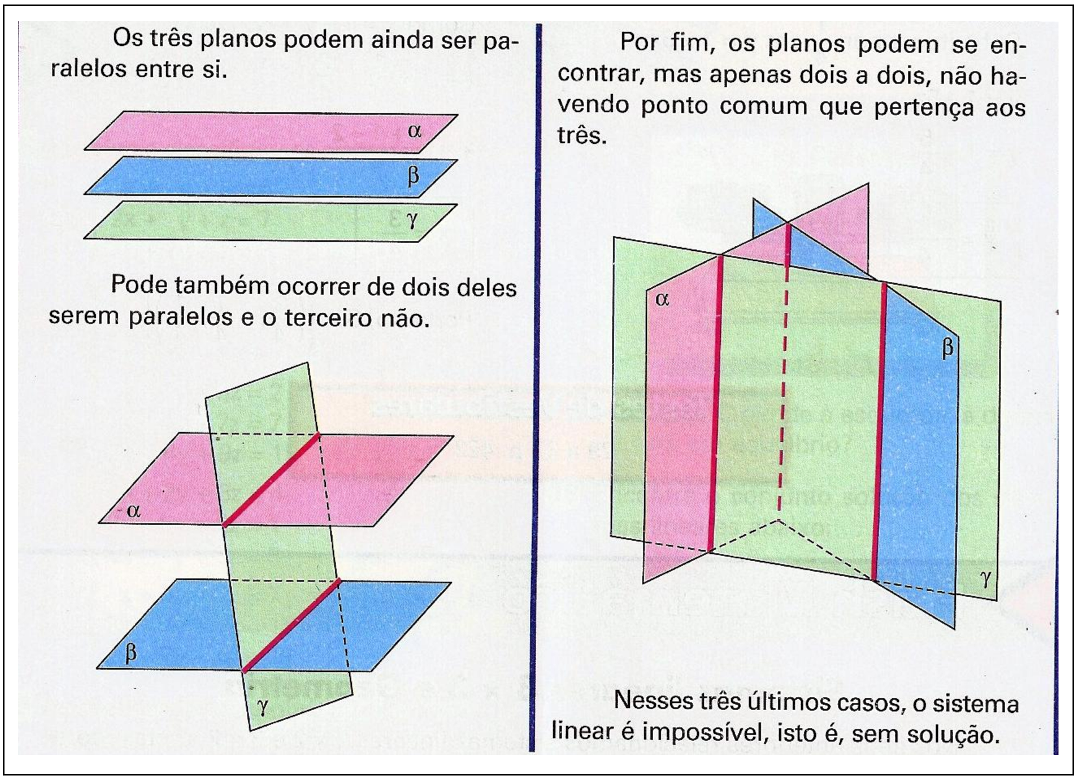


Figura 15: Três possíveis relativas a três planos no espaço.
Fonte: Matemática Ensino Médio, SMOLE e DINIZ, 2005, p. 138.

Smole e Diniz (2005) abordam o estudo dos sistemas lineares no registro da língua natural, algébrico e gráfico. Apresentam exercícios em que contemplam tanto o registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como o registro de chegada quanto o registro algébrico como registro de partida e o registro gráfico como registro de chegada.

Verificamos o uso da resolução algébrica pelo método de adição 3x3 e sua representação gráfica apenas citada pelas autoras na seção *Flash Matemático*.

3.4 Método de Escalonamento e Método de Adição

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) sugerem o uso do método de escalonamento por apresentar operações elementares bem como a discussão de suas soluções.

> A resolução de sistemas 2x2 ou 3x3 também deve ser feita via operações elementares (processo de escalonamento), com

> discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem soluções). As simples apresentações de equações sem explicações fundadas em raciocínio lógico deve ser abandonada pelo professor. (BRASIL, 2008, p. 78)

Vale revermos a descrição de um método básico de resolver um sistema linear a fim de justificarmos o uso do método de adição para a resolução dos sistemas lineares em nossa pesquisa.

> O método básico de resolver um sistema linear consiste em efetuar operações algébricas apropriadas nas equações do sistema para produzir uma sucessão de sistemas cada vez mais simplificados, mas com o mesmo conjunto solução do sistema original, até chegar num ponto em que fica visível se o sistema é consciente e, se for, quais são suas soluções. (ANTON e BUSBY, 2006 apud BISOGNIN; CURY, 2009, p. 7)

Bisognin e Cury (2009) ressaltam que a tônica dos processos de resolução está na ênfase das operações elementares da resolução dos sistemas lineares, abordado no Ensino Fundamental tanto quanto no Ensino Superior.

Método de Escalonamento

Acreditamos ser necessário definir o que significa sistema escalonado e equivalente para a resolução do sistema linear pelo método de escalonamento.

Segundo Iezzi *et al* (2006), um sistema linear S no qual em cada equação existe um coeficiente não nulo está na forma escalonada (ou, simplesmente, é escalonado) se o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumentar de equação para equação.

Callioli (1983) define que de um dado sistema linear S de *m* equações com *n* incógnitas podem ser obtidos sistemas equivalentes de S de uma das seguintes formas:

(I) permutar duas das equações de S. É evidente que se S_1 indicar o sistema assim obtido, então toda solução de S_1 é solução de S e vive-versa;

(II) multiplicar uma das equações de S por um número real $\lambda \neq 0$;

(III) somar a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real.

Callioli (1983) define operação elementar e sistema equivalente da seguinte maneira:

> Dado um sistema linear S, uma qualquer das modificações explicadas acima em (I), (II) e (III) que se faça com esse sistema recebe o nome de *operação elementar* com S. Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S mediante um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é *equivalente* a S. (CALLIOLI, 1983, p. 5)

O uso do método de escalonamento para a resolução de um sistema linear 3x3 tem por objetivo em transformá-lo em outro equivalente, porém na forma escalonada.

Exemplo de sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 6 \\ \phantom{x - {}} 3y + 6z = 4 \\ \phantom{x - 3y + {}} 5z = 10 \end{cases}$$

Segue a resolução de um sistema linear 3x3 pelo método de escalonamento:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 & + \quad x(-2) \quad x(-1) \\ 2x + y + z = 4 & + \\ x - y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 0x - 3y + 3z = 6 & + \quad x(-1) \\ 0x - 3y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 0x - 3y + 3z = 6 \\ 0x + 0y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$z = 0 \quad y = -2 \quad x = 3$$

$$S = \{(3, -2, 0)\}$$

Método de Adição

O método de adição consiste em adicionarmos membro a membro cada duas equações de modo a eliminar uma ou mais incógnitas. Um aluno procederia da seguinte forma ao resolver o sistema linear pelo método de adição:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \text{①} \\ x + y - z = -1 & \text{②} \\ -3x + 6y - 2z = 2 & \text{③} \end{cases}$$

O aluno poderá escolher duas equações quaisquer e eliminar uma das incógnitas. No caso, optamos em adicionar algebricamente a equação ① e ② de modo que a primeira variável, no caso *x*, se anule. Para isso, é necessário, inicialmente, multiplicar a segunda equação por (-2):

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \text{①} \\ x + y - z = -1 \cdot (-2) & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} + y + z = 3 \ \text{①} \\ -\cancel{2x} - 2y + 2z = 2 \ \text{②} \\ \hline 0x - y + 3z = 5 \ \text{④} \end{array} \; +$$

Em seguida, o aluno deverá formar um sistema com a equação ① e ③ ou ② e ③. No caso, optamos por trabalhar com as equações ① e ③.

Para eliminar a variável *x*, esperamos que o aluno prepare o sistema de modo a multiplicar a equação ① por (3) e multiplicar a equação ③ por (2).

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \cdot (3) & \textcircled{1} \\ -3x - 2y + 2z = 2 \cdot (2) & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{6x} + 3y + 3z = 9 \\ -\cancel{6x} - 4y + 4z = 4 \\ \hline 0x - y + 7z = 13 \quad \textcircled{5} \end{array} \; +$$

Com cada uma das adições, o aluno deverá encontrar duas equações com duas incógnitas, equações ④ e ⑤, e ao formar um sistema 2 x 2, deverá aplicar, novamente, o método de adição a fim de eliminar uma da incógnitas e encontrar o valor da outra.

Assim formado o sistema, o aluno deverá multiplicar a equação ④ ou ⑤ por (-1) a fim de eliminar as variáveis ***y***, ao adicioná-las.

$$\begin{cases} -y + 3z = 5 \cdot (-1) & \textcircled{4} \\ -y + 7z = 13 & \textcircled{5} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{y} - 3z = -5 \\ -\cancel{y} + 7z = 13 \\ \hline 0y + 4z = 8 \\ z = 2 \end{array} \; +$$

O aluno poderá substituir o valor de z na equação ④ ou ⑤:

Caso substitua na equação ④: $-y + 3z = 5$

$$-y + 3.\,2 = 5$$

$$y = 1$$

Caso substitua na equação ⑤: $-y + 7z = 13$

$$-y + 7.2 = 13$$

$$y = 1$$

Tendo o valor de *y* e *z*, o aluno deverá substituir na equação ①:

Equação ①: $2x + y + z = 3$

$$2x + 1 + 2 = 3$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

O aluno, ao encontrar os valores de x, y e z, deve concluir que o sistema linear proposto tenha o conjunto solução: S = {(0, 1, 2)}.

Bisognin e Cury (2009), no artigo *Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações*, relataram parte de um projeto de pesquisa desenvolvido com 368 calouros de disciplinas matemáticas em oito Instituições de Ensino Superior (IES) – universidades privadas do sul do Brasil. Nesse artigo, as autoras escolhem para análise a questão do teste aplicado que teve o maior número de acertos na grade de respostas. Seu enunciado é o seguinte:

> *"O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado a de um carro de mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:*
>
> *a) 5.000,00   b) 13.000,00   c) 18.000,00   d) 23.000,00   e) 41.000,00"*

A fim de realizarem as análises do material relativo à questão em foco, as autoras classificaram as respostas segundo quatro categorias indicadas pelas letras A, B, C e D da seguinte forma:

Na categoria A, estão agrupadas as produções em que o aluno identificou que o problema poderia ser modelado (equacionado) por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, resolvendo o sistema e apresentando a resposta correta.

Na categoria B, estão classificadas produções em que o aluno identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, resolvendo o sistema, mas errando alguns detalhes e não apresentando a resposta correta.

Na categoria C, o aluno identificou que o problema poderia ser modelado por duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, mas não sabendo resolver o sistema.

Na categoria D, o aluno não soube modelar o problema.

Bisognin e Cury (2009) verificaram que, dos 103 alunos cujas resoluções foram classificadas como A ou B, 67% empregaram o método de adição e 33% o método de substituição.

Ancoradas nessas duas autoras, constatamos a preferência dos alunos pelo uso do método de adição.

Em nossa prática em sala de aula, ao abordarmos a resolução do sistema linear 3x3, percebemos que os alunos apresentam dificuldade ao aplicar o método de escalonamento: ao multiplicarem a primeira equação por um número, pertencente ao conjunto R*, ao adicionarem o resultado com a segunda ou terceira equação, os alunos erram nos cálculos.

Apesar dos PCN (2008) sugerirem o método de escalonamento para a resolução dos sistemas lineares, por apresentar as operações elementares, verificamos que o método de adição também responde a esta característica. Além disso, vimos em Bisognin e Cury (2009) a preferência dos alunos por resolverem os sistemas lineares por este método.

Ancorados em Callioli (1983), constatamos a semelhança de resolução dos sistemas lineares 3x3 tanto pelo método de escalonamento quanto pelo método de adição, pois ambos têm como objetivo transformar as equações de um sistema linear em outro semelhante.

Retomando a nossa questão de pesquisa em que nos propusemos a desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática objetivando a resolução algébrica dos sistemas lineares 3x3 pelo método da adição e sua representação gráfica com uso de uma ferramenta computacional, apresentaremos no próximo tópico uma descrição sobre o *software* Winplot.

3.5 O *Software* Educacional Winplot

O *software* educacional Winplot é um programa gráfico, que permite a construção e animação de gráficos em duas dimensões 2D e em três dimensões 3D por meio de tipos distintos de equações (explícitas, implícitas, paramétricas e outras). Foi desenvolvido pelo professor *Richard Parris "Rick"*[10], por volta de 1985.

A fim de contribuir com as práticas docentes inovadoras e incentivar posturas conscientes e críticas em relação à seleção de *softwares* educacionais, Batista (2004) desenvolveu um repositório *(SoftMat)*, contendo um conjunto desses *softwares* desenvolvidos para Matemática do Ensino Médio, acompanhados de suas respectivas avaliações de qualidade. Dentre estes, consta o Winplot. Essas avaliações sobre os *softwares* foram realizadas por professores e licenciados em Matemática, utilizando uma metodologia de avaliação de qualidade de *softwares* educacionais.

A avaliação do *software* Winplot foi realizada na Universidade Estadual do Norte Fluminense, durante um curso de extensão. Os participantes do curso, constituidos por 10 professores de Matemática e 4 alunos licenciados, realizaram a avaliação quando já haviam sido cumpridas cerca de 12 horas de curso.

Segundo Batista (2004), o Winplot foi considerado como sendo bastante coerente com as propostas dos PNLEM (2005), contribuindo para a construção do conhecimento e permitindo estabelecer conjecturas a partir da visualização da movimentação dos gráficos, aspecto fundamental para o desenvolvimento da resolução da sequência didática proposta em nossa pesquisa.

Outro fator preponderante na escolha do *software* Winplot, apontado pela autora, é a possibilidade de se construir o gráfico em três dimensões 3D, condição fundamental em nossa pesquisa, já que o conteúdo matemático trabalhado reporta a três planos no espaço.

Além dos pontos positivos levantados por Batista (2004), acrescentamos outros fatores significativos que nos levaram à escolha do *software* Winplot: ser

[10] rparris@exeter.edu

de fácil manuseio; ocupar pouca memória no computador; possibilitar movimento dos planos; e ser um programa de domínio público[11].

Allevato (2007), baseada em estudos desenvolvidos sobre a utilização das (TIC)[12], discute alguns aspectos emergentes em situações de ensino e em pesquisas que utilizaram a ferramenta computacional.

A autora ressalta que, na maioria dos casos estudados, o comportamento dos estudantes que usaram as TIC parece diferente do comportamento daqueles que não tinham contato com ela.

> Em linhas gerais, as pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores conduz os estudantes a modos de pensar e construir conhecimentos típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. (ALLEVATO, 2007, p. 76)

Em relação à construção de aprendizagem com ajuda de ambientes informatizados, Allevato (2007) afirma:

> Em ambientes informatizados de ensino, verifica-se com frequência uma forma de aprendizagem segundo a perspectiva do construtivismo, qual seja, aquela que se constrói sobre a própria experiência. Não raro, a depender das atividades realizadas e do modo como são realizadas, os estudantes vivenciam experiências de aprendizagem mais significativas e intensas do que é possível apenas com lápis e papel. (ALLEVATO, 2007, p. 76)

Oliveira (2009) ressalta a relevância sobre a estratégia didática adotada como proposta para uma trajetória de aprendizagem em Educação Matemática:

> O uso de TICs no processo de ensino-aprendizagem de Matemática ocorre nas iniciativas de mediação, experimentação, diversificação dos registros, enfim, em uma série de iniciativas justificáveis a partir de uma estratégia que considera o saber a ser ensinado, os estudantes e o professor, como na proposta do sistema didático de Chevallard (1991, p.23), mas com algumas reconfigurações. (OLIVEIRA, 2009, p. 17)

---

[11] O Winplot está disponível no site http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html. Acesso em 18/05/2010.

[12] Tecnologia da Informação e da Comunicação.

Quanto à possibilidade em que o aluno possa estabelecer conjecturas de situações diversas sem manter a forma sequencial que parte de conceitos mais simples em direção a ideias mais complexas, Tall (1989) enfatiza:

> Com o computador, o aluno pode explorar idéias mais complexas desde o início, e isso será determinante no processo de formação de imagens conceituais[13] que ele realiza. (TALL, *apud* ALLEVATO, 2007, p. 80)

Borba (2001) afirma que:

> Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. (BORBA, 2001, p. 43)

Segundo o autor, o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas. Essa prática pedagógica estimula a utilização de problemas abertos, de formulação de conjecturas em que a sistematização só se dá como coroamento de um processo de investigação por parte de estudantes (e, muitas vezes, do próprio professor).

> Dessa forma, busca-se superar práticas antigas com a chegada desse novo ator informático. Tal prática está também em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e como uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito. (BORBA, 2001, p. 44)

Borba e Penteado (2001) fazem uma discussão sobre conteúdos que podem ser estudados em um ambiente informatizado, ressaltando o papel da informática como ferramenta provocadora de mudanças do próprio conhecimento.

Em nosso trabalho, pretendemos investigar como o uso do *software* Winplot pode ou não interferir na compreensão dos alunos, pois possibilita a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Com esse intuito,

---

[13] O termo imagem conceitual refere-se à estrutura cognitiva total que é associada a um conceito, a qual inclui todas as figuras mentais e as propriedades e processos associados. (TALL, *apud* ALLEVATO, 2007)

elaboramos dois roteiros com instruções para o uso desse *software*, com as ferramentas necessárias para a representação no registro gráfico do sistema linear formado por duas equações com duas incógnitas em 2D e a representação gráfica do sistema linear formado por três equações e três incógnitas em 3D. Vale ressaltar que, mediante a dificuldade da representação gráfica dos três planos no espaço tridimensional, é essencial o uso da ferramenta computacional em nossa pesquisa.

Escolhemos um sistema possível determinado, um possível indeterminado e um impossível para exemplificarmos a realização do tratamento algébrico no método de adição e a resolução gráfica com auxílio do *software* Winplot.

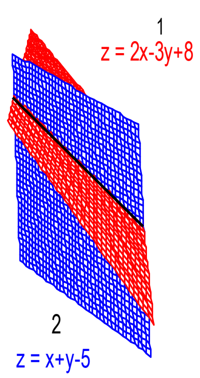
a) Sistema Possível Determinado

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 8 & \textcircled{1} \\ x + y - z = 5 & \textcircled{2} \\ 3x + 2y - z = -4 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Os alunos, ao iniciarem a resolução do sistema linear constituido por duas equações ① e ② com três incógnitas pelo método de adição, deveriam encontrar uma equação de reta. Ao digitar o par de equações do sistema linear, obteriam o gráfico de dois planos e visualizariam a posição relativa desses planos. Dessa forma, poderáiam associar que ao obter uma equação de reta, na realização do tratamento algébrico, os planos se interceptariam segundo essa reta.

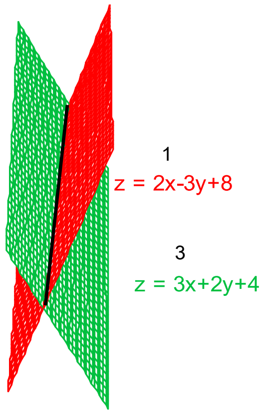
Equações: ① e ②

$$\begin{cases} -2x + 3y + \cancel{z} = 8 \\ x + y - \cancel{z} = 5 \end{cases} +$$
$$\overline{-x + 4y = 13 \quad \textcircled{4}} \quad \text{equação da reta}$$



Equações: ① e ③

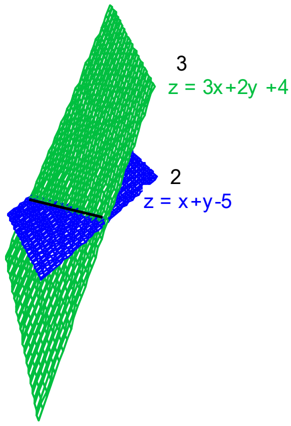
$$\begin{cases} -2x + 3y + \cancel{z} = 8 \\ 3x + 2y - \cancel{z} = -4 \end{cases} +$$
$$x + 5y = 4 \text{ equação da reta}$$



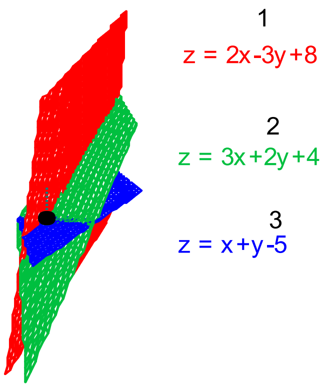
Os alunos poderiam associar que as duas retas são concorrentes; logo, os planos se interceptariam em um ponto. Para validar sua hipótese, os alunos, ao resolverem o sistema linear constituido das equações ② e ③, poderiam confirmar a posição relativa dos três planos.

Equações: ② e ③

$$\begin{cases} -x - y + z = -5 \\ 3x + 2y - z = -4 \end{cases}$$
$$2x + y = -9 \text{ equação da reta}$$



Com ajuda do *software* Winplot, os alunos certificariam-se que os planos se interceptam em um ponto, classificando, assim, o sistema de possível determinado.



Para a determinação das coordenadas do ponto de intersecção, os alunos deveriam prosseguir com a resolução dos sistemas formados pelas equações ④ e ⑤:

Equações: ④ e ⑤

$$\begin{cases} \cancel{x} - 4y = -13 \\ \cancel{-x} - 5y = -4 \end{cases}$$
$$-9y = -17$$
$$y = \frac{17}{9}$$

Substituindo o valor de y, teremos: $x = -\frac{49}{9}$ e $z = -\frac{77}{9}$

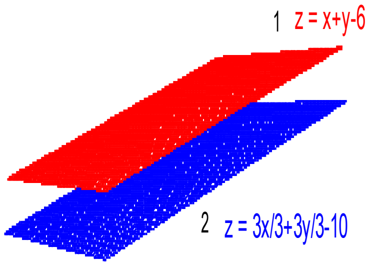
$$S = \left\{ \left(-\frac{49}{9}, \frac{17}{9}, -\frac{77}{9} \right) \right\}$$

Com a ajuda do *software* Winplot, os alunos visualizariam que os planos se interceptam em um ponto e classificariam o sistema de possível determinado. Entretanto, faz-se necessário a resolução algébrica para que pudéssemos certificar o valor das coordenadas do ponto de intersecção.

b) $$\begin{cases} x + y - z = 6 & \text{①} \\ 3x + 3y - 3z = 10 & \text{②} \\ 2x + 2y - z = 1 & \text{③} \end{cases}$$

Equações ① e ②:

$$\begin{cases} -3\cancel{x} - 3\cancel{y} + 3\cancel{z} = -18 \\ \cancel{3x} + \cancel{3y} - \cancel{3z} = 10 \end{cases} +$$
$$0x + 0y + 0z = -8 \quad \text{④}$$

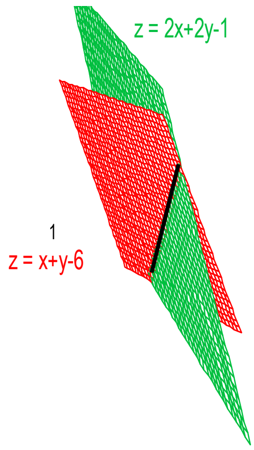


Os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico, deveriam encontrar a equação ④ e, nesse momento, concluirem que o sistema seria impossível. Porém, acreditamos ser relevante que os alunos conheceçam qual é a posição relativa dos três planos.

Os alunos deveriam prosseguir o tratamento algébrico do sistema linear a fim de verificar o que ocorre ao resolver o sistema linear formado pelas equações ① e ③ e, consequentemente, conhecer a posição relativa desses dois planos.

Equações ① e ③:

$$\begin{cases} -2\cancel{x} - 2\cancel{y} + 2z = 12 \\ \cancel{2}x + \cancel{2}y - z = 1 \end{cases} +$$
$$0x + 0y + z = 13$$
$$z - 13 = 0 \quad ⑤ \quad \text{equação da reta}$$

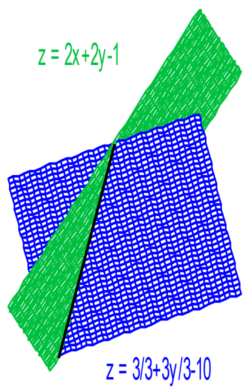


Os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico do sistema linear formado pelas equações ① e ③, encontrariam uma equação. Isso poderia levá-los a perceber que esses planos se interceptariam segundo uma reta.

Os alunos deveráiam resolver o sistema constituido pelas equações ② e ③.

Equações: ② e ③:

$$\begin{cases} -6x - 6y + 6z = -20 \\ 6x + 6y - 3z = -19 \end{cases}$$
$$0x + 0y + 3z = -39$$
$$z + 11 = 0 \quad ⑥ \quad \text{equação da reta}$$



Assim, ao encontrarem as equações z - 13 = 0 ⑤ e z + 11 = 0 ⑥, os alunos deveriam interpretar que, se as retas são paralelas, os planos 1 e 2 são paralelos, enquanto que o plano 3 os intercepta segundo retas paralelas.

Equações: ④ e ⑤

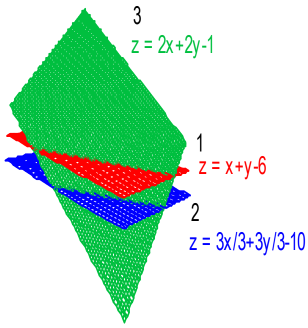
$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = -8 \\ \underline{z = -8} \end{cases}$$
$$z = -16$$

Equações: ⑤ e ⑥

$$\begin{cases} z + 8 = 0 \\ \underline{-z - 11 = 0} \end{cases}$$
$$0z = 3$$

$$S = \emptyset$$

Com ajuda do *software* Winplot, os alunos visualizariam que os planos se encontram dois a dois, não havendo ponto comum que pertença aos três. Dessa forma, o sistema linear é impossível.



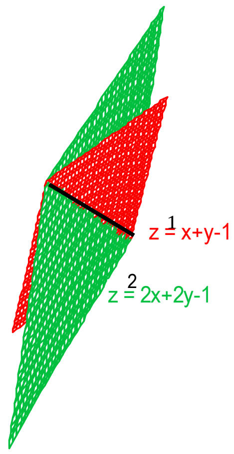
c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - 3z = 3 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$

Iniciaremos o tratamento algébrico pela resolução do sistema linear formado pelas equações ① e ③ para mostrarmos a relevância do aluno realizar todos os passos do método de adição.

Equações ① e ③: $\begin{cases} -2\cancel{x}-2\cancel{y}+2z=-2 \\ \cancel{2}x+\cancel{2}y-z=1 \end{cases} +$

$$0x+0y+z=-1$$

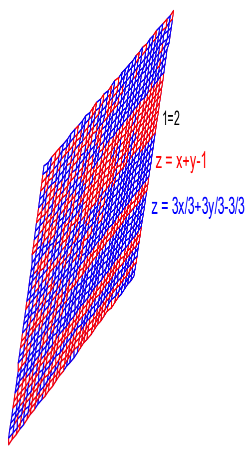
$$z+1=0 \quad ④ \quad \text{equação da reta}$$



Os alunos poderiam encontrar z = -1 e classificar, precipitadamente, o sistema de possível determinado.

Equações ① e ②: $\begin{cases} -3\cancel{x}-3\cancel{y}+3\cancel{z}=-3 \\ \cancel{3}x+\cancel{3}y-\cancel{3}z=3 \end{cases} +$

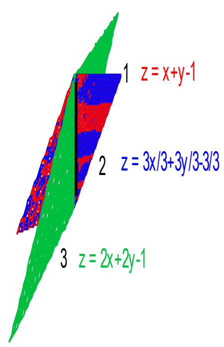
$$0x+0y+0z=0 \quad ⑤ \quad \text{equação da reta}$$



Equações ② e ③: $\begin{cases} -6\cancel{x}-6\cancel{y}+6\cancel{z}=-6 \\ \cancel{6}x+\cancel{6}y-\cancel{3}z=3 \end{cases} +$

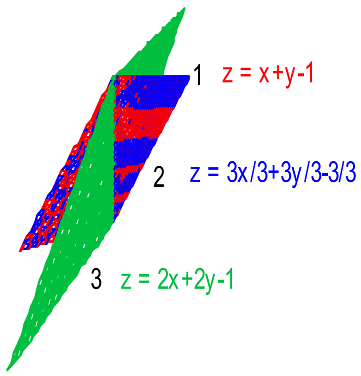
$$0x+0y+3z=-3$$

$$z+1=0 \quad ⑥ \quad \text{equação da reta}$$



Os alunos poderiam perceber que encontraram a mesma equação de reta z + 1 = 0 obtida na resolução do sistema linear formado pelas equações: ① e ③ e com as equações: ② e ③, o que significa dois planos coincidentes interceptados por um terceiro plano, segundo uma mesma reta, ou seja, os planos interceptam-se em infinitos pontos; o sistema é possível indeterminado.

Com ajuda do *software* Winplot, os alunos observariam:



Para estabelecer o conjunto solução:

Equações: ④ e ⑤ $\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

$$\overline{} \; z = -1$$

Equações: ⑤ e ⑥ $S = \{(x, -x, -1)\}$

Desta forma, esperávamos que os alunos, ao visualizarem as posições relativas dos planos no espaço tridimensional, compreenderiam a resolução do sistema linear desenvolvida no tratamento algébrico.

Os alunos têm vivenciado o ensino de Matemática somente com os tradicionais lápis e papel e de forma essencialmente algébrica. A abordagem visual proporcionada pelo computador não é natural, e as imagens por ele fornecidas permitirão questionar suas concepções.

> Na realidade, o computador privilegia o pensamento sem implicar na eliminação do algébrico. Informações gráficas resolvem questões que também podem ser abordadas algebricamente. Além disso, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de conceitos e resultados, dando espaço, portanto, a reflexão sobre o conteúdo envolvido. (BORBA e PENTEADO, 2001; BORBA e VILLARREAL, 2005)

No próximo capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos percorridos nesta pesquisa.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo do trabalho, apresentaremos nossa sequência didática, em que procuramos abordar atividades a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Duval (2003), relatando as etapas criadas para a sua concepção. Para atingirmos nossos objetivos foi necessário fazermos uma simulação da sequência didática, com o auxílio de uma professora de matemática do Colégio Madre Alix, realizando as atividades que seriam propostas aos alunos. Após a simulação, partimos para a fase de experimentação - parte importante da nossa sequência didática, uma vez que, nessa etapa, trabalharemos diretamente com os alunos desta pesquisa. Finalmente, apresentaremos a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, mostrando não apenas as nossas expectativas em relação às atividades propostas como também a análise dos protocolos realizados pelos sujeitos de pesquisa quando da aplicação das atividades durante a fase de experimentação.

4.1 A sequência didática

A atividade consta de duas partes, A e B, como mostra a Figura a seguir:

PARTE A Sistemas lineares 2x2	PARTE B Sistemas Lineares 3x3
A_1: Exploração do estudo no registro da língua natural, algébrico, de tabela e gráfico.	B_1: Exploração do estudo no registro da língua natural e gráfico.
A_2: Exploração do estudo com auxílio do *software* Winplot.	B_2: Exploração do estudo com auxílio do *software* Winplot.

Figura 16: Descrição das partes A e B da sequência didática.
Fonte: elaborada pela autora.

4.1.1 PARTE A: Sistemas Lineares 2x2

Parte A_1

A Questão 1 consta de uma situação-problema em que priorizamos a conversão do registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada.

> Questão 1: *No Parque de Diversões Dia Feliz, os ingressos custam R$ 10,00 para adultos e R$ 6,00 para crianças. No último domingo, com a venda de 400 ingressos, a arrecadação foi de R$ 3.000,00. Determinar o número de adultos e crianças pagantes.*

A Questão 2 contempla a conversão do registro algébrico para o registro de tabela e, em seguida, do registro de tabela para o registro gráfico.

