PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Rogério Osvaldo Chaparin

Concepções de Divisibilidade de Alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da Teoria APOS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2010

PONTIFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Rogério Osvaldo Chaparin

Concepções de Divisibilidade de Alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da Teoria APOS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado**.*

São Paulo

2010

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Data:** ____________________

AGRADECIMENTOS

A Professora Doutora ***Silvia Dias Alcântara Machado*** *pela infinita paciência que teve com o seu orientando e principalmente pela sua dedicação.*

Aos meus colegas de grupo que deram valiosa contribuição com sugestões, criticas e questionamentos.

A minha querida professora ***Arlete****, professora do ginásio que foi a primeira a me incentivar com sabedoria no aprendizado da matemática.*

Ao meu colega ***Washington*** *pelo incentivo dado para ingressar no mestrado.*

Aos meus pais pelo esforço em proporcionar um ensino de qualidade.

A minha esposa pelo apoio e compreensão.

O Autor

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar quais as concepções dos alunos de um primeiro ano do ensino médio sobre o conceito de divisibilidade dos números naturais. A relevância deste estudo está na importância que, segundo Campbell e Zazkis (1996) e Resende (2007), tem os conceitos pertinentes a divisibilidade no desenvolvimento do pensamento matemático, nas atividades investigativas em qualquer nível de ensino, na identificação e reconhecimento de padrões, na formulação de conjecturas e principalmente na resolução de problemas. Para alcançar tal objetivo usei como aporte teórico a Teoria APOS para análise dos protocolos, Sfard na formulação da idéia de concepção e as pesquisas de Rina Zazkis na elaboração de atividades. Para a coleta de dados optei por uma sequência didática composta por 4 atividades realizada em duplas de alunos do primeiro ano do ensino médio na escola que leciono. Os resultados dessa pesquisa revelam que os alunos tiveram grande dificuldade na manipulação da operação da divisão, concebem na sua maioria a divisibilidade por meio de ações, algoritmos, procedimentos. Não souberam deduzir relações, informações, ou seja, principalmente não compreenderam que a representação em fatores primos é uma forma muito importante para relacionar os conceitos de múltiplo e divisor. Os sujeitos não conseguiram aplicar os conceitos citados acima numa situação contextualizada em uma situação do cotidiano. Desta forma conclui que é necessário dar uma ênfase maior para os assuntos básicos da Teoria Elementar dos Números no ensino da matemática.

Palavras-chave: Divisibilidade, Teoria Elementar dos Números, Concepção, Teoria APÓS.

ABSTRACT

This study aims to investigate the students' conceptions of a first year high school on the concept of divisibility of natural numbers. The relevance of this study is the importance that, according to Campbell and Zazkis (1996) and Resende (2007), has the divisibility concepts relevant in the development of mathematical thinking, in research activities at any level of education, identification and pattern recognition, in the formulation of conjectures and especially in solving problems. To achieve this I used as the theoretical APOS Theory to analyze the protocols, Sfard in formulating the idea of design and research Rina Zazkis building activities. To collect the data I have chosen a didactic sequence consists of four activities performed in pairs of first year students of high school I teach at school. These survey results show that students had great difficulty in handling the operation of the division, designing mostly divisibility through actions, algorithms, and procedures. They did not know deduce relations, information, ie, mainly not understand that the representation in prime factors is a very important way to relate the concepts of multiple and divisor. The students were unable to apply the concepts mentioned above in a situation contextualized in a situation of daily life. Thus concludes that it is necessary to give greater emphasis to basic issues of the Elementary Theory of Numbers in the teaching of mathematics.

Keywords: Divisibility, Elementary Theory of Numbers, Conception, Theory APOS.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com a corrente da Matemática “Moderna” a Teoria Elementar dos Números ficou relegada ao segundo plano nos currículos de Matemática apesar da sua importância histórica e das suas aplicações. Outro ponto relevante nos currículos atuais é a supervalorização do contínuo em relação ao discreto, ou seja, o estudo dos números inteiros praticamente fica restrito ao 6° e 7° do ensino fundamental como podemos constatar nos livros didáticos.

Felizmente, com o contato que comecei a ter com problemas de olimpíadas de matemática pude mudar a visão restrita, limitada e simplista que tinha da Teoria Elementar dos Números para uma visão repleta de desafios, conjecturas, de atividades que envolvem padrões, generalizações e principalmente em resolução de problemas contextualizados em situações do cotidiano e na própria matemática básica e elementar. Essa mudança provocou mudanças substanciais na minha prática de professor. Conseqüentemente tudo isso provocou reflexões, dúvidas, incertezas e questionamentos.

Ingressando na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, me inseri no Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA – e o subprojeto que veio ao encontro às minhas inquietudes foi o subprojeto “A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e Licenciatura”. Os estudos de Marilene Resende, Rina Zazkis e Dubinsky foram de extrema importância na delimitação da minha pergunta de pesquisa, **Qual a concepção de divisibilidade dos estudantes que ingressam no Ensino Médio?**

Apresento agora a organização desta pesquisa em capítulos, referencias e anexos.

No Capítulo 1, descrevo detalhadamente as transformações ocorridas nas minhas crenças em relação à Matemática, principalmente no que tange o trabalho com os números inteiros especificamente manipulando os conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números tais como: múltiplo, divisor, teorema fundamental da Aritmética, números primos e compostos. Enumero aspectos importantes de pesquisas anteriores feitas dentro do grupo GPEA, as ideias centrais dos livros de Rina Zazkis e Campbell (2002 e 2006) e trago à tona os contrastes presentes no Ensino da Matemática sobre os conceitos citados acima. Tal problemática sinaliza para a minha pergunta de pesquisa delimitada pelos objetivos: 1) Verificar quais são as influências exercidas pelas representações dos números naturais na concepção de divisibilidade; 2) Segundo a teoria APOS, quais são as construções mentais que os estudantes revelam a partir das atividades propostas? Os estudantes exercem algum tipo de conexão entre os conceitos divisor e múltiplo?

O Capítulo 2 é dedicado ao meu objeto matemático de pesquisa, a divisibilidade, ao qual apresento inicialmente um breve desenvolvimento histórico, que tem como fonte central os livros de Euclides e as ideias sobre números dos pitagóricos. Num segundo momento, contextualizo dentro da Educação Matemática com investigações que abordaram conceitos que compõem tal objeto matemático como divisor, múltiplo, fator, Teorema Fundamental da Aritmética, números primos e a influência das diversas representações na compreensão desses conceitos.

O Capítulo 3 é dividido em três partes que compõem as escolhas teórico-metodológicas. A primeira parte desenha os pontos centrais da Teoria APOS que serão usadas na análise dos protocolos com vista a “enxergar” as concepções que os alunos revelam por meio das atividades propostas. Na segunda parte, apresento a forma que acho mais adequada para o entendimento do conceito de concepção baseada no estudo de Anna Sfard. E por último, caracterizo as fases da Engenharia Didática, pois utilizo alguns pressupostos dessa metodologia.

No Capítulo 4, descrevo a pesquisa de campo constituída do perfil do sujeito, a elaboração das quatro atividades composta de estratégias esperadas, objetivos e as variáveis didáticas utilizadas, a descrição da sessão e por fim a análise dos protocolos.

O Capítulo 5 é dedicado às considerações finais com reflexões, os resultados da pesquisa.

Por fim, coloco dois anexos. Um deles para ilustrar questões das olimpíadas de matemática e o outro sobre as questões que o pesquisador Bodi (2006) utilizou em sua pesquisa.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Após 12 anos de docência em escolas da Educação Básica, no Ensino Fundamental II, em 1999 fui contratado por uma escola particular cujos alunos eram convidados a participar de olimpíadas de matemática, paulista e brasileira. A partir da docência nessa escola, também no Ensino Fundamental II tomei conhecimento das olimpíadas e das questões propostas nas mesmas. Fiquei surpreso com o teor desafiante dessas questões as quais eram completamente diferentes dos exercícios normalmente propostos pelos livros didáticos que conhecia e utilizava.

Fora do horário de minhas aulas regulares, permanecia na escola como um professor "coringa", aquele que substitui qualquer professor em qualquer série quando necessário, quando deveria trabalhar com atividades extracurriculares. Resolvi, então, trabalhar nessas ocasiões com questões semelhantes às propostas nas olimpíadas. Nessas ocasiões percebi o envolvimento dos alunos com esses tipos de questão. Na realidade utilizava muitas questões da área da Teoria dos Números, pois me pareciam mais acessíveis aos alunos.

Esse trabalho como professor "coringa" levou a rever minha prática habitual como professor de matemática. Anteriormente eu estava habituado a tratar os tópicos, múltiplo, divisor, números primos, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum apenas na 5ª série/ 6º ano conforme apresentação dos livros didáticos. Após tomar conhecimento e utilizar questões da teoria dos Números em todas as séries do Ensino Fundamental passei a introduzir em minhas aulas regulares questões desafiantes da Teoria dos Números e pude perceber a capacidade motivadora dessas questões para meus alunos.

Em 2004 comecei a dar aulas também no Ensino Médio e me questionei sobre a possibilidade de introduzir questões da Teoria dos Números nesse nível de ensino. Ao observar as provas das olimpíadas em nível nacional

e internacional para o Ensino Médio percebi a presença de várias questões relativas à Teoria dos Números. No anexo 1 exemplifico uma questão de cada um dos diferentes níveis do Ensino Básico.

Assim, esse contato com questões da OBM provocou uma mudança em minha forma de trabalhar os conteúdos da matemática, não só na escola particular, mas também nas escolas públicas em que lecionava. A mudança foi, sobretudo na introdução de problemas similares aos das olimpíadas os quais mostravam ser um recurso motivador do envolvimento de mais alunos nos cursos que ministrava. Ao longo do tempo fui percebendo a validade da mudança feita, mas sentia a falta de uma base teórica que justificasse e aperfeiçoasse essa minha experiência pedagógica.

Em 2007, quando soube que a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo estava oferecendo bolsa para pós-graduação aos professores da rede estadual, decidi ingressar no mestrado no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC SP, com a intenção de aprofundar os conhecimentos didático-pedagógicos que justificassem e aperfeiçoassem minha prática docente.

Ao iniciar meu mestrado nesse Programa me inseri no Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA. O projeto que justifica a criação desse grupo "Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?", afirma que:

> Quanto à Teoria dos Números, [...] os PCN explicitam inúmeros conteúdos e atividades que envolvem operações, procedimentos, funções e aplicações associados, de uma forma ou de outra, com números e sua compreensão conceitual. Esses tópicos são tipicamente tratados sob as rubricas de aritmética e de álgebra, de acordo com o nível curricular em que se encontram. (MACHADO et al, 2005, p. 13)

Na realidade os pesquisadores do GPEA entendem a Teoria Elementar dos Números a ser tratada no Ensino Básico como parte integrante da Educação Algébrica.

Após me inteirar sobre os diversos projetos do GPEA, em decorrência de minha experiência docente escolhi participar do projeto de pesquisa denominado: *A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e Licenciatura* cujo objetivo é investigar o estatuto que a Teoria Elementar dos Números tem nos campos institucional, docente e discente. A partir deste parágrafo denotarei Teoria Elementar dos Números pela sigla: TEN.

A participação no GPEA em geral, e mais especificamente nas reuniões do grupo do projeto ao qual me vinculei me levou a leituras da área da educação matemática, da educação algébrica e mais especificamente de pesquisas relativas ao ensino e aprendizagem de TEN. As referências teóricas do projeto me revelaram a amplidão e importância do tema não só para a Educação Brasileira quanto para qualquer outro país, pois as pesquisas esclareciam as dificuldades de alunos ao redor do mundo todo com o tema.

Percebi que vários trabalhos na Educação Matemática tinham como foco o ensino fundamental, a formação continuada de professores e a licenciatura. Constatei a escassez de trabalhos que visavam esse tema no ensino médio. Dessa forma percebi a importância de se pesquisar o tema no Ensino Médio, o que vinha ao encontro de meu interesse.

Sobre a escassez de tais trabalhos recorro aos pesquisadores Zazkis e Campbell (2002, 2006) que apontaram nessas obras que tanto no ensino quanto nas pesquisas de matemática, a Teoria dos Números tem recebido pouca atenção. No livro de 2006 os autores explicam que tal descaso decorre da mudança ocorrida aproximadamente a partir de 1960, quando se mudou o foco dado ao ensino da matemática, isto é, do forte formalismo passou-se para uma ênfase na “contextualização”. Claro que tal mudança também trouxe vários problemas. Um deles o abandono do ensino da Teoria dos Números apesar das inúmeras vantagens que apresenta, conforme citadas por Campbell e Zazkis (2006):

> Tópicos da Teoria dos Números, como fatores, divisores, múltiplos e congruências fornecem caminhos naturais para o desenvolvimento e solidificação do pensamento matemático, desenvolvendo uma rica apreciação da estrutura numérica, especialmente com respeito à identificação e reconhecimento de padrões, formulando e testando conjecturas, compreendendo princípios e provas, e justificando a veracidade dos teoremas de forma disciplinada e lógica[1] (p. 2) (tradução do autor).

Resende (2007) corrobora e amplia a potencialidade contida na Teoria Elementar dos Números com ênfase nos números inteiros:

> Assim, a Teoria Elementar dos Números, ao ter como foco o estudo dos números inteiros, é um campo propício para o desenvolvimento de atividades investigativas, pois a exploração de padrões e de relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, envolvendo os números inteiros, a divisibilidade e números primos estiveram e estão presentes na matemática e podem ser exploradas nas atividades escolares, em qualquer nível. (p. 209).

Ratificando a afirmação anterior em relação às pesquisas, Kieran e Gusmán (2006) comentam que no México e no Canadá normalmente as investigações envolvendo estudantes de 12 a 15 anos são centradas na compreensão do desenvolvimento do raciocínio algébrico, geométrico e proporcional, poucas delas são orientadas para a compreensão conceitual de fatores, múltiplos, números primos e divisibilidade. E em relação ao ensino brasileiro para a mesma faixa etária, isto é, o fundamental a partir do 6º ano, Rama (2005) analisou três coleções de livros de matemática do ensino fundamental todas aprovadas pelo PNDL (Plano Nacional do Livro Didático) nas quais verificou a forma como os autores abordam os números inteiros, em particular o conceito de divisibilidade e concluiu que nessas coleções o assunto é tratado "quase exclusivamente" no 6º e 7º ano, no âmbito dos números naturais, sendo que não são retomados quando do estudo dos números inteiros. Castela (2005), ao investigar a concepção de divisão de alunos do 7º ano, constatou a forte tendência ao uso da técnica em detrimento da exploração de estratégias de resolução de problemas. Será que esses alunos ao chegarem no ensino médio apresentam essa tendência citada acima? Já que os alunos estudaram

[1] Topics from number theory, such as factors, divisors, multiples and congruences provide natural avenues for developing and solidifying mathematical thinking for, developing enriched appreciation of numeral structure, especially with respect to identifying and recognizing patterns, formulating and testing conjectures, understanding principles and proofs, and justifying the truth of theorems in disciplined and reasoned ways.

principalmente divisibilidade no 6º e 7º ano, surge a pergunta de como eles concebem tal conceito após um período de “ausência” vivenciada no 8º e 9º ano?

Castela (2005) sugeriu que a divisibilidade dos números inteiros deveria ser estudada em todo o ensino básico, no entanto Rama (2005) verificou em sua pesquisa que tal assunto não é trabalhado em todo o ensino básico. Esse autor, após análise das onze coleções de livros didáticos para o Ensino Médio recomendadas pelo PNLEM - Plano Nacional do Livro do Ensino Médio constatou principalmente que “[...] a revisão dos inteiros feita no início dos primeiros livros dessas coleções” é superficial; o conceito de divisibilidade é agraciado em poucos exercícios padronizados e menos ainda explorado em problemas. O currículo de matemática do Ensino Médio poderia acrescentar o trabalho com as equações diofantinas que seria uma ótima oportunidade de trabalhar com os números inteiros.

Concordo plenamente com Pommer (2008) que os estudos voltados para as equações diofantinas são uma ótima oportunidade de trabalhar com conhecimentos elementares da Educação Básica, envolvendo conceitos de múltiplo, divisor, máximo divisor comum de números inteiros. O autor reforça que mesmo em estudos sobre as equações diofantinas não se vê mencionada a condição de existência de soluções inteiras, ou seja, o uso do máximo divisor comum. Pommer (2008) destaca que mesmo nas resoluções das equações diofantinas por tentativa e erro, o uso dos conceitos de múltiplo e divisor é um instrumento facilitador. Tais conceitos permitem o desenvolvimento de habilidades como interpretar, conjecturar e ainda colaboram para a busca de estratégias na resolução das equações propostas.

Silva Junior (2009) constata que na Proposta Curricular do Estado de São Paulo presente no Caderno do Professor de 2008, a Teoria Elementar dos números está localizada no 1º bimestre do 1º ano do Ensino Médio. Algumas atividades favorecem a discussão dos conceitos de múltiplos, divisores, regra de divisibilidade, números primos, algoritmo da divisão, máximo divisor comum, decomposição em fatores primos. Silva Junior (2009) afirma que tais atividades colaboram para o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas, para o raciocínio de provas e teoremas envolvendo números inteiros, a formulação de conjecturas e provas por indução. O mesmo cita como exemplo que favorece a discussão da divisibilidade a seguinte atividade: Calcule a soma dos números inteiros, divisíveis por 23 existentes entre 103 e 850.

Para verificar se os estudantes apresentam algum tipo de compreensão conceitual acredito ser importante que as atividades propostas a esses alunos tenham representações diferentes e acho oportuno o uso do Teorema Fundamental da Aritmética , ou seja, como produto de fatores primos.

Em geral, os elementos como múltiplo, divisor, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum que compõem o conceito de divisibilidade são solidificados a partir de regras, algoritmos, esquemas e muito pouco tratado em resolução de problemas. Machado et al (2005), pesquisadoras do GPEA, concluíram pelos resultados de uma pesquisa que investigou o uso feito por alunos e professores do Teorema Fundamental da Aritmética que os assuntos pertinentes à TEN na formação do professor, são enraizados em algoritmos, em oposição à compreensão conceitual. Essas autoras afirmam que

> A Teoria Elementar dos Números tem um potencial formador que vem sendo negligenciado em todos os segmentos de escolaridade e indicam algumas potencialidades para o seu ensino: auxiliar a reconhecer e compensar limitações de estudantes em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros; criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas fecundos que desenvolvam a compreensão conceitual da matemática; instigar as habilidades de estudantes para generalizar e fazer conjecturas e para encontrar maneiras de justificar essas conjecturas; promover o desenvolvimento de estratégias de prova indutivas e dedutivas (MACHADO; MARANHÃO; COELHO, 2005, p. 2).

Os PCN reforçam a importância de lidar com os conceitos básicos da divisibilidade além da mecanização que não proporciona uma compreensão desses conceitos que podem ser usados em situações problemas:

> Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. (Brasil, 1997, p. 66).

No entanto, Machado et al (2005) e Resende (2007) alertam para a ênfase dada ao caráter pragmático que os PCN imprimem a este tema, o que traz conseqüências para o ensino da matemática, na medida em que contextos formais ligados a operações, propriedades e estruturas dos números passam a ser abandonados. Tal fato é confirmado pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) quando tal documento exemplifica que o trabalho de Números e operações deve se basear na resolução de problemas do cotidiano tais como: operar com números inteiros, decimais, frações, porcentagem, realizar cálculos mentais (estimar), analisar tabelas e gráficos, trabalhar com problemas geradores que ampliem os conjuntos numéricos e outros. Em nenhum instante cita-se o trabalho com números inteiros com suas propriedades e estruturas, ou seja, é nítido o abandono citado por Machado et al (2005).

Acredito que minha pesquisa pode contribuir efetivamente para verificar se os alunos utilizam propriedades e estruturas pertinentes aos números inteiros por meio da divisibilidade.

Resende (2007) constatou que os alunos quando chegam à universidade apresentam grandes dificuldades na manipulação dos números inteiros. Minha pesquisa tem a intenção de alinhar se tal fato também acontece quando os alunos ingressam no ensino médio, tendo como objeto de estudo a divisibilidade dos números inteiros.

Resende (2007) ao analisar os livros de Teoria dos Números constatou que todos os livros tratam de questões ligadas à divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, números primos, teorema fundamental da aritmética, mas infelizmente a abordagem dada foi sistemática e lógico-formal-dedutiva, não tendo atividades de investigação e de exploração. Resende reforça que num curso de formação de professor de escola básica é de fundamental importância retomar os conteúdos ligados aos números inteiros envolvendo as operações e as suas propriedades e a divisibilidade e que a tal abordagem citada acima não colabora para a reflexão, a reconstrução e a ampliação dos significados dos conhecimentos que deverão ser ensinados. Sobre essa questão, Resende cita Moreira que analisou o conhecimento matemático do professor no tratamento em relação ao estudo dos números naturais e constatou que as questões ligadas à divisibilidade são partes importantes dos saberes profissionais dos docentes. Resende (2007) vai mais longe quando afirma que por meio dos resultados dos vestibulares, das avaliações como ENEM e SAEB, pode-se perceber que os alunos têm chegado aos cursos de licenciatura cada vez menos preparados quando o assunto refere-se ao estudo dos números inteiros. Dentre as inúmeras questões sugeridas pela problemática descrita, e levando em conta as pesquisas do GPEA em andamento, decidi investigar:

Qual a concepção de divisibilidade dos estudantes que ingressam no Ensino Médio?

Para responder a essa questão de pesquisa acho oportuno desdobrar em três outras questões:

a) Quais são as influências exercidas pelas representações dos números naturais na concepção de divisibilidade?
b) Segundo a teoria APOS, quais são as construções mentais que os estudantes revelam a partir das atividades propostas?
c) Quais as conexões que os estudantes fazem entre os conceitos de divisor e múltiplo?

CAPÍTULO II

DIVISIBILIDADE

2.1 Síntese do desenvolvimento histórico

Para responder à questão sobre a concepção de divisibilidade dos estudantes que ingressam no Ensino Médio, e melhor compreensão dos problemas relacionados à divisibilidade, achei conveniente apresentar um breve histórico sobre o desenvolvimento desse conceito.

Na elaboração deste capítulo me baseei principalmente nos trabalhos de Boyer (1974), Bicudo (2008) e de Resende (2007).

A divisibilidade na Antiguidade foi muito útil na agricultura e na pecuária, e na dependência e relação com as estações climáticas e ciclos lunares que ajudaram no desenvolvimento de diversos calendários.

Os objetos da matemática da sua origem até o século XIX foram compostos basicamente de números, magnitude e figuras. Na matemática da Grécia clássica destacam as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e Diofanto. Essas obras serviram de parâmetro para a matemática desenvolvida no século XVI, XVII e XVIII (Boyer, 1974).

O estudo dos múltiplos, dos divisores e da decomposição em fatores primos dos números naturais tem constituído um capítulo fundamental da Aritmética. Destaca-se da Antiguidade, a obra “Elementos” de Euclides, conjunto de treze volumes, que concebeu de maneira axiomática o saber matemático de seu tempo. Os livros VII, VIII e IX, em particular, reúnem os tratados de Aritmética, e oferece uma descrição da Teoria dos Números, ou seja, das propriedades dos números inteiros e das razões entre os mesmos.

Na tradução de Bicudo (2009), o livro VII de Euclides apresenta 23 definições. Apresento algumas definições contidas nas páginas 269 e 270.

- Definição 1: “Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dito uma”.
- Definição 2: “E número é a quantidade composta de unidades.”
- Definição 3: “Parte” (Divisor) – “Um número é parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior”. Percebe-se a partir da definição 3 que Euclides associa número com a noção de medida de um segmento.
- Definição 4: “Partes” (não divisor) – “E partes, quando não meça exatamente”.
- Definição 5: “Múltiplo” - “E o maior é múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor”.

Nas definições de 6 a 11 ele define os números pares e ímpares.

- Definição 12: “Um número primo é o medido por uma unidade só”.
- Definição 13: “Números primos entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum”.
- Definição 14: Número composto é o medido por algum número.
- Definição 15: “Números compostos entre si são os medidos por algum número como medida comum”.

Nas outras definições, Euclides completa a categorização dos números definindo número plano, sólido, quadrado, cubo e perfeito, e estabelece algumas relações entre esses números.

As definições de divisor, múltiplo e das distintas classes de números foram realizadas por meio de magnitude. Os gregos não concebiam os números como são concebidos na Matemática atual. Consideravam razões (A:B) entre magnitudes ou proporções, mas conceitualmente não podiam formar o produto A x B, noções que nunca definiram.

Geralmente, entendiam o “produto” de duas magnitudes como uma área ou um volume.

O livro VII se completa com 39 proposições que se juntam com as 27 do livro VIII e as 36 do livro IX e constituem investigações teóricas que tiveram como objetivos:

1) Estabelecer um procedimento conhecido como **“**Algoritmo de Euclides**”**, para calcular o Máximo Divisor Comum – MDC – de dois ou mais números desenvolvidos através das proposições VII-1 a VII-3:
2) Propor distintas propriedades da divisibilidade desde a proposição VII-4 até a proposição VII-11.

“Todo número é parte de todo número, o menor do maior”. (Proposição 4)
“Se um número é parte de um número, e outro é a mesma parte de outro, a soma será também a mesma parte da soma que o primeiro do outro” (Proposição 5).

3) Elaborar a teoria das proporções para números mediante as proposições VII-12 a VII-20.
4) Definir e estabelecer propriedades dos números primos entre si a partir das proposições VII-21 a VII-29.
5) Classificar os números em composto e primo (Proposição VII-31 e VII-32) respectivamente.
6) Estabelecer um procedimento para calcular o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números desenvolvidos através das proposições VII-33 a VII-39. Por exemplo:

"*Dados tantos números como se queira, achar os menores daqueles que guardam a mesma razão que eles*" (Proposição 33).

"*Dados dois números, achar o menor número ao que medem*" (Proposição 34).

"*Se dois números medem a algum número, o número menor medido por eles, também medirá o mesmo número*" (Proposição 35).

"*Dados três números, achar o número menor ao que medem* "(Proposição 36).

No livro IX de Euclides, entre as 36 proposições que o constituem, as proposições IX-1 a IX-11, estabelecem propriedades dos "produtos" entre números sólidos, cubos, quadrados; a partir das proposições IX-21 a IX-34, propriedades dos números pares e impares.

Ademais se incluem a Proposição X-20:

"*Há mais números primos que qualquer quantidade proposta de números primos*"

Que estabelece que o conjunto de números primos é infinito, junto com proposições próximas ao Teorema Fundamental da Aritmética:

"*Se tantos números como se queira a partir de uma unidade são continuamente proporcionais, por quantos números primos seja medido o último, pelos mesmos será medido também o seguinte à unidade*". (Proposição12)

"*Se tantos números como se queira a partir de uma unidade são continuamente proporcionais e o seguinte ä unidade é um número primo, o maior não será medido por nenhum outro fora dos que se encontram entre os números proporcionais".* (Proposição 13).

"*Se um número é o menor medido pelos números primos, não será medido por nenhum outro número primo fora os que o mediam desde o princípio". (Proposição 14)*

Essas proposições constituem teoremas próximos ao Teorema Fundamental da Aritmética, mas este teorema não podia ser concebido pelos gregos, já que estes não chegavam a conceber o produto de números reais e nunca chegaram a dar conta de que em matemática se pode conceber uma "existência" totalmente independente da "construção". Estes dois aspectos são necessários para idealizar o Teorema Fundamental da Aritmética.

Outro referencial importante foi Pitágoras e os pitagóricos.

Segundo Eves (1997):

> "A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria é os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com geometria, a música e a astronomia". (Eves, p. 97).

Eves (1997) admite que os primeiros passos no sentido do desenvolvimento da teoria dos números foram dados por Pitágoras e seus seguidores.

Segundo os pitagóricos *Tudo é número*, pois a extensão era constituída de unidades indivisíveis separadas por um intervalo. Os números naturais quando aplicados aos objetos geométricos requeriam que todas as medidas pudessem ser expressas na forma de razão de inteiros, isto é, pudessem ser mensuradas, tendo por base um segmento fixado como unitário.

Boyer (1974) enumera algumas contribuições dos pitagóricos: números perfeitos são números inteiros cuja soma dos divisores próprios do número (excluindo ele mesmo) é igual ao próprio número. Outra contribuição é sobre os números "amigáveis": dois números **a** e **b** são "amigáveis" se **a** é a soma dos divisores próprios de **b** e **b** é a dos divisores próprios de **a**.

Outro ponto citado por Eves (1997) foi de que os pitagóricos relacionavam a geometria e a aritmética através dos *números figurados*, isto é, expressavam os números através de pontos em determinadas configurações geométricas. Por meio desse recurso podem-se mostrar muitos teoremas interessantes como: a soma de um número qualquer de inteiros ímpares consecutivos, começando com o 1, é um quadrado perfeito.

Cito ainda que ligado ao teorema de Pitágoras está o problema de encontrar lados cujas medidas sejam números inteiros de um triângulo retângulo, ou seja, encontrar terno pitagórico.

Eves (1997) salienta que a partir do século XVI, devido à necessidade tecnológica, científica e mercantil, melhoraram e estenderam os métodos operatórios. A extensão da teoria da divisibilidade a outros conjuntos tem sua referência histórica em Stevin, que em um livro publicado em 1634, estende o algoritmo de Euclides ao cálculo do máximo divisor comum de dois polinômios. No século XVII, Fermat considerava a aritmética como um domínio próprio e seus trabalhos determinaram a direção da Teoria dos Números até Gauss. Destaca em sua obra sobre Teoria dos Números a teoria da divisibilidade, os números primos, o tratamento dos números perfeitos.

Eves (1997) declara que Euler em 1770 tratou de ampliar o conceito de divisor além do conjunto dos números inteiros e dos polinômios, encontrando-se com o problema de que não é possível conservar todas as propriedades nessa extensão, em especial, a da existência do máximo divisor comum e a unicidade da decomposição em fatores primos. Até o século XIX, a teoria da divisibilidade se desenvolve no conjunto dos números inteiros.

Nas obras de Gauss "*Disquisciones arithmeticae*" se encontra pela primeira vez o conceito de número congruente e se desenvolvem as propriedades da teoria das congruências. No trabalho de Gauss incluem-se o Teorema Fundamental da Aritmética para o domínio de integridade dos números inteiros, que indica que todo número inteiro pode expressar-se como um produto finito de números primos, em que alguns fatores podem repetir-se, e tal que sua representação é única. Gauss também introduz a noção de grupo abeliano e demonstra que nos grupos abelianos finitos existe um elemento do grupo cuja ordem é mínimo múltiplo comum das ordens de todos os elementos.

Um dos corolários ao teorema de Euclides sobre a existência de infinitos números primos, foi enunciado por Dirichlet. No século XIX, autores como Kummer, Dedekind e Kronecker generalizam a Teoria dos Números, em particular a teoria da divisibilidade, mediante a criação da estrutura de ideal. A álgebra comutativa moderna começa a formalizar-se a partir de 1910 e nessa década aparece a noção geral de anel devido a Fraenkel. A Teoria dos Números ocupa, a partir do século XX ,uma posição destacada a respeito da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. A Teoria Elementar dos Números abrange desde esse século um amplo espectro no âmbito das Matemáticas.

Destaco como relevante e oportuno o estudo da estrutura multiplicativa e a da divisibilidade no conjunto dos números inteiros, onde se encontram os conceitos de múltiplo, divisor, fator, ser divisível e critérios de divisibilidade, o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum, números primos e compostos, o Teorema Fundamental da Aritmética.

2.2 Investigações na Educação Matemática

As investigações sobre a compreensão do conceito de divisibilidade dos números inteiros revelam a existência de dificuldades na aprendizagem e a necessidade de uma maior indagação neste campo. A maioria das investigações realizadas com estes tópicos se tem feita inicialmente com estudantes que fazem licenciatura em Matemática ou professores em formação continuada e desde a perspectiva da análise da compreensão destes conteúdos matemáticos que se devem ensinar.

O foco que norteia essas investigações e que podem ser usadas na compreensão da divisibilidade no âmbito do ensino básico são:

- Centrados basicamente na análise da compreensão das relações entre as diferentes acepções léxicas tais como fator, divisor, múltiplo e outros.
- O papel que desempenham as diferentes representações dos números (decimal e decomposto em fatores primos) na compreensão dos conteúdos da divisibilidade.

Zazkis e Campbell (1996 a) concluíram que uma minoria (6 de 21) dos professores que participaram da pesquisa sobre divisibilidade e estrutura multiplicativa dos números naturais foi capaz de discutir de forma consistente e demonstrou uma compreensão de divisibilidade como uma propriedade ou uma relação entre números naturais. A maioria mostra que a sua construção de divisibilidade não se desenvolve além das ações, ou seja, a estratégia utilizada para responder as questões está sedimentada em efetuar divisões. Zazkis e Campbell (1996 a) salientam que a encapsulação da divisibilidade como um objeto deve começar pelo discernimento entre divisibilidade como uma propriedade e a divisão como um procedimento. Esse fato mostra que a divisibilidade é uma estrutura cognitiva muito complexa. Além disso, a encapsulação exige uma compreensão da relação inversa entre as operações de multiplicação e divisão. Fazer uma conexão entre divisibilidade e a decomposição em fatores primos contribui de forma consistente com a compreensão da divisibilidade como um esquema generalizado.

Apresento as questões que fizeram parte da pesquisa de Zazkis e Campbell (1996 a):

Considere o número M = $3^3 x 5^2 x 7$.

M é divisível por 7? Explique.

M é divisível por 5, 2, 9, 63, 11,15? Explique.

a) 391 é divisível por 23?

b) 391 é divisível por 46?

