

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**

David Zatz Correia

**CONTRIBUIÇÕES DO CHATGPT PARA O ESTUDO DE MATEMÁTICA E PARA A
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Mestrado em Educação Matemática

SÃO PAULO

2025

David Zatz Correia

**CONTRIBUIÇÕES DO CHATGPT PARA O ESTUDO DE MATEMÁTICA E PARA A
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Mestrado em Educação Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

São Paulo

2025

Banca Examinadora

Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Orientadora PUC-SP

Prof. Dr. Daniel Couto Gatti

Prof. Dr. Ronaldo Barbosa

À minha avó, Lúcia, minha maior fã, e ao meu avô, Isaias. Onde quer que estejam, espero que fiquem orgulhosos do meu trabalho.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, minha orientadora, por todos seus esforços, pela sua paciência, seu apoio e confiança durante esse processo.

Aos professores, Prof. Dr. Daniel Couto Gatti e Prof. Dr. Ronaldo Barbosa, pela leitura e pelas contribuições para a realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmãos, por todo o apoio e carinho durante a jornada.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelos aprendizados, discussões e reflexões.

Aos meus colegas do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelas discussões enriquecedoras.

Ao colega e amigo, Prof. Me. Daniel Mendes Inácio de Souza, por todo o apoio que me deu durante a realização dessa pesquisa.

Aos meus amigos, por todo o carinho e estarem sempre ao meu lado, mesmo quando não pude estar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro durante a realização desta pesquisa.

RESUMO

CORREIA, D. Z. **Contribuições do ChatGPT para o Estudo de Matemática e para a Educação Matemática.**

No final de 2022, a OpenAI lançou o ChatGPT, uma ferramenta baseada em inteligência artificial generativa que interage com os usuários de maneira semelhante à comunicação humana. O rápido crescimento na popularidade dessa tecnologia suscitou preocupações em relação ao seu uso no campo educacional, especialmente no que diz respeito ao ensino de Matemática. O desempenho do modelo nessa disciplina gerou apreensão quanto a possíveis impactos negativos na aprendizagem. Parte das limitações do ChatGPT decorre de sua natureza como um modelo generativo pré-treinado. O presente trabalho teve como objetivo identificar de que forma o ChatGPT pode contribuir para o estudo de tópicos específicos de Matemática e como pode ser integrado à prática docente, contribuindo para a Educação Matemática. Para isso, foi realizada uma pesquisa exploratória com abordagem qualitativa, buscando compreender o problema de forma mais detalhada, torná-lo mais explícito e propor hipóteses. No desenvolvimento do estudo, elaborou-se um panorama histórico sobre a evolução da inteligência artificial, investigou-se a estrutura do ChatGPT, abordando suas potencialidades e limitações, e analisou-se seu uso no contexto educacional, com foco específico na Educação Matemática. Foram examinadas as respostas do modelo a questões relacionadas a ideias fundamentais da Matemática, formuladas com base em textos de autores relevantes, além de sua capacidade de resolução de exercícios matemáticos de diferentes níveis de ensino. Cada aspecto das respostas foi avaliado, destacando tanto as potencialidades quanto as limitações do modelo. Além disso, foram exploradas estratégias para a criação de *prompts* mais eficazes no uso de ferramentas de inteligência artificial generativa. Esse conhecimento foi aplicado na elaboração de atividades e conteúdos direcionados à Educação Matemática, utilizando funcionalidades do ChatGPT, como o compartilhamento de textos. Os resultados indicam que, embora o ChatGPT esteja em constante aprimoramento, ainda apresenta limitações significativas que demandam ajustes. O uso dessa ferramenta requer cautela, sendo indispensável o pensamento crítico na verificação de suas respostas devido às alucinações e erros que podem ser cometidos pelo modelo.

Palavras-chave: Inteligência Artificial Generativa; ChatGPT; Potencialidades e Limitações; Matemática; Educação Matemática e Tecnologias.

ABSTRACT

Correia, D. Z. **Contributions of ChatGPT to the study of Mathematics and to Mathematics Education.**

At the end of 2022, OpenAI launched ChatGPT, a tool based on generative artificial intelligence that interacts with users in a manner resembling human communication. The rapid rise in the popularity of this technology has raised concerns regarding its use in the educational field, particularly in the teaching of Mathematics. The model's performance in this discipline has generated apprehension about potential negative impacts on learning. Some of ChatGPT's limitations stem from its nature as a pre-trained generative model. This study aimed to identify how ChatGPT can contribute to the study of specific mathematical topics and how it can be integrated into teaching practices to enhance Mathematics Education. To this end, an exploratory research study with a qualitative approach was conducted, seeking to understand the issue in greater detail, clarify it, and propose hypotheses. The study included a historical overview of the evolution of artificial intelligence, an investigation of ChatGPT's structure, an analysis of its capabilities and limitations, and an examination of its use in educational contexts, with a specific focus on Mathematics Education. The model's responses to questions related to fundamental mathematical concepts—formulated based on texts by relevant authors—were examined, alongside its ability to solve mathematical exercises across different educational levels. Each aspect of the responses was evaluated, highlighting both the model's strengths and its limitations. Additionally, strategies for creating more effective prompts for the use of generative AI tools were explored. This knowledge was applied to the design of activities and content tailored to Mathematics Education, utilizing ChatGPT's functionalities, such as text-sharing features. The results indicate that, although ChatGPT is continually improving, it still presents significant limitations that require adjustments. The use of this tool demands caution, as critical thinking is indispensable for verifying its responses due to the hallucinations and errors the model may produce.

Keywords: Generative Artificial Intelligence; ChatGPT; Potentialities and limitations; Mathematics; Mathematics Education and Technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT ao ser requisitado um esboço histórico da lógica simbólica.....	39
Figura 2 – Captura de tela da parte final da resposta do ChatGPT ao ser requisitado um esboço histórico da lógica simbólica	40
Figura 3 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT realizando um esboço histórico da lógica simbólica em julho de 2024.....	42
Figura 4 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT realizando um esboço histórico da lógica simbólica em julho de 2024.....	43
Figura 5 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre a forma como se isolam os princípios lógicos da dedução.....	46
Figura 6 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre a forma como se isolam os princípios lógicos da dedução.....	47
Figura 7 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT acerca da lógica simbólica de Whitehead e Russell.....	50
Figura 8 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT acerca da lógica simbólica de Whitehead e Russell.....	51
Figura 9 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell	53
Figura 10 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell	54
Figura 11 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell que são considerados as leis da lógica dedutiva	55
Figura 12 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell que são considerados as leis da lógica dedutiva	56
Figura 13 - Primeira captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais.....	58
Figura 14 - Segunda captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais.....	59
Figura 15 - Terceira captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais.....	60

Figura 16 - Quarta captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais.....	61
Figura 17 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos	62
Figura 18 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos	64
Figura 19 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos	65
Figura 20 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos	66
Figura 21 - Quinta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos	66
Figura 22 - Sexta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos	67
Figura 23 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais	70
Figura 24 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais	70
Figura 25 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais	71
Figura 26 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais	72
Figura 27 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais	73
Figura 28 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais	73
Figura 29 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais	74
Figura 30 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos	76
Figura 31 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos	77
Figura 32 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos	78

Figura 33 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos	79
Figura 34 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos.....	81
Figura 35 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos.....	82
Figura 36 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos.....	83
Figura 37 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos.....	84
Figura 38 – Captura de tela de questão realizada sobre o cosseno de um arco duplo no ChatGPT	88
Figura 39 – Captura de tela de questão sobre a integral de uma função trigonométrica	89
Figura 40 – Captura de tela de questão sobre derivada pela definição realizada pelo ChatGPT	90
Figura 41 – Captura de tela de continuação de questão sobre derivada pela definição realizada pelo ChatGPT	91
Figura 42 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre o seno de um arco duplo.....	92
Figura 43 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre o seno de um arco duplo.....	93
Figura 44 – Captura de tela de resposta do ChatGPT ao ser solicitado que calculasse a derivada de uma função polinomial do segundo grau	94
Figura 45 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética	96
Figura 46 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética	97
Figura 47 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT em inglês sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética	98
Figura 48 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT em inglês sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética	99
Figura 49 – Captura de tela de questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre a condição de existência de um triângulo	101

Figura 50 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo	102
Figura 51 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo	103
Figura 52 – Captura de tela da terceira parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo	104
Figura 53 – Captura de tela da primeira parte da repetição de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo	106
Figura 54 – Captura de tela da segunda parte da repetição de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo	107
Figura 55 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre lógica.....	108
Figura 56 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre lógica.....	109
Figura 57 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre crescimento exponencial	110
Figura 58 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre crescimento exponencial	111
Figura 59 - Captura de tela de interação com o ChatGPT pedindo que as suas respostas se limitem ao documento anexado	118
Figura 60 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT citando autores da lógica simbólica e suas contribuições	119
Figura 61 . Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT citando autores da lógica simbólica e suas contribuições	120
Figura 62 - Resposta do ChatGPT sobre o verdadeiro criador da lógica simbólica	121
Figura 63 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT construindo uma tabela com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições	121
Figura 64 - Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT construindo uma tabela com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições	122
Figura 65 - Captura de tela da resposta do ChatGPT sobre os autores responsáveis pela lógica fuzzy.....	122
Figura 66 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT listando perguntas para avaliar a compreensão de alunos sobre o texto	123

Figura 67 - Segunda parte da resposta do ChatGPT listando perguntas para avaliar a compreensão de alunos sobre o texto	124
Figura 68 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT realizando um resumo do texto de lezzi e Murakami.....	125
Figura 69 - Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT realizando um resumo do texto de lezzi e Murakami.....	126
Figura 70 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre o conjunto vazio e a utilização de informações adicionais	127
Figura 71 - Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre o conjunto vazio e a utilização de informações adicionais	127
Figura 72 - Primeira captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	128
Figura 73 - Segunda captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	129
Figura 74 - Terceira captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	130
Figura 75 - Quarta captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	130
Figura 76 - Quinta captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental	131
Figura 77 - Primeira captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013).....	132
Figura 78 - Segunda captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013).....	133
Figura 79 - Terceira captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013).....	134
Figura 80 – Quarta captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013).....	135
Figura 81 – Quinta captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013).....	135
Figura 82 – Sexta captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013).....	136
Figura 83 - Captura de tela de interação com o ChatGPT indicando o uso do texto de Lima (2013) como base para suas respostas.....	136

Figura 84 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	137
Figura 85 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	138
Figura 86 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	139
Figura 87 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	140
Figura 88 - Quinta captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	141
Figura 89 - Sexta captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	141
Figura 90 - Sétima captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013).....	142
Figura 91 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	143
Figura 92 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	144
Figura 93 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	145
Figura 94 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	145
Figura 95 - Quinta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	146
Figura 96 - Sexta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	147
Figura 97 - Sétima captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas.....	148

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - As percepções dos professores de Matemática sobre o ChatGPT	31
Quadro 2 - Palavras para gerar prompts efetivos e exemplos de seu uso	115

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Problemática e justificativa.....	18
1.2 Objetivos	19
1.3 Metodologia da pesquisa.....	19
1.4 Estruturação da pesquisa	20
2 A INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL E O CHATGPT	22
2.1 Esboço histórico da IA.....	22
2.2 A estrutura do ChatGPT	26
2.3 O ChatGPT na educação.....	28
3 A ABORDAGEM DO CHATGPT ACERCA DE ALGUMAS IDEIAS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA	37
3.1 A lógica simbólica e a Matemática	37
3.1.1 Esboço histórico	37
3.1.2 Separação dos princípios lógicos	45
3.1.3 A lógica simbólica de Whitehead e Russell	48
3.2 A evolução histórica da noção de número	56
3.2.1 Os números naturais	56
3.2.2 Os números fracionários.....	61
3.2.3 Os números irracionais	67
3.2.4 Os números negativos.....	74
3.2.5 Os números complexos.....	79
4 EXPLORANDO OBJETOS MATEMÁTICOS NO CHATGPT	85
4.1 Trigonometria.....	87
4.2 Funções polinomiais	94
4.3 Sequências.....	95
4.4 Geometria	100
4.5 Lógica	107

4.6 Função exponencial	110
5 EXPLORANDO O CHATGPT NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	113
5.1 Como perguntar ao ChatGPT	113
5.2 A criação de atividades por meio de textos referenciados	117
5.2.1 Lógica simbólica – esboço histórico.....	117
5.2.2 Conjuntos	124
5.2.3 Logaritmos.....	136
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
REFERÊNCIAS.....	152

1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo, são apresentadas a problemática, as questões norteadoras da pesquisa, a justificativa, o objetivo geral e os específicos, a metodologia da pesquisa e a estruturação dos demais capítulos.

1.1 Problemática e justificativa

Em novembro de 2022, a OpenAI, laboratório de pesquisas em inteligência artificial (IA), lançou um modelo de linguagem de larga escala (*Large Language Model* – LLM) que é capaz de responder a perguntas e pedidos de seus usuários na forma de uma conversa por mensagens (*chat*) chamado ChatGPT (Halaweh, 2023).

Apenas dois meses após seu lançamento, em janeiro de 2023, a ferramenta conversacional baseada em IA já havia atingido a marca de 100 milhões de usuários ativos. Em janeiro de 2024, o ChatGPT chegou a 2,4 bilhões de acessos no mundo, sendo o Brasil o quarto país em que o site foi mais acessado (Brasil, 2024). Esse número já aumentou consideravelmente, chegando a 3,8 bilhões de acessos no mundo de 11 de dezembro de 2024 a 10 de janeiro de 2025 (ICL Notícias, 2025).

Com o rápido crescimento do LLM, criaram-se diversas preocupações acerca de seu uso na educação (Rudolph; Tan; Tan, 2023; Baidoo-Anu; Ansah, 2023; Spencer, 2023), como o receio de que os professores serão substituídos pela IA, a preocupação de que as IA generativas prejudicariam o pensamento crítico de estudantes e professores, e outras.

De acordo com Frieder *et al.* (2023), na época em que foi publicado seu trabalho, o autor afirma que o desempenho do ChatGPT em questões matemáticas não era superior ao de um estudante de graduação, o que, aliado a um possível prejuízo ao pensamento crítico (Baidoo-Anu; Ansah, 2023), tenderia a criar preocupações ainda maiores acerca da aprendizagem de Matemática.

As limitações do ChatGPT se dão, em parte, por conta de sua natureza. Por se tratar de um *transformer* generativo pré-treinado (*Generative Pre-Trained Transformer – GPT*), a forma como ele funciona é calculando probabilidades para conectar uma palavra na sequência da anterior, o que pode fazer com que o modelo de linguagem alucine (Cortiz, 2023).

Assim, devido às preocupações relacionadas à utilização de IA generativas na área educacional e ao mau desempenho do ChatGPT em questões de matemática avançada (Frieder *et al.*, 2023), buscou-se responder, com a presente pesquisa, às questões:

- **De que maneira o ChatGPT aborda alguns conteúdos matemáticos e como sua utilização pode contribuir para a Educação Matemática?**

1.2 Objetivos

Esta pesquisa tem como objetivo geral identificar como o ChatGPT pode contribuir para o estudo de alguns tópicos de Matemática e como pode ser abordado na prática docente contribuindo para a Educação Matemática.

Quanto aos objetivos específicos, procura-se:

- verificar como funciona o ChatGPT, identificando algumas de suas potencialidades e limitações de modo geral e no contexto matemático;
- identificar a abordagem do ChatGPT sobre algumas ideias fundamentais da Matemática, com base em pesquisas de outros autores;
- explorar possíveis maneiras nas quais o ChatGPT pode contribuir para a Educação Matemática, em especial, para a prática docente.

1.3 Metodologia da pesquisa

O estudo adotou uma abordagem qualitativa com foco nos processos mediante os quais as pessoas constroem significados na compreensão da experiência humana

(Bogdan; Biklen, 1994) e são apresentados os procedimentos metodológicos empregados. Pode-se classificar a pesquisa como exploratória, tendo como objetivo “proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses” (Gil, 2002, p. 41).

Foi utilizado o ChatGPT tanto em sua versão gratuita quanto em sua versão paga, pois embora a primeira tenha um potencial maior para a utilização nas instituições de ensino, as atualizações de *software* podem levar as aplicações da versão paga à versão gratuita.

Para explorar a abordagem do ChatGPT acerca de ideias fundamentais da Matemática, utilizou-se como referencial teórico a obra de Manuel Amoroso Costa (1981a; 1981b) devido à relevância do trabalho do autor e à consolidação de sua obra no campo da Matemática. Foram realizadas perguntas ao ChatGPT referentes à lógica simbólica e à evolução histórica da noção de número e as respostas fornecidas pelo LLM foram analisadas à luz dos escritos do autor.

A fim de familiarizar-se com a capacidade matemática do ChatGPT, pediu-se que o modelo de linguagem resolvesse questões de diferentes temas e níveis da Matemática, analisando cada passagem realizada pelo *chatbot*. Analisou-se as potencialidades e limitações do ChatGPT, pelos escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023). A obra desses autores foi selecionada devido à relevância da revista científica em que foi publicada, ao seu embasamento e ao número de citações desse artigo científico.

Com vistas a verificar maneiras nas quais o ChatGPT poderia auxiliar na prática do professor de Matemática, foram exploradas formas mais assertivas de realizar perguntas ao LLM, além de seu uso para a criação de atividades didáticas e conteúdo utilizando textos referenciados.

1.4 Estruturação da pesquisa

A presente pesquisa está organizada em seis capítulos. Neste capítulo inicial, dissertou-se sobre as preocupações e os receios causados pela chegada de uma

tecnologia potencialmente disruptiva e a sua inserção na área educacional, além de seu desempenho com a Matemática.

No Capítulo 2, explora-se brevemente a história da inteligência artificial, além do funcionamento do ChatGPT, sua estrutura, incluindo potencialidades e limitações, e a sua utilização na educação.

No Capítulo 3, a fim de analisar a abordagem do ChatGPT acerca de algumas ideias fundamentais da Matemática à luz de Costa (1981a; 1981b), expõe-se parte das ideias citadas pelo autor, a forma com que elas são abordadas e analisa-se a abordagem do LLM.

No Capítulo 4, verifica-se a capacidade matemática do ChatGPT, tal qual suas potencialidades e limitações na resolução de exercícios de diversos objetos matemáticos de diferentes níveis de ensino.

No Capítulo 5, são explorados estudos sobre a construção de *prompts* mais efetivos para se utilizar no ChatGPT, além da exposição de interações com o LLM no qual foram anexados textos referenciados de autores consolidados e solicitou-se à ferramenta que criasse conteúdo a partir destes textos.

No Capítulo 6, são expostas as considerações finais da presente pesquisa.

2 A INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL E O CHATGPT

Neste capítulo, realiza-se um esboço histórico da inteligência artificial e discorre-se sobre a estrutura do ChatGPT e o seu uso na educação.

2.1 Esboço histórico da IA

De acordo com Salloum *et al.*, (2024), a história da inteligência artificial se iniciou com o trabalho do inglês Alan Mathison Turing (1912-1954), propondo a ideia de máquinas capazes de simular a inteligência humana contribuindo para o desenvolvimento desse campo.

O primeiro trabalho a ser posteriormente reconhecido como IA foi realizado por Warren McCulloch e Walter Pitts em 1943 (Russell; Norvig, 2009; Abeliuk; Gutiérrez, 2021). Segundo Russell e Norvig (2009), este trabalho foi realizado em três frentes: conhecimento de psicologia básica e a função dos neurônios no cérebro; uma análise formal da lógica proposicional de Russell e Whitehead e a teoria da computação de Alan Turing.

Em 1950, Marvin Minsky e Dean Edmonds, dois graduandos da Universidade de Harvard, construíram o primeiro computador de rede neural, o SNARC, simulando uma rede de 40 neurônios (Russell; Norvig, 2009).

Em torno da década de 1950, tal ideia começou a ser explorada por pesquisadores como John McCarthy, a quem é atribuída a criação do termo *inteligência artificial* na *Dartmouth Conference* de 1956 (Salloum *et al.*, 2024; Russell; Norvig, 2009). Nessa conferência, McCarthy propôs a criação de um *workshop* de dois meses para estudar a inteligência artificial durante o verão daquele ano (Russell; Norvig, 2009). Segundo os autores, foram dez os participantes desse *workshop*, entre os quais estavam Allen Newell e Herbert Simons, que viriam a criar naquele verão o *Logic Theorist* que foi capaz de provar a maioria dos teoremas do segundo capítulo de *Principia Mathematica*, de Russell e Whitehead (Russell; Norvig, 2009).

Embora não tenha havido outras grandes descobertas no *workshop*, durante os 20 anos seguintes, o campo foi dominado pelos seus participantes, colegas e alunos (Russell; Norvig, 2009). Newell e Simons viriam a criar o *General Problem*

Solver, feito para imitar os protocolos de resolução de problemas dos humanos, Nathaniel Rochester, junto com colegas da IBM, produziu alguns dos primeiros programas de IA, Herbert Gerlenter construiu o *Geometry Theorem Prover*, Arthur Samuel criou uma série de programas para o jogo de xadrez, refutando a ideia de que os computadores só conseguem fazer aquilo que lhes é ordenado (Russell; Norvig, 2009).

John McCarthy voltaria a contribuir no campo da inteligência artificial, criando a linguagem *Lisp*, em 1958, que viria a ser a linguagem de programação dominante pelos próximos 30 anos, além de criar o *Advice Taker*, que foi posteriormente mais desenvolvido por J. A. Robinson (Russell; Norvig, 2009).

Segundo Salloum *et al.* (2024), a evolução da inteligência artificial, desde o início teórico para aplicações mais práticas, se deu pelas contribuições significativas de algoritmos de aprendizado de máquina (*machine learning*), tendo essa mudança sido marcada pelo desenvolvimento de redes neurais, cuja pesquisa de base na área foi realizada por Frank Rosenblatt.