> Questão 2: *Para cada um dos sistemas lineares abaixo, preencha a tabela, construa o gráfico e classifique-os como possível determinado, possível e indeterminado ou impossível e indique o seu conjunto solução. Caso encontre um ponto comum às duas retas, determine-o.*
>
> a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Na Questão 3 priorizamos o tratamento algébrico pelo método de adição.

Questão 3: *Resolva os Sistemas Lineares, utilizando o método de Adição:*

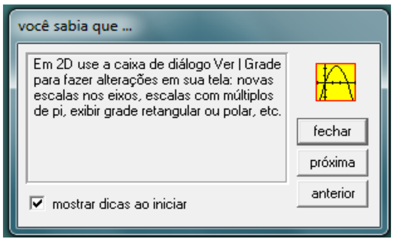
a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = -4 \\ 3x + 7y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$

Parte A_2

Utilizamos o *software* educacional Winplot a fim de propiciar, na atividade proposta, a possibilidade de o aluno conjecturar a relação entre os coeficientes das retas e suas respectivas posições relativas no plano cartesiano. Para isso, elaboramos um roteiro com as instruções para a utilização do *software* Winplot junto com duas questões:

Instruções para o uso do software Winplot:

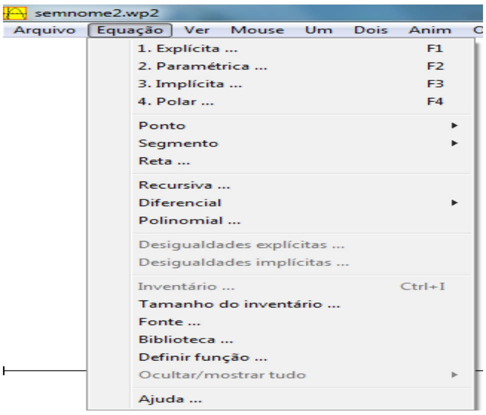
Caso aparece a caixa*: "**VOCÊ SABIA QUE**.",* como mostra a figura, clique em ***"FECHAR".***



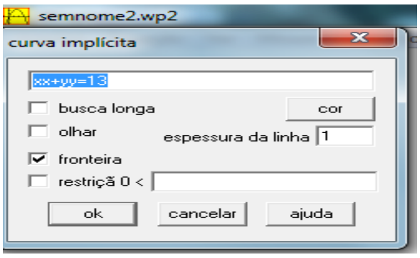
Para fazer a representação gráfica do sistema linear 2x2, você deverá clicar no ícone "***2 – dim***"**.**

Aparecerá a janela 

Clique em **"*EQUAÇÃO*"**. Surgirá uma coluna. Em seguida, clique em "***3.IMPLÍCITA***" conforme a figura:



Surgirá a caixa abaixo:



Questão 1:

a) Digite a equação da reta 4x + 3y = 5 no espaço azul.

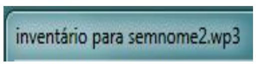
Escolha a "***COR"*** que preferir.

Caso a palavra "***FRONTEIRA"*** não esteja selecionada 

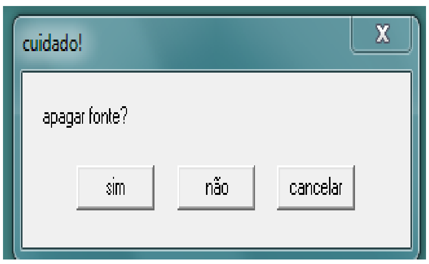
, selecione.

Complete o quadro "***RESTRIÇÃO"***, que se mostra a seguir 

e, em seguida, clique em "***OK"***. Observe o aparecimento da reta.

Para escrever uma segunda equação, clique na caixa 

, em "***DUPL***". Aparecerá uma janela "***CUIDADO!***". Clique em "***NÃO"***.



Caso não apareça esta janela, clique direto em "***DUPL"***. Aparecerá novamente a caixa "***CURVA IMPLÍCITA"***.

Escreva uma nova equação, conservando os coeficientes das incógnitas **x** e **y** da equação anterior, e altere apenas o valor do termo independente. Continue escolhendo uma nova ***"COR"***, observando se a palavra ***"FRONTEIRA"*** está selecionada, e complete o espaço restrição com ***x < 0***. Clique em ***"OK"***.

No quadro ***"INVENTÁRIO"***, conserve a última equação selecionada e clique em "***DUPL"***.

Repita os passos e digite mais uma equação.

Digite mais uma equação com coeficientes proporcionais à equação $4x+3y=5$ e conserve o termo independente.

Escreva, abaixo, o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de **x** e **y** com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas lineares.

b) Para escrever uma nova equação, não é necessário salvar a anterior. Basta fechar todas as janelas.

Reinicie o programa, digite a equação da reta x – 2y = 3, siga os passos anteriores e observe o seu gráfico.

Multiplique a equação x – 2y = 3 por 2 e escreva no quadro "***CURVA IMPLÍCITA"*** a nova equação obtida.

Repita, multiplicando por 3 a equação x – 2y = 3.

Escreva, abaixo, o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de **x** e **y** com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas lineares.

c) Ainda no *software* Winplot, digite a equação da reta 3x + 5y = 4. Observe o gráfico.

Em seguida, digite outra equação, alterando, apenas, o coeficiente da incógnita **x**. Verifique o gráfico.

Digite outra equação, mudando, desta vez, o coeficiente da incógnita **y.**

Escreva, abaixo, o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de **x** e **y** com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas.

Questão 2

Use o *software* Winplot, digite duas equações que representem as retas abaixo e, após construí-las, escreva as equações obtidas.

a) duas retas paralelas;...

b) duas retas concorrentes;..

c) duas retas coincidentes;...

4.1.2 PARTE B: Sistemas Lineares 3x3

Parte B_1

Iniciamos com a Questão 1 em que abordamos o estudo do sistema linear 3x3 com uma situação-problema proposta no registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada.

> ***Questão 1:*** *Para uma partida de futebol, foram colocados à venda três tipos de ingresso:*
>
> - *para o setor verde, ao preço de R$ 12,00*
> - *para o setor azul, ao preço de R$ 18,00*
> - *para o setor branco, ao preço de R$ 25,00.*
>
> *Sabendo que 38.000 torcedores pagaram R$ 620.000,00 para assistir a essa partida, sendo que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos vendidos para o setor azul, quantos torcedores pagaram ingresso para o setor verde?*

Na Questão 2 propusemos oito sistemas lineares em que contemplamos o tratamento algébrico pelo método de adição.

> *Usar o método da Adição para a resolução dos seguintes*
>
> *Sistemas Lineares 3 x 3, indicar o conjunto solução e classificá-lo.*
>
> a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$
>
> *b)* $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 20 \\ 6x + 9y - 3z = 40 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 \\ -6x - 6y + 6z = -6 \\ -8x - 8y + 8z = -8 \end{cases}$
>
> *c)* $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + y + 4z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=-10 \end{cases}$	h) $\begin{cases} 3x+y-z=20 \\ x+3y+z=10 \\ -x+5y+3z=30 \end{cases}$

Parte B_2

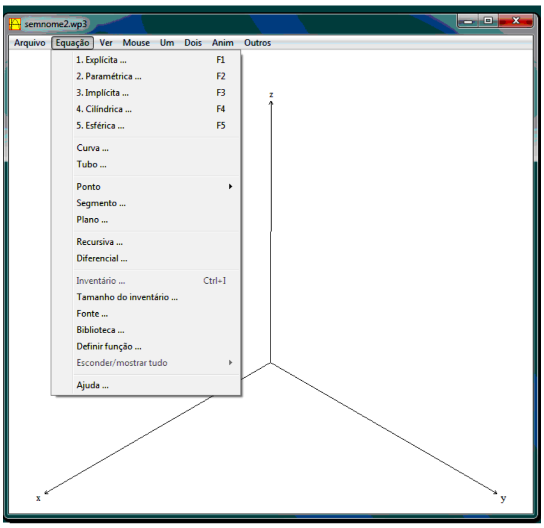
Propusemos uma atividade em que contemplamos o registro gráfico do sistema linear 3x3, com o auxílio do *software* educacional Winplot.

Instruções para o uso do software Winplot nos Sistemas Lineares 3x3

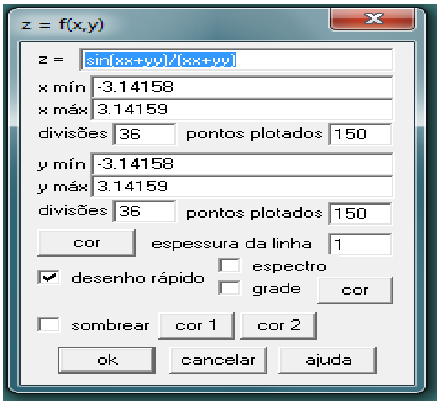
*Para fazer a representação gráfica do sistema linear 3x3, você deverá usar a **"janela 3 – dim"**.*

Aparecerá a janela 

. Clique em ***"EQUAÇÕES"***. Surgirá uma coluna. Em seguida, clique em ***"EXPLÍCITA"*** conforme a figura:



Surgirá a caixa abaixo:



Observe o exemplo.

Dado o sistema linear:

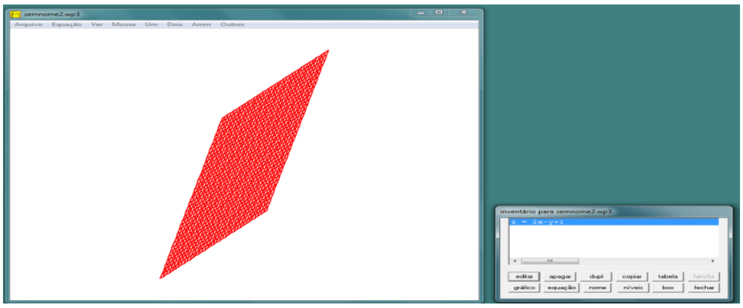
$$\begin{cases} 2x - y - z = -1 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - z = 2 \end{cases}$$

Isole a incógnita **z** da primeira equação e preencha o espaço em azul.

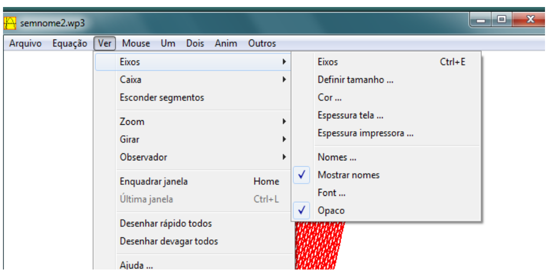
Altere os valores de **x mín** e **máx** para -10.00000 e 10.00000 respectivamente e **y mín** e **máx** para -10.00000 e 10.00000 respectivamente.

Escolha a cor e espessura de sua preferência e clique no botão ***"OK"***.

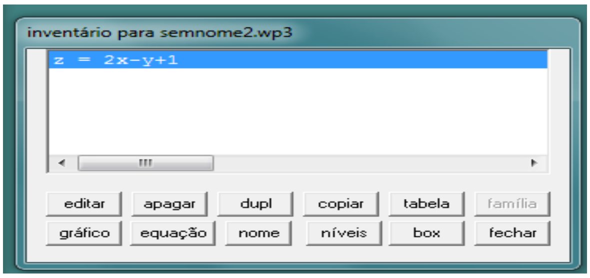
Aparecerão as caixas abaixo:



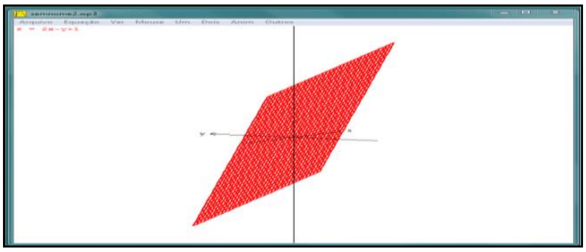
Clique no botão ***"VER"*** e, em seguida, em ***"EIXOS"***, tanto na primeira caixa como na segunda, como mostra a figura abaixo:



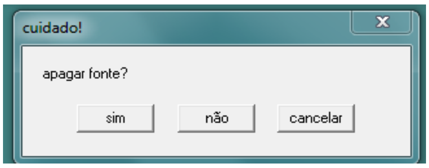
Na caixa inventário para semnome2.wp3, clique em equação.



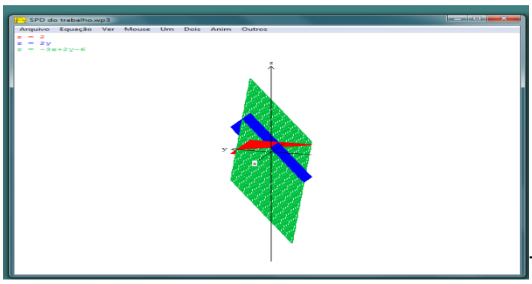
Desta forma, você construiu o plano no espaço da primeira equação do sistema linear.



Para escrever a segunda equação, clique na caixa inventário para semnome2.wp3. Em ***"DUPL"*** aparecerá uma janela ***"CUIDADO!"*** Clique em ***"NÃO"***.



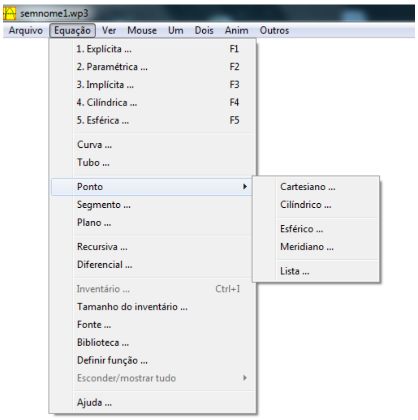
Aparecerá, novamente, a caixa z = f(x, y), e você deverá proceder com a segunda equação da mesma forma que fizemos com a primeira, somente alterando a cor a fim de facilitar a visualização dos planos.


]

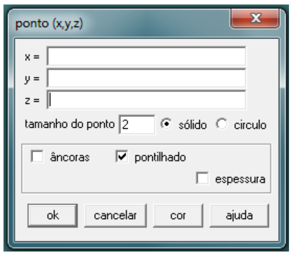
Caso não consiga uma boa imagem dos planos, use as flechas do teclado do computador ou as teclas "***PAGE UP"*** ou ***"PAGE DN"***.

LOCALIZAÇÃO DO PONTO DE INTERSECÇÃO DOS PLANOS

Para localizar o ponto de intersecção dos três planos no espaço, clicar em ***"EQUAÇÕES"***. Em seguida, clicar em ***"PONTO"*** e em ***"CARTESIANO"***.



Aparecerá a caixa abaixo. Digite as coordenadas ponto e, em seguida, em ***"OK"***.



Questão 1: *Analise os resultados obtidos na resolução gráfica dos sistemas lineares da questão 1, dê o conjunto solução e classifique os sistemas em sistema possível determinado (SPD), sistema possível indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).*

4.2 Simulação da resolução da sequência didática

Preocupadas em evitar equívocos que viessem prejudicar nossa experimentação, solicitamos à Sônia Maria Peirão Dias, professora de Matemática dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental do Colégio Madre Alix, a resolução de toda a sequência didática. Sugerimos que cronometrasse o tempo para prevermos a distribuição das etapas do trabalho dentro do prazo previsto.

A professora Sônia, após dois dias testando a sequência didática, contatou-nos para o relato das etapas do trabalho realizado, sugerindo as seguintes alterações:

- a atividade em forma de teste de múltipla escolha deveria ser modificada a fim de não oferecer aos alunos as alternativas;
- a atividade que apresentava tabela deveria manter os valores em aberto para que os alunos fizessem suas próprias escolhas; e
- a construção do plano cartesiano deveria ser feita pelo aluno a fim de que a pesquisadora pudesse avaliar seus conhecimentos prévios.

A pesquisadora, sem alterar as sugestões acima mencionadas, dadas pela professora, encaminhou a discussão para a sua orientadora, professora Bárbara, que concordou com as alterações sugeridas pela professora Sônia. Dessa forma, assim procedemos.

Na questão sobre a resolução de sistemas lineares 2x2 pelo método de adição, a professora Sônia comentou ser importante deixar o aluno optar pelo método de resolução. Porém, quando da resolução da proposta em que abordamos a resolução algébrica dos sistemas lineares 3x3, a professora percebeu a relevância da resolução algébrica dos sistemas lineares 2x2 pelo método de adição por ser conhecimento prévio necessário à resolução dos sistemas lineares 3x3.

A professora não sugeriu mudanças quanto à abordagem dos sistemas lineares 3x3 na forma de uma situação-problema em que contemplamos os registros de representação da língua natural e algébrico.

A professora sugeriu resolver concomitantemente os sistemas lineares nos registros algébricos e gráficos. Todavia, concordou com nossa opção de resolvê-los separadamente devido ao tempo reduzido do uso dos computadores no laboratório de informática.

Em relação às etapas realizadas com o uso da ferramenta computacional Winplot, a professora informou-nos sobre a facilidade na instalação do *software* bem como na familiarização das instruções para a sua utilização.

Com a aprovação da orientadora Profª Drª Barbara, além da colaboração e das sugestões dadas pelos colegas participantes do nosso grupo de estudos GPEA, foram feitas as alterações sugeridas.

4.3 Experimentação

Como proceder para desenvolvermos uma sequência didática com os alunos do 2º ano do Ensino Médio a fim de desafiá-los a resolver os sistemas lineares com o uso de uma ferramenta computacional?

Nossa pesquisa tem como objetivo investigar a interferência da utilização do *software* Winplot quanto à compreensão da resolução de sistemas lineares 3x3 ao ser aplicada a alunos do Ensino Médio.

Inicialmente, procuramos a coordenação do colégio para pedirmos permissão – formalmente feita e posteriormente dada – com objetivo de mencionarmos o nome da instituição na nossa pesquisa e, também, para explicarmos que a abordagem do estudo dos sistemas lineares naquele ano seria feita de maneira a agregar o momento de ser ministrado este tema matemático, que faz parte do conteúdo do 2º ano do Ensino Médio. Garantimos à coordenação do colégio que não seriam feitas imagens com os alunos: todo o registro seria feito apenas em áudio gravações para que pudéssemos gravar as vozes dos alunos (em anexo, encontra-se a autorização dos alunos para essa participação).

Apresentamos um cronograma das aulas para reservarmos horários no laboratório de informática bem como para garantirmos o tempo pré-estabelecido pelo nosso planejamento escolar. A coordenação do colégio aprovou e disponibilizou o uso do laboratório de informática e nos preveniu sobre a preservação do anonimato dos alunos em nossos registros. A coordenação do colégio também prontificou-se de fornecer a atividade para cada aluno.

Enviamos um e-mail ao técnico do laboratório de informática do Colégio Madre Alix, solicitando a reserva das datas previstas para o seu uso e anexando um pedido formal para a instalação do *software* Winplot. No dia seguinte, recebemos do técnico a confirmação de que o programa já estava instalado. A presença da pesquisadora foi solicitada no laboratório para um breve teste.

Após o laboratório de informática ter sido devidamente preparado, foram instalados aleatoriamente três gravadores em três computadores em que os alunos, em duplas, iniciariam sua atividade. Além disso, a pesquisadora disponibilizou seu *laptop* a fim de garantir o registro de quatro duplas.

A pesquisadora, concentrando sua atenção nessas duplas, registrou os nomes dos alunos que ocupavam os computadores para que, ao retornarem nas aulas seguintes, as mesmas duplas utilizassem os mesmos computadores a fim de garantir todos os registros dos mesmos alunos.

Iniciamos o segundo semestre de 2010 com a abordagem do estudo sobre matrizes; em seguida, sobre determinantes; e na última semana de setembro, iniciamos a abordagem do estudo dos sistemas lineares, que coincidiu com a sequência didática elaborada em nossa pesquisa.

A aplicação de nossa sequência didática, de acordo com o planejamento de trabalho, teve início no dia 20 de setembro e término no dia 14 de outubro de 2010.

Preocupadas em abordar os sistemas lineares, registramos oito encontros com os alunos, cada um com duração de cinquenta minutos: três para serem realizados no laboratório de informática e cinco em sala de aula.

Para a abordagem do estudo do sistema linear 2x2, utilizamos duas aulas em classe e uma aula no laboratório de informática. Na abordagem dos sistemas lineares 3x3, usamos três aulas em classe e duas aulas no laboratório de informática.

A disponibilidade de termos apenas duas aulas no laboratório de informática para a exploração da representação gráfica dos sistemas lineares 3x3 foi determinante para limitarmos nossa pesquisa e não estendermos a abordagem nos sistemas de dimensões maiores, visto que esses sistemas lineares apresentam, por si só, oito possíveis posições relativas do plano no espaço tridimensional.

Realizaram a sequência didática 45 alunos, divididos em duas classes: turma A, com 20 alunos, e turma B, com 25 alunos. Em uma primeira seleção, contamos com 10 alunos do 2º A e 15 alunos do 2º B, já que a direção do colégio requisitou alguns deles para participarem de outra atividade, nesse mesmo dia. Vale ressaltar que os 20 alunos que não participaram do primeiro encontro não foram prejudicados, pois tiveram a oportunidade de realizar essa atividade em casa. Porém, não participaram da nossa pesquisa.

Dentre os 25 alunos participantes, foram escolhidos 7 como os sujeitos da pesquisa, uma vez que participaram de todo o experimento de acordo com os critérios combinados: não faltar às aulas e, mesmo em duplas, apresentar seus trabalhos registrados individualmente. Desta forma, garantimos as análises de todo o experimento em sua íntegra, tanto das atividades realizadas em sala de aula como das realizadas no laboratório de informática. A pesquisadora procedeu a experimentação da sequência didática da mesma forma com as duas turmas.

Antes de os alunos adentrarem na sala de aula, a pesquisadora posicionou as carteiras em círculos, com cinco carteiras cada um e, no centro, um gravador, de forma a garantir um maior número de registros à medida em que os alunos teciam seus comentários. Em cada carteira havia uma folha com a primeira atividade proposta.

Assim que os alunos chegaram, ficaram curiosos para saber o que estava ocorrendo. A pesquisadora esperou que todos se acomodassem e, em seguida, explicou-lhes sobre a pesquisa que estava desenvolvendo no curso de mestrado. Eles se mostraram interessados para saber em que consistia um curso de mestrado e onde estava sendo realizado. A pesquisadora, professora da série, fez as explicações necessárias para satisfazer a curiosidade de seus alunos.

Em seguida, após mencionar os temas abordados desde meados do segundo bimestre – matrizes e determinantes –, a professora explicou aos alunos que o próximo tema a ser estudado seria o sistema linear e que isso seria feito por meio de uma sequência didática, oriunda de sua pesquisa, adicionando que eles seriam os sujeitos daquela pesquisa.

Os alunos mostraram-se entusiasmados; entretanto, logo perguntaram sobre como seriam avaliados. A pesquisadora respondeu-lhes que, ao término de cada atividade, estas deveriam ser entregues para serem analisadas; porém, não seriam avaliadas. Quanto às dúvidas, os alunos deveriam levantar a mão para que a pesquisadora pudesse atendê-los individualmente a fim de que fossem esclarecidas e, também, para que fossem evitados possíveis tumultos que pudessem atrapalhar o registro da experimentação.

Os alunos iniciaram a leitura da primeira questão em silêncio, mas, em seguida, um deles questionou sobre qual método deveria utilizar para a resolução do problema. A pesquisadora explicou a todos que eles deveriam optar pelo método que considerassem mais conveniente.

Em relação à segunda questão, um aluno questionou sobre os números que deveriam ser atribuídos para x. Imediatamente, outro aluno sugeriu, em voz alta, que se poderia atribuir o valor zero para as incógnitas x e y. A pesquisadora, a fim de não interferir na opção de cada aluno, explicou-lhes que todos tinham a liberdade de escolher os valores.

Prosseguindo a tarefa, outro aluno questionou se era para responder “SPD, SI ou SPI”. A pesquisadora sugeriu-lhe que respondesse da maneira que achasse mais conveniente.

No início da segunda aula, a pesquisadora devolveu as atividades para que os alunos continuassem o trabalho e avisou-lhes que deveriam terminar a segunda e terceira questões naquela aula e devolver as atividades antes de saírem da sala de aula.

Na aula seguinte, a professora convocou os alunos a se dirigirem ao laboratório de informática a fim de explorarem a relação entre coeficientes das equações representadas por duas retas e suas posições. Quando chegaram ao laboratório, encontraram o *software* Winplot já instalado nos computadores, além de três câmaras em três computadores, pois a pesquisadora havia solicitado ao técnico do laboratório que as instalasse. Antes de iniciarem a atividade, receberam uma ficha referente à parte A_2. Para a realização dessa parte, foi disponibilizada uma aula de cinquenta minutos no laboratório de informática.

Assim que se acomodaram, os alunos começaram a se familiarizar com o *software* Winplot, enquanto a pesquisadora enumerava os computadores com suas respectivas duplas para identificar o registro das atividades e, assim, garantir que aqueles alunos que estivessem sentados diante dos computadores com câmara realizassem toda a atividade nas mesmas máquinas a fim de que fosse registrado todo o processo de trabalho daqueles alunos.

A pesquisadora solicitou aos alunos que lessem, passo a passo, as orientações do roteiro para se familiarizarem com as instruções de uso do *software* Winplot.

Os alunos, no início da leitura, mostraram dificuldade em escrever as equações nas quais os coeficientes deveriam ser conservados e o termo independente alterado. Solicitaram a presença da professora e pediram a definição do termo independente.

A pesquisadora, pelas perguntas, percebeu a dificuldade dos alunos em usarem as nomenclaturas corretas, bem como constatou que alguns alunos também não haviam compreendido o enunciado da questão e observou que, ao falarem sobre o sistema possível indeterminado, usavam, apenas, SPI.

No dia seguinte, em classe, a pesquisadora iniciou a aula, posicionando os gravadores da mesma forma que havia procedido no início do experimento e, em seguida, entregou aos alunos a ficha com a parte $B_{1,}$ na qual seria abordada a resolução algébrica do sistema linear 3x3.

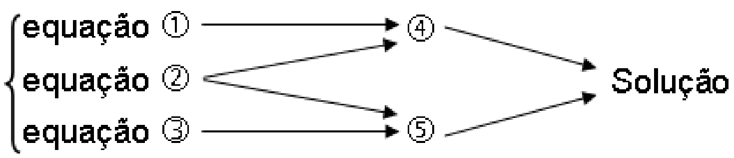
Por ser a primeira vez que os alunos entrariam em contato com a resolução do sistema linear 3x3, a pesquisadora explicou-lhes que o tratamento algébrico seria feito de forma semelhante à do sistema linear 2x2, além de ressaltar a existência de outros métodos usados para a resolução do sistema linear 3x3. Os alunos poderiam optar pelo método.

Os alunos iniciaram a atividade com a leitura silenciosa da situação-problema. Após muitas tentativas, perguntas e lamentações sobre a resolução do sistema, a pesquisadora, por ter percebido ser relevante, orientou os alunos sobre como trabalhar três equações com três incógnitas, da seguinte forma: “Escolham dois pares de equações; resolvam-nas como fizeram com o sistema linear 2x2. Desta forma, encontrarão duas equações. Ao resolverem o sistema formado por elas, encontrarão a solução”.

No fim da aula, a pesquisadora recolheu o material e observou que alunos não haviam realizado o tratamento algébrico. No início da aula seguinte, a pesquisadora questionou os alunos em relação à dificuldade encontrada na realização da primeira questão. Eles responderam:

“Ah! Era fácil eram só duas equações, e agora o que eu faço com três?”.
“Com três não dá pra fazer”.
“Eu não sei...... o que eu faço com três?”
“Substitui uma vez numa equação depois não sabia aonde substituir!”

Mediante esse quadro, visto que não surtiu efeito seu comentário na aula anterior, a pesquisadora optou por montar um esquema sobre o tratamento algébrico pelo método de adição a fim de não prejudicar a experimentação, como mostramos a seguir:



A pesquisadora ressaltou para os alunos a possibilidade de optarem pela formação de um sistema com as equações ① e ③; porém, não se estendeu na explicação. Um aluno questionou:

“Como é, não entendi”.
A pesquisadora respondeu: “Siga o esquema”.

Continuamos a experimentação sem imprevistos e disponibilizamos mais uma aula, totalizando três encontros, cada um com duração de cinquenta minutos, para a realização da parte $B_{1.}$

Ao terminarem a realização dessa parte, a pesquisadora recolheu as atividades e rubricou a classificação dos sistemas lineares escrita por cada aluno para diferenciar da classificação obtida após a utilização do *software* Winplot.

O encontro seguinte foi no laboratório de informática. À medida que os alunos chegavam, a pesquisadora ia entregando para cada um o roteiro para o uso do *software* Winplot, junto com a atividade a ser feita e a atividade realizada em classe para que pudessem associar o tratamento algébrico dos oito sistemas lineares concomitantemente com o registro gráfico. Solicitou-lhes que mantivessem os mesmos lugares anteriormente usados a fim de facilitar a coleta dos dados.

Os alunos iniciaram a atividade e não apresentaram dificuldade no uso do *software* Winplot. Contudo, alguns questionaram se havia necessidade de registrarem as etapas ao escreverem a equação z = f(x, y). A pesquisadora sugeriu-lhes que usassem a folha em que haviam resolvido a segunda questão da parte $B_{1,}$ na qual já haviam feito o tratamento algébrico dos oito sistemas lineares.

Ao constatarem que surgiram coeficientes com números racionais (Q), perguntaram como deveriam digitar o número. Porém, imediatamente outro aluno comentou que havia escrito em forma de fração e que não havia ocorrido nenhum problema. Como previsto, os alunos não conseguiram terminar a atividade na primeira aula. Por isso, voltamos, no dia seguinte, para encerrarmos nossa experimentação.

Na saída do laboratório, a pesquisadora perguntou a opinião de dois dos alunos da pesquisa sobre o que haviam achado da atividade.

> Aluno A: “Muito legal, a matemática tinha sempre que ser dada assim, é muito mais fácil quando você vê”.
>
> Aluno B: “Tenho muita dificuldade em matemática, estou indo mal, minhas notas são péssimas mas assim fica fácil, não tem tanta conta para fazer”.

4.4 ANÁLISE *A PRIORI* E ANÁLISE *A POSTERIORI*

4.4.1 PARTE A: Sistemas Lineares 2x2

Para desenvolvermos a parte A foram disponibilizadas duas aulas para os alunos realizarem a parte A_1, em classe, e uma aula no laboratório de informática para realizarem a parte A_2, constando de cinquenta minutos de duração cada uma das aulas

PARTE A_1

Análise da questão 1 da parte A_1

Análise *a priori*

Os alunos receberam uma atividade, contendo três questões que deveriam ser desenvolvidas individualmente durante duas aulas, sendo cada uma com duração de cinquenta minutos.

> *No Parque de Diversões Dia Feliz, os ingressos custam R$ 10,00 para adultos e R$ 6,00 para crianças. No último domingo, com a venda de 400 ingressos, a arrecadação foi de R$ 3.000,00. Determinar o número de adultos e crianças pagantes.*

O objetivo dessa questão era o de verificar o desempenho dos alunos quanto à conversão do registro da língua natural para o registro algébrico. Esperávamos que os alunos fizessem essa conversão, mobilizando conhecimentos prévios e realizando tratamentos que lhes possibilitassem chegar a uma resposta quanto ao número de adultos e crianças pagantes.