Considere os números 12358 e 12368. Há um número entre esses números que é divisível por 7? Por 12?

a) O número 15 tem exatamente 4 divisores. Pode listá-los? Você sabe outros números que tem exatamente 4 divisores?

b) O número 45 tem exatamente 6 divisores. Você pode listá-los? Você sabe outros números que tem exatamente 6 divisores?

Já Campbell (2006) assinala que há fortes evidências de que quando os estudantes apresentam dificuldades na compreensão da Teoria Elementar dos Números, é porque normalmente eles estão pensando na divisão com resto em termos de números racionais ou reais. Em seu trabalho notou-se que 10 de 10 estudantes que consideraram o Algoritmo da Divisão[2] não conseguiram êxito. Em contrapartida, 7 dos 8 estudantes que utilizaram o modelo em que o quociente era racional ($a = q.d$, sendo q um número racional) tiveram sucesso.

Brown, Thomas e Tolias (2002) também perceberam que a falta de conexão com a estrutura multiplicativa proporciona dificuldades na compreensão da divisão de números inteiros. A expressão $A= Q.D$ pode ser considerada no conjunto dos números inteiros, ou seja, D é um divisor de A e tal proposição pode ser também analisada no conjunto dos números racionais. Tal situação provoca uma confusão.

Campbell (2006) ressalta que as investigações na aula podem ajudar a superar determinadas dificuldades relativa a compreensão das noções da aritmética elementar e, em particular, da divisibilidade. Tais investigações tornam-se referências fundamentais na ajuda de sanar as dificuldades que se mostram na compreensão da aritmética básica e também ajuda na maneira como ensinam as crianças.

Em relação à compreensão da divisibilidade no conjunto dos números naturais, Zazkis (2000) analisa as conexões que efetuam os licenciandos entre os conceitos de fator, divisor e múltiplo, e entre outros conceitos da Teoria Elementar do Número, tais como fatores primos, decomposição em fatores primos, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, ou regras de divisibilidade.

Zazkis considera a equivalência das seguintes relações entre dois números naturais quaisquer:

- b é um fator de a
- b é um divisor de a
- a é um múltiplo de b

Com a existência de duas formas adicionais para expressar a mesma relação entre dois números:

- b divide a

[2] Para todo A e $D \neq 0$ inteiros existe um único Q e R inteiros, tais que $A = D.Q + R$, onde $0 \neq R < D$.

– a é divisível por b

Para analisar quais as equivalências estabelecidas pelos estudantes de pedagogia, futuros professores do ensino básico, Zazkis (2000) realizou 19 entrevistas nas quais as perguntas que formulou eram:

a) Enumere os fatores primos de 117 = 3^2 x 13.

b) Indique os fatores de 117 = 3^2 x 13.

c) Indique os divisores de 117 = 3^2 x 13.

d) 117 é múltiplo de quais números?

e) Existem fatores que não sejam divisores de um número?

f) Existem números que sejam múltiplos e divisores de 117?

A análise dos dados resultantes das entrevistas realizadas, efetuada desde a perspectiva de considerar o conhecimento como uma rede na quais os conceitos matemáticos se estudam relacionados com outros, aponta para os seguintes resultados:

a) A compreensão do conceito de “fator” parece ser o menor problema. Não obstante, os estudantes têm uma compreensão incompleta do mesmo. A maioria deles o associa com a operação de multiplicação e não o entendem como uma relação entre os números,

b) O conceito de “divisor” é mais problemático que o de fator. Existe uma grande tendência entre os alunos ao associar com o papel que pode desempenhar um número na operação da divisão,

c) O conceito de “múltiplo” foi o mais problemático dos três conceitos. Este foi associado à operação de multiplicação,

d) A maioria dos estudantes somente estabelece equivalência lógica entre fator e divisor. O resto da conexão, por exemplo, entre fator e múltiplo, se realiza de forma errônea. As conexões entre os conceitos de fator, múltiplo e divisor não foram estabelecidos por nenhum estudante.

Esta investigação assinala como resultado relevante que os estudantes atribuem aos conceitos significados diferentes dos matemáticos no contexto da Teoria dos Números, e que, as conexões que estabelecem entre estes conceitos são, na maioria das vezes, frágeis ou incompletos.

A divisibilidade é um dos conceitos na Teoria dos Números que apresenta uma ampla gama de descrições léxicas, podendo estabelecer, como já se tem indicado, equivalência lógica entre as seguintes expressões: a é divisível por b, b divide a; b é um fator de a, a é múltiplo de b. Zazkis & Campbell (2002) desenvolveram uma investigação sobre o uso da linguagem na Teoria Elementar dos Números (divisibilidade, decomposição em fatores primos, fatores, divisores e múltiplos) realizando entrevistas clínicas individuais.

A autora em suas conclusões colocou a troca constante e incoerente que realizam os estudantes entre a linguagem formal e não formal. O conceito “ser divisível” entendido como relação entre números, é substituído por “ser dividido” entendido como um número que pode ser dividido por outro com resto zero, considerando que um número pode ser dividido por qualquer outro quociente não sendo inteiro. Os conceitos de divisibilidade também são apreendidos através de imagens mentais de divisão de objetos como é o caso do conceito “ser divisível“ que os estudantes representam mentalmente como conjuntos de objetos de igual número.

A partir deste estudo, Campbell & Zazkis (2006) sugerem metodologias de ensino que promovam e ajudem no uso formal e rigoroso da linguagem matemática a fim de dar sentido ao significado dos conceitos.

Entre as investigações relativas ao papel das distintas representações dos números e as dificuldades que estas geram na compreensão de determinados conceitos da Teoria dos Números, Zazkis e Gadowsky (2001), em seus trabalhos com professores em formação e com alunos de Ensino Médio, destacam as diferentes características das representações dos números naturais nas tarefas que sobre Teoria dos Números foram planejadas.

Os tipos de tarefas planejadas nos questionários e as entrevistas permitem analisar o papel de diferentes representações e as dificuldades que tais representações podem provocar na compreensão dos alunos em relação aos conceitos de divisor, múltiplo enfim em relação à divisibilidade. Neste sentido cabe destacar a tendência dos estudantes a obter a representação decimal dos números naturais para resolver as tarefas planejadas, sem observar as características das representações utilizadas. Por exemplo:

a) Representações em fatores, ou em divisores

Entre as diferentes respostas dadas à pergunta "*Dado o número* $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$*. M é divisível por 7?*" Zazkis e Gadowsky (2001) destacam que a estratégia majoritária é a representação decimal de M para efetuar a divisão, e não consideram que 7 é um fator de M. Esta estratégia mostra que (a) para alguns alunos era mais fácil discutir a divisibilidade por 7 do número 675 x 7 que do número M; (b) para outros era mais fácil discutir a divisibilidade por 7 de M (fator que aparece na representação fatorial) que a indivisibilidade por 11 (fator que não aparece na representação fatorial), e incide no papel primordial que está estabelecida na unicidade da decomposição fatorial de um número (Teorema Fundamental da Aritmética).

Para analisar a visão que os estudantes têm das representações fatoriais na identificação de quadrados perfeitos, os autores planejaram tarefas do tipo: "É 71^2 um número quadrado perfeito? É 71^6 um quadrado perfeito?

No primeiro caso, dada a evidencia da representação, a resposta majoritária foi correta, no segundo caso, os estudantes obtiveram o valor de 71^6 e calcularam a raiz quadrada, sem observar que a representação dada se pode transformar em $(71^3)^2$.

b) *Representações fundamentais no algoritmo da divisão*.

De novo, para resolver a tarefa "Dado o número K = 6 x 147 + 1. Quais são o quociente e o resto na divisão de K por 6?, a preferência dos estudantes foi obter a representação decimal de K e depois efetuar a divisão por 6. Alguns estudantes constataram que K é múltiplo de 6 porque 6 está contido na representação do número mostrado, mas este tipo de observação não foi majoritária.

c) Representações baseadas na propriedade distributiva.

A maior parte dos estudantes para resolver a tarefa "Considere o número A = 15 x 5623 + 60. Pode-se expressar como múltiplo de 15?, obteve a representação decimal de A e dividiram por 15. Não eram capazes de aplicar a propriedade distributiva para discernir que A é múltiplo de 15, ou seja: "15 x 5623 + 60 = 15 x 5623 + 15 x 4 = 15 x (5623 + 4)"

Exemplo de outras dificuldades apresentadas:

a) a dificuldade da tarefa "O número 1215, representado na base 6, é ímpar?", indica que os estudantes estão acostumados a representar os números no sistema de numeração de base 10.

b) a tarefa, "O número 36^3 é um número quadrado?", "apresentou dificuldade aos alunos porque a representação do número não permite observar outra representação alternativa e consideram que o número é um cubo perfeito".

Zazkis e Gadowsky (2001) acreditaram que estes resultados são devidos às experiências prévias dos alunos na escola. Na escola se dá maior preponderância aos cálculos, em detrimento do estudo das estruturas e das características das representações dos números. A importância das representações dos números deve acontecer mediante a apresentação de diferentes expressões e situações, com o intuito de estimular os alunos com representações que excedam as capacidades de cálculo. A escolha das atividades com estas características pode ajudar o estudante na compreensão de peculiaridades dos números naturais, em especial de sua estrutura multiplicativa.

Brown (2002), em sua investigação sobre divisibilidade, também estuda as dificuldades que tem os estudantes para professores em encontrar múltiplos comuns entre números decompostos em fatores primos. As atividades desenvolveram se baseando na seqüência: 2^2x3^4; 2^3x3^4; 2^2x3^5; 2^4x3^5; 2^4x3^4; 2^3x3^5..., a partir da qual se pede aos estudantes que busquem os termos seguintes e que expresse, em produto de fatores primos, o termo que ocupa a posição 200, descrevendo através da representação fatorial o método de obtenção do enésimo termo.

Brown (2002) observou que majoritariamente os estudantes optaram por obter a representação decimal dos números e, posteriormente, tomaram decisões em relação à divisibilidade. Ela acredita que normalmente os estudantes concebem a decomposição em fatores primos como um processo, ou seja, os alunos diante de um número representado como um produto de fatores primos há a tendência de se efetuar as operações indicadas na representação, desse modo retorna-se o número para a forma decimal. Há a necessidade de se trabalhar de forma flexível com a fatoração em fatores primos, sendo capaz de identificar múltiplos, divisores por meio de propriedades básicas como comutativa e associativa da multiplicação. Salienta também que é necessário dar mais ênfase à multiplicação, pois os resultados de sua pesquisa alinham com os resultados de Zazkis e Campbell (1996 a) de que os estudantes utilizam predominantemente a divisão para discernir sobre a divisibilidade. Destaca-se que é muito importante para a compreensão dos estudantes o fato de ocorrer uma relação inversa entre multiplicação e divisão.

Brown (2002) propõe forte ênfase no papel da multiplicação quando introduzir conceitos de divisibilidade, ou seja, relacionar as seguintes sentenças: “A é divisível por B, A é um múltiplo de B, B é um divisor de A”.

Por sua parte, Zazkis e Liljedahl (2004) estudaram o papel da representação na compreensão dos números primos por parte dos professores da escola básica, ensino fundamental I. Os autores sugeriram que a falta de uma representação transparente para um número primo pode ser um obstáculo para a compreensão do conceito de primalidade dos números. O ponto de partida desta investigação foi entender os números primos como ideia básica, ou elemento construtor, da Teoria dos Números. Os números primos são descritos como “elementos construtores” dos números naturais. O termo “elementos construtores” pode ser visto como uma interpretação metafórica do Teorema Fundamental da Aritmética. A propriedade da existência que está por detrás da metáfora “elementos construtores” é a que cria uma imagem dos números compostos como construções multiplicativas de números primos.

A unicidade da decomposição em fatores primos apresenta um desafio para muitos alunos, sua existência é uma propriedade que desde os primeiros anos escolares foi dada como aceita (Zazkis e Campbell, 1996 b). Não obstante, assinalam os autores que o fato de que os números primos sendo um conceito básico não significa que devem ser apresentadas e estudadas isoladamente porque a compreensão dos conceitos matemáticos apresenta uma completa rede de relações e conexões com outros conceitos. A compreensão dos estudantes dos números primos está conectada com a compreensão das relações multiplicativas entre números naturais, fatores, múltiplos, números compostos, e divisibilidade. A importância da compreensão dos números primos, segundo os autores, esta associada à compreensão dos números, os modos de representá-los e as relações entre eles, são aspectos que têm sido identificado pelo Nacional Council of Teachers of Mathematics-NCTM- como fundamentais no estudo de números e operações para todos os níveis (NCTM, 2000).

Das perguntas que formularam Zazkis e Liljedahl (2004) em seu estudo, destaco as que tiveram como objetivo estabelecer a influência que exerce a representação do número escrito como produto de dois números primos nas respostas dos participantes:

2) *Seja o número F = 151 x 157. F é um número primo? Escreva sim ou não e justifique a sua resposta.*
3) *Seja m(2k+1), com m e k números inteiros. Esse número é primo? Pode ser sempre um número primo?*

Dos 116 estudantes que participaram na investigação, 74 afirmaram corretamente a pergunta 2, indicando que F é um número composto. Destes, 52, justificaram sua resposta a partir da definição de número primo ou composto. As respostas incorretas corresponderam a 42 estudantes, que para dar sua resposta utilizaram a representação decimal de F e as regras de divisibilidade. As respostas da pergunta 3 estiveram condicionadas pela notação algébrica utilizada para representar o número. Essa notação impediu o uso de qualquer método algorítmico familiar para os participantes. Sem a opção do uso do algoritmo, os estudantes centraram sua atenção em:

a) Definição (ou uma interpretação da definição) de número primo ou composto. Os alunos que entenderam os números primos como "aqueles que somente são divisíveis por 1 e ele mesmo" tiveram dificuldade para gerar uma resposta. Essa definição os levou a pensar que "os números primos não podem ser representados como um produto" ignorando a possibilidade da fatoração trivial,

b) O poder da convicção dos exemplos.

Quando o número primo foi entendido como "aquele que tem dois fatores", os alunos foram capazes de reconhecer a fatoração trivial e a utilizaram-na como guia para gerar exemplos que lhes permitissem dar uma resposta.

Zazkis e Liljedahl (2004) consideram que: (a) conhecer as definições de números primos não significa que os alunos sejam capazes de utilizar esse conhecimento em uma situação problemática, (b) uma forma de construir uma compreensão adequada do conceito de número primo está relacionada com a decomposição em fatorial dos números como demonstra as limitações e obstáculos que têm os estudantes para resolver tarefas quando os números estejam representados como produto de fatores primos; (c) a existência de uma "representação transparente" para uma propriedade específica dos números pode ajudar a abstração e generalização desta propriedade. A falta de "representações transparentes" para a primalidade é um obstáculo na construção deste conceito; (d) é necessário envolver os estudantes na consideração de grandes números. Entendem por grandes números aqueles que vão mais além da capacidade de uma calculadora de bolso. Planejar uma possível variação desta questão 2, que impeça os estudantes a expressão decimal do número por exemplo, o número 151^{157}, para estabelecer a primalidade ou não deste.

Machado et al (2005) apontam que uma compreensão da estrutura multiplicativa no conjunto dos números naturais tem a necessidade de ter uma experiência com a representação de números naturais como produto de primos onde tal representação deveria ser vista de forma espontânea, já que tal emprego é útil para reconhecer e justificar as mais variadas relações de divisibilidade. Segundo as autoras a natureza primária da decomposição em fatores primos pode indicar que a assimilação do algoritmo implique o uso dessa fatoração como ferramenta para a resolução de problemas.

Machado et al (2005) fizeram uma pesquisa onde os sujeitos eram professores e alunos do ensino fundamental.

As questões elaboradas por Machado et al (2005) foram baseadas na pesquisa realizada por Zazkis (1996 a e 2004) e associam a divisibilidade com a representação dos números em produto de fatores primos e a representação de um número como produto de dois primos:

1- Considere o número $M = 3^3 x\ 5^2 \times 7$ e decida se M é divisível por cada dos números 7, 5, 3, 2, 15, 11, 9 e 23.
2- Considere o número K = 16199 = 97 x 167 (97 e 167 são números primos) e decida se K pode ser divisível por: 3, 5, 11, 13 e 17.

Na primeira questão metade dos professores usou a decomposição para decidir se era divisível e justificar, enquanto mais de 80% dos alunos utilizou tal recurso. Aproximadamente, 35% dos professores apelaram para algum tipo de algoritmo para decidir e justificar. Já menos de 20% das respostas dos alunos usou de tal artifício. Em relação à questão 2, apenas 5 das 60 respostas dos alunos usaram do algoritmo para decidir e justificar. É marcante o uso da decomposição na resolução dos alunos. Os professores apresentaram um índice de resolução muito próximo da questão 1.

O trabalho desenvolvido por essas autoras apontou que existem cursos no Brasil que enfatizam a compreensão conceitual em detrimento da valorização do algoritmo (os alunos que participaram dessa pesquisa confirmam tal afirmação). Os resultados mostraram que existe uma dificuldade de reverter a situação atual em cursos de formação de professores, casos as abordagens enraizadas em algoritmos estejam presentes na educação básica e na graduação.

Bodi (2006) investigou a compreensão de estudantes espanhóis, que fazem um curso correspondente ao ensino médio brasileiro, sobre a divisibilidade no conjunto dos números naturais e usou para a análise dos resultados a teoria APOS. O estudo se centrou nas formas de conhecer e de construir o conhecimento dos conceitos de divisibilidade. Analisou livros do século XX do ensino básico e secundário sobre o tratamento dado ao assunto e os currículos escolares. Segundo o autor, o esquema de divisibilidade exige estabelecer relações entre os elementos matemáticos. Os modos de representação dos números naturais assumem um papel muito importante, pois a construção progressiva do esquema de divisibilidade está vinculada ao uso da representação em produto de fatores primos e a obtenção de múltiplos e divisores de um número.

Os alunos entrevistados manifestaram hegemonicamente a forma de conhecer baseada na concepção ação, pois usaram uma disposição de caráter operatório das idéias de "múltiplo" e "divisor", associados à operação de multiplicar e dividir, respectivamente. A maioria dos estudantes vinculou o entendimento de "ser divisível" à representação na base dez, realizando a operação da divisão e comprovaram se o resultado era exato, não estabelecendo a relação "b é divisível por a $\Leftrightarrow$ a é um fator de b". Muitos entrevistados não conheciam algum dos critérios elementares de divisibilidade (2, 3, 5).

Segundo Bodi (2006), quando os estudantes conhecem como "processo" os elementos "múltiplo", "divisor" e "ser divisível", eles podem estabelecer as relações entre "b é múltiplo de a", "a é divisor de b" e "b é divisível por a". Quando um número está representado como produto de fatores primos, os estudantes identificam um fator, como divisor do número e ao mesmo tempo visualizam esse mesmo número como múltiplo do fator. Quando os alunos não conhecem como processo as relações de divisibilidade manifestam dificuldades para usar a propriedade “Se c/ a e c / b então c / (a+b)”.

O mesmo autor declara que poucos alunos revelaram a forma de conhecer “objeto” dos elementos matemáticos, ou seja, foram capazes de usar diferentes acepções léxicas mediante a representação do número como produto de fatores primos e a partir desta representação discutir a divisibilidade em termos de divisor e não divisor, múltiplos e não múltiplos. Estes estudantes foram capazes de coordenar diferentes critérios de divisibilidade e utilizar a propriedade se c/a e c/b então c/ (a+b).

Bodi (2006) fez uma pesquisa abrangente baseada nos resultados obtidos com as investigações feitas principalmente por Zazkis. O seu estudo engloba o conceito de múltiplo e divisor, a representação do número como produto de fatores primos, o mínimo múltiplo comum, o máximo divisor comum, as regras de divisibilidade e as várias representações que um número pode admitir. O conjunto de questões sobre divisibilidade que compuseram sua pesquisa está no anexo 2.

CAPÍTULO III

ESCOLHA TEÓRICO-METODOLOGICAS

Neste capítulo apresento as escolhas teórico-metodológicas que serviram de embasamento para esta pesquisa.

3.1 Teoria APOS

A teoria APOS (actions,processes,objects,schemas), desenvolvida por Dubinsky (1991) e um grupo de investigadores da Research in Undergraduate Mathematics Educaction Community (RUMEC), surgiu na tentativa de compreender algumas idéias de Piaget, principalmente a ideia de “abstração reflexionante” com a intenção de descrever como os indivíduos constroem as estruturas lógico-matemáticas. Piaget difere três tipos de abstrações: *a abstração empírica* (abstrair uma propriedade comum a partir da observação de vários objetos), *a abstração pseudo-empírica* (segue o mesmo princípio que a anterior depois de realizar ações no objeto) e *a abstração reflexionante* (desenvolvimento das estruturas cognitivas). A abstração reflexionante, no sentido de um processo que permite ao individuo, a partir das ações sobre os objetos, inferir suas propriedades ou relações entre objetos num certo nível de pensamento, o que implica, entre outras coisas, a organização na tomada de consciência de tais ações e separar a forma de seu conteúdo, e inserir esta informação em marco intelectual reorganizado em um nível superior (Dubinsky, 1991).

Dos vários tipos de abstração reflexionante analisadas por Piaget, considero neste trabalho as cinco abstrações que Dubinsky (1991) admitiu como as mais importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado sendo uma delas não contemplada por Piaget, sendo elas: *interiorização,coordenação,reversibilidade encapsulação, generalização.*

Interiorização: o aluno desenvolve abstrações reflexivas para representar, ou seja, construir processos internos como forma de fazer sentido na percepção dos acontecimentos a partir da capacidade de usar símbolos, imagens, linguagens. Um exemplo de interiorização acontece quando se quer saber se um número é divisível por 2, inicialmente, os indivíduos escolhem números inteiros quaisquer, dividem por 2 e percebem que quando o número é ímpar o resto é 1 e quando o número é par o resto é zero, posteriormente, interioriza o fato de que todo número par é divisível por 2.

Coordenação: Dubinsky (1991) explica a coordenação convertendo os processos, considerando o ato cognitivo de escolher dois ou mais processos e usa-los para construir um novo processo. Como exemplo, podemos citar que quando um número satisfaz o critério de divisibilidade por 3 e ao mesmo tempo obedece o critério de divisibilidade por 4, então o número é divisível por 12, ou seja é divisível pelo produto deles.

Reversibilidade: uma vez que o processo existe internamente, ao sujeito é possível pensar de maneira invertida, no sentido de desfazer as ações diretas, é um meio de construir um novo processo que consiste no sentido inverso do processo original. Por exemplo, podemos solicitar a um aluno a tarefa de escrever um número de seis dígitos que seja múltiplo de 45, o estudante precisa discernir quais são as propriedades relevantes que esse número tem que apresentar (terminar em zero ou cinco, pois é divisível por 5, critério de divisibilidade do 5, e ter a soma dos seus dígitos divisível por nove pois o número tem que está de acordo com o critério da divisibilidade do 9).

Encapsulação – Desencapsulação: é a transformação mental de um processo em um objeto cognitivo. Este objeto pode ser visto como uma entidade total e pode ser transformado por ações e processos. Neste caso dizemos que um processo foi encapsulado em um objeto. Ao processo mental de retroceder desde um objeto ao processo do qual foi encapsulado o objeto da-se o nome de desencapsulação.

A encapsulação da divisibilidade como um objeto pode levar a entender o conceito de divisibilidade como uma propriedade essencial dos números inteiros, independente dos procedimentos da divisão. O conceito de divisibilidade é visto como uma propriedade dos números inteiros, em termos de dicotomia, “sim ou não”.

Generalização: Segundo Dubinsky (1991), a generalização acontece quando um sujeito “aplica um esquema existente para uma ou para uma vasta coleção de fenômenos, ou seja, com base nas particularidades, o individuo pode induzir e estender características comuns a um domínio de validade maior. Como exemplo posso citar que um estudante que conhece as propriedades, as relações, o conceito de divisor, múltiplo, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum considerando o conjunto dos números naturais, percebe que tais fatos citados anteriormente também são válidos para o conjunto dos números inteiros, o indivíduo neste caso dar lugar a um novo objeto matemático: a divisibilidade dos números inteiros”.

Dubinsky e colaboradores alicerçam seu trabalho na análise teórica de um determinado conceito matemático, o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem, e a análise de dados para provar e aperfeiçoar a análise teórica inicial e a instrução.

Para um maior entendimento dessa teoria é oportuno apresentar a definição de conhecimento matemático. Segundo Asiala et al. (1996):

> O conhecimento matemático de um indivíduo é sua tendência em responder aos problemas matemáticos percebidos por meio da reflexão dos problemas e de suas soluções dentro de um contexto social e por meio da construção ou da reconstrução das ações matemáticas, de processos e de objetos, e de organizá-los nos esquemas para usá-los na solução das situações (p. 7).

Segundo Dubinsky (1991, 2000), Zazkis e Campbell (1996 a) e Asiala et al. (1996) os indivíduos realizam construções mentais para obter significados dos problemas e situações matemáticas.

Estas construções mentais são denominadas: ação, processo, objeto e esquema.

Ação: É alguma transformação do objeto para obter outros objetos. Ela é percebida pelo indivíduo como uma realização externa, tem a característica que cada etapa sugere o que vai ser feito na etapa seguinte. Pode ser uma resposta com várias etapas, mas cada uma delas encadeada com as anteriores sem que haja um controle consciente da transformação. Um indivíduo tem uma *concepção ação* de um dado conceito se a intensidade da compreensão é limitada pela realização de ações relativas àquele conceito.

Um exemplo de ação é a do indivíduo que, para verificar se um número é divisível por outro, usa o algoritmo da divisão para obter o resto e decidir. Um indivíduo pode executar uma ação, mas não está limitada a ela. Quando um sujeito mostra estar limitado a ações sobre o objeto, dizemos que ele demonstra uma concepção ação para tal conceito.

Processo: Quando uma ação é repetida pelo individuo e é refletida por ele, ela deve ser interiorizada para um processo mental. Ao contrário da ação, o processo é uma construção interna. Um indivíduo que tem uma concepção processo de uma transformação pode refletir e descrever ou igualmente reverter as etapas da transformação sem realmente efetuá-las.

A ação de dividir pode ser interiorizada como um processo, em que se pensa a ação, mas realmente não a realiza. O estudante compreende a idéia de que o próprio procedimento da divisão, ou seja, o que determina se um número inteiro satisfaz ou não o critério de divisibilidade, mas não tem necessidade de realizá-la, ou seja, para constatar que um número ímpar não é divisível por dois, o estudante não precisa efetuar a divisão, pois basta verificar que o algarismo da unidade é ímpar.

Objeto: Quando um indivíduo reflete nas operações aplicadas em processos particulares, torna-se ciente do processo como um todo, é capaz de construir aquelas transformações que foram feitas nas ações, então podemos afirmar que o individuo pensa esse processo como um objeto, ou seja, o processo foi encapsulado como um objeto. Um indivíduo tem uma concepção objeto de um conceito matemático quando ele se torna capaz de lidar com a idéia ou conceito como um objeto cognitivo incluindo ser capaz de realizar ações no objeto justificadas pelas propriedades do objeto. Tal atitude faz com que o mesmo individuo desencapsule tal objeto voltando para o processo colocando em ordem para o uso de suas propriedades.

Esquema: É uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas que estão relacionados consciente ou inconscientemente, em uma estrutura coerente na mente do indivíduo e que pode ser evocada para tratar uma situação problema. Refletindo sobre um esquema, o indivíduo pode transformá-lo em um objeto para executar novas ações. Um esquema se desenvolve de forma dinâmica e renovadora.

Outra construção essencial da teoria APOS relacionada aos esquemas é a descrição teórica chamada decomposição genética, que descreverá as ligações de um conceito e as representações com conceito.

Uma decomposição genética é uma descrição idealizada das representações, das ligações, dos objetos, dos processos e das ações esperadas matematicamente, que são atribuídos quase sempre ao conceito. Além disso, a decomposição genética fornece uma passagem possível para a formação de um conceito na parte do estudante; não obstante, não pode ser representante da trajetória que tem todos os estudantes (Dubinsky, 1991).

Quando um tópico matemático é analisado usando a Teoria APOS, o maior objetivo é produzir uma decomposição genética, que a descrição de construções mentais especifica que um aprendiz pode fazer para desenvolver a compreensão do conceito. As decomposições genéticas são usadas para informar o desenho das instruções e são sujeitas as revisões a partir da avaliação eficaz destas instruções.

Zazkis y Campbell (1996a) fizeram uma decomposição genética do conceito de divisibilidade através de uma análise hipotética da maneira em que a divisibilidade, entendida como uma propriedade dos números, poderia ser construída por um aluno:

1. A construção da divisibilidade como um objeto conceitual começa com exemplos específicos de divisores. Os primeiros exemplos de divisores são números de um único algarismo tais como 2, 3, 4 e 5.
2. Inicialmente, por exemplo, a divisibilidade por 3 é uma ação. Um aluno tem que realizar a divisão e obter o quociente de um número inteiro (sem resto) para concluir a posteriori que o número é divisível por 3.
3. Posteriormente, a ação de dividir pode ser interiorizada como um processo, em que a ação é pensada, mas realmente não se realiza. O estudante compreende a idéia de que o próprio procedimento da divisão o que determina se um número inteiro satisfaz ou não o critério de divisibilidade, mas não tem necessidade de realizá-la.
4. Podemos coordenar ou inverter processos de divisibilidade de números particulares para criar novos processos de divisibilidade. Por exemplo, quando a divisibilidade do 2 e 3 é usada para inferir a divisibilidade por 6 se coordenam dois processos,ou seja, sabendo que a soma dos algarismos de um número inteiro é divisível por 3 implica que o próprio número também é divisível por 3, pode inverter-se e construir números divisíveis por 3.
5. A encapsulação da divisibilidade como um objeto poderia ser levar a entender o conceito de divisibilidade como uma propriedade essencial dos números inteiros, independente dos procedimentos da divisão. O conceito de divisibilidade é visto como uma propriedade dos números inteiros, em termos de dicotomia, “sim ou não”.
6. Quando a divisibilidade se relaciona com outras estruturas cognitivas tais como a fatoração e a decomposição em fatores primos, o esquema de divisibilidade é generalizado para formar um objeto.

A análise dos dados de uma investigação pode ratificar uma primeira decomposição genética de um conceito ou bem levar a realização da revisão e mudança dessa decomposição genética.

Abaixo apresento de forma simplificada o processo de construção dos esquemas na sua versão de 2003.

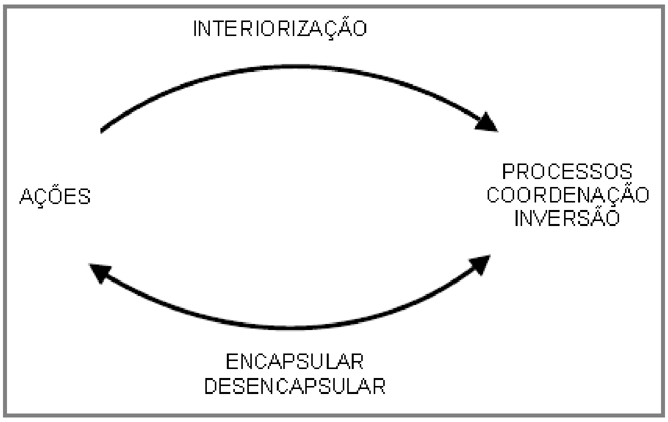


Figura 1. Versão atualizada dos esquemas e sua construção. (Domingos,2007)

Trigueros (2005) salienta que na teoria APOS, do mesmo modo que na maior parte das teorias que existem no contexto da educação matemática, se toma em consideração que o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos não termina na escola. No processo de aprendizagem da matemática, os estudantes se deparam com conceitos complexos que exigem uma conexão com diversos ramos da matemática. Nesses casos, é viável a descrição de relações que se estabelecem entre os distintos conceitos. A noção de esquema e os mecanismos de sua evolução nos permitem dar conta destes tipos de situações.

Segundo Dubinsky (1991) a teoria APOS pode ser utilizada, não só para descrever a construção de vários conceitos matemáticos, mas também sugerir explicações de algumas dificuldades que os alunos apresentam diante destes conceitos ou mesmo influenciar na elaboração de currículos.

Nesta teoria os símbolos têm um papel relevante na forma como os objetos vão sendo compreendidos devido ao requinte destes objetos matemáticos que vão sendo construídos.

3.2 O Significado de Concepção

Antes de qualquer coisa, julguei interessante expor o significado de concepção segundo um dos dicionários mais respeitados da língua portuguesa. O dicionário “Aurelio” (2009) afirma que concepção tem 5 sentidos, selecionamos aquele que tem relação com o que consideramos como concepção de um "objeto" matemático: 2. *o ato de conceber ou criar mentalmente, de formar ideias especialmente abstrações: a concepção de um principio filosófico , de uma teoria matemática.* (1989, p. 445).

Naturalmente não poderia me contentar com esse sentido que parece ainda vago para o que compreendo como concepção de um objeto matemático. Assim busquei na literatura de Educação matemática o significado de tal palavra chegando à conclusão de que o significado dado por Anna Sfard (1991) é o mais adequado à minha questão de pesquisa. Passo a apresentar as idéias que compõem tal explicação.

Sfard define concepção como todas as representações e associações evocadas por um conceito. Ela divide concepção em dois tipos: estrutural e operacional.

A concepção estrutural apresenta diversas possibilidades no tratamento de noções matemáticas como elas se referindo a algum objeto abstrato, o que significa ser capaz de referi-lo como se ele fosse uma coisa real. A concepção estrutural, segundo a autora, é estática, instantânea e integrativa. Essa concepção pode ser caracterizada pelo fato de permitir reconhecer a ideia num ápice, de manipulá-la como um todo, sem entrar nos seus pormenores.