O primeiro *chatbot* (tecnologia que, utilizando técnicas de processamento de linguagem natural, é capaz de interagir com o seu usuário simulando conversas), o ELIZA, foi criado em 1966 pelo cientista da computação do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), Joseph Weizenbaum, com a intenção de ser um simulador de um psicoterapeuta (Junaid *et al.*, 2024), mas, segundo Santaella (2024), ainda sem o aprendizado de máquina, dependendo de palavras-chave para funcionar.

De acordo com Weizenbaum (1966), de maneira mais simples, ELIZA funcionava de tal forma que o texto era lido e inspecionado para a presença de palavras-chave. Se essas palavras fossem encontradas, a frase era transformada de acordo com a regra associada a essas palavras, caso contrário, era dada uma observação sem conteúdo ou uma transformação anterior é recuperada. Então, o texto computado ou recuperado é impresso.

Conforme Weizenbaum (1966), o processamento dos *prompts* pelo ELIZA envolvia a análise de expressões por meio de decomposições ativadas a partir de palavras-chave presentes no texto fornecido ao sistema. Entre os principais desafios técnicos com os quais o programa deveria se preocupar estavam: a identificação da

palavra-chave mais relevante no *prompt*; a definição de um contexto em que essa palavra-chave era utilizada; a escolha a realização de regras de transformação (cada palavra-chave tinha uma regra associada a ela que levava a uma transformação da frase); a criação de mecanismos que possibilitassem respostas inteligentes mesmo na ausência de palavras-chave no *prompt*; e o desenvolvimento de ferramentas que facilitassem tanto a edição quanto a ampliação do roteiro, no nível de escrita desse roteiro (Weizenbaum, 1966).

Embora o ELIZA fosse limitado, ele permitiu que novos *chatbots* fossem desenvolvidos e, desde então, com a evolução do campo da IA e os consequentes avanços em tecnologias como o *machine learning* e o processamento de linguagem natural, foram criados *chatbots* mais inteligentes e avançados que conseguem responder com mais eficiência os pedidos humanos (Gómez-García-Bermejo; Fernández-Izquierdo; Segovia-Vargas, 2021 *apud* Junaid *et al.*, 2024).

De 1974 a 1980, devido a problemas nas pesquisas sobre IA, houve uma queda no investimento nas pesquisas do campo, no período chamado de inverno IA (Abeliuk; Gutiérrez, 2021).

A partir da década de 1980, a inteligência artificial se tornou uma indústria, com quase todas as maiores empresas dos Estados Unidos tendo seu próprio grupo de IA (Russell; Norvig, 2009).

Em 1986, houve o retorno das redes neurais, com os chamados modelos conexionistas, que são inspirados na estrutura cerebral, sendo vistos como concorrentes dos modelos simbólicos promovidos por Newell e Simon (Russell; Norvig, 2009).

O segundo inverno IA ocorreu de 1987 a 1993, com a diminuição do interesse e do financiamento de pesquisas na área (Abeliuk; Gutiérrez, 2021).

Em 1997, Deep Blue, um computador da IBM que jogava xadrez, foi capaz de derrotar o campeão mundial, Garry Kasparov e, em 2002, surge o primeiro robô aspirador, o Roomba (Abeliuk; Gutiérrez, 2021).

Apesar dos avanços significativos, alguns dos fundadores do campo da IA incluindo John McCarthy, Marvin Minsky, Nils Nilsson e Patrick Winston, se mostraram descontentes com esse progresso, pois pensavam que o foco deveria estar menos

em criar ferramentas excelentes em uma tarefa específica e mais em construir máquinas que pensam, aprendam e criem (Russell; Norvig, 2009).

Em 2009, foi lançada a *ImageNet*, uma base de dados gratuita com 14 milhões de imagens que foram utilizadas para treinar redes neurais para que catalogassem essas imagens e identificassem objetos (Abeliuk; Gutiérrez, 2021).

Em 2014, a Amazon lança a *Alexa*, uma assistente virtual inteligente com uma interface de voz (Abeliuk; Gutiérrez, 2021). Já em 2018, a Google lança *BERT*, o primeiro modelo de linguagem bidirecional e sem supervisão que pode ser utilizado em diversas tarefas de linguagem natural, como responder perguntas (Abeliuk; Gutiérrez, 2021).

Em novembro de 2022, foi lançado o *chatbot* que utiliza inteligência artificial chamado ChatGPT que, dois meses após seu lançamento, obteve a marca de 100 milhões de usuários ativos (Halaweh, 2023).

A partir de então, diversas ferramentas à base de IA surgiram, como o *Bard*, da Google, que foi substituído pelo *Gemini*, o *Copilot* da Microsoft, o *Grok* do X (antigo Twitter), *Llama* da Meta, e outros.

Entre outros, Salman Khan (2024), criador da Khan Academy – uma organização sem fins lucrativos consolidada que utiliza exercícios, vídeos e materiais para auxiliar na educação do ensino básico ao superior –, lançou, em 15 de março de 2023, o *Khanmigo* para servir como um ajudante e tutor para os estudantes. A preocupação inicial em relação ao uso de IA generativas estava no risco de os estudantes simplesmente copiarem os textos produzidos. Para contornar esse problema, o *Khanmigo* foi projetado não para escrever pelos estudantes, mas para escrever junto com eles, incentivando a coautoria e o pensamento crítico e, por isso, recebeu esse nome, uma brincadeira com a palavra *conmigo* em espanhol (Khan, 2024).

O Khanmigo não está disponível no Brasil, mas em outros países onde está disponível, funciona a um custo de quatro dólares americanos para pais e estudantes e gratuitamente para professores (Khanmigo, 2025).

2.2 A estrutura do ChatGPT

O ChatGPT é uma ferramenta com base em uma arquitetura de redes neurais desenvolvida pela OpenAI, laboratório de pesquisas sobre inteligência artificial, que utiliza IA para gerar textos por meio de comandos (Halaweh, 2023). Segundo Borba e Balbino Junior (2023), trata-se de um modelo de linguagem (LLM) capaz de gerar respostas originais, com texto coerente e relevante, ainda que não tenha acesso a informações em tempo real.

Esse LLM foi desenvolvido para entender linguagem natural e gerar retornos aparentemente inteligentes e em conformidade com o contexto (Halaweh, 2023). Modelos de linguagem não foram desenvolvidos para funcionar como um banco de dados, mas para representar palavras em diferentes idiomas (Cortiz, 2023). Esse tipo de ferramenta calcula as probabilidades para encaixar uma palavra após a outra, pelos treinamentos que recebeu, sabendo haver alguma conexão entre elas (Cortiz, 2023). Ao utilizar a probabilidade para gerar textos, transformadores generativos como o ChatGPT podem criar informações sem qualquer base na realidade, ao que se refere como *alucinações* (Cortiz, 2023).

Pela forma como o ChatGPT e outras tecnologias similares funcionam, Cortiz (2023) ressalta a necessidade de se questionar a veracidade de suas respostas e exercitar cautela ao utilizá-las.

A máquina manipula formas linguísticas de acordo com probabilidades, e com isso constrói sentenças gramaticalmente perfeitas, mesmo sem ter entendimento do mundo, nem senso comum e muito menos compromisso com a realidade. É por isso que ferramentas como o ChatGPT alucinam tudo em todo o lugar ao mesmo tempo (Cortiz, 2023, não paginado).

Jančařík e Dušek (2024) apresentam, em seu trabalho, a preocupação no que concerne as alucinações de IA generativas. Os autores citam o fato de que, embora as tecnologias como o ChatGPT possuam outras limitações, as alucinações são causa de preocupação maior porque são consequências da própria forma como essas ferramentas funcionam e, portanto, as atualizações não serão capazes de eliminar essa limitação.

Por isso, Jančařík e Dušek (2024) procuraram criar um modo de diminuir as alucinações da IA generativa. Trata-se do aplicativo *Chatbot Edu-AI* (Jančařík; Dušek,

2024), que foi idealizado para auxiliar alunos na aprendizagem de Matemática. O aplicativo utiliza o ChatGPT para analisar os *prompts* dos usuários e tem algumas regras de funcionamento, ou seja, a depender das intenções do *prompt* (analisadas pelo ChatGPT), o *Chatbot Edu-AI* seguirá um caminho diferente, podendo apresentar respostas diretamente, como faz o ChatGPT, ou enviar os endereços de sítios confiáveis com o conteúdo procurado (Jančařík; Dušek, 2024).

Por outro lado, Broad (2024) apresenta um texto que aborda essas alucinações da inteligência artificial e como elas têm impulsionado descobertas científicas. Pesquisadores utilizam essas criações inesperadas para acelerar avanços em áreas como saúde, projetando medicamentos, dispositivos médicos e proteínas sintéticas, tendo contribuído para a pesquisa pioneira sobre proteínas de David Baker que acabou lhe concedendo um Prêmio Nobel de Química. Embora vistas como falhas em outros contextos, as alucinações podem ser ferramentas criativas que estimulam hipóteses inovadoras. O texto conclui que a IA está transformando a ciência ao permitir experimentações mais rápidas, desde que os resultados sejam validados na prática.

As qualidades e restringências do ChatGPT não se resumem às suas alucinações. Rudolph, Tan e Tan (2023) elencam diversas potencialidades e limitações, como citado abaixo e que serão explanadas no capítulo 5:

Potencialidades:

- Entendimento de linguagem;
- Conversação similar à humana;
- Flexibilidade;
- Velocidade;
- Custo-benefício;
- Potencial para ser um assistente pessoal para qualquer hora;
- Abordagem lógica e bem-organizada;
- Pouco enviesado e com pouca informação danosa;
- Consciência de sua ignorância;

Limitações:

- Entendimento de contexto;
- Linguagem;

- Limites de conhecimento;
- Emoção;
- Criatividade e originalidade;
- Criação de informação falsa e ‘fatos alternativos’;
- Variação na qualidade das respostas;
- Perigo de *jailbreak*;

Em maio de 2024, a OpenAI (2024) anunciou o lançamento de sua atualização, o GPT-4o, que é capaz de interagir com qualquer combinação de texto, imagem, áudio e vídeo e gerar texto, imagem e áudio. Até então, estavam disponíveis o GPT-3.5 na versão gratuita e o GPT-4 na versão paga. Segundo a OpenAI (2024), nessa atualização, o ChatGPT pode responder a entradas em formato de áudio em uma média de 320 milissegundos, o que é similar à resposta humana em uma conversa. A versão GPT-4o do ChatGPT está disponível de maneira limitada gratuitamente.

2.3 O ChatGPT na educação

A capacidade do ChatGPT de realizar tarefas complexas causa angústia a educadores, pois esse avanço na inteligência artificial pode revolucionar as práticas educacionais existentes (Baidoo-Anu; Ansah, 2023).

Enquanto alguns educadores veem o ChatGPT e outras inteligências artificiais generativas (IAGen) como o futuro do ensino, da aprendizagem e da pesquisa, outros os veem como uma ameaça e um possível fim para a maioria das atividades educacionais, além de acreditarem que tecnologias como essa fazem com que professores e estudantes se tornem “preguiçosos” e com pouca ou nenhuma habilidade de análise (Baidoo-Anu; Ansah, 2023). Entretanto, conforme Borba e Balbino Junior (2023), a introdução de novas tecnologias sempre gerou preocupações sobre o impacto na capacidade de raciocínio dos alunos.

Apesar dos potenciais benefícios na área da educação, o ChatGPT tem demonstrado sérias limitações, como a criação de respostas erradas e a citação de artigos inexistentes (Baidoo-Anu; Ansah, 2023). Entretanto, segundo Baidoo-Anu e

Ansah (2023), tecnologias como o ChatGPT continuarão a revolucionar o sistema de educação atual e foram criadas para serem mudanças permanentes.

Spencer (2023), ao encontro de Baidoo-Anu e Ansah (2023), afirma que há educadores entusiasmados com a possibilidade de utilizar inteligência artificial nos processos de ensino e aprendizagem ao mesmo tempo em que outros se mostram céticos ou até preocupados com esse uso. Segundo Spencer (2023), há duas armadilhas quanto a este tema: acreditar que a tecnologia trará a revolução total para o mundo da educação e acreditar que a tecnologia deva ser banida da escola para que se possa seguir com a educação da forma que é conhecida, como fizeram as escolas de Nova Iorque, devido a preocupações com os impactos negativos na aprendizagem dos estudantes e com a precisão das informações (Yang, 2023).

Para Spencer (2023), o ChatGPT e as tecnologias similares não farão uma completa revolução na educação, pois a escrita ainda é importante para a aprendizagem e, em um mundo em constante mudança, de IA, de informações instantâneas, urge a necessidade da formação de estudantes com pensamento divergente, filosófico e crítico.

Para Tlili *et al.* (2023), os educadores precisam pensar em novas filosofias de ensino, nas quais possam confiar para avaliar os estudantes. Os autores ainda chamam a atenção para a importância de os usuários do ChatGPT não aceitarem todas as suas respostas como verdadeiras, pois não é sempre que o LLM responde com precisão (Tlili *et al.*, 2023).

Há ainda a preocupação de que, por sua natureza, o ChatGPT gere respostas diferentes para perguntas iguais, o que poderia acarretar uma diferença no acesso à educação (Tlili *et al.*, 2023).

Embora haja preocupações relativas ao ChatGPT se tornar o fim da educação tradicional, Rudolph, Tan e Tan (2023) afirmam que há uma longa história de se verificar na tecnologia uma cura ou uma doença e que diversas inovações tecnológicas levaram a essa preocupação, o que os autores atribuem a uma forma de afeto irracional pela tecnologia.

Segundo Lieberman (2023), alguns educadores estão preocupados com o efeito que o ChatGPT terá na motivação em aprender dos estudantes, enquanto

outros já consideram formas de utilizá-lo para instruir. Ao encontro disso, Rudolph, Tan e Tan (2023) ressaltam que a capacidade do ChatGPT de produzir textos criou desafios para os educadores, mas há aqueles que aparentam estar preparados para as oportunidades de inovação nos processos de ensino e aprendizagem que essa ferramenta baseada em IA apresenta. Entretanto, segundo Wardat *et al.* (2023), ainda que haja certa resistência a mudanças, essa reação tende a ser dissipada uma vez que essa tecnologia faça parte da vida cotidiana da maior parte da sociedade.

Uma das preocupações com o uso do ChatGPT é a dificuldade em reconhecer quando alguém utiliza suas respostas em vez de responder por si próprio. Segundo Tlili *et al.* (2023), embora existam detectores de textos criados por IA e estes serem capazes de reconhecer textos copiados e colados do ChatGPT, ao adicionar uma palavra ao texto, o detector pode indicar que o texto foi criado por um ser humano. Por isso, Tlili *et al.* (2023) pregam cautela no uso dessa ferramenta e afirmam que mais orientações sobre como utilizá-la devem ser estabelecidas.

Na Irlanda, uma professora de Ciências e Matemática afirmou que sua produtividade aumentou consideravelmente devido ao uso do ChatGPT (Mok, 2023). O seu uso do *software* se dá na criação de lista de exercícios, planos de aula, questões para provas e outras tarefas manuais que demandavam tempo de sua rotina (Mok, 2023). Segundo Mok (2023), essa professora percebeu que o ChatGPT comete erros de cálculo, mas, de acordo com ela, isso não é uma situação frequente e, quando acontece, basta que ela aponte o erro que o LLM o corrige imediatamente. Quanto à preocupação com a cópia do conteúdo produzido pelo modelo de linguagem, ela percebeu que isso sempre aconteceu de uma forma ou de outra e que o ChatGPT não mudará isso (Mok, 2023).

Magat e Sangalang (2024) conduziram uma pesquisa na região de Grande Manila, nas Filipinas, em que questionaram 110 professores de Matemática do ensino básico sobre o uso do ChatGPT. Entre os participantes da pesquisa, 50% dos professores de Matemática afirmaram não ter qualquer familiaridade com o LLM, 12,7% afirmaram ter alguma familiaridade, 21,8% afirmaram ter uma familiaridade moderada com a ferramenta, 6,4% afirmaram ter bastante familiaridade e apenas 9,1% afirmaram estar extremamente familiarizados com o ChatGPT.

Além disso, sobre a percepção que os professores de Matemática têm sobre o ChatGPT, a pesquisa de Magat e Sangalang (2024) apresentou diversas afirmações sobre o uso dessa ferramenta para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, como mostra o Quadro 1, em que as respostas 1, 2, 3, 4 e 5 equivalem, respectivamente, a *Strongly disagree* (discordo completamente), *Disagree* (discordo), *Not sure* (Não tenho certeza), *Agree* (concordo) e *Strongly agree* (concordo plenamente). Optou-se, no Quadro 1, que as afirmações ficassem no idioma originário, o inglês, para que não houvesse distorções quanto às respostas dos entrevistados.

Quadro 1 - As percepções dos professores de Matemática sobre o ChatGPT

Afirmações	1	2	3	4	5
<i>Math teachers' workloads can be reduced by using ChatGPT in the classroom. [A quantidade de trabalho de professores de Matemática pode ser reduzida ao utilizar o ChatGPT na sala de aula.]</i>	16,4%	10%	38,2%	15,5%	20%
<i>Using ChatGPT in teaching mathematics can differentiate instruction for students with different learning needs. [Usar o ChatGPT no ensino de Matemática pode diferenciar as instruções para alunos com necessidades de aprendizado diferentes.]</i>	15,5%	8,2%	36,4%	23,6%	16,4%
<i>The use of ChatGPT can promote collaboration and interaction among students in teaching mathematics. [O uso do ChatGPT pode promover colaboração e interação entre estudantes no ensino de Matemática.]</i>	20%	10%	32,7%	29,1%	8,2%
<i>ChatGPT in teaching mathematics can help students develop their critical</i>	22,7%	14,5%	37,3%	16,4%	9,1%

<i>thinking skills.</i> [O ChatGPT no ensino de Matemática pode ajudar alunos a desenvolverem suas habilidades de pensamento crítico.]					
<i>ChatGPT in teaching mathematics can increase student engagement and motivation.</i> [O ChatGPT no ensino de Matemática pode aumentar a participação e a motivação dos alunos.]	18,2%	11,8%	36,4%	22,7%	10,9%
<i>Using ChatGPT in teaching mathematics can help students to achieve better learning outcomes.</i> [Usar o ChatGPT no ensino de Matemática pode ajudar os alunos a alcançarem resultados melhores de aprendizagem.]	17,3%	10,9%	35,5%	23,5%	12,7%
<i>Using ChatGPT in teaching mathematics can improve the efficiency and effectiveness of assessment.</i> [Usar o ChatGPT no ensino de Matemática pode melhorar a eficiência e a eficácia da avaliação.]	18,2%	13,6%	35,5%	19,1%	13,6%
<i>Using ChatGPT in teaching mathematics can help to reduce the achievement gap between different groups of students.</i> [Usar o ChatGPT no ensino de Matemática pode ajudar a reduzir a diferença de desempenho entre diferentes grupos de alunos.]	15,5%	13,6%	38,2%	21,8%	10,9%
<i>The benefits of using ChatGPT in teaching mathematics outweigh the challenges.</i> [Os benefícios de usar o ChatGPT no ensino de Matemática superam os desafios.]	17,3%	10%	37,3%	25,5%	10%

<i>ChatGPT in teaching mathematics can save time in lesson preparation. [O ChatGPT no ensino de Matemática pode economizar tempo na preparação de aula.]</i>	14,5%	5,5%	35,5%	20,9%	23,6%
--	-------	------	-------	-------	-------

Fonte: adaptado de Magat e Sangalang (2024, p. 1481).

Pode-se observar no Quadro 1 que em todas as afirmações apresentadas a percepção de incerteza é a que se destaca. Magat e Sangalang (2024) também escreveram sobre as necessidades da formação de professores de Matemática, envolvidos na pesquisa, para o uso do ChatGPT. A pesquisa realizada pelos autores indica que 82,7% dos professores acreditavam ser necessário um treinamento técnico sobre como utilizar o ChatGPT e 10% acreditavam ser necessário um treinamento pedagógico sobre como utilizar o ChatGPT.

Verifica-se, nos resultados da pesquisa de Magat e Sangalang (2024), que, entre os professores entrevistados, há uma tendência em identificar no ChatGPT uma ferramenta para desburocratização de processos do professor e não necessariamente uma ferramenta para o processo de aprendizagem dos alunos.

Segundo Rudolph, Tan e Tan (2023), embora o ChatGPT tenha uma versão gratuita, os custos para a geração de respostas são elevados, chegando a um valor de um a dez centavos de dólar americano por resposta na versão 3 do GPT, o que provavelmente foi reduzido drasticamente com a implementação do GPT-4. Por isso, Rudolph, Tan e Tan (2023) afirmam ser improvável que essa ferramenta continue a ser disponibilizada sem custos para os seus usuários.

Segundo Kasneci *et al.* (2023), o uso de modelos de linguagem na educação foi identificado como possível área de interesse devido às diversas aplicações que esses LLM oferecem, além da possibilidade de sua utilização com estudantes de todos os níveis de ensino. Além disso, os modelos de linguagem podem oferecer experiências de aprendizagem personalizadas, o que pode ser importante visto que cada indivíduo possui necessidades e habilidades diferentes na aprendizagem (Kasneci *et al.*, 2023). Em acordo, Rudolph, Tan e Tan (2023) afirmam ser possível argumentar que um dos mais promissores benefícios à transformação educacional que o ChatGPT e ferramentas similares podem proporcionar é a adaptação do

assistente virtual para realizar o papel de um sistema de tutoria inteligente (ITS), que seria capaz de adequar o ensino às necessidades dos usuários.

Os LLM também podem ser utilizados para assistir na aprendizagem de um novo idioma (Kasneci *et al.*, 2023). Além disso, esses modelos de linguagem são capazes de ajudar no desenvolvimento das habilidades de escrita e leitura dos estudantes, assim como no desenvolvimento do pensamento crítico (Kasneci *et al.*, 2023).

Em acordo, Santos (2023) defende que a interação de estudantes com ferramentas como o ChatGPT contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, da capacidade de resolução de problemas e da criatividade, favorecendo, adicionalmente, a promoção de discussões e atividades colaborativas em grupo, bem como o aprofundamento na compreensão dos tópicos abordados.