Para que os alunos desenvolvessem a estratégia escolhida, seria necessário:

- usar letras como incógnitas específicas;
- reconhecer uma expressão algébrica;
- conhecer os tratamentos numéricos e algébricos no conjunto dos números reais;
- elaborar uma resposta que satisfizesse à pergunta proposta no problema.

De acordo com a situação-problema, os alunos poderiam representar por uma letra qualquer, como por exemplo, o número de adultos pagantes por *(x)* e o número de crianças pagantes por *(y).* Em seguida, poderiam escrever as equações representantes das relações entre as incógnitas escolhidas e os demais dados do problema.

$$\begin{cases} x + y = 400 & (1) \\ 10x + 6y = 3000 & (2) \end{cases}$$

Ao resolverem o sistema linear, os alunos poderiam encontrar a solução, usando um tratamento baseado nos coeficientes da equação e, assim, optarem por um dos métodos de resolução: de adição, substituição ou comparação. Optamos por mostrar a resolução pelo método de adição e substituição.

Caso o aluno use o método da Adição

O aluno poderá escolher uma incógnita para eliminar, sempre que optar pelo método da adição. Como mostramos a resolução abaixo:

Escolher a incógnita *x*, ele deve multiplicar a 1ª equação por (-10) e em seguida adicionar as equações, eliminando a incógnita *x* e encontrando o valor de *y*.

$$\begin{cases} x + y = 400 \; \textcircled{1} \\ 10x + 6y = 3000 \; \textcircled{2} \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} -10x - 10y &= -4000 \\ 10x + 6y &= 3000 \\ -4y &= -1000 \\ y &= 250 \end{aligned}$$

O aluno poderá escolher qualquer uma das equações e substituir o valor de *y* encontrado para descobrir o valor de *x*.

Caso opte por substituir na equação ①:

$$\begin{aligned} x + y &= 400 \\ x + 250 &= 400 \Rightarrow x = 150 \end{aligned}$$

Caso opte por substituir na equação ②:

$$\begin{aligned} 10x + 6y &= 3000 \\ 10x + 6 \cdot 250 &= 3000 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

Caso o aluno opte pelo método de Substituição

O aluno poderá isolar uma das incógnitas numa das equações, substituir essa incógnita na outra equação pela expressão equivalente, resolver a equação que tem apenas uma variável e substituir o valor encontrado em uma equação que tenha as duas variáveis.

$$\begin{cases} x + y = 400 \; \textcircled{1} \quad \rightarrow x = 400 - y \; \textcircled{3} \\ 10x + 6y = 3000 \; \textcircled{2} \end{cases}$$

Substituir ③ em ②:

$$\begin{aligned} 10(400 - y) + 6y &= 3000 \\ 4000 - 10y + 6y &= 3000 \\ y &= 250 \end{aligned}$$

Substituir o valor de y em ③:

$$\begin{aligned} x &= 400 - y \\ x &= 400 - 250 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

Resposta do problema: são 150 adultos e 250 crianças pagantes.

Análise *a posteriori*

Para preservar a identidade dos alunos, sujeitos de nossa pesquisa, optamos designar cada um pela primeira letra do seu nome, doravante chamados de B, I, J, L, N, R, V, e a professora/pesquisadora, autora deste trabalho, de P.

Apesar de os alunos trabalharem em duplas no laboratório de informática, a atividade foi realizada individualmente. Portanto, os protocolos analisados são pessoais.

Durante a aplicação, tivemos dois questionamentos: um quanto à dificuldade na interpretação do problema; outro, em relação ao tratamento a ser usado. Dois alunos questionaram:

T: *"*Professora, é para resolver pelo método da adição ou da substituição?*"*

P: *"*Qual o método de sua preferência? Use-o.*"*

N: "Mas professora, eu nunca sei o que fazer quando tem um problema, por isso que vou mal nas provas, quando você faz exercícios até que vai mas chega na prova você pede problema e sempre vou mal".

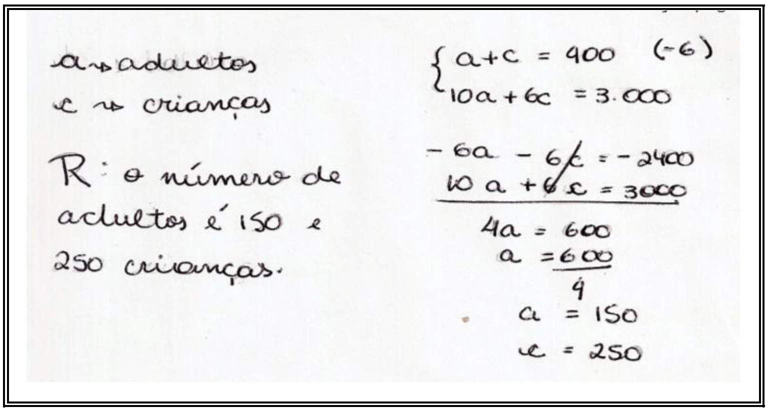
P: "Você saberia identificar as incógnitas nesse problema?"

Ao finalizarmos a fase de experimentação da nossa sequência didática, quando da leitura das atividades propostas aos alunos, verificamos que dois dos sete alunos participantes da nossa pesquisa não haviam realizado a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.

Acreditamos que esses alunos apresentaram dificuldades para traduzir os dados do enunciado. Segundo Duval:

> A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. (DUVAL, 2003, p. 17)

Em relação ao tratamento algébrico, três dos sete alunos optaram por resolver o sistema linear pelo método de adição e dois pelo método de substituição.



a → adultos
c → crianças

R: o número de adultos é 150 e 250 crianças.

$$\begin{cases} a + c = 400 & (-6) \\ 10a + 6c = 3.000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -6a - \cancel{6c} &= -2400 \\ 10a + \cancel{6c} &= 3000 \\ \hline 4a &= 600 \\ a &= \frac{600}{4} \\ a &= 150 \\ c &= 250 \end{aligned}$$

Figura 17: Protocolo do aluno **I**; tratamento algébrico correto.

Contudo, concluímos que os alunos não mostraram dificuldade ao realizarem a conversão do registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada. Observamos que não houve dificuldade na atividade cognitiva de conversão.

Lopes (2008) apontou em sua pesquisa que os alunos, ao resolverem problemas que envolvam sistemas lineares somente com duas incógnitas, não apresentam dificuldades quanto ao tratamento algébrico. Este fato é observado na análise dos protocolos dos alunos selecionados para nossa pesquisa. O autor ressalta, também, que essa situação sofre modificação quando se trata dos sistemas lineares 3x3, pois ao utilizá-los os alunos apresentam sensível aumento de dificuldade na resolução das atividades propostas.

Análise da Questão 2 da parte A_1

Análise *a priori*

Para cada um dos sistemas lineares abaixo, preencha a tabela, construa o gráfico e classifique-os como possível determinado, possível e indeterminado ou impossível e indique o seu conjunto solução. Caso encontre um ponto comum às duas retas, determine-o.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

O objetivo dessa questão foi o de investigar se os alunos realizariam a conversão do registro algébrico para o de tabela e para o registro gráfico e classificariam cada sistema de acordo com o tipo de solução.

A conversão do registro algébrico como registro de partida para o registro gráfico como registro de chegada é possível quando os alunos utilizam o registro de tabela e, assim, efetuam as conversões para o registro gráfico. Para isso, é necessário atribuir valores para uma das incógnitas e calcular os valores correspondentes da outra incógnita. Obter, portanto, vários pares ordenados (x, y) que correspondam a pontos pertencentes a cada uma das equações, localizados todos no plano cartesiano e por observação, constatando que esses pontos estarão respectivamente alinhados entre si e podem ser unidos por retas. Desta forma, pode ser realizada a conversão do registro algébrico para o registro de tabela.

No item a esperávamos que os alunos encontrassem duas retas paralelas e classificassem esse sistema linear como um sistema impossível (SI), cujo conjunto solução é representado por S = Ø ou S = { }.

Caso os alunos encontrassem duas retas coincidentes, poderiam classificá-las como um sistema possível indeterminado (SPI) cujo conjunto solução é representado de forma genérica mediante a constatação da infinidade de pontos comuns às retas.

Os alunos, ao encontrarem duas retas concorrentes, deveriam classificá-las como um sistema possível determinado (SPD) cujo conjunto solução será o par ordenado comum às retas, representado por S = {(x, y)}.

Os alunos poderiam apresentar dificuldade ao escolherem valores absolutos de uma variável em relação à outra e, consequentemente, na obtenção dos pares de pontos (x, y) no plano cartesiano.

Optamos por mostrar a resolução de um dos quatro sistemas lineares propostos, visto que os procedimentos são semelhantes.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 & ① \\ 3x - 2y = 12 & ② \end{cases}$

Os alunos poderiam atribuir valores a uma das incógnitas e substitui-los na equação para encontrarem o valor da outra incógnita:

① 3x – 2y = 6

Para **x = -1** $\Rightarrow$ 3.-1 – 2y = 6

$\mathbf{y = -\frac{9}{2}}$

Para **x = 0** $\Rightarrow$ 3.0 – 2y = 6

$\mathbf{y = -3}$

Para **x = 1** $\Rightarrow$ 3.1 – 2y = 6

$\mathbf{y = -\frac{3}{2}}$

Para **x = 2** $\Rightarrow$ 3.2 – 2y = 6

$\mathbf{y = 0}$

x	y
–1	$-\frac{9}{2}$
0	–3
1	$-\frac{3}{2}$
2	0

Da mesma maneira, os alunos poderiam proceder com a equação ②: 3x – 2y = 12.

② 3x – 2y = 12

Para **x = -1** $\Rightarrow$ 3.-1 – 2y = 12

$\mathbf{y = -\frac{15}{2}}$

Para **x = 0** $\Rightarrow$ 3.0 – 2y = 12

y = -6

Para **x = 1** $\Rightarrow$ 3.1 – 2y = 12

$\mathbf{y = -\frac{9}{2}}$

Para **x = 2** $\Rightarrow$ 3.2 – 2y = 6

y = 0

x	y
-1	$-\frac{15}{2}$
0	–6
1	$-\frac{9}{2}$
2	0

Propusemos aos alunos que construissem o gráfico dos sistemas lineares 2x2 sem o auxílio do *software* Winplot, visto que a construção manual já vinha sendo explorada desde o Ensino Fundamental. Por outro lado, nosso tempo reduzido no laboratório de informática fez com que optássemos por privilegiar uma atividade que explorássemos: não a construção de um gráfico, mas um outro tipo de atividade em que abordamos a proporcionalidade entre os coeficientes das mesmas incógnitas nas duas equações.

Optamos por ilustrar nosso trabalho com os gráficos feitos pela pesquisadora com o auxílio do *software* Winplot.

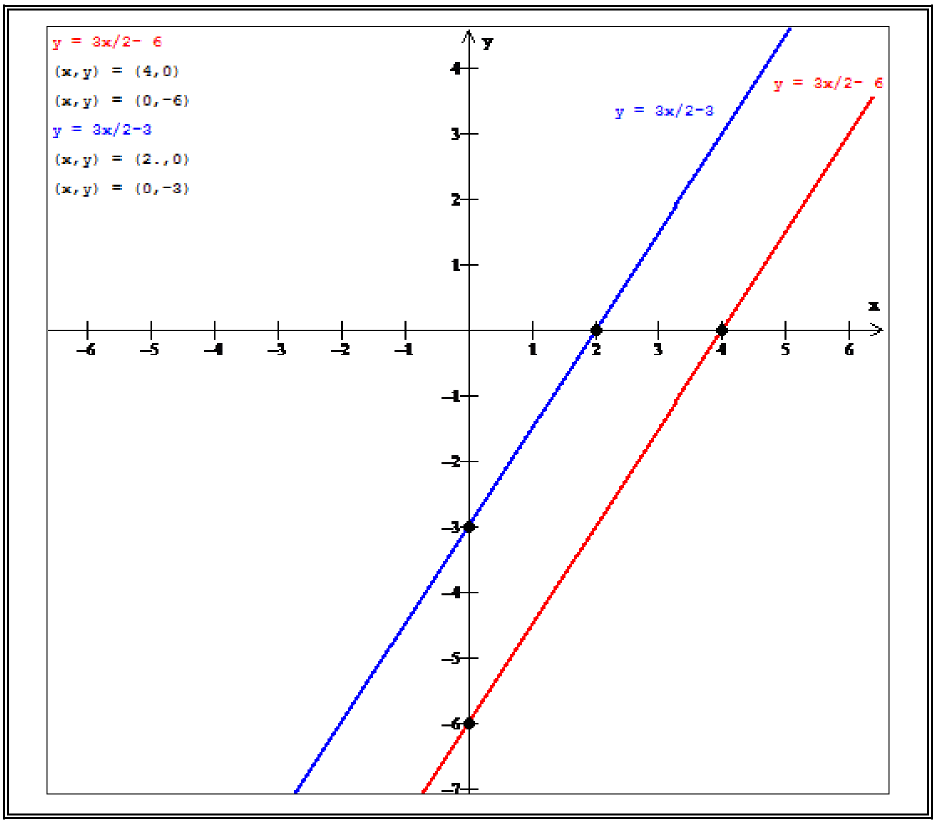


Figura 18: Representação no registro gráfico do sistema linear 2x2 com o auxílio do *software* Winplot.
Fonte: elaborado pela autora.

No item b objetivamos que os alunos, ao realizarem a conversão dos registros, encontrassem duas retas concorrentes, classificassem o sistema como possível determinado (SPD) e apresentassem o conjunto solução S = {(4, -1)}, como mostraremos a seguir:

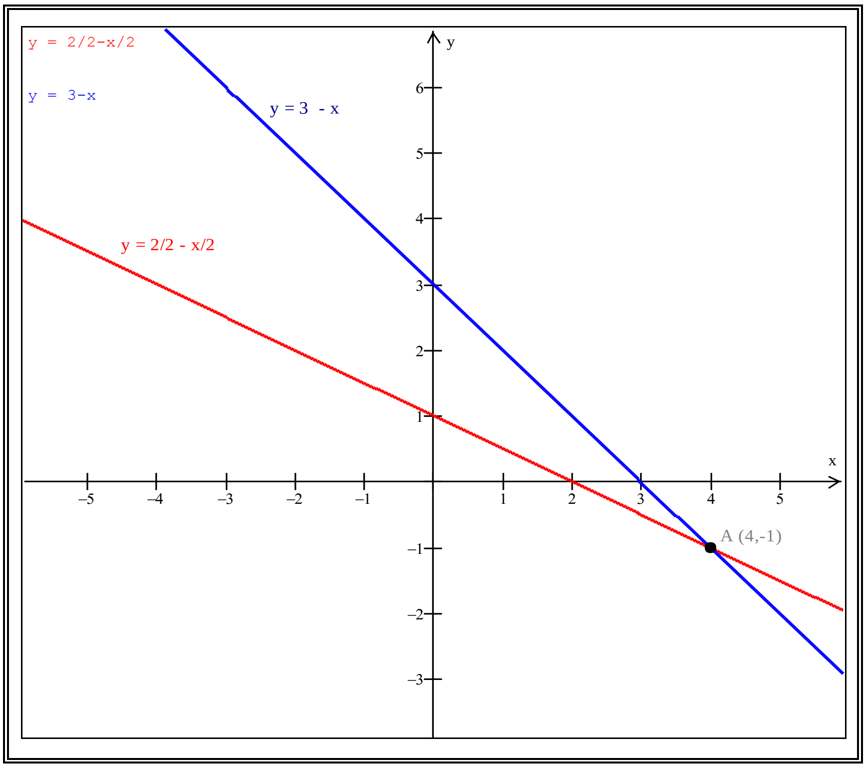


Figura 19: Representação no registro gráfico do sistema 2x2 com o auxílio do *software* Winplot.
Fonte: elaborado pela autora.

No item c, objetivamos que os alunos, ao realizarem a conversão dos registros algébrico, de tabela e gráfico, encontrassem duas retas coincidentes e classificassem o sistema como possível indeterminado (SPI).

Para determinar o conjunto solução, os alunos poderiam optar por qualquer uma das equações para escrever o conjunto solução da forma x = f(y) ou y = f(x). Caso optassem iniciar pela equação ①, por apresentar coeficientes com valor igual a 1, e escrever o conjunto solução da forma x = f(y), seria necessário isolar *x*:

$$① \quad x + y = 3$$
$$x = 3 - y$$

Logo, o conjunto solução seria: $S = \{(3 - y, y) / y \in R\}$

Caso os alunos optassem por escrever o conjunto solução da forma y = f(x), seria necessário isolar *y*:

$$① \quad x + y = 3$$
$$y = 3 - x$$

Logo, o conjunto solução seráia: $S = \{(x, 3 - x) / x \in R\}$

Esperávamos que, com tal procedimento, os alunos visualizassem o seguinte gráfico**:**

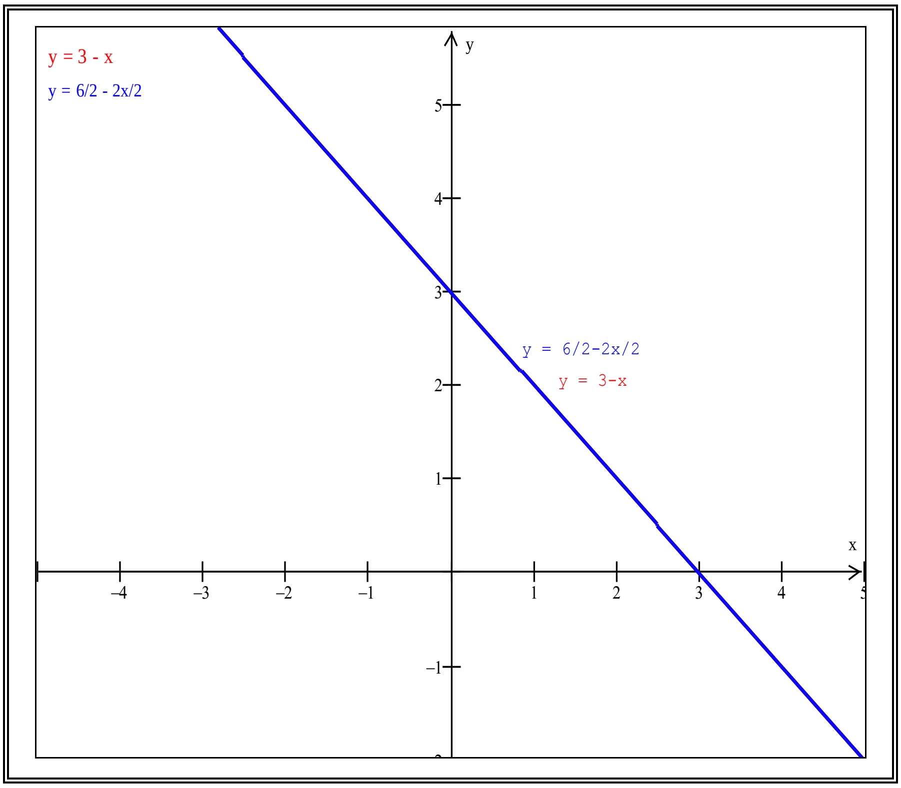


Figura 20: Representação gráfica do sistema linear 2x2 com o auxílio do *software* Winplot.
Fonte: elaborado pela autora.

Objetivamos, com o item d, que os alunos, ao realizarem a conversão dos registros algébrico, de tabela e gráfico, encontrassem duas retas paralelas, classificassem o sistema como impossível (SI) e apresentassem o conjunto solução S = Ø, ou S = { }, como mostraremos a seguir:

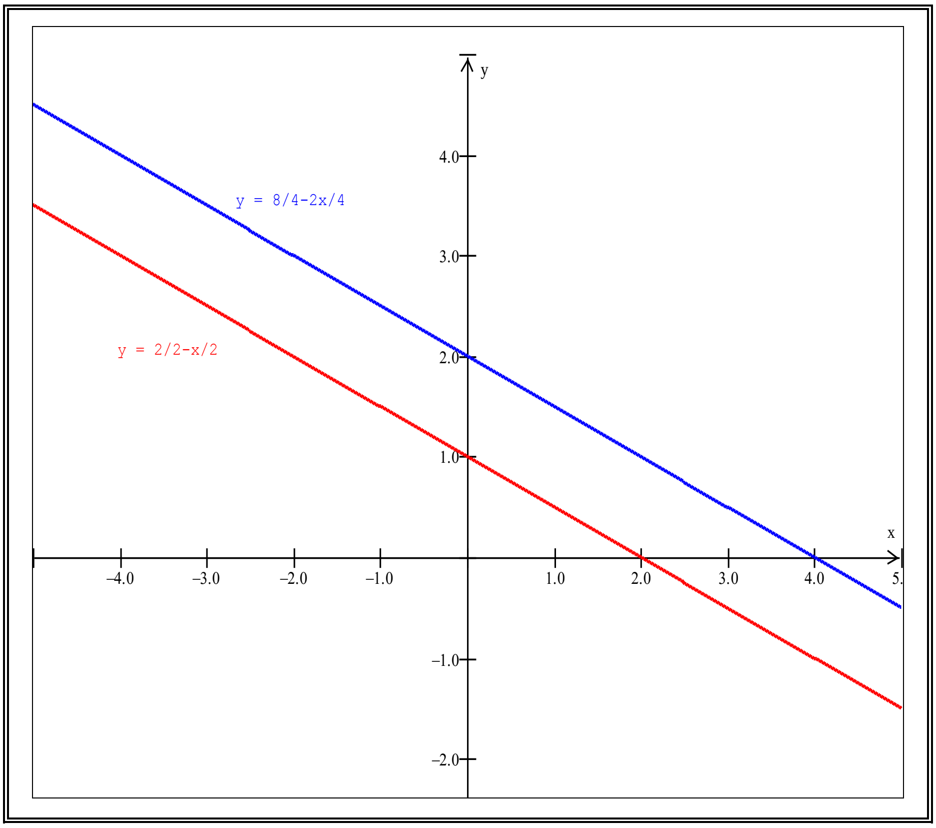


Figura 21: Representação gráfica do sistema linear 2x2 com o auxílio do *software* Winplot.
Fonte: elaborado pela autora.

Análise *a posteriori*

Item a

Os alunos que resolveram os sistemas lineares apresentaram uma diversidade na forma de resolução.

Iniciamos a Questão 2, e um aluno questionou:

T[14]: "Que número nós usamos na tabela?" Antes de a pesquisadora responder, outro aluno sugeriu:

L: "Só põe zero"*.*

P: "Podem atribuir qualquer e quantos valores vocês quiserem".

[14] As transcrição dos diálogos não sofreram correções.

Em relação ao preenchimento da tabela do item a, pudemos constatar que cinco alunos atribuíram valor “zero” às incógnitas *x* e *y* e calcularam os valores correspondentes de *x* ou *y*, enquanto que dois alunos atribuíram a *x* valores aleatórios pertencentes ao conjunto dos números inteiros (Z) e, em seguida, calcularam os respectivos valores de *y*.

Acreditamos que o fato de atribuírem valor “zero” às incógnitas *x* e *y* ocorreu devido os alunos, quando estudaram função afim, no primeiro ano do Ensino Médio, compreenderam que bastam dois pontos distintos para traçar uma única reta.

Verificamos que dois dos alunos não haviam construído corretamente o gráfico e classificaram o sistema linear de forma incorreta, enquanto que um dos alunos calculou vários pontos para preencher a tabela e encontrou ordenadas pertencentes ao conjunto dos números racionais (Q).

O protocolo nos leva a interpretar que o aluno, por ter dificuldade em localizar números racionais (Q) no plano cartesiano, não realizou a conversão do registro de tabelas para o registro gráfico.

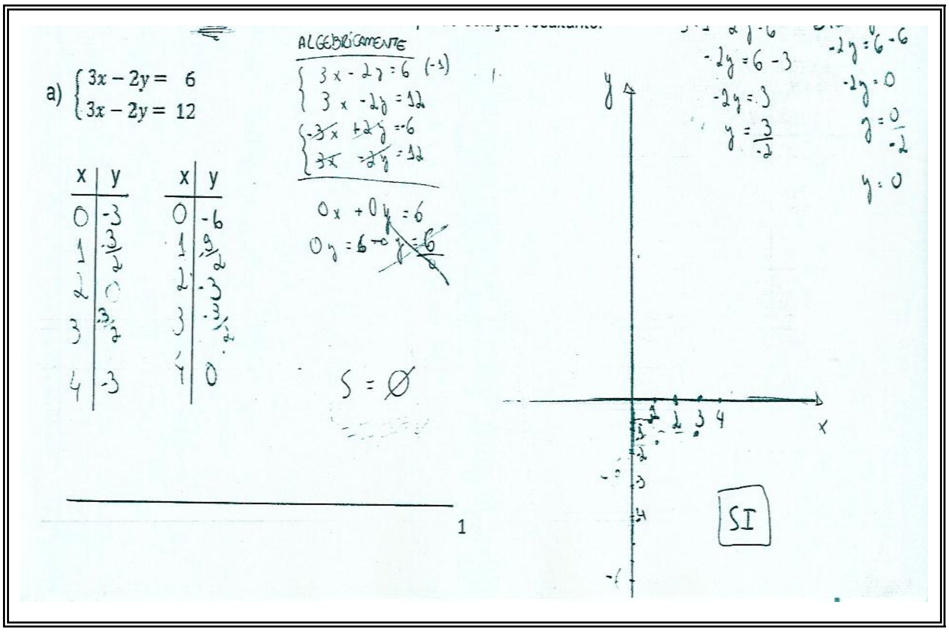


Figura 22: Protocolo do aluno V: recorreu ao tratamento algébrico mediante a dificuldade de realizar conversão de registros.

Concordamos com Duval (2003) quando afirma que os alunos chegam a um nível avançado e não sabem calcular, o que leva a um fracasso não na atividade de tratamento, mas na de conversão. Se o aluno V, tivesse feito a conversão do registro numérico na forma fracionária para forma decimal poderia ter tido sucesso na conversão do registro de tabela para o registro gráfico.

> Por mais que eles saibam efetuar a adição de dois números com sua escritura decimal e com sua escritura fracionária, certos alunos não se preocupam de forma alguma em pensar em converter a escritura decimal de um número em sua escritura fracionária (e reciprocamente), ou mesmo fracassam quando se asseguram que isto é necessário no desenvolvimento de um cálculo. (DUVAL, 2009, p. 59).

Apesar de verificarmos que o aluno não realizou a conversão do registro de tabela para o registro gráfico, ele recorreu espontaneamente ao registro algébrico e concluiu corretamente a classificação e a determinação do conjunto solução. Em relação a esta constatação, Almouloud (2003) ressalta:

> Uma mudança de registro tem vantagens do ponto de vista do tratamento. Ela facilita a compreensão ou a descoberta. A conversão de registros é um instrumento para diferenciar as variações unicamente estruturais das variações cognitivas propriamente ditas. (ALMOULOUD, 2003, p. 145)

Itens b

No protocolo do aluno I, verificamos que, além de ter realizado a conversão dos registros algébrico, de tabela e gráfico, o aluno recorreu ao tratamento algébrico para a determinação do ponto de intersecção das retas.

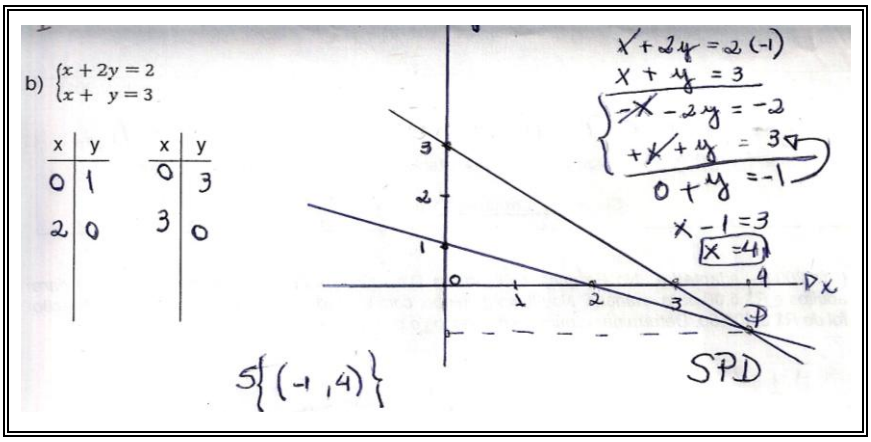


Figura 23: Protocolo do aluno I: realizou a conversão de registros, classificou e escreveu o conjunto solução corretamente.

Item c

Verificamos, no protocolo do aluno B, o registro cognitivo sobre a resolução do sistema. Por outro lado, constatamos, também, que aquele aluno não havia escrito corretamente sua classificação ao trocar o termo correto “indeterminado” por “indefinido”, o que não exclui que tenha compreendido o seu significado. O aluno realizou o tratamento algébrico corretamente; porém, escreveu o conjunto solução de forma incorreta.

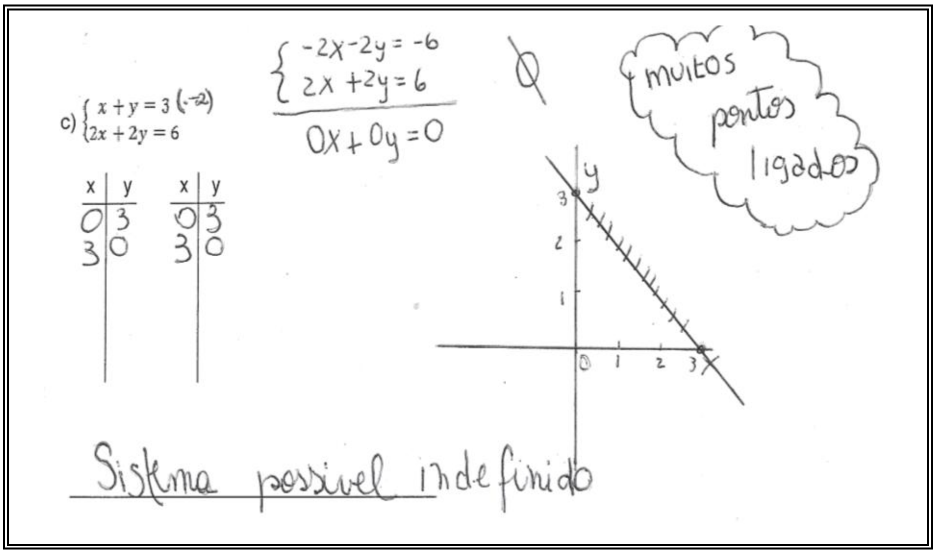


Figura 24: Protocolo do aluno B: realizou a conversão de registros e recorreu ao registro algébrico.

O aluno B ficou preocupado em expressar o significado de retas coincidentes e perguntou:

B: “Posso responder que uma reta em cima da outra tem muitos pontos ligados”.

L: “Ih! será que esta é a resposta?”

B: “Ah, eu vou deixar assim”.

R: “Professora, eu não sei escrever a resposta”.

N: “Escreve SPI”.

Desta forma, constatamos que mesmo os alunos que haviam compreendido o significado da resolução deste tipo de sistema linear não conseguiam escrever o conjunto solução do sistema possível indeterminado. Quanto a esta constatação:

> Atualmente, parece-nos que os alunos têm mais dificuldades em encontrar as soluções de um sistema indeterminado que num determinado, eles se atrapalham para dar a resposta, tiram uma incógnita em função de outra e dificilmente dão a solução com o menor número de incógnitas. (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p. 219)

Mediante análise desses protocolos, constatamos que o registro gráfico auxilia o aluno na compreensão do significado do sistema linear possível e indeterminado; entretanto, isso não ocorre para a determinação do seu conjunto solução.