A concepção operacional se baseia em tipos de descrição, processos, algoritmos e ações preferivelmente sobre objetos. Esta concepção é dinâmica seqüencial e detalhada. Assim, interpretar a noção como um processo implica olha-la como um ente potencial que se manifesta por meio de uma seqüência de ações. Essas duas concepções são de fato complementares e indispensáveis para uma compreensão intensa da Matemática.

É importante salientar que Sfard (1991, p. 5) considera importante as diversas representações: "A natureza dual da construção matemática pode ser percebida não somente nas descrições verbais,mas também por meio de vários tipos de representações simbólicas".

A pesquisadora afirma que as imagens mentais sendo compactas e integrativas suportam a concepção estrutural. As imagens mentais podem ser manipuladas quase como objetos reais, as figuras podem conservar sua identidade quando observadas por diversos pontos de vista e em diferentes contextos.

Segundo Sfard (1991) há três estágios no processo de formação de um conceito: interiorização, condensação e reificação (concepção objeto).

Um processo tem sido interiorizado se pode ser conduzido por meio de representações (mentais) e em seqüência ser considerado, analisado e comparado e necessitando não muito para ser realmente realizado. O indivíduo familiariza-se com os processos que eventualmente vão originar um novo conceito.

A fase da condensação é um período de seqüências prolongadas e comprimidas de operações em unidades mais controláveis. Nesse estágio, uma pessoa adquire a habilidade de conhecer um processo como um todo, sem se preocupar com detalhes. Um progresso na condensação é manifestado na crescente facilidade de alternar diferentes representações de um conceito. Os indivíduos mostram-se cada vez mais capazes de pensar sobre um dado processo como um todo sem sentir a necessidade de entrar em detalhes.

A reificação é a capacidade, de o estudante visualizar os resultados dos processos como objetos permanentes que são inseparáveis dos processos subjacentes que surgem. O individuo consegue repentinamente ver uma nova entidade matemática como um objeto completo e autônomo com significado próprio.

De acordo com Sfard e Linchevski (1994), a reificação é responsável pelo desenvolvimento dos objetos matemáticos. No indivíduo, Sfard (1991, p. 20) declara: “Os objetos matemáticos novos podem ser construídos fora do objeto atual”. Uma vez que um processo foi reificado, este produz um objeto em que um processo pode agir mais de um nível elevado, com isso o estudante obtém a capacidade de perceber um processo, já não como uma seqüência de atos físicos que formam interiorizados e condensados, mas como um objeto. A opinião de

Sfard é que a reificação é a transição de uma maneira do pensamento operacional a um estrutural, representa a construção dos conceitos matemáticos.

Neste trabalho vou focar as concepções, operacional e estrutural, que os sujeitos de pesquisa podem revelar por meio das resoluções que eles apresentaram nas atividades propostas.

Segundo Domingos, o modelo de Sfard, quer na utilização do mesmo na análise dos dados empíricos uni-se com o fato de estar lidando com as crenças implícitas dos alunos sobre a natureza dos objetos matemáticos. Para investigar o problema será necessário recorrer às características externas manifestadas pelo comportamento, atitude e capacidade dos alunos. O resultado desta abordagem pode assim servir como ferramenta de diagnóstico ou mesmo de medida de habilidade dos alunos para pensarem estruturalmente sobre um dado conceito (Sfard, 1991).

Para ter uma visão mais ampla e completa também encontrei no dicionário Houaiss (2007) duas formas de entendimento do conceito de concepção: faculdade ou ato de apreender uma idéia ou questão, ou de compreender algo; compreensão, percepção; modo de ver ou sentir, ponto de vista, entendimento, noção.

Admitindo que concepção seja uma forma de compreensão, apresento três novos aspectos que ajudarão a dar uma visão mais abrangente sobre concepção.

Esses incluem marcos tais como: *Os obstáculos cognitivosepistemológicos* (Cornu, 1991; Sierpinska, 1990); *A definição do conceito e a imagem do conceito* (Tall, 1991; Vinner, 1991); *as representações múltiplas* (Kaput, 1987, 1989). Algumas destas definições tem elementos comuns, em especial devido a que a maioria delas derivam da perspectiva construtivista de que a compreensão do estudante se constrói, mediante a formação de objetos mentais e da realização de conexões entre eles.

O primeiro aspecto é a compreensão como superação de obstáculos cognitivos. Concordo com Cornu (1991) quando afirma que através dos obstáculos cognitivos podemos mapear as dificuldades dos estudantes no aspecto da aprendizagem e ajudar o professor a construir melhores estratégias de ensino. Meel (2003) cita que Bachelard foi um dos primeiros a estruturar os obstáculos cognitivos classificando-os em: obstáculos genéticos ou psicológicos, obstáculos didáticos e obstáculos epistemológicos.

Cornu (1991) aponta que tais obstáculos sofrem influência do desenvolvimento pessoal, da prática de ensino e da natureza dos conceitos matemáticos. Sierpinska (1990) entende a compreensão como um ato relacionado com um processo de interpretação que depende das ideologias, predisposições, pré-concepções, conexões e esquemas que não são percebidos pelo estudante. Para superar os obstáculos que possam surgir é necessário que o estudante entre em conflito e coloque em dúvida as suas crenças anteriores. A superação de um obstáculo significa que o estudante deve se despojar de suas convicções e analisar tais crenças a partir de um ponto de vista externo.

O segundo aspecto da compreensão é o seu entendimento via imagem que fazemos de um conceito especifico. Segundo Vinner (1991) o estudante adquire conceitos quando constrói uma imagem do conceito por meio de representações mentais e das propriedades contidas nesse conceito. Meel (2003) cita que Davis e Vinner diferem a imagem do conceito da definição formal do conceito, pois a imagem do conceito exemplifica a maneira que um conceito particular pode ser observado por um indivíduo. A construção destas imagens do conceito acontece quando o estudante encontra a informação nova e enfrenta a consolidação desta informação dentro das exposições das estruturas cognitivas. Tal construção está estruturada em dois pontos: assimilação e acomodação baseada na teoria de Piaget.

A assimilação é relacionada à aquisição de dados novos e à formação das ligações entre esta informação nova e a estrutura original. Na resistência, a acomodação reorganize-se absolutamente a parte da estrutura cognitiva do indivíduo. A assimilação subjacente e a acomodação são dois mecanismos essenciais no desenvolvimento do cognitivo: a generalização e a abstração. Na matemática, a generalização fala geralmente sobre o processo para aplicar um argumento em um contexto mais amplo. Tall (1991) identificaram três tipos de generalização: a generalização expansiva, a generalização construtiva e a generalização disjuntiva. A abstração acontece quando o estudante focaliza nas propriedades de um objeto isolando-se do mesmo. Segundo Tall (1991), a abstração requer uma reconstrução mental com a finalidade de construir as propriedades do objeto abstrato.

O terceiro tópico é a compreensão durante a operação com as representações múltiplas. Kaput (1989) declara que a facilidade destas representações e de suas ligações permite que o estudante inclua/compreenda as idéias complexas de maneiras novas e aplique-as no formulário eficaz. Kaput classifica tais representações em: cognitiva e perceptiva, computadorizada, explanatória, matemática e simbólica. No geral, um sistema de representações ajuda na instalação de um objeto, nas relações e nos processos matemáticos. Tal sistema consiste na interação do representante e do representado. Kaput acrescenta que na matemática, o representado é a estrutura matemática e o representante é um esquema de símbolos. Kaput (1987) estabelece que "a premissa fundamental é que o fenômeno básico da aprendizagem e a aplicação da matemática estão relacionados à representação e à simbolização". A construção de uma representação e simbolização afeta o crescimento do significado matemático. Quando o estudante constrói um significado pessoal onde aparecem as operações físicas que podem ser observadas e as operações mentais que são hipotéticas. No indivíduo, o desenvolvimento da compreensão é a mudança da operação no mundo das operações físicas a operar-se no mundo das operações mentais.

3.3 Metodologia e Procedimentos

O estudo objetivado visa a levantar a concepção de alunos do 1º ano do Ensino Médio sobre a divisibilidade. Para tal, julguei mais adequado adotar a metodologia qualitativa. O objetivo dos investigadores qualitativos, segundo Bogdan e Biklen (1994):

> [...] é o de melhor compreender o comportamento e experiência humanos. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados. Recorrem a observação empírica por considerarem que é em função de instancias concretas do comportamento humano que se

> pode refletir com maior clareza e profundidade sobre a condição humana. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 70)

Trata-se então de um estudo de caso, pois consiste na observação detalhada de um contexto específico: alunos de um mesmo 1º ano do Ensino Médio de uma Escola Técnica realizando a mesma atividade em uma sala de aula.

Para a elaboração e análises das atividades propostas na parte empírica da pesquisa, escolhi utilizar alguns dos pressupostos da metodologia de pesquisa denominada de Engenharia Didática. Tal metodologia é empregada nas pesquisas da Didática da Matemática desde a década de 80. Para maiores detalhes recorrer a Machado (2010).

O uso da engenharia didática, enquanto abordagem metodológica no ensino de matemática ou em outra área qualquer do conhecimento compreende quatro fases: análise preliminar, concepção e análise a priori, aplicação de uma seqüência didática e por ultimo é feita uma análise a posteriori da seqüência aplicada seguida de uma possível validação.

Em geral, estas fases não acontecem de forma linear, mas sim de forma espiral, às vezes, circular, com idas e voltas, tais fases são apresentadas para facilitar a compreensão.

Na fase da análise preliminar foi feito um levantamento sobre a produção cientifica que envolve a concepção de divisibilidade. Esse estudo me auxiliou tanto na definição do objetivo de pesquisa quanto na determinação das escolhas teóricas e metodológicas para atingir esse objetivo. Para melhor compreender as dificuldades inerentes ao conceito de divisibilidade, elaborei uma descrição sobre o desenvolvimento histórico da divisibilidade apoiado tanto em historiadores da Matemática quanto na tese de Resende (2007).

Na segunda parte da pesquisa estabeleci o critério para seleção dos sujeitos de pesquisa e realizei os requisitos necessários para viabilizar o experimento. Para a elaboração do instrumento, me inspirei em dois trabalhos de Zazkis (2001,1996). Após determinar quais das atividades propostas pela pesquisadora seriam adequadas ao meu objetivo, realizei uma análise *a* priori levando em conta o objetivo de cada uma, as variáveis didáticas envolvidas e as possíveis estratégias para resolução das mesmas.

A terceira fase correspondeu à experimentação propriamente dita com os sujeitos selecionados anteriormente. Essa fase ocorreu em uma única sessão de 50 minutos, realizada em uma aula regular. Levei em consideração a observação de Pais (2002) ao se referir à aplicação de uma sequência didática dentro de uma Engenharia Didática

> [...] "não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório". (PAIS, 2002, p. 102).

A quarta fase da descrição e análise a *posteriori* se apoiou sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante a sessão bem como da produção de cada dupla de aluno que denominei de protocolo da dupla.

Na engenharia didática, a fase de validação da seqüência didática é feita durante todo o processo de desenvolvimento da proposta em meio a uma constante confrontação entre os dados da análise a priori e da análise a posteriori, e é verificado se as hipóteses feitas no início da pesquisa foram confirmadas.

CAPÍTULO IV

PESQUISA EMPÍRICA

Neste capítulo apresento a seleção e perfil dos sujeitos da pesquisa, a elaboração do instrumento de coleta de dados, à descrição da realização da coleta e a análise dos protocolos.

4.1 Seleção dos sujeitos

Decidi colher os dados em uma Escola Técnica Estadual em que trabalhava na época, tanto por minha conveniência quanto pelo fato de que tal escola recebe alunos que realizam o Ensino Fundamental tanto na rede pública quanto na particular, o que dá um caráter de generalidade aos sujeitos. Em 2009, ano da realização da coleta de dados, 60% dos alunos matriculados no 1º ano dessa escola completaram o Ensino Fundamental na rede pública.

O ingresso nessa Escola Técnica depende da classificação do candidato em um “vestibulinho”, em que concorre com outros geralmente numa relação de 1 vaga para cada 10 candidatos.

Os estudantes dessa escola moram principalmente na região sul e oeste da cidade de São Paulo, em cidades vizinhas, como Embu, Taboão da Serra e Osasco.

Em 2009 havia seis classes de primeiro ano do Ensino Médio, compostas de forma aleatória e eu lecionava em duas delas. Decidi coletar dados de alunos das classes em que não era professor, pois minha forma de perceber a importância do trabalho continuo com a matemática discreta e consequentemente com as questões relativas à divisibilidade poderia influir no resultado da coleta. Em contato com os professores de matemática das outras classes do 1º, ano, um deles se dispôs a colaborar e disponibilizou uma de suas aulas de 50 minutos para a coleta de dados com seus alunos.

4.2 Elaboração do Instrumento de pesquisa

Para obter os dados necessários em relação ao meu objetivo de levantar a concepção dos sujeitos da pesquisa sobre divisibilidade, resolvi apresentar algumas atividades a serem resolvidas sobre o assunto.

O instrumento de pesquisa foi elaborado com a intenção de aplicá-lo em uma aula de 50 minutos em que os alunos realizariam as atividades em duplas, pois dessa forma poderia obter, via gravação, detalhes da conversa dos alunos que iluminariam suas concepções.

Decidi propor quatro atividades, baseadas principalmente em algumas questões apresentadas por Rina Zazkis descritas em seus artigos.

Preparei quatro folhas de papel sulfite colorido, cada uma com uma das quatro questões. A cor de cada folha com a respectiva questão foi preparada para facilitar a troca de cada uma após a anterior ter sido resolvida e entregue. Foi previsto autorizar o uso de calculadora, não de celulares.

A cada dupla corresponderia uma única folha com a atividade e uma única caneta, para induzi-los a fazer conjuntamente a atividade e a discuti-la possibilitando assim a gravação dessas discussões.

<u>Análise a priori das atividades</u>

<u>1ª atividade</u>

O **objetivo** da primeira atividade é verificar a concepção dos alunos sobre o conceito de divisor de um número inteiro.

As **variáveis didáticas envolvidas** na situação são: problema contextualizado ou não contextualizado, a ordem de grandeza dos números envolvidos, o tipo do número: primo ou composto, positivo, negativo, e zero, a apresentação dos números: forma fatorada ou não.

As variáveis didáticas escolhidas foram:

i) atividade não contextualizada.

ii) O dividendo escolhido é um número maior que 1000 para dificultar o cálculo mental, exigindo, assim, o registro do cálculo.

iii) O divisor é um número primo maior que 13, ou seja, um divisor que não se enquadra naqueles comumente trabalhados nos critérios de divisibilidade 2, 3, 5, 7, 11.

iv) Os dividendos são apresentados em ambas as formas: não fatorada e fatorada.

v) Os fatores do dividendo são maiores que 20, para forçar o registro dos cálculos, evitando o cálculo mental.

vi) Todos os números envolvidos são inteiros positivos, para facilitar o cálculo.

1ª atividade:

a) 31 é um divisor do número 1254? Justifique sua resposta

b) Seja K = 34 x 252. K é divisível por 17? Justifique sua resposta

As previsões de estratégias possíveis são apresentadas na ordem decrescente da probabilidade de ocorrência, muitas vezes embasadas em pesquisas sobre o tema:

Estratégias previstas na resolução do **item a**:

E_1. A dupla divide 1254 por 31 obtendo quociente 40 e resto 14. Justifica que 31 não é um divisor de 1254 porque o resto é diferente de zero.

E_2. A dupla divide 1254 por 31, usando ou não a calculadora, obtém quociente igual a 40,451612... e justifica que 31 não é um divisor de 1254 porque a divisão de 1254 por 31 não dá um número inteiro.

E_3. A dupla decompõe 1254 em seus fatores primos 2 x 3 x 11x 19 e justifica que 31 não é um divisor de 1254 pois 31 não é um fator primo de 1254.

E_4. A dupla resolve verificar se 1254 é múltiplo de 31 e por tentativa verifica que 31 x 40 = 1240, e que 31 x 41 = 1271, então, justifica que 31 não divide 1254 porque 1254 está entre 1240 e 1271 e não é possível haver uma múltiplo de 31 entre 1240 e 1271.

Estratégias previstas para a resolução do **item b**:

E_1: A dupla multiplica 252 por 34 encontrando o número 8568. Em seguida, divide 8568 por 17 encontrando o quociente 504. Justifica que K é divisível por 17 porque o resto da divisão de K por 17 é zero.

E_2: A dupla multiplica 252 por 34 encontrando o número 8568. Em seguida, divide 8568 por 17 encontrando o quociente 504. Justifica que K é divisível por 17 porque o quociente da divisão é um número inteiro.

E_3: A dupla percebe que 34 é o dobro de 17. Justifica que K é divisível por 17, porque 17 é um de seus fatores.

E_4: A dupla fatora K em seus fatores primos e obtém $K = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 17$. Justifica que K é divisível por 17, porque 17 é um de seus fatores primos.

Atividade 2:

O objetivo da atividade é conhecer as concepções que os alunos apresentam sobre o conceito de múltiplo.

As **variáveis didáticas envolvidas** na situação são: problema relacionado ou não ao cotidiano, a ordem de grandeza dos números envolvidos, o tipo do número: primo ou composto, número positivo, negativo, e o zero e a apresentação dos números: na forma fatorada ou não.

As **variáveis didáticas escolhidas** foram:

i) Os números são positivos.

ii) Um dos números é maior que 1000, tentando evitar o cálculo mental, ou respostas de fácil obtenção.

iii) O outro número de referência é de dois dígitos com a intenção de não trabalhar com os múltiplos básicos trabalhados na escola, por exemplo, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10.

iv) O número é apresentado na forma fatorada e não fatorada.

v) A atividade é contextualizada na matemática

Nos itens abaixo justifique a sua resposta.

a) 2401 é múltiplo de 64?

b) Considere o número M = (72 x 27) + (72 x 73). M é múltiplo de 24?

Estratégias previstas para **item a**:

E$_1$. A dupla divide 2401 por 64, obtendo quociente 37 e resto 33. Justifica que 2401 não é múltiplo de 64, pois o resto da divisão não é zero.

E$_2$. A dupla divide 2401 por 64, usando ou não a calculadora e obtém aproximadamente 37,52 e verifica que o número obtido não é um número inteiro. Justifica que 2401 não é múltiplo de 64 porque a divisão de 2041 por 54 não dá um número inteiro.

E$_3$. A dupla constata que 2401 é um número ímpar e que 64 é um número par. Justifica que 2401 não é múltiplo de 64 porque todo múltiplo de um número inteiro par é par.

E_4. A dupla decide verificar se existe um número inteiro que multiplicado por 64 dá 2401 e por tentativa calcula 64x40 e obtém 2560, 64 x38 e obtém 2432, calcula 64 x 37 e obtém 2360. Justifica dizendo que 2401 não é múltiplo de 64 porque não existe múltiplo de 64 entre 2360 e 2432.

E_5. A dupla decompõe os dois números em seus fatores primos e obtém que $2401 = 7^4$ e que $64 = 2^6$. Justifica que 2401 não é múltiplo de 64 porque 2401 não tem como fator o número $2^{6.}$

Estratégias previstas para **item b**:

E_1: A dupla calcula 72 x 27= 1944 e 72 x 73= 5256 e após calcula 1944+5256 = 7200 resultado que divide por 24 obtendo quociente 300 e resto zero. Justifica que M é múltiplo de 24 pois quando dividido por 24 dá 300 e o resto é zero.

E_2: A dupla calcula (72 x 27) + (72 x 73) = 72x(27+73) usando a propriedade distributiva e obtém M = 7200, após o que divide 7200 por 24 encontrando quociente 300 e resto zero. Justifica que M é múltiplo de 24, pois, quando dividido por 24 dá 300 e o resto é zero.

E_3: A dupla percebe que 72= 3x24 e que então 72 é múltiplo de 24. Justifica que como 72 aparece nas duas parcelas da adição que definem M, este é múltiplo de 24.

Atividade 3

Objetivo: investigar se e qual a relação que os alunos fazem entre os conceitos de divisor e múltiplo de um número. Verificar se os alunos conseguem encontrar os divisores de um número dado quando este está representado como produto de seus fatores primos.

As **variáveis didáticas envolvidas** na situação são equivalentes às das atividades 1 e 2 anteriores.

As **variáveis didáticas escolhidas** foram:

i) A representação do número é dada na forma de produto de fatores primos, segundo o Teorema Fundamental da Aritmética.

ii) Os números primos escolhidos não se enquadram nos primos mais utilizados pelos alunos como 2, 3 e 5.

iii) O número de referência é maior que 100.

iv) Atividade não contextualizada.

v) Solicitação de exemplos para exemplificar o conceito.

a) Quais são os divisores de $539 = 7^2 x\ 11$?
b) De que número 539 é múltiplo?
c) 539 é um múltiplo de 14?
d) Dê um exemplo de um múltiplo de 539.
e) Você consegue encontrar um número que é múltiplo e, ao mesmo tempo, é divisor de 539?

Estratégias previstas para o **Item a**

E_1: A dupla efetua a divisão de 539 por 7 e encontra quociente 77 e resto zero, a seguir divide 539 por 11 e encontra o quociente 49 e resto zero. Justifica dizendo que 1, 7, 11, 49, 77 e 539 são divisores de 539 porque quando 539 é dividido por cada um deles dá um número inteiro e o resto é zero.

E_2: A dupla observa que o número já está decomposto em seus fatores primos, multiplica 7x7 = 49, 7x 11= 77. Justifica que os divisores de 539 são os números 1 e 539, porque todo número é divisível por 1 e por ele próprio e por 7, 49, 11 e 77 que são seus fatores primos e a combinação entre eles.

Estratégias previstas para o **Item b** (na realidade este item depende da resposta dada no item anterior).

E_1. A dupla que usou a E_1 no item a cita como exemplo um ou mais divisores do número 539 encontrados anteriormente. Justifica da mesma forma que o foi na estratégia correspondente do item a.

E_2. A dupla que usou a E_2 do item a cita como exemplo um ou mais divisores do número 539 encontrados anteriormente. Justifica da mesma forma que o foi na estratégia correspondente do item a.

Estratégias previstas para o **Item c**

E_1. A dupla divide 539 por 14 encontra 38,5. Justifica que 539 não é múltiplo de 14 porque na divisão de 539 por 14 o número obtido não é um número inteiro.

E_2. A dupla divide 539 por 14 e encontra 38 como quociente e 7 como resto. Justifica que 539 não é múltiplo de 14 porque na divisão de 539 por 14 o resto não é zero.

E_2. A dupla observa que 14 é um número par e que 539 é impar. Justifica explicando que como 539 é um número ímpar ele não pode ser múltiplo de um número par.

Estratégias previstas para o **Item d**

E_1: A dupla multiplica 539 por um número natural ***a*** obtendo o número ***b*** = ***a***x539. Justifica que o número ***b*** é múltiplo de 539 por sua construção.

Estratégias previstas para o **Item e**

E_1: A dupla percebe ou lembra que todo número natural ***a*** é múltiplo e divisor dele próprio. Justifica que 539 é múltiplo e divisor dele próprio pois 539= 1x 539 e 539 dividido por 539 tem quociente 1 e resto zero.

<u>Atividade 4</u>

Objetivo: Verificar se os alunos utilizam conceitos de múltiplos e /ou divisores em situações problemas.

Variáveis didáticas envolvidas: a ordem de grandeza, problema baseado numa situação do cotidiano ou não, o número de soluções; o tipo de relação; a escolha da representação do problema.

Variáveis didáticas escolhidas:

i) Números pequenos tanto para o número de cestas quanto para o número de ovos em cada cesta.

ii) Opção de ter uma única solução no problema.

A relação entre o número de ovos de galinha e o número de ovos de pata é muito simples, uma quantidade é o dobro da outra.

iii) O problema é enunciado na linguagem natural.

iv) A atividade é baseada numa situação concreta, ou seja, envolve uma situação do cotidiano extraida do livro de Costa.*

No mercado havia seis cestas com ovos, umas com ovos de galinha, outras com ovos de pata. Cada cesta tinha uma etiqueta com o número de ovos que continha:

5 6 12 14 23 29

“Se vender esta cesta”, pensava a vendedora, “ficarei com duas vezes mais ovos de galinha que de pata”.

A que cesta se referia a vendedora?

*Costa, M. (1986). O problema da semana. Lisboa: APM.

Estratégias previstas:

E_1: A dupla calcula 5 + 6 + 12 + 14 + 23 + 29 = 89 obtendo o número total de ovos. Em seguida calcula 89-5=84; 89-6=83, 89-12=77, 89-14=75, 89-23=66, 89-29=60. Verifica então, que somente nos casos da retirada das cestas com 5, 14, 23 e 29 ovos, os resultados respectivamente, 84, 75, 66 e 60, são múltiplos de três. A seguir divide 84, 75, 66 e 60 por 3 obtendo respectivamente: 28, 25, 22 e 20 e multiplica esses resultados por 2 obtendo respectivamente 56, 50, 44, 40. Observa então que se tirar a cesta com 5 deveria poder obter 56 ovos de galinha e 28 de pata que são números pares, assim as duas cestas com número impar restantes são 23+29= 52 e precisaria haver mais uma cesta com 4 ovos para inteirar 56, como não há , faz o mesmo tipo de raciocínio para os demais casos chegando ao caso da venda da cesta com 29 ovos quando sobra 60 ovos distribuídos em cinco caixas com 5,6,12,14 e 23 ovos, que propicia o resultado: 5+23+12=40 ovos de galinha e 6+14=20 ovos de pata. Justifica explicando os tipos de raciocínio feito para obter esse resultado.

E_2: A dupla usa a estratégia de tentativa e erro esgotando todas as possibilidades e chega ao resultado de retirada da cesta com 29 ovos que dará 20 ovos de pata e 40 de galinha. Justifica que chegou ao resultado esgotando todas as possibilidades.

4.3 Descrição da sessão

A sessão ocorreu conforme previsto, no dia 11 de novembro de 2009, às 7h. 50min, na sala de aula habitual dos alunos sujeitos da pesquisa. Os alunos tinham acabado de participar da primeira aula daquele dia quando a pedido do professor adentrei a sala de aula.

Estavam presentes nessa sala 38 alunos do 1º ano, o professor da classe, e o pesquisador. O professor da classe solicitou aos alunos para sentarem em duplas. As duplas se formaram livremente.

Apresentei-me como pesquisador da PUC-SP, embora muitos já me conhecessem como professor da escola. Expliquei à classe o objetivo de minha pesquisa explicando que manteria o anonimato de cada um e da Escola e explicitei que poderiam participar ou não da pesquisa. Esperei um momento, porém nenhum aluno se retirou da sala.

Expliquei então, as “regras” da sessão e perguntei qual dupla gostaria de ser gravada, coloquei assim quatro gravadores na mesa das 4 duplas que não se opuseram à áudio-gravação.

As regras estabelecidas foram:

- Todo o material escolar do aluno deveria ser depositado na frente das carteiras perto do quadro.
- Cada dupla receberia 1 única caneta e uma única folha com uma atividade.
- Estavam previstas 4 atividades
- As atividades seriam entregues cada uma de uma vez e cada dupla somente receberia a próxima atividade após entregar a anterior.
- Após terminar as 4 atividades a dupla podia se retirar.
- Os alunos da dupla só deveriam se comunicar com o membro de sua dupla.
- Não haveria consulta a qualquer material.

Ao receberem a primeira folha com a atividade 1 alguns alunos questionaram o fato de colocar o nome no protocolo. Disse-lhes que serviria como controle do pesquisador para identificação das respostas. Reiterei que embora os protocolos tivessem seus nomes estes seriam mantidos em sigilo e seriam substituídos por nomes fictícios que garantiriam o anonimato. Reiterei que utilizaria seus nomes somente para acessá-los caso necessitasse conversar com eles para compreender melhor o que haviam feito.

O professor da sala participou ativamente da aplicação do experimento. Marcou o tempo gasto pelas duplas para a execução das tarefas, ajudou a recolher os protocolos conforme as duplas iam entregando. Além disso, apontou as duplas que tinham bom rendimento nas avaliações e aquelas que apresentavam dificuldade em matemática. O professor comentou durante a sessão que estava estranhando que alunos de “bom rendimento” estavam usando praticamente o mesmo tempo para resolver cada questão que aqueles de “baixo rendimento”.

Embora o ambiente da sala tenha se mantido calmo durante praticamente o tempo todo, houve uma ocorrência que perturbou o ambiente: no final da sessão o coordenador da escola entrou na sala e deu um recado em voz alta para um dos alunos da dupla DK. Como o aluno visado pelo coordenador deu mostras de não ter entendido o recado, o coordenador pediu para acompanhá-lo fora da classe, o que interrompeu a dinâmica da dupla. Em alguns momentos tive que solicitar que escrevessem a resolução na folha e não na carteira. Os alunos terminaram a atividade dentro do prazo estipulado de 50 minutos.

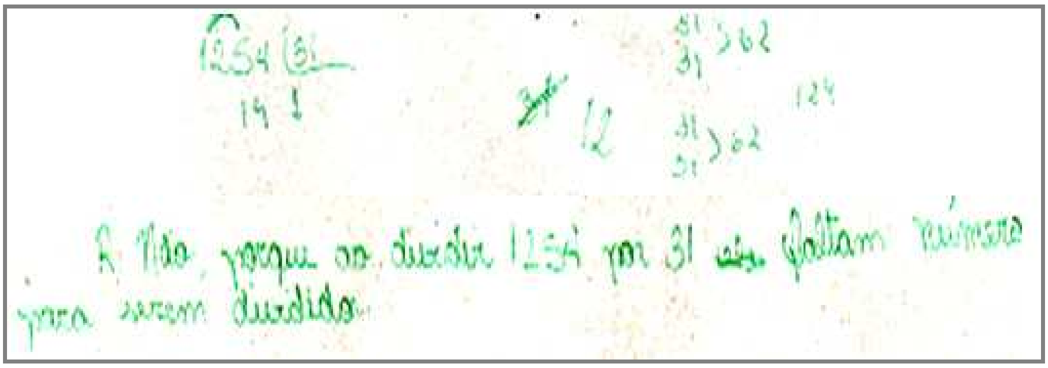
4.4 Análise dos Protocolos

Organizei os protocolos nomeando-os de DA até DS, referente às 19 duplas.

Primeiramente farei a análise do protocolo de cada dupla que denomino de análise vertical. Após o que, analisarei os protocolos de forma horizontal, isto é por questão. Isso facilitará responder minha questão de pesquisa e realizar as considerações finais.

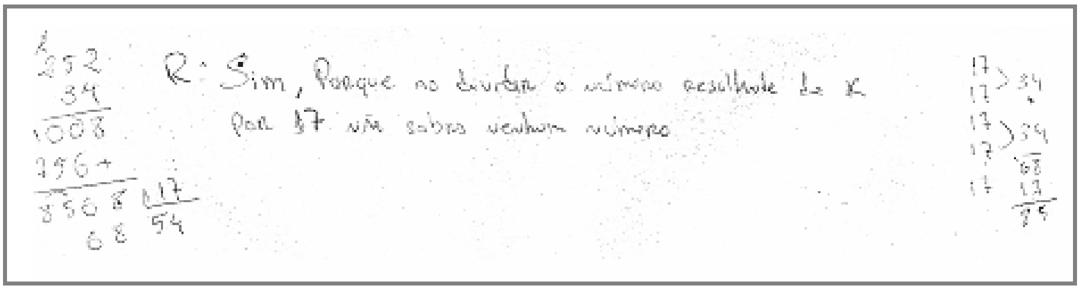
Análise das resoluções da DUPLA DA

Atividade 1:
Item a:



Esta dupla apresenta uma linguagem informal na sua justificativa. Utiliza-se da estratégia E_1 para resolver a questão.

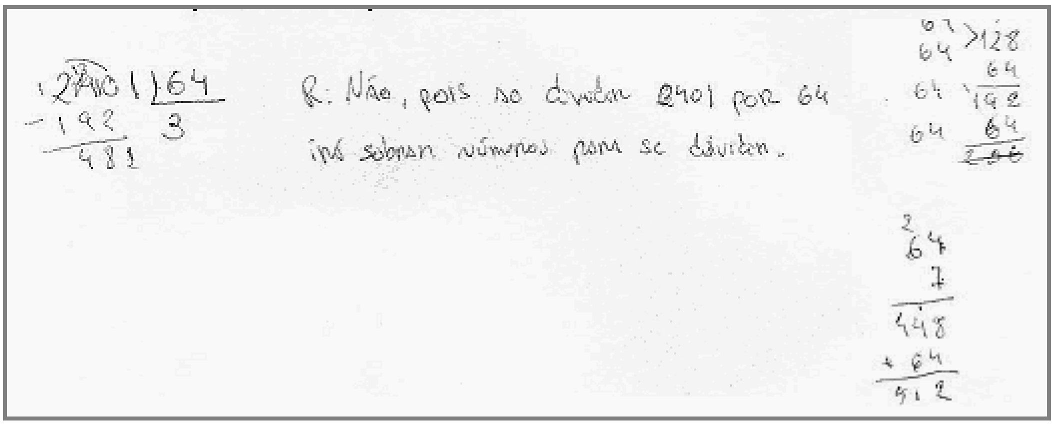
Item b:



Esta dupla apresenta uma linguagem informal, além de apresentar dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão, errando o quociente da divisão de 8568 por 17. Não utiliza a operação inversa para verificar o resultado e perceber o erro cometido. Destaco que a resolução da dupla, quando registra o número 34 deixa claro que sendo um fator da multiplicação divisível por 17, sem efetuar as operações de multiplicação e divisão, K é divisível por 17. Isso reforça que os alunos apresentam a concepção ação, ou seja, efetuam operações para depois discernir sobre a divisibilidade. A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder este item.