Para estudos, ferramentas como o ChatGPT podem gerar atividades, listas de exercícios e outros materiais para auxiliar estudantes a entenderem, contextualizarem e reterem melhor o conteúdo que estão aprendendo (Kasneci *et al.*, 2023). Por apresentarem explicações e soluções passo a passo, os LLM podem ajudar no desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas (Kasneci *et al.*, 2023).

Os modelos de linguagem podem ser utilizados por professores para a criação de experiências personalizadas de aprendizagem para seus alunos, visto que os LLM são capazes de analisar as escritas e respostas dos estudantes, fornecendo devolutiva e sugerindo materiais que vão ao encontro das necessidades especiais de cada indivíduo (Kasneci *et al.*, 2023).

Segundo Magat e Sangalang (2024), *chatbots* que utilizam IA possuem o potencial de fornecer um apoio personalizado a estudantes para que estes consigam superar seus obstáculos de aprendizagem. Entende-se obstáculos no sentido de um percalço, uma barreira que impede ou atrapalha o processo de aprendizagem, não se referindo a obstáculos epistemológicos (Bachelard, 2013) ou a obstáculos didáticos (Almouloud, 2007).

Para Kasneci *et al.* (2023), os modelos de linguagem podem significar a revolução no ensino, fornecendo aos professores uma vasta gama de ferramentas e recursos que podem auxiliar no planejamento das aulas, na criação de conteúdo

personalizado e no desenvolvimento profissional, se tornando assim uma ferramenta poderosa no campo educacional.

Nos anos recentes, diversos LLM foram desenvolvidos, baseados em arquitetura *transformer* e treinados previamente com conjuntos massivos de textos para serem capazes de gerar escrita similar à humana, responder perguntas e realizar traduções (Kasneci *et al.*, 2023).

Segundo Wardat *et al.* (2023), o ChatGPT deixou de ser visto como um brinquedo para ser visto como uma inovação potencialmente revolucionária e o seu sucesso dependerá de diversos fatores e o seu banimento ou a sua rejeição não serão capazes de impedir sua influência. Portanto, é imprescindível que haja uma avaliação de como ferramentas como o ChatGPT podem impactar positivamente o ensino e a aprendizagem, tal qual quaisquer efeitos negativos que possam surgir (Wardat *et al.*, 2023).

Putra e Ciptaningrum (2024) afirmam que os GPT têm o potencial de revolucionar a forma como se aprende e se ensina por prover novas ferramentas capazes de aumentar a qualidade e as práticas de aprendizagem.

Quanto à Educação Matemática, Vieira e Santos (2024, p. 77-78) apontam que a aplicação do ChatGPT

levanta questões sobre sua importância, eficácia e impacto no processo educacional. Ainda há ressalvas quanto aos conteúdos em constante evolução e à própria IA, que está em constante aprimoramento. No entanto, é consenso que o papel do professor é crucial nesse cenário tecnológico. Ele atua como coordenador do processo educacional, selecionando conteúdos, incentivando a busca pelo conhecimento, mantendo o foco nos objetivos educacionais e mediando o uso adequado das tecnologias.

Santos (2023) considera que a incorporação de *chatbots* baseados em inteligência artificial generativa no ensino de Matemática promove a ênfase na aprendizagem experiencial e prática, possibilitando aos alunos o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da capacidade de resolução de problemas em um ambiente interativo e engajador.

Neste capítulo, foi realizado um esboço histórico da inteligência artificial, da sua concepção à atualidade, foi exposto o funcionamento do ChatGPT, inclusive algumas de suas potencialidades e limitações, e expôs-se os resultados de pesquisas de

diversos autores sobre o uso do ChatGPT na educação e, especificamente, na Educação Matemática.

No capítulo seguinte, são expostos os escritos de Manuel Amoroso Costa (1981a; 1981b) e é analisada a abordagem do ChatGPT sobre algumas das ideias fundamentais da Matemática segundo o autor.

3 A ABORDAGEM DO CHATGPT ACERCA DE ALGUMAS IDEIAS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, são expostos os escritos de Manuel Amoroso Costa (1981a; 1981b) acerca de ideias fundamentais da Matemática e são apresentadas e analisadas as abordagens do ChatGPT a essas ideias.

3.1 A lógica simbólica e a Matemática

O capítulo da obra de Costa (1981a), o quinto da terceira parte, trata do desenvolvimento da lógica simbólica e a sua relação com a Matemática e está dividido em três subcapítulos: *esboço histórico*; *separação dos princípios lógicos*; e *a lógica simbólica de Whitehead e Russell*.

3.1.1 Esboço histórico

Segundo Costa (1981a), a origem da lógica simbólica se encontra nas obras de Leibniz. Nelas, há duas ideias principais: a da característica universal, que se trata da linguagem simbólica utilizada para traduzir os conhecimentos científicos por meio de sinais que representam as noções elementares; e a do cálculo lógico, que opera sobre estes símbolos, reduzindo o trabalho do raciocínio dedutivo a transformações de fórmulas (Costa, 1981a). As noções de igualdade entre duas classes e da adição e multiplicação lógicas de duas classes também são devidas a Leibniz (Costa, 1981a).

As ideias de Leibniz foram renovadas por outros autores, entre os quais está Lambert, discípulo de Leibniz, que introduziu a relação de inclusão entre duas classes (Costa, 1981a).

De acordo com Costa (1981a), os escritos de Leibniz e Lambert foram esquecidos por um período longo até surgirem os logicistas britânicos do século XIX, que provavelmente nem teriam conhecimento de seus trabalhos, tendo descoberto

novamente os seus resultados. Entre eles estão George Boole, Augustus de Morgan, John Venn, William Stanley Jevons, Alfred North Whitehead e Bertrand Russell.

O sistema desenvolvido por Boole é caracterizado pela introdução dos símbolos 1 e 0, representando, respectivamente, o universo lógico, a classe de todos os objetos concebíveis, e o nada lógico, classe que não contém nenhum objeto, tornando-se, assim, uma álgebra especial dos símbolos 1 e 0, com as proposições gerais tomando a forma de equações (Costa, 1981a).

Dessa maneira, Boole obteve um conjunto de regras de cálculo lógico que permitem efetuar cadeias dedutivas longas e complexas por meio de transformações algébricas, o que deixa claro que a lógica formal pode ganhar tanto em fecundidade quanto em rigor ao utilizar certas analogias com o cálculo algébrico (Costa, 1981a).

Segundo Costa (1981a), no que diz respeito ao cálculo das classes, Boole deve ser considerado como o verdadeiro criador da lógica simbólica. Tal invenção de Boole foi desenvolvida e aperfeiçoada por diferentes autores ingleses, como os já citados Morgan, Venn e Jevons, cujos trabalhos finalizam um período histórico da lógica simbólica. Entretanto, Costa (1981a) aponta que a álgebra da lógica, constituída por esses autores, embora seja mais compreensiva e rigorosa que a lógica clássica, ainda não se distingue desta, tornando-a de utilidade quase nula na Matemática. A álgebra da lógica se completa com o cálculo das relações, constituído por Gottlob Frege, Giuseppe Peano, Alfred North Whitehead e Bertrand Russell (Costa, 1981a).

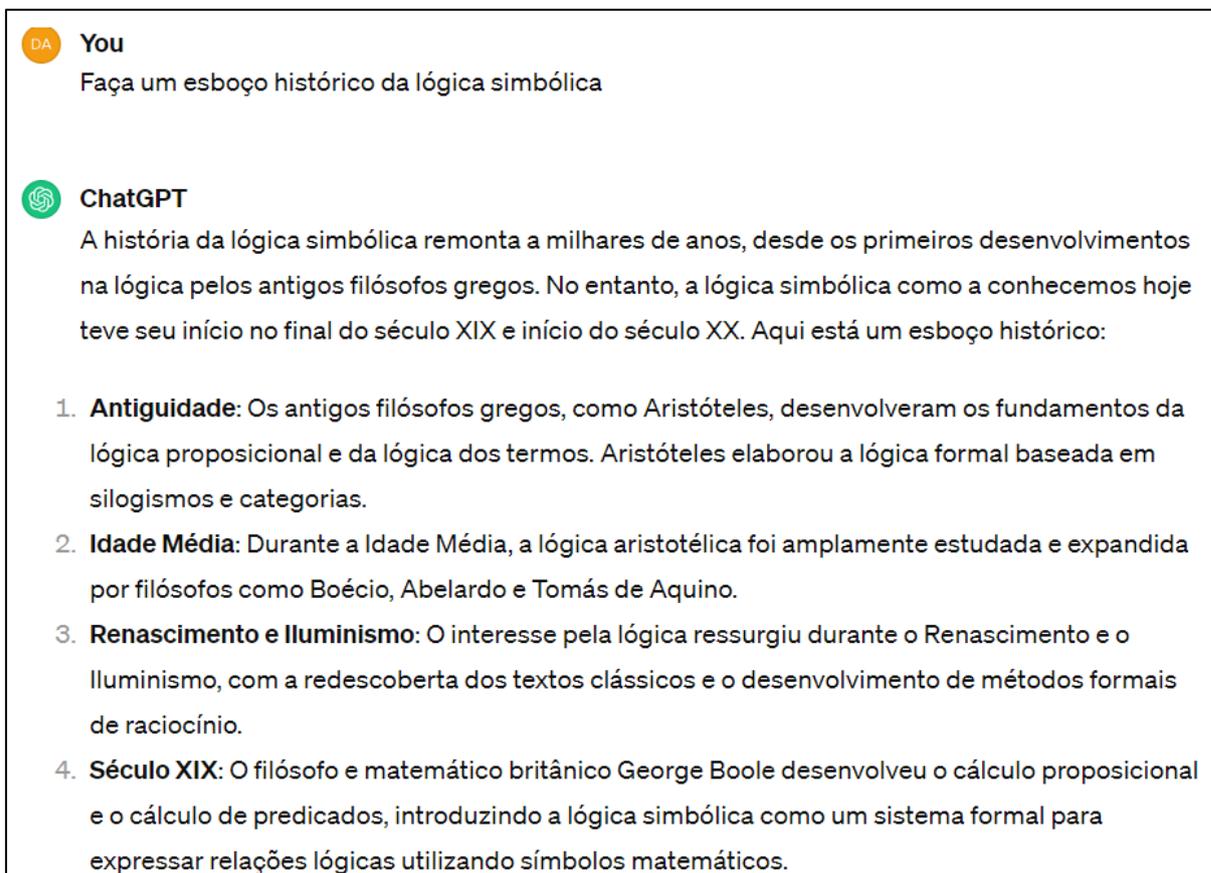
A obra de Frege é uma análise do raciocínio dedutivo juntamente a uma teoria da Aritmética e procura demonstrar que toda a Matemática pode ser deduzida de premissas puramente lógicas (Costa, 1981a). Já os escritos de Peano e sua escola tornam a lógica simbólica o instrumento da demonstração matemática (Costa, 1981a).

Nos estudos da escola inglesa de Russell e Whitehead, a tese de Frege de que a matemática pura contém somente os conceitos fundamentais da Lógica reaparece. A essa Lógica, neste ponto já consideravelmente enriquecida, Russell adiciona um novo capítulo, o do cálculo das relações (Costa, 1981a).

Para analisar a abordagem do ChatGPT sobre o tema, pediu-se em abril de 2024, utilizando a sua versão gratuita disponível (GPT-3.5), que este fizesse um esboço histórico da lógica simbólica, como exposto nas Figuras 1 e 2. O ChatGPT

iniciou sua resposta indicando que a história da lógica simbólica começa há milhares de anos, com os filósofos gregos da antiguidade, fato que pode ser encontrado nos escritos de Abar (2004), Kneale e Kneale (1971) e Fajardo (2023).

Figura 1 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT ao ser requisitado um esboço histórico da lógica simbólica



Fonte: dados da pesquisa (2024).

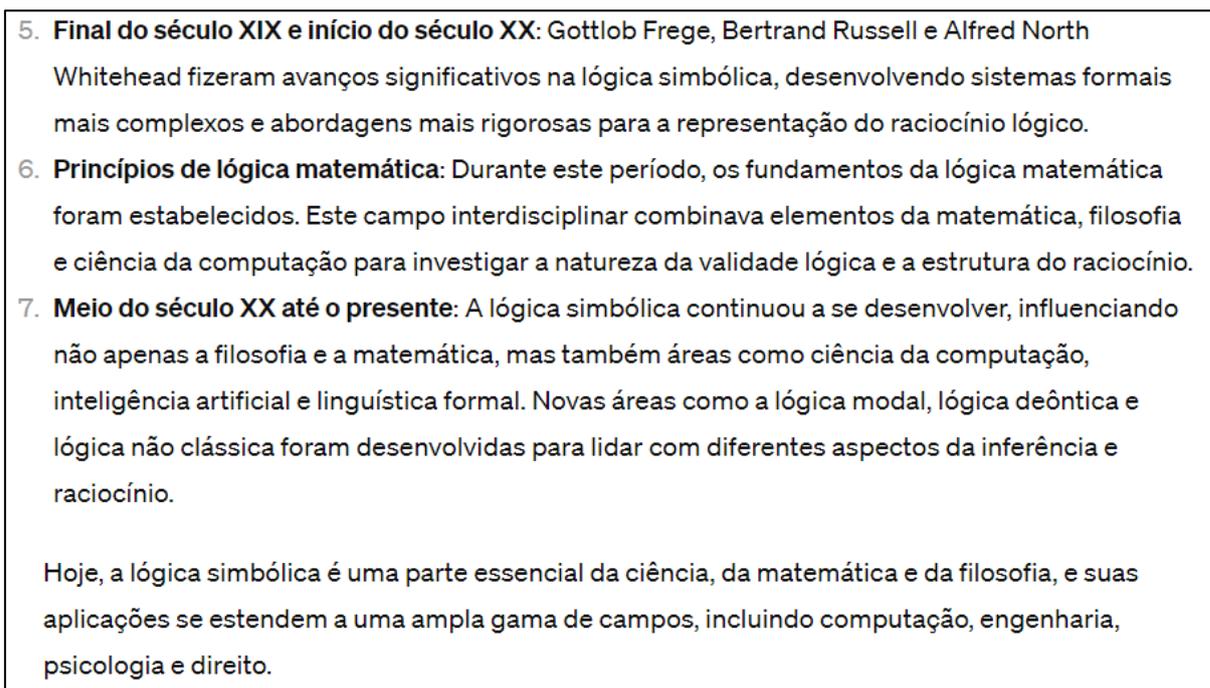
Em seguida, o ChatGPT cita a Idade Média como outro momento histórico de desenvolvimento da lógica simbólica. Complementando a obra de Costa (1981a), a afirmação do modelo de linguagem é respaldada por autores como Cruz (2017), Soares (2023) e Strathern (1999).

No terceiro item, visto na Figura 1, o modelo de linguagem cita o Renascimento e o Iluminismo. Sobre esse período, Kneale e Kneale (1971) afirmam que o Renascimento não foi uma época de grande desenvolvimento na área, sendo este retomado com Leibniz, que viveu de 1646 a 1716 e, portanto, era vivo durante parte do período iluminista.

Na sequência, o ChatGPT cita o desenvolvimento do cálculo proposicional e do cálculo de predicados por George Boole, ao qual Costa (1981a) indica como “[...] o verdadeiro criador da lógica simbólica, no que se refere ao cálculo das classes, que ele próprio procurou depois estender à teoria das proposições” (p. 206). A afirmação do LLM vai ao encontro dos escritos de Soares (2023).

A ferramenta aborda, no item seguinte, os avanços significativos realizados por Frege, Russell e Whitehead, principalmente nos seus sistemas mais complexos e suas abordagens mais rigorosas para a representação do raciocínio lógico. Costa (1981a) cita as obras de Frege, Whitehead e Russell, mas, posteriormente, disserta sobre o trabalho conjunto dos dois últimos, caracterizado, segundo o autor, pelo “[...] desenvolvimento considerável do simbolismo ideográfico [...]” (p. 209).

Figura 2 – Captura de tela da parte final da resposta do ChatGPT ao ser requisitado um esboço histórico da lógica simbólica



Fonte: dados da pesquisa (2024).

No item 6 da resposta, exposto na Figura 2, o ChatGPT não cita um período específico, mas escreve sobre o estabelecimento dos fundamentos da lógica matemática e como esse campo interdisciplinar combinava elementos de matemática, filosofia e ciência da computação para a investigação da natureza da validade lógica e da estrutura do raciocínio. Por estar no item na sequência do que menciona Whitehead, Russell e Frege, pode estar se referindo a este período, o que estaria em

acordo com os escritos de Costa (1981a), que elenca *Principia Mathematica*, de Russell e Whitehead, como a sistematização definitiva do cálculo das relações.

Finalmente, no item 7 de sua resposta, que pode ser visto na Figura 2, o LLM escreve sobre os avanços realizados do meio do século XX até os dias atuais, em que a lógica simbólica continua a se desenvolver, influenciando não apenas a Matemática e a filosofia, mas, também, outras áreas como a ciência da computação, inteligência artificial e linguística formal. Ele cita, também, novas áreas da lógica simbólica que se desenvolveram nesse período, como a lógica modal, a lógica deôntica e a lógica não clássica.

Embora Costa (1981a) não cite esse período, pois o autor faleceu em 1928, portanto, antes do meio do século XX, Puga e Costa (1987) citam que as lógicas não clássicas podem ser divididas em duas categorias: as rivais da lógica clássica, que “[...] caracterizam-se, essencialmente, por derogarem uma dessas três leis [a lei da identidade, a lei da contradição e a lei do terceiro excluído], pelo menos” (p. 19); e as lógicas complementares da clássica, que “[...] não colocam em xeque os princípios basilares da mesma; de fato, elas ampliam as ideias desta última, introduzindo modalidades e outras noções que a tornam mais potente conceitualmente” (p. 10).

Além disso, Puga e Costa (1987) afirmam que a lógica deôntica se ocupa de operadores que podem ser acrescentados à lógica clássica e, assim, esta poderia ser vista como uma lógica complementar da clássica. Porém, seria possível, também, desenvolver sistemas de lógica deôntica que se baseiam em lógicas rivais da clássica. “Em nossa época, a lógica deôntica foi investigada por E. Mally, em 1926, mas o seu desenvolvimento atual começou com um artigo pioneiro de G. H. von Wright em 1951 [...]” (Puga; Costa, 1987, p. 21).

Assim, embora o ChatGPT cite a lógica deôntica e a lógica não clássica como distintas, segundo Puga e Costa (1987), a primeira pode ser categorizada como uma forma da segunda. Ademais, os autores citam que a lógica deôntica já havia sido investigada na primeira metade do século XX, embora o seu desenvolvimento atual tenha se iniciado em 1951 (Puga; Costa, 1987), fato sobre o qual o ChatGPT apenas afirma que o desenvolvimento da lógica deôntica se deu do meio do século XX até o presente.

Puga e Costa (1987) também citam a lógica modal como uma lógica complementar da clássica e, portanto, uma lógica não clássica.

Figura 3 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT realizando um esboço histórico da lógica simbólica em julho de 2024

Faça um esboço histórico da lógica simbólica



A lógica simbólica, também conhecida como lógica matemática ou lógica formal, é um campo que evoluiu ao longo de muitos séculos, desde a antiguidade até os dias atuais. Aqui está um esboço histórico que destaca os principais desenvolvimentos e figuras na história da lógica simbólica:

Antiguidade

- **Aristóteles (384-322 a.C.):** Considerado o "pai da lógica", Aristóteles desenvolveu o silogismo, uma forma de raciocínio dedutivo. Sua obra "Organon" foi fundamental para a lógica ocidental.
- **Estoicos:** Desenvolveram uma lógica proposicional rudimentar, que diferia da lógica de termos de Aristóteles.

Idade Média

- **Lógicos Escolásticos:** Durante a Idade Média, os filósofos escolásticos, como Pedro Abelardo e Guilherme de Ockham, expandiram a lógica aristotélica, explorando questões de semântica e paradoxos.

Renascimento e Século XVII

- **Ramon Llull (1232-1315):** Desenvolveu métodos combinatórios que podem ser vistos como precursores da lógica simbólica moderna.
- **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):** Imaginou uma linguagem formal universal (*characteristica universalis*) e uma álgebra da lógica (*calculus ratiocinator*).

Século XIX

- **George Boole (1815-1864):** Fundador da álgebra booleana, que formalizou a lógica proposicional usando operações algébricas.
- **Augustus De Morgan (1806-1871):** Desenvolveu as Leis de De Morgan e contribuiu para a formalização da lógica proposicional.
- **Gottlob Frege (1848-1925):** Desenvolveu a lógica de predicados, introduzindo quantificadores e distinguindo entre conceitos e objetos. Sua obra "Begriffsschrift" (1879) é um marco na lógica simbólica.

↓

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em julho de 2024, com o GPT-4o disponível em versão gratuita, pediu-se novamente que o LLM realizasse um esboço histórico da lógica simbólica, como pode ser visto nas Figuras 3 e 4.

O ChatGPT inicia sua resposta citando um período que tem respaldo em Abar (2004), Kneale e Kneale (1971) e Fajardo (2023). O LLM atribui a Aristóteles a criação da lógica, e afirma que sua obra *Organon* foi fundamental para o desenvolvimento da lógica no ocidente, o que vai ao encontro dos escritos de Kneale e Kneale (1971).

Figura 4 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT realizando um esboço histórico da lógica simbólica em julho de 2024

Século XX

- **Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947):** Publicaram "Principia Mathematica" (1910-1913), que tentou basear toda a matemática na lógica.
- **David Hilbert (1862-1943):** Propôs o programa de Hilbert, que buscava uma base consistente e completa para toda a matemática.
- **Kurt Gödel (1906-1978):** Provou os teoremas da incompletude, mostrando que qualquer sistema formal suficientemente poderoso é incompleto ou inconsistente.
- **Alonzo Church (1903-1995) e Alan Turing (1912-1954):** Desenvolveram teorias de computabilidade (lambda cálculo e máquinas de Turing) que conectaram lógica e teoria da computação.

Pós-Guerra e Era Moderna

- **Lógica Modal e Epistemológica:** Desenvolvimentos na lógica modal, temporal e epistêmica, explorando noções de possibilidade, tempo e conhecimento.
- **Lógica Intuicionista e Fuzzy:** Explorações de sistemas lógicos alternativos que lidam com incerteza e constructivismo.