Item d

Verificamos que, dos sete alunos, seis fizeram a conversão do registro de tabela para o registro gráfico e somente um errou. O erro ocorreu devido a tratamentos numéricos com números pertencentes ao conjunto dos números racionais (Q) para a obtenção dos pares ordenados.

Segundo Duval (2003), as operações de cálculo dependem do sistema de representação utilizado. Para os alunos, a aquisição de um sistema de numeração decimal de posição não é simples.

> Pesquisas nacionais de avaliação na França (Ministère de l'Education Nationale 1992, 1997) mostram que esse não é ainda o caso no início do *collège* (11-12 anos): somente um terço dos alunos parece ter compreendido o funcionamento do sistema decimal e pode verdadeiramente utilizar suas possibilidades para acertar o conjunto dos itens concernentes às operações, as mais simples, de multiplicação ou divisão dos decimais. (DUVAL, 2003, p. 13-14)

Em nossa pesquisa, constatamos que essas dificuldades em relação ao tratamento aritmético dificultaram a classificação do sistema linear, como mostramos a seguir:

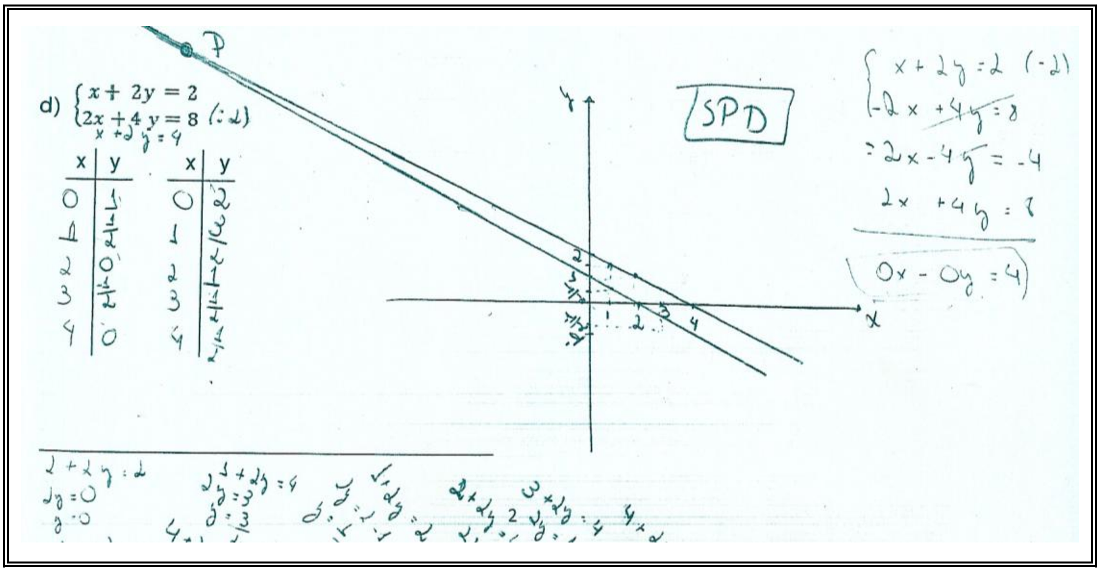


Figura 25: Protocolo do aluno V: recorreu ao registro algébrico. Contudo, optou pelo registro gráfico para resolver a atividade

Assim, o aluno obteve como gráfico duas retas interceptadas em um único ponto. Recorreu ao tratamento algébrico e encontrou a equação 0x – 0y = 4, porém optou pelo registro gráfico e classificou o sistema linear como possível determinado.

Se o aluno soubesse identificar os registros de representação simbólico-numérico (fracionário e decimal), entendemos que o aluno teria realizado corretamente a conversão do registro de tabelas para o registro gráfico. Este fenômeno é chamado por Duval (*apud* Maranhão e Igliori, 2003) de *diferenciação* entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica.

Ao analisarmos o protocolo, verificamos que não havíamos previsto que o aluno V recorresse ao registro algébrico para classificar o sistema linear, visto que tal procedimento não havia sido proposto no enunciado do exercício. Segundo Duval (2003):

> Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (DUVAL, 2003, p. 30)

Ancorados em Duval (2003), constatamos, em nossa análise *a posteriori*, a relevância da coordenação de registros de representação de um mesmo objeto para a compreensão em matemática. A conversão desses registros favorece a interpretação e compreensão dos objetos matemáticos.

Análise da Questão 3 da parte A_1

Análise *a priori*

> *Resolva os Sistemas Lineares, utilizando o método de Adição:*
>
> a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = -4 \\ 3x + 7y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$

O objetivo desta questão foi o de investigar se os alunos faziam o tratamento algébrico ao usarem o método de adição.

Propusemos a resolução de quatro sistemas lineares, propiciando levar os alunos a fazerem diferentes tratamentos para conseguirem que os coeficientes de *x* ou de *y* ficassem simétricos antes da aplicação do referido método. Desta forma, levamos os alunos a retomarem a ideia de que qualquer equação poderia ser transformada em outra equivalente ao:

- adicionarem ou subtrairem um mesmo número ou expressão aos dois membros da igualdade;
- multiplicarem ou dividirem os termos de ambos os lados da igualdade por um mesmo número ou expressão, desde que diferente de zero.

Para isso, seria necessário que os alunos:

- realizassem tratamentos numéricos e algébricos no conjunto R;
- distinguissem a parte numérica (coeficientes) e a parte literal (variável) de um monômio, reconhecendo termos semelhantes;
- conhecessem o oposto (simétrico) de um número;

- reconhecessem uma equação impossível como uma equação redutível por operações elementares à forma $0 \cdot x = b$, em que *b* é um número real não nulo;
- reconhecessem que uma equação redutível por operações elementares à forma $0 \cdot x = 0$ é uma identidade.

Optamos por mostrar os diferentes tratamentos que seriam utilizados na preparação dos sistemas lineares propostos:

No item a, propusemos um sistema linear em que o coeficiente de uma das incógnitas, na equação ①, seria oposto (simétrico) do outro coeficiente da mesma incógnita na equação ②, pois assim os alunos poderiam somar as equações de forma a eliminar uma incógnita.

Acreditamos que os alunos, ao conhecerem o valor da incógnita *x*, substitua-o em qualquer uma das equações do sistema linear a fim de encontrarem o valor de *y*. Os alunos poderiam escrever o conjunto solução: S = {(x, y)}

No item b, esperávamos que os alunos multiplicassem uma das equações por (-1), adicionando-as e encontrando como solução o conjunto vazio S = Ø ou S = { }.

Desta forma, os alunos poderiam perceber que os coeficientes das incógnitas de ambas equações seriam os mesmos e que, ao multiplicarem uma das equações pelo oposto do número, teriam os coeficientes opostos (simétricos) da outra equação e eliminariam os dois coeficientes *x* e *y*.

Esperávamos que os alunos reconhecessem uma equação da forma 0x + 0y = *b* em que *b* é um número real não nulo como uma situação impossível. Não existem valores de x e y que satisfaçam a igualdade. E, assim, esperávamos que eles concluíssem que o conjunto solução seriam S = Ø ou S = { }.

No item c, optamos por um sistema em que os alunos necessitassem transformar um dos coeficientes em uma das equações a fim de eliminarem uma das incógnitas ao adicionarem as duas equações.

Os alunos poderiam perceber a necessidade de recorrerem ao princípio multiplicativo antes de aplicarem o aditivo a fim de eliminarem uma das incógnitas, tornando-as uma o oposto da outra. Neste caso, optamos pela incógnita *x*. Os alunos deveriam preparar o sistema de modo a multiplicarem a equação ① por (-2) para encontrarem o oposto do coeficiente de *x* na equação ②.

Os alunos poderiam reconhecer que uma equação redutível por tratamentos numéricos à forma 0.y = 0 seria uma identidade. Assim, existem infinitas soluções que satisfaçam simultaneamente às duas equações.

Quanto ao conjunto solução, devido à impossibilidade de escrever os infinitos pontos comuns às retas, os alunos poderiam escrever no registro algébrico a forma genérica destes pontos. Esperávamos que os alunos optassem por qualquer uma das equações para escreverem o conjunto solução da forma x = f(y) ou y = f(x).

No item d, objetivamos que os alunos eliminassem uma das incógnitas, tornando-as uma o oposto da outra e, em seguida, adicionassem as equações com o intuito de encontrarem como conjunto solução do sistema linear os valores x = 0 e y = 2 ou escrevessem o conjunto solução S = {(0,2)}.

Análise *a posteriori*

Item a

Observamos que seis dos sete alunos fizeram o tratamento algébrico satisfatoriamente e apenas um errou por não ter eliminado a incógnita *y*. Era necessário apenas adicionar as equações. Entretanto, o aluno V optou por eliminar a incógnita *x* e, para isso, multiplicou a equação ① por (2) e a equação ② por (-3) e, assim, não multiplicou o termo independente da equação.

Acreditamos que isso ocorreu devido ao fato de o aluno V não ter percebido que a incógnita *y* na equação ① é o oposto (simétrico) da incógnita *y* na equação ② e que poderia eliminá-las pela adição, como havíamos previsto em nossa análise *a priori*, segundo consta na Figura 26, a seguir:

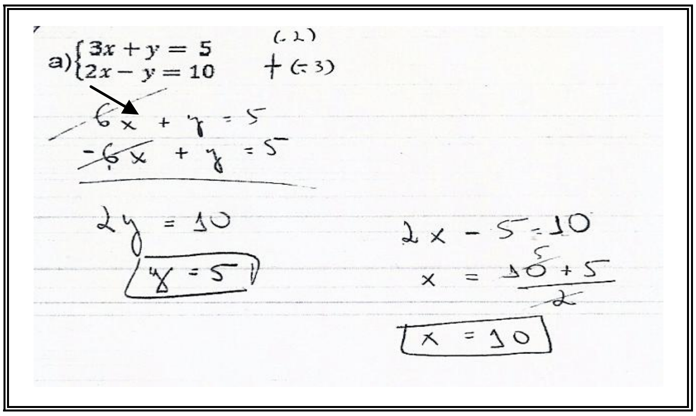


Figura 26: Protocolo do aluno V: optou pela eliminação da incógnita *x*

Item b

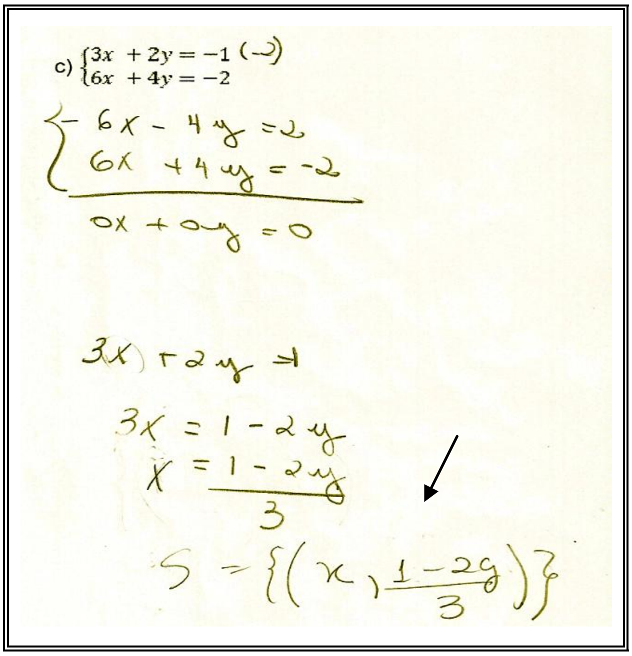
Os alunos realizaram o tratamento algébrico como havíamos previsto em nossa analise *a priori*, utilizaram o método de adição e registraram o conjunto solução de forma adequada.

Item c

Observamos que dos sete alunos sujeitos de nossa pesquisa, quatro realizaram corretamente o tratamento algébrico, enquanto que os outros três não realizaram o tratamento algébrico corretamente. Somente o aluno I apresentou o valor genérico para a incógnita *x*; entretanto, não soube escrever adequadamente o conjunto solução.

O protocolo nos leva a concluir que o aluno I compreendeu a necessidade de apresentar genericamente os infinitos pontos no conjunto solução; porém, não soube escrevê-lo.

O aluno encontrou $x = \frac{1-2y}{3}$, dessa forma o conjunto deveria ser escrito em função de *y,* ou seja, $S = \left\{\left(\frac{1-2y}{3}, y\right)\right\}$.



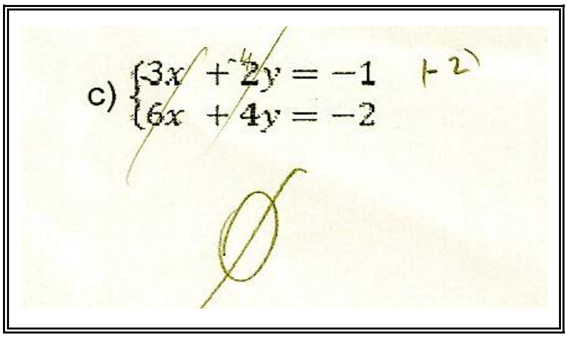
c) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \; (-2) \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -6x - 4y = 2 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$$
$$0x + 0y = 0$$

$$3x + 2y = 1$$
$$3x = 1 - 2y$$
$$x = \frac{1 - 2y}{3}$$
$$S = \left\{\left(x, \frac{1-2y}{3}\right)\right\}$$

Figura 27: Protocolo do aluno **I**: tentou escrever na forma genérica dos infinitos pontos

O aluno L não registrou em seu protocolo o modo como resolveu a questão. Acreditamos que o tratamento numérico tenha sido feito mentalmente.



c) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \quad (-2) \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$

$\varnothing$

Figura 28: Protocolo do aluno L: resolveu mentalmente e escreveu, de maneira incorreta, o conjunto solução do sistema linear

Procuramos o aluno L a fim de esclarecer o motivo de não ter feito o tratamento algébrico. Ele justificou-se da seguinte maneira:

I: “Para que fazer se são iguais e resultado dá tudo zero?”

Uma pequena pausa.

“Sistema impossível.”

O aluno L prossegue seu comentário sobre o tratamento algébrico:

L: “Não precisava resolver, pra que? Tudo zero, é impossível!”

B: “Que nada, tudo zero é indeterminado!”

L: “E as retas?”

B: “Dão em cima!”

L: “Como assim?”

B: “É a mesma, uma em cima da outra.”

Desta forma, constatamos que o aluno L havia realizado corretamente o tratamento algébrico, mas não havia relacionado o resultado encontrado com retas coincidentes.

Item d

Verificamos, neste item, que os alunos apresentaram dificuldade no tratamento numérico.

O aluno I optou por multiplicar a equação ① por (-5) e a equação ② por (-3). Ao fazer isso, deveria ter obtido (-15) em ambas as equações. Desta forma, não eliminaria a incógnita *y* de forma adequada. Apresentou dificuldade no tratamento numérico e algébrico da equação: 2.x = 0.

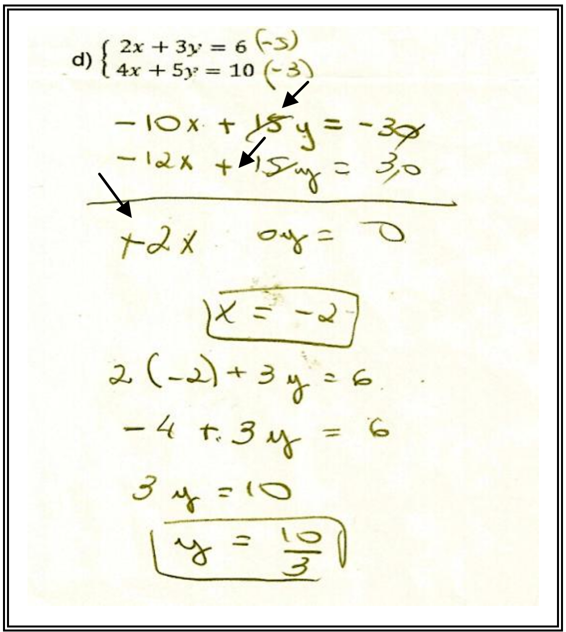


Figura 29: Protocolo do aluno I: tratamento algébrico

Constamos outro aluno, que também apresentou dificuldade no tratamento numérico e algébrico da equação $4 \cdot x = 0$ ao dar como resultado $x = -4$:

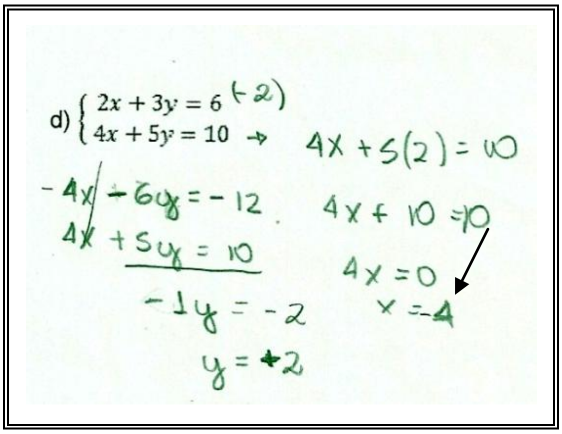


Figura 30: Protocolo do aluno J: tratamento algébrico

Verificamos outro equivoco no tratamento numérico e algébrico, em que o aluno V, ao multiplicar a equação ① por (-4), não o fez com o termo independente.

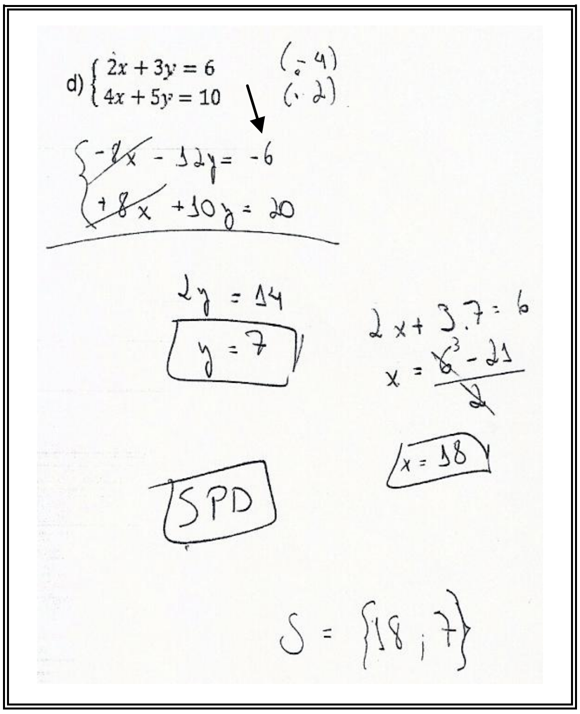


Figura 31: Protocolo do aluno V: tratamento algébrico

Verificamos que o aluno N adicionou (-6) no primeiro membro da equação 2x + 6 = 6 e (6) no segundo membro, como mostramos a seguir:

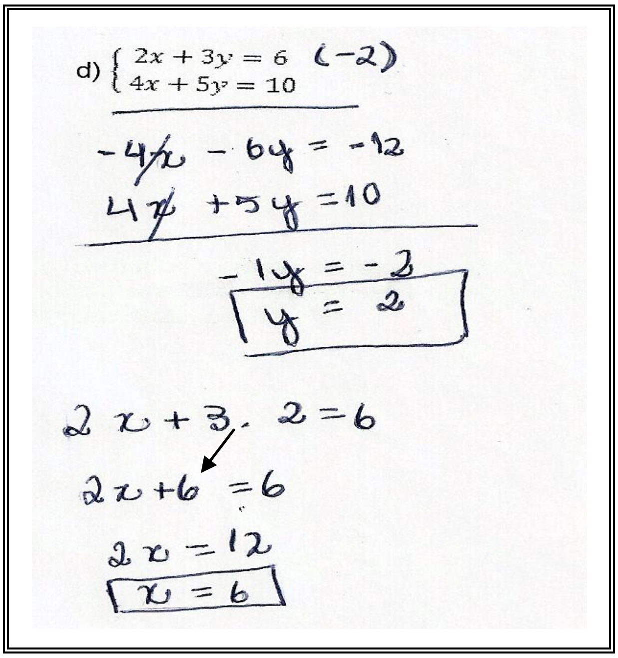


Figura 32: Protocolo do aluno N no registro algébrico

Os alunos não mostraram dificuldade ao realizarem a conversão do registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada. Observamos, também, a preferência do uso do método de adição para a realização do tratamento algébrico.

Concluímos, com esta atividade, que os alunos apresentaram o conjunto solução do sistema possível determinado (SPD) e do sistema impossível (SI). Por outro lado, isto não aconteceu com o sistema possível indeterminado (SPI).

Os alunos apresentaram dificuldade no tratamento numérico e algébrico ao aplicarem o princípio aditivo e multiplicativo, conforme consta a seguir:

- multiplicar o valor escolhido apenas pelo coeficiente de **x**

  $3x + y = 5$ (.2)

  $6x + y = 5$

- multiplicar só os coeficientes das incógnitas

  $3x + 2y = -1$ (-4)

  $-12x - 8y = -1$

- multiplicar número positivo por número negativo

  $-5 . 3y = +15y$

- princípio aditivo

  $2x + 6 = 6$

  $2x = 12$

- resolver a equação do tipo $a.x = 0$ em que $a \neq 0$.

  $2x = 0$

  $x = -2$

Verificamos a preferência dos alunos em atribuir o valor zero para *x* e ou *y*. Os alunos que optaram em atribuir às incógnitas valores pertencentes ao conjunto dos números racionais (Q) tiveram dificuldade de fazer a sua localização no plano cartesiano. Desta forma, não realizaram a conversão do registro de tabela para o registro gráfico; entretanto, recorreram ao registro algébrico.

PARTE A_2

A parte A_2 consta de um roteiro de instruções para a familiarização no uso do *software* Winplot 2D, que foi desenvolvido no laboratório de informática a fim de propiciar aos alunos a exploração das relações entre os coeficientes das equações bem como seus termos independentes e visualizar as posições relativas das retas no plano, classificando-as. Para isso, foram propostas duas questões.

Análises da questão 1 da parte A_2

Análise *a priori*

> a) *Digite a equação da reta: 4x + 3y = 5 no espaço azul.*
>
> *Escreva uma nova equação, conservando os coeficientes das incógnitas* ***x*** *e* ***y*** *da equação anterior e altere apenas o valor do termo independente.* Repita os passos e digite mais uma equação com coeficientes proporcionais aos da equação 4x + 3y = 5 e conserve o termo independente. *Escreva abaixo o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de* ***x*** *e* ***y*** *com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas lineares.*

b) *Reinicie o programa, digite a equação da reta x – 2y = 3, siga os os passos anteriores e observe o seu gráfico. Multiplique a equação x – 2y = 3 por 2, e escreva no quadro curva implícita a nova equação obtida. Repita, multiplicando por 3 a equação x – 2y = 3. Escreva abaixo o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de* ***x*** *e* ***y*** *com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas lineares.*

c) *Ainda no software Winplot, digite a equação da reta 3x + 5y = 4. Observe o gráfico. Em seguida, digite outra equação, alterando, apenas, o coeficiente da incógnita* ***x****. Verifique o gráfico. Digite outra equação, mudando, desta vez, o coeficiente da incógnita* ***y****. Escreva abaixo o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de* ***x*** *e* ***y*** *com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas.*

Pretendíamos, com a questão 1, que os alunos relacionassem os coeficientes das respectivas incógnitas das equações das retas que formam o sistema linear com a posição relativa das retas visualizadas no registro gráfico.

Optamos por aproveitar a descrição dos passos na utilização do *software* Winplot e propusemos três exemplos de Sistemas Lineares 2x2, cujos gráficos são representados na linguagem 2D. Os sistemas lineares propostos dariam origem a gráficos de retas paralelas, coincidentes e concorrentes.

Após a construção do gráfico de cada sistema, com ajuda do *software* Winplot, propusemos aos alunos usarem o registro da língua natural a fim de registrarem suas observações.

Os alunos poderiam utilizar o registro da língua natural para, a partir da visualização do gráfico, observarem a posição relativa das retas obtidas no plano cartesiano – como paralelas, concorrentes e coincidentes – por meio dos coeficientes das incógnitas *x* e *y* e do termo independente, associando as retas obtidas às equações que lhes deram origem e classificar o sistema.

Para isso, seria necessário que os alunos:

- lessem e interpretassem o registro da língua natural;
- conhecessem o plano cartesiano, localizassem pontos no plano e identificassem abcissas (x) e ordenadas (y);

- conceituassem coeficientes numéricos, termos independentes, bem como as posições relativas das retas;
- distinguissem sistemas impossíveis, possíveis determinados e indeterminados, associando-os aos seus respectivos conjuntos soluções e posições relativas das retas.

Item a

Esperávamos que os alunos digitassem a equação da reta $4x + 3y = 5$ e, em seguida, escrevessem duas equações: uma, conservando os coeficientes de *x* e *y*; outra, com coeficientes de *x* e *y* proporcionais aos coeficientes da primeira equação.

Os alunos poderiam encontrar retas paralelas e classificar o sistema linear como impossível (SI).

Item b

Após os alunos terem digitado a equação $x - 2y = 3$, esperávamos que visualizassem a representação gráfica da equação cujo gráfico é uma reta, sem apagá-lo, digitassem a equação anterior multiplicada por (2) e obtivessem a equação $2x - 4y = 6$. Em seguida, multiplicassem a primeira equação por (3) e encontrassem a equação $3x - 6y = 9$. Desta forma, os alunos deveriam concluir que as equações são equivalentes e, consequentemente, as três retas, no registro gráfico, são coincidentes.

Os alunos poderiam perceber a impossibilidade de se determinar os infinitos pontos comuns às retas e, assim, classificar o sistema linear como possível e indeterminado (SPI).

Item c

Esperávamos que os alunos digitassem a expressão algébrica: $3x + 5y = 4$, observassem o gráfico, sem apagá-lo, digitassem outra equação, alterando apenas o coeficiente da incógnita *x*, e prossiguissem da mesma forma.

Em seguida, digitassem uma terceira equação em que alterassem, desta vez, o coeficiente da incógnita *y***.**

Acreditávamos que os alunos, ao encontrarem retas concorrentes, classificassem o sistema linear como possível e determinado (SPD).

Análise *a posteriori*

Verificamos que os alunos tiveram dificuldades de leitura e compreensão no texto da Questão 1. Na parte relacionada ao tutorial, tudo correu bem. Porém, quando na atividade era proposto repetição dos passos e criação de novas equações, os alunos não conseguiram expressar-se de maneira adequada, encontrando dificuldade para escreverem no registro da língua natural os resultados obtidos.

Os alunos, logo no início da leitura, demostraram dificuldade para escrever as equações em que os coeficientes deveriam ser conservados e o termo independe alterado. A seguir, um dos diálogos ilustra tal dificuldade:

B: “O que é termo independente”?
L: “Será que é x e y”?
B: “Não acho que não, o termo independente são os números”.

Os alunos solicitaram a presença da professora e pediram a definição do termo independente.

P: “Qual é o significado da palavra independente”?
L: “Sozinho”.
B: “Ah! é o que está sem x e sem y”.

A pesquisadora, pelas perguntas, percebeu a dificuldade dos alunos em usarem as nomenclaturas corretas e observou que, ao falarem do sistema possível indeterminado, apenas usavam SPI.

J: “Professora deu em cima”.

F: “É sistema coincidente”.

P: “Cuidado com a nomenclatura”.

J: “As retas são coincidentes então é SPI”.

Baseados nos protocolos, verificamos que os alunos não entenderam o enunciado da questão, que propunha relacionar os coeficientes de *x* e *y* com a posição relativa das retas encontradas e com a classificação dos sistemas lineares.

Alunos	Respostas da Questão 1 item a
B	Sistema impossivel, onde ambas as equações, as retas permanecerem paralelas
J	Paralelas
L	SLI, as retas não se cruzão
R	Sistema Impossivel - retas paralelas
V	SI: são retas paralelas (que não se cruzam).

Figura 33: Protocolos dos alunos que responderam incorretamente a Questão 1 item a.

O protocolo a seguir mostrou que o aluno I entendeu parcialmente a relação entre os coeficientes das duas equações. O aluno não se ateve à leitura da atividade e não percebeu que os coeficientes das incógnitas x e y poderiam, também, ser proporcionais.

Concluimos que as retas são paralelas quando os coeficientes (x e y) são os mesmos

Figura 34: Protocolo do aluno **I**, que escreveu parcialmente sua conclusão.

Análises da questão 2 da parte A_2

Análise *a priori*

Use o software Winplot, digite duas equações que representem as retas abaixo e, após construí-las, escreva as equações obtidas.

a) duas retas paralelas;..
b) retas concorrentes;..
c) *duas retas coincidentes;...*

Pretendíamos, com esta questão, que os alunos relacionassem os coeficientes das equações com a posição relativa das retas que as caracterizam.

No item a, os alunos deveriam escrever duas equações, conservar os coeficientes das incógnitas *x* e y e modificar apenas os termos independentes.

No item b, os alunos deveriam escrever duas equações de retas em que um dos coeficientes da incógnita *x* ou *y* fosse distinto.

No item c, os alunos deveriam escrever duas equações de retas equivalentes.

Análise *a posteriori*

Constatamos, nesta atividade, que o aluno R deve ter cometido um equívoco ao escrever as equações relativas aos itens b e c. Este fato foi constatado ao ouvirmos a gravação da conversa da dupla.

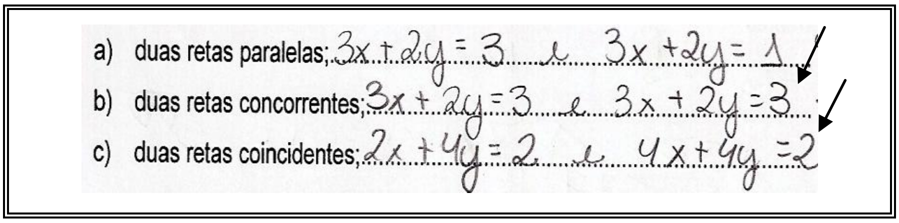

a) duas retas paralelas; $3x + 2y = 3$ e $3x + 2y = 1$
b) duas retas concorrentes; $3x + 2y = 3$ e $3x + 2y = 3$
c) duas retas coincidentes; $2x + 4y = 2$ e $4x + 4y = 2$

Figura 35: Protocolo do aluno R: cometeu equívoco na escrita dos itens b e c.

R: “É fácil... quando tudo for igual, as retas são coincidentes e trocando só um número do x elas são concorrentes”.

I: “Então põe na b, 2x + 4y = 2 e 4x + 4y = 2 e na c, as duas iguais: 3x + 2y = 3”.

Desta forma, verificamos que os alunos trocaram as respostas no momento de escrever. Entendemos, pelas análises dos protocolos, que a dificuldade dos alunos estava relacionada à leitura dos enunciados de nossa atividade.

Mostramos, a seguir, protocolos com a representação gráfica dos sistemas lineares, com o auxílio do *software* Winplot, realizadas pelos alunos quando desenvolveram a Questão 2 no laboratório de informática.