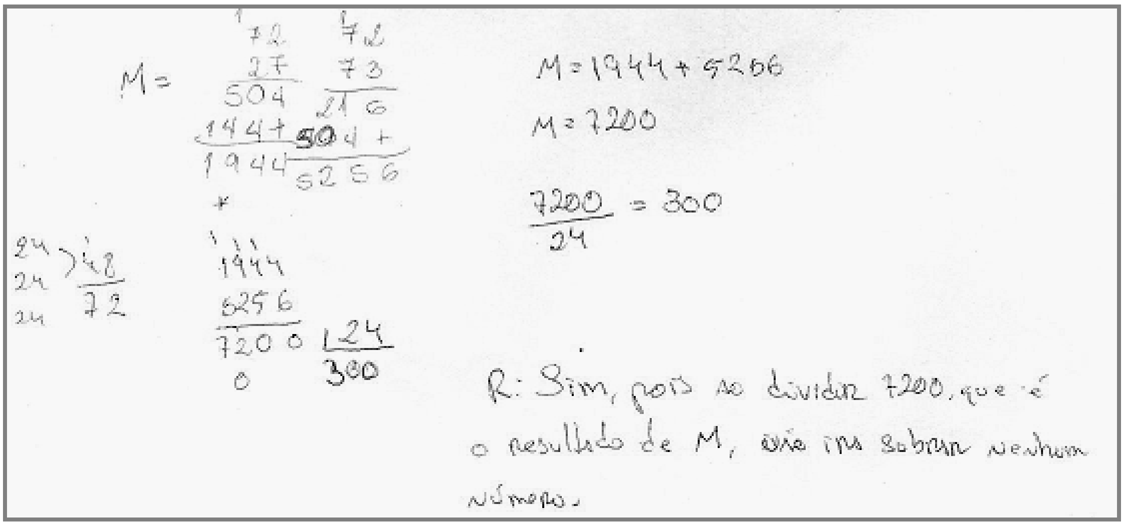
Atividade 2:

Item a:



A dupla responde usando a estratégia E_1. Associa o conceito de múltiplo com a operação da divisão.

Item b:



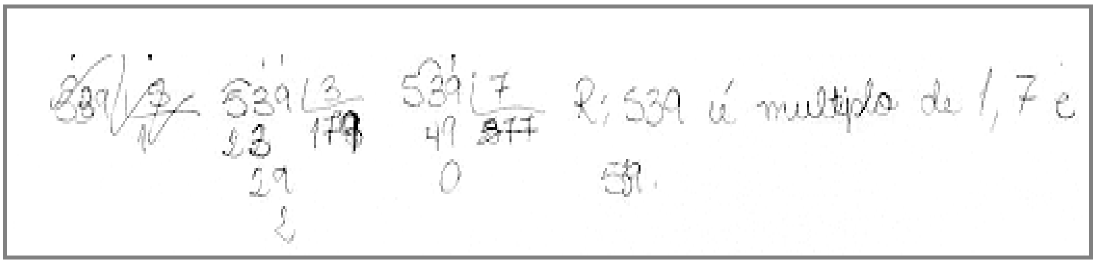
A resolução desse item reforça que a dupla precisa efetuar operações de multiplicação e divisão para constatar se um número é múltiplo do outro número. Os alunos respondem via a estratégia E_1, como acontece no item anterior há um predomínio da divisão para verificar a relação de múltiplo. Há a compreensão operacional, baseada em algoritmos e na ação de efetuar concretamente operações, multiplicação e divisão.

Atividade 3:

Item a:

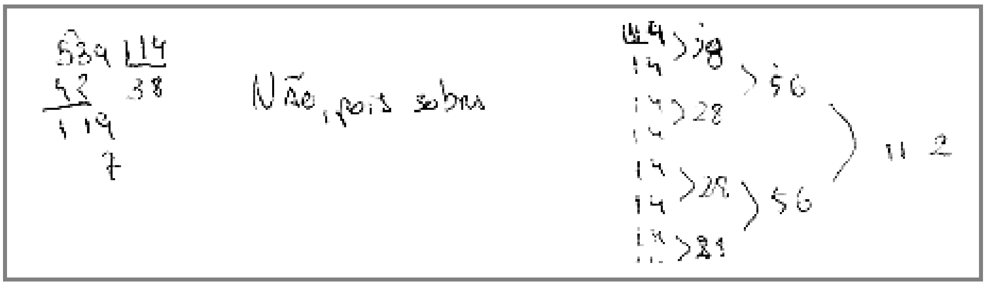
A dupla não aponta nenhum divisor, pois compreende a representação em produto de fatores primos como um processo, ou seja, a representação tem como finalidade encontrar o número, nesse caso o número 539. Não compreende que os fatores dados são divisores do número e não cita nenhum divisor de 539.

Item b:



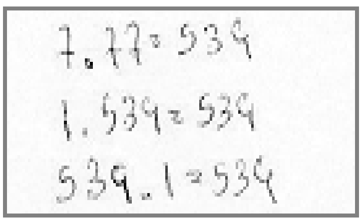
Mesmo não tendo o fator 3 na representação dada inicialmente os estudantes efetuam a divisão 539 por 3. A resposta é composta pelos divisores naturais, 1 e o próprio número, o divisor e quociente da segunda divisão efetuada. Fica nítido que a representação do número como produto de fatores primos se apresenta como obstáculo para a determinação dos divisores. A dupla usa a estratégia E_1, utiliza a divisão para verificar que o resto é zero, 539 é múltiplo do divisor e do quociente.

Item c:



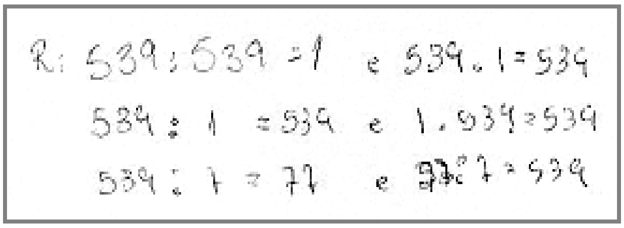
A dupla precisa efetuar a divisão para verificar que o resto é diferente de zero, ou seja, se vale da estratégia E_1 para responder este item, não percebe a imparidade dos números e ignora que no produto de fatores primos não têm o número 2.

Item d:



A dupla associa o conceito de múltiplo com a operação da multiplicação, escreve multiplicações cujo produto é 539.

Item e:



O conceito de divisor fica associado com a operação da divisão e o conceito de múltiplo com a multiplicação.

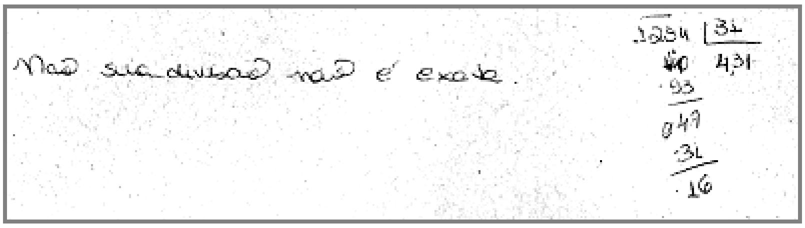
Na **atividade 4**, a dupla relaciona a quantidade de ovos da terceira cesta com a quantidade de ovos da segunda cesta, ou seja, doze é o dobro de seis.

A dupla apresenta a concepção ação e operacional em relação ao conceito de divisor e múltiplo, pois entende tais conceitos por meio das operações de divisão e multiplicação efetuadas concretamente e o uso de algoritmos para manipulá-las. A dupla enfatiza a divisão em relação à multiplicação na abordagem dos conceitos de múltiplo e divisor. Revela uma compreensão restrita e limitada, pois não conseguem fazer relações quando o número é representado como produto de fatores primos. Os integrantes da dupla não conseguem de forma significativa aplicar os conceitos de múltiplo e divisor em uma situação problema. A conexão entre os conceitos de divisor e múltiplo é feita de forma confusa e frágil. Os alunos não apresentam nenhum dos cinco tipos de abstração reflexionante.

Análise das resoluções da DUPLA DB

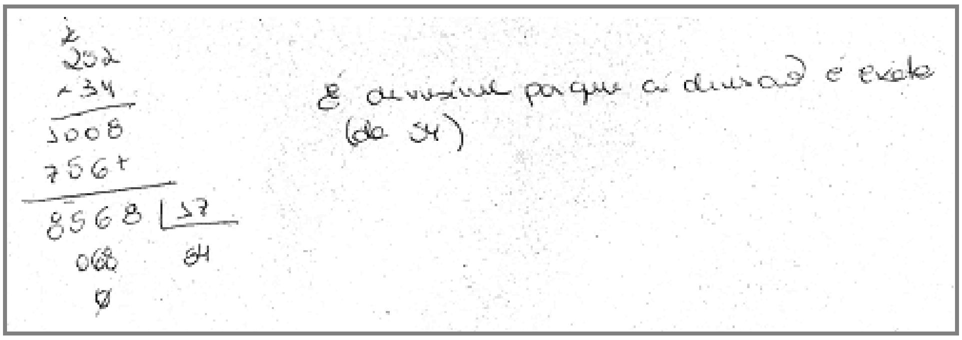
Atividade 1:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_2 para responder a questão. Revela que há problemas na manipulação do algoritmo da divisão, a dupla não percebe o erro na ordem de grandeza do quociente, pois se eles tivessem feito uma estimativa, chegariam a conclusão que o dividendo deveria ser uma centena. A justificativa dada pelos alunos é incompleta, pois mesmo que a divisão fosse exata, não aconteceria a relação de divisor.

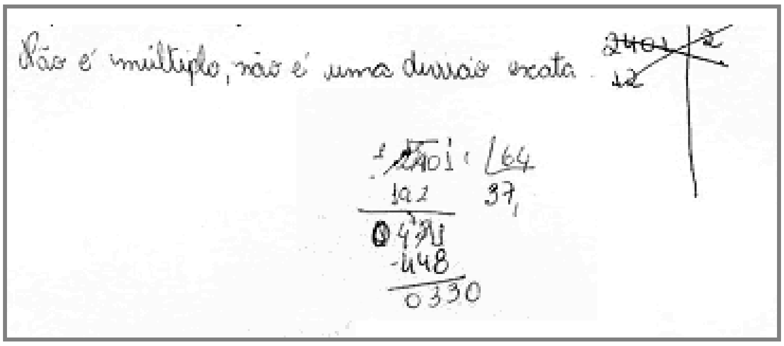
Item b:



A dupla nesse item também reforça a sua dificuldade na manipulação do algoritmo da divisão, comente o mesmo erro do item anterior. Os sujeitos utilizam a estratégia E_1 para responder a questão. Os alunos têm a concepção operacional, pois efetuam multiplicação e divisão para verificar o resto e discernir sobre a divisibilidade.

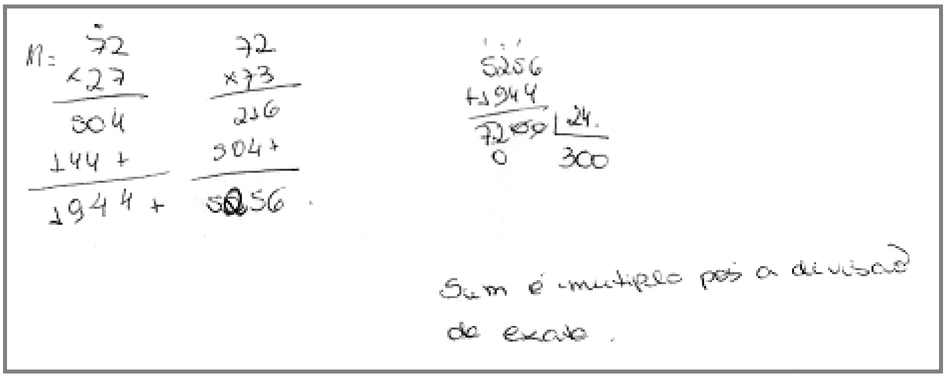
Atividade 2:

Item a:



A dupla esboça a iniciativa de fatorar o número, mas abandona tal processo após constatar que 2401 não é divisível por 2. Os alunos usam a estratégia E_1, consideram a divisão no conjunto dos números inteiros, pois tendo como universo o conjunto dos números racionais a divisão seria exata. Utilizam a divisão para verificar a relação de múltiplo entre os números.

Item b:

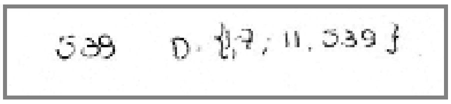


A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder a questão.

Os alunos revelam por meio das duas atividades uma concepção operacional, fortemente solidificada por ações e processos sobre o objeto.

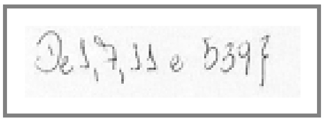
Atividade 3:

Item a:



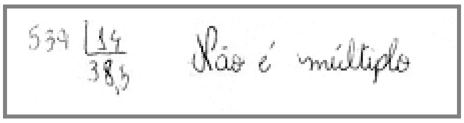
A dupla sem efetuar divisões cita os divisores naturais do número, 1 e ele próprio, e compreende que os fatores primos são divisores conforme a estratégia E_2. Os sujeitos não citam o produto dos dois números primos como divisor, ou seja, não utilizam a abstração reflexionante da coordenação.

Item b:



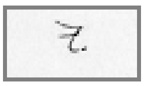
Os alunos entendem que o número 539 é múltiplo dos seus divisores.

Item c:



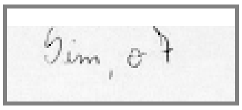
Para responder este item, os sujeitos utilizam à estratégia E_1. Apesar de a operação da divisão ser exata, a dupla afirma que 539 não é múltiplo de 14.

Item d:



Os alunos citam como exemplo de um múltiplo de 539, um de seus divisores, ou seja, revelam uma fragilidade na conexão entre os conceitos de divisor e múltiplo.

Item e:


Sim, o 7

Neste item a dupla, cita um divisor como exemplo de múltiplo e ao mesmo tempo divisor de 539. A dupla reforça a fragilidade citada acima.

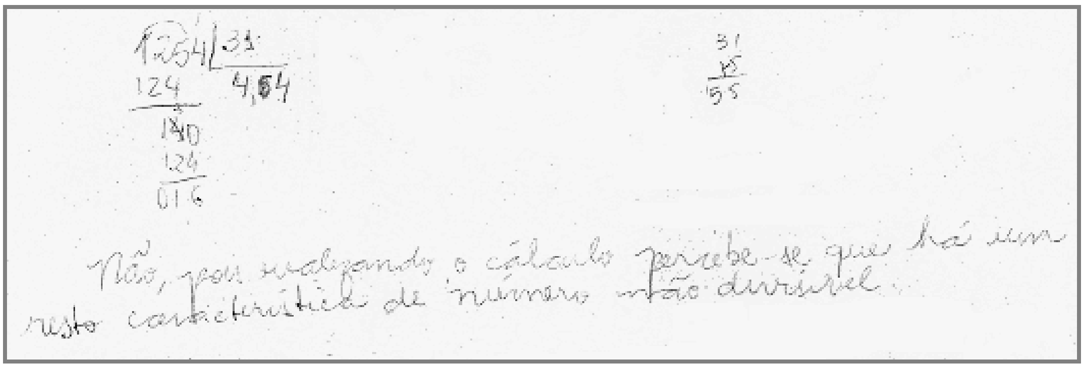
Na **atividade 4**, a dupla aponta que a cesta referida é a terceira, pois doze é o dobro de seis.

A dupla ao investigar o conceito de divisor e múltiplo utiliza predominantemente a operação da divisão. Apresenta uma concepção ação e operacional sedimentada em cálculos, algoritmos e procedimentos. Os sujeitos entendem os fatores como divisores de um número, mas não fazem relação entre os conceitos de múltiplo e divisor quando o número é representado como produto de fatores primos. A conexão entre estes conceitos é frágil e confusa. Não perceberam que a ausência de um fator na decomposição já é suficiente para constatar que o número não é divisível por este fator. Não aplicaram de forma efetiva os conceitos de divisor ou múltiplo na resolução de um problema. A dupla não usa principalmente a abstração reflexionante da coordenação, reversibilidade e generalização.

As resoluções da DUPLA DC

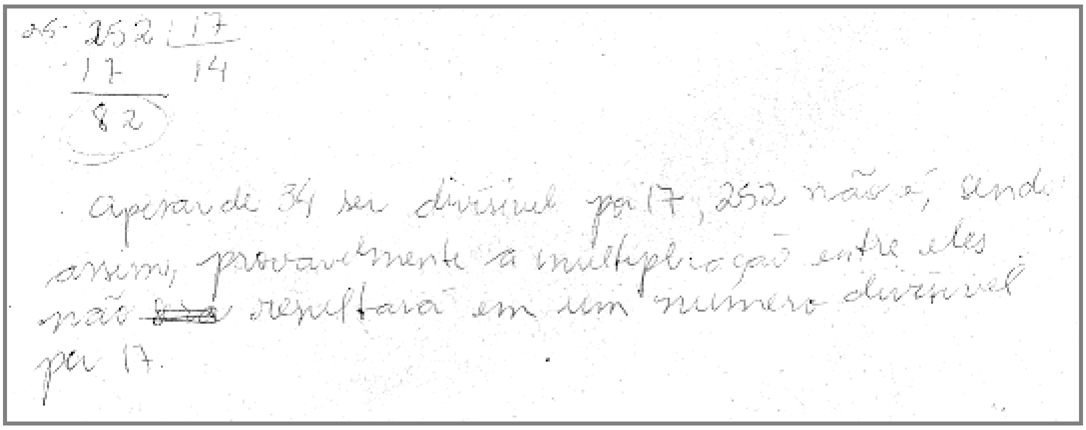
Atividade 1:

Item a:


Não, pois realizando o cálculo percebe-se que há um resto característico de número não divisível.

A dupla utiliza a estratégia E_2 para responder à questão. Apresenta dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão, não percebe que o quociente tem que ser uma dezena. A justificativa tem um caráter impessoal.

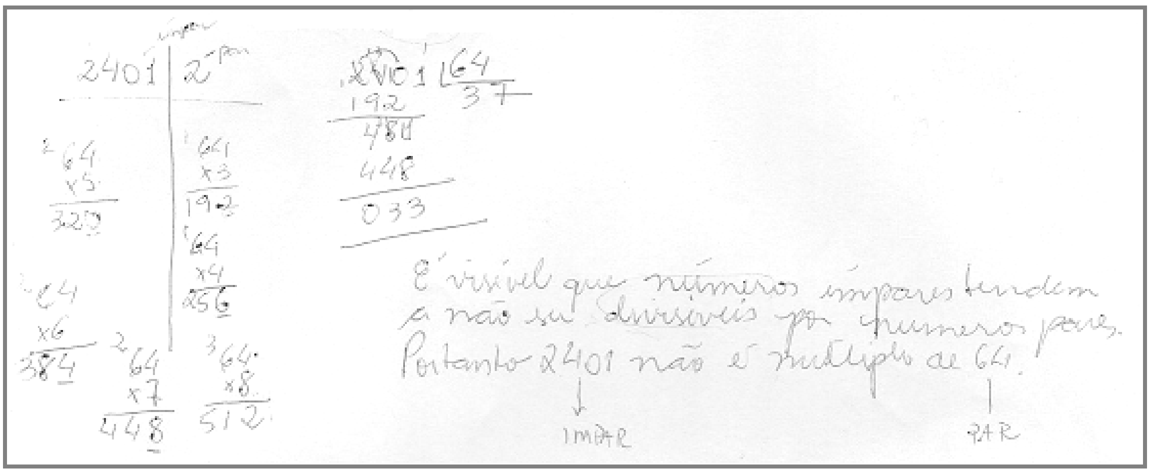
Item b:



Esta dupla relaciona os fatores com o produto, usa a estratégia E_3, mas acaba cometendo o equivoco de que para ser divisível por 17, cada fator deve ser divisível por 17, como um dos fatores não é divisível por 17 chega a conclusão de que K não é divisível por 17. Sua justificativa revela insegurança, pela presença da probabilidade de acontecer certa situação.

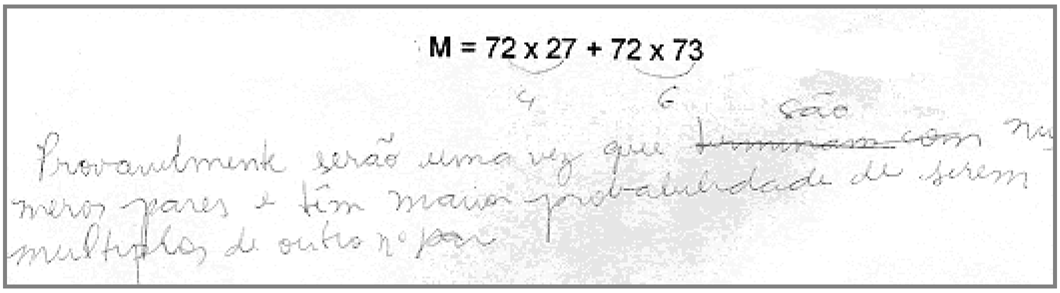
Atividade 2:

Item a:



Os sujeitos utilizam duas estratégias, E_1 e E_3, para chegar na conclusão de que 2401 não é múltiplo de 64. Uma estratégia é usada para validar a conclusão obtida pela outra. Efetua algumas multiplicações para inferir que o múltiplo de 64 é par destacando em cada produto o último algarismo. A justificativa revela o aspecto de insegurança, pois todos os números ímpares não são divisíveis por nenhum número par, os alunos não generalizam.

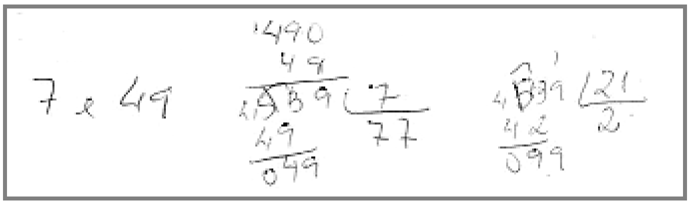
Item b:



A dupla utiliza uma estratégia que não foi pensada pelo pesquisador. Os sujeitos destacam o algarismo do produto em cada parcela presente e a partir deste fato revelam mais uma vez a insegurança que esta contida em sua justificativa. A justificativa está baseada na paridade entre M e 24. Não utiliza a operação da divisão para obter o resto para tomar decisão sobre a divisibilidade. Apesar dos equívocos cometidos, a dupla tenta associar propriedades, relações entre os números. Afirmo que eles estão num processo de transição da concepção ação para a concepção processo.

Atividade 3:

Item a:



A dupla usufrui a estratégia E_1 para obter os divisores de 539. Mesmo não tendo o fator 3 no produto de fatores primos, os estudantes efetuam a divisão 539 por 21. Efetua a divisão 539 por 7, mas não cita como divisor o quociente desta divisão, não utiliza a propriedade comutativa para constatar que 77 também é divisor de 539. Os alunos não associam que o fator é o divisor.

Item b:

7 e 49

Os alunos associam que 539 é múltiplo dos seus divisores citados no item anterior, segundo a estratégia E_1.

Item c:

Não, pois todos números ímpares não são divisíveis por pares, portanto 539 não é múltiplo de 14.

A dupla utiliza a estratégia E_3 para responder o item, realçando a imparidade dos números. Neste momento, revela determinação, segurança na justificativa apresentada.

Item d:

49

Os estudantes respondem como exemplo de múltiplo, um divisor de 539. Revelam fragilidade na concepção de múltiplo, pois o múltiplo de um número tem que ser maior ou igual ao número dado.

Item e:

539

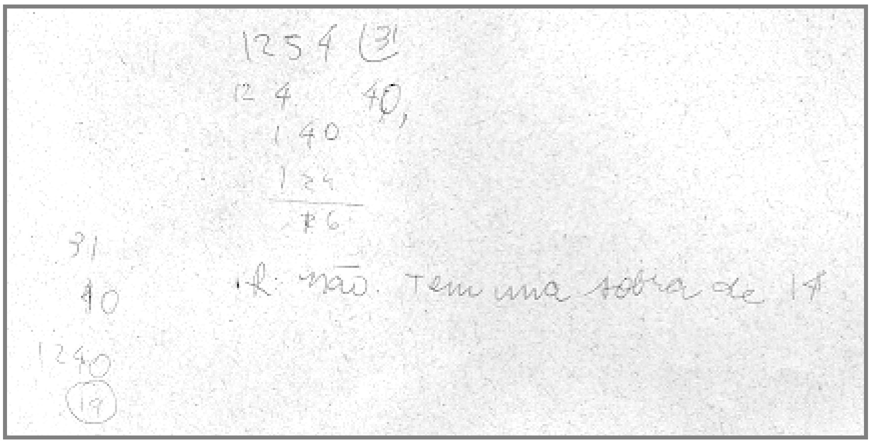
A dupla apenas escreve a resposta sem apresentar nenhuma justificativa.

A resposta dada para a **atividade 4** foi à cesta que tinha doze ovos, justificando que doze é o dobro de seis.

Não levando em consideração alguns equívocos cometidos pela dupla, a mesma revela uma concepção estrutural tentando fazer relações entre os números tais como paridade/imparidade, usar propriedades para discernir sobre a divisibilidade. A conexão entre os conceitos de divisor e múltiplo é confusa e frágil. O significado dado à representação em produto de fatores primos é praticamente inexistente na abordagem dos conceitos citados acima. O conceito de múltiplo e divisor é utilizado de forma simplista na resolução do problema. Os integrantes da dupla apresentam indícios de interiorização e de coordenação (abstrações reflexionantes).

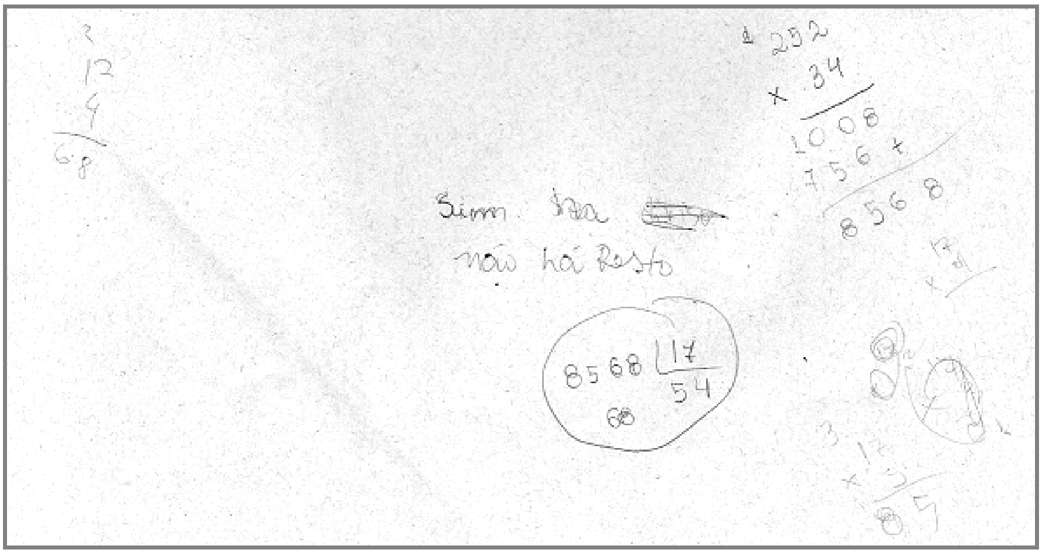
Análise das resoluções da DUPLA DD

Atividade 1:
Item a:



A dupla apresenta uma resolução segundo a estratégia E_1. A justificativa tem uma palavra de aspecto informal.

Item b:

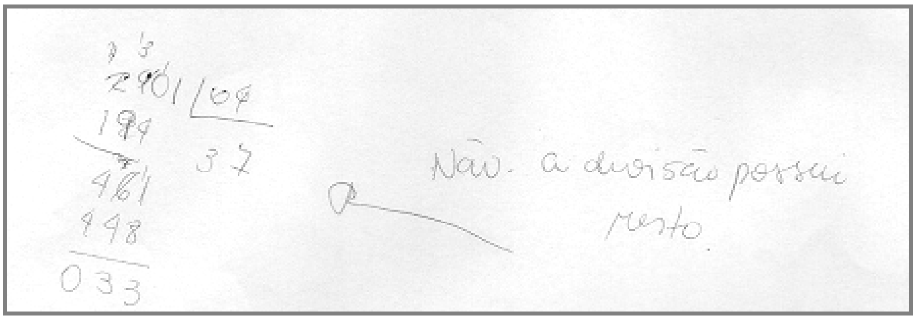


A resolução foi dada por meio da estratégia E_1. A dupla revela dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão. Não utiliza a operação inversa para validar o quociente encontrado.

As resoluções da primeira atividade salientam que a dupla tem a concepção operacional baseada nos algoritmos, na ação de multiplicar e dividir.

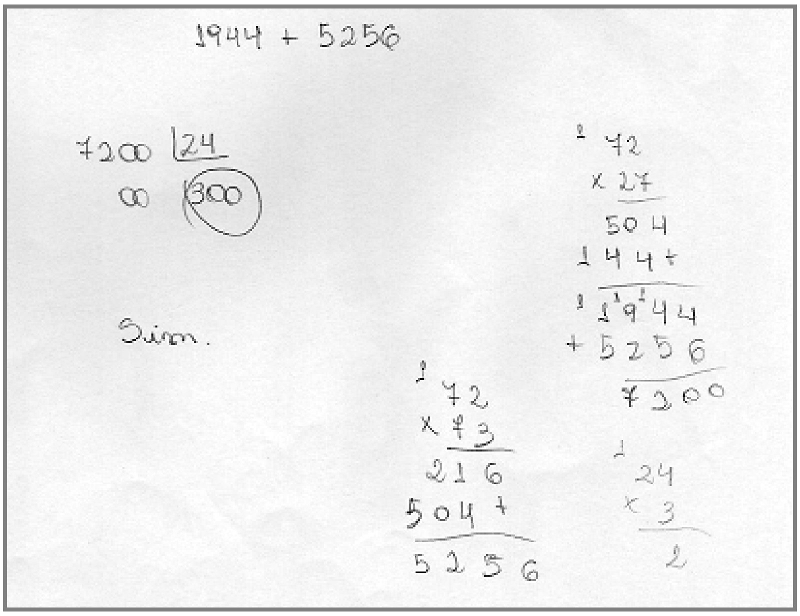
Atividade 2:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_1 para resolver a questão.

Item b:

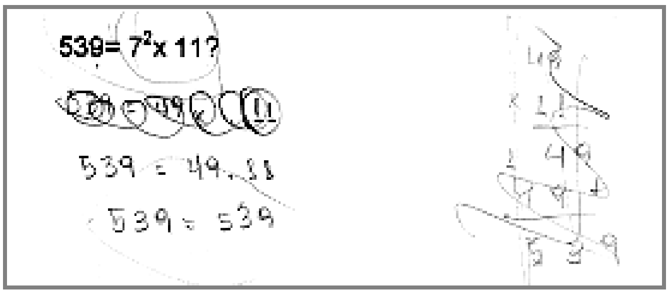


A dupla usa a estratégia E_1 para responder a segunda parte da atividade. A resposta foi dada considerando o conjunto dos números inteiros.

Os sujeitos revelaram por meio das duas primeiras atividades a concepção ação baseada em ações de efetuar operações matemáticas em detrimento da concepção estrutural baseada em propriedades e relações pertinentes à divisibilidade.

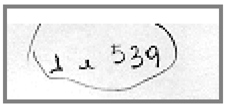
Atividade 3:

Item a:



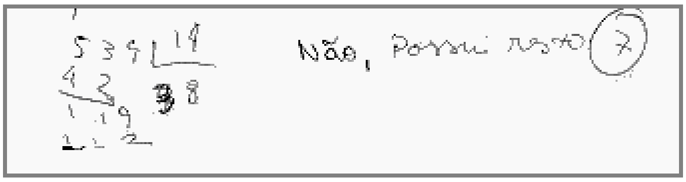
A dupla não cita nenhum divisor de 539, pois a representação dada é um obstáculo para a compreensão do conceito de divisor. Os alunos entendem o produto de fatores primos como um processo, pois é feita uma mudança de registro. Normalmente, a representação em produto de fatores primos tem como finalidade determinar o número ao qual está representado. Os sujeitos revelam o hábito de representar o número na forma decimal ignorando a representação de produto de fatores primos. Os alunos não consideram que os fatores primos são divisores do número 539.

Item b:



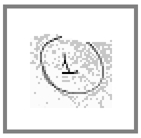
A dupla cita os divisores naturais, 1 e o próprio número como exemplo de números cujo múltiplo é 539.

Item c:



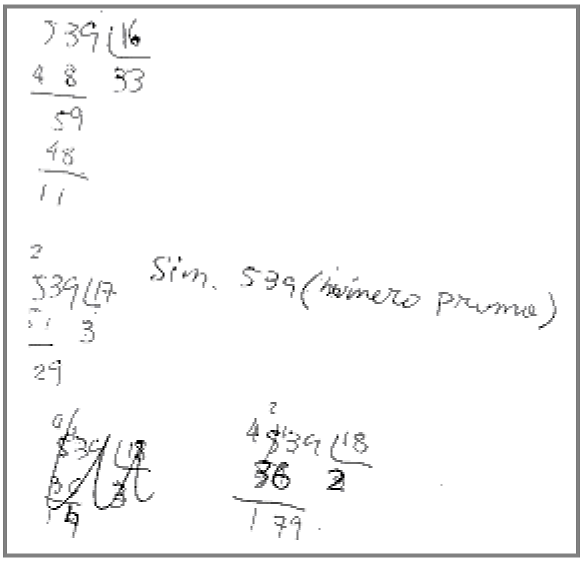
A dupla utiliza como recurso de resolução a estratégia E_1.