Aplicações Modernas

- **Computação:** Lógica simbólica é fundamental para a ciência da computação, influenciando linguagens de programação, inteligência artificial e verificação formal.
- **Inteligência Artificial:** Uso de lógica simbólica em sistemas de IA para representação de conhecimento, raciocínio automático e prova de teoremas.

Este esboço destaca como a lógica simbólica evoluiu de conceitos filosóficos antigos para uma disciplina rigorosa e aplicada, fundamental tanto para a matemática quanto para a computação moderna.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Na sequência, o modelo de linguagem cita a Idade Média, como já havia mencionado na resposta exposta nas Figuras 1 e 2, dessa vez deixando de mencionar Tomás de Aquino e Boécio, mas elencando os filósofos escolásticos, como Abelardo e Guilherme de Ockham, como os responsáveis pela expansão da lógica aristotélica, o que está em acordo com Soares (2023).

Em seguida, o ChatGPT cita o Renascimento e o século XVII, dando destaque a Ramon Llull e Gottfried Wilhelm Leibniz, o último tendo sido citado por Costa (1981a) e o desenvolvimento durante o Renascimento tendo sido refutado por Kneale e Kneale (1971).

Então, o LLM, ao mencionar o século XIX, cita três autores que Costa (1981a) alude em sua obra: Boole, com a álgebra booleana; De Morgan, a quem Costa (1981a) se refere como um dos autores ingleses que desenvolveram e aperfeiçoaram o cálculo de classes e a lógica proposicional; e Frege, com a influência que teve sobre as ideias de Russell.

Ao se referir ao século XX, o ChatGPT inicia citando os 2 autores mais mencionados neste capítulo do texto de Costa (1981a), Whitehead e Russell, e sua obra, *Principia Mathematica*. Em seguida, a ferramenta baseada em IA menciona Hilbert, que, segundo Soares (2023), é o principal representante do formalismo, que “[...] procura explicar a matemática enfatizando seus aspectos formais, independentemente do significado de suas asserções” (Soares, 2023, p. 46) e, segundo Kneale e Kneale (1971), foi responsável pela produção da primeira lista de axiomas da geometria euclidiana realmente satisfatória e seu trabalho sobre a base da Matemática foi importante para o seu desenvolvimento.

O LLM também menciona Gödel, que, de acordo com Soares (2023), é responsável pelo desenvolvimento dos teoremas de incompletude das lógicas de ordem mais elevada. Ademais, o modelo de linguagem cita Church e Turing, a quem Soares (2023) atribui contribuição para a demonstração da limitação do programa de Hilbert e a criação da máquina de Turing, respectivamente.

Na sequência, o ChatGPT cita o período pós-guerra e a modernidade, com a lógica modal – já supracitada – e a lógica epistemológica, à qual Soares (2023) se refere como *lógica epistêmica*, que trata de proposições verdadeiras, falsas e

indeterminadas, além da lógica intuicionista, que “[...] considera a prova como uma operação mental e não como uma sequência de fórmulas” (Soares, 2023, p. 46), e da lógica *fuzzy*, citada por Abar (2004) e Soares (2023).

Para finalizar, o LLM indica os usos da lógica simbólica na modernidade, como a computação e a inteligência artificial, ambos citados por Abar (2004).

3.1.2 Separação dos princípios lógicos

Nesse subcapítulo, Costa (1981a) discorre sobre de que forma se isolam os princípios lógicos da dedução.

Segundo Costa (1981a), a validade de um raciocínio depende exclusivamente da forma das proposições, e não da sua matéria. O autor exemplifica com o silogismo: “*Os homens são mortais; Sócrates é homem; logo, Sócrates é mortal.*” (Costa, 1981a, p. 208, grifo do autor). É possível substituir ‘homens’, ‘Sócrates’ e ‘mortal’ por variáveis de forma a manter o seu valor formal: “*Os a são b; x é a; logo, x é b*” (Costa, 1981a, p. 208, grifo do autor). Os termos que não podem ser substituídos por variáveis sem que as proposições percam o sentido são chamados de constantes lógicas e elas exprimem os diferentes tipos possíveis de dedução (Costa, 1981a). De acordo com o autor, as variáveis podem designar desde indivíduos ou objetos singulares até proposições completas ou relações entre quaisquer elementos, enquanto as constantes designam sempre relações entre essas variáveis ou operações sobre elas.

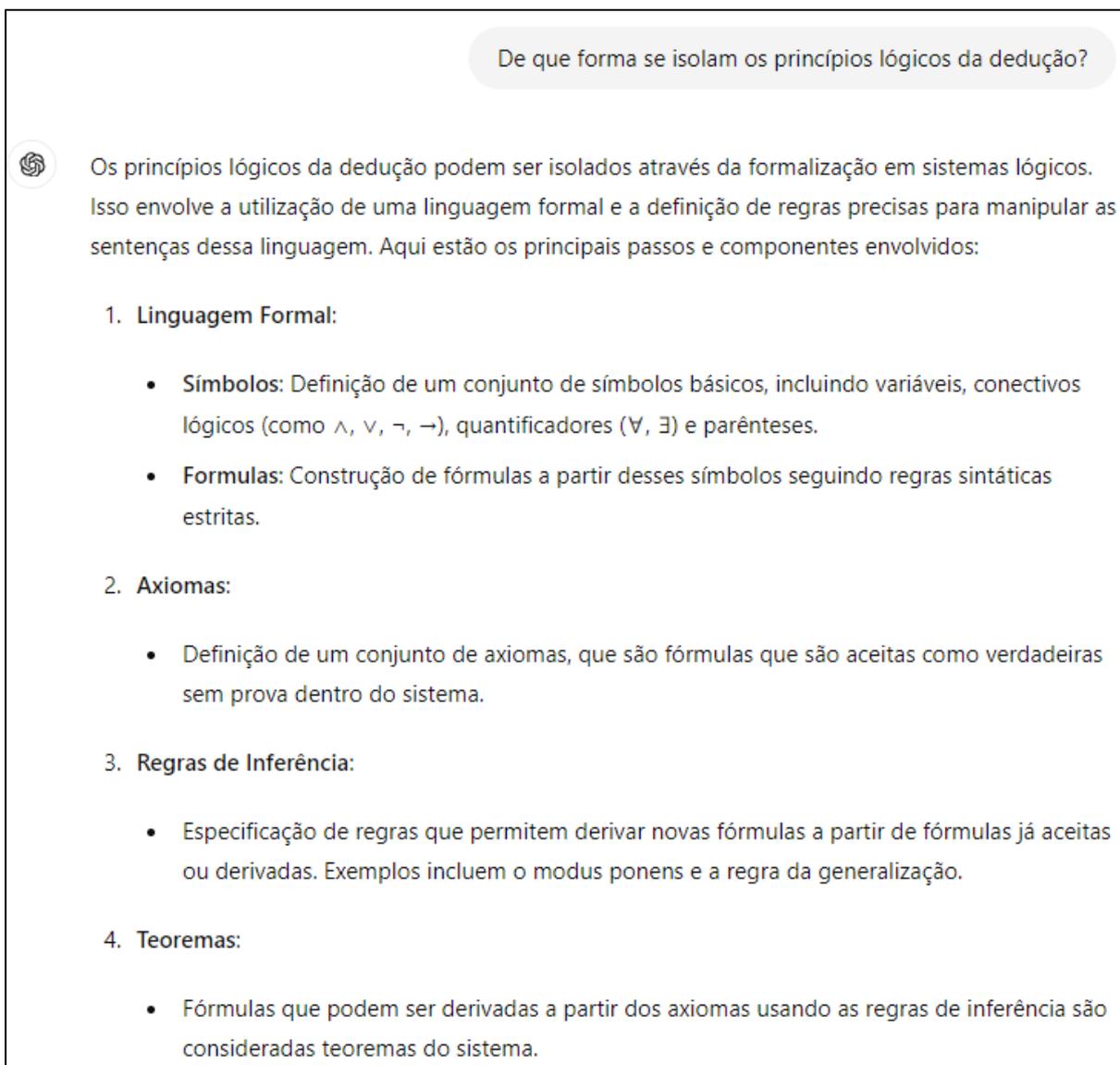
Na lógica clássica, estudavam-se apenas relações especiais, como as de *implicação* e *inclusão* de classes entre si, a de *identidade*, a que se exprime pela locução *pertence a*. A nova teoria das relações considera as propriedades formais das relações quaisquer, e é graças a isso que se tornou verdadeiramente o cânone do raciocínio matemático (Costa, 1981a, p. 209, grifo do autor).

Nas Figuras 5 e 6, é exposta a resposta do ChatGPT à pergunta realizada em julho de 2024, em sua versão gratuita, sobre a forma como se isolam os princípios lógicos da dedução.

O modelo de linguagem iniciou sua resposta indicando que os princípios lógicos da dedução podem ser isolados pela formalização de sistemas lógicos, como a

utilização de uma linguagem formal e a definição de regras precisas para a manipulação das sentenças dessa linguagem.

Figura 5 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre a forma como se isolam os princípios lógicos da dedução



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, o ChatGPT elenca cinco itens a que se refere como os principais passos e componentes envolvidos: a linguagem formal, separada pelo LLM em símbolos (como as variáveis, os conectivos e os quantitativos lógicos) e fórmulas – palavra essa que foi escrita sem acentuação pelo modelo de linguagem – (a construção destas a partir dos símbolos); os axiomas, que são fórmulas que são aceitas como verdadeiras; as regras de inferência, que permitem derivar novas fórmulas a partir de fórmulas já aceitas; os teoremas, que podem ser derivados a partir

dos axiomas a partir das regras de inferência; e as provas, que são uma sequência de fórmulas em que cada fórmula é temporariamente um axioma ou é derivada de fórmulas anteriores utilizando regras de inferência.

Na sequência, o modelo de linguagem dá exemplos de sistemas formais, como a lógica proposicional, que utiliza proposições simples e conectivos lógicos, e a lógica de primeira ordem, que inclui quantificadores e permite trabalhar com objetos individuais e suas propriedades.

Figura 6 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre a forma como se isolam os princípios lógicos da dedução

5. Provas:

- Sequências de fórmulas onde cada fórmula é um axioma, uma hipótese assumida temporariamente, ou é derivada de fórmulas anteriores usando uma regra de inferência.

Exemplos de Sistemas Formais:

- **Lógica Proposicional:** Trabalha com proposições simples e conectivos lógicos.
- **Lógica de Primeira Ordem (ou Predicativa):** Inclui quantificadores e permite trabalhar com objetos individuais e suas propriedades.

Formalização de um Argumento Dedutivo:

1. **Identificação das Premissas:** Listar as proposições que servem de ponto de partida.
2. **Aplicação de Regras de Inferência:** Utilizar as regras para derivar novas proposições a partir das premissas.
3. **Chegada à Conclusão:** Continuar aplicando as regras até que a proposição desejada (a conclusão) seja derivada.

Por exemplo, na lógica proposicional, um argumento dedutivo simples poderia ser:

- **Premissa 1:** $P \rightarrow Q$
- **Premissa 2:** P
- **Conclusão:** Q (derivada aplicando o modus ponens às premissas 1 e 2)

Ao isolar esses princípios e formalizar a dedução, torna-se possível analisar a validade de argumentos de forma rigorosa e sistemática.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Por fim, o ChatGPT escreve sobre a formalização de um argumento dedutivo, em que os passos são a identificação das premissas, a aplicação das regras de inferência e a chegada à conclusão, listando um exemplo disso ao final do item e afirmando que, isolando esses princípios e formalizando a dedução, é possível analisar a validade de argumentos de forma rigorosa e sistemática.

3.1.3 A lógica simbólica de Whitehead e Russell

Segundo Costa (1981a), na obra de Whitehead e Russell, *Principia mathematica*, o que causa um impacto imediato é o desenvolvimento do simbolismo ideográfico. O texto lógico é escrito quase em sua totalidade com a notação ideográfica dos autores, com a linguagem corrente sendo empregada somente em comentários e algumas proposições iniciais (Costa, 1981a).

Para Costa (1981a), tal simbolismo se torna indispensável devido a quão abstratas são as ideias a analisar, não havendo termos precisos o bastante para traduzi-las. Além disso, estabelecida a notação simbólica, ganha-se em simplicidade e rigor (Costa, 1981a).

No cálculo das proposições, – que Costa (1981a) afirma ser o fundamento da lógica matemática, – parte-se de um grupo de ideias primitivas que, embora possam ser explicadas descritivamente, não são definidas (Costa, 1981a). As ideias adotadas por Whitehead e Russell, segundo Costa (1981a), são:

1) **Proposição elementar**: uma proposição na qual não figuram variáveis. Para representá-la, emprega-se uma letra, p , q ou r habitualmente.

2) **Função proposicional elementar**: toda expressão em que figura uma variável. Para representá-la, emprega-se a notação ϕx quando não está especificada a sua forma.

3) **Asserção de uma proposição**: para representar tal asserção, emprega-se o símbolo \vdash . A notação $\vdash p$ significa mais do que apenas enunciar p , é afirmar p .

4) **Asserção de uma função proposicional elementar:** a afirmação de um valor indeterminado de tal função.

5) **Negação de uma proposição:** utiliza-se o símbolo \sim , de tal forma que $\sim p$ é a proposição que nega o que p afirma. Outros símbolos podem ser utilizados atualmente para a negação, como \neg (Fajardo, 2023).

6) **Disjunção ou soma lógica de duas proposições:** utiliza-se o símbolo \vee , de tal forma que $p \vee q$ significa p é verdadeira ou q é verdadeira.

Às seis ideias primitivas, soma-se a noção de equivalência por definição, caracterizada pelos sinais $=$ Df, escrito o primeiro entre os seus dois termos (Costa, 1981a).

Além das ideias primitivas, são adicionadas três noções secundárias, definidas em termos destas (Costa, 1981a):

1) **Implicação entre duas proposições:** utiliza-se o símbolo \supset de tal maneira que $p \supset q = \sim p \vee q$ Df, ou seja, dizer que p implica q é equivalente por definição a dizer que a negação de p é verdadeira ou q é verdadeira. Atualmente, outros símbolos podem ser utilizados para a implicação entre duas proposições, como \rightarrow (Fajardo, 2023).

2) **Produto lógico entre duas proposições:** utiliza-se o símbolo \cdot de tal maneira que $p \cdot q = \sim(\sim p \vee \sim q)$ Df, ou seja, o produto lógico $p \cdot q$ é a afirmação simultânea de p e q , equivalente por definição à negação de que p ou q sejam falsos. Para o produto lógico entre as proposições, atualmente, utiliza-se também o símbolo \wedge (Fajardo, 2023).

3) **Equivalência material de duas proposições:** utiliza-se o símbolo \equiv e significa que as duas proposições se implicam reciprocamente, ou seja, $p \equiv q =. p \supset q. q \supset p$ Df. Pode-se ser utilizado, também, o símbolo \leftrightarrow para se referir à equivalência material (Fajardo, 2023).

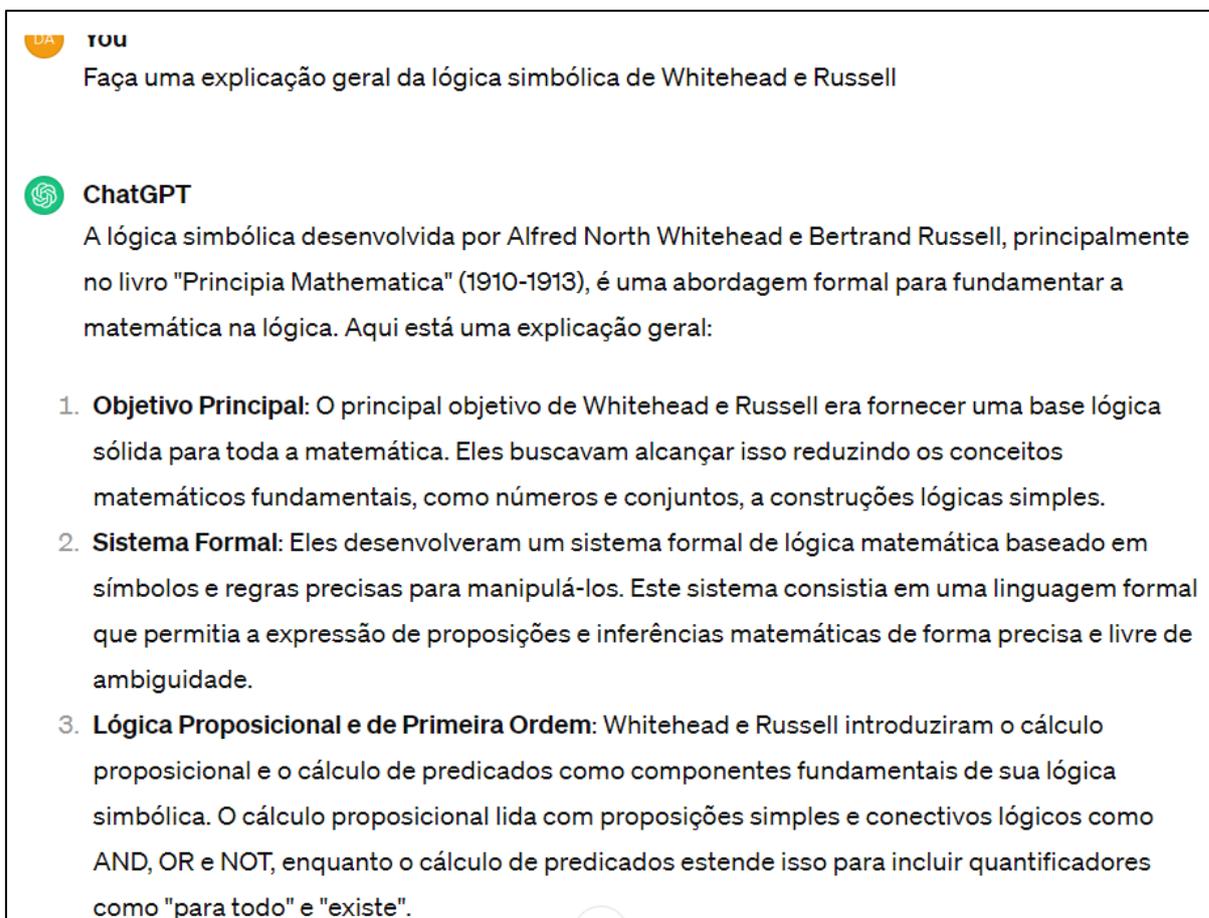
Para conhecer a abordagem do ChatGPT acerca do tema, pediu-se, em abril de 2024, à sua versão gratuita, que o LLM fornecesse uma explicação geral da lógica simbólica de Whitehead e Russell, como é possível verificar nas Figuras 7 e 8.

O modelo de linguagem iniciou sua resposta com um parágrafo introdutório demonstrando ter entendido o que foi solicitado, citando os nomes dos autores e a obra desenvolvida por eles, *Principia Mathematica*, que foi citada por Costa (1981a).

O ChatGPT desenvolveu sua resposta em forma de tópicos, de maneira lógica e bem-organizada (Rudolph; Tan; Tan, 2023), separando em:

1. **Objetivo principal:** neste tópico, o *chatbot* afirma que o principal objetivo de Whitehead e Russell era o de fornecer uma base sólida para toda a Matemática, reduzindo conceitos matemáticos fundamentais a construções lógicas simples, o que vai ao encontro de Costa (1981a);

Figura 7 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT acerca da lógica simbólica de Whitehead e Russell



Fonte: dados da pesquisa (2024).

2. **Sistema formal:** aqui, o ChatGPT escreve sobre os símbolos e regras descritos por Whitehead e Russell e como esse sistema permitia a expressão de proposições e inferências matemáticas de forma precisa, ou, conforme Costa (1981a), ganhando em simplicidade e rigor em ideias matemáticas abstratas e complexas;

3. Lógica proposicional e de primeira ordem: neste item, o ChatGPT atribui a Whitehead e Russell a introdução do cálculo proposicional e do cálculo de predicado e cita três das ideias adotadas pelos autores segundo Costa (1981a), a negação de uma proposição (à qual o ChatGPT se refere como “NOT”), a disjunção ou soma lógica (à qual o LLM se refere como “OR”) e o produto lógico (ao qual o modelo se refere como “AND”), além de citar também os quantificadores existencial e universal do cálculo de predicados que seriam citados posteriormente e de maneira menos abrangente em Costa (1981a);

Figura 8 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT acerca da lógica simbólica de Whitehead e Russell

4. **Teoria dos Tipos:** Uma das contribuições mais importantes de Whitehead e Russell foi a introdução da teoria dos tipos. Essa teoria foi desenvolvida para evitar paradoxos, como o paradoxo de Russell, que surgem quando tentamos aplicar a lógica a si mesma. A teoria dos tipos classifica entidades lógicas em diferentes níveis ou tipos, restringindo certas operações lógicas para evitar contradições.
5. **Complexidade e Rigor:** O sistema de Whitehead e Russell foi notável pela sua complexidade e rigor. Eles desenvolveram uma hierarquia de tipos lógicos e estabeleceram axiomas e regras de inferência para garantir que todo o sistema fosse consistente e livre de contradições.
6. **Impacto e Legado:** "Principia Mathematica" teve um impacto duradouro no desenvolvimento da lógica matemática e da filosofia. Embora algumas partes de sua abordagem tenham sido posteriormente revisadas ou aprimoradas, o trabalho de Whitehead e Russell foi fundamental para estabelecer as bases para a lógica simbólica moderna e para a compreensão da relação entre lógica e matemática.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

4. Teoria dos tipos: aqui, o modelo de linguagem afirma que a teoria dos tipos foi uma das principais contribuições de Whitehead e Russell e explica que ela foi criada para evitar paradoxos, como o paradoxo de Russell, que, segundo o ChatGPT surge quando a lógica é aplicada sobre si mesma. Pode-se ler sobre esse tópico em Whitehead e Russell (1963a), quando afirmam que a Teoria dos Tipos Lógicos se destaca por sua aptidão em solucionar determinadas contradições, dentre as quais a mais notória no âmbito matemático é a de Burali-Forti, relacionada ao conceito do maior número ordinal. Além disso, a teoria apresenta uma coerência intrínseca com o senso comum, o que contribui para sua maior plausibilidade e aceitação. Ou seja, a Teoria dos Tipos Lógicos exposta em *Principia mathematica* é mais ampla do que o exposto pelo ChatGPT, não sendo aplicada somente a paradoxos surgidos da

aplicação da lógica sobre si mesma, como, de maneira bastante simplificada, é o caso do paradoxo de Russell (Morais, 2018);

5. **Complexidade e rigor:** neste tópico, o ChatGPT escreve novamente sobre o sistema de Whitehead e Russell e sobre a complexidade e o rigor que ele apresentava, escrevendo mais sobre o item 2 de sua resposta.