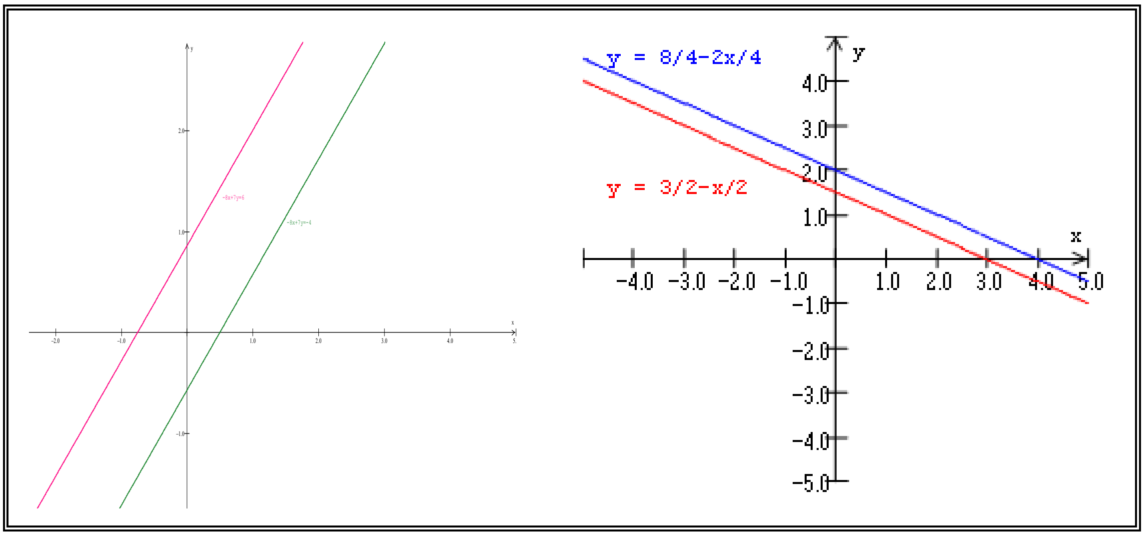


Figura 36: Protocolos de R e I: com a representação gráfica da Questão 2a.

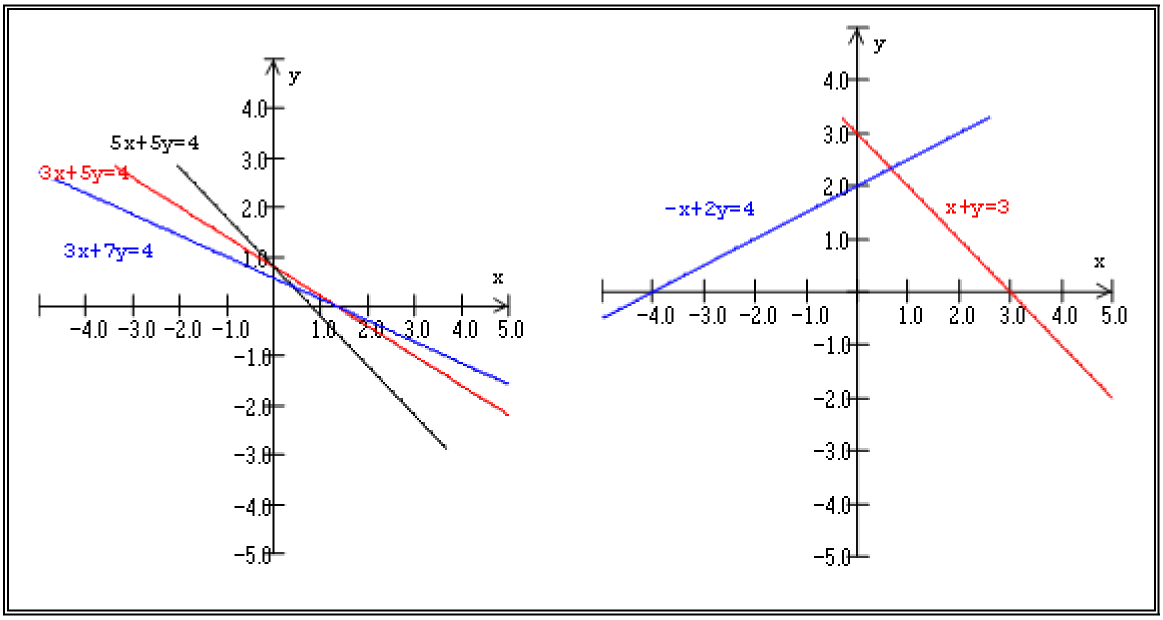


Figura 37: Protocolos de B e V: com a representação gráfica da Questão 2b.

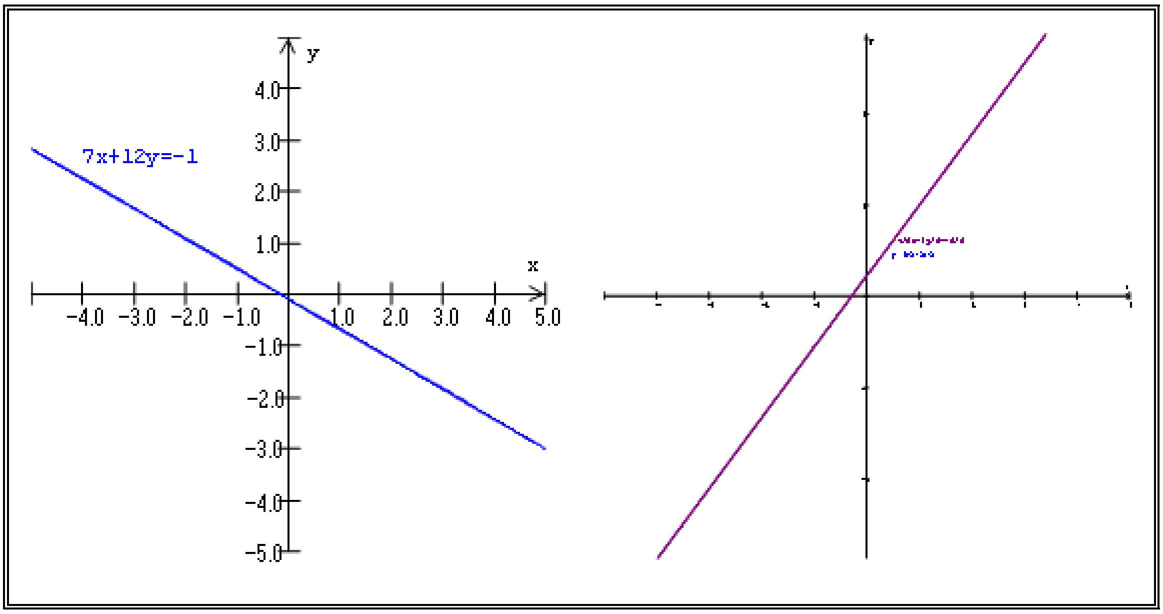


Figura 38: Protocolos de J e N: com a representação gráfica da Questão 2c.

Um aluno, ao resolver a questão, registrou suas conclusões em seu caderno da seguinte forma:

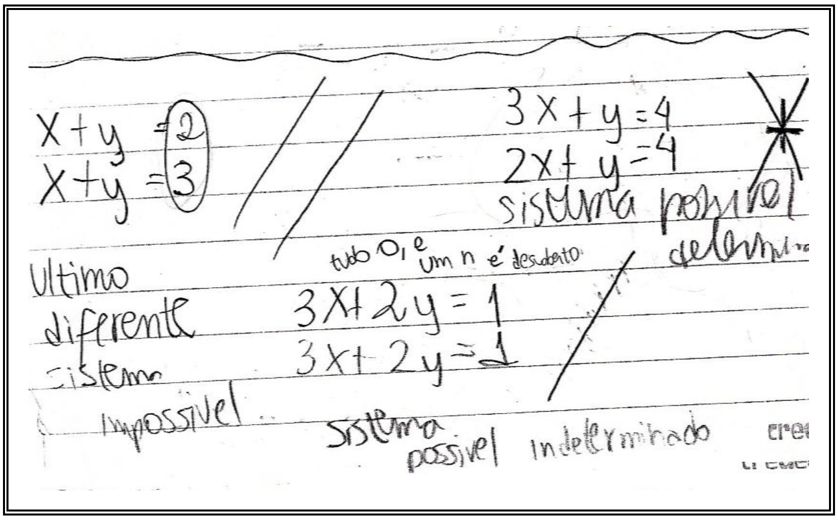


Figura 39: Protocolo do aluno B: anotações sobre suas conclusões.

Constatamos, no protocolo, que o aluno B entendeu que um sistema linear é impossível quando as equações apresentam coeficientes iguais e somente “o último” (termo independente) é diferente, e que esse sistema linear representa um gráfico cujas retas são paralelas.

Um sistema é possível determinado quando um dos coeficientes for diferente e esse sistema linear representa um gráfico cujas retas são concorrentes.

Quanto ao sistema possível indeterminado, o aluno B registrou duas equações de retas com os mesmos coeficientes e termos independentes iguais e registrou uma reta destacando pontos, assinalando que compreendeu a solução do sistema cujo gráfico são retas coincidentes.

Na primeira atividade proposta para ser desenvolvida com o uso do *software* Winplot, alguns alunos apresentaram dificuldade na leitura da proposta feita no registro da língua natural, não compreendendo o significado de “relacionar os coeficientes das incógnitas *x* e *y* com as posições relativas das retas encontradas”. Além dessa dificuldade, alguns alunos não conseguiram escrever a resposta no registro algébrico do sistema linear. Por outro lado, os alunos que compreenderam a proposta realizaram as atividades corretamente.

Já na segunda atividade, ao analisarmos os protocolos dos alunos observamos que não tiveram dificuldade na interpretação da proposta, realizando os gráficos a contento.

4.4.2 PARTE B: Sistema Linear 3x3

Para desenvolvermos a parte B, foram disponibilizadas três aulas para os alunos realizarem a parte B_1, em classe, e duas aulas para realizarem a parte B_2, no laboratório de informática, sendo cada aula com cinquenta minutos de duração.

A fim de elaborarmos a parte B, além de nos basearmos nos estudos preliminares, consideramos relevante buscarmos nos livros didáticos como o estudo do sistema linear 3x3 é abordado nas séries do Ensino Médio, como mencionamos, anteriormente, no Capítulo 3.

PARTE B_1

Análise da questão 1 da parte B_1

Análise *a priori*

A parte B_1 da sequência didática é composta por duas questões. Disponibilizamos uma aula para a realização da primeira questão e duas para a realização da segunda.

Para uma partida de futebol, foram colocados à venda três tipos de ingresso:

- *para o setor verde, ao preço de R$ 12,00*
- *para o setor azul, ao preço de R$ 18,00*
- *para o setor branco, ao preço de R$ 25,00.*

Sabendo que 38.000 torcedores pagaram R$ 620.000,00 para assistir a essa partida, sendo que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos vendidos para o setor azul, quantos torcedores pagaram ingresso para o setor verde?

Iniciamos a atividade da parte B_1 com uma situação-problema proposta no registro da língua natural. Esperávamos que os alunos, ao equacionarem, realizassem a transformação das representações por meio da conversão do registro da língua natural para o registro algébrico a fim de descobrirem o número de torcedores pagantes de cada setor do estádio. Desta forma, contemplamos o registro da língua natural como registro de partida e o registro algébrico como registro de chegada.

No que diz respeito ao tratamento algébrico, objetivávamos que os alunos optassem por um dos métodos de seu conhecimento e usassem o registro da língua natural para escreverem a resposta. Para isso, seria necessário que os alunos desenvolvessem estratégias de resoluções aritméticas e algébricas, como:

- usassem letras como incógnitas específicas;
- reconhecessem uma expressão algébrica;
- conhecessem as operações elementares no conjunto dos números reais;
- resolvessem um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis pelo método de adição ou de substituição;
- elaborassem uma resposta que satisfizesse a pergunta proposta pelo problema.

A fim de resolverem o problema proposto, os alunos poderiam atribuir letras distintas aos números dos ingressos para que pudessem diferenciar cada um dos setores. Visando mostrar uma possível resolução, escolhemos a letra V para representar o número dos ingressos do setor verde; a letra A, para os do setor amarelo; e a letra B, para os do setor branco por acreditarmos que os alunos associariam a letra escolhida para a incógnita com a letra que iniciaria o seu nome. Desta forma, esperávamos que os alunos procedessem da seguinte forma, utilizando, para isso, o método de adição:

$$\begin{cases} 12V + 18A + 25B = 620\,000 \quad 1 \\ V + A + B = 38\,000 \quad 2 \\ V - 2A = 0 \quad 3 \end{cases}$$

Caso os alunos optassem por resolver o sistema linear pelo método de adição, poderiam escolher duas equações quaisquer e eliminar uma das incógnitas.

Equações ① e ②:

$$\begin{array}{r} \cancel{12V} + 18A + 25B = 620\,000 \\ -\cancel{12V} - 12A - 12B = 456\,000 \\ \hline 6A + 13B = 164\,000 \; \text{④} \end{array} \; +$$

Em seguida, esperávamos que os alunos formassem um sistema linear com as equações ② e ③ e eliminassem a mesma incógnita V:

$$\begin{cases} V + A + B = 38\,000 \\ V - 2A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{V} + A + B = 38\,000 \\ -\cancel{V} + 2A = 0 \\ \hline 3A + B = 38\,000 \; \text{⑤} \end{array} \; +$$

Os alunos deveriam formar um sistema linear 2x2 com as equações ④ e ⑤. Aplicando novamente o método de adição, teríamos:

$$\begin{cases} 6A + 13B = 164\,000 \; \text{①} \\ 3A + B = 38\,000 \; \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{6A} + 13B = 164\,000 \\ -\cancel{6A} - 2B = -76\,000 \\ \hline 11B = 88\,000 \\ B = 8\,000 \end{array} \; +$$

Os alunos poderiam substituir o valor de B = 8 000 na equação ⑤ para encontrarem o valor da incógnita A:

$$\begin{aligned} 3A + B &= 38\,000 \quad ⑤ \\ 3A + 8\,000 &= 38\,000 \\ A &= 10\,000 \end{aligned}$$

Para descobrirem o valor de V, os alunos poderiam substituir o valor de A = 10 000 na equação ③:

$$\begin{aligned} V - 2A &= 0 \quad ③ \\ V &= 2A \\ V &= 2 \cdot 10\,000 \\ V &= 20\,000 \end{aligned}$$

Os alunos deveriam responder a pergunta da Questão 1 da seguinte forma: “para o setor verde, haverá 20.000 pagantes”.

Análise *a posteriori* da Questão 1

Constatamos que cinco dos sete alunos realizaram a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico. O protocolo do aluno R (Figura 40), mostra como ele apresentou dificuldade no tratamento algébrico:

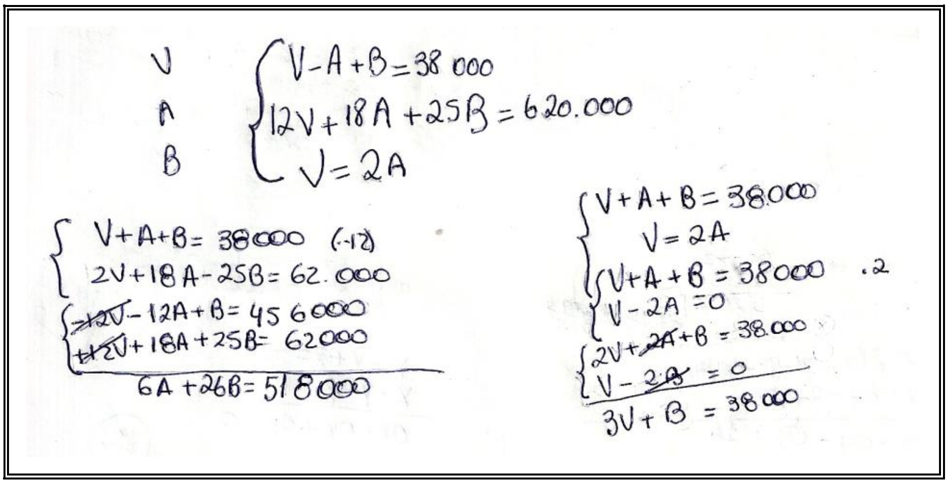


Figura 40: Protocolo do aluno R: realizou a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico e teve dificuldade no tratamento algébrico.

Dois alunos não realizaram a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico. Constatamos que foram os mesmos dois sujeitos de pesquisa que também não realizaram essa conversão quando havia sido proposta uma situação-problema abordada no sistema linear 2x2.

Duval (2003) afirma que quando um dos registros é um registro plurifuncional (língua natural) há dificuldade de compreensão dos mais simples enunciados de problemas de aplicação da álgebra em que seria necessário apenas fazer a tradução dos dados do enunciado.

> Na realidade, a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em um outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos. (DUVAL, 2003, p. 18)

Entendemos, assim, que esses dois alunos apresentaram dificuldades na tradução dos dados do enunciado. Segundo Almouloud (2003):

> A dificuldade dos alunos para interpretar corretamente um problema e sua incapacidade em produzir a explicação de sua solução com um mínimo de vocabulário mostram sua limitação para entender os textos mais simples. As informações contidas no enunciado obedecem regras matemáticas precisas. Ao compreender seu senso global, o aluno estará capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações entre elas. Uma má leitura pode conduzir a não respeitar as relações das instruções e consequentemente a cometer erros. (ALMOULOUD 2003, p. 130)

Verificamos que o aluno J optou fazer o tratamento algébrico pelo método de substituição, enquanto que a maioria usou o método de adição.

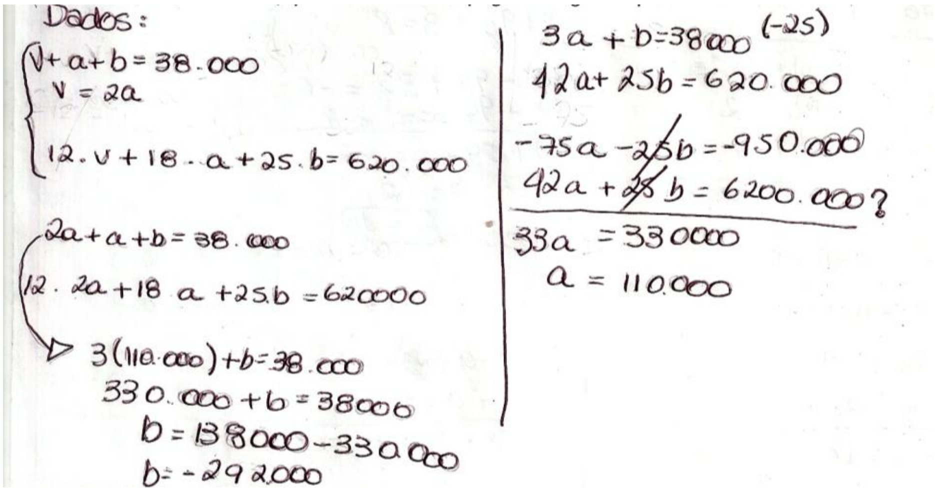


Figura 41: Protocolo do aluno J: realizou tratamento algébrico no método de substituição.

Verificamos que os alunos apresentaram dificuldade no tratamento algébrico ao trabalharem com três equações, não conseguindo terminar a resolução do sistema e consequentemente não escrevendo uma resposta satisfatória ao problema.

Análise da questão 2 da parte B_1

Análise *a priori*

Para a realização desta questão foram disponibilizadas duas aulas, sendo cada uma com duração de cinquenta minutos.

Usar o método da Adição para a resolução dos seguintes Sistemas Lineares 3 x 3.

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 32 \\ 9z + 3y + 6z = 16 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 20 \\ 6x + 9y - 3x = 40 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 \\ -6x - 6y + 6z = -6 \\ -8x - 8y + 8z = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 4 \\ 6x + 9y + z = 8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + y + 4z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = -10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + y - z = 20 \\ x + 3y + z = 10 \\ -x + 5y + 3z = 30 \end{cases}$

Objetivávamos, com esta atividade, que os alunos fizessem o tratamento algébrico dos sistemas lineares no método de adição e analisassem a possibilidade da existência ou não de uma solução. Para isso, seria necessário que os alunos:

- desenvolvessem tratamentos numéricos e algébricos no conjunto dos números reais e de cálculos algébricos;
- reconhecessem termos ou monômios;
- distinguissem a parte numérica (coeficientes) e a parte literal (variável) de um monômio;
- conhecessem o oposto (simétrico) de um número;
- reconhecessem uma equação impossível como uma equação redutível por operações elementares à forma $0 \cdot x = b$, em que b é real não nulo;
- reconhecessem que uma equação redutível por operações elementares à forma $0 \cdot x = 0$ é uma identidade;

- estabelecessem o conjunto solução do sistema linear 3x3 – Se o sistema não apresenta solução ($0x + 0y + 0z = n$, $n \neq 0$), é classificado de sistema impossível e seu conjunto solução é $S = \varnothing$. Caso o sistema apresente infinitas soluções ($0x + 0y + 0z = 0$), é classificado de sistema possível indeterminado. O conjunto solução poderá ser escrito $x = f(y, z)$, $y = f(x, z)$ e $z = f(x, y)$. Caso o sistema apresente uma única solução, é classificado de sistema possível e o conjunto solução poderá ser escrito $S = \{(x, y, z)\}$.
- associassem as soluções dos sistemas lineares 3x3 às posições entre planos no espaço – as equações representam planos que têm um único ponto em comum, Sistema Possível Determinado (SPD); as equações representam planos que têm infinitos pontos comuns, Sistema Possível Indeterminado (SPI). Estes pontos podem formar uma reta se as equações representarem planos secantes; ou um plano, caso as equações representem planos coincidentes. E Sistema Impossível (SI): as equações representam planos que não têm pontos comuns.

Propusemos a Questão 2 no registro algébrico, contemplando como transformação de representação o tratamento no método de adição. Para sintetizarmos nossas análises optamos por agrupar os itens da atividade da seguinte forma:

Grupo I: Sistema possível determinado (SPD): item a
Grupo II: Sistema impossível (SI): itens b, d, e, h
Grupo III: Sistema possível indeterminado (SPI): itens c, f, g.

Grupo I: Sistema possível determinado (SPD): item a

Análise *a priori*

Objetivávamos que os alunos realizassem o tratamento algébrico no método de adição, encontrassem como solução $x = 0$, $y = 1$ e $z = 2$ e apresentassem como única solução S = {(0, 1, 2)}. Para isso, poderiam proceder da seguinte forma:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x + y + z = 3 & \textcircled{1} \\ x + y - z = -1 & \textcircled{2} \\ -3x + 6y - 2z = 2 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Os alunos poderiam escolher duas equações quaisquer e eliminar uma das incógnitas. No caso, optamos em adicionar algebricamente a equação ① e ② de modo que a primeira variável, no caso *x*, se anulasse. Para isso, seria necessário inicialmente multiplicar a segunda equação por (- 2):

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & \textcircled{1} \\ x + y - z = -1 \cdot (-2) & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} 2\cancel{x} + y + z = 3 & \textcircled{1} \\ -2\cancel{x} - 2y + 2z = 2 & \textcircled{2} \\ \hline 0x - y + 3z = 5 & \textcircled{4} \end{array} \quad +$$

Em seguida, o aluno deveria formar um sistema com a equação ① e ③ ou ② e ③. No caso, optamos por trabalhar com as equações ① e ③.

Para eliminar a variável *x*, esperávamos que os alunos preparassem o sistema de modo a multiplicar a equação ① por (3) e multiplicar a equação ③ por (2).

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \cdot (3) & \textcircled{1} \\ -3x - 2y + 2z = 2 \cdot (2) & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6\cancel{x} + 3y + 3z = 9 \\ -\cancel{6}x - 4y + 4z = 4 \\ \hline 0x - y + 7z = 13 \quad \textcircled{5} \end{array} \quad +$$

Com cada uma das adições, os alunos deveriam encontrar duas equações com duas incógnitas, equações ④ e ⑤ e, ao formarem um sistema 2x2, deveriam aplicar, novamente, o método de adição a fim de eliminarem uma das incógnitas e encontrarem o valor da outra.

Assim formado o sistema, os alunos deveriam multiplicar a equação ④ ou ⑤ por (-1) para eliminarem as variáveis *y* ao adicioná-las.

$$\begin{cases} -y+3z=5\cdot(-1) & \text{④} \\ -y+7z=15 & \text{⑤} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{y}-3z=-5 \\ \cancel{-y}+7z=13 \\ \hline 0y+4z=8 \\ z=2 \end{array} \quad +$$

Os alunos poderiam substituir o valor de *z* na equação ④ ou ⑤:

Caso substituissem na equação ④:

$$\begin{array}{r} -y+3z=5 \\ -y+3\cdot 2=5 \\ y=1 \end{array}$$

Caso substituissem na equação ⑤:

$$\begin{array}{r} -y+7z=13 \\ -y+7\cdot 2=13 \\ y=1 \end{array}$$

Tendo o valor de *y* e *z*, os alunos deveriam substituir na equação ①:

Equação ①:

$$\begin{array}{r} 2x+y+z=3 \\ 2x+1+2=3 \\ x=0 \end{array}$$

Esperávamos que os alunos, ao encontrarem os valores de *x, y* e *z*, concluíssem que o sistema linear proposto tinha o conjunto solução: $S=\{(0, 1, 2)\}$.

Análise *a posteriori*

Grupo I: Sistema possível determinado (SPD): item a

Mediante os protocolos dos sujeitos de pesquisa, constatamos que os alunos não apresentaram dificuldade no processo do método de adição. Entretanto, verificamos erros no tratamento numérico e algébrico.

Conforme nossas análises, entendemos que os alunos souberam relacionar o registro algébrico com a solução do sistema; porém, não se preocuparam com a escrita formal S = {(0, 1, 2)} e optaram apenas por destacar os valores das incógnitas.

No protocolo a seguir, constatamos que o aluno N atribuiu um valor aleatório para a incógnita *y*, mas realizou de forma incorreta o sistema linear, apesar de classificá-lo corretamente, como mostramos seguir:

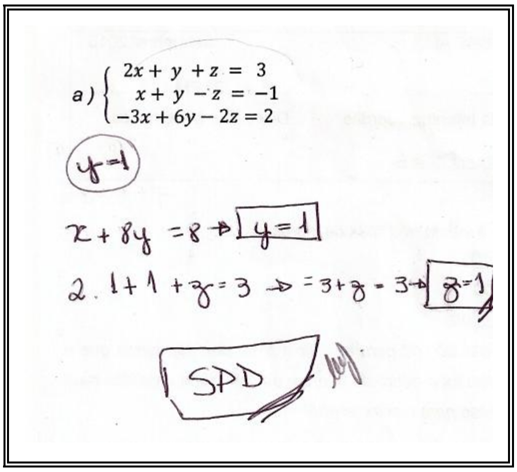


Figura 42: Protocolo do aluno N: atribuiu valor aleatório a *y.*

O protocolo do aluno I mostra o tratamento algébrico e sua classificação de forma correta, porém apenas destacou as incógnitas, não usando a escrita algébrica: V = {(1, 2)} para escrever o conjunto solução do sistema linear.

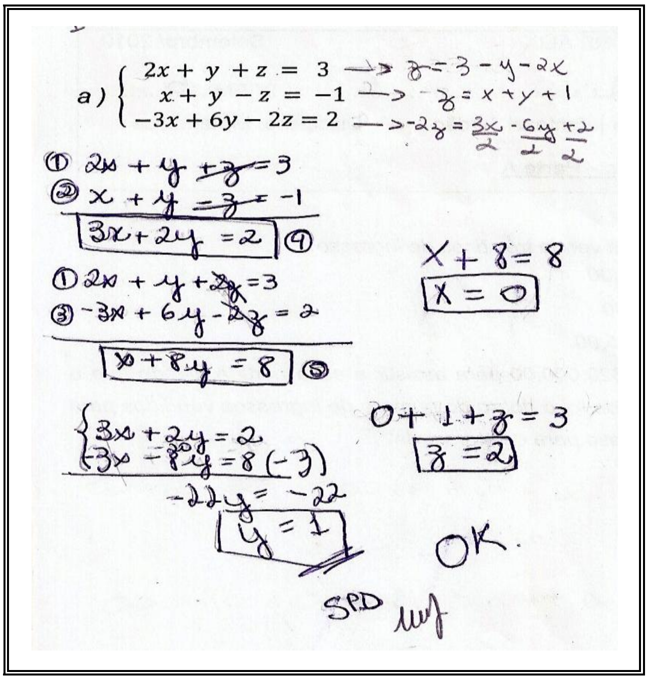


Figura 43: Protocolo do aluno I: destacou as respostas e classificou o sistema linear.

Verificamos que os alunos realizaram o tratamento algébrico, encontraram os valores das incógnitas e classificaram o sistema como havíamos previsto na análise *a priori.*

Grupo II: Sistema impossível (SI): itens b, d, e, h

Análise *a priori* dos itens b, d, e, h

Objetivávamos que os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico no método de adição, encontrassem a equação do tipo: 0x + 0y + 0z = a, a ≠ 0 e concluíssem que se tratava de um sistema impossível, cujo conjunto solução seria S = Ø.

Optamos por mostrar apenas a resolução do sistema linear do item b por entendermos que o tratamento algébrico proposto nos outros itens são semelhantes.

b) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 & \textcircled{1} \\ 4x+6y-2z=20 & \textcircled{2} \\ 6x+9y-3z=40 & \textcircled{3} \end{cases}$

Os alunos poderiam escolher duas equações quaisquer e eliminar uma das incógnitas. No caso, optamos em adicionar algebricamente a equação ① e ② de modo que a primeira variável, no caso *x,* se anulasse.

Para isso seria necessário, inicialmente, multiplicar a primeira equação por -2:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=2\cdot(-2) & \textcircled{1} \\ 4x+6y-2z=20 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x-6y+2z=-4 & \textcircled{1} \\ 4x+6y-2z=20 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-4x}-\cancel{6y}+\cancel{2z}=-4 \\ \cancel{4x}+\cancel{6y}-\cancel{2z}=20 \\ \hline 0x+0y+0z=16 \end{array} + \quad \textcircled{4}$$

Em seguida, os alunos poderiam formar um sistema com a equação ① e ③ ou ② e ③. No caso, optamos trabalhar com as equações ① e ③.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 & \textcircled{1} \\ 6x+9y-3z=40 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Para eliminar a variável *x*, esperávamos que os alunos preparassem o sistema de modo a multiplicar a equação ① por (-3):

$$\begin{cases} 2x+3y-z=2\cdot(-3) & \textcircled{1} \\ 6x+9y-3z=40 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x-9x+3z=-6 \\ 6x+9y-3z=40 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -6x-9y+3z=-6 \\ 6x+9y-3z=40 \\ \hline 0x+0y+0z=34 \end{array} + \quad \textcircled{5}$$

Ao obter duas equações ④ e ⑤, os alunos deveriam formar um sistema e aplicar novamente o método da adição.

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 16 \cdot (-1) & ④ \\ 0x + 0y + 0z = 34 & ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -\cancel{0x} - \cancel{0y} - \cancel{0z} = -16 \\ \cancel{0x} + \cancel{0y} + \cancel{0z} = 34 \\ \hline 0x + 0y + 0z = 18 \end{array}$$

O aluno deve perceber que esta não existem valores para x, y e z e escrever o conjunto solução como: S = Ø ou S = { }

Análise *a posteriori* do item b

Observamos nos protocolos analisados que os alunos não mostraram dificuldade no tratamento algébrico.

Em nossos registros de áudio gravação, verificamos a observação do aluno L.

L: “Professora, mas no 2b é bico, multiplica por 2 some a primeira e se multiplicar por 3 some a segunda”.