Item d:



Cita como exemplo de múltiplo um divisor de 539.

Item e:



A dupla ignorando a representação dada efetua diversas divisões para encontrar algum divisor do número, não encontrando afirma que o número em questão é primo. Revelam dificuldades na compreensão do conceito de números primos e relacionam de forma confusa os conceitos de múltiplo e divisor.

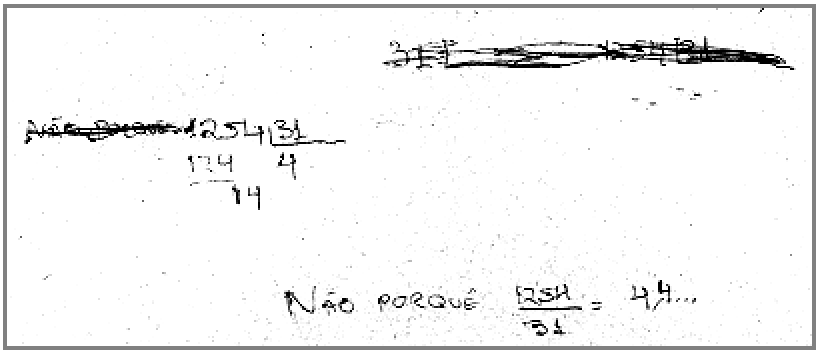
Na atividade **4**, os alunos mostraram que desconsiderando a cesta com 29 ovos foi possível com o restante dividir em dois grupos onde a quantidade de um é o dobro da outro, ou seja, 40 e 20 ovos, por isso destacaram que a quantidade de ovos referida foi a de 29 ovos.

A dupla revela ter uma concepção ação e operacional no que tange os conceitos de múltiplo e divisor, com predomínio da operação da divisão no tratamento desses objetos matemáticos. O entendimento da representação do produto em fatores primos é visto como um processo em que a finalidade é obter o número que tem tal representação. A conexão entre os conceitos citados anteriormente é confusa e frágil. Os sujeitos apresentam dificuldade com relação ao conceito de número primo. Não percebo nenhum tipo de abstração reflexionante nas resoluções apresentadas.

Análise das resoluções da DUPLA DE

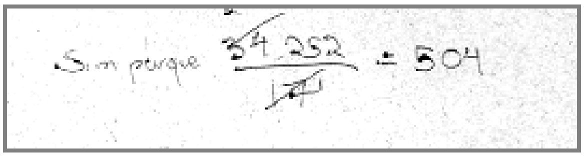
Atividade 1:

Item a:



A dupla usa a estratégia E_2, justificando por meio do quociente obtido na divisão, não caracterizando como número racional não inteiro. Apresenta dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão.

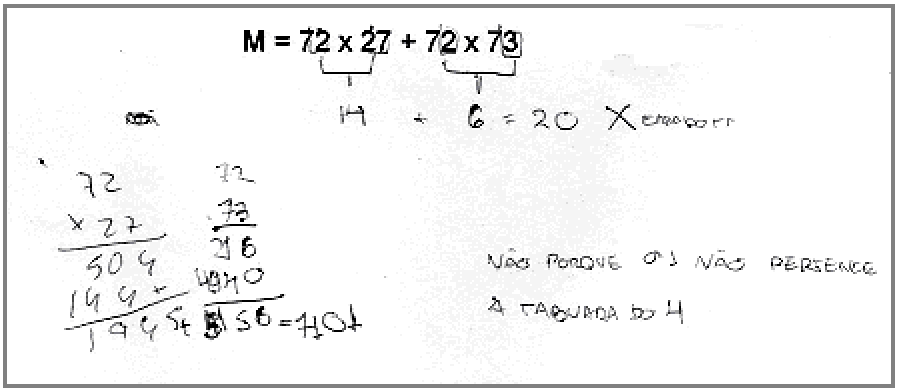
Item b:



Os sujeitos percebem que 34 é divisível por 17, simplificando o dividendo obtém o quociente corretamente, usa a estratégia E_3 para resolver a questão.

Atividade 2:

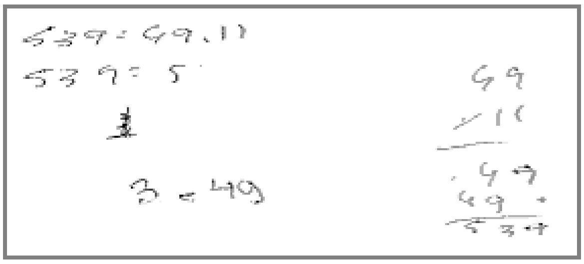
A dupla apela para uma estratégia não esperada pelo pesquisador, pois os sujeitos focam a unidade dos números. Apresentam uma linguagem informal na sua justificativa.



A dupla mostra pelo produto dos algarismos das unidades e pelo algarismo da soma desses produtos que M é número múltiplo de 20. Apresenta dificuldades na manipulação do algoritmo da multiplicação, encontra um valor errado para M. Não consegue perceber que o número encontrado contradiz com a análise das unidades e “confiam” na operação para afirmar de forma errônea que M não é múltiplo de 24. Usando a paridade, a dupla poderia chegar a conclusão que M é par, por isso o número ímpar encontrado contradiz tal afirmação.

Atividade 3:

Item a:



A dupla compreende a representação do produto com fatores primos como um processo, ou seja, a intenção da representação é obter o número que tem tal representação. Não cita nenhum divisor de 539.

Item b:

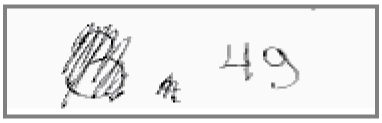
A dupla como item anterior escreve 539 como um produto da multiplicação cujos fatores são 49 e 11, cita um desses fatores como exemplo do qual 539 é múltiplo.

Item c:


Sim.

Os sujeitos apenas respondem objetivamente sem apresentar nenhuma justificativa ou estratégia usada, que seria muito interessante, pois os alunos respondem corretamente inicialmente, mas se arrependem de usar uma idéia que estava certa, centrada no algarismo das unidades dos dois números.

Item d:


49

A dupla cita um divisor de 539 como exemplo de múltiplo. Não usam a ideia de que múltiplos não nulos de um número são maiores ou igual a esse número.

Item e:


49

A dupla revela também por este item que a conexão entre os conceitos de múltiplo e divisor é frágil, inconsistente e baseada em procedimentos, ações operacionais.

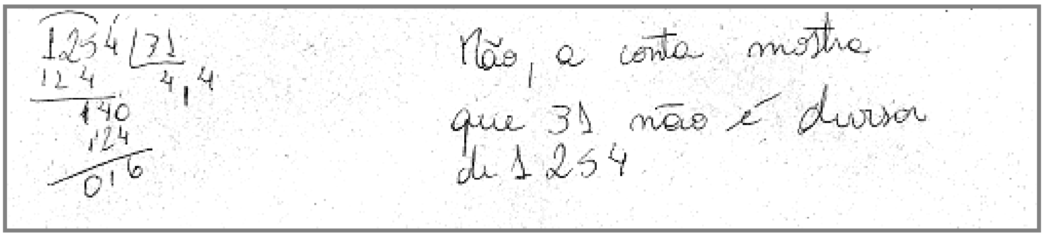
Na **atividade 4**, os sujeitos somente respondem que a cesta referida é a segunda.

A dupla tem dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão. Há predomínio da linguagem informal nas suas justificativas. Os sujeitos utilizam propriedades e relações com relação aos números e as operações revelando características de uma concepção estrutural, mas com dificuldades operacionais. A representação em produto de fatores primos não foi relacionada com os conceitos de divisor e múltiplo. A conexão entre estes conceitos é feita de forma confusa e frágil, divisor é citado como exemplo de múltiplo do número. A divisibilidade não foi utilizada de forma eficaz na resolução do problema proposto. Os integrantes da dupla revelam pelas suas resoluções a abstração reflexionante da interiorização e da coordenação.

Análise das resoluções da DUPLA DF

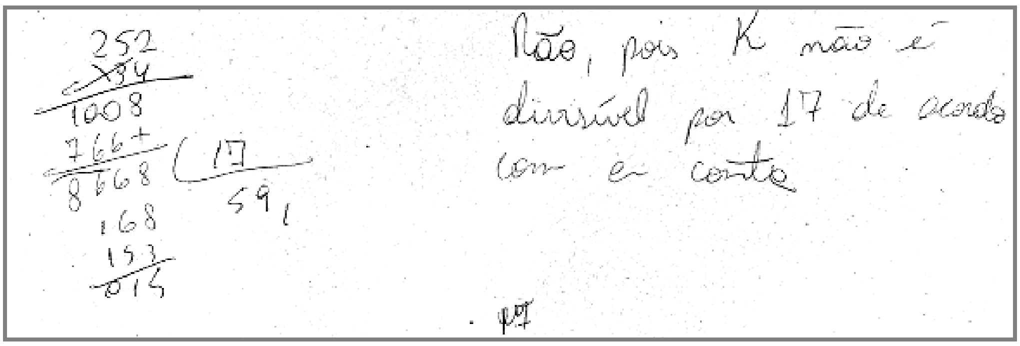
Atividade 1:

Item a:



A dupla responde a questão segundo a estratégia prevista E_2. Os sujeitos utilizam uma linguagem informal e usam como argumento a própria operação de divisão. Os alunos revelam ter dificuldades na manipulação das operações de multiplicação e divisão.

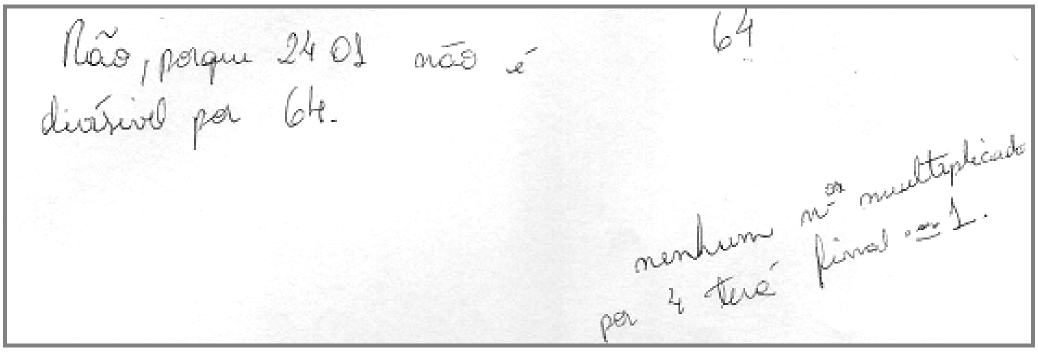
Item b:



A dupla encontra um valor de K diferente de 8568, pois erra na multiplicação dos algarismos 5 e 3 e conseqüentemente erra a divisão do número encontrado por 17. A justificativa está sedimentada na divisão, utiliza um termo informal em sua argumentação e constrói sua resolução segundo a estratégia E_2.

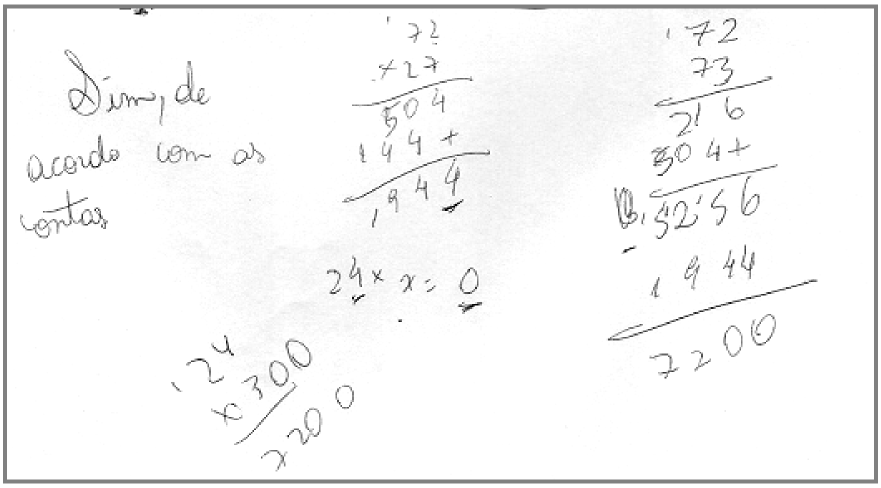
Atividade 2:

Item a:



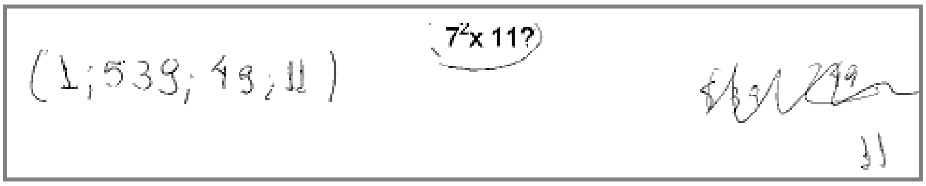
A estratégia usada pela dupla não foi pensada pelo pesquisador. Há associação entre os conceitos, múltiplo de e divisível por. A justificativa está centrada no algarismo da unidade dos dois números.

Item b:



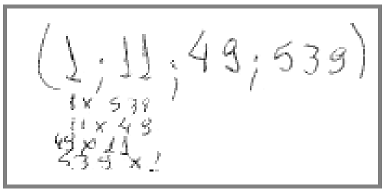
A dupla utiliza duas multiplicações para justificar que M é múltiplo de 24 e destaca a unidade do fator (64) e do produto (zero). Registram de forma algébrica que é necessário descobrir um número que multiplicado por 24 termina em zero, ou seja, 7200. Mostram que tal número é o 300. Utilizaram uma linguagem informal. Os alunos só usaram a multiplicação para perceber que o produto é múltiplo de 64, usaram parcialmente a estratégia E_1, encontrando o valor de M, mas não efetuaram a divisão por 24. Neste momento há uma associação entre o conceito de múltiplo e a operação da multiplicação.

Atividade 3:



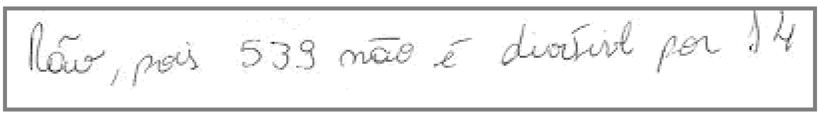
A dupla compreende que os dois fatores da multiplicação são os divisores de 539 mais os dois divisores naturais do número, ou seja, 1 e ele próprio.Efetua uma divisão, mas desconsidera tal operação. Utiliza a estratégia E_2 pela observação.

Item b:



Os sujeitos mostram que por meio das multiplicações cujo produto é 539, tal número é múltiplo dos respectivos fatores dessas multiplicações. Utilizam a estratégia E_2.

Item c:



A dupla não apresenta justificativa neste item e conseqüentemente fico sem condições de identificar qual foi a estratégia utilizada.

Item d:

$11 \times 49 = 539$

Os estudantes entenderam que esse item é equivalente ao item b, não compreenderam que há diferença na relação - o número p é múltiplo de qual número q? e qual número r é o múltiplo do número p?

Item e:

Todos os citados
(1; 11; 49; 539)

A dupla apresenta problemas na conexão entre múltiplo e divisor, citando os divisores do número como exemplo também de múltiplo dele.

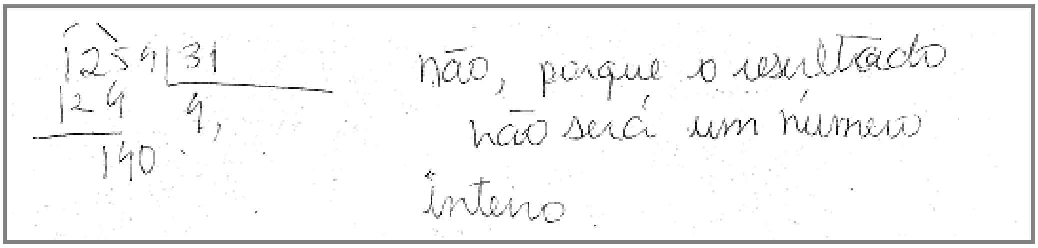
Na **atividade 4**, a dupla representa as informações contidas no problema numa linguagem algébrica.

A dupla justifica por meio das operações efetuadas. Revela dificuldades na parte operacional. A concepção de divisor e múltiplo está centrada principalmente nas divisões realizadas pela dupla, ou seja, tem uma concepção operacional. Utiliza o algarismo das unidades para verificar a relação entre os números. Os sujeitos entendem os fatores como divisores do número usando a propriedade comutativa da multiplicação. Não faz a coordenação entre os fatores para encontrar os outros divisores não citados. Associa o conceito de múltiplo com a multiplicação e revela ter confusões na conexão entre os conceitos de divisor e múltiplo. Não consegue utilizar os conceitos da divisibilidade para responder a situação problema. Destaco que os integrantes da dupla nas resoluções revelam momentos de abstração reflexionante, interiorização e generalização.

Análise das resoluções da DUPLA DG

Atividade 1:

Item a:


1254 | 31
124   4,
140

não, porque o resultado não será um número inteiro

A dupla utiliza a estratégia E_2 para responder a questão. Apresenta dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão, pois não percebem que o quociente não pode ser um número que dez.

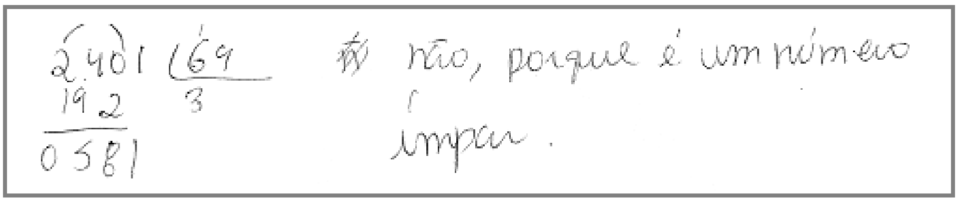
Item b:


Sim, porque 34 é o ~~dobr~~ ~~trio~~ dobro de 17

A resolução dada para esse item é característica da estratégia E_3, pois percebem que a relação existente entre um dos fatores de K e o número 17.

Atividade 2:

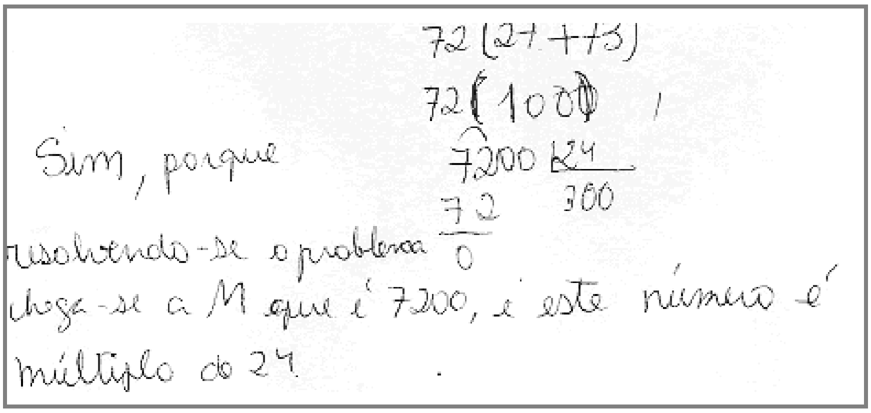
Item a:


2401 | 69
192   3
0581

não, porque é um número ímpar.

A dupla efetua a divisão 2401 por 64, mas justifica segundo a estratégia E_3, a operação valida a argumentação dada.

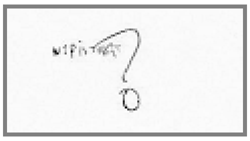
Item b:



Os sujeitos se valeram da estratégia E_2, utilizando a propriedade distributiva para encontrar o valor de M.

Nestas duas primeiras atividades os alunos revelam que utilizam relações, propriedades pertinente aos números ou operações, ou seja, revelam indícios de ter uma concepção estrutural.

Atividade 3:
Item a:



Os sujeitos não entenderam que os fatores primos são divisores do produto. A representação dada é um obstáculo para a compreensão do conceito de divisibilidade.

Item b:

539 | 3
3   17
23
29 X

539 | 7
49   77
49

539 é um múltiplo de 7.

O número 3 não é um divisor de 539, pois está ausente na representação. A dupla efetua a divisão por 3 para constatar que o resto é diferente de zero. Mostra uma divisão exata considerando o conjunto dos números inteiros para verificar que 539 é um múltiplo do divisor 7. Usa a estratégia E_1.

item c:

Sim, se ele é múltiplo de 7 é múltiplo de 14.

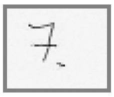
Como 539 é múltiplo de 7 os alunos deduziram que 539 é múltiplo de um múltiplo de 7, não levaram em consideração que 2 não é um fator de 539 e nem perceberam a inconsistência da afirmação não usando a imparidade dos números.

Item d:

7 ou 14.

Usando as respostas dos dois itens anteriores, os alunos fizeram equivocadamente a relação de que 539 é múltiplo de 7 então 7 é exemplo de múltiplo de 539 , revelando dificuldades na conexão entre os conceitos de múltiplo e divisor. Não usa a propriedade de que um múltiplo não nulo de um número tem que ser maior ou igual que o mesmo.

Item e:


7.

A dupla cita um divisor de 539 como número que é ao mesmo tempo múltiplo e divisor dele.

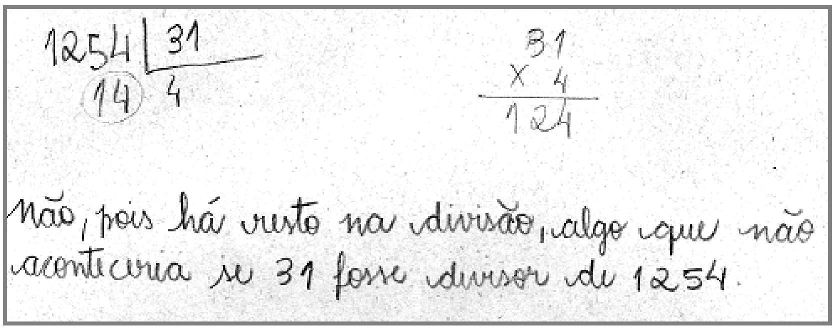
Na **atividade 4**, a dupla considera a relação entre seis e doze ovos como fato relevante, por isso responde a cesta de doze ovos como a cesta referida.

A dupla mostra ter uma concepção estrutural e processo, pois utiliza propriedades e relações tais como propriedade distributiva, paridade, que são pertinentes em relação ao conceito de divisor e múltiplo. Não compreendem o significado da representação do produto em fatores primos. A conexão entre os conceitos citados acima são confusas e problemáticas, pois consegue citar um número par como divisor de um número ímpar e um divisor como exemplo de múltiplo. Faz uma relação muito simplista para responder ao problema dado. As resoluções feitas pelos sujeitos apresentam características de interiorização e coordenação (abstrações reflexionantes).

Análise das resoluções da DUPLA DH

Atividade 1

Item a:

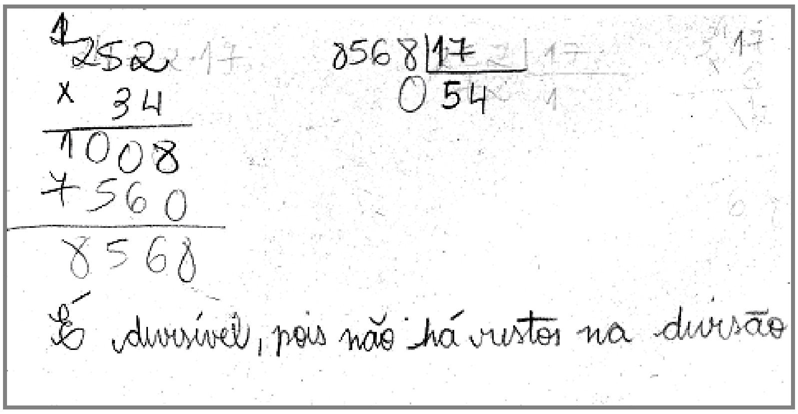

$1254 \,|\, 31$ → 4, resto 14

$31 \times 4 = 124$

não, pois há resto na divisão, algo que não aconteceria se 31 fosse divisor de 1254.

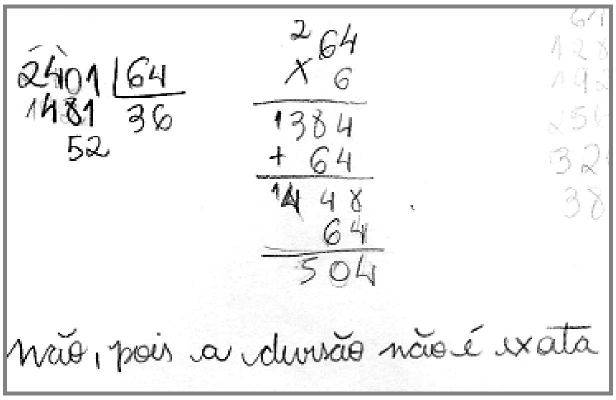
A resposta da dupla está condizente com a estratégia E_1 prevista, ou seja, considera o conjunto dos números inteiros para efetuar a divisão.

Item b:



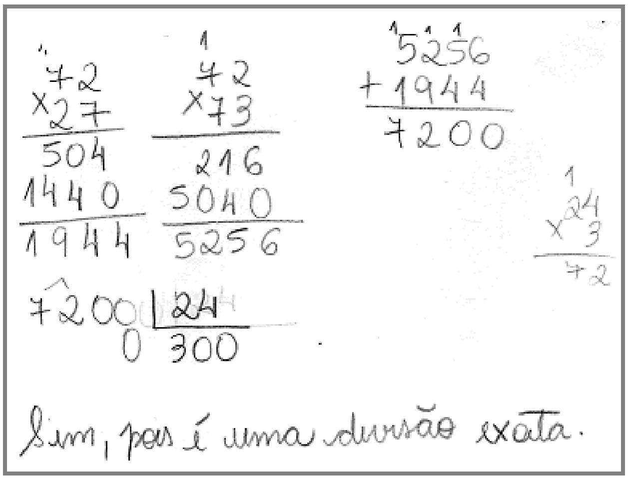
Nesta questão, os sujeitos revelam dificuldade em relação a manipulação do algoritmo da divisão. Aqui também os alunos utilizam a estratégia E_1. As respostas dadas pela dupla sugerem que os mesmos estão concebendo o conceito de divisor em função dos procedimentos, dos algoritmos, enfim de ações sobre o objeto matemático.

Atividade 2:
Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder à questão. Erra o quociente da divisão.

Item b:

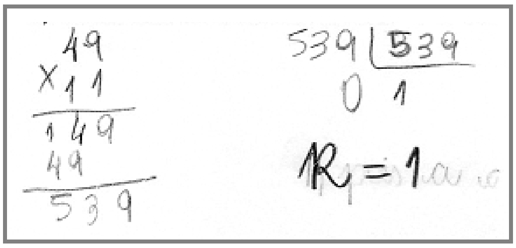


Para verificar se um número é múltiplo de um outro número, a dupla se baseou na operação da divisão. Não houve a associação da multiplicação com o conceito de múltiplo. A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder tal atividade.

Houve o predomínio da concepção ação na abordagem das duas primeiras atividades.

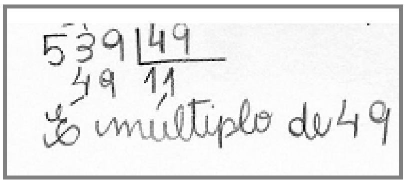
Atividade 3:

Item a:



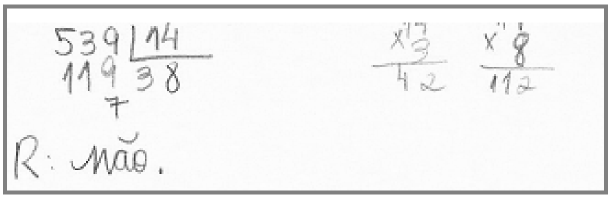
A dupla passa a impressão de estar resolvendo a equação 539x = 539, pois a resolução sinalizou que por meio das operações inversas, a dupla encontra o quociente 1 como solução. Os sujeitos entendem a representação de produto em fatores primos como um processo, resolve as operações envolvidas para encontrar um número.

Item b:



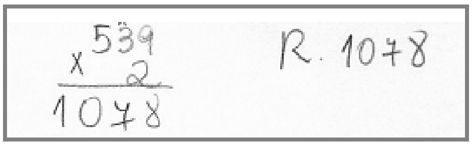
A dupla associa que 539 é múltiplo de um dos dois fatores da multiplicação 11 x 49, para isso utiliza a estratégia E_1, usando a operação inversa, a divisão.

Item c:



A dupla usa a estratégia E_1 para responder a questão sem apresentar uma justificativa.

Item d:



Os sujeitos resolvem o item segundo a estratégia E_1, mostrando que o produto de 539 por um número natural é um múltiplo de 539.

Item e:

Nesse item a dupla responde corretamente sem justificativa.

Essa atividade reforça que os alunos exclusivamente apresentam a concepção ação, estruturada principalmente pela operação da divisão tanto na concepção do conceito de divisor como na concepção do conceito de múltiplo.

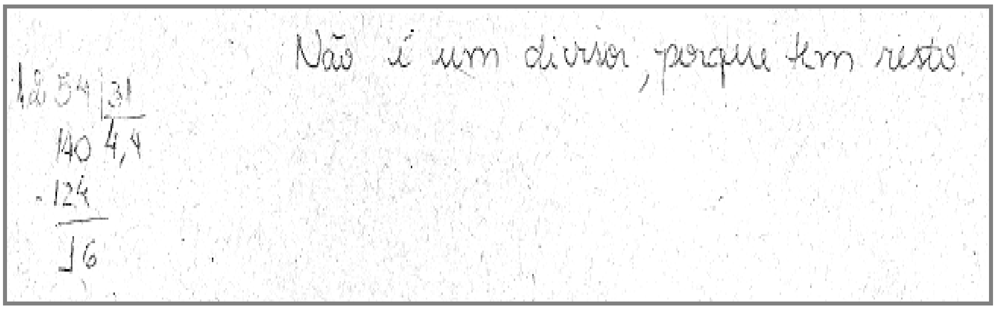
Na **atividade 4**, a dupla relacionou a quantidade da segunda e terceira cesta, por meio da relação de dobro entre essas quantidades.

A concepção dessa dupla em relação ao conceito de divisor e múltiplo é restrita e limitada à ação de dividir dois números. Concebe a representação do produto em fatores primos como um processo para determinar algum número desconhecido (procedimento presente na resolução de uma equação). Não consegue utilizar os conceitos de divisibilidade na resolução do problema proposto. Os sujeitos optaram por desenvolver as suas resoluções por meio de uma única estratégia,ou seja, a divisão de números inteiros, por isso não percebo nenhum tipo de abstração reflexionante.

Análise das resoluções da DUPLA DI

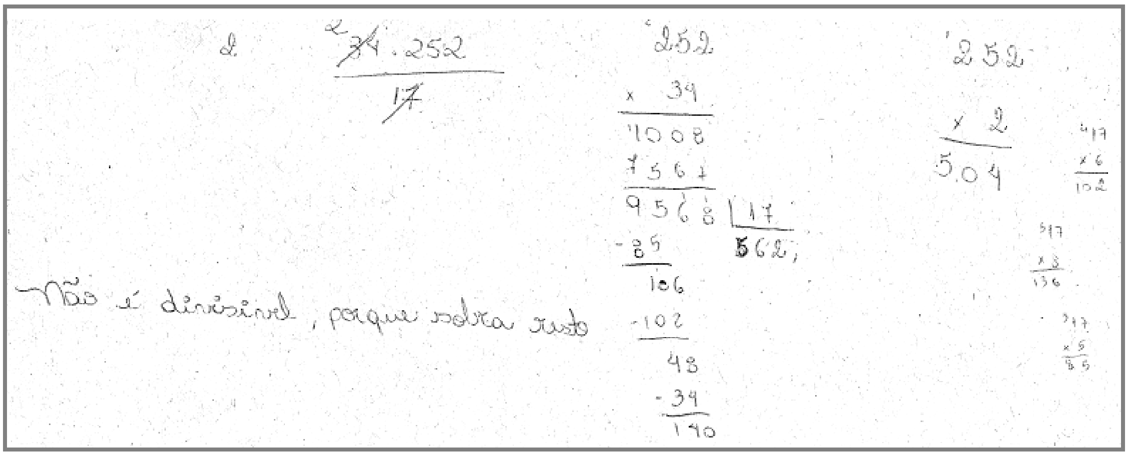
Atividade 1:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_1 conforme a sua justificativa, mas apresenta quociente racional não inteiro na sua resolução, não fica claro qual conjunto numérico os sujeitos consideram a divisão.

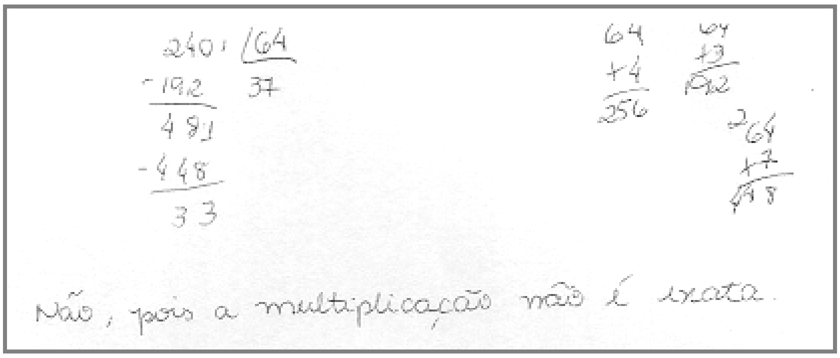
Item b:



A dupla utiliza duas estratégias distintas, pela manipulação operacional situada à direita, os sujeitos se valem da Estratégia E_1. Observando a parte superior à esquerda, os alunos usaram também a estratégia E_3 que validaria a divisibilidade existente. Diante das duas resoluções, a dupla fez prevalecer à estratégia E_1, segundo constato na justificativa apresentada. A dupla revela dificuldades na manipulação do algoritmo da multiplicação e divisão.