6. **Impacto e legado:** neste item, o LLM cita o impacto da obra *Principia mathematica* no desenvolvimento da lógica matemática e da filosofia, sendo fundamental na compreensão da relação entre a lógica e a Matemática e no estabelecimento das bases para a lógica simbólica moderna, indo ao encontro dos escritos de Abar (2004), Fajardo (2023) e Costa (1981a).

Segundo Costa (1981a), a partir do sistema de noções primitivas e derivadas desenvolvido, Whitehead e Russell estabeleceram dez postulados, que seriam as leis da lógica dedutiva. São eles

[...] (A abreviação P_p designa sempre uma proposição primitiva; a numeração das proposições, que aqui reproduzimos, é feita pelo sistema das frações decimais).

1.1 Tudo o que uma proposição elementar verdadeira implica é verdadeiro.

P_p .

1.11 Se ϕx e ψx são funções proposicionais; se se afirma ϕx ; se se afirma também que ϕx implica ψx , então também ψx pode ser afirmada. P_p .

Este segundo postulado completa o primeiro, cuja extensão é limitada.

1.2. $\vdash : p \vee p . \supset . p$ P_p

(princípio de *tautologia*)

1.3. $\vdash : q . \supset . p \vee q$ P_p

(princípio de *adição*)

1.4. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ P_p

(princípio de *permutação*)

1.5. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ P_p

(princípio de *associação*)

1.6. $\vdash : q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ P_p

(princípio de *somação*)

1.7. Se p é uma proposição elementar, $\sim p$ é uma proposição elementar. P_p .

1.71 Se p e q são proposições elementares, $p \vee q$ é uma proposição elementar.

P_p .

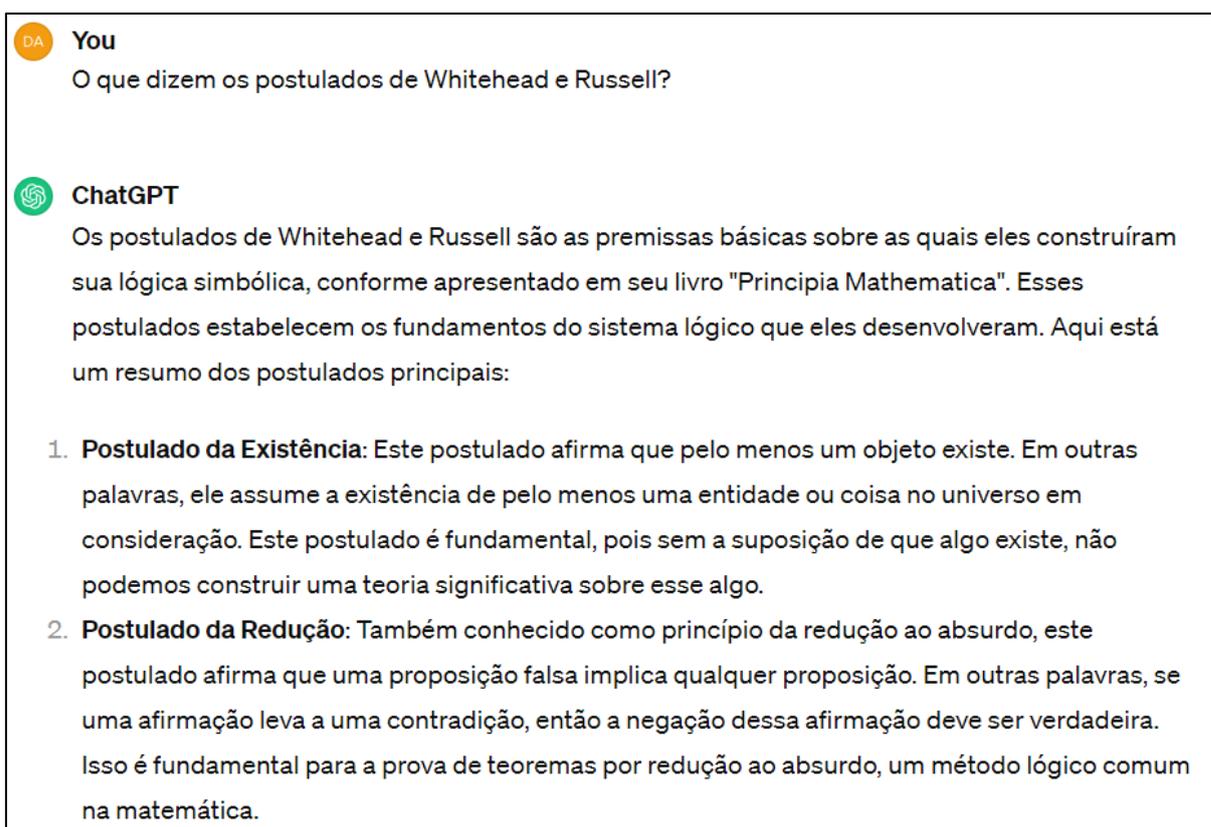
1.72 Se ϕp e ψp são funções proposicionais elementares, tendo para argumentos proposições elementares, então $\phi p \vee \psi p$ é uma função proposicional elementar. P_p (Costa, 1981a, p. 211, grifos do autor).

Segundo Costa (1981a), a partir desses 10 postulados, obter-se-ia como teoremas os princípios da lógica clássica, entre eles “o do *terceiro excluído*: $\vdash . p \vee \sim p$; o de *contradição*: $\vdash . \sim(p \cdot \sim p)$; o do *silogismo* (mais precisamente, o silogismo *em Barbara*): $\vdash : p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$ ” (Costa, 1981a, p. 212, grifos do autor).

Então, para dar conta de determinados raciocínios, faz-se necessária a introdução de duas novas ideias primitivas: a função proposicional verdadeira para todos os valores possíveis da variável e a função proposicional verdadeira para certos valores da variável (Costa, 1981a), com a introdução dos quantificadores universal e existencial supracitados.

Nas Figuras 9 e 10, é exposta a resposta do ChatGPT para a pergunta pertinente ao tema “O que dizem os postulados de Whitehead e Russell?”, realizada em abril de 2024 à sua versão gratuita, na qual o LLM volta a citar a obra *Principia mathematica* e afirma que tais postulados estabelecem os fundamentos lógicos do sistema desenvolvido por esses autores.

Figura 9 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, o modelo de linguagem resume quatro postulados que considera os principais:

1. **Postulado da existência:** segundo o ChatGPT, este postulado afirma que existe ao menos um objeto;

2. **Postulado da redução:** em que se afirma que uma proposição falsa implica qualquer proposição;

3. **Postulado da unidade da ciência:** no qual se afirma que todas as ciências têm a base lógica em comum;

4. **Postulado da trivialidade:** nele, afirma-se que uma proposição é verdadeira se esta não nega a existência de nada.

Pode-se verificar que a resposta formulada pelo ChatGPT não possui qualquer relação com os postulados citados por Costa (1981a). O segundo postulado citado pelo LLM, o da redução ao absurdo, inclusive, pode ser encontrado em Whitehead e Russell (1963b) como um princípio, que, diferentemente de um postulado, não apenas pode ser demonstrado como de fato o é pelos autores em questão.

Há, no quarto postulado citado, inclusive um erro gramatical, em que é citado o “Postulado *do* Trivialidade”, quando *trivialidade* é um substantivo feminino (Trivialidade, 2024).

Figura 10 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell

3. **Postulado da Unidade da Ciência:** Este postulado afirma que todas as ciências compartilham uma base lógica comum. Isso sugere que os princípios lógicos que regem a matemática são os mesmos que regem outras ciências, como física, biologia e química. Assim, a lógica simbólica desenvolvida por Whitehead e Russell pretendia fornecer uma base unificada para todas as áreas do conhecimento.

4. **Postulado do Trivialidade:** Este postulado afirma que uma proposição é verdadeira se não nega a existência de nada. Em outras palavras, se uma proposição não afirma nada de substancial ou se seu conteúdo é "vazio", então essa proposição é considerada verdadeira. Este postulado é importante para distinguir entre afirmações significativas e afirmações triviais ou sem conteúdo substancial.

Esses postulados fornecem os alicerces básicos sobre os quais Whitehead e Russell construíram seu sistema lógico em "Principia Mathematica". Eles foram formulados para estabelecer os princípios fundamentais da lógica e da investigação racional.

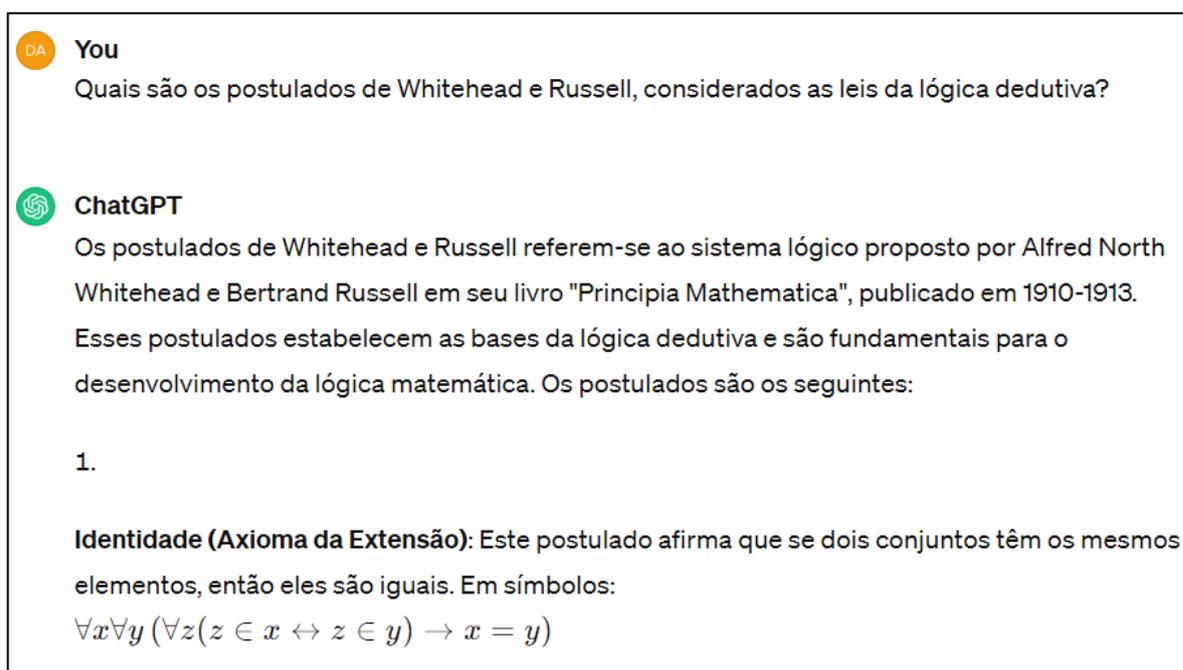
Fonte: dados da pesquisa (2024).

Devido à maneira abrangente como a pergunta exposta nas figuras anteriores foi feita, optou-se, ainda no mesmo mês, por perguntar novamente ao ChatGPT pelos

postulados de Whitehead e Russell, dessa vez, da exata maneira como aparece citado por Costa (1981a).

Da mesma maneira, o ChatGPT cita a obra de Whitehead e Russell e explica que os postulados desenvolvidos pelos autores estabelecem as bases da lógica dedutiva para, adiante, expor os que seriam estes postulados, como é possível verificar nas Figuras 11 e 12.

Figura 11 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell que são considerados as leis da lógica dedutiva



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Verifica-se que, ainda com a mudança na formulação da pergunta, o ChatGPT lista três postulados que seriam considerados as leis da lógica dedutiva. Entretanto, nenhum dos três está presente entre aqueles citados por Costa (1981a) e escritos por Whitehead e Russell (1963b).

Cita-se o axioma da extensão, o axioma da unidade e o axioma da potência que, dadas as definições do ChatGPT, são axiomas existentes, mas que, segundo Santos (2014), pertencem à Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), que é inclusive citado no final da resposta do LLM.

Figura 12 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre os postulados de Whitehead e Russell que são considerados as leis da lógica dedutiva

2.

Existência (Axioma da Unidade): Este postulado afirma que sempre existe um conjunto vazio. Em símbolos:

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

3.

Conjunto de potência (Axioma da Potência): Este postulado afirma que para todo conjunto existe um conjunto que contém todos os subconjuntos desse conjunto. Em símbolos:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Estes postulados, juntamente com os axiomas da Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), formam a base da matemática moderna e da lógica dedutiva.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

3.2 A evolução histórica da noção de número

Neste subcapítulo, se aborda a evolução histórica da noção de número, conforme Costa (1981b), dividindo-a em cinco temas: *os números naturais; os números fracionários; os números irracionais; os números negativos; e os números complexos.*

Todas as interações com o ChatGPT expostas neste subcapítulo foram realizadas em dezembro de 2024 com a sua versão paga.

3.2.1 Os números naturais

Segundo Costa (1981b), o número natural tem sua origem da necessidade de comparação de grandezas discretas. As combinações dessas grandezas deram início à ideia de operação sobre os números. A prática da adição e o conhecimento

razoavelmente claro de suas propriedades fazem parte da atividade mental elementar. Essa operação é a gênese do pensamento matemático.

Trabalhando-se apenas com a adição, os números naturais se fazem suficientes, desde que tenha sido inventado um sistema de numeração (Costa, 1981b).

De acordo com o autor, documentos de fontes babilônica e egípcia revelam que os processos de cálculo (adição, multiplicação, subtração e determinação de quadrados e cubos) datam de épocas muito remotas. Segundo Costa (1981b), as tábuas babilônicas surgiram aproximadamente no ano 2300 a.C. e empregavam os sistemas de numeração decimal e sexagesimal e, nelas, os cálculos tinham finalidades meramente utilitárias, como medidas, trocas comerciais e combinações do calendário.

É na escola de Pitágoras que é constituída uma ciência do número puro, separando os números como auxiliares do cálculo dos números por si mesmos, como entidades abstratas, com propriedades que mereciam um estudo próprio (Costa, 1981b).

De acordo com Costa (1981b), essas especulações da escola de Pitágoras dão os fundamentos à teoria dos números, embora seja incontestável que a origem da noção de número está ligada a fins práticos e que só muito mais tarde que essa noção adquiriu forma lógica.

Para analisar a abordagem do ChatGPT quanto à origem dos números racionais, as Figuras 13, 14, 15 e 16 expõem sua resposta quando questionado sobre como se deu essa origem.

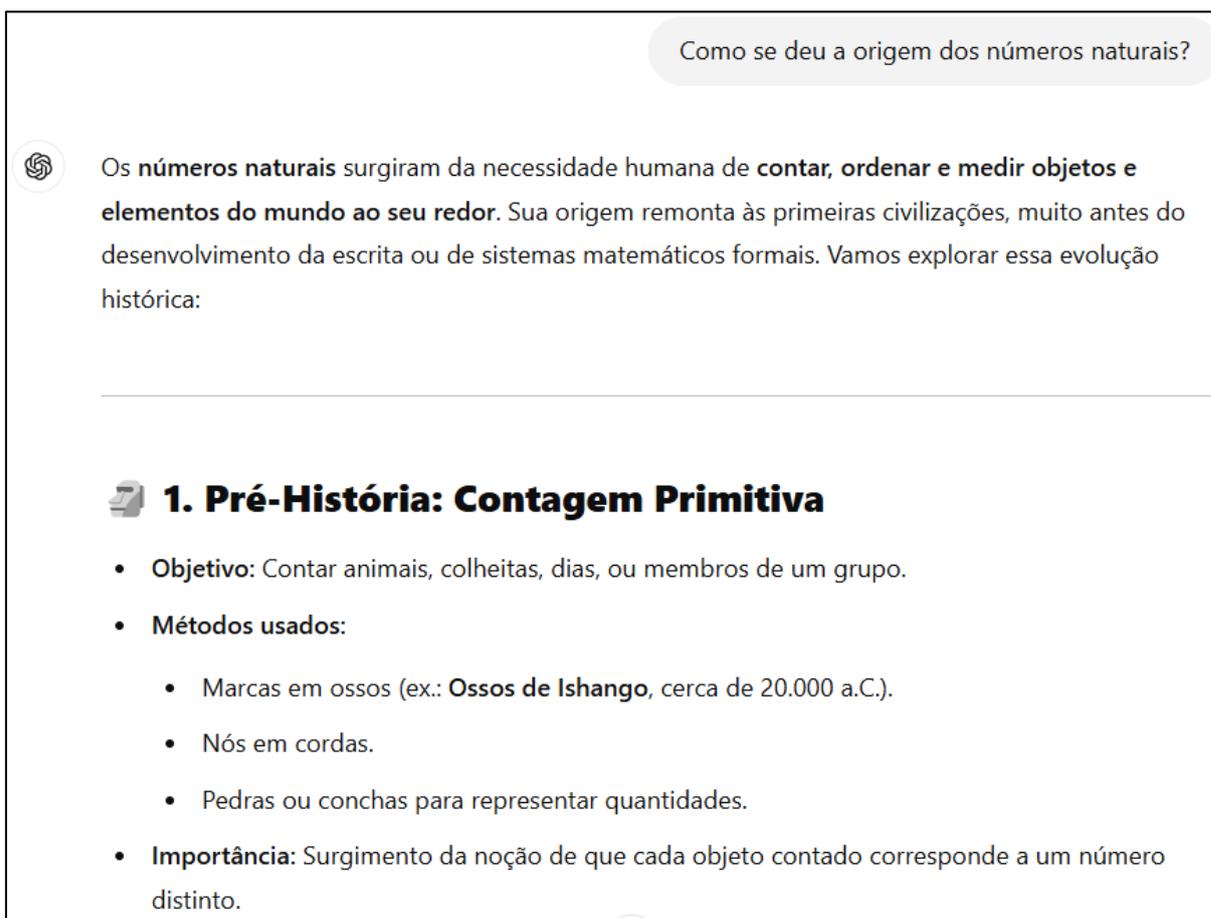
O modelo de linguagem iniciou sua resposta indicando que os números naturais surgiram da necessidade humana de contar, ordenar e medir objetos e elementos do mundo, citando que essa origem é anterior inclusive à origem da escrita. Essa afirmação vai ao encontro de Costa (1981b) e Launay (2021).

Em seguida, a ferramenta elenca alguns períodos na história, iniciando pela pré-história, quando o objetivo seria de contar animais, colheitas, dias ou membros de um grupo, os métodos utilizados seriam as marcas em ossos, nós em cordas e pedras ou conchas para simbolizar quantidades. Segundo Launay (2021), os ossos de

Ishango foram encontrados em 1950 à beira do lago Eduardo, na República Democrática do Congo, e se trata do mais antigo vestígio de escrita de números.

Na sequência, o ChatGPT cita as civilizações antigas, em que teria ocorrido o desenvolvimento de sistemas numéricos. Na Mesopotâmia, utilizavam o sistema sexagesimal; no Egito Antigo desenvolveram símbolos para representar números específicos; na China Antiga utilizavam varetas e sistemas decimais rudimentares; e os maias criaram sistemas de numeração com base 20. Launay (2021) corrobora com isso, indicando que na Mesopotâmia, eram utilizadas fichas que representavam números que, embora não fossem exatamente uma base sexagesimal, possuíam uma referência no número 60; que, devido à proximidade com a Mesopotâmia, os egípcios logo desenvolveram seus símbolos próprios para representar algumas quantidades; e que, de fato, os maias criaram sistemas de numeração por posições, de base 20.

Figura 13 - Primeira captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais



Como se deu a origem dos números naturais?

Os **números naturais** surgiram da necessidade humana de **contar, ordenar e medir objetos e elementos do mundo ao seu redor**. Sua origem remonta às primeiras civilizações, muito antes do desenvolvimento da escrita ou de sistemas matemáticos formais. Vamos explorar essa evolução histórica:

1. Pré-História: Contagem Primitiva

- **Objetivo:** Contar animais, colheitas, dias, ou membros de um grupo.
- **Métodos usados:**
 - Marcas em ossos (ex.: **Ossos de Ishango**, cerca de 20.000 a.C.).
 - Nós em cordas.
 - Pedras ou conchas para representar quantidades.
- **Importância:** Surgimento da noção de que cada objeto contado corresponde a um número distinto.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Então, o LLM lista a Grécia Antiga, com Pitágoras acreditando que os números seriam a essência do universo, Euclides definindo formalmente os números naturais como parte da Matemática e Aristóteles diferenciando os números finitos e infinitos. Launay (2021, p. 35-36), no que diz respeito à afirmação da ferramenta relacionada a Pitágoras, afirma que

No século VI antes de Cristo, Pitágoras fazia deles [os números] o conceito fundamental de sua filosofia. “Tudo é número”, afirma o filósofo grego. Segundo ele, são os números que geram figuras geométricas, que por sua vez engendram os quatro elementos da matéria: fogo, água, terra e ar, que compõem todos os seres. [...]

Figura 14 - Segunda captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais

 **2. Civilizações Antigas: Desenvolvimento de Sistemas Numéricos**

- **Mesopotâmia (3.000 a.C.):** Usaram a base 60, que influenciou nosso sistema de tempo.
- **Egito Antigo:** Desenvolveram símbolos para números específicos.
- **China Antiga:** Usavam varetas e sistemas decimais rudimentares.
- **Maia:** Criaram sistemas com base 20.

Cada civilização desenvolveu símbolos específicos para representar quantidades, estabelecendo os primeiros sistemas numéricos.