P: “E como você concluiria a solução desse sistema linear”?

L: “Ah! tudo zero igual a um número o sistema é impossível”.

Diante deste fato, entendemos que o aluno L pode ter compreendido a proporcionalidade dos coeficientes das equações e associou que, ao encontrar a equação do tipo 0x + 0y + 0z = c, c ≠ 0, trata-se de um sistema impossível

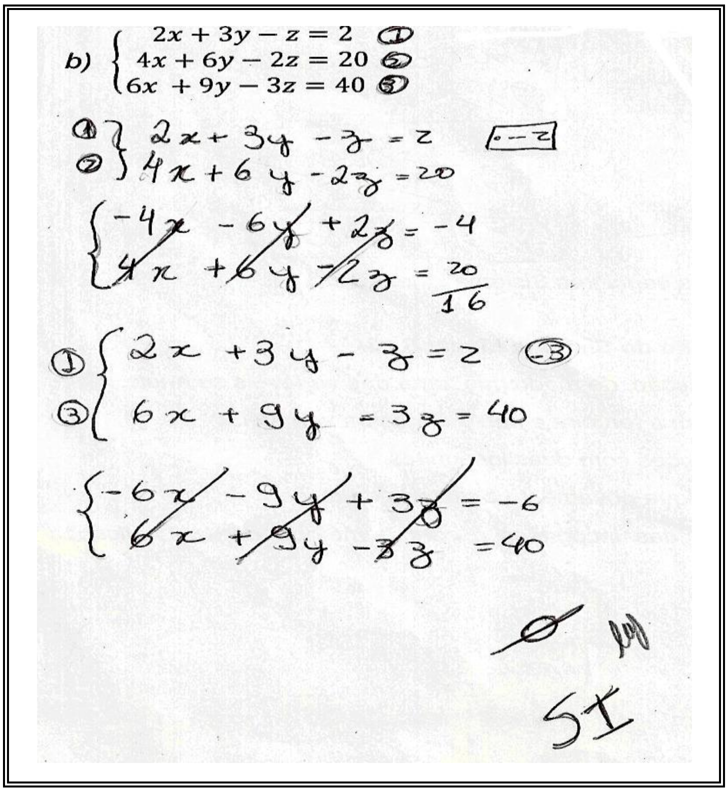


Figura 44: Protocolo do aluno L: sem dificuldade no tratamento algébrico e na classificação do sistema linear.

Os alunos que não classificaram o sistema linear corretamente mostraram dificuldade ao aplicar o princípio multiplicativo.

Constatamos, no protocolo do aluno B, que ao multiplicar a equação ① por (-2) não o fez corretamente com os coeficientes *x* e *y* e, assim, obteve a equação 8x + 12y = 16. O aluno B, ao resolver o sistema linear formado pelas equações ① e ③, obteve a equação 0x + 0y + 0z = 34.

O protocolo nos leva a entender que o aluno B resolveu mentalmente o sistema formado pelas equações 0x + 0y + 0z = 34 e 8x + 12y = 16, visto que, além de ter destacado a equação 8x + 12y = 16, recorreu ao registro figural para mostrar como compreendeu a solução do sistema linear. O aluno, de acordo com o que encontrou, classificou o sistema linear como possível e indeterminado.

Constatamos que o aluno compreendeu o significado da equação que encontrou e classificou-a corretamente. Contudo, não era o esperado em relação ao sistema linear proposto.

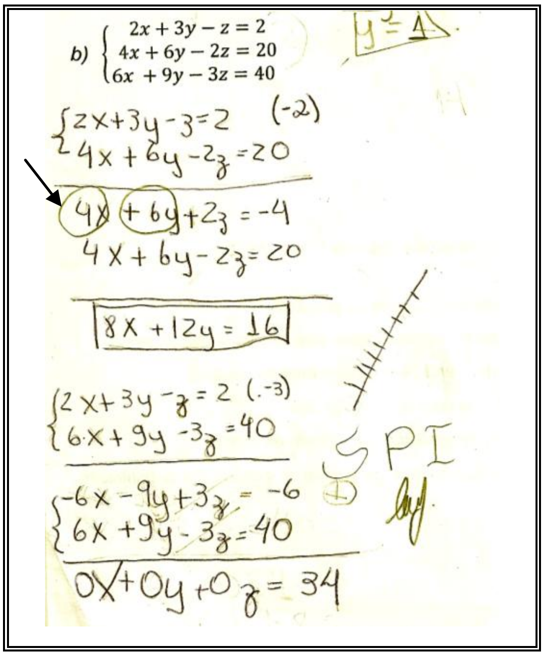


Figura 45: Protocolo do aluno B: dificuldade no tratamento algébrico e na classificação do sistema linear.

Selecionamos o protocolo do aluno V que apresentou dificuldade no tratamento algébrico. O aluno, ao multiplicar a equação ① por (-2), não obteve o termo independente (-4) e, ao resolver o sistema linear constituído pelas equações ② e ③, não multiplicou os termos independentes por (-3) e (-2), respectivamente. Assim, encontrou o valor x = 14 de forma incorreta e não classificou o sistema linear, como mostramos a seguir:

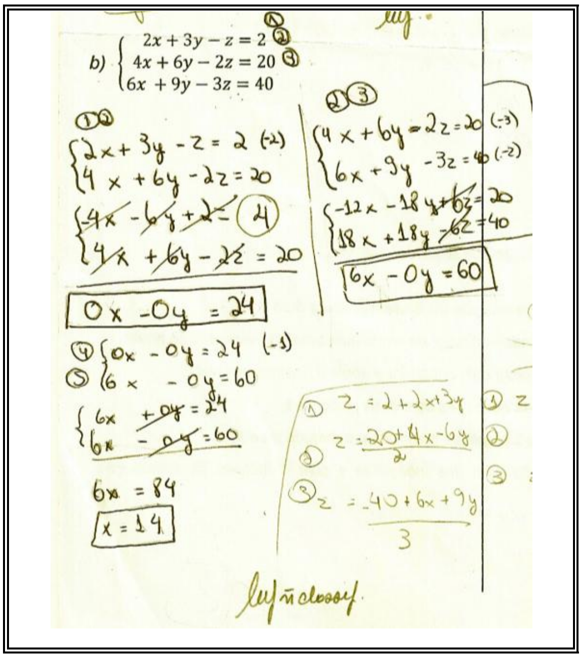


Figura 46: Protocolo do aluno V: dificuldade no tratamento algébrico e ausência da classificação do sistema linear.

Verificamos a relevância do aluno saber usar o princípio multiplicativo, como previsto na análise *a priori,* a fim de realizar o tratamento algébrico, classificar e estabelecer o conjunto solução.

Análise *a posteriori* do item d

Observamos, nos protocolos analisados, que os alunos não mostraram dificuldade no tratamento algébrico deste sistema linear. Atribuímos isso ao fato das três equações apresentarem os mesmos coeficientes de *x, y* e *z,* o que não requer do aluno uma manipulação complicada quanto ao uso do princípio multiplicativo.

Assim, entendemos que o aluno L, ao ter percebido que os coeficientes das equações eram os mesmos, mas sem ter realizado o método passo a passo, concluiu que o sistema é impossível.

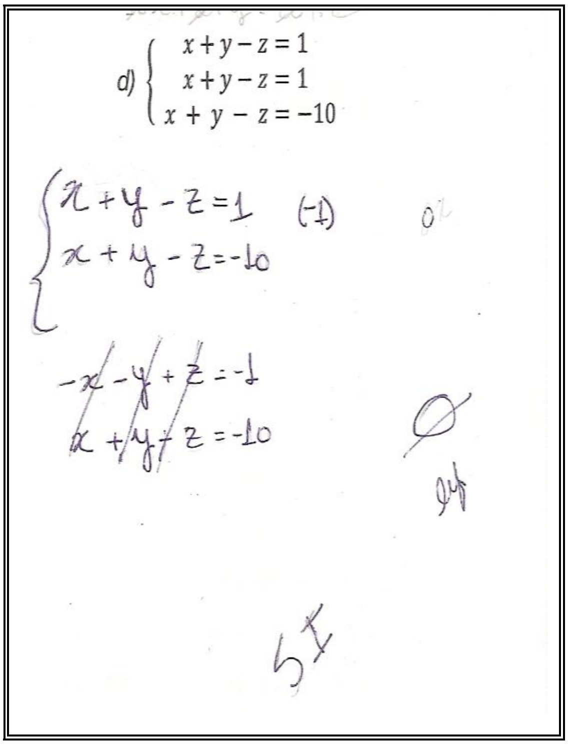


Figura 47: Protocolo do aluno L: sem dificuldade no tratamento algébrico e na classificação do sistema linear

O protocolo nos leva a interpretar que o aluno L, ao perceber que os coeficientes das equações eram os mesmos, rapidamente concluiu que o sistema era impossível e estabeleceu seu conjunto solução como S = Ø. Entretanto, para constatarmos este fato, ouvimos a áudio gravação para nos certificarmos das observações dos alunos L e A durante a realização da questão. Vale ressaltar que o aluno A faz parte do corpo discente do 2º ano do Ensino Médio; porém, não é sujeito de pesquisa.

Mostramos os depoimentos a seguir:

A: “Multiplica por -1, vão sumir todos menos o número”.
L: “Nem precisa fazer, são todos iguais, dá tudo zero”.
A: “Não dá tudo zero, dá igual a -11”.
L: “É, tô falando de *x*, *y* e *z*”.
A: “Tá, o sistema é SI”.

Assim, tudo nos leva a concluir que o aluno L, ao perceber que os coeficientes eram os mesmos, resolveu mentalmente o sistema linear, não sendo necessário realizar o tratamento algébrico no método de adição.

Pelo protocolo abaixo, constatamos que o aluno R realizou o tratamento algébrico sem dificuldades. Entretanto, não classificou o sistema linear e somente o fez corretamente no laboratório de informática.

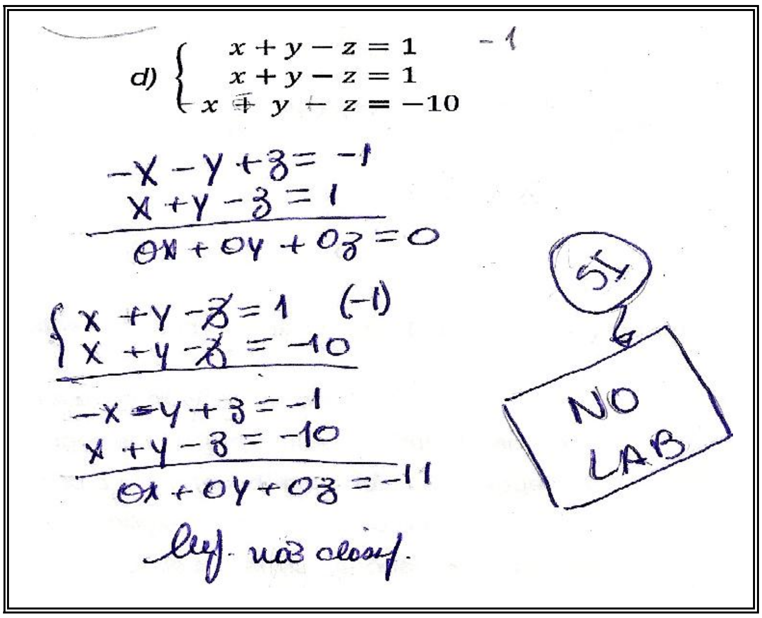


Figura 48: Protocolo do aluno R: recorreu ao registro gráfico para classificar o sistema linear

Análise *a posteriori* do item e

O protocolo do aluno I nos mostra que, ao realizar o tratamento algébrico no sistema formado pelas equações ① e ②, obteve 0z = 64 e classificou-o como impossível. Ao resolver o sistema linear formado pelas equações ① e ③, obteve o valor y = -6, o que significou para o aluno ter determinado o valor da ordenada de um ponto como visto, anteriormente, na abordagem do sistema linear 2x2.

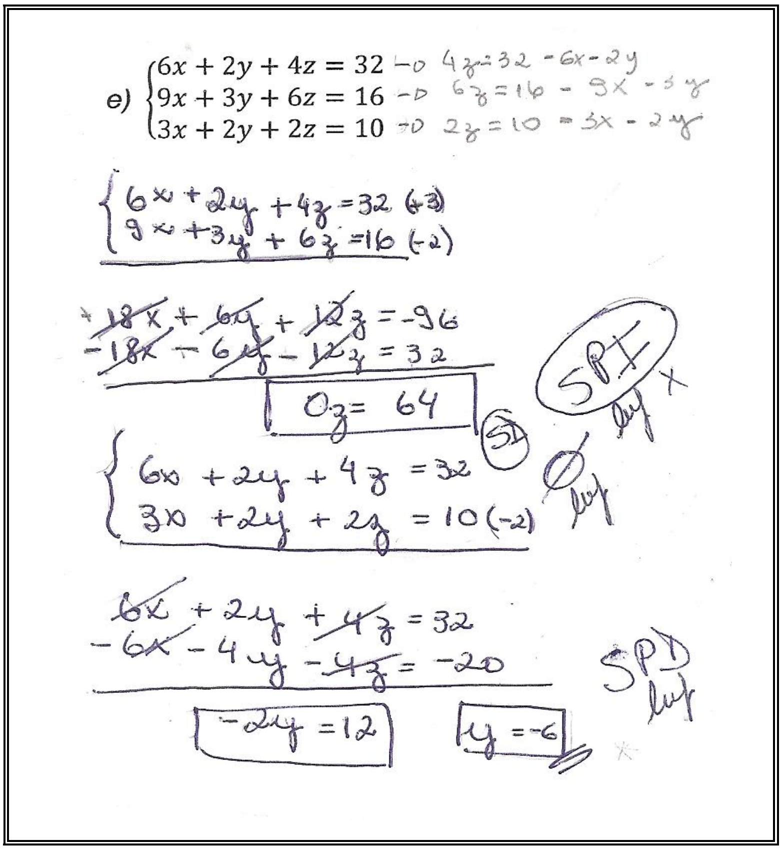


Figura 49: Protocolo do aluno **I**: classificação incorreta

Análise *a posteriori* do item h

No protocolo do aluno N, verificamos o tratamento algébrico incorreto quando o aluno encontra x = 130, y = 35 e z = 35. Isso induziu o aluno a classificar o sistema linear como possível determinado.

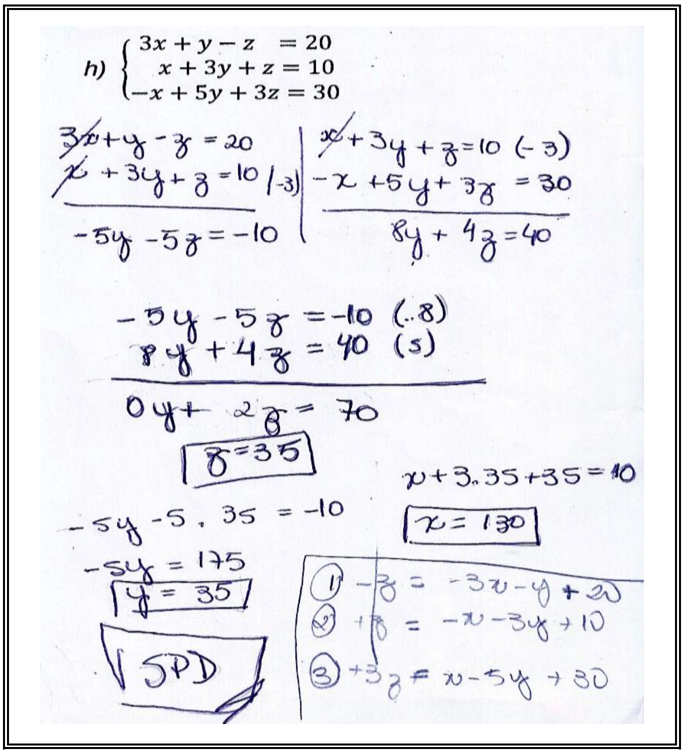


Figura 50: Protocolo do aluno N: classificação incorreta.

Constatamos, no protocolo do aluno I, que, ao realizar todas as etapas do tratamento algébrico do método de adição, classificou corretamente o sistema linear.

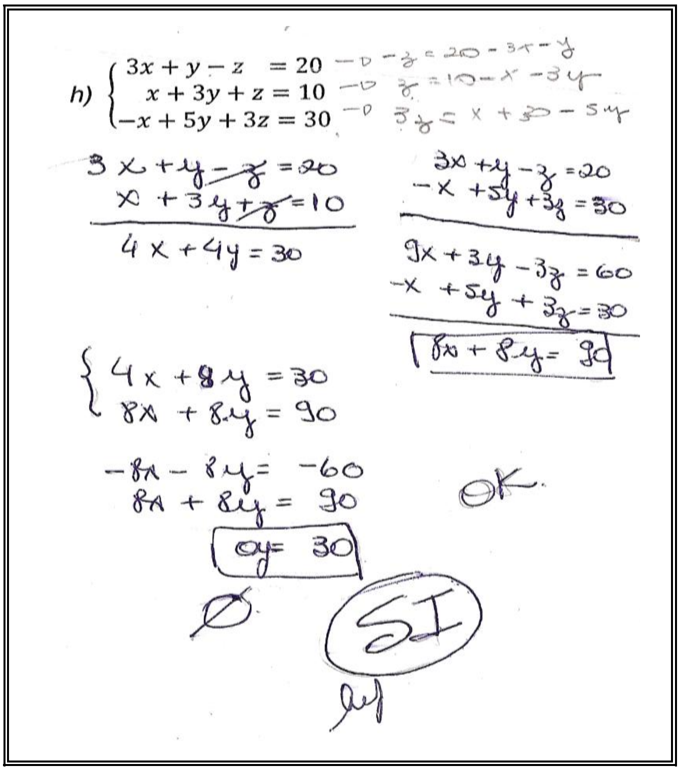


Figura 51: Protocolo do aluno I: tratamento algébrico e classificação corretos

Os protocolos nos levaram a interpretar que os alunos trouxeram os conhecimentos prévios adquiridos na abordagem dos sistemas lineares 2x2 para o estudo dos sistemas lineares 3x3.

Grupo III: Sistema possível indeterminado (SPI): itens c, f, g

Análise *a priori* dos itens c, f, g

Objetivávamos que os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico, encontrassem a equação do tipo 0x + 0y + 0z = 0, concluísse que o sistema apresentava infinitas soluções e classificasse o sistema como possível indeterminado. Os alunos poderiam escrever o conjunto solução com x = f(y, z), y = f(x, z) ou z = f(x, y).

Optamos por mostrar apenas a resolução do sistema linear do item c por entendermos que o tratamento algébrico proposto nos outros itens são semelhantes. Os alunos poderiam proceder da seguinte forma:

$$\text{c)} \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 & \text{①} \\ 4x + 6y - 2z = 4 & \text{②} \\ 6x + 9y + z = 8 & \text{③} \end{cases}$$

Escolheriam duas equações quaisquer e eliminariam uma das incógnitas. Optamos em adicionar algebricamente as equações ① e ② de modo que a primeira variável, no caso *x*, se anulasse. Para isso, seria necessário, inicialmente, multiplicar a primeira equação por (-2):

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \cdot (-2) & \text{①} \\ 4x + 6y - 2z = 4 & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -\cancel{4x} - \cancel{6y} + \cancel{2z} = -4 \\ \cancel{4x} + \cancel{6y} - \cancel{2z} = 4 \\ \hline 0x + 0y + 0z = 0 \ \text{④} \end{array}$$

Os alunos poderiam formar um sistema com as equações ① e ③ ou ② e ③. Optamos trabalhar com as equações ① e ③.

Para eliminar a variável *x,* esperávamos que os alunos multiplicassem a equação ① por (-3).

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \cdot (-3) & ① \\ 6x + 9y - z = 8 & ③ \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} -\cancel{6}x - \cancel{9}y + 3z = -6 & ① \\ \cancel{6}x + \cancel{9}y + z = 8 & ③ \\ \hline 0x + 0y + 4z = 2 & ⑤ \end{array}$$

Com as equações ④ e ⑤, os alunos deveráiam formar um sistema linear e resolvê-lo pelo método de adição.

$$\begin{array}{rl} \begin{cases} 0x + \cancel{0}y + \cancel{0}z = 0 & ④ \\ 0x \cancel{+} 0y \cancel{+} 4z = 2 & ⑤ \end{cases} & \\ \hline 0x + 0y + 4z = 2 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

Num primeiro momento, os alunos, ao fazerem um julgamento prévio pela equação obtida 4z – 2 = 0, poderriam entender que se tratava de um sistema linear possível determinado. Porém, ao tentarem encontrar as incógnitas *x* e *y,* constatariam a impossibilidade.

Ao substituir o valor da incógnita *z* = $\frac{1}{2}$ na equação ① e ② temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 & ① \\ 4x + 6y - 2z = 4 & ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - \dfrac{1}{2} = 2 \\ 4x + 6y - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 + \dfrac{1}{2} \\ 4x + 6y = 4 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = \dfrac{5}{2} \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

Para eliminar a variável *x*, esperávamos que os alunos multiplicassem a equação ① por (-2) e, em seguida, adicionásse-as.

$$\begin{cases} 2x + 3y = \dfrac{5}{2} \cdot (-2) \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 6y = -5 \\ \quad 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -\cancel{4x} - \cancel{6y} = -\cancel{5} \\ \cancel{4x} + \cancel{6y} = \cancel{5} \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array} \quad +$$

Os alunos deverriam constatar que se tratava de uma equação verdadeira, pois em qualquer valor atribuído a *x* ou a *y* o resultado é nulo. Para obter o conjunto solução, os alunos poderiam determinar duas incógnitas em função de uma terceira.

Caso os alunos escrevessem *x* em função de *y* e $z = \frac{1}{2}$:

$$2x + 3y - z = 2 \quad ①$$

$$2x = 2 - 3y + \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{5}{2} - 3y \cdot (2)$$

$$x = \frac{5 - 6y}{4}$$

Logo, o conjunto solução será: $S = \left\{ \left(\frac{5-6y}{4}, y, \frac{1}{2} \right) / \, y \in R \right\}$

$$2x = 2 - 3y + \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{5}{2} - 3y \cdot (2)$$

$$x = \frac{5 - 6y}{4}$$

Se o aluno optar em escrever *y* em função de *x* e z = $\frac{1}{2}$:

$$2x + 3y - z = 2 \quad \square 1$$

$$3y = 2 - 2z + \frac{1}{2}$$

$$3y = \frac{5}{2} - 2x \cdot (2)$$

$$y = \frac{5 - 4x}{6}$$

Logo, o conjunto solução será: $S = \left\{ \left(x, \frac{5-4x}{6}, \frac{1}{2} \right) / \, y \in R \right\}$

Análise *a posteriori* dos itens c, f, g

Análise *a posteriori* do item c

Verificamos que o aluno N, ao terminar o tratamento algébrico, encontrou uma equação de reta: 8x + 12y = 10. Entretanto, não classificou o sistema linear.

O protocolo nos leva a deduzir que o aluno N não classificou o sistema linear por não ter compreendido o significado 8x +12y = 10 em relação à solução do sistema linear. Ao não conseguir classificar o sistema linear, o aluno sinalizou sua dificuldade com um ponto de interrogação (?).

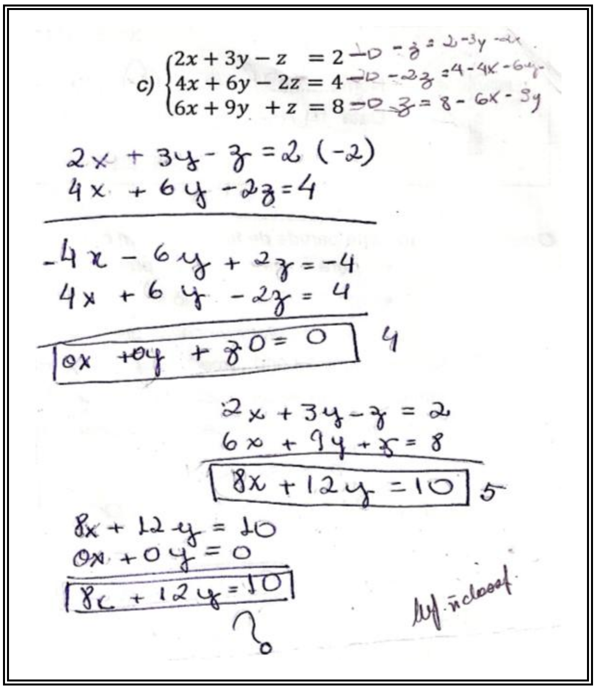


Figura 52: Protocolo do aluno N: tratamento algébrico correto sem a classificação

Verificamos que o aluno J, ao realizar o tratamento algébrico, encontrou $z = \frac{1}{2}$ e, automaticamente, concluiu que se tratava de um sistema possível determinado e não prosseguiu a fim de determinar os valores das demais incógnitas.

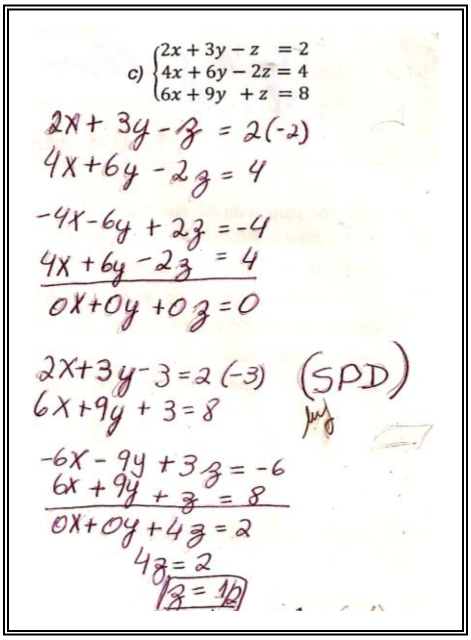


Figura 53: Protocolo do aluno J: classificou o sistema como possível determinado ao encontrar $z = \frac{1}{2}$.

Baseadas nas análises destes dois protocolos, alunos N e J, entendemos a relevância de recorrerem a outro registro de representação para compreenderem o significado da obtenção das equações das retas 8x + 12y = 10 e $z = \frac{1}{2}$.

Análise *a posteriori* do item f

Encontramos, no protocolo do aluno L, que ao resolver o sistema formado pelas equações ① e ② encontrou a equação do tipo 0x + 0y +0z = 0 e classificou o sistema linear de possível e indeterminado.

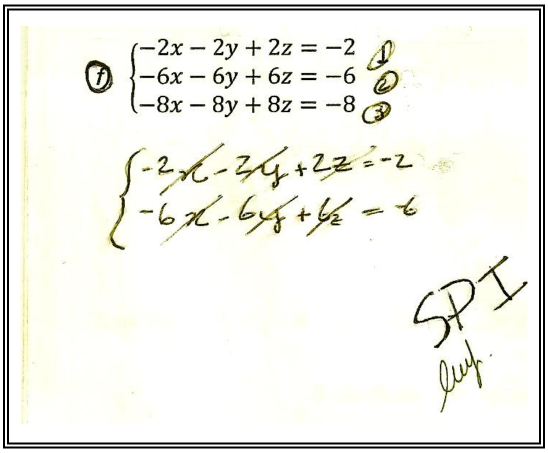


Figura 54: Protocolo do aluno L: compreensão sobre proporcionalidade dos coeficientes das equações.

Recorremos aos registros gravados e transcrevemos o diálogo entre o aluno F e o aluno C – aluno da classe que realizou a sequência didática, porém não era sujeito de pesquisa.

L: “Gente, esse nem precisa terminar dá tuda zero”.

C: “É melhor fazer inteiro”.

L: “... se você multiplicar a primeira por 3 ou por 4, e somar pode ver, some tudo”.

Baseadas nos protocolos e depoimentos dos alunos, constatamos que os mesmos perceberam a proporcionalidade entre os coeficientes das três equações. Desta forma, classificaram o sistema linear como possível indeterminado.

Análise *a posteriori* do item g

Constatamos, novamente, que o aluno R, ao encontrar o valor de uma incógnita, no caso y = -1, classificou, precocemente, o sistema linear como possível determinado e não prosseguiu para encontrar os valores das demais incógnitas.

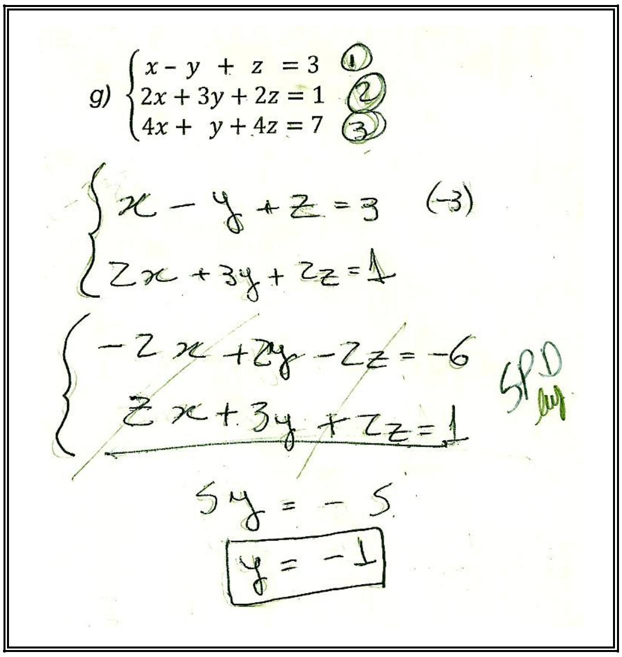


Figura 55: Protocolo do aluno R: encontrou o valor de y e imediatamente classificou o sistema de possível e determinado.

Ao selecionarmos os protocolos que fariam parte de nossas análises, encontramos o protocolo do aluno N, que registrou suas conclusões sobre a abordagem do sistema linear 2x2 e as associou à resolução do sistema linear 3x3.

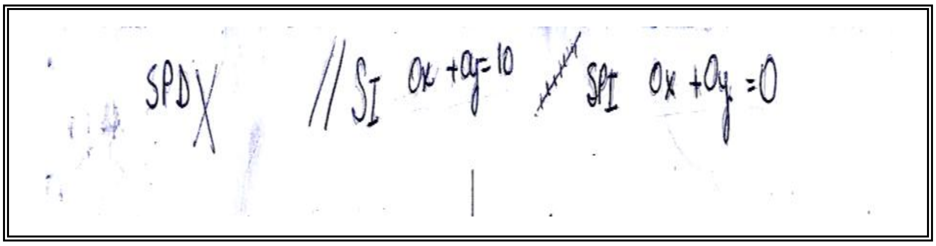


Figura 56: Protocolo do aluno N: registro das conclusões sobre sistema linear 2x2.

Verificamos que o aluno N, após ter realizado a conversão do registro algébrico para o registro gráfico dos oito sistemas propostos, classificou de forma incorreta dois sistemas lineares.

Observamos, com a análise dos protocolos, que os alunos associaram os resultados obtidos no tratamento algébrico do sistema linear 2x2 com os obtidos no sistema linear 3x3. Por outro lado, os alunos podem até realizar o tratamento algébrico corretamente; porém, não entendem o significado do resultado que o sistema parcial lhe oferece.