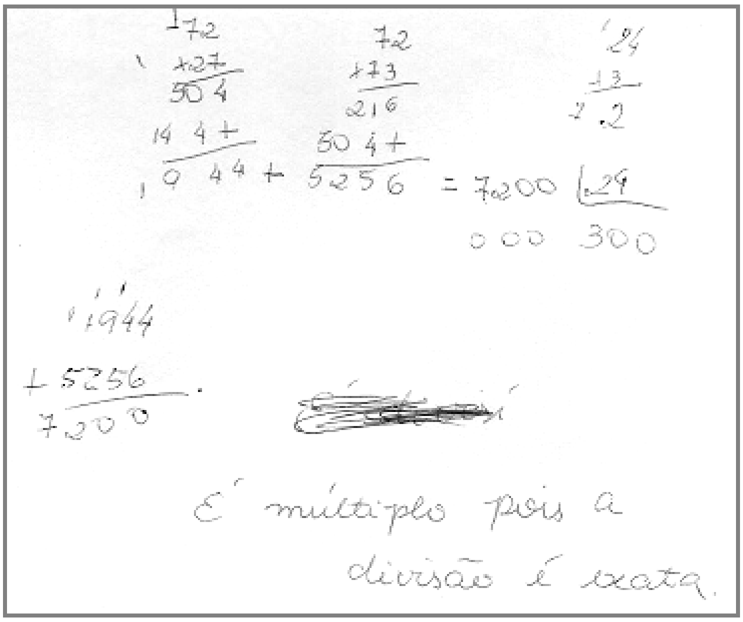
Atividade 2

Item a:



A dupla responde conforme a estratégia prevista E_1, porém a justificativa não destaca a questão do resto, além disso, a justificativa apresenta um equivoco entre a operação efetuada e a citada.

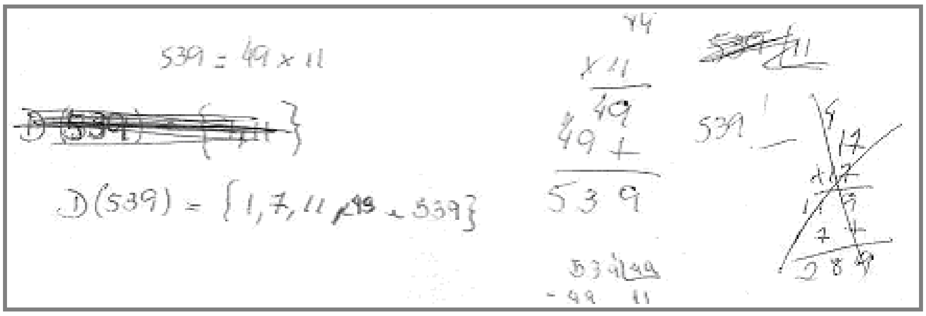
Item b:



Os alunos não utilizam a multiplicação para responder à questão de um número ser ou não múltiplo do outro, usam a estratégia E_1. Revelam o predomínio da concepção operacional por meio das operações matemáticas e algoritmos. Nesta questão a dupla não destaca a questão de o resto ser zero.

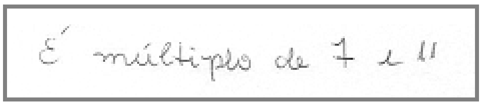
Atividade 3

Item a:



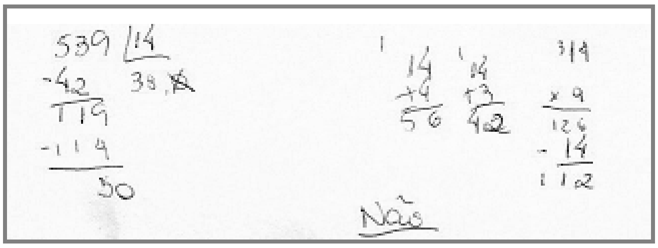
Os alunos representam o número 539 como um produto de dois fatores. Efetuam a multiplicação 49 x 11, validam a representação dada, verificando se o número é realmente 539, com isso revelam o desconhecimento sobre o teorema fundamental da aritmética. Identificam que os divisores primos e o fator da multiplicação registrada são divisores do número representado acrescido dos divisores naturais do número, 1 e ele próprio. Os alunos não utilizam a coordenação, tipo de abstração reflexionante, pois não citam como divisor o produto dos divisores primos 7 e 11.

Item b:



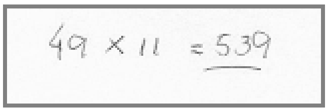
A dupla cita os divisores primos de 539 como exemplo de números ao qual 539 é múltiplo.

Item c:



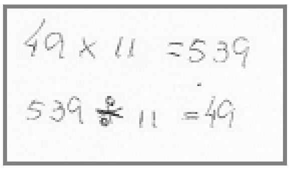
Os alunos utilizam a estratégia E_1, mas não apresentam nenhuma justificativa.

Item d:



A dupla entende que citar um exemplo de múltiplo de 539 é escrever uma multiplicação cujo produto seja 539. Revela uma fragilidade na compreensão do conceito de múltiplo.

Item e:



A dupla não responde que 539 é o número que apresenta as duas características citadas, os sujeitos associam o conceito de múltiplo com a operação de multiplicação e o conceito de divisor com a divisão.

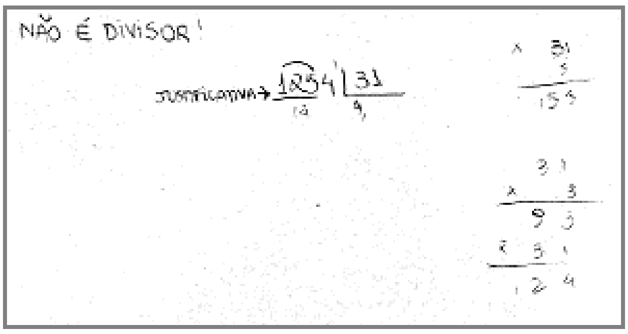
Na **atividade 4**, a dupla incluiu na sua resolução que falta informação e responde que a cesta referida foi a segunda, pois é a única cesta que tem o seu dobro.

A concepção de múltiplo e divisor é baseada nas operações de multiplicação e divisão com predomínio da segunda, ou seja, a concepção é operacional baseada em algoritmos, procedimentos, a ação de dividir é exteriorizada. A resolução dos integrantes da dupla não apresenta indicio de nenhum tipo de abstração reflexionante. Não há uma associação objetiva entre a representação em produto de fatores primos e os conceitos de múltiplo e divisor. Os sujeitos associam o conceito de divisor com a divisão e o conceito de múltiplo com a multiplicação. Os alunos não utilizam de forma efetiva a divisibilidade na resolução do problema apresentado.

A análise das resoluções da DUPLA DJ

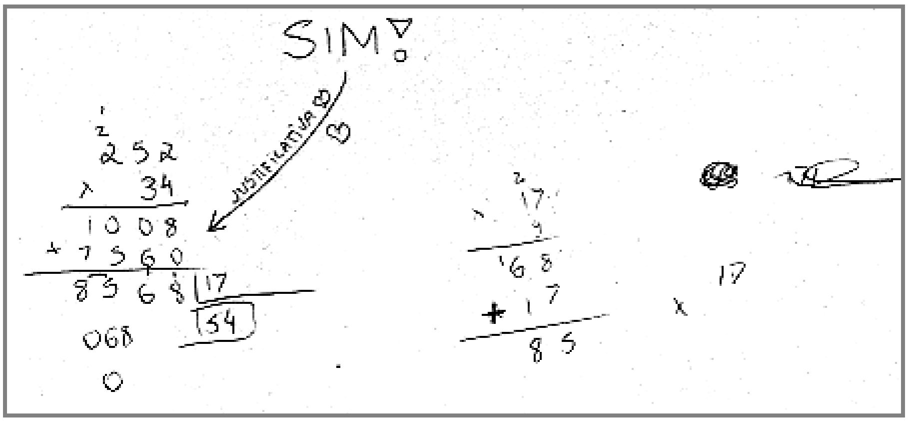
Atividade 1:

Item a:



A dupla revela dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão, não percebe que fazendo a operação inversa, ou seja, multiplicando divisor e quociente, o produto que é o dividendo será uma centena. Os sujeitos apresentam uma resolução conforme a estratégia E_2. A operação da divisão é a justificativa.

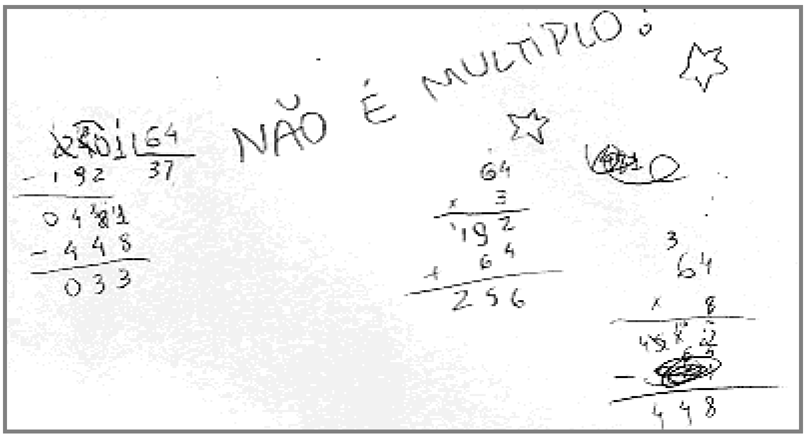
Item b:



Os estudantes se valeram da estratégia E_1 para responder o item. A dupla indica que a própria operação é a justificativa. Revelam dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão.

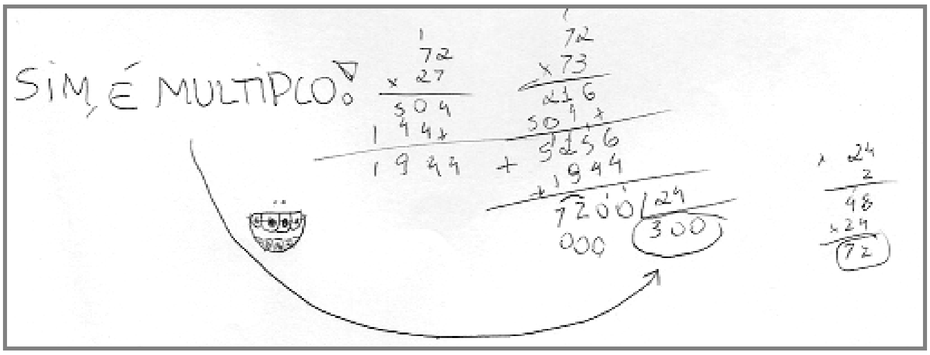
Atividade 2:

Item a:



A dupla recorre à divisão para verificar se um número é múltiplo de outro. Usa a estratégia E_1 para responder a questão. Não apresenta nenhuma justificativa.

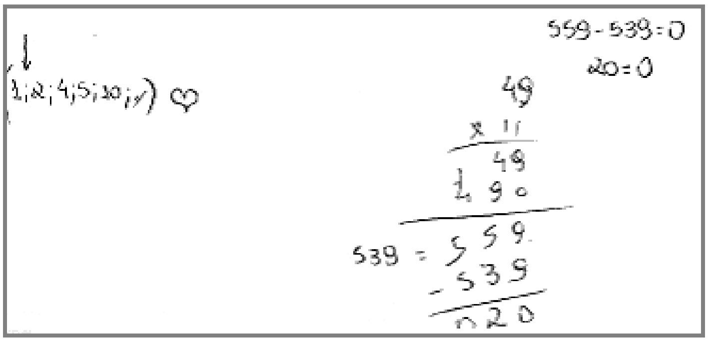
Item b:



A resolução da dupla é a resolução prevista pelo pesquisador como E_1. Também neste item não há justificativa para a resposta dada.

As duas atividades revelam que os sujeitos têm uma concepção ação limitada pelas ações de multiplicar e dividir.

Atividade 3:

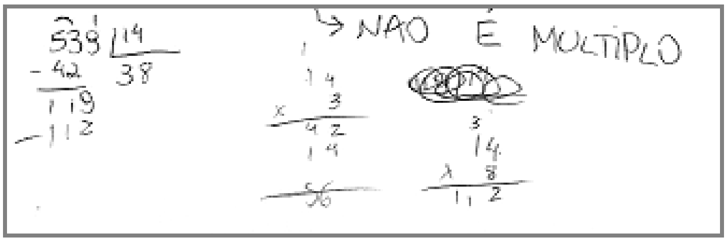


A dupla chega numa identidade falsa, pois erra a multiplicação, entende que a representação em produtos de fatores primos tem como finalidade determinar o número na representação do sistema numérico decimal. Cita como divisores números primos que não fazem parte da representação, 2 e 5, além de citarem fatores pares. Não relacionam que os fatores primos são divisores do número.

Item b:

Responde o próprio número como exemplo de número que é múltiplo dele, sem justificativa.

Item c:



A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder a questão. Não apresenta justificativa para a resposta dada.

Item d:

Apenas escreve o próprio número como exemplo de múltiplo

Item e:

A dupla apenas responde de forma objetiva e correta a questão sem apresentar nenhuma justificativa.

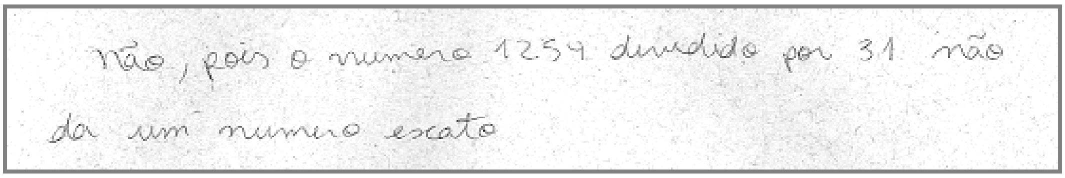
Na **atividade 4** obtiveram o total de ovos, 89 e, depois, dividiram por 3, obtendo quociente 29 e resto 3 e apresentaram como resposta a cesta que tinha 29 ovos sem justificativa.

A dupla revela uma concepção operacional solidificada pela divisão em relação ao conceito de múltiplo e divisor. O ato de dividir é a ação explicitada pelos sujeitos diante das diversas representações de um número. As operações são as justificativas dadas pelos alunos. Há uma supervalorização do processo, do algoritmo. A idéia, o conceito, o significado não são explicitados. A dupla mostra certo desconhecimento da representação do produto em fatores primos. A concepção do conceito de divisor e múltiplo é restrita e limitada. Não há uma clareza na abordagem destes conceitos diante de uma situação problema. As resoluções dos integrantes dessa dupla não revelam nenhum tipo de abstração reflexionante. Há o predomínio da estratégia de utilizar de forma concreta, a divisão no que tange o conceito de divisor e múltiplo.

Análise das resoluções da DUPLA DK

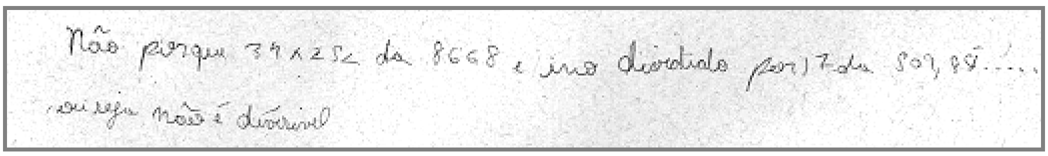
Atividade 1:

Item a:


não, pois o numero 1254 dividido por 31 não
da um numero escato

A dupla não explicita a operação da divisão e a justificativa dada é vaga pelos estudantes, pois deixa em dúvida se a estratégia utilizada foi a E_1 ou a E_2.

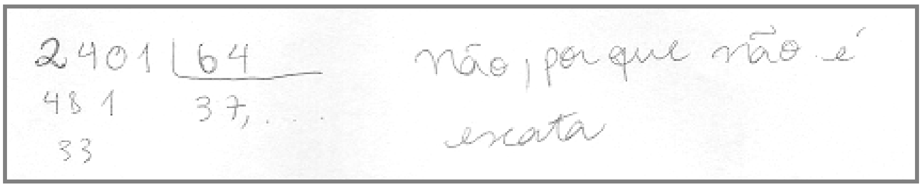
Item b:


Não porque 34x252 da 8668 e isso dividido por 17 da 509,88.....
ou seja não é divisivel

Os alunos erraram o produto de 34 com 252 obtendo um número 100 unidades a mais e consequentemente não encontram o quociente correto quando divide o mesmo por 17. Não justificam a resposta dada.

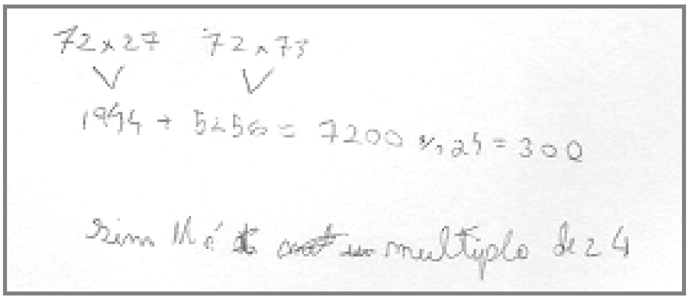
Atividade 2:

Item a:



A dupla apresenta uma resolução segundo a estratégia E_1. Usa a divisão para verificar a relação de múltiplo entre os dois números.

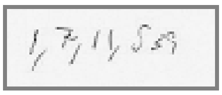
Item b:



A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder a questão. Efetua a divisão sem usar o algoritmo da divisão. A compreensão do conceito de múltiplo está associada à operação da divisão, pois fazem a equivalência entre ser múltiplo e divisível por.

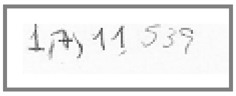
Atividade 3:

Item a:



A dupla cita como divisores de 539, os divisores naturais e os fatores primos da representação dada, ou seja, associam o conceito de fator com o conceito de divisor. Os alunos não fazem a coordenação entre os fatores, ou seja, o produto deles também é um divisor.

Item b:

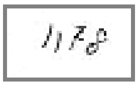


Os sujeitos fazem a conexão entre divisor e múltiplo.

Item c:

A dupla apenas responde sem justificativa e não apresenta de forma explicita como chegaram nesta conclusão.

Item d:



A dupla aponta o dobro do número como exemplo de múltiplo.

Item e:

A dupla responde corretamente sem justificativa.

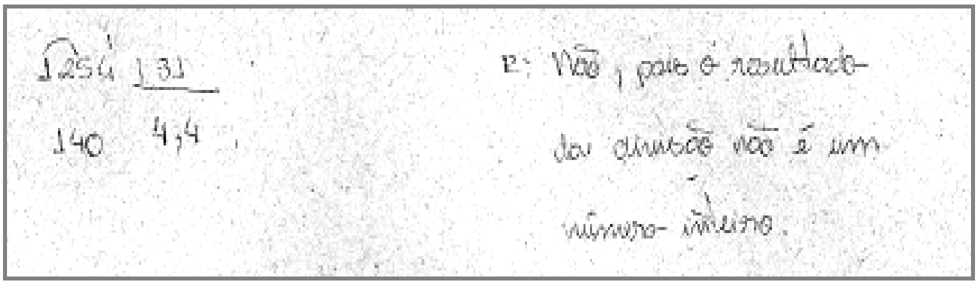
Na **atividade 4**, a dupla responde corretamente que a cesta referida foi a de 29 ovos mas justifica erroneamente que 50 é o dobro de 20.

A caracterização da concepção desta dupla em relação ao conceito de divisor e múltiplo é operacional com predomínio da divisão, revela a concepção ação restrita às operações. Concebe os fatores como divisores do número. As resoluções dos integrantes dessa dupla não revelam nenhum tipo de abstração reflexionante. A concepção da divisibilidade é restrita ao ato concreto de dividir dois números naturais. Os sujeitos percebem que os fatores de um produto são divisores do mesmo.

Análise das resoluções da DUPLA DL

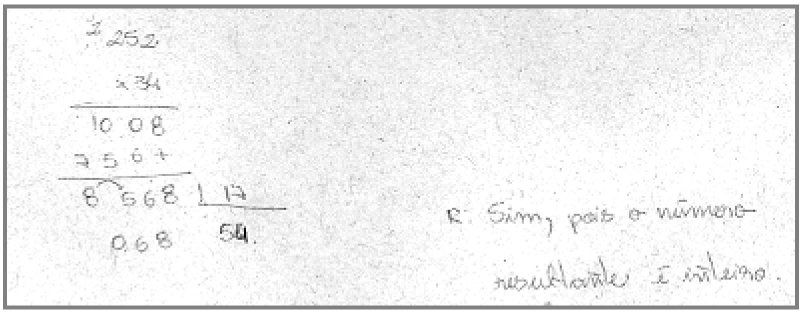
Atividade 1:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_2 na sua resolução. Apresenta dificuldade na manipulação do algoritmo da divisão. Não validam o quociente encontrado por meio da operação inversa ou estimativa.

Item b:

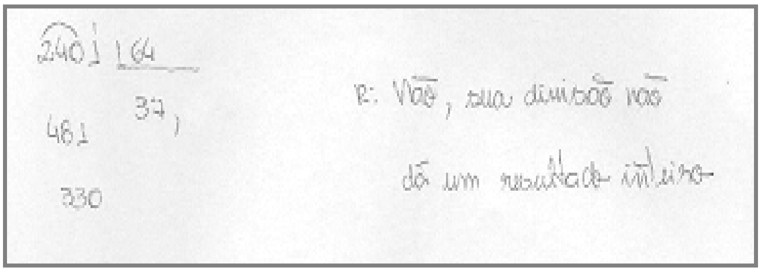


Neste caso, os alunos também revelam dificuldade na manipulação do algoritmo da divisão. A dupla se vale da estratégia E_1 para resolver a questão.

Nesta atividade os estudantes apresentam ter a concepção operacional sedimentada em operações e algoritmos.

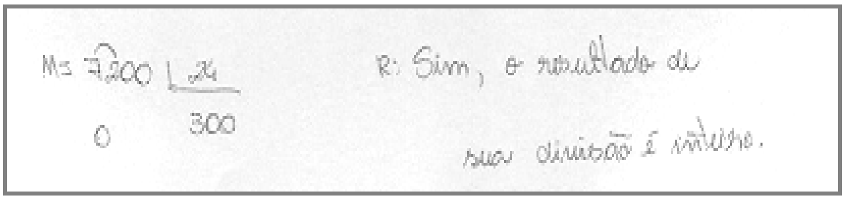
Atividade 2:

Item a:



A dupla efetua a divisão considerando o conjunto dos números racionais, por isso a estratégia presente na resolução é a E_2. Associam o conceito de múltiplo com a operação da divisão.

Item b:

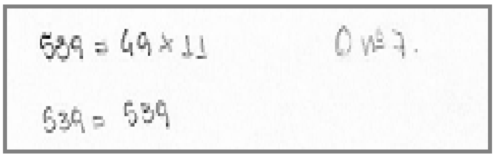


A dupla usou a estratégia E_2 para resolver o item, o foco foi o quociente ser ou não um número inteiro.

As duas primeiras atividades revelam que os alunos têm a concepção operacional, baseada nas operações matemáticas e em algoritmos. As ações principalmente de efetuar divisões foram pertinentes tanto para o conceito de divisor como para o conceito de múltiplo.

Atividade 3:

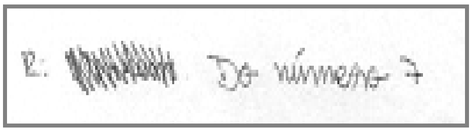
Item a:


539 = 49 x 11   O nº 7.

539 = 539

A dupla compreende o produto de fatores primos como um processo, ou seja, usa-se a representação para determina o número. Há uma confirmação de que o número da representação dada é o número 539. Escreve apenas o fator 7 como divisor. Não associam que fatores e o produto deles são divisores.

Item b:


R: Do número 7

Associa que o divisor do item anterior é exemplo de número ao qual 539 é múltiplo.

Item c:


R: Não.

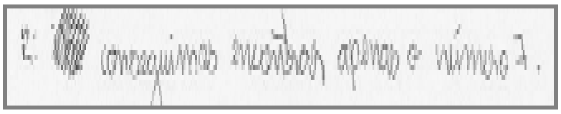
Apenas responde objetivamente sem justificativa.

Item d:


O número 7

Cita como exemplo de múltiplo, o divisor do número, esquecendo que o múltiplo não nulo só pode se igual o maior que o número em questão.

Item e:



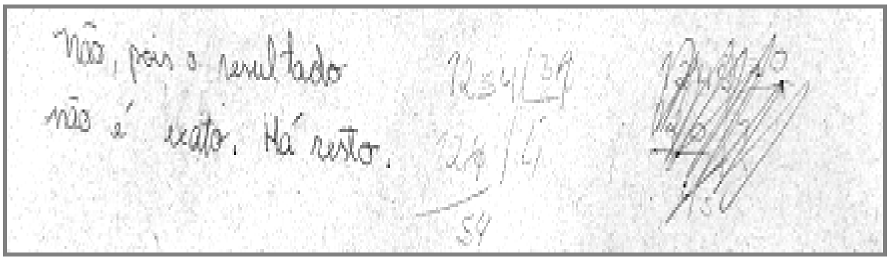
Os sujeitos revelam ter muita confusão na conexão entre os conceitos de divisor e múltiplo.

Na **atividade 4**, os alunos responderam que a cesta referida é a que tinha 6 ovos, pois a quantidade da terceira cesta era o dobro da segunda cesta.

A concepção desta dupla em relação aos conceitos de divisor e múltiplo está centrada na operação da divisão, operacional com ações regidas pelos algoritmos, processos, cálculos. Há dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão. Compreende a representação do produto em fatores primos como um processo para a obtenção do número representado. A conexão entre os conceitos de divisor e múltiplo é frágil e confusa A divisibilidade não é usada de forma consistente na resolução do problema proposto. Os integrantes dessa dupla não revelam por meio de suas resoluções nenhum tipo de abstração reflexionante.

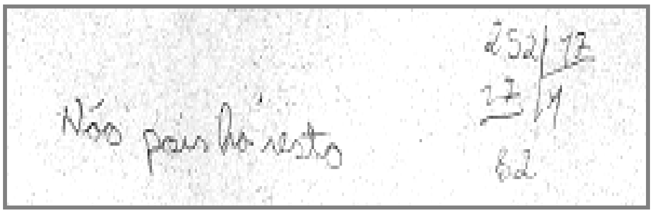
Análise das resoluções da DUPLA DM

Atividade 1:
Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder a questão.

Item b:

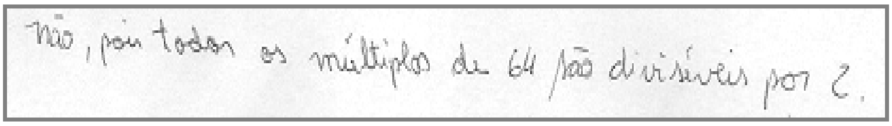

Não pois há resto

252 | 17
17 | 14
82

A dupla usa a relação de que para ser divisível por 17, 17 tem que dividir os dois fatores de K, como um deles não é divisível por 17 então conclui erroneamente que K não é divisível por 17. A dupla utiliza o equivalente a estratégia E_3, ou seja, divide um fator por 17.

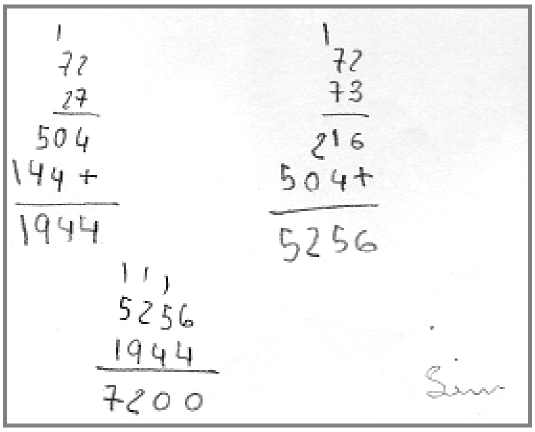
Atividade 2:

Item a:


não, pois todos os múltiplos de 64 são divisíveis por 2.

A resolução dessa dupla segue o raciocínio contido na estratégia E_3, observa a imparidade existente entre os dois números. Os sujeitos não utilizam a divisão para verificar a relação de múltiplo e sim apela para a propriedade de que um número ímpar não pode ser múltiplo de um número par.

Item b:


72 × 27 = 504 + 144 = 1944

72 × 73 = 216 + 504 = 5256

5256 + 1944 = 7200

Sim

Neste item os sujeitos não apresentam nenhuma justificativa para M ser múltiplo de 24. Não efetuaram explicitamente a operação da divisão, ou seja, percebem que M é múltiplo de 24, essa estratégia não foi pensada pelo pesquisador.

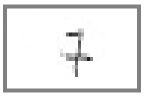
Essa dupla revela uma concepção estrutural baseada em propriedades e apresentando uma concepção processo, pois se internaliza alguns procedimentos, no caso a divisão.

Atividade 3:

Item a:

A dupla utiliza a estratégia E_2, entendendo que os fatores primos são divisores do número além dos divisores naturais dele, 1 e ele próprio.

Item b:



Os alunos citam um divisor de 539 como exemplo do qual 539 é múltiplo dele.

Item c:

A dupla apenas responde objetivamente e infelizmente como não tem justicativa e nem o raciocínio explícito não podemos analisar o porquê do erro cometido.

Item d:

Os sujeitos optam pelo dobro do número como exemplificação de um múltiplo de 539.

Item e:

A dupla responde corretamente, mas não justifica a resposta dada.

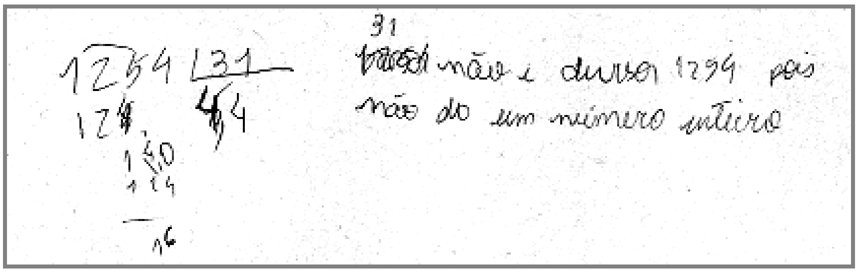
Na **atividade 4**, a dupla obtém o total de ovos e afirma que a única cesta que não poderia ser a referida é a que contém 6 ovos pois reduzindo 6 de um total de 89, a diferença não poderia ser divisível por 3.

A dupla revela uma concepção estrutural baseada em propriedades e relações entre os números mesmo cometendo algum equívoco, internaliza a operação da divisão mostrando uma concepção processo. Entende que os fatores são divisores de um número. Não coordena os fatores na obtenção de um outro divisor que é o produto deles. Há uma tentativa de utilizar a divisibilidade como estratégia para a resolução do problema. Faz uma conexão coerente entre os conceitos de divisor e múltiplo. Os sujeitos revelam por meio de suas resoluções indícios de interiorização (abstração reflexionante).

Análise das resoluções da DUPLA DN

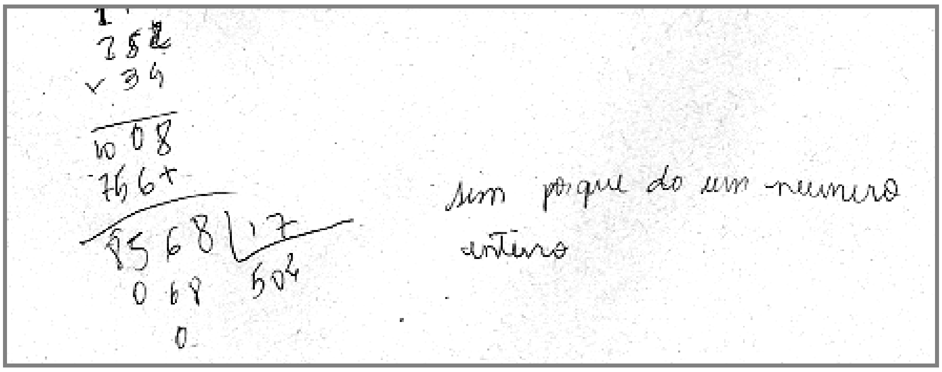
Atividade 1:

Item a:



A dupla revela dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão. Utilizam à estratégia E_2, pois admitem a operação da divisão no conjunto dos números racionais.