 **3. Grécia Antiga e Filosofia Matemática**

- **Pitágoras (570–495 a.C.):** Acreditava que os números eram a essência do universo.
- **Euclides:** Definiu formalmente os números naturais como parte da matemática.
- **Aristóteles:** Diferenciou números finitos de infinitos.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Na sequência, o ChatGPT escreveu sobre a Índia com relação à criação do zero e os algarismos indo-árabicos, que foram levados ao Ocidente pelos árabes. Isso vai ao encontro de Launay (2021), que atribui a Bhaskara a primeira utilização do zero em forma de círculo e a primeira utilização científica do sistema decimal ainda hoje utilizado.

Em seguida, o modelo de linguagem menciona a definição formal moderna, citando que Giuseppe Peano formalizou os números naturais utilizando os axiomas de Peano, em que se diz que zero é um número natural; cada número tem um sucessor único; e zero não é o sucessor de nenhum número natural. Entretanto, é possível verificar em Peano (1889) que, seus axiomas, entre outros, dizem que um é número natural; cada número tem um sucessor único; e não há número natural cujo sucessor seja um. Ou seja, na definição de Peano (1889), o zero não pertence ao conjunto dos números naturais.

Figura 15 - Terceira captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais

4. Índia e a Contribuição dos Algarismos Indo-Arábicos

- **Matemáticos Indianos (cerca de 500 d.C.):** Criaram o sistema decimal posicional e introduziram o símbolo zero (0) como um número.
- **Sistema Indo-Arábico:** Foi posteriormente adotado pelos árabes e levado para a Europa.

5. Definição Formal Moderna (séc. XIX)

- **Giuseppe Peano (1858–1932):** Formalizou os números naturais usando os **Axiomas de Peano**, que definem:
 1. 0 é um número natural.
 2. Cada número tem um sucessor único.
 3. 0 não é sucessor de nenhum número natural.

Esses axiomas estabeleceram uma base lógica sólida para os números naturais.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Para finalizar, o ChatGPT escreve um resumo de sua resposta.

Figura 16 - Quarta captura de tela da resposta do ChatGPT sobre a origem dos números naturais

 **Resumo da Evolução**

1. **Contagem primitiva** com objetos físicos.
2. **Símbolos numéricos** nas civilizações antigas.
3. **Sistema decimal indiano e o zero.**
4. **Formalização lógica com os axiomas de Peano.**

Os números naturais surgiram, portanto, de uma necessidade prática, evoluíram através de diferentes culturas e foram formalizados pela matemática moderna.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Verifica-se que o ChatGPT, embora tenha alucinado (Cortiz, 2023; Jančařík; Dušek, 2024) em alguns trechos de sua resposta, demonstrou ter compreendido a pergunta e apresentou uma resposta com uma abordagem lógica e bem-organizada (Rudolph; Tan; Tan, 2023), com períodos e localizações bem definidas e um resumo de tudo ao final.

3.2.2 Os números fracionários

Segundo Costa (1981b), a criação dos números fracionários se dá pelos objetos que podem ser subdivididos ou de grandezas contínuas, como a distância e o tempo.

De acordo com o autor, é exposto no manual redigido por Ahmes que os egípcios já praticavam o cálculo das frações. No papiro, que antecede Tales de Mileto em pelo menos um século, pode ser encontrada uma tábua para a decomposição de frações em soma de frações unitárias. Segundo Costa (1981b), caracteriza esse papiro a ausência de considerações teóricas, com as operações sendo desenvolvidas sem qualquer justificção.

A teoria das frações, por outro lado, é muito mais recente que o seu uso, sendo Diofanto de Alexandria um precursor, no século III, tendo os geômetras – entre os

quais, Euclides – considerado as frações como símbolos de relações entre números (Costa, 1981b).

Mais tarde, na Índia, por volta do século VI, foi desenvolvido o cálculo das frações, que só chegaria ao Ocidente através dos árabes, só aparecendo um milênio mais tarde na *Aritmética* de Stevin, uma exposição do cálculo dos *numeri rupti* (números quebrados, tradução nossa; Costa, 1981b).

Para explorar a abordagem do ChatGPT sobre esse tópico, perguntou-se sobre como se deu a criação dos números fracionários e o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos, como mostram as Figuras 17, 18, 19, 20, 21 e 22.

Em sua resposta, o modelo de linguagem lista diversos momentos históricos e civilizações, a começar pelo Egito Antigo, em que utilizavam símbolos especiais para representar as frações, citando o papiro de Rhind, também conhecido como papiro de Amósis ou Ahmes, o que vai ao encontro de Costa (1981b).

Figura 17 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos

Como se deu a criação dos números fracionários e o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos?



A criação dos números fracionários e o desenvolvimento de sua teoria e cálculos têm uma longa história que atravessa várias civilizações e períodos históricos. Vamos explorar os principais momentos dessa evolução:

 **1. Civilizações Antigas**

Egito Antigo (c. 2000 a.C.)

- Os egípcios foram uma das primeiras civilizações a usar frações, principalmente frações unitárias (frações com numerador 1, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$).
- O **Papiro de Rhind** (c. 1650 a.C.) contém problemas que envolvem frações, especialmente relacionadas à distribuição de alimentos e cálculos de áreas.
- Eles usavam símbolos especiais para representar frações.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, o ChatGPT cita a Babilônia, onde, segundo o modelo de linguagem, utilizavam um sistema de numeração sexagesimal muito avançado para cálculos de astronomia e medições precisas. Essa afirmação vai ao encontro de Roque (2012).

Na sequência, o LLM afirma que os chineses utilizavam as frações no comércio e na engenharia e que o livro '*Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*' apresenta operações com frações.

Na Grécia Antiga, segundo o ChatGPT, a escola de Pitágoras estudou relações numéricas e proporções que dependiam de frações. Além disso, o modelo indica que Euclides, em '*Elementos*', tratou de proporções e razões geométricas, o que pode ser confirmado em Euclides (2009).

Então, o modelo de linguagem lista a Era Islâmica, entre os séculos VIII e XIII, citando que matemáticos como Al-Kwharizmi e Al-Kashi deram importantes contribuições para o estudo das frações, além desse período ser marcado pelo uso extensivo das frações em álgebra e trigonometria, tendo os árabes introduzido símbolos mais padronizados para o numerador e o denominador. Boyer (1974) indica que Al-Kashi é uma figura importante na história das frações decimais, tendo se considerado o inventor destas.

O terceiro item da lista do ChatGPT é a Europa Medieval e o Renascimento, citando que o conhecimento foi expandido pelos matemáticos islâmicos, com a tradução dos textos do árabe para o latim sendo primordial para que a utilização das frações na Europa fosse ampliada, indicando que em *Liber Abaci*, Fibonacci introduziu as frações decimais na Europa, simplificando os cálculos. Entretanto, Boyer (1974, p. 186) afirma que, em *Liber Abaci*, Fibonacci “[...] usou três tipos de frações – comuns, sexagesimais, e unitárias – mas não frações decimais”.

Na Era Moderna, o LLM afirma que Simon Stevin foi pioneiro na popularização das frações decimais com seu livro '*De Thiende*', que as frações decimais passaram a ser aceitas em diversas áreas e que a notação com o numerador acima do denominador e um traço separando-os passou a ser mais utilizada. Roque (2012) indica que Stevin, em '*De Thiende*', defendeu uma representação decimal para os

números fracionários, estendendo os princípios da aritmética com algarismos indo-árabicos para realizar cálculos com esses números, tal qual afirma Costa (1981b).

No quinto item de sua lista, o ChatGPT cita a teoria dos números racionais, atribuindo a matemáticos como Richard Dedekind e Georg Cantor a formalização dos conceitos de números racionais. A ferramenta também atribui a este período a integração da teoria dos números racionais à teoria dos números reais. Entretanto, de acordo com Roque (2012) e Costa (1981b), Dedekind e Cantor foram responsáveis pela formalização dos conceitos dos números irracionais.

Na sequência, o LLM escreve sobre os usos atuais das frações e cita a engenharia, a física, a economia, a computação gráfica e outros. Então, o ChatGPT faz um resumo de toda a sua resposta, demonstrando uma abordagem lógica e bem-organizada (Rudolph; Tan; Tan, 2023).

Figura 18 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos

Mesopotâmia (Babilônia, c. 1900 a.C.)

- Os babilônios usavam um sistema numérico sexagesimal (base 60) para representar frações.
- Esse sistema era muito avançado para cálculos de astronomia e medições precisas.

China Antiga (c. 1000 a.C.)

- Os chineses utilizavam frações no comércio e engenharia.
- O livro "Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática" (c. 200 d.C.) detalha operações com frações, incluindo adição, subtração, multiplicação e divisão.

Grécia Antiga (c. 500 a.C.)

- **Pitágoras** e seus seguidores estudaram relações numéricas e proporções, que dependiam de frações.
- **Euclides**, no livro "Elementos", tratou de proporções e razões geométricas.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 19 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos

2. Era Islâmica (Séculos VIII–XIII)

- Matemáticos islâmicos, como **Al-Khwarizmi** e **Al-Kashi**, deram contribuições significativas ao estudo das frações.
- Frações eram usadas extensivamente em álgebra e trigonometria.
- Introduziram símbolos mais padronizados para numeradores e denominadores.

3. Europa Medieval e Renascimento

- Durante a Idade Média, o conhecimento matemático foi preservado e expandido por matemáticos islâmicos.
- Com a tradução de textos árabes para o latim, matemáticos europeus, como **Fibonacci**, começaram a usar frações mais amplamente.
- O livro "**Liber Abaci**" (1202) de Fibonacci introduziu frações decimais na Europa, o que simplificou muitos cálculos.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 20 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos

4. Era Moderna (Séculos XVI–XVIII)

- **Simon Stevin** (1585) foi pioneiro na popularização das frações decimais com seu livro "De Thiende".
- Frações decimais começaram a ser aceitas no comércio, ciências e engenharia.
- A notação padrão moderna de frações, com numerador sobre denominador separados por uma linha, tornou-se amplamente utilizada.

5. Teoria dos Números e Frações

- No século XIX, matemáticos como **Richard Dedekind** e **Georg Cantor** formalizaram os conceitos de números racionais (\mathbb{Q}).
- Frações passaram a ser rigorosamente definidas como o quociente de dois números inteiros, com o denominador diferente de zero.
- A teoria dos números racionais foi integrada à teoria dos números reais (\mathbb{R}).

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 21 - Quinta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos

6. Uso Atual e Aplicações

- Frações são usadas em diversos campos: engenharia, física, economia, computação gráfica, etc.
- As frações decimais tornaram-se mais comuns no uso diário devido às calculadoras e computadores.
- A teoria das frações ainda desempenha um papel importante em algoritmos computacionais e criptografia.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 22 - Sexta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação dos números fracionários, o desenvolvimento de sua teoria e seus cálculos

 **Resumo da Evolução**

1. **Egípcios:** Frações unitárias.
2. **Babilônios:** Sistema sexagesimal.
3. **Chineses:** Cálculos sistemáticos com frações.
4. **Gregos:** Teoria geométrica de proporções.
5. **Islâmicos:** Padronização de símbolos e expansão do conhecimento.
6. **Fibonacci:** Frações decimais na Europa.
7. **Simon Stevin:** Popularização das frações decimais.
8. **Matemáticos modernos:** Formalização com números racionais.

Essa jornada mostra como a necessidade prática, como comércio e construção, impulsionou a criação e o desenvolvimento dos números fracionários. Ao longo do tempo, os matemáticos refinaram esses conceitos, transformando-os em uma parte fundamental da matemática moderna.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

3.2.3 Os números irracionais

De acordo com Costa (1981b), a mais singular descoberta da escola de Pitágoras foi a dos números incomensuráveis, uma vez que os geômetras acreditavam que, a cada relação entre grandezas geométricas, dever-se-ia corresponder uma relação entre números inteiros.

A primeira descoberta de grandezas incomensuráveis foi realizada pelos pitagóricos na relação entre o lado e a diagonal de um quadrado e a demonstração de sua incomensurabilidade, que é vista em Euclides, mas que, segundo Aristóteles, já era conhecida de Pitágoras, é uma fusão entre o rigor lógico e a intuição geométrica, se dando pela redução ao absurdo (Costa, 1981b).

De acordo com o autor, tal demonstração leva em conta que, se a diagonal é comensurável ao lado do quadrado, a relação entre os dois comprimentos pode ser posta na forma de uma fração irredutível a/b , em que a e b são números naturais.

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se que $a^2=2b^2$ e, portanto, a^2 é um número par, significando que a também o é e, então, b deve ser ímpar, uma vez que a e b devem ser primos entre si para que a fração a/b seja irredutível. Entretanto, a sendo par, pode-se considerar que $a=2a'$ e, então, $a^2=4a'^2=2b^2 \Leftrightarrow b^2=2a'^2$, ou seja, b deve ser par. Assim, da hipótese da comensurabilidade do lado com a diagonal do quadrado resulta uma contradição. Não há número natural ou racional cujo quadrado seja igual a dois e, no entanto, há grandezas cuja relação é igual à raiz quadrada de dois.

Desse fato, os pitagóricos não conseguiram tirar a conclusão de ampliar a noção de número. Na verdade, os gregos nunca chegaram a uma definição clara dos números irracionais (Costa, 1981b). O autor enfatiza, entretanto, que, para fins práticos, essa noção é inútil.

Segundo Costa (1981b), a logística grega utilizava de números racionais muito próximos dos valores reais nos cálculos realizados para geometria e astronomia. De acordo com o autor, Arquimedes inventou métodos para a construção de duas sequências de números racionais de termos respectivamente superiores e inferiores ao irracional considerado, de forma a aproximar-se deste tanto quanto se queira. Essa é a origem da noção de número irracional definido como um limite de sequências de números racionais (Costa, 1981b).

No entanto, somente no período da decadência, quando já não havia mais distinção entre a logística e a aritmética pura, que se encontrou, em Diofanto de Alexandria, a expressão '*número não-racional*' (Costa, 1981b).

No século XII, os hindus já utilizavam notações como $\sqrt{2}$ representando números e essas inovações chegaram ao Ocidente pelas invasões árabes (Costa, 1981b).

Na fase final da Idade Média, os matemáticos chamavam as expressões nas quais figuravam radicais de *numeri surdi* (números surdos, tradução nossa), mas não foram capazes de aperfeiçoar a sua teoria (Costa, 1981b).

Segundo Costa (1981b), em 1544, Stifel, em sua *Arithmetica integra*, suspeita a analogia entre os *numeri surdi* e os números racionais, sem, entretanto, chegar a admitir os primeiros como números verdadeiros. Tratava-se os números irracionais como fictícios, resultados de cálculos que conduzem a racionais inexatos.

É devido a Descartes a mudança de orientação, pelo abandono do ponto de vista de seus predecessores. De acordo com Costa (1981b), Descartes fez a observação de que o resultado de um cálculo qualquer, se efetuado sobre quantidades que sejam representadas por grandezas retilíneas, pode ser representado por uma grandeza retilínea. Assim, Descartes estabeleceu a identidade das operações sobre grandezas e das operações sobre números, do cálculo geométrico e do cálculo algébrico.

Então, o número irracional já não parece a Descartes que deva ser considerado como *numerus fictus* (número falso, tradução nossa), mas, sim, como *numerus verus* (número real, tradução nossa). Segundo Costa (1981b), essa é a origem da noção mais ampla do número real, abrangendo os números racionais e todas as classes de números irracionais. De acordo com o autor, essa ideia de Descartes é tão essencial em sua obra geométrica quanto o método das coordenadas.

Ressalta-se que, só no final do século XIX, a ideia de número irracional ganhou sentido geral, rigoroso e puramente aritmético, sem necessária intuição geométrica (Costa, 1981b). O ponto de vista cartesiano ainda é o do número como medida de grandeza, em que os números reais se concebem como medidas de um segmento de reta, na qual se escolhem uma origem e um segmento unidade, e os irracionais correspondem aos segmentos incomensuráveis ao segmento unidade (Costa, 1981b).

Segundo o autor, essa interpretação geométrica ainda apresentava uma dificuldade, pois é necessário demonstrar que é possível efetuar as operações da aritmética, cujas regras foram estabelecidas para os números racionais, para todos os números reais, ou seja, que, a cada número irracional, corresponde de fato um segmento. Para isso, é necessária a noção de continuidade geométrica, que se verifica em um postulado conhecido como postulado de Cantor-Dedekind (Costa, 1981b).

Assim, a noção de número real (classe das classes de números racionais e irracionais) adquire, pouco a pouco, um sentido rigoroso. Tendo sua origem na consideração das grandezas contínuas, o número real constitui-se, finalmente, como anterior à noção de grandeza (Costa, 1981b).

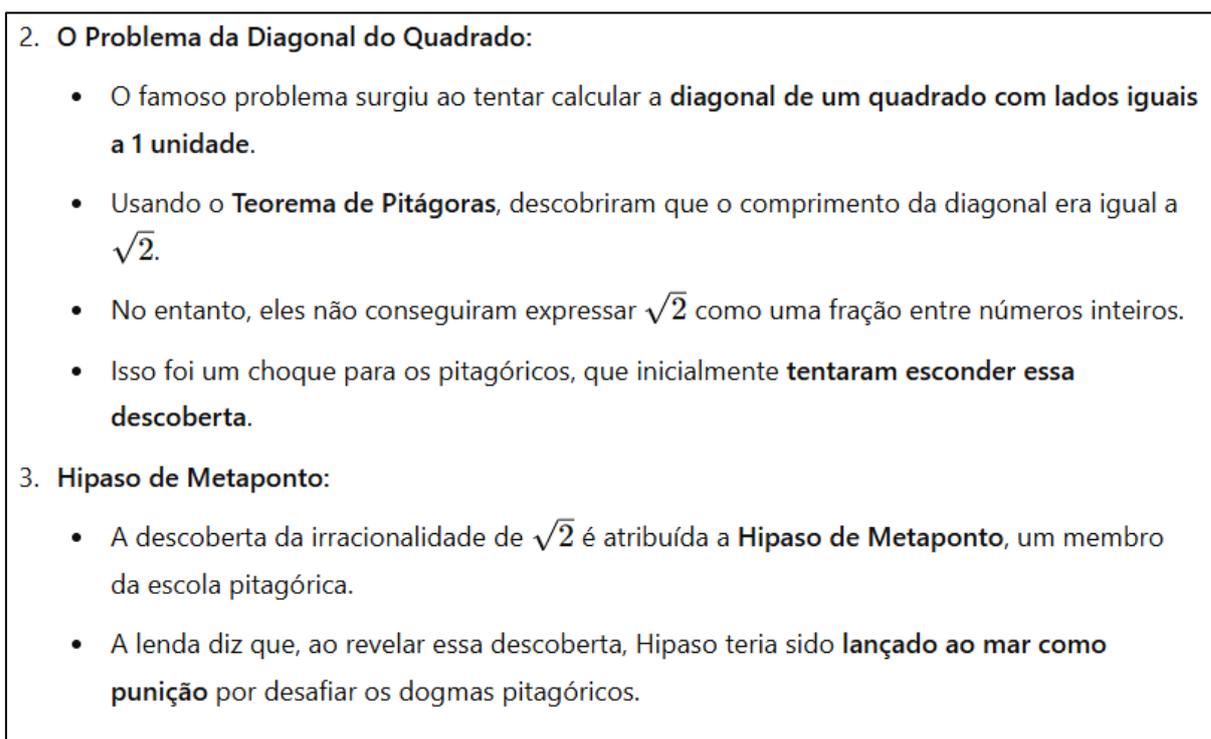
Perguntou-se ao ChatGPT sobre a origem dos números irracionais, como mostram as Figuras 23, 24, 25 e 26.

Figura 23 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 24 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais



Fonte: dados da pesquisa (2024).

O modelo de linguagem inicia sua resposta indicando que a origem dos números irracionais remonta à Grécia Antiga, quando matemáticos começaram a perceber que nem todos os números eram comensuráveis. Esta afirmação está de acordo com Costa (1981b), que atribui a descoberta à escola de Pitágoras.

Figura 25 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais

 **Matematização dos Números Irracionais**

- Com o passar do tempo, matemáticos como **Euclides** formalizaram a existência dos números irracionais.
- No livro "**Elementos**", Euclides provou matematicamente que $\sqrt{2}$ **não pode ser escrito como uma fração**.

 **Exemplos de Números Irracionais**

1. $\sqrt{2}$
2. π (número pi)
3. e (número de Euler)
4. A proporção áurea (ϕ)

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, o ChatGPT estende sua resposta, iniciando por Pitágoras e os pitagóricos, atribuindo a estes a crença de que tudo poderia ser explicado por números racionais.

Então, o LLM expõe que a questão dos números irracionais veio à tona a partir do cálculo da medida da diagonal do quadrado, que é incomensurável à medida de seu lado. Na sequência, o ChatGPT atribui a Hipaso de Metaponto, membro da escola pitagórica, a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

A ferramenta cita, ainda, que, posteriormente, matemáticos como Euclides formalizaram a existência dos números irracionais, tendo o grego demonstrado a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o que pode ser verificado em Costa (1981b).

Para finalizar, o ChatGPT ainda elencou exemplos de números irracionais e citou a importância destes na história.

Figura 26 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a origem dos números irracionais

 **Importância dos Números Irracionais**

- Eles ampliaram significativamente a compreensão dos números e foram cruciais para o desenvolvimento de áreas como **geometria, álgebra e cálculo**.
- Os números irracionais provaram que a reta numérica é "**contínua**" e que existem infinitos números entre quaisquer dois números racionais.

Essa descoberta não apenas revolucionou a matemática, mas também moldou nossa visão do universo como algo **infinitamente complexo e não totalmente racionalizável**.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Ao LLM, também se perguntou sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais, como mostram as Figuras 27, 28 e 29.

O modelo de linguagem iniciou sua resposta ressaltando que a contribuição de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais não se deu quanto à sua descoberta, mas com um papel fundamental na forma como eles passaram a ser interpretados e representados, o que vai ao encontro de Costa (1981b).

Então, o ChatGPT listou três principais contribuições de Descartes quanto aos números irracionais: a criação da geometria analítica, a representação dos números irracionais como comprimentos e utilização de símbolos como x , y e z para representar variáveis e incógnitas. Verifica-se neste item que o modelo citou a representação dos números irracionais como comprimentos, em acordo com Costa (1981b), e duas contribuições para a Matemática que podem ou não ser envolvidas com números irracionais.