PARTE B_2

Análises da questão 1 da parte B_2

Análise *a priori*

A parte B_2 consta de um roteiro de instruções para a familiarização no uso do *software* Winplot 3D, desenvolvida no laboratório de informática, a fim de propiciar aos alunos o estudo do registro gráfico do sistema linear 3x3. Para isso, propusemos a questão:

Analise os resultados obtidos na resolução gráfica dos sistemas lineares da questão 1, dê o conjunto solução e classifique os sistemas em sistema possível determinado (SPD), sistema possível indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

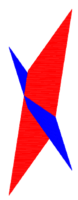
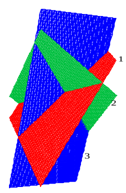
Objetivávamos, com esta questão, que os alunos escrevessem as equações do sistema linear de forma z = f(x, y) para digitá-las no *software* Winplot, como mostramos abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \quad \Rightarrow \; z = 3 - 2x - y \\ x + y - z = -1 \; \Rightarrow \; z = x + y + 1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \; \Rightarrow \; z = -3x + 6y - 2 \end{cases}$$

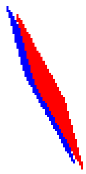
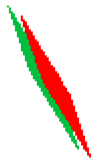
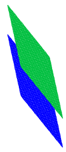
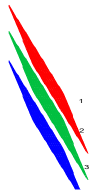
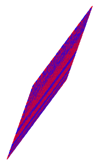
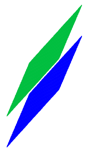
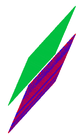
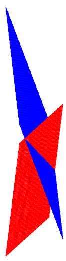
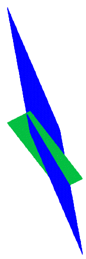
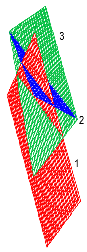
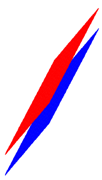
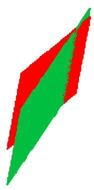
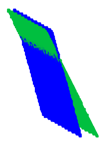
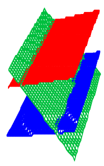
Optamos mostrar aos leitores um resumo simplificado dos resultados obtidos no tratamento algébrico concomitantemente com o registro gráfico do sistema linear 3x3.

Os alunos poderiam interpretar a posição de cada par de planos no espaço, ao resolvê-lo pelo método de adição e ao converterem o registro gráfico, com o auxílio do *software* Winplot, certificando-se das posições relativas dos planos no espaço.

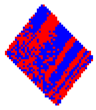
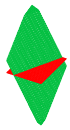
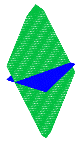
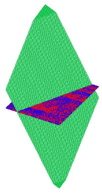
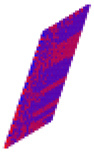
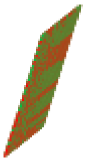
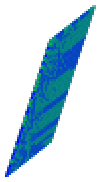
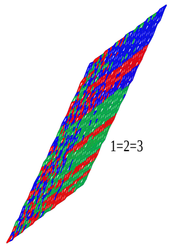
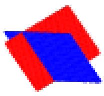
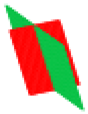
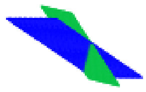
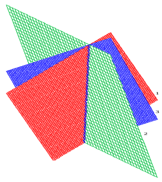
Mostramos, a seguir, um quadro resumo com as oito possíveis posições dos três planos no espaço.

SISTEMA LINEAR SPD	**EQUAÇÕES ENCONTRADAS NA RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS FORMADOS PELAS EQUAÇÕES:**			**RESOLUÇÃO GRÁFICA**
	① e ②	① e ③	② e ③	①, ② e ③
(a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$	-y+3z=5 ④ 	15y-z=13 ⑤ 	9y-5z=-1 ⑥ 	 3 planos têm um único ponto em comum

Quadro 1: Resumo das resoluções de um sistema linear sistema possível determinado.
Fonte: elaborado pela autora.

SISTEMA LINEAR SI	EQUAÇÕES ENCONTRADAS NA RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS FORMADOS PELAS EQUAÇÕES:			RESOLUÇÃO GRÁFICA
	① e ②	① e ③	② e ③	①, ② e ③
(b) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 4x+6y-2z=20 \\ 6x+9y-3z=40 \end{cases}$	0x+0y+0z=16 	0x+0y+0z=34 ⑤ 	0x+0y+0z=20 ⑥ 	 3 planos paralelos
(d) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=-10 \end{cases}$	0x+0y+0z=0 ④ 	0x+0y+0z=-11 ⑤ 	0x+0y+0z=-11 ⑥ 	 2 planos coincidente s e 1 paralelo
(h) $\begin{cases} 3x+y-z=20 \\ x+3y+z=10 \\ -x+5y+3z=30 \end{cases}$	4y+2z=5 ④ 	8y+4z=55 ⑤ 	2y+z=10 ⑥ 	 3 planos intercepta-dos segundo 3 retas paralelas
(e) $\begin{cases} 6x+2y+4z=32 \\ 9x+3y+6z=16 \\ 3x+2y+2z=10 \end{cases}$	0x+0y+0z=64 ④ 	0x-2y+0z=12 y+6=0 ⑤ 	0x-3y+0z=-14 y-14/3=0 ⑥ 	 2 planos paralelos e o 3º os inter-ceptam segundo 2 retas paralelas

Quadro 2: Resumo das resoluções de um sistema linear impossível.
Fonte: elaborado pela autora.

SISTEMA LINEAR SPI	EQUAÇÕES ENCONTRADAS NA RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS FORMADOS PELAS EQUAÇÕES:			RESOLUÇÃO GRÁFICA
	① e ②	① e ③	② e ③	
(c) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 4x+6y-2z=4 \\ 6x+9y+z=8 \end{cases}$	0x+0y+0z=0 ④ 	0x+0y+4z=2 z-1=0 ⑤ 	0x+0y+16z=8 2z-1=0 ⑥ 	 2 planos coincidem e o 3º os intercepta segundo uma reta
(f) $\begin{cases} -2x-2y+2z=-2 \\ -6x-6y+6z=-6 \\ -8x-8y+8z=-8 \end{cases}$	0x+0y+0z=0 ④ 	0x+0y+0z=0 ⑤ 	0x+0y+0z=0 ⑥ 	 3 planos coincidentes
(g) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+3y+2z=1 \\ 4x+y+4z=7 \end{cases}$	0x+5y+0z=-5 5y+5=0 ④ 	0x+5y+0z=-5 5y+5=0 ⑤ 	0x-5y+0z=5 -5y-5=0 ⑥ 	 3 planos se interceptam segundo uma mesma reta

Quadro 3: Resumo das resoluções de um sistema linear possível indeterminado.
Fonte: elaborado pela autora.

Análise *a posteriori* parte B_2

Os protocolos apresentados nesta análise foram realizados em duplas pelos sujeitos de pesquisa, a saber: R e I, N e J, B e V, L e Renato - aluno que não participou de todo o processo da realização de nossa pesquisa, mas que, durante a gravação, fazia parte desta dupla.

Procedermos analogamente à parte B_1, apresentando nossas análises dividas em três grupos, da seguinte forma:

Grupo I: Sistema possível determinado (SPD): item a

Grupo II: Sistema impossível (SI): itens b, d, e, h

Grupo III: Sistema possível indeterminado (SPI): itens c, f, g

Grupo I: Sistema possível determinado (SPD): item a

A dupla B e V obteve o gráfico com três planos interceptados entre si. Entretanto, o *software* não localizou o ponto de intersecção. Foi necessário que a dupla recorresse ao tratamento algébrico para determinar as coordenadas do ponto. Porém, como a dupla errou no tratamento algébrico, quando digitou o ponto não ficou localizado na intersecção dos três planos, como mostramos a seguir.

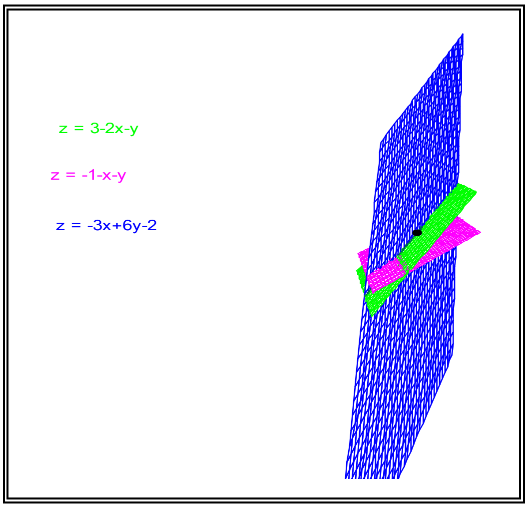


Figura 57: Protocolo da dupla B e V: equação z = f(x, y) incorreta.

Buscamos, em nossos registros de áudio gravação, o diálogo para saber como tal procedimento havia ocorrido:

B: “Ih! O gráfico está errado”.

V: “Será”

B: “Você não tá vendo o ponto fora do lugar”!

V: “É, e agora. Você digitou certo”?

B: “Deixa ver”.

Após conferir, o aluno responde:

B: “Está certo”.

V: “Professora, não está dando certo”.

P: “Vocês digitaram certo”?

B: “Já conferimos”.

P: “E as equações”?

Procuramos o protocolo para constatarmos as dúvidas desta dupla e verificamos que, ao escreverem a equação z = f(x, y), não dividiram os termos da terceira equação por (2).

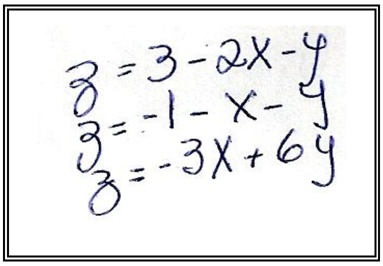


Figura 58: Protocolo do aluno B: registro da equação z = f(x, y).

Feitas as devidas correções, verificamos o novo registro gráfico e transcrevemos o diálogo da dupla:

J: “Olha, as retas se cruzaram em cima do ponto”.

N: “Que reta, são planos”.

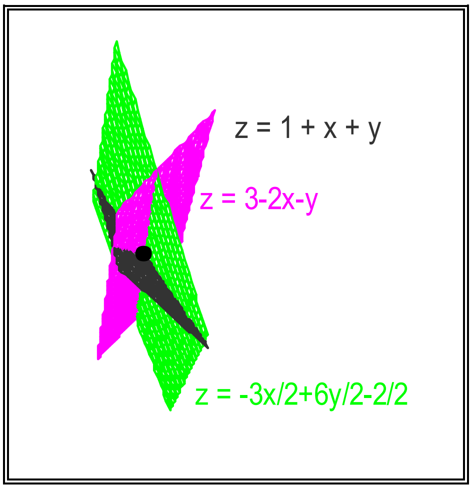


Figura 59: Protocolo da dupla J e N: gráfico correto.

Baseados na análise dos protocolos, observamos que o *software* Winplot apresenta limitações quanto à determinação do ponto de intersecção dos três planos.

Grupo II: Sistema impossível (SI): itens b, d, e, h

Item b

Verificamos que a dupla L e Renato não havia dividido por (3) o termo independente da terceira equação. Ao encontrar o gráfico de dois planos paralelos, classificou corretamente o sistema como impossível, embora não tenha obtido o gráfico correto com três planos paralelos, da seguinte forma:

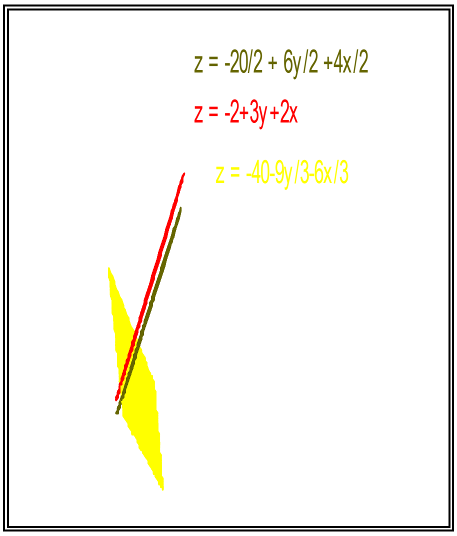


Figura 60: Protocolo da dupla L e Renato: tratamento algébrico incorreto, obtenção só de dois planos paralelos.

R: “Eu errei, tinha colocado SPD”.

L: “Eu não, sabia que quando tudo dá zero e um número é impossível”.

R: “Achei que x = 14”.

L: “Mas você viu, agora são planos e não muda nada”.

Verificamos que o aluno L já havia constado, ao realizar o tratamento algébrico, que se tratava de sistema impossível. Associou a equação $0x + 0y + 0z = c$,

$c \neq 0$, encontrada no tratamento algébrico do sistema linear 3x3, com as do mesmo tipo quando da elaboração do sistemas lineares 2x2. Assim, entendemos quando Duval (2003) ressalta:

> A compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor pelo menos dois registros de representação diferentes. Essa á a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. (DUVAL, 2003, p. 22)

Escolhemos o protocolo da dupla B e V, que realizou a contento tanto o tratamento algébrico quanto o gráfico, para que, comparando os protocolos, pudéssemos visualizar as posições dos três planos no espaço corretamente.

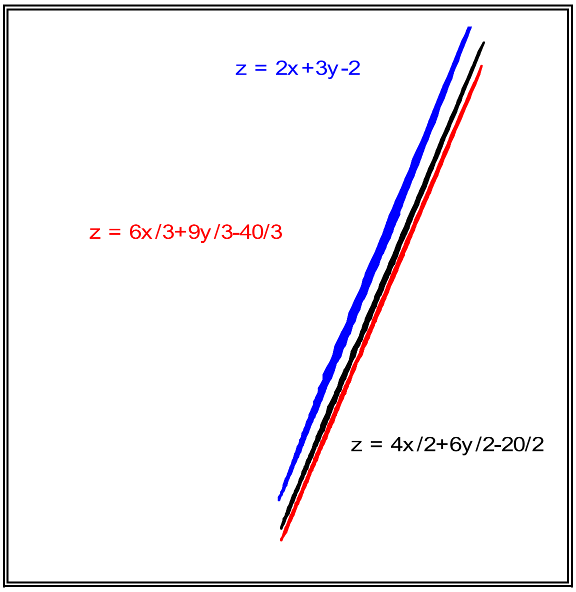


Figura 61: Protocolo da dupla B e V: registro gráfico correto

Item d

Verificamos que o aluno digitou a terceira equação de forma incorreta $z = x + y + 10$; contudo, obteve dois planos coincidentes e o terceiro plano paralelo a eles. Portanto, independentemente do erro cometido no tratamento algébrico, a dupla B e V obteve dois planos coincidentes e o terceiro paralelos a eles e classificou corretamente o sistema como impossível.

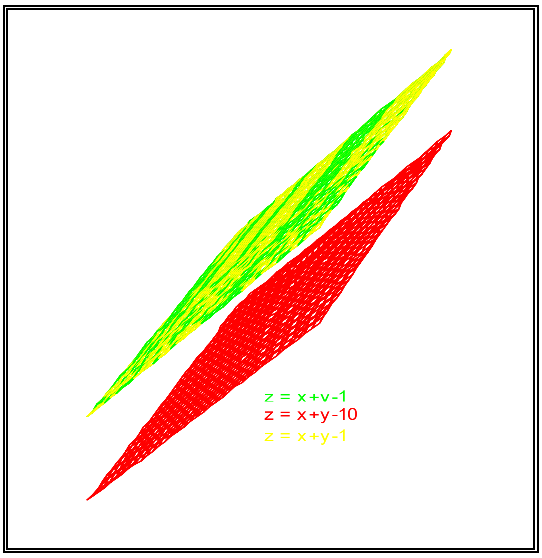


Figura 62: Protocolo da dupla B e V: tratamento incorreto, registro gráfico e classificação correta.

B: “E agora tem os dois SPI e SI”.

I: “O que deu para você, pra mim deu SI”.

B: “Pra mim também, SI”.

I: “Então vamos por SI”.

Observamos, pelo diálogo registrado na gravação, que a dupla B e V recorreu ao tratamento algébrico para classificar o sistema linear. Porém, acreditamos ser prematuro concluir que os alunos compreenderam a sua solução.

> Uma aprendizagem especificamente centrada sobre *a conversão de representações* e efetuada *fora de toda tarefa de tratamento* parece, então, necessária ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual. (DUVAL, 2009, p. 99)

Item e

Durante a verificação dos registros realizados por meio das gravações, constatamos a dúvida da dupla R e I em relação à posição dos planos.

I: “Pode responder que é SI?”.

R: “É mais eu acho que não são paralelos”.

I: “Como não? Olha aqui”.

R: “Vira outra vez, põe para cima. Viu, eles não são paralelos”.

I: “Ah! mas não interessa, eles são quase, só pode ser SI”.

Verificamos o registro gráfico no protocolo dessa dupla e constatamos que os planos realmente não são paralelos. Os alunos realizaram o tratamento algébrico corretamente, mas digitaram o termo independente da primeira equação e os sinais dos coeficientes de *x* e *y* de forma incorreta.

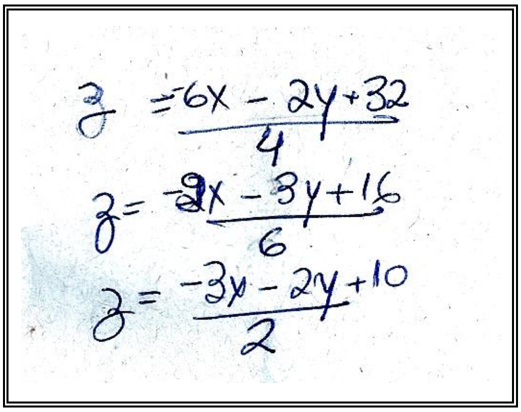


Figura 63: protocolo da dupla R e I: tratamento algébrico correto.

O protocolo da dupla R e I mostra a dificuldade da visualização dos planos paralelos.

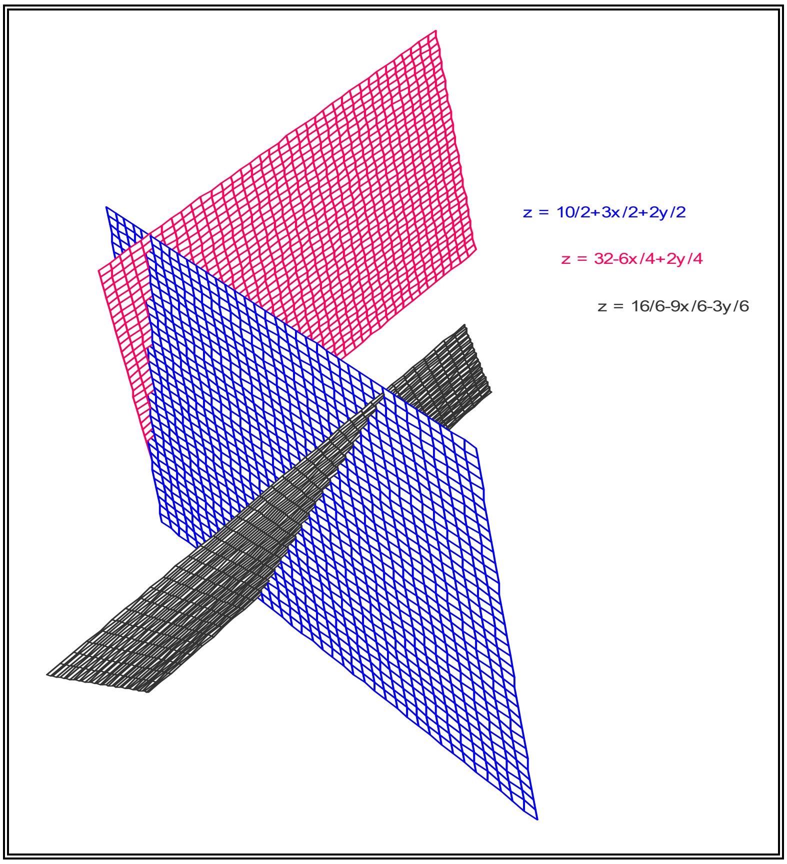


Figura 64: Protocolo da dupla R e I: parecem ser paralelos, classificam como sistema impossível.

Item h

Verificamos que a dupla J e N realizou o tratamento algébrico, o registro gráfico e a classificação corretamente. Entretanto, pelos registros de áudio gravação, constatamos que a dupla, apesar de ter classificado corretamente, não entendeu que se tratava de três planos que se interceptam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.

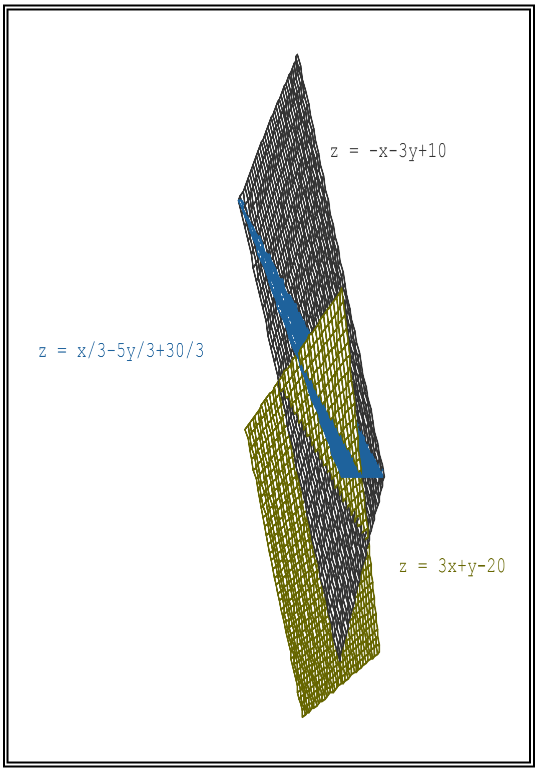


Figura 65: Protocolo da dupla J e N: dificuldade na visualização das posições dos planos

J: “Nossa, olha o que deu”.

N: “Vira pra ver melhor”.

J: “Parece que o azul e o cinza são paralelos”.

N: “É, vamos por SI”.

Verificamos que a dupla J e N apresentou dificuldade em visualizar que os três planos se interceptavam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras. Isso nos leva a entender que o registro gráfico privilegia a abordagem visual ao facilitar a interpretação das posições relativas dos planos, o que não implica na eliminação do tratamento algébrico.

Grupo III: Sistema possível indeterminado (SPI): itens c, f, g

Item c

Verificamos que a dupla N e J realizou o tratamento algébrico correto; porém, ao digitar a segunda equação z = 4x + 6y/2+4/2, esqueceu de dividir o termo 4x por (2). No registro gráfico, os planos parecem estar paralelos. Entretanto, ao serem movimentados, constatamos que não são. A dupla, embora com o erro cometido, classificou o sistema como impossível.

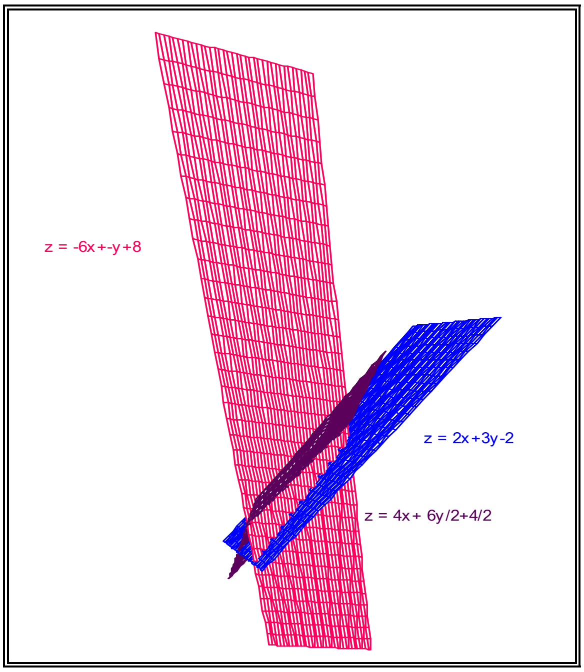


Figura 66: Protocolo da dupla N e J: planos aparentemente paralelos

No protocolo da dupla R e I, constatamos o tratamento algébrico e registro gráfico corretos, o que permitiu a dupla classificar o sistema de possível indeterminado.

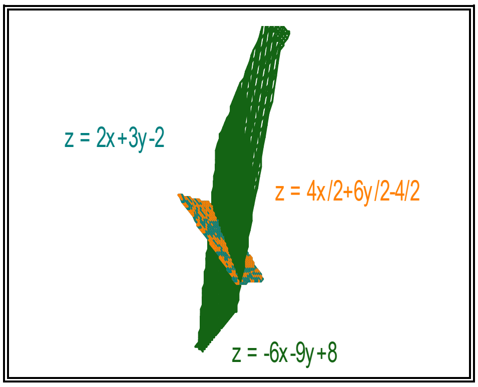


Figura 67: Protocolo da dupla R e I: registro gráfico correto.

O protocolo do tratamento algébrico feito pelo aluno R, no item c, destacou-se entre os demais, uma vez que o aluno preocupou-se em interpretar o sistema linear pelo método de adição aplicado a cada duas equações, indicando o tratamento gráfico que se pode dar a cada duas equações trabalhadas. O aluno concluiu que $z = \frac{1}{2}$ e classificou o sistema linear como possível determinado. O protocolo deste aluno nos leva a concluir que ao realizar o registro gráfico corretamente passou a compreender o significado das equações obtidas. Ao lado de $z = \frac{1}{2}$, sinalizou ser uma reta e, ao lado da equação: 0x + 0y + 0z = 0, esboçou dois planos coincidentes e, baseado no registro gráfico, classificou como um sistema possível indeterminado.

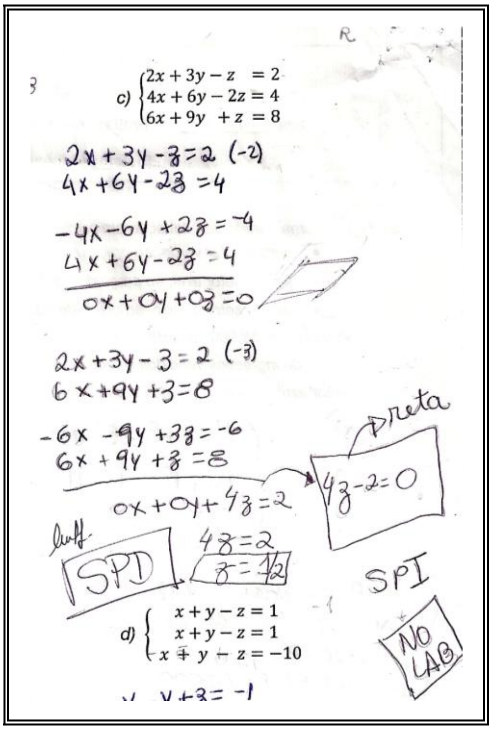


Figura 68: Protocolo do aluno R: conclusões após o registro gráfico.

Além do protocolo analisado recorremos a gravação para constatarmos a conversa entre os alunos R e I. Vale lembrar que o tratamento algébrico foi realizado individualmente em classe e o diálogo a seguir foi registrado no laboratório em que a atividade foi resolvida em duplas.

R: “Olha quando dá tudo zero os planos dão juntos”.

I: “É, é a mesma coisa com o outro sistema, as retas eram coincidentes”.

R: “Vê o outro como dá”.

I: “O meu deu uma reta”.

R: “O meu deu $z=\frac{1}{2}$ eu coloquei SPD”.

I: “Não, é uma reta”.

R: “É, 4z – 2 = 0 é reta”.

I: “Então é SPI”

Verificamos que a dupla R e I compreendeu o significado de $z=\frac{1}{2}$ e concluiu corretamente o sistema como possível indeterminado.

Assim, constatamos a relevânica de não se confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. Segundo Duval (2003):

> É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja o “*enclausuramento*” de cada registro. (DUVAL, 2003, p. 23)

Item f

Neste item, mostramos um dos protocolos, da dupla R e I, que realizou o tratamento algébrico, o registro gráfico e classificou corretamente o sistema linear.

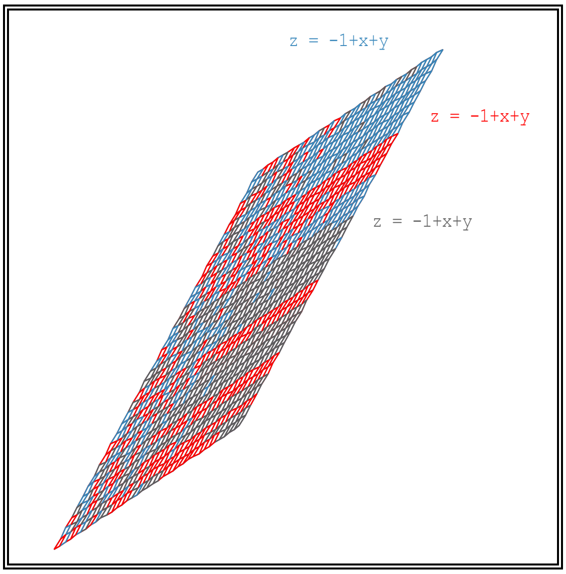


Figura 69: Protocolo da dupla R e I: resolução correta do sistema linear

R: “Olha, deu tudo junto”.

I: “É SPI”.

R: “Pode ver, quando dá coincidente, é SPI”.

I: “No outro de reta também”.

Os alunos da dupla R e I visualizaram que os três planos são coincidentes, compreenderam que existem infinitos pontos em comum aos três planos e classificaram o sistema como possível e indeterminado.

Os alunos relacionaram que tanto as retas como os planos coincidentes apresentam infinitos pontos em comum.

Item g

Verificamos que o aluno L, ao realizar o tratamento algébrico e encontrar y = -1, classificou o sistema linear como possível determinado e não prosseguiu para encontrar os valores das demais incógnitas.

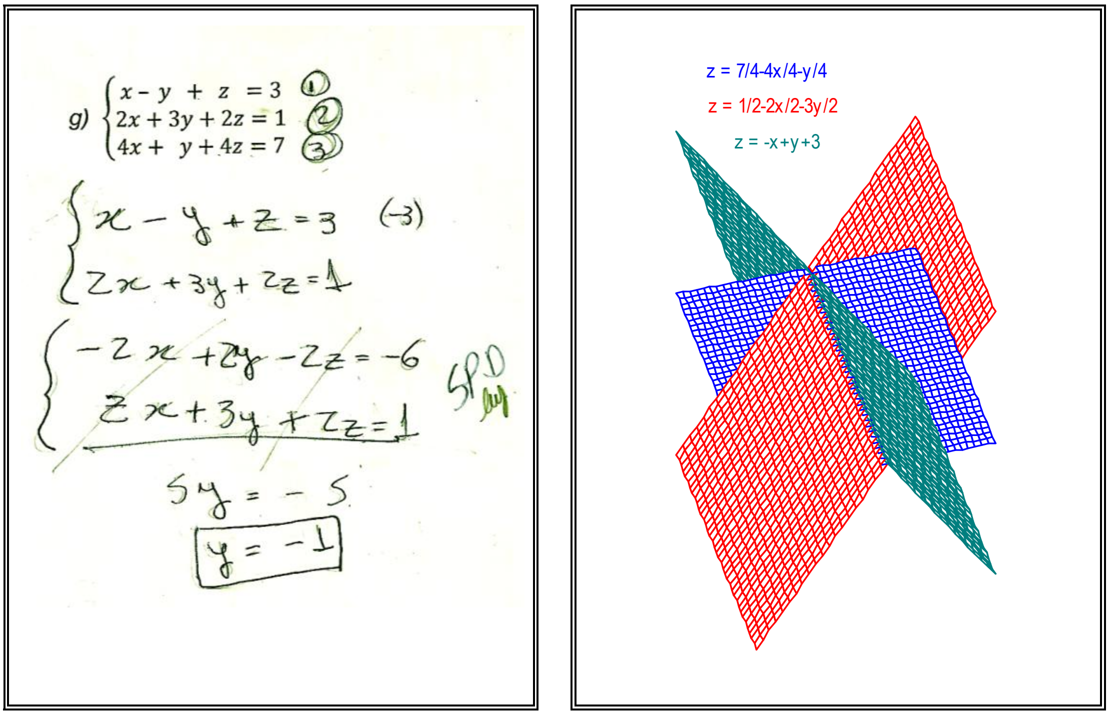


Figura 70: Protocolo do aluno L: tratamento algébrico de forma incorreta e o registro gráfico correto.