Item b:



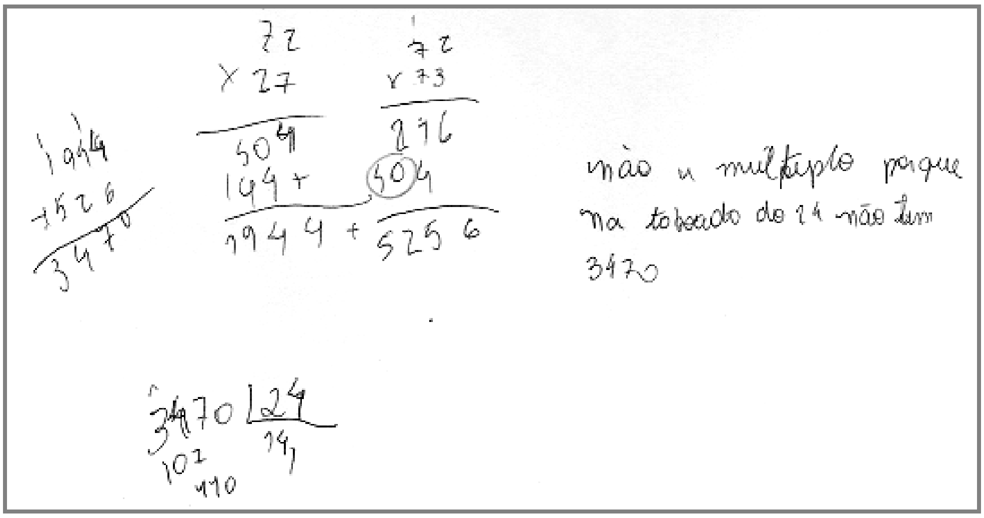
A dupla responde segundo a estratégia E_2, pois justifica que o resultado da divisão é um número inteiro.

Atividade 2:

Item a:

A dupla apresenta dificuldades no algoritmo da divisão, pois não encontra o valor correto do quociente. Pela sua justificativa vaga só posso inferir que, como o quociente tem uma vírgula, esses sujeitos se valeram da estratégia E_2. Faz uma associação correta entre os termos divisível e múltiplo.

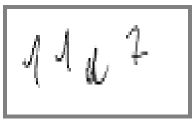
Item b:



A dupla revela dificuldades de ordem operacional na manipulação das operações. Os sujeitos usam uma linguagem informal na justificativa e a resolução tem características da estratégia E_1.

Atividade 3:

Item a:



A dupla responde parcialmente segundo a estratégia E_2, pois não cita os divisores naturais e sim os fatores primos de 539. Não utiliza abstração reflexionante da coordenação, pois 7 x 11 também será um divisor de 539.

Item b:

1, 7, 11, 539

Neste item, a dupla cita os quatros divisores que não precisam de uma coordenação como exemplo do qual 539 é múltiplo deles.

Item c:

não

Responde sem apresentar o raciocínio utilizado e sem justificativa.

Item d:

11x49

Os sujeitos associam o conceito de múltiplo como uma multiplicação cujo produto é 539.

Item e:

11

Mostraram confusão em relação ao conceito de múltiplo e divisor, pois cita um divisor como exemplo de múltiplo e divisor simultâneo de 539.

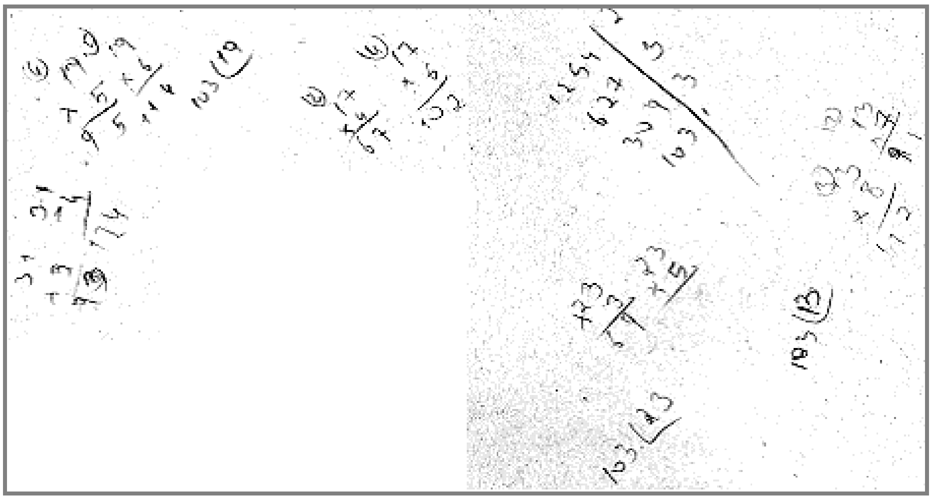
Na **atividade 4**, a dupla obteve o total de ovos e escreveu uma sentença algébrica para representar o número de ovos (29 = 2g) e somente destacou que a cesta referida era a de 23 ovos.

A dupla apresenta dificuldades na manipulação operacional comprometendo a resolução das questões propostas. Revela uma concepção operacional baseada na operação da divisão e multiplicação em relação ao conceito de divisor e múltiplo. Mostra uma linguagem informal nas suas justificativas. Há predomínio da divisão no discernimento da divisibilidade. Há problemas na conexão entre os conceitos de múltiplo e divisor. Não consegue utilizar os conceitos da divisibilidade na resolução de um problema. Os sujeitos não revelam pelas suas resoluções nenhum tipo de abstração reflexionante. O que caracteriza as respostas dadas por essa dupla é a ação concreta de dividir dois números naturais.

Análise das resoluções da DUPLA DO

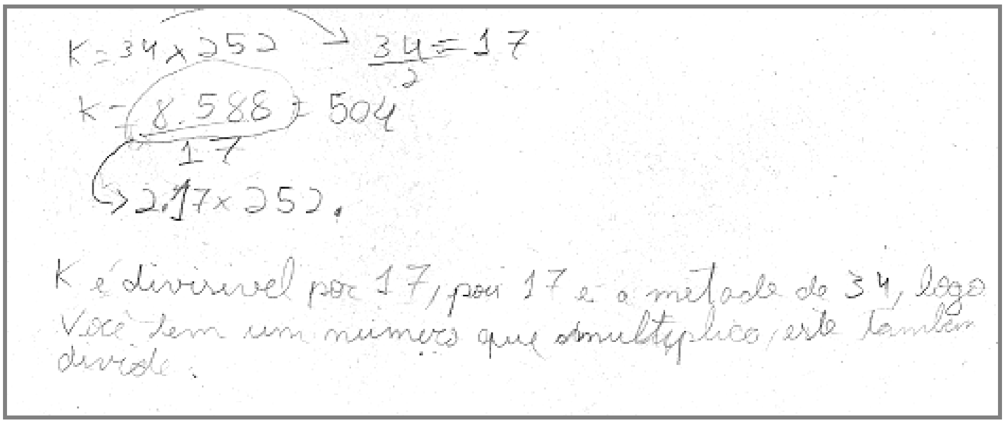
Atividade 1:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_3, fatora 1254, mas ao dividir 627 por 3 erra a divisão e encontra 309 ao invés de 209. Pelas divisões efetuadas com divisor 103 não chega à conclusão de que 103 é primo. Não responde a questão e consequentemente não apresenta nenhuma justificativa. Normalmente os alunos não estão acostumados a trabalhar com números primos “básicos” tais como 2, 3, 5, 7 e 11.

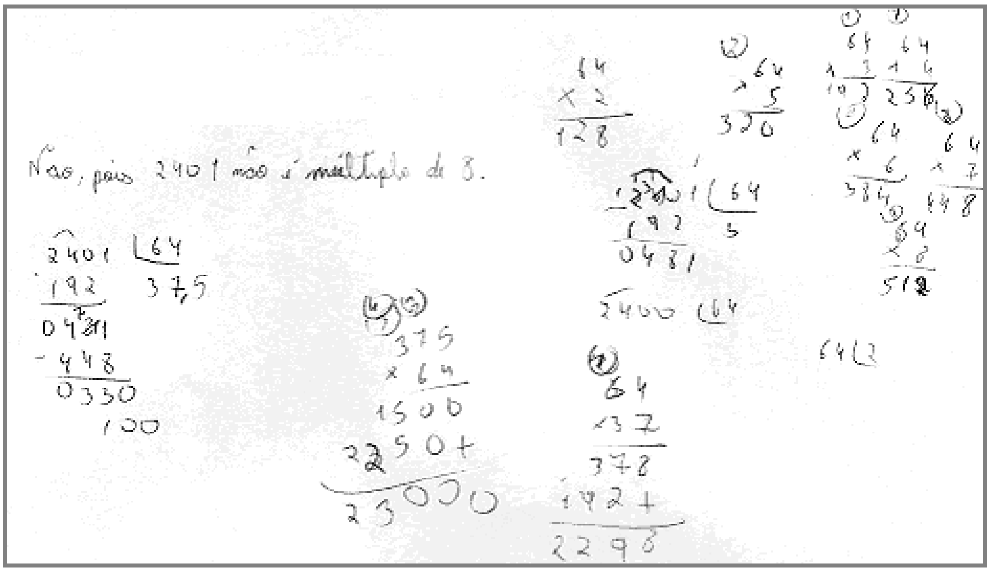
Item b:



Os sujeitos respondem segundo a estratégia E_3, percebem que um dos fatores de K é divisível por 17 e justificam que o produto desse fator por qualquer outro número natural também será divisível por 17. Os alunos também determinam o valor de K, errado, e divide por 17, validando a sua resposta. Destacam que K pode ser escrito da forma 2 x 17 x 252. A dupla apresenta neste momento uma concepção de divisor baseada em propriedades, relações, ou seja, estrutural

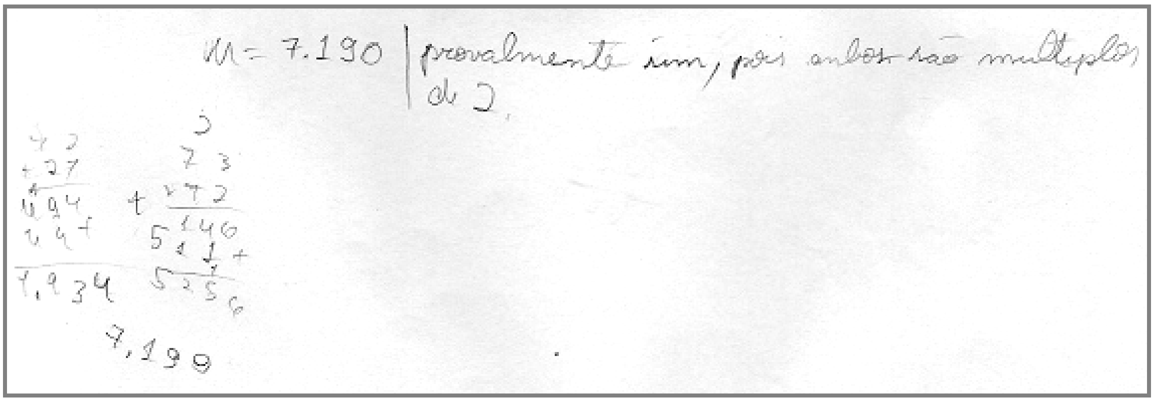
Atividade 2:

Item a:



A dupla usa E_1, como estratégia de resolução. Utiliza a operação inversa, a multiplicação, para verificar se o quociente encontrado está certo. Registra diversas multiplicações cujo fator é 64. Erra a operação 64 x 37, pois considera 6 x 7 como 35.

Item b:

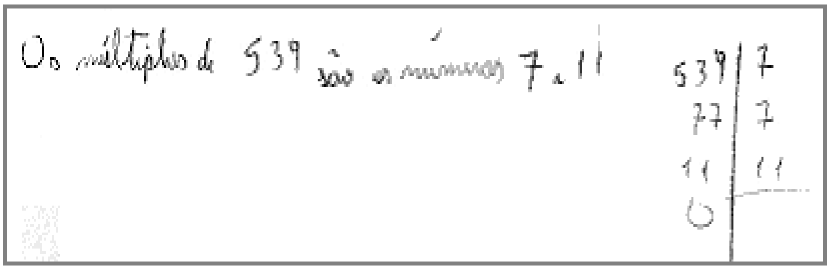


A dupla revela dificuldades operacionais, pois erra pela terceira vez uma multiplicação, determina de forma errônea o valor de M e justifica sem dividir M por 24, que existem fortes indícios de M ser divisível por 24 porque os dois números têm a mesma paridade.

Atividade 3:
Item a:

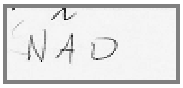
A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder a questão. Divide 539 por 7 e depois o quociente encontrado por 7. Responde como divisores o próprio número e os quocientes encontrados nessas divisões, não cita o 7 como divisor, nem 1 e o quadrado de 7.

Item b:



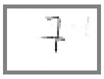
Ignorando a representação dada, a dupla fatora 539 e cita os divisores que usou para citar como exemplo do qual 539 é múltiplo.

Item c:



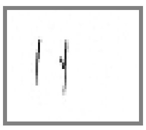
Responde sem apresentar a estratégia usada e sem justificativa.

Item d:



Aponta um divisor como exemplo de múltiplo de 539, mostrando dificuldades na compreensão do conceito de divisor e múltiplo.

Item e:



Responde um divisor neste caso também revelando fragilidade na compreensão do conceito de múltiplo e divisor.

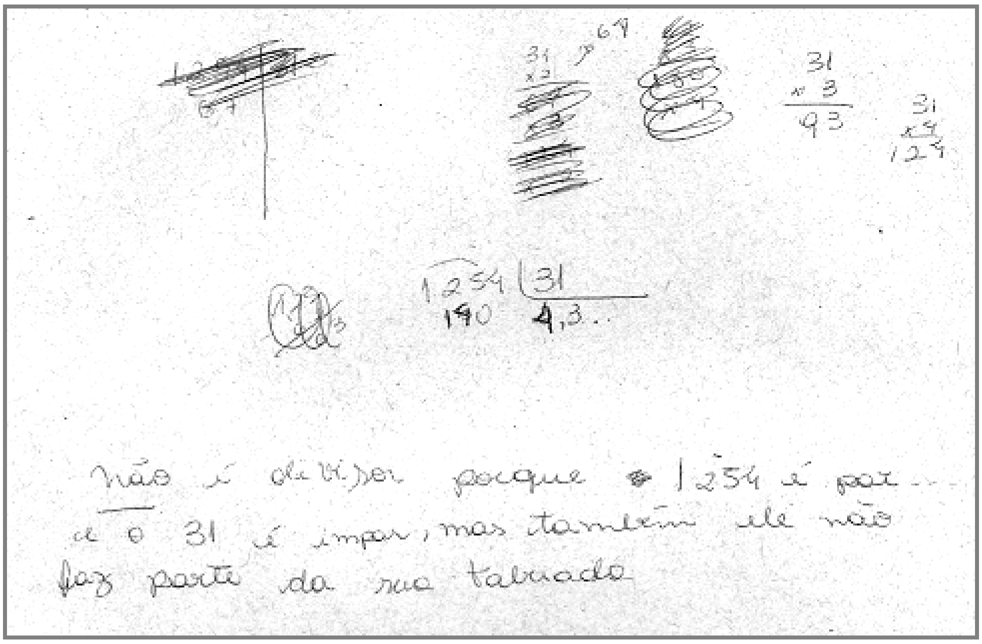
Na **atividade 4**, escreve-se a equação x +2x = 3x e mostra que x igual a 4 satisfaz a equação e destaca que 12 é a cesta referida.

A dupla revela pelas suas respostas que a fatoração é uma estratégia importante na abordagem dos conceitos de divisor e múltiplo. A concepção dos sujeitos é estrutural baseada em propriedades (paridade, fatoração) e relações entre os números. Associa os fatores como divisores de um número, despreza a representação do produto em fatores primos e utiliza o processo da fatoração para encontrar os divisores. O Teorema Fundamental da Aritmética não é visto como status de teorema. Apresenta alguma dificuldade operacional com dificuldade na manipulação das operações da multiplicação e divisão. Faz uma conexão confusa entre os conceitos de divisor e múltiplo. Os integrantes dessa dupla revelam por meio das suas resoluções abstrações reflexionantes, como interiorização, coordenação e generalização.

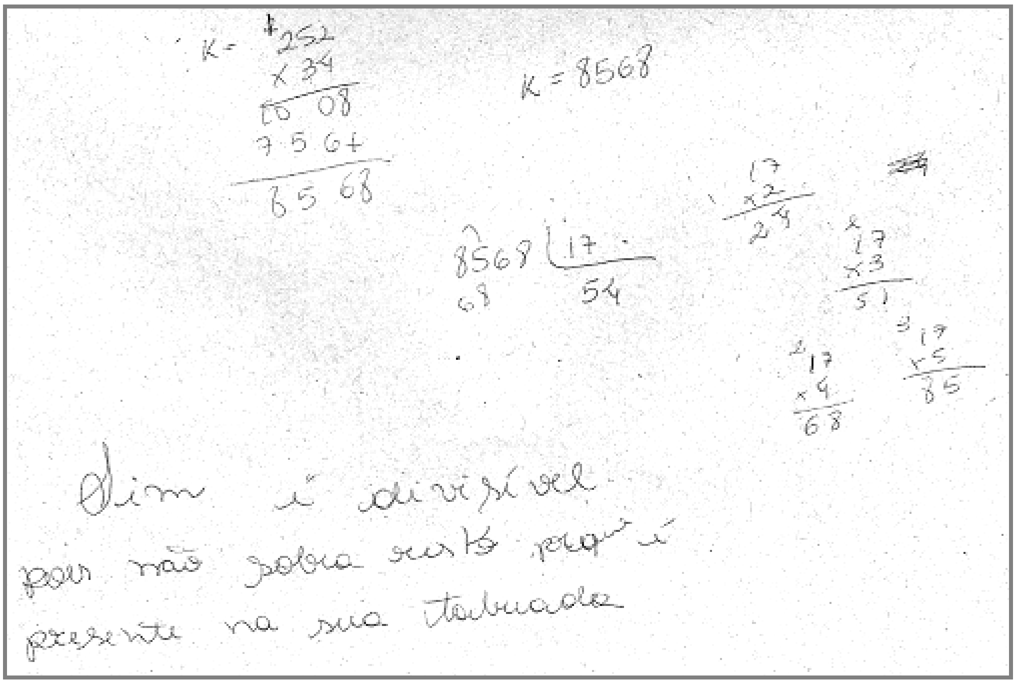
Análise das resoluções da DUPLA DP

Atividade 1:

Item a:



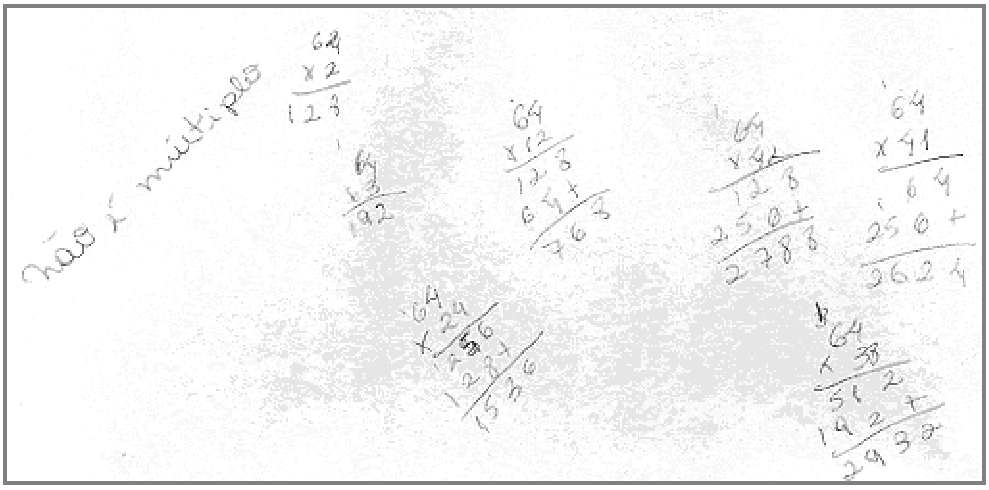
A dupla revela dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão, em desconfia que o quociente encontrado tem que ser uma dezena.A justificativa tem uma linguagem informal. Utiliza a estratégia E_2, mas argumenta de forma equivocada a imparidade dos números 1254 e 31.



A resolução apresentada segue conforme a estratégia E_1. Neste item reforça a dificuldade que a dupla tem na manipulação do algoritmo da divisão. Justificativa com linguagem informal.

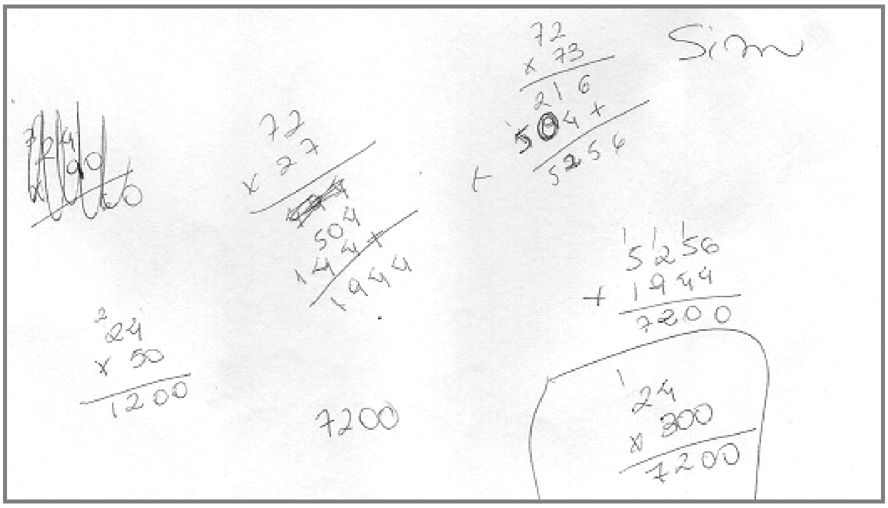
Atividade 2:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_4 para responder a questão, concebendo o conceito de múltiplo associado à operação de multiplicação. Não apresenta justificativa para a resposta dada.

Item b:

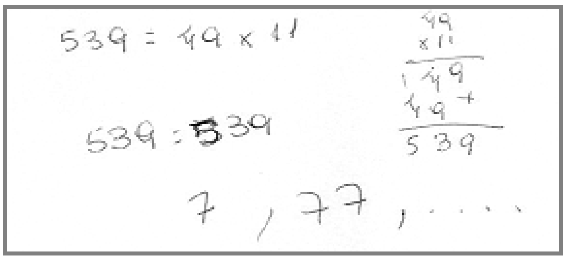


A dupla não usa a operação da divisão para verificar que M é múltiplo de 24. Determina o valor de M e percebe que o mesmo é múltiplo de 24. Não apresenta justificativa e utiliza uma estratégia não pensada pelo pesquisador.

Nas duas primeiras atividades, os sujeitos apresentaram uma concepção ação, fazendo explicitamente inúmeras operações de multiplicação e divisões.

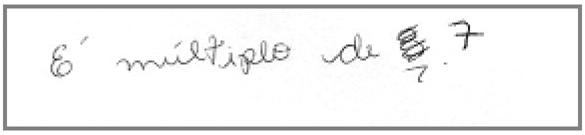
Atividade 3:

Item a:



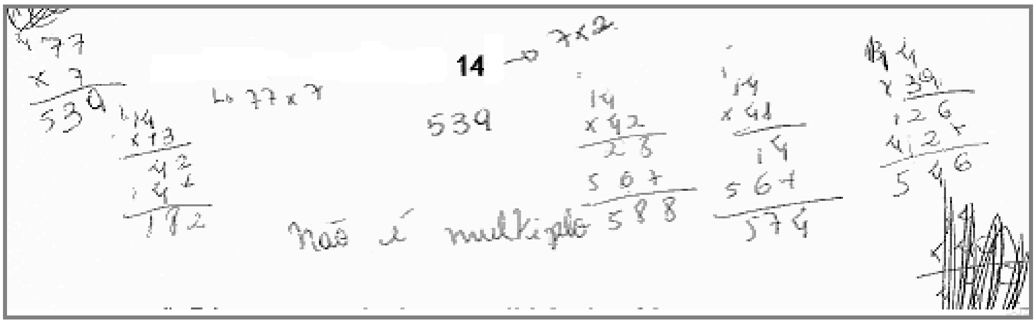
A dupla entende a representação dada como um processo, ou seja, tem como finalidade encontrar o número que tem tal representação. Os sujeitos efetuaram as multiplicações, “constatam” que o número é realmente 539. Citam dois divisores, omitindo os divisores naturais, 1 e ele próprio.

Item b:



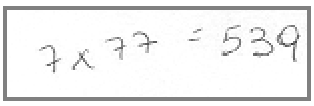
Citam um dos divisores do item anterior como exemplo do qual 539 é múltiplo.

Item c:



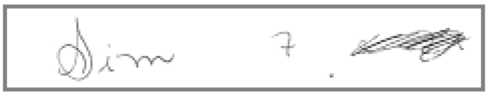
A dupla utiliza uma estratégia que não foi citada nas estratégias previstas, ou seja, a dupla encontra múltiplos de 14 próximos de 539 e verifica que nenhum deles é 539. A dupla não apresenta justificativa e representa 539 e 14 como produto de duas multiplicações que tem 7 como fator.

Item d:



A dupla associa o conceito de múltiplo com a operação de multiplicação cujo resultado é 539.

Item e:



A conexão do conceito de múltiplo e divisor não acontece de forma consistente, tal situação é perceptiva nos dois itens anteriores, pois no último item, os sujeitos citam um divisor como divisor e múltiplo simultâneo de 539

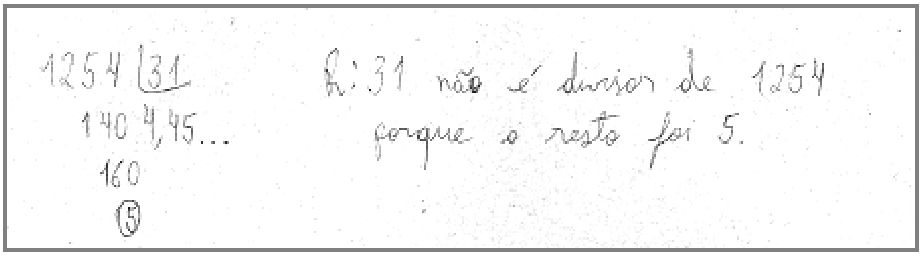
Na **atividade 4**, a dupla simplesmente fez a relação entre a quantidade de ovos da segunda e terceira cestas, pois a quantidade da terceira cesta é o dobro da quantidade da segunda cesta.

A dupla apresenta dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão. Os sujeitos associam o conceito de divisor com a divisão e o conceito de múltiplo com a multiplicação, ou seja, há o equilíbrio entre o uso das operações de multiplicação e divisão. Os sujeitos não justificam a resposta e quando justificam usam uma linguagem informal. A concepção é operacional baseada em ações limitadas pelos algoritmos da multiplicação e divisão. Os alunos não relacionam a representação em fatores primos com os conceitos de divisor e múltiplo. Não utilizam de forma adequada a divisibilidade para resolver o problema proposto. Os integrantes dessa dupla revelam por meio das resoluções efetuadas principalmente as abstrações da interiorização e coordenação.

Análise das resoluções da DUPLA DQ

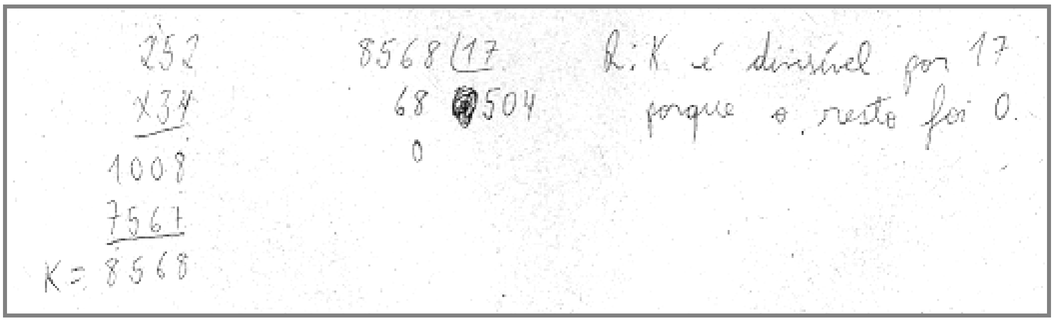
Atividade 1:

Item a:



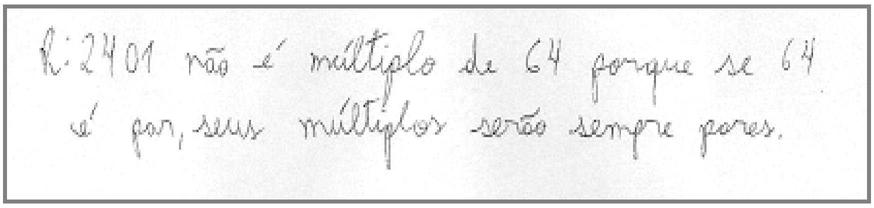
A dupla revela dificuldade na manipulação do algoritmo da divisão. Há uma dissonância entre a resolução dada que segue a estratégia E_2 e a justificativa que se apresenta conforme a estratégia E_1, ou seja, os alunos não têm clareza de como é operação da divisão considerando o conjunto dos inteiros e o conjunto dos números racionais.

Item b:



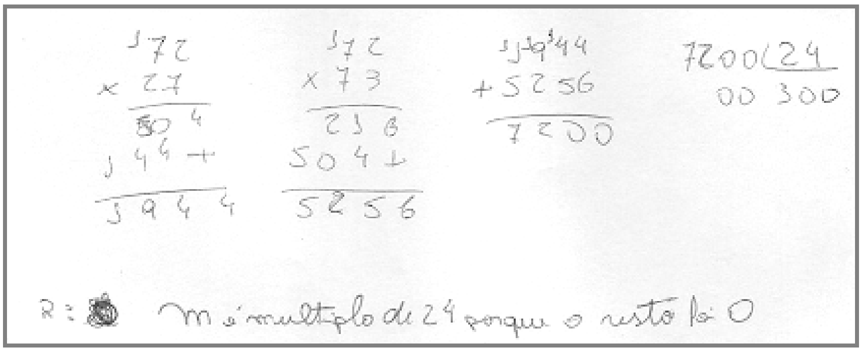
Os sujeitos utilizam a estratégia E_1 para responder a questão. O conceito de divisão está associada a operação da divisão.

Atividade 2:
Item a:



A dupla percebe a imparidade entre os números e responde segundo a estratégia E_3.

Item b:



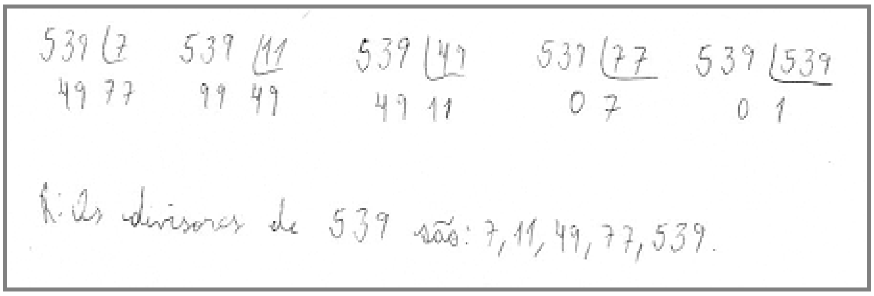
$72 \times 27 = 504 + 1440 = 1944$ $\quad$ $72 \times 73 = 216 + 5040 = 5256$ $\quad$ $1944 + 5256 = 7200$ $\quad$ $7200 \div 24 = 300$, resto 00

R: m é múltiplo de 24 porque o resto foi 0

A dupla também associa o conceito de múltiplo com a operação da divisão. Usa a estratégia E_1 para responder o item.

Atividade 3:

Item a:

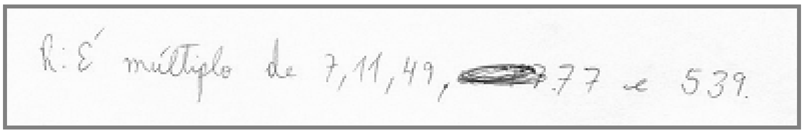


$539 \div 7 = 77$, resto 0 $\quad$ $539 \div 11 = 49$, resto 0 $\quad$ $539 \div 49 = 11$, resto 0 $\quad$ $539 \div 77 = 7$, resto 0 $\quad$ $539 \div 539 = 1$, resto 0

R: Os divisores de 539 são: 7, 11, 49, 77, 539.

A resposta dos estudantes segue os procedimentos citados na estratégia E_1. Os alunos citam como divisor os números que foram divisores das cinco divisões efetuadas com resto zero não computaram a divisão 539 por 1, por isso, 1 não fez parte da solução dada, apesar de ser um divisor natural.

Item b:



R: É múltiplo de 7, 11, 49, 77 e 539.

Segue a estratégia E_1, ou seja, cita os divisores de 539 como exemplo do qual 539 é múltiplo.

Item c:

R: 539 não é múltiplo de 14, pois se 14 é par, seus múltiplos também serão pares.

A dupla se vale da imparidade dos números para responder o item , conforme a estratégia E_3.

Item d:

$$\begin{array}{r} 539 \\ \times\ 2 \\ \hline 1078 \end{array}$$

R: 1078

A dupla multiplica 539 por um número natural, no caso 2, citando o seu dobro como exemplo de múltiplo conforme previsto na estratégia E_1.

Item e:

R: Todos os números que são divisores de 539 também são múltiplos de 539.

A dupla revela fragilidade na conexão entre os conceitos de múltiplo e divisor. Se a dupla entendesse que os divisores de 539 são menores ou iguais a 539 e que os múltiplos não nulos são maiores ou igual a 539 não cometeria essa confusão que eles apresentaram na sua resposta.