O LLM também citou o impacto do trabalho de Descartes, que permitiu que Newton e Leibniz utilizassem os números irracionais na criação do Cálculo Diferencial e Integral com mais confiança e ressaltou seu papel como criador da geometria analítica. O ChatGPT, então, finalizou sua resposta com um resumo do que foi escrito até então.

Figura 27 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais

Qual foi o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais?

 **René Descartes** (1596–1650), filósofo e matemático francês, desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento dos números irracionais, embora sua contribuição não tenha sido diretamente na descoberta desses números, mas sim na forma como eles passaram a ser interpretados e representados no contexto matemático.

 **Principais Contribuições de Descartes para os Números Irracionais**

1. Geometria Analítica

- Em sua obra "La Géométrie" (1637), um anexo de seu livro mais famoso, "Discurso do Método", Descartes unificou **álgebra** e **geometria**, criando a **geometria analítica**.
- Ele introduziu o uso de **coordenadas cartesianas**, permitindo representar números, inclusive irracionais, como **comprimentos de segmentos de reta**.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 28 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais

 **Exemplo:** A raiz quadrada de um número podia ser representada geometricamente como o comprimento de um segmento obtido a partir de construções geométricas.

2. Representação dos Números Irracionais como Comprimentos

- Descartes mostrou que números irracionais, como $\sqrt{2}$, podiam ser representados geometricamente na reta numérica.
- Antes de Descartes, os números irracionais eram considerados mais como abstrações algébricas. Com ele, passaram a ser entendidos como valores concretos, medidos em segmentos de reta.

3. Símbolos Algébricos

- Descartes também aprimorou a notação algébrica, usando símbolos como x , y , z para representar variáveis e incógnitas.
- Ele estabeleceu um **sistema de equações algébricas** que podia ser resolvido para encontrar raízes, inclusive raízes irracionais.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 29 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o papel de Descartes no desenvolvimento dos números irracionais

Impacto do Trabalho de Descartes

- Ao unificar álgebra e geometria, Descartes forneceu uma ferramenta poderosa para representar e manipular números irracionais com precisão.
- Ele permitiu que matemáticos posteriores, como **Newton** e **Leibniz**, usassem irracionais com mais confiança no desenvolvimento do **Cálculo Diferencial e Integral**.

Resumo do Papel de Descartes

1. Criou a **Geometria Analítica**, unindo álgebra e geometria.
2. Tornou os números irracionais mais concretos ao representá-los geometricamente.
3. Desenvolveu uma notação algébrica mais clara e universal.
4. Abriu caminho para o uso sistemático de números irracionais em cálculos matemáticos avançados.

Assim, **Descartes não descobriu os números irracionais**, mas foi essencial para sua aceitação e uso prático na matemática moderna, integrando-os em estruturas algébricas e geométricas robustas.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

3.2.4 Os números negativos

Segundo Costa (1981b), a noção de número negativo tem sua origem na necessidade de interpretar uma diferença quando o diminuendo é menor que o subtraendo.

Este caso era expressamente excluído pela logística dos gregos. No entanto, Diofanto de Alexandria já não o diferenciava do caso normal e utilizava as regras dos sinais para a multiplicação e para a passagem de um termo de um membro para o outro em uma igualdade (Costa, 1981b).

Os matemáticos hindus, que, segundo Costa (1981b, p. 222), “[...] se caracterizam por uma notável falta de escrúpulo lógico [...]”, calculavam com números negativos já no século VII e, no século XII, já distinguiram os valores positivo e negativo de uma raiz quadrada.

No Ocidente, Nicolas Chuquet, no século XV, deu a primeira interpretação dos números negativos. Entretanto, por muito tempo, os matemáticos ainda hesitavam em aceitá-los, com Cardano chamando-os de *numeri ficti* e Stifel de *numeri absurdi* (números absurdos, tradução nossa), adicionando que eles são menores do que zero (Costa, 1981b).

Por outro lado, Stevin utilizava soluções negativas de equações numéricas e A. Girard, em sua obra *‘Invention nouvelle em l’algèbre’*, explicou que, em geometria, a solução negativa é explicada retrogradando, com o ‘-’ recuando onde o ‘+’ avança (Costa, 1981b).

A partir disso, segundo Costa (1981b), os cartesianos passam a adotar sistematicamente em seus cálculos os números negativos, formulando precisamente as definições necessárias para isso.

De acordo com Costa (1981b), os números negativos são definitivamente aceitos quando os geômetras compreendem que, em certas grandezas (como as distâncias sobre uma reta), é necessário considerar dois sentidos opostos.

Perguntou-se ao ChatGPT sobre como se deu o desenvolvimento dos números negativos, como mostram as Figuras 30, 31, 32 e 33.

O modelo de linguagem iniciou sua resposta indicando que o processo de desenvolvimento dos números negativos foi gradual e durou séculos, não tendo sido aceitos inicialmente por matemáticos, filósofos e comerciantes, por parecerem não possuir aplicação prática. Tal afirmação vai ao encontro de Costa (1981b), que citou a resistência aos números negativos e o seu desenvolvimento durando séculos.

Em seguida, a ferramenta lista as que considera serem as principais etapas desse processo, iniciando pela China, onde o texto *‘Os nove capítulos sobre a arte matemática’* mencionava números negativos e utilizava-os principalmente para representar dívidas, e a Índia, onde matemáticos como Brahmagupta formularam regras claras para operações com números negativos. Boyer (1974) cita em sua obra

que, em ‘*Os nove capítulos sobre a arte matemática*’, no oitavo capítulo, há soluções de problemas sobre equações lineares que utilizam tanto números positivos quanto negativos que, segundo Launay (2021), eram representados, respectivamente, por varetas vermelhas e pretas. Launay (2021) atribui a Brahmagupta a primeira descrição completa dos números negativos, incluindo suas propriedades aritméticas.

Figura 30 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos



Fonte: dados da pesquisa (2024).

A segunda etapa listada pelo ChatGPT foi a relutância na aceitação na Europa medieval, onde os matemáticos não aceitavam os números negativos, tendo esta ideia começado a circular lentamente após a tradução dos textos árabes e indianos para o latim. A relutância citada pelo modelo de linguagem vai ao encontro dos escritos de Costa(1981b), em que se cita que matemáticos consideravam os números negativos como absurdos ou falsos.

A etapa seguinte trata do Renascimento e a aceitação gradual, citando que Cardano utilizava de números negativos em sua obra, mas ainda os chamando de

números fictícios, que matemáticos como Descartes utilizavam os números negativos com mais naturalidade, embora considerando-os falsos, e que John Wallis contribuiu para a aceitação dos números negativos com uma interpretação geométrica destes. As afirmações do ChatGPT neste item estão de acordo com Costa (1981b), que cita a utilização de números negativos na obra de Cardano e a consideração de números negativos como falsos.

Figura 31 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos

Exemplo das regras de Brahmagupta:

- "Dívida menos riqueza é dívida." (Números negativos representam dívidas)
- "Dívida mais dívida é mais dívida." (A soma de dois negativos resulta em outro negativo)

 **2. Relutância na aceitação na Europa medieval**

- Na **Europa medieval**, matemáticos resistiram à ideia de números negativos. Eles viam esses números como "sem sentido" ou como algo que não poderia existir fisicamente.
- No século XII, com a tradução de textos árabes e indianos para o latim, as ideias começaram a circular lentamente na Europa.
- Matemáticos como **Fibonacci (Leonardo de Pisa)** mencionaram números negativos, mas apenas como resultados intermediários que não tinham significado prático.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Então, a ferramenta lista a formalização no século XVIII, com o Cálculo, criado por Newton e Leibniz, tornando os números negativos parte integral da Matemática, tendo a representação gráfica destes na reta numérica ajudado a consolidar sua aceitação.

A última etapa listada pelo ChatGPT foi a aceitação completa no século XIX, citando Gauss e Cauchy como responsáveis pela formalização do uso dos números negativos na teoria dos números e na análise matemática. O modelo de linguagem, então, finalizou sua resposta com um resumo de todas essas etapas. Launay (2021) afirma que, somente no século XIX, a legitimidade dos números negativos seria completamente aceita, com seu uso sendo adotado definitivamente.

Figura 32 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos

3. Renascimento e aceitação gradual (séculos XVI-XVII)

- Durante o **Renascimento**, o matemático italiano **Gerolamo Cardano** começou a usar números negativos em seus cálculos algébricos. Em sua obra *Ars Magna* (1545), ele reconheceu os números negativos, mas ainda os chamou de "números fictícios".
- No século XVII, com o avanço da **Álgebra Simbólica**, matemáticos como **René Descartes** usaram números negativos de forma mais natural, embora Descartes ainda os chamasse de "quantidades falsas".
- O matemático **John Wallis** contribuiu para a aceitação ao interpretar números negativos geometricamente, como posições à esquerda de um ponto zero em uma linha numérica.

4. Formalização no século XVIII

- Com o desenvolvimento do **Cálculo Matemático** por **Isaac Newton** e **Gottfried Wilhelm Leibniz**, os números negativos finalmente se tornaram parte integral da matemática.
- A representação gráfica dos números negativos na **reta numérica** ajudou a consolidar sua aceitação.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 33 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre o desenvolvimento dos números negativos

 **5. Século XIX: Aceitação completa**

- Matemáticos como **Carl Friedrich Gauss** e **Augustin-Louis Cauchy** formalizaram completamente o uso dos números negativos dentro da teoria dos números e da análise matemática.
- A teoria dos números complexos também ajudou a solidificar a importância dos números negativos.

 **Resumo das contribuições principais:**

- **China (200 a.C.):** Uso prático para representar dívidas.
- **Índia (século VII):** Regras formais para operações com números negativos.
- **Europa Medieval (século XII):** Introdução, mas com resistência.
- **Renascimento (século XVI-XVII):** Uso algébrico, mas com desconfiança.
- **Século XVIII-XIX:** Aceitação total com o desenvolvimento do cálculo e teoria dos números.

Os números negativos deixaram de ser vistos como "absurdos matemáticos" e se tornaram uma ferramenta essencial na matemática moderna, com aplicações que vão da economia à física e ciência da computação.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

3.2.5 Os números complexos

A criação dos números complexos se deu pela necessidade de tornar possíveis todas as operações sobre os números reais, pois, devido à regra dos sinais, um número negativo não tem um número real como sua raiz quadrada (Costa, 1981b). Portanto, esta classe, diferentemente das demais, teve uma origem algébrica.

A fórmula de Cardano representa raízes de determinadas equações de terceiro grau como resultados de operações sobre expressões da forma $a+b\sqrt{-1}$, em que a e b são números reais. E não é possível formar, por meio dos coeficientes da equação, expressões algébricas dessas raízes sem o uso do símbolo $\sqrt{-1}$ (Costa, 1981b).

A partir disso, os matemáticos passaram a utilizar sem escrúpulos o símbolo novo, a que Descartes chamou de *números imaginários* (Costa, 1981b). Segundo o autor, neste caso, como no caso dos números negativos, a restrição lógica padeceu diante da vantagem prática.

De acordo com Costa (1981b), para os matemáticos do século XVIII, o símbolo $\sqrt{-1}$ era o de uma operação impossível, mas ele poderia ser utilizado nos cálculos como um intermediário para obter relações entre quantidades reais, como ocorre na resolução de equações algébricas.

No início do século XVIII, De Moivre descobriu a relação existente entre a divisão de arcos de círculo e os números imaginários e, em 1740, Euler obteve as relações fundamentais entre as funções trigonométricas e as exponenciais de expoente imaginário, e, alguns anos mais tarde, a igualdade $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\pi/2}$ (Costa, 1981b).

Segundo Costa (1981b), em 1746, D'Alembert demonstrou um resultado geral de extrema importância: toda a expressão numérica em que figuram números imaginários pode ser posta sob a forma $a+b\sqrt{-1}$, sendo a e b números reais.

De acordo com o autor, no século XIX, os trabalhos de Cauchy e a teoria das funções elípticas de Abel e Jacobi acabaram com qualquer dúvida sobre a legitimidade dos números complexos (nomenclatura atribuída por Gauss, que também foi o primeiro a representar $\sqrt{-1}$ pela letra i).

Foi somente em 1797 que Gaspar Wessel descobriu a interpretação geométrica dos números complexos e, assim como com os números negativos, eles perderam o aspecto de resultados de operações impossíveis quando aplicados ao cálculo de grandezas vetoriais (Costa, 1981b).

Pediu-se ao ChatGPT que realizasse um esboço histórico da criação e do desenvolvimento dos números complexos, como é exposto nas Figuras 34, 35, 36 e 37.

O modelo de linguagem respondeu com uma lista, iniciando pelas origens na resolução de equações algébricas entre os séculos XIV e XVII, citando Cardano, que apresentou soluções para equações cúbicas incluindo raízes quadradas de números

negativos, e Bombelli, que foi o primeiro matemático a tratar números complexos de forma sistemática. Essa afirmação da ferramenta está de acordo com os escritos de Costa (1981b), quando disserta sobre a fórmula de Cardano, e Launay (2021), quando escreve sobre o papel de Bombelli, que introduziu os números completos, a que chamava de ‘números sofisticados’ e relacionou “[...] o conjunto de regras de cálculo que regem os sofisticados, fazendo em particular com que seu quadrado seja negativo” (Lauday, 2021, p. 148).

Figura 34 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos

Faça um esboço histórico da criação e do desenvolvimento dos números complexos.



Esboço Histórico da Criação e Desenvolvimento dos Números Complexos

1. Origens na Resolução de Equações Algébricas (séculos XVI-XVII)

- **Gerolamo Cardano (1501–1576):** Em seu livro *Ars Magna* (1545), Cardano apresentou soluções para equações cúbicas, incluindo raízes quadradas de números negativos, mesmo sem compreender completamente seu significado.
- **Rafael Bombelli (1526–1572):** Foi o primeiro matemático a tratar números complexos de forma sistemática. Em seu livro *Álgebra* (1572), ele apresentou regras para manipulação de raízes quadradas de números negativos.

Importância: Inicialmente, os números complexos eram considerados um artifício algébrico sem interpretação concreta.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, o LLM listou a formalização e notação no século XVIII, atribuindo a Euler a notação i para se referir à raiz quadrada de -1 e a De Moivre a fórmula que liga os números complexos à trigonometria. Costa (1981b) atribui a De Moivre a relação entre a divisão de arcos de círculos e os números imaginários e a Gauss a notação i em referência à raiz quadrada de -1 , assim como Roque (2012).

O terceiro item listado pela ferramenta foi a representação geométrica no século XIX, citando Wessel, o primeiro matemático a sugerir a representação geométrica dos números complexos no plano cartesiano; Argand, que popularizou a representação no plano que leva seu nome; e Gauss, que formalizou essa

representação geométrica e mostrou sua importância na análise matemática. Roque (2012) atribui a Wessel, a quem se refere como alguém que não participava da comunidade matemática, uma representação geométrica dos números imaginários, como também afirma Costa (1981b). Roque (2012) também escreve sobre a criação do plano para a representação dos números complexos por Argand, plano esse que hoje é chamado de “plano de Argand-Gauss”. Quando a Gauss, Roque (2012) afirma que este foi o primeiro matemático influente a defender os números complexos, sendo responsável pela sistematização da representação geométrica dos números complexos.

Figura 35 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos

2. Formalização e Notação (século XVIII)

- **Leonhard Euler (1707–1783):** Introduziu a notação i para representar a unidade imaginária ($i = \sqrt{-1}$).
- **Abraham de Moivre (1667–1754):** Descobriu a fórmula que leva seu nome ($(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$), ligando números complexos e trigonometria.

Importância: A notação i e as relações trigonométricas estabeleceram bases formais para cálculos com números complexos.

3. Representação Geométrica (século XIX)

- **Caspar Wessel (1745–1818):** Primeiro a sugerir uma representação geométrica para números complexos no plano cartesiano.
- **Jean-Robert Argand (1768–1822):** Popularizou a representação no chamado *Plano de Argand*, onde números complexos são representados como pontos no plano.
- **Carl Friedrich Gauss (1777–1855):** Confirmou e formalizou a representação geométrica dos números complexos, mostrando sua importância na análise matemática.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Na sequência, o ChatGPT listou a consolidação teórica no século XIX, atribuindo a Cauchy e Riemann o desenvolvimento da análise complexa e a Hamilton a expansão dos números complexos para quaternions. É atribuído a Hamilton a

introdução do conceito de vetor, o que foi decisivo para que a noção de números complexos fosse estabelecida (Roque, 2012).

Figura 36 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos

Importância: A representação geométrica tornou os números complexos mais intuitivos e úteis para aplicações práticas.

4. Consolidação Teórica (século XIX)

- **Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)** e **Bernhard Riemann (1826–1866)**: Desenvolveram a análise complexa, incluindo conceitos como funções holomorfas, integração no plano complexo e superfícies de Riemann.
- **William Rowan Hamilton (1805–1865)**: Expandiu os números complexos para quaternions, abrindo caminho para álgebra abstrata.

Importância: A análise complexa tornou-se uma área independente da matemática, com aplicações em física e engenharia.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

O último item da lista do modelo de linguagem trata das aplicações modernas, citando a engenharia elétrica, a física quântica, dinâmica de fluídos, aerodinâmica, computação gráfica e teoria do caos. Nesse item, o LLM ressalta que os números complexos romperam a barreira da Matemática pura e se tornaram indispensáveis em diversas ciências aplicadas.

O ChatGPT concluiu sua resposta indicando que os números complexos partiram de uma curiosidade algébrica para uma parte indispensável da engenharia, a ciência e a tecnologia.

Figura 37 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre a criação e do desenvolvimento dos números complexos

5. Aplicações Modernas (séculos XX-XXI)

- Os números complexos são fundamentais em áreas como:
 - **Engenharia elétrica:** análise de circuitos CA.
 - **Física quântica:** representação de estados quânticos.
 - **Dinâmica de fluidos e aerodinâmica:** modelagem matemática.
 - **Computação gráfica e teoria do caos:** algoritmos e simulações.

Importância: Os números complexos transcenderam a matemática pura e se tornaram indispensáveis em várias ciências aplicadas.

Conclusão

Os números complexos, inicialmente vistos como uma curiosidade algébrica, evoluíram para um sistema numérico indispensável. Hoje, eles permeiam não apenas a matemática, mas também a ciência, a engenharia e a tecnologia.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Neste capítulo, foram expostas algumas das ideias fundamentais da Matemática citadas por Costa (1981a; 1981b), além da abordagem dessas ideias realizadas pelo ChatGPT. Verificou-se que o modelo de linguagem possui limitações que, por vezes, fazem com que ele cometa erros ao alucinar sobre eventos que não ocorreram em determinados momentos históricos, além de criar informações falsas sobre alguns dos temas investigados.

No capítulo seguinte, é explorada a capacidade matemática do LLM e algumas de suas potencialidades e limitações, segundo os escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023).

4 EXPLORANDO OBJETOS MATEMÁTICOS NO CHATGPT

No presente capítulo, são expostos os exemplos de atividades realizadas com o ChatGPT para analisar suas potencialidades e limitações com relação à sua capacidade matemática. As análises são guiadas pelos escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023) e outros.

As potencialidades citadas por Rudolph, Tan e Tan (2023) são:

- **Entendimento de linguagem:** por ter sido treinado com diversos textos diferentes, o ChatGPT consegue entender e responder comandos em linguagem natural (Susnjak, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Conversa similar à humana:** as respostas geradas pelo modelo de linguagem parecem ser escritas por seres humanos, o que o torna adequado para *chatbots* e outras interfaces conversacionais (Azaria, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Flexibilidade:** o ChatGPT pode ser aperfeiçoado para um domínio ou uma tarefa específica, gerando, assim, respostas mais precisas e relevantes (Deng; Lin, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Velocidade:** essa ferramenta gera respostas quase instantaneamente, sendo assim adequado para aplicação em tempo real (Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Custo-benefício:** o LLM pode automatizar tarefas repetitivas ou pode ser usado para obter informações, aumentando a eficiência e diminuindo a mão de obra humana (Cotton *et al.*, 2023 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Potencial para ser um assistente pessoal para qualquer hora:** o ChatGPT pode se tornar um assistente para consultas tanto pessoais quanto profissionais (Guo *et al.*, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Abordagem lógica e bem-organizada:** geralmente, o ChatGPT define o conceito central para, então, responder com um passo a passo detalhado e, finalmente, fornecer um resumo (Guo *et al.*, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);

- **Pouco enviesado e com pouca informação danosa:** essa ferramenta tende a neutralidade em tópicos políticos sensíveis (Guo *et al.*, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Consciência de sua ignorância:** o ChatGPT se recusa a responder perguntas sobre assuntos que desconhece, por exemplo, fatos que sucedem o seu treinamento (Guo *et al.*, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023).

Rudolph, Tan e Tan (2023) também citam limitações:

- **Entendimento de contexto:** o ChatGPT pode não compreender as nuances e sutilidades de uma conversa (Azaria, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023; Wardat *et al.*, 2023);
- **Linguagem:** o LLM pode não entender certas palavras ou frases que com as quais não tenha sido treinado, além de apresentar dificuldades em alguns idiomas (Hartmann *et al.*, 2023 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023; Jiao *et al.*, 2023 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Limites de conhecimento:** a ferramenta só tem informações com as quais foi treinada e até a data de seu treinamento, não possuindo acesso a informações em tempo real (Azaria, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023; Guo *et al.*, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Emoção:** a IA não é capaz de experienciar ou reconhecer emoções, o que a condiciona a não responder apropriadamente questões que as envolvam (Rudolph; Tan; Tan, 2023);
- **Criatividade e originalidade:** as respostas do ChatGPT são baseadas em padrões que advém de seu treinamento e, portanto, ele só é capaz de gerar respostas semelhantes aos textos com os quais foi treinado, talvez, então, não conseguindo criar ideias originais (Susnjak, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023). Leite (2024) aponta que o ChatGPT é incapaz de inovar, pois ele apenas interpreta e esclarece sobre a base de textos com a qual foi treinado;
- **Criação de informação falsa e ‘fatos alternativos’:** as respostas geradas podem soar plausíveis, mas não terem qualquer sentido ou embasamento

na realidade (Tung, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023), ao que Cortiz (2023) se refere como *alucinações*.