Procuramos, nos registro de áudio gravação, o comentário feito pelo aluno L no momento da realização do registro gráfico:

L: “Olha, não deu SPD”.

Renato: “Você resolveu errado”.

L: “É, mas não sei o que é isso”.

Renato: “Sei lá, vira o gráfico”

L: “Eles se cruzam na reta”.

Constatamos que os alunos que obtveram valores de y não compreenderam o significado obtido no tratamento algébrico e não tentaram buscar, relacionar o seu significado, no caso y = -1. Entendemos que as imagens visuais, difíceis de serem obtidas sem o auxílio do *software* Winplot, são ferramentas necessárias para que os alunos possam compreender o significado das equações obtidas no tratamento algébrico, o que será determinante para a interpretação da resolução do sistema linear.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste momento, apresentamos nossas considerações finais a respeito do que foi investigado, analisado e percebido durante o desenvolvimento deste trabalho.

Juntando-se a isso, o tema de pesquisa de Battaglioli (2008) motivou-me a realizar esta pesquisa que sugere a busca constante de atividades alternativas que levem os alunos a interpretarem resultados e a construirem novos conhecimentos no que diz respeito aos sistemas lineares.

Estapesquisa, objetivou o desenvolvimento, a aplicação e a análise de uma sequência didática para alunos do 2º ano do Ensino Médio, visando à resolução nos registros algébrico e gráfico dos sistemas lineares 3x3 com o auxílio do *software* Winplot.

Para atingirmos esses objetivos, formulamos nossa questão de pesquisa nos seguintes termos: “Os alunos do Ensino Médio conseguem compreender a resolução de sistemas lineares 3x3 quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registros de representação aliada a um ambiente computacional”?

Desta maneira, tentamos minimizar as dificuldades que os alunos possuem quanto à coordenação das diferentes interpretações dos sistemas lineares, favorecendo a compreensão das resoluções e das soluções. Os estudos dos sistemas lineares nas diferentes formas de suas representações apontaram em direção à necessidade de uso de uma ferramenta virtual para possibilitar a construção de gráficos em 3D.

Pretendíamos, em nossa pesquisa, ressaltar que a abordagem do tema não ficasse apenas no desenvolvimento dos algoritmos, mas que os alunos pudessem compreender e analisar os resultados obtidos. Para isso, pautamos nossa pesquisa na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003).

Em nossa sequência didática, contemplamos as transformações de representação – tratamento e conversão dos registros – a fim de favorecer a aprendizagem sobre sistemas lineares. Concordando com Duval (2003), "o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado. Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto". (p. 22)

Para o desenvolvimento do nosso trabalho, utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática como metodologia, optando por uma abordagem qualitativa e empregando quatro de suas fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Em nossas análises preliminares, recorremos a documentos oficiais, pesquisas e artigos e fizemos análise de dois livros didáticos, adotados no Ensino Médio, a fim de nos embasarmos para melhor desenvolvermos nossa pesquisa.

Na fase da concepção e análise *a priori*, desenvolvemos nossa sequência didática em duas partes: a parte A, na qual abordarmos os sistemas lineares 2x2; e a parte B, na qual trabalhamos com sistemas lineares 3x3.

Optamos por iniciar o estudo dos sistemas lineares com uma situação-problema. Concordamos com Lopes (2008), quando ressalta que o aluno, com a metodologia de resolução de problemas, torna-se agente da construção do seu próprio conhecimento pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio.

Identificamos que as dificuldades apresentadas por alguns alunos na resolução dos problemas se deram quanto à leitura e interpretação do texto no que diz respeito a selecionar, no enunciado, os dados pertinentes à sua resolução, associando a letra como representante de um número fixo e preciso ainda desconhecido. Duval (2003) menciona a existência de dificuldade ao afirmar que há dificuldades de compreensão quando um dos registros é um registro plurifuncional (língua natural).

Ainda em relação aos problemas, os alunos, no que diz respeito aos sistemas lineares 2x2, não apresentaram dificuldade quanto ao tratamento numérico e algébrico no método de adição. Isso, entretanto, não ocorreu em relação aos sistemas lineares 3x3. Ao resolverem esse tipo de sistema linear, os alunos apresentaram dificuldades significativas quando tiveram que combinar as três equações, duas a duas, para formar novos sistemas a fim de encontrarem a solução - o que levou a professora-pesquisadora a optar por indicar um esquema em que apresentou as possíveis escolhas de como combinar as equações duas a duas.

Propusemos uma atividade para abordar o estudo dos sistemas lineares 2x2, contemplando a conversão dos registros: algébrico, de tabela e gráfico. Os alunos realizaram a conversão do registro algébrico para o registro de tabela. Os alunos que tiveram dificuldade na conversão do registro de tabela para o registro gráfico foram aqueles que escolheram atribuir valores a $x \in N$, obtendo, segundo a equação, valores a $y \in Q$. A dificuldade ocorreu quando tiveram que fazer a localização dos números racionais (Q) no plano cartesiano.

Duval (2003) aponta a dificuldade de diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica. Se o aluno identificar as duas representações, isto é, registro simbólico-numérico (fracionário e decimal), supera a sua dificuldade e localiza o número racional no plano cartesiano.

Alguns alunos recorreram ao registro algébrico para encontrar o par de coordenadas cartesianas. Verificamos, dessa maneira, quão importante é a conversão dos registros quando os alunos apresentaram dificuldade dentro de um determinado registro de representação e recorreram a outro para chegar à solução esperada.

Os alunos somente apresentaram dúvidas quanto ao conjunto solução dos sistemas possíveis indeterminados (SPI).

Concordamos com Bisognin e Cury (2009) ao verificarmos a preferência dos alunos pelo método de adição ao realizarem o tratamento algébrico na resolução dos sistemas lineares. Na atividade em que contemplamos o tratamento algébrico no método de adição, quando da abordagem dos sistemas lineares 2x2, verificamos, por meio dos protocolos, que os alunos não mostraram sentir dificuldade quanto à aplicação do método, embora o mesmo não tenha ocorrido em relação à resolução de equações do tipo $a.x = 0$, $a \neq 0$.

Quanto ao tratamento algébrico realizado no método de adição na resolução dos sistemas lineares 3x3, devem ser desenvolvidas todas as etapas a fim de evitar que se estabeleça, precipitadamente, a solução de forma incorreta. Os alunos, ao encontrarem o valor de uma das incógnitas, não se preocuparam em determinar os valores das demais, consequentemente classificaram, de forma incorreta, o sistema de possível determinado.

Constatamos, ao analisarmos seus protocolos, que os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico do sistema linear 3x3, obtêm a equação do tipo $0x + 0y + 0z = c$, $c \neq 0$ e, imediatamente, classificam o sistema linear como impossível. Desta forma, entendemos que eles trazem os conhecimentos adquiridos quando da abordagem do sistema linear 2x2 e os aplicam automaticamente ao estudarem o sistema linear 3x3.

Ao realizarem o registro gráfico desses sistemas lineares com o auxílio do *software* Winplot, os alunos constataram que o valor encontrado de uma das incógnitas é a equação da reta em que os planos se interceptam e classificaram o sistema linear corretamente como possível e indeterminado.

Entendemos que as imagens visuais difíceis de serem obtidas sem o auxílio do *software* Winplot são ferramentas necessárias para que os alunos possam compreender o significado das equações obtidas no tratamento algébrico, o que será determinante para a interpretação da resolução do sistema linear.

Por outro lado, vale ressaltar que respostas matemáticas corretas não implicam na compreensão da resolução do sistema linear. Para que haja a compreensão e interpretação dos resultados obtidos, é relevante a conversão dos registros de representação.

Verificamos, por meio da nossa pesquisa, que os alunos podem realizar o tratamento algébrico e classificá-lo de forma correta. Porém, ao realizarem seu registro gráfico, na digitação equivocada da equação z = f(x, y), não chegaram à solução desejada do sistema linear.

Assim, constatamos a relevância do uso do *software* Winplot na conversão do registro algébrico para o registro gráfico no estudo dos sistemas lineares 3x3, visto que contribuiu com a construção do conhecimento, facilitando os processos da simulação, experimentação e visualização.

Embora o *software* Winplot possibilite a movimentação dos três planos a fim de facilitar a visualização da posição relativa dos três planos no espaço tridimensional, constatamos, durante a nossa experimentação, que não ficou suficientemente clara a resolução gráfica do sistemas lineares 3x3 propostos na atividade e classificados como sistemas impossíveis. Os alunos apresentaram dificuldade em visualizar e interpretar os sistemas lineares cujos gráficos eram três planos que se interceptavam, dois a dois, segundo retas paralelas uma às outras.

Verificamos a limitação do *software* Winplot quanto à localização e a determinação das coordenadas do ponto de intersecção dos três planos no espaço. Foi necessário, durante nossa experimentação no laboratório de informática, que os alunos recorressem ao registro algébrico para determinarem os valores de *x*, *y* e *z* pertencentes ao conjunto dos números reais. Caso esses valores tenham sido determinados corretamente, os alunos, ao inseri-los no programa, podem ver o ponto na intersecção dos três planos; caso contrário, o ponto não aparece na tela.

Na realização deste trabalho, quando da aplicação da nossa sequência didática junto aos alunos, sujeitos de pesquisa, verificamos que foi satisfatória a compreensão da proposta da nossa questão de pesquisa quanto à compreensão dos sistemas lineares 3x3 pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio. Entretanto, constatamos a relevância da realização do tratamento algébrico e gráfico concomitantemente.

Percebemos que avançamos em nossos estudos quanto à abordagem da conversão e tratamento de registros de representação, uma vez que os alunos experimentaram que a articulação de pelo menos dois registros de representação são necessários para se resolver o sistema linear 3x3. Assim, entendemos que com nossa pesquisa contribuiu para que os alunos do Ensino Médio pudessem compreender a resolução de sistemas lineares 3x3 quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registros de representação aliada a um ambiente computacional.

Tendo em vista todo o processo envolvido no decorrer desta pesquisa, sugerimos, como perspectiva futura, que sejam desenvolvidas sequências didáticas que tratem dos dois sentidos da conversão, isto é, casos de congruência e de não-congruência, privilegiem o registro gráfico como registro de partida, desenvolvam atividades que propiciem a discussão de sistemas lineares e atividades que contribuam para que os alunos estabeleçam o conjunto solução de sistemas possíveis e indeterminados.

Esperamos que nosso trabalho seja impactante quanto a provocar nos leitores de um modo geral, e nos professores de Matemática de um modo particular, uma leitura que ao mesmo tempo provoque curiosidade e elucide dúvidas. Constatem que pode ser feita uma nova abordagem quanto ao estudo dos sistemas lineares 3x3 em relação ao seu registro algébrico no método de adição bem como sua representação gráfica com o uso do *software* Winplot.

Assim, deixamos com a nossa pesquisa uma parcela de conhecimentos pesquisados, analisados e concebidos que possam contribuir para novos estudos e descobertas na abordagem dos sistemas lineares 3x3 no que diz respeito ao uso de ferramentas virtuais no ensino da Matemática.

Ao encerrar nosso trabalho e pensando nas preocupações e inquietações iniciais, percebemos que, o caminho quando percorrido com determinação, persistência e alegria é prazeroso e nos dá uma sensação de missão cumprida.

A pesquisadora sente-se enriquecida como profissional da educação uma vez que sua preocupação não se limita apenas em ensinar, mas também em aprender somando conhecimentos que possam ser compartilhados.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Aspectos Emergentes da Utilização do Computador na Educação Matemática** *in* ALLEVATO N. S. G. e FRANZONI M. (org) Reflexões sobre a Formação de Professores e o ensino de Ciências e Matemática. Campinas: Alínea, 2007.

ALMOULOUD, S. A., BIANCHINI, B. L. **O Erro Ligado ao Ensino Aprendizagem de Sistemas Lineares** *in* Anais do IV EPEM – pp. 216-223. São Paulo: SBEM 1996.

ALMOULOUD, S. A., **Fundamentos da didática da matemática** vol. 2. 3ª ed. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A., **Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos**, *In*: MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação) p.125-146, 2003.

ANTON, H., BUSBY, R. C., **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006).

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 196, p. 193-218, 1996.

BATISTA, S. C. F. Tese de Mestrado: **Softmat: Um repositório de softwares para matemática do Ensino Médio – Um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais** – UENF: 2004

BATTAGLIOLI, C. S. M. Tese de Mestrado Profissional: **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos** – PUCSP: 2008.

BISOGNIN, E. e CURY, H. N.. **Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações**. BOLEMA, Rio Claro, ano 22, n. 33, p. 1-22, 2009.

BORBA, M. C. **Informática e Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática, 2. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C. e PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática, 2. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. – (Orientações curriculares para o ensino médio) Brasília: Ministério da Educação e Cultura, vol. 2, 2008.

____________. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (PCN)**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

____________. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

____________. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Programa Nacional dos Livros Didáticos para o Ensino Médio – Matemática (PNLEM)**. Brasília: MEC, 2005.

____________. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Programa Nacional dos Livros para o Ensino Fundamental – Matemática (PNDL)**. Brasília: MEC, 2008.

____________. Secretaria de Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – **Orientações curriculares para o ensino médio**; vol. 2. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, vol. 2, 2008.

____________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do aluno: matemática, Ensino Fundamental** – 7ª série, vol. 3. 3º bimestre / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini, São Paulo: SEE, 2009.

____________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do professor: matemática, Ensino Fundamental** – 7ª série, vol. 3. 3º bimestre / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini, São Paulo: SEE, 2009.

____________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do aluno: matemática, Ensino Médio** – 2ª série, vol. 2. 2º bimestre / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini, São Paulo: SEE, 2009.

____________. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do professor: matemática, Ensino Médio** – 2ª série, vol. 2. 2º bimestre / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini, São Paulo: SEE, 2009.

BISOGNIN, E. e CURY, H. N. **Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações**. BOLEMA, Rio Claro, ano 22, n. 33, p. 1-22, 2009.

CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H. e COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações**, 4ª edição. São Paulo: Atual, 1983.

DAMM, R. F. **Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos,** *In*: MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação) pp. 35-47, 2003.

DANTE, L. R. **Matemática, Contexto & Aplicações**. Volume único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** *In*: MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação) pp. 11-33, 2003.

____________. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo l). 1ª Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FERREIRA, M. C.C e GOMES, M. L. M. **Sobre o Ensino de Sistemas Lineares**, In: RPM, nº. 32. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1996)

FERREIRA, E. S. e JAKUBOVIC, J. **Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes**. Subsídios para Implementação da Proposta Curricular de Matemática para o 2º grau. V.1 – Secretaria de Estado da Educação – São Paulo, 1998.

FREITAS, I. M., Dissertação de Mestrado: **Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno**. PUC-SP: 1999.

FREITAS, J. L. M. **Teoria das Situações Didáticas**. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. e JR, J. R. G. **Matemática Completa: ensino médio** – vol. Único. São Paulo: FTD, 2002.

IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. **Matemática: ciência e aplicações** – vol. 2. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2006.

____________. Matemática e Realidade – 8º ano. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

IMENES, L. M. e LELLIS, M. C., **Matemática Paratodos** – vol. 7. São Paulo: Scipione, 2006.

LAROUSSE, Grande Dicionário Larousse Cultural da Língua Portuguesa – São Paulo: Nova Cultural Ltda, 1999.

LOPES, L. M., **Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares através da Metodologia de Resolução de Problemas para o Ensino Médio**. Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da Unesp, p. 247-263, 2008.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M. E. D. **A Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: E.P.U, 1988.

MACHADO, S. D. A. **O Universitário principiante x Significado dos Sistemas de Equações** *in* Anais do IV EPEM – pp. 241-248. São Paulo: SBEM, 1996. SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação.

____________. **Aprendizagem de Matemática, Registros de Representações Semióticas.** Campinas: Papirus, 2003).

____________. MACHADO, S. D. A. (org.) **Educação Matemática, Uma (nova) Introdução.** São Paulo: EDUC – Editora da PUC-SP, 2008).

MARANHÃO, M. C. S. A. e IGLIORI, S. B. C. **Registros de Representação e Números Racionais**, *In*: MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação) p. 57-70, 2003.

OLIVEIRA, G. P. **Estratégias Didáticas em Educação Matemática: As Tecnologias de Informação e Comunicação como Mediadoras** *in* IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática como Mediadoras. Brasília: SIPEM, 2009.

PAIVA, M. R., **Matemática.** Vol.2. 2ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

SANTAELLA, M. L. B. **O que é Semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTOS, R. S. **Tecnologias Digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no *software* GrafEq**, Porto Alegre, UFRG – RS, 2008

SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio**. vol. 2. 4ª ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

Webgrafia:

ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guia_livro_didatico_pnlem_2006_mg.pdf acesso em abril/2010.

ANEXOS

Anexo I

Autorização para a realização da pesquisa

AUTORIZAÇÃO PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Senhora Diretora do Colégio Madre Alix ***Ir. Nilza da Costa Hóss,***

Venho pelo presente solicitar vossa autorização para que eu, ***Ana Lucia Infantozzi Jordão***, professora de Matemática desse Estabelecimento de Ensino, possa desenvolver parte de meu trabalho de Mestrado, junto aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Madre Alix.

A atividade com os alunos consiste em aplicação de uma sequência didática durante as aulas de matemática, com entrevistas e pesquisas direcionadas, sobre o tema: Resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares com auxílio do *software* Winplot.

Informo que todas as publicações realizadas a partir desse trabalho, serão feitas preservando a identidade dos alunos envolvidos.

Certo de contar com vossa atenção, os meus sinceros agradecimentos

Ana Lucia Infantozzi Jordão
RG. 9.813.733-SP.

Defiro a solicitação acima.
18 de novembro de 2010.

Ir. Nilza da Costa Hóss
RG. 2.565.575-SP.
Diretora

Anexo II

Autorização para inserção do nome do Colégio Madre Alix na pesquisa

Autorização da Direção para inserção do nome
Colégio Madre Alix na pesquisa didática

Senhora Diretora do Colégio Madre Alix, **Ir. Nilza da Costa Hóss**

Venho pelo presente solicitar vossa autorização para que eu, Ana Lucia Infantozzi Jordão, professora de Matemática deste estabelecimento de ensino, possa inserir quando necessário o nome do Colégio em meu trabalho de mestrado.

Meus sinceros agradecimentos.

Ana Lucia Infantozzi Jordão
RG: 9.813.733.05 - SP

Defiro a solicitação acima
18 de novembro de 2010

Ir.Nilza da Costa Hóss
RG. 2.565.575-SP
Diretora

Anexo III

Autorização para o uso dos protocolos.

AUTORIZAÇÃO DOS ALUNOS PARA O USO DOS PROTOCOLOS REALIZADOS NA PESQUISA

São Paulo, 15 de setembro de 2010.

Autorização dos(a) alunos(a) matriculados(as) no 2º ano do Ensino Médio do Colégio Madre Alix a participar de uma pesquisa sob responsabilidade da pesquisadora e professora Ana Lucia Infantozzi Jordão, aluna do curso de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática da PUC-SP e da Professora Barbara Lutaif Bianchini, orientadora da pesquisa docente do Programa de Mestrado da PUC-SP.

O objetivo da pesquisa é desenvolver e aplicar uma sequência didática de ensino para conteúdos de álgebra com o auxílio de software Winplot. Será realizada no período do dia 20 de setembro a 14 de outubro, durante oito aulas de matemática, cinco em sala de aula e três no laboratório de informática.

Conto com a autorização dos alunos desta Instituição de Ensino e informo que todas as publicações realizadas desse trabalho, serão feitas preservando a identidade dos alunos envolvidos.

NOME	ASSINATURA
Bianca tucci	Bianca Lotorui tucci
Nanny Cox	Nannyllum
Jacqueline	Jacqueline Koraille
L Renatha Samed	Renatha Samed
R Isabela Mendes	Isabela Mendes
V Victoria Goes	Victoria Goes
I Luiz Fernando	Luiz Fernando

Analucia I. Jordão

Ana Lucia Infantozzi Jordão

Anexo IV

Autorização para a publicação de uma conversa com o Professor Imenes

São Paulo, 10 de outubro de 2010

Por meio desta, declaro que o texto abaixo reproduz com fidelidade a conversa telefônica que mantive em agosto passado com a professora Ana Lucia Infantozzi Jordão, estudante do Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP, e autorizo a inserção do mesmo na dissertação da colega professora.

LM Imenes

Prof. Luiz Márcio P. Imenes

Anexo V

Conversa com o prof. Imenes

Entramos em contato com o prof. Imenes, via e-mail, a fim de tomar conhecimento sobre a ausência da indicação do livro "*Matemática Paratodos*" no PNDL (2011) e da abordagem da resolução do sistema linear 2x2 no registro gráfico.

Prontamente o autor respondeu-nos e sugeriu que conversássemos via telefone, assim foi feito.

Transcrevi a entrevista e a submeti ao autor a fim de obter sua aprovação. O texto foi corrigido por ele que em seguida enviou-me com sua autorização.

A respeito da aparente ausência no PNLD 2011 do livro ***Matemática Paratodos***, 2ª edição, publicado pela Editora Scipione em 2006, o professor nos explicou que por motivos particulares os autores optaram por encerrar o contrato com a editora em 31/07/2010. Sendo assim, precisaram optar por outra editora a fim de conseguir tempo hábil para participar do PNDL 2011.

Segundo o autor, prof. Imenes, a nova edição lançada pela Editora Moderna com o título ***Matemática – Imenes & Lellis*** e inscrita no último PNLD 2011, manteve a mesma essência do livro ***Matemática Paratodos***, mudando somente a diagramação e as ilustrações, que foram refeitas. Sendo assim, observou não haver problema algum em termos analisado o livro ***Matemática Paratodos***.

Em relação à ausência da representação gráfica do sistema linear 2x2, Imenes fez uma explanação desde os critérios adotados por um autor ao escrever ou planejar um livro até discussão sobre alguns objetos matemáticos.

O autor inicia a conversa considerando que para se escrever um livro didático de Matemática há padrões a ser seguidos embora haja alguma flexibilidade na escolha e seleção dos conteúdos programáticos a ser ensinados.

Há aproximadamente 40 anos, os livros adotados no Colegial, atual Ensino Médio, abordavam conteúdos que hoje não são abordados, como, por exemplo, segmento áureo, triedros polares etc., assim como alguns temas que atualmente são abordados algum tempo atrás não eram, sequer, comentados.

Mediante estas considerações, os autores Imenes e Lellis seguiram alguns critérios ao escolher os temas propostos na coleção para ser desenvolvidos durante os 4 anos do Ensino Fundamental.

Um dos critérios levados em conta, pelos autores, em relação à escolha dos temas, foi a relevância social dos conteúdos, como estatística, medidas, geometria básica etc.

Imenes ressalta que, embora a álgebra quase não tenha presença no cotidiano das pessoas, seu aprendizado é fundamental para que o aluno prossiga aprendendo Matemática e possa também aprender Biologia, Química e Física.

Outro aspecto a ser considerado é a necessidade de se trabalhar idéias matemáticas de forma significativa. Um dos recursos para isso é explorar suas conexões com as práticas sociais. No caso da álgebra essa possibilidade é muito limitada.

A construção de significado para álgebra é favorecida quando levamos o aluno a entrar em seu campo pela "porta" das funções (a tradição é fazê-lo pela "porta" das equações). Esse trabalho pode ser iniciado já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, educando o aluno a observar e explorar padrões, regularidades, leis de formação.

Imenes faz uma retrospectiva sobre a abordagem da álgebra na coleção de livros para o Ensino Fundamental publicada em parceria com Marcelo Lellis. Já no 6º ano, os alunos expressam generalizações a partir da observação de padrões. De início, fazem-no usando a língua materna e, depois, a linguagem simbólica da álgebra. Assim, aprendem a usar letras para representar quantidades variáveis ("o x variável"). Esse trabalho, que leva à dedução de fórmulas (que representam funções), tem continuidade nos anos seguintes. No 8º ano, o conceito de função é explicitado para o aluno e seu estudo, como objeto matemático, começa a ser aprofundado.

Paralelamente, transcorre o estudo de equações ("o x incógnita"), no qual tem destaque a tradução do problema da língua materna para a linguagem algébrica. Nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, a resolução de problemas motiva o estudo de sistemas de equações, lineares ou não.

Quanto à representação gráfica de um sistema de equações lineares, Imenes faz as seguintes considerações. De início, uma dificuldade teórica: tal estudo pressupõe que uma equação do tipo $ax + by = c$ é representada por uma reta no plano cartesiano. Na etapa de escolarização em pauta, tal resultado pode ser percebido experimentalmente, como fazem no volume do 9º ano (ver, por exemplo, exercício 15, página 189 da edição para o PNLD 2011). Mas, convém lembrar que a Matemática é dedutiva. Portanto, tal estudo precisa ser retomado no Ensino Médio onde a dedução dessa propriedade pode ser compreendida pelos alunos. Isso significa que os sistemas lineares e sua representação gráfica devem ser objeto de estudo no Ensino Médio, como, de fato, costuma acontecer. O autor ressalta que, na seleção de conteúdos a ser estudados, é preciso estabelecer prioridades. De fato, pode-se ensinar aos alunos do final do Ensino

Fundamental a representação gráfica de um sistema linear 2×2, mas será essa uma prioridade? Não seria mais formativo e proveitoso, nesse momento, um contato com perspectiva, geometria espacial, probabilidade, raciocínio combinatório ou estatística?

Deve-se notar que o fato de o aluno não estudar a representação gráfica de um sistema linear 2×2 no Ensino Fundamental não compromete seu aprendizado e não o impede o prosseguir estudando Matemática no Ensino Médio, onde terá contato com o tema.

No Ensino Médio o aluno tem mais condições para acompanhar uma abordagem mais rica dos sistemas lineares, não apenas do tipo 2x2, interpretando com mais propriedade sua representação gráfica. Nessa etapa, raciocinando no plano cartesiano, o aluno poderá compreender a propriedade essencial da reta: aumentos iguais de ***x*** correspondem a aumentos iguais de ***y***. Daí, poderá estabelecer relação dedutiva entre retas e equações do tipo ax + by = c.

Em resumo, a opção dos autores por não propor o estudo da representação gráfica de um sistema linear 2 x 2 no Ensino Fundamental, deve-se, essencialmente, aos seguintes fatores:

- essa ausência não compromete o aprendizado dos alunos nessa etapa de sua escolarização;
- outros temas são prioritários;
- a linearidade (que se relaciona com proporcionalidade) e os sistemas lineares e suas representações geométricas são temas relevantes que merecem ser "bem tratados" pela Matemática escolar. O lugar adequado para esse estudo é o Ensino Médio.

Passada uma hora e meia de explanação, terminamos nossa conversa, no qual ficou claro que o autor considera importante o estudo da representação gráfica de sistemas lineares e entende que tal assunto deve ser abordado no Ensino Médio.

Um Estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica dos Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio

Sequência Didática

PARTE A

Parte A_1

Questão 1

No Parque de Diversões Dia Feliz, os ingressos custam R$ 10,00 para adultos e R$ 6,00 para crianças. No último domingo, com a venda de 400 ingressos, a arrecadação foi de R$ 3.000,00. Determinar o número de adultos e crianças pagantes.

Questão 2

Para cada um dos sistemas lineares abaixo, preencha a tabela, construa o gráfico e classifique-os como possível determinado, possível e indeterminado ou impossível e indique o seu conjunto solução. Caso encontre um ponto comum às duas retas, determine-o.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Questão 3

Resolva os Sistemas Lineares utilizando o método da Adição:

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 7y = -4 \\ 3x + 7y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$

Parte A_2

Questão 1

A questão 1 foi proposta juntamente com as instruções do uso do *software* Winplot.

Questão 1:

a) *Digite a equação da reta: 4x + 3y = 5 no espaço azul.

*Com ajudo do *software* Winplot escreva uma nova equação, conservando os coeficientes das incógnitas *x* e *y* da equação anterior e altere apenas o valor do termo independente.

*Digite mais uma equação com coeficientes proporcionais a equação 4x + 3y = 5 e conserve o termo independente.

*Escreva abaixo o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de *x* e *y*, com a posição relativa das retas encontradas e a classificação dos sistemas lineares.

b) *Digite a equação da reta x – 2y = 3, observe o seu gráfico.

Multiplique a equação x – 2y = 3 por 2.

Repita, multiplicando por 3 a equação x – 2y = 3.

*Escreva abaixo o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de **x** e **y**, o tipo de retas encontradas e a classificação dos sistemas lineares.

c) *Ainda no *software* Winplot, digite a equação da reta 3x + 5y = 4, observe o gráfico.

*Digite outra equação alterando, apenas, o coeficiente da incógnita **x**.

*Verifique o gráfico.

*Digite outra equação, mudando, desta vez, o coeficiente da incógnita **y.**

*Escreva abaixo o que você encontrou ao relacionar os coeficientes de **x** e **y**, o tipo de retas encontradas e a classificação dos sistemas.

Questão 2

Use o *software* Winplot, digite duas equações que representem as retas abaixo e após construí-las, escreva as equações obtidas.

a) duas retas paralelas..

b) duas retas concorrentes...

c) duas retas coincidentes..

PARTE B

Parte B_1

Questão 1

Para uma partida de futebol, foram colocados à venda três tipos de ingresso:

- *para o setor verde, ao preço de R$ 12,00*
- *para o setor azul, ao preço de R$ 18,00*
- *para o setor branco, ao preço de R$ 25,00.*

Sabendo que 38.000 torcedores pagaram R$ 620.000,00 para assistir a essa partida, sendo que o número de ingressos vendidos para o setor verde foi o dobro do número de ingressos vendidos para o setor azul, quantos torcedores pagaram ingresso para o setor verde?

Questão 2

Usar o método da Adição para a resolução dos seguintes sistemas lineares 3 x 3, indicar o conjunto solução e classificá-lo.

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + 6y - 2z = 20 \\ 6x + 9y - 3z = 40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -3x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = -2 \\ -6x - 6y + 6z = -6 \\ -8x - 8y + 8z = -8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 4x + y + 4z = 7 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + y - z = 20 \\ x + 3y + z = 10 \\ -x + 5y + 3z = 30 \end{cases}$

Parte B_2

Questão 1

O sistema linear 3x3 é associado a três planos no espaço, em que cada um deles representa uma equação. Com a ajuda do software Winplot, construa em (3D) os gráficos dos sistemas lineares propostos na questão 2 da parte B_1.

Questão 2

Analise os resultados obtidos na resolução gráfica dos sistemas lineares da questão 1, dê o conjunto solução e classifique os sistemas em sistema possível determinado (SPD), sistema possível indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Esta sequência didática faz parte da dissertação de Ana Lucia Infantozzi Jordão, intitulada: "Um Estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.