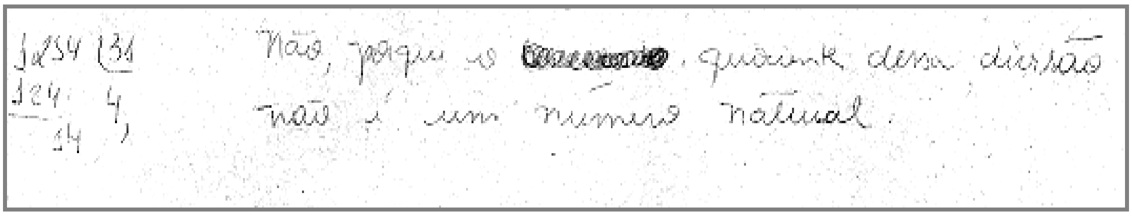
Na **atividade 4**, a dupla obteve o total de ovos e em seguida subtraiu 29 desse total, a diferença dividiu por 2 encontrando quociente 30, logo mostra que a cesta referida é a que contém 29 ovos.

A concepção desta dupla em relação aos conceitos de divisor e múltiplo é restrita à ação delimitada pela divisão, é operacional com o uso da paridade/imparidade na abordagem do conceito de múltiplo. A representação em produto de fatores primos não é usada de forma significativa na questão envolvendo os conceitos de divisor e múltiplo. A conexão entre os conceitos citados anteriormente é feita de forma confusão. A dupla consegue utilizar os conceitos pertinentes da divisibilidade para resolver a situação problema. A abstração reflexionante da interiorização é visível nas resoluções dessa dupla.

Análise das resoluções da DUPLA DR

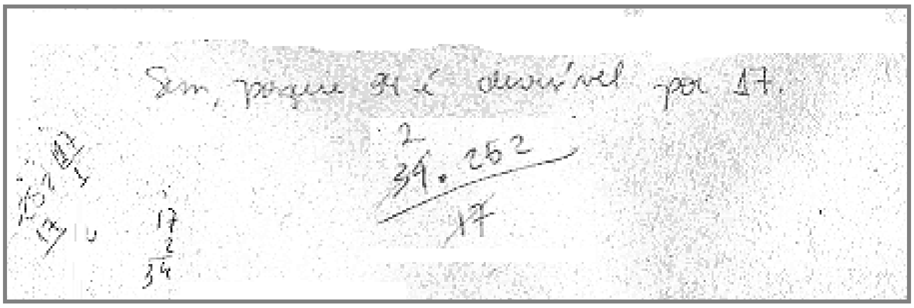
Atividade 1:

Item a:



A dupla utiliza a estratégia E_2, pois considera a divisão no conjunto dos números racionais. Revela dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão.

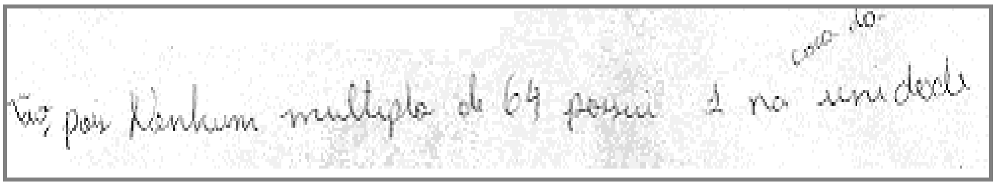
Item b:



A dupla percebe que um dos fatores de K é divisível por 17 conforme a estratégia E_3. A dupla verifica se o outro fator é divisível por 17, mas usa corretamente a relação de que se p natural é divisível por m e que q não é divisível por m, o produto deles, p.q é divisível por m.

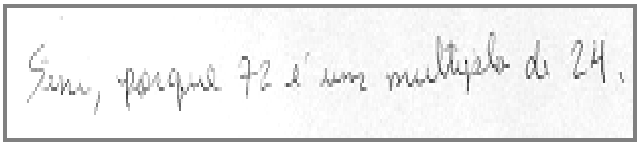
Atividade 2:

Item a:



A dupla usa uma estratégia não prevista pelo pesquisador. Por meio do algarismo da unidade do número 2401, justifica-se que tal unidade não está presente em nenhum múltiplo de 64.

Item b:

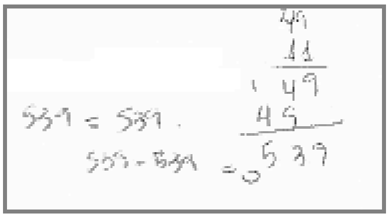


A dupla utiliza a estratégia E_3 para responder a questão.

Os sujeitos dessa dupla revelam por meio das resoluções das duas primeiras atividades que têm a concepção estrutural baseada em propriedades e relações entre os números envolvidos, mostram uma consistência na abordagem em relação aos conceitos de divisor e múltiplo.

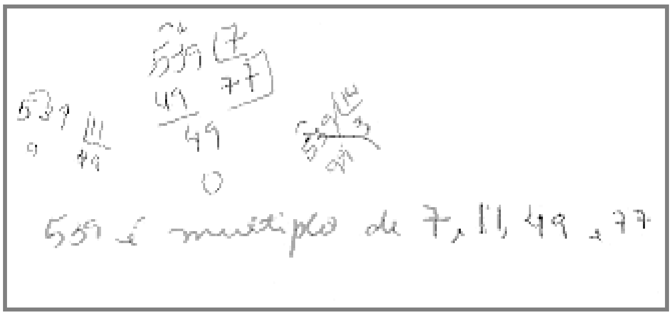
Atividade 3:

Item a:



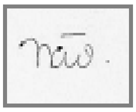
A dupla entende que a representação dada, o produto em fatores primos tem como finalidade determinar o número que tem tal representação. Chegando numa identidade verdadeira, que serve como verificação não cita nenhum divisor de 539.

Item b:



A dupla se vale da estratégia E_1, ou seja, encontra quatro divisores de 539 por meio da divisão e cita tais números como exemplo do qual 539 é múltiplo.

Item c:

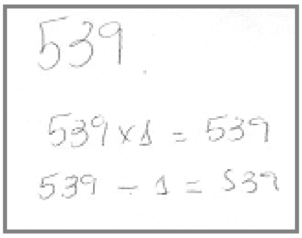


A dupla responde de forma lacônica o item sem apresentar a estratégia utiliza e nenhuma justificativa,

Item d:

Cita o dobro de 539 como um exemplo de múltiplo. Implicitamente usa a estratégia E_1.

Item e:



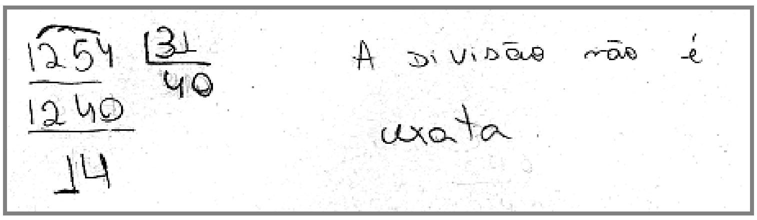
A dupla responde segundo a estratégia prevista pelo pesquisador, pois mostra que 539 é o único número que pode ser múltiplo e divisor simultaneamente dele mesmo.

Utilizaram a estratégia E_1 para responder a **atividade 4,** mostra por meio da repartição da quantidade total de ovos em dois grupos , dos quais a soma de um grupo é o dobro da soma do outro grupo, quando exclui-se a cesta com 29 ovos, nesse caso 40 e 20 respectivamente.

A dupla revela de forma objetiva e consistente que a concepção em relação aos conceitos de divisor e múltiplo é estruturada usando propriedades, relações entre os números, além de internalizar as ações envolvendo divisão e/ou multiplicação, ou seja, tem a concepção processo. A representação em produtos de fatores primos não tem significado na abordagem dos conceitos de divisor e múltiplo. Conseguem utilizar a divisibilidade dos números naturais na resolução de um problema contextualizado. Os integrantes dessa dupla revelam por meio das suas resoluções as abstrações de interiorização e principlamente coordenação.

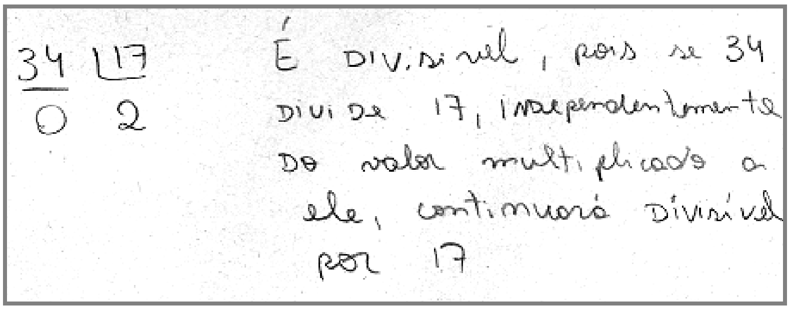
Análise das resoluções da DUPLA DS

Atividade 1:
Item a:



A dupla responde segundo a estratégia E_1, considerando a divisão no conjunto dos números naturais.

Item b:

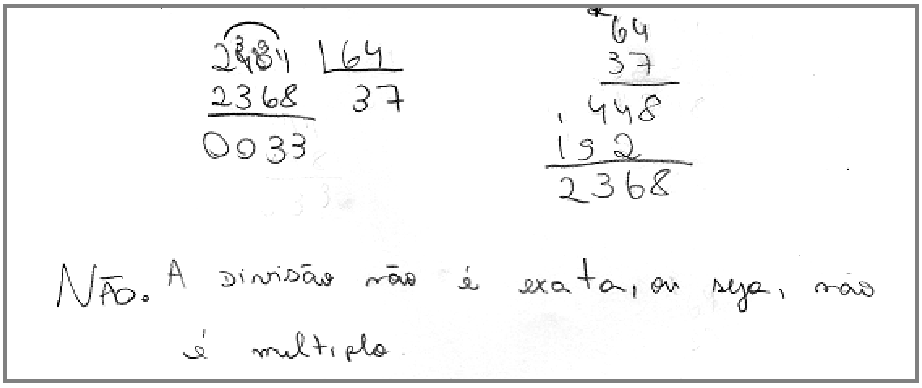

34 | 17
0 2

É divisível, pois se 34 divide 17, independentemente do valor multiplicado a ele, continuará divisível por 17

A dupla utiliza a estratégia E_3, percebendo que um dos fatores de K é divisível por 17. A justificativa dos alunos é muito clara e precisa conforme a propriedade de que se p natural é divisível por m, então p.q, sendo q natural também é divisível por m.

Atividade 2:

Item a:

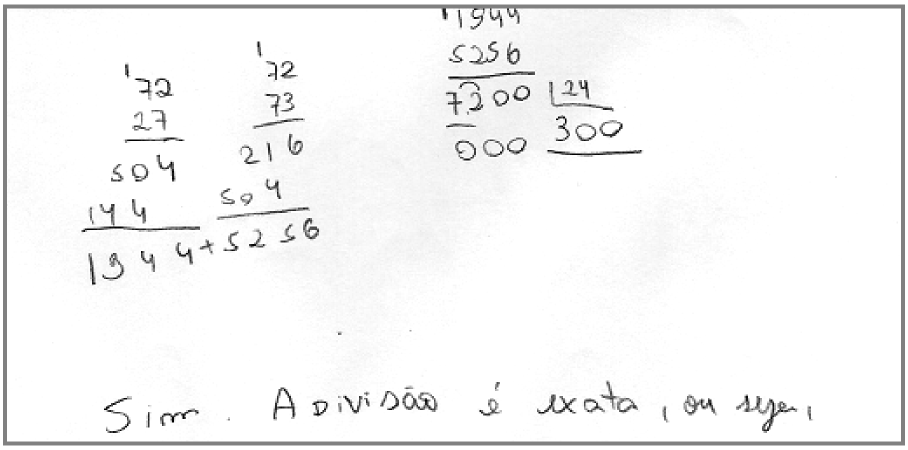

2401 | 64
2368 37
0033

64
x 37
448
192
2368

NÃO. A divisão não é exata, ou seja, não é múltiplo.

A dupla se vale da estratégia E_1 para responder a questão. Associa o conceito de múltiplo com a operação da divisão

Item b:

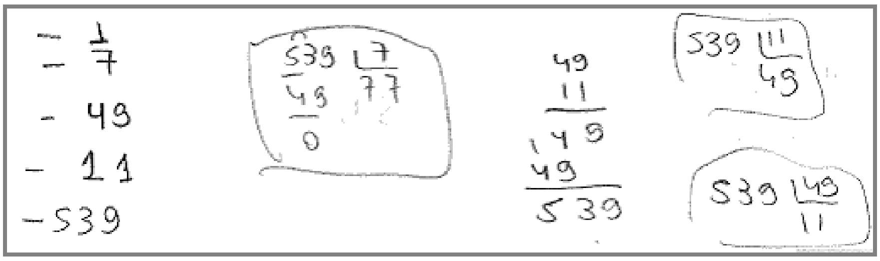


A dupla utiliza a estratégia E_1 para responder o item.

Tanto no conceito de divisor como no de múltiplo, os sujeitos usaram como recurso explicito a operação da divisão, sedimentada na ação.

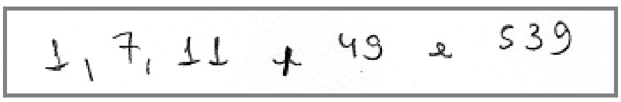
Atividade 3:

Item a:



Os sujeitos usam a estratégia E_1 para encontrar os divisores de 539. Consideram os divisores naturais 1 e o próprio número, e efetua divisões para encontrar os outros divisores, não efetuam a divisão permutando o divisor e o quociente, por isso, não cita 77 como um dos divisores do número.

Item b:



A dupla entende que os divisores do item anterior são os números dos quais 539 é múltiplo. Usa a estratégia E_1.

Item c:

$$\begin{array}{r|l} 539 & 14 \\ \hline 119 & 38 \\ 7 & \end{array}$$

Não, pois a divisão não é exata, ou seja, não é múltiplo

A resolução deste item segue os passos citados na estratégia prevista E_1.

Item d:

49. pois $49 \times 11 = 539$

Cita um divisor como exemplo de múltiplo de 539. Justifica que a multiplicação cujo produto é 539 tem como fator o número 49, faz a associação entre múltiplo e a operação da multiplicação.

Item e:

Sim.

A dupla responde sem citar o número que tem essas características apresentadas no item, sem justifica.

Na **atividade 4**, apenas calcula o total de ovos, 89 e não respondem a questão.

A concepção de divisor e múltiplo é operacional baseada em algoritmos, da divisão e multiplicação. Há o predomínio do uso da divisão na abordagem desses objetos matemáticos. Os sujeitos associam o conceito de múltiplo com a representação de uma multiplicação. A coordenação é usada nas resoluções dessa dupla. Não faz nenhuma relação entre a representação em produto de fatores primos com o conceito de divisor e múltiplo. Apresenta dificuldades na conexão entre múltiplo e divisor. Não utiliza a divisibilidade na resolução do problema proposto.

Passo agora às análises todas as resoluções relativas a uma mesma atividade.

No item **a** da **primeira** atividade seis duplas usam a estratégia E_1, ou seja, afirmam que o número 31 não é um divisor de 1254, pois o resto é diferente de zero considerando a divisão no conjunto dos números inteiros. A maioria das duplas (11) efetua a divisão e encontra como quociente um número racional não inteiro segundo a estratégia E_2. justificativa comumente é dada usando uma linguagem informal. As duplas predominantemente fizeram à operação de divisão considerando o conjunto dos números racionais.

A experiência desses estudantes com os números inteiros possivelmente foi restrita ao 6º e 7º ano, e consequentemente nos dois anos seguintes houve uma "supervalorização" do conjunto dos números reais, abandonando atividades que envolvessem números inteiros.

Apenas uma dupla usou a imparidade para justificar que 1254 não é múltiplo de 31, pois segundo essa dupla um número par não tem divisor ímpar.

Um aspecto muito relevante dessa questão é que 12 duplas das 19 erraram a operação dando como quociente 4,5... em vez de 40,451612... Os estudantes mostram dificuldades na manipulação do algoritmo da divisão. A concepção do conceito de divisor é operacional, baseada em algoritmos, esquemas, ações, nesse caso a operação da divisão. Há uma falta de validação dos resultados encontrados, ou seja, o uso da operação inversa, a multiplicação seria suficiente para os alunos perceberem o erro cometido. A falta de uma estimativa do resultado contribui para que os alunos não percebam o equivoco cometido. Essa abordagem não foi feita de propósito, os números escolhidos para a questão não visava verificar tal procedimento.

No item **b** dessa atividade oito duplas usam a estratégia E_1 para responder se K = 34 x 252 era divisível por 17, ou seja, determinam o valor de K e efetuam a divisão por 17 encontrando um número inteiro e afirmam que não há resto. Sete duplas adotaram como estratégia o fato de que um dos fatores é múltiplo de 17. Umas duplas utilizam relações equivocadas chegando à conclusão de que K não é divisível por 17.

Os sujeitos dessa pesquisa revelam pelas suas respostas que, aproximadamente, metade do grupo apresenta domínio da concepção operacional baseada no processo, no algoritmo da divisão. A outra parcela da turma apresenta uma concepção estrutural baseada em propriedades pertinentes às representações dadas.

Na atividade 2 item **a**, 9 duplas utilizam a primeira estratégia que efetua a divisão, 2 duplas recorrem àestratégia E_2, argumentam por meio do quociente ser um número racional não inteiro, 5 duplas usam a imparidade entre os números para justificar que um número par só tem múltiplos pares. Apenas uma dupla apresenta múltiplos de 64 estimando encontrar um múltiplo próximo de 2401; 3 duplas argumentam usando a unidade do dividendo e do divisor. Essa estratégia não foi prevista pelo pesquisador. Do grupo de alunos predominantemente, 11 de 19 associam o conceito de múltiplo com a operação da divisão.

Na atividade 2 item **b**, 10 das 19 duplas apelaram para a estratégia E_1, onde usaram a divisão para discernir se o M é múltiplo de 24. Duas duplas usam a estratégia E_2 e uma dupla utiliza a estratégia E_3, uma dupla recorreu à unidade dos fatores e 3 duplas percebem que M igual a 7200 é um múltiplo de 24 sem efetuar explicitamente nenhuma operação, duas duplas encontram um valor errado para M por erro de cálculo.

Nessa atividade os alunos recorrem ao algoritmo da divisão para discernir sobre a questão da multiplicidade, associam o conceito de múltiplo em relação à divisão e não à multiplicação, conforme resultado obtido por Zazkis (2001). Essa atividade revela que, aproximadamente, um terço do total de duplas apresenta algum tipo de concepção estrutural baseada em propriedades e não no ato de dividir.

Observo na terceira atividade que a representação na forma de produto em fatores primos é um obstáculo para a resolução do primeiro item da atividade, pois, 6 duplas não escrevem nenhum divisor de 539, fazem a operação da potenciação e multiplicação para chegar ao resultado 539, ou seja , compreende a representação como processo, ou seja, entendem que a finalidade da representação é determinar o número que tem tal representação. Os estudantes recorrem às divisões para encontrar os divisores do número em questão. Não percebi coordenação nas suas ações, pois apresentando 7 e 11 como divisores eles não acrescentam o 77 como divisor. Apenas duas duplas escrevem 5 divisores dos 6 existentes, ou seja, nenhuma dupla acerta completamente o exercício. Nem metade das duplas escreve os divisores naturais de 539 que é o 1 e ele mesmo. O conceito de número primo e o conceito de divisor apresentam fragilidade e inconsistência.

Nenhuma dupla utiliza a representação do 539 para responder o item c que pergunta se 539 é um múltiplo de 14. Aproximadamente 31% das duplas respondem como exemplo de múltiplo de 539 um produto e quase metade dos estudantes cita um divisor como exemplo de múltiplo. Os resultados dessa atividade apontam para uma falta de conexão entre o termo divisor e múltiplo, pois aproximadamente um terço das duplas deu como exemplo de múltiplo um divisor, e respondem como número que é ao mesmo tempo múltiplo e divisor de 539, um divisor dele. Um terço das duplas associa múltiplo com multiplicação, ou seja, citam como exemplo de múltiplo um exemplo de multiplicação cujo produto é 539.

Apenas 4 das 19 duplas conseguem acertar o problema do número de ovos de galinhas e pata. A maioria associa o número de ovos da segunda e terceira cesta, onde o número de ovos é o dobro do outra (12 e 6). Os sujeitos mostram que o conceito de divisor e múltiplo não é relacionado com a resolução de problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados desta pesquisa trazem a tona algumas reflexões que acredito ser oportuno salientar neste momento.

O Ensino da Matemática comumente está estruturado na sala de aula num modelo enrijecido por fórmulas, regras, algoritmos, normalmente sem significado ("cai do céu" sem explicação). O exemplo presente neste trabalho na dificuldade de manipular o algoritmo da divisão, na falta de percepção de diversas duplas na estimativa do quociente, na falta de validação que poderia ser feita pela operação inversa ou o uso da calculadora na verificação dos resultados chama muita a atenção. O conceito de divisor e múltiplo também exemplifica tal situação, pois os conceitos são normalmente reduzidos a um processo de utilizar a operação da divisão na abordagem de tais objetos matemáticos. Conseqüentemente, a concepção revelada pelos sujeitos é baseada quase que exclusivamente na ação concreta.

Os resultados também revelam o descaso com a Teoria Elementar dos Números, sendo estudada pelos alunos basicamente no primeiro ano do ensino fundamental II, sem aplicação em resolução de problemas, não explorando as vantagens destacadas inicialmente por Zazkis (1996) e Resende (2007) na problemática dessa pesquisa.

Os sujeitos desta pesquisa revelam na sua maioria que a manipulação dos números acontece quase exclusivamente quando o número é representado na forma decimal. Quando os números foram representados por meio de uma multiplicação, uma adição ou como produto de fatores primos, os estudantes obrigatoriamente determinaram o número representado e só a partir desse instante, eles agiram concretamente sobre o objeto matemático.

Nenhuma dupla utilizou simplesmente a representação de produto em fatores primos para determinar divisores ou verificar se certo número era divisor ou se o número dado era múltiplo de outro número. As duplas compreendem o produto de fatores primos de forma procedimental, ou seja, efetuam as potências,os produtos com a finalidade única de determinar o número, não foram capazes de observar a representação dada e tirar conclusões, propriedades, verificar, deduzir relações. A ausência da manipulação diante do produto de fatores primos, já investigada principalmente por Zazkis (1996) , mostraram que a concepção desses alunos é frágil, inconsistente e limitada por ações.

A maioria das duplas revelou ter uma concepção-ação, sedimentada em algoritmos, procedimentos e principalmente não conseguiram desvincular a divisibilidade da ação de dividir. Tanto na abordagem do conceito de divisor e múltiplo, 13 das 19 duplas efetuaram divisões para verificar se um número é divisor ou múltiplo de outro número. Estes alunos são exemplos de uma educação voltada para o saber fazer, com regras, algoritmos, métodos que não visam o trabalho importante com as propriedades, as relações, a aplicação em situações problemas. Somente 4 duplas conseguiram acertar o problema que não era uma aplicação automática de uma fórmula, ou idéia já trabalhada. As duplas ignorando totalmente a situação apresentada no problema fizeram simplesmente a relação simples entre as quantidades de duas cestas dadas.

Seis duplas utilizaram algum tipo de propriedade tais como principalmente a imparidade dos números envolvidos, um fator ser múltiplo, fatoração, a unidade dos números, propriedade distributiva, ou seja, essas duplas mostraram que além da concepção-ação eles podem ter uma concepção-processo.

Os estudantes não conseguiram utilizar a construção da coordenação, pois se dois números são divisores então o produto deles também será, 6 duplas que responderam 7 e 11 como divisores não incluíram o 77 em suas respostas. A reversibilidade também poderia ser usada principalmente na terceira atividade, pois se a é múltiplo de b, b é divisor de a.

Os sujeitos da pesquisa encontraram muita dificuldade na conexão que poderia ocorrer entre os conceitos de divisor e múltiplo. Quando solicitados a dar exemplo de múltiplo muitos responderam um divisor como exemplo. Uma boa parcela de duplas não conseguiu relacionar que o fator de um número é um divisor dele.

Concordo plenamente com Rina Zazkis que é importante para a Educação Matemática e o Ensino da Matemática dar maior ênfase a Teoria Elementar dos Números, e particularmente na Educação Básica dar maior atenção à divisibilidade dos números inteiros no trabalho com a Aritmética, a Álgebra e principalmente na resolução de problemas.

A pesquisa com enfoque no início do Ensino Médio vem alertar para que os conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números tais como divisor, múltiplo, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, critérios de divisibilidade, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum não se restrinjam a concepção operacional, baseada na ação, no algoritmo e sim ter um desenvolvimento que também tenha uma concepção estrutural baseada nas propriedades, relações, na interação com outros objetos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ASIALA, M., A. BROWN, D. DEVRIES, E. DUBINSKY, D. MATHEWS Y K. THOMAS, A. *Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. **Research in Collegiate Mathematics Education**, v. 2, n. 3,1996, p. 1-32.

BALL, D. *Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division* . **Research in Mathematics Education,** v. 21, 1990, p. 132-144.

Bicudo, I. **Os elementos Euclides**.Editora Unesp. São Paulo, 2009.

BODÍ, S.D. **Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales**, Tesis doctoral, Universidad de Alicante, 2006.

BOGDAN, R; BIKLEN,S **Investigação Qualitativa em Educação.Uma Introdução a Teoria e aos Métodos**. Porto: Ed. Porto, 1994. 336p.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard. Blücher, 1974.

BRASIL, **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEE, 1997.

BROLEZZI, a.C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática.** Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Universidade de São Paulo, 1996.

BROWN, A., THOMAS, K., & TOLIAS, G. **Conceptions of divisibility**: **Success and understanding**. In S. R.Campbell & Rina Zazkis (Eds), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* Westport, CT: Ablex., 2002, p. 41-82.

CAMPBELL, S. Understanding Elementary Number Theory in Relation to Arithmetic and Algebra. In: **Number theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects**. Edited by Rina Zazkis e Stephen R. Campbell, Publishers. 2006.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. **Learning and teaching number theory: Research in congnition and instruction**. Westport, CT: Ablex.2002

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. **Number theory in Mathematics Education**: **Perspectives and Prospects**. Lawrence Erlbaum Associates,Publishers, 2006.

CASTELA, C. A., **Divisão de números naturais: concepções dos alunos da 6ª série.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

CORNU, B. Limits. In: **TALL,D. (Ed) Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991, p.153-166.

COSTA, M. **O problema da semana**. Lisboa: APM, 1986.

DOMINGOS, A. **Teoria Cognitivas e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos** Avançados. Departamento de Matemática da FCT/UNL.2007

DUBINSKY, Ed., *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In: Tall, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 231-250.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática,** Unicamp,Campinas, 1997.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio Da Língua Portuguesa.** Paraná:Editora Positivo.2009.

GREER, B. *Multiplication and division as models of situations.* In D.A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992, p. 276-295.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da lingual portuguesa.** São Paulo: Editora Objetiva, 2007.

KAPUT, J. J. Towards a theory of symbol use in Mathematics. In: **Janvier, C. (Ed) Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics,** 1987, p. 159-195.

KAPUT, J. J. Linking representations in the symbolic system of algebra. In: **S. Wagner & C. Kieran (Eds) Research agenda for mathematics education: Research issues of algebra learnin and teaching of algebra,** 1989, p. 167-194.

KIERAN E GUSMAN .*The Number-Theoretic Experience of 12-to 15-Year-Olds in a Calculator Environment: The Intertwining Coemergence of Technique and Theory*. In: **Number theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects**. Edited by Rina Zazkis e Stephen R. Campbell, Publishers. 2006.

MACHADO, S. D. A. **O estudo dos números inteiros visando uma cabeça bem-feita**. In: XIV ENDIPE - Encontro de Didática e Prática de Ensino, Porto Alegre, 2008.

__________ **Engenharia Didática**. In Educação Matemática: Uma nova introdução. Org: Machado, S. D. A. São Paulo: EDUC, 2010 3ª edição.

MACHADO, S. D. A; MARANHÄO, C.; COELHO, S. P. **Como é utilizado o teorema fundamental da aritmética por atores do Ensino Fundamental.** In: CIBEM5, 2005, Porto. Actas do V CIBEM. Porto. Associacão dos Professores de Matemática, 2005, p. 1-12.

MEEL. D. E. Modelos y teorias de la comprensión matemática: Comparción de los modelos de Pirie y Kirien sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOS. **Relime**, v. 6, n. 3, 2003, p. 221-271.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para alunos do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

RAMA, A. J., **Números inteiros nos ensinos fundamental e médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

RESENDE, M. R., **Re-significando a disciplina Teoria Elementar dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SFARD, A. *On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin*. **Education Studies in Mathematics**, v. 22, 1991, p. 1-36.

SFARD, A; LINCHEVSKI, L. *The gains and pitfalls of reification - The case of algebra.* **Education Studies in Mathematics**, v. 26, 1994, p. 191-228.

SIERPINSKA, A. *Some remarks on understanding in mathematics.* **For the learning of mathematics,** n. 10, 3, 1990, p. 24–36.

SILVA JUNIOR, Francisco de Moura e. **O projeto São Paulo faz escola para o 1º ano do Ensino Médio sob o olhar da Teoria Elementar dos Números**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009.

TALL, D. *Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking*. In: O. Zaslavsky (Ed.), **Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics** Education. Haifa, Israel, v. 1, 1991, p. 111-118.

TALL, D. Advanced mathematical thinking. Boston/Londres:Kluwer. Academic, 1991.

TRIGUEROS, Maria. *A noção de esquema na investigação na matemática educativa a nível superior*. **Educación Matemática***,* México, v. 17, n. 1, 2005, p. 5-31.

VINNER, S. *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.* In: **TALL, D. (Ed) Advanced mathematical thinking.** Boston/Londres:Kluwer. Academic, 1991, p. 65-81.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. *Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding.* **Journal for Research in Mathematics Education***,* v. *27,* n. 5, 1996- a, p. 540-563.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. *Prime decomposition: understanding uniqueness*. **Journal of Mathematical Behavior***,* v. 15*,* n. 2, 1996-b, p. 207-218

ZAZKIS, R. *Odds and ends of odds and evens: An inquiry into students' understanding of even and odd numbers*. **Education Studies in Mathematics**, v. 36, n. 1, 1998, p. 73-89.

ZAZKIS, R. *Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students 'connections*. In: A. Shcoenfeld, J.Kaput, &E. Dubinsky (eds), **Research in collegiate mathematics education.** Providence, RI: American Mathematical Society, v. 4, 2000, p. 210-238.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL, S. *Language of number theory metaphor and rigor*. In: S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), **Learning and teaching number theory**. Westport: Ablex Publishing, 2002, p. 83-95.

ZAZKIS, R.; GADOWSKY, K. *Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers.* In: **Yearbook***:* **The roles of representation in school mathematics.** Reston: NCTM, 2001, p. 41-52.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. *Understanding primes: the role of representation*. **Journal for Research in Mathematics Education***,* v. 35, n. 3, 2004, p. 164-186.

ANEXOS

Anexo 1

Problemas exemplares das OBM

A OBM se desenvolve em 3 fases sendo que as duas primeiras são eliminatórias. A seguir exemplifico com três problemas propostos para o Ensino básico na 2ª fase das Olimpíadas.

Problema da OBM 2003 - para 5ª serie/ 6º ano e 6ª serie/7º ano:

Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é poderoso se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, 12 é um número poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4, 6 e $1.2.3.4.6 = 144 = 12^2$. Apresente todos os números poderosos até 100.

Problema da OBM2003 - para 7ª serie/ 8º ano e 8ª serie/9º ano:

Dados os números inteiros de 1 a 26, escolha 13 dentre eles de forma que:

1) O número 4 está entre os números escolhidos.

2) *Nenhum número escolhido é divisor de outro número escolhido*.

Problema 3: OBM2005 - para Ensino Médio

Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, a+1 é múltiplo de 7, a +2 é múltiplo de 9 e a + 3 é múltiplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

Anexo 2

O conjunto de questões sobre divisibilidade que nortearam a pesquisa de Bodi (2006):

Questão 1:

a) Complete com as palavras: divisor ou múltiplo.

8 é ___de 2; 4 é ___de 16; 21 é ______ de 7; 25 é ___ de 625.

b) Dados os números: 0, 2, 4, 6, 8, 10 e 16, determine se 64 é múltiplo de alguns deles. Justifique a sua resposta.

c) Considere a seguinte coleção de números: 1, 3, 6, 8, 15, 24, 39, 42, 48, 69, 2400 e 2412.

I. Os números listados que são múltiplos de 24 são:

II. Os números listados que são divisores de 24 são:

III. Os números listados pelos quais 24 é divisível são:

Justifique a sua resposta.

Questão 2:

Os múltiplos de um número compreendidos entre 460 e 560 são: 464, 493, 522 e 551. De que número se trata? Explique a tua resposta.

Questão 3:

Indique, justificando a sua resposta, o valor de b para que o número 2b45 seja: I. divisível por 2 II. divisível por 3 III. divisível por 6

Questão 4:

Considere o número: $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.

a) M é divisível por 7? Explique a tua resposta.

b) M é divisível por 5? Por 2? Por 9? Por 11? Por 15? Explique tua resposta.

c) $3^4 \times 5 \times 7^3$ é um múltiplo de M? Justifique.

d) $3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ é um múltiplo de M? Explique a tua resposta.

Questão 5:

Decompor o número 100. (Justifique a sua resposta).

a) em dois fatores b) em três fatores c) no máximo número de fatores d) em fatores primos.

Questão 6:

Sabendo que: $1001 = 7 \times 11 \times 13$ e $91 = 7 \times 13$. São corretas as seguintes afirmações?

a) 91 não é divisor de 1001 b) 77 é divisor de 1001

c) 2002 não é múltiplo de 13. Justifique a sua resposta.

Questão 7:

Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando tua resposta: O número $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ é:

a) divisível por 5. b) divisível por 2 e por 4. c) divisível por 3

d) divisível por 6. e) divisível por 15.