- **Variação na qualidade das respostas:** a qualidade das respostas geradas varia e elas podem conter informações imprecisas (Ortiz, 2022 *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023) ou irrelevantes (Wardat *et al.*, 2023);
- **Perigo de *jailbreak*:** trata-se da exploração de falhas para burlar restrições impostas. Alguns usuários conseguiram fazer com que o ChatGPT os ensinasse a fazer coquetéis molotov e gerasse argumentos neonazistas (Vincent, 2022c *apud* Rudolph; Tan; Tan, 2023).

Em alguns dos exemplos, as perguntas foram realizadas em inglês, assim como a formulação das respostas. Isto se dá pela variação na qualidade das respostas em diferentes idiomas (Rudolph; Tan; Tan, 2023) e pelo maior nível de detalhes apresentado pelo ChatGPT em suas respostas em inglês (Souza, 2023).

4.1 Trigonometria

Na Figura 38, é exposta uma questão realizada ao ChatGPT em junho de 2023 à sua versão gratuita em que se pede que determine o cosseno de um arco duplo, conhecendo o seno do arco e sabendo que o arco se encontra no primeiro quadrante do círculo trigonométrico.

O LLM entendeu o que foi requisitado e compreendeu os dados disponibilizados no enunciado. Iniciou sua resposta retomando o que chama de identidade trigonométrica fundamental, que diz que a soma do quadrado do seno de um arco com o quadrado do cosseno desse mesmo arco é sempre igual a um. Assim, realizando os cálculos necessários e utilizando o fato de o arco estar no primeiro quadrante do círculo trigonométrico, chegou ao valor do cosseno do arco. Lembrou, então, que para encontrar o cosseno do arco duplo, basta calcular a diferença entre o quadrado do cosseno do arco e o quadrado do seno do arco, chegando, assim, à resposta correta.

Considerando as potencialidades e limitações propostas por Rudolph, Tan e Tan (2023), pode-se verificar o entendimento de linguagem, uma vez que o ChatGPT

conseguiu compreender o que foi pedido em linguagem natural, a velocidade, que é percebida pelo tempo que o modelo leva para elaborar sua resposta, e a abordagem lógica e bem-organizada, visto que escreveu sua resposta com um passo a passo bem estruturado e em uma ordem que facilita a compreensão do usuário.

Figura 38 – Captura de tela de questão realizada sobre o cosseno de um arco duplo no ChatGPT

DA

Sendo o seno de x igual a $2/3$, determine o valor de cosseno de $2x$, sabendo que x está entre 0 e $\pi/2$

Para encontrar o valor do cosseno de $2x$, utilizando a informação de que o seno de x é igual a $2/3$, podemos usar a identidade trigonométrica fundamental:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Substituindo o valor do seno de x na equação acima, obtemos:

$$\cos^2(x) + (2/3)^2 = 1$$

$$\cos^2(x) + 4/9 = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - 4/9$$

$$\cos^2(x) = 5/9$$

Sabendo que x está entre 0 e $\pi/2$, podemos concluir que o cosseno de x é positivo. Portanto, temos:

$$\cos(x) = \sqrt{5/9}$$

$$\cos(x) = \sqrt{5}/3$$

Agora, para encontrar o cosseno de $2x$, podemos usar a identidade trigonométrica:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Substituindo os valores que encontramos, temos:

$$\cos(2x) = (\sqrt{5}/3)^2 - (2/3)^2$$

$$\cos(2x) = 5/9 - 4/9$$

$$\cos(2x) = 1/9$$

Portanto, o valor do cosseno de $2x$, dado que o seno de x é igual a $2/3$, é igual a $1/9$.

Fonte: Correia e Abar (2023, p. 7).

Na Figura 39, expõe-se uma questão realizada à versão gratuita do ChatGPT em maio de 2023. Nela, pede-se que a ferramenta responda qual é a integral definida em x de $\cos(x)/\sin(x)$.

Figura 39 – Captura de tela de questão sobre a integral de uma função trigonométrica

Qual é a integral de $(\cos x/\sin x)dx$?

Para encontrar a integral de $(\cos x/\sin x)dx$, podemos fazer uma substituição trigonométrica. Podemos substituir $\sin x$ por u e, em seguida, substituir $\cos x dx$ por du usando a regra da cadeia:

Substituição: $u = \sin x$, $du = \cos x dx$

Então, a integral pode ser reescrita como:

$$\int (\cos x/\sin x)dx = \int (du/u)$$

Integrando, obtemos:

$$\int (du/u) = \ln |u| + C$$

Substituindo de volta a expressão original para u , temos:

$$\int (\cos x/\sin x)dx = \ln |\sin x| + C$$

Portanto, a integral de $(\cos x/\sin x)dx$ é $\ln |\sin x| + C$, onde C é uma constante de integração. É importante observar que a função seno deve ser positiva em todos os pontos em que a integral é definida, caso contrário o resultado pode ser complexo.

Fonte: Correia e Abar (2023, p. 8).

O ChatGPT iniciou sua resposta indicando que poderia ser utilizado o método da substituição para calcular a integral requisitada. Cita, então, a utilização da regra da cadeia, que, na verdade, é um método para a resolução de derivadas de funções compostas e não condiz com o que foi realizado no exercício. Utiliza, então, o método da substituição e realiza os cálculos necessários para chegar à resposta correta, embora falte rigor matemático em sua resposta, como na não classificação da constante de integração C como um número real.

Figura 40 – Captura de tela de questão sobre derivada pela definição realizada pelo ChatGPT

DA

Calcule a derivada de seno de x pela definição de derivada

Para calcular a derivada do seno de x pela definição de derivada, vamos utilizar a definição de limite da derivada.

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x é definida como o limite da taxa de variação média da função entre dois pontos próximos, quando esses pontos se aproximam cada vez mais.

Vamos começar com a função $f(x) = \text{sen}(x)$. A taxa de variação média da função entre dois pontos próximos x e $x + h$ é dada por:

$$[\text{taxa de variação média}] = [f(x + h) - f(x)] / h$$

Para encontrar a derivada de $f(x)$, precisamos calcular o limite dessa taxa de variação média à medida que h se aproxima de zero. Vamos fazer essa determinação:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x + h) - f(x)] / h$$

Substituindo $f(x)$ pelo seno de x, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\text{sen}(x + h) - \text{sen}(x)] / h$$

Agora, utilizaremos a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\text{sen}(b)$$

Fonte: Correia e Abar (2023, p. 9).

Entretanto, a ferramenta faz uma observação no final da sua resposta de que a função seno deve ser positiva em todos os pontos em que a integral é definida, pois, caso contrário, o resultado poderia ser complexo. Essa observação está equivocada, pois, dado que as funções primitivas são dadas pelo logaritmo neperiano do valor absoluto do seno, adicionado de uma constante real, e o valor absoluto nunca é negativo e, nesse caso, nem zero, pois a função original tinha o seno como denominador, ainda que a função seno assumia valor negativo em algum ponto em que a integral é definida, o valor absoluto dela não o será e, portanto, o resultado não será complexo.

Relativo aos escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023), o ChatGPT demonstrou neste exemplo a criação de informação errada, uma vez que propõe uma observação que não condiz com a realidade dos fatos; entendimento de linguagem, tendo demonstrado compreender o que lhe foi pedido; velocidade, respondendo quase instantaneamente; e abordagem lógica e bem-organizada, tendo estruturado sua resposta com explicações de cada passo.

Nas Figuras 40 e 41, é exposta uma questão realizada ao ChatGPT em maio de 2023, em sua versão gratuita. Nela, solicitou-se ao ChatGPT que determinasse a derivada da função seno pela definição.

Figura 41 – Captura de tela de continuação de questão sobre derivada pela definição realizada pelo ChatGPT

Aplicando essa identidade, temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)) - \sin(x)}{h}$$

Agora, podemos simplificar a expressão:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

Dividindo cada termo pelo seno de h:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) + \cos(x)\tan(h) - 1}{h/\sin(h)}$$

Agora, utilizaremos outra identidade trigonométrica:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Portanto, podemos substituir $h/\sin(h)$ por 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\cos(h) + \cos(x)\tan(h) - 1]$$

Agora, vamos tomar o limite quando h se aproxima de zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\cos(h) + \cos(x)\tan(h) - 1] = \cos(0) + \cos(x)\tan(0) - 1 = 1 + \cos(x)(0) - 1 = 0$$

Portanto, a derivada do seno de x, pela definição de derivada, é igual a zero.

Fonte: Correia e Abar (2023, p. 9).

O modelo de linguagem entendeu o que foi pedido e iniciou sua resposta explicando a definição da derivada e mostrando o limite fundamental utilizado para o seu cálculo. Depois, expôs a fórmula para a determinação do $\sin(a+b)$ e fez a aplicação dessa identidade no limite fundamental. No passo seguinte, o LLM dividiu todos os termos por $\sin(h)$ e, então, cometeu alguns erros, como $\sin(x)/\sin(h) = 1$ e $\sin(h)/\sin(h) = \tan(h)$. Utilizou, então, outro limite fundamental, $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h)/h = 1$ e, finalmente, chegou à resposta de que a derivada da função seno é igual a zero.

Figura 42 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre o seno de um arco duplo

 **You**
Knowing that the sine of x is equal to $2/7$, determine the possible values to $\sin(2x)$.

 **ChatGPT**
If $\sin(x)$ is equal to $2/7$, we can use the double-angle identity to find $\sin(2x)$. The double-angle identity for sine is:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

To find $\sin(2x)$, we first need to find $\cos(x)$. We can use the fact that $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ to find $\cos(x)$. Since $\sin(x) = \frac{2}{7}$, we can substitute this into the equation:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cos^2(x) = 1$$

Solving for $\cos(x)$:

$$\frac{4}{49} + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{4}{49}$$

$$\cos^2(x) = \frac{45}{49}$$

$$\cos(x) = \pm \frac{3}{7}$$

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 223).

Na questão apresentada, de acordo com os escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023), é possível verificar algumas limitações apresentadas pelo ChatGPT, como a criação de informação errada e limites de conhecimento, demonstrando falta de conhecimento matemático, por exemplo, quando simplifica o seno de x com o seno

de h como se fossem equivalentes e, assim, chega à resposta errada. Entretanto, ainda em uma questão em que a ferramenta responde equivocadamente, é possível verificar algumas potencialidades, como a velocidade, a abordagem lógica e bem-organizada e o entendimento de linguagem natural.

Nas Figuras 42 e 43, é exposta uma questão realizada em dezembro de 2023 à versão gratuita do LLM em que se pede os possíveis valores para o seno de $2x$, sabendo-se o valor do seno de x . Esse exemplo é similar ao apresentado na Figura 38.

Figura 43 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre o seno de um arco duplo

Now that we have $\sin(x)$ and $\cos(x)$, we can use the double-angle identity for sine:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\sin(2x) = 2 \left(\frac{2}{7}\right) \left(\pm \frac{3}{7}\right)$$

This gives us two possibilities for $\sin(2x)$:

1. If $\cos(x) = \frac{3}{7}$:

$$\sin(2x) = 2 \left(\frac{2}{7}\right) \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{12}{49}$$
2. If $\cos(x) = -\frac{3}{7}$:

$$\sin(2x) = 2 \left(\frac{2}{7}\right) \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{12}{49}$$

Therefore, the possible values for $\sin(2x)$ are $\frac{12}{49}$ and $-\frac{12}{49}$.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 224).

Em sua resposta, o ChatGPT iniciou afirmando que, para descobrir o seno de $2x$, é possível utilizar a identidade do arco duplo que é $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ para o seno. Em seguida, o modelo de linguagem ressalta que, para utilizar essa identidade, é necessário que, antes, se descubra o valor de cosseno de x e, para isso, pode-se utilizar o fato que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

O LLM, então, utiliza essa relação e, com um passo a passo detalhado, indica que $\cos^2(x) = 45/49$ e, portanto, $\cos(x) = 3/7$ ou $\cos(x) = -3/7$. Nessa passagem, pelo passo a passo indicado, supõe-se que o ChatGPT determinou que $\sqrt{45/49} = 3/7$, o que ocasionou um erro no restante da resolução do exercício. Seguindo na

resolução, o modelo de linguagem chegou à resposta de que os possíveis valores para o seno de $2x$ são $12/49$ e $-12/49$, ainda que, na situação proposta, os possíveis valores para o seno de $2x$ seriam $12\sqrt{5}/49$ e $-12\sqrt{5}/49$.

Nesse exemplo, pode-se verificar (Rudolph; Tan; Tan, 2023) a abordagem lógica e bem-organizada, tendo o ChatGPT apresentado sua resposta em uma sequência lógica e com um passo a passo bem definido; o entendimento de linguagem; a velocidade; a conversação similar à humana; a criação de informação falsa; e os limites do seu conhecimento, cometendo um erro no cálculo de uma raiz quadrada.

4.2 Funções polinomiais

Na Figura 44, é exposta uma questão realizada à versão gratuita do ChatGPT em maio de 2023. Nela, foi solicitado ao modelo de linguagem que calculasse a derivada de $x^2 - 5x + 3$.

Figura 44 – Captura de tela de resposta do ChatGPT ao ser solicitado que calculasse a derivada de uma função polinomial do segundo grau

Calcule a derivada de $x^2 - 5x + 3$.



Para calcular a derivada da função $f(x) = x^2 - 5x + 3$, vamos usar a regra da potência e a regra da soma.

A regra da potência diz que se temos uma função da forma $g(x) = x^n$, então a derivada de $g(x)$ é dada por $g'(x) = nx^{(n-1)}$.

Aplicando a regra da potência a cada termo da função $f(x) = x^2 - 5x + 3$, temos:

$$f'(x) = (2x^1) - (5x^0) + 0$$

Simplificando os termos, obtemos:

$$f'(x) = 2x - 5$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = x^2 - 5x + 3$ é $f'(x) = 2x - 5$.

Fonte: dados da pesquisa (2023).

O ChatGPT iniciou sua resposta indicando as regras que utilizaria para realizar esse cálculo e explicando o funcionamento do que o LLM se refere como “regra da potência”, em que, tendo uma função $g(x)=x^n$, sua derivada será $g'(x)=n \cdot x^{n-1}$. Após essa breve explicação, a ferramenta seguiu sua resposta aplicando essa regra para cada termo da função original, chegando à resposta que, sendo $f(x)=x^2 - 5x+3$, $f'(x)=2x - 5$.

Nesse exemplo, com base nos escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023), pôde-se notar a velocidade do ChatGPT em obter sua resposta, visto que esta foi redigida quase imediatamente, o entendimento de linguagem natural, tendo compreendido o que lhe foi solicitado, a abordagem lógica e bem-organizada, uma vez que sua resposta foi estruturada de maneira a explicar o que estava sendo feito, realizando um passo a passo e, finalmente, respondendo ao que foi pedido.

4.3 Sequências

Nas Figuras 45 e 46, é exposto um exemplo de uma questão realizada ao ChatGPT em maio de 2023 em sua versão gratuita. Nesta questão, pergunta-se à ferramenta quantos sofás seriam vendidos por uma loja em agosto de 2024 sabendo-se que em maio de 2022, essa loja vendeu 300 sofás, em junho de 2022, vendeu 330 sofás, no mês seguinte, 360 sofás, e presumindo que esse padrão de crescimento nas vendas permaneceria pelo tempo seguinte.

O ChatGPT iniciou sua resposta indicando se tratar de uma progressão aritmética (PA) e calculando o que o modelo chama de diferença comum e a que atribui a letra d . O valor de d é então calculado encontrando a diferença da quantidade de sofás vendidos em junho de 2022 para a quantidade de sofás vendidos em maio de 2022, que é igual a 30. A ferramenta, segue, então, indicando que, feito o cálculo da diferença comum, poder-se-ia determinar a quantidade de meses entre junho de 2022 e agosto de 2024, afirmando que, incluindo esses dois meses, há 24 meses nesse intervalo. Determinada a quantidade de meses nesse intervalo, o LLM expõe a fórmula para o cálculo do n -ésimo termo de uma progressão aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, em que a_n é o n -ésimo termo da PA, a_1 é o primeiro termo da progressão, n é o número

de termos dessa progressão e d , como supracitado, é a diferença comum dessa PA. Na continuação dessa resposta, vista na Figura 46, vê-se que o ChatGPT atribui a a_1 a quantidade de sofás vendidos no mês de julho de 2022 (360 sofás), a n a quantidade de meses que foi encontrada anteriormente no intervalo entre junho de 2022 e agosto de 2024 (24 meses), e a d a diferença comum dessa progressão (30). Assim, o modelo de linguagem chegou à conclusão de que seriam vendidos por essa loja, em agosto de 2024, 1050 sofás.

Figura 45 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre o n -ésimo termo de uma progressão aritmética

Uma loja vendeu 300 sofás em maio de 2022. Em junho de 2022, vendeu 330 sofás. No mês seguinte, vendeu 360 sofás. Se as vendas da loja seguirem aumentando em progressão aritmética, quantos sofás ela terá vendido em agosto de 2024?



Podemos calcular o número de sofás vendidos em agosto de 2024 utilizando uma progressão aritmética, com base nas informações fornecidas.

Primeiro, vamos calcular a diferença comum (d) entre as vendas mensais. Podemos fazer isso subtraindo o número de sofás vendidos em junho de 2022 (330) pelo número de sofás vendidos em maio de 2022 (300):

$$d = 330 - 300 = 30$$

Agora que temos a diferença comum, podemos determinar o número de meses entre junho de 2022 e agosto de 2024. Há 24 meses entre junho de 2022 e agosto de 2024 (contando ambos os meses).

A fórmula para calcular o n -ésimo termo de uma progressão aritmética é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) * d$$

Onde:

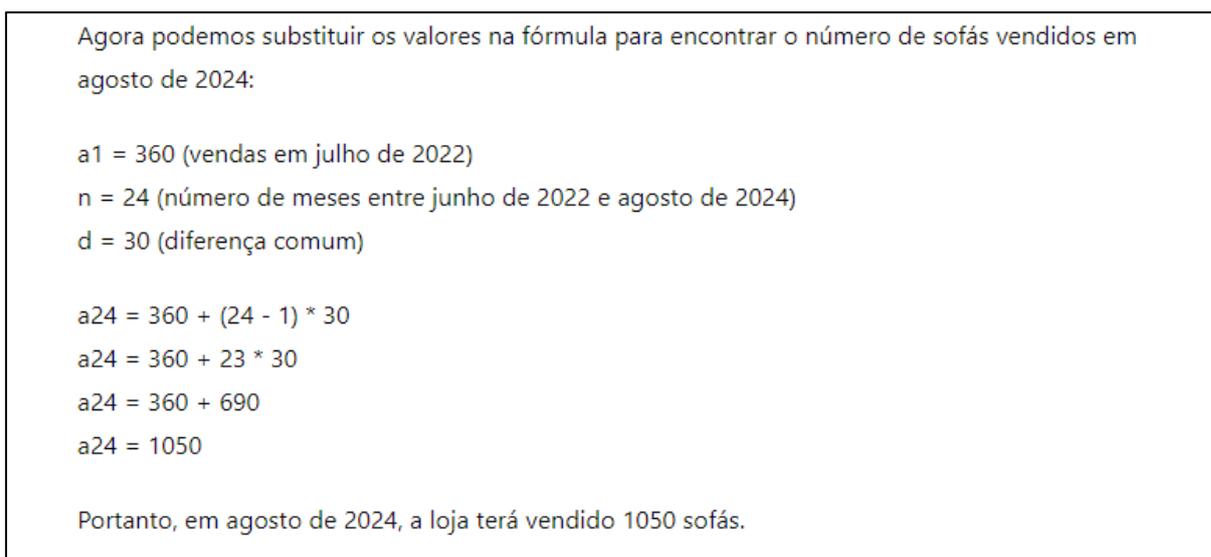
- a_n é o n -ésimo termo da progressão
- a_1 é o primeiro termo da progressão
- n é o número de termos na progressão
- d é a diferença comum entre os termos

Fonte: dados da pesquisa (2023).

Segundo Rudolph, Tan e Tan (2023), nessa questão, o ChatGPT apresentou potencialidades e limitações. Entre as potencialidades, pode-se verificar o entendimento de linguagem natural, uma vez que o modelo compreendeu o que foi

escrito na pergunta enviada a ele, a velocidade, dado o curto tempo que levou para responder, e a abordagem lógica e bem-organizada, tendo organizado a sua resposta com um a passo a passo lógico, oferecendo sua resposta à pergunta no final. Entre as limitações, é possível verificar uma deficiência matemática quanto aos cálculos e à interpretação do problema, como o intervalo entre junho de 2022 e agosto de 2024 que, incluindo esses dois meses, seria de 27 meses, e não 24 como indicou o LLM; depois, utiliza como primeiro termo a quantidade de sofás vendidos em julho de 2022, ainda que use o valor que encontrou para a quantidade de meses entre junho de 2022 e agosto de 2024; estes erros o fizeram concluir erroneamente que, em agosto de 2024, a loja venderia 1050 sofás e não 1110 sofás, que seria a resposta correta. Assim, o ChatGPT demonstrou limitações como o entendimento de contexto e a criação de informação falsa.

Figura 46 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética



Agora podemos substituir os valores na fórmula para encontrar o número de sofás vendidos em agosto de 2024:

$a_1 = 360$ (vendas em julho de 2022)
 $n = 24$ (número de meses entre junho de 2022 e agosto de 2024)
 $d = 30$ (diferença comum)

$a_{24} = 360 + (24 - 1) * 30$
 $a_{24} = 360 + 23 * 30$
 $a_{24} = 360 + 690$
 $a_{24} = 1050$

Portanto, em agosto de 2024, a loja terá vendido 1050 sofás.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Nas Figuras 47 e 48 é exposta uma resposta da versão gratuita do ChatGPT, de dezembro de 2023, à mesma pergunta que aparece nas Figura 45 e 46, dessa vez realizada na língua inglesa. Nessa questão, fala-se de uma loja que vende 300 cadeiras no mês de maio de 2022, 330 cadeiras no mês de junho de 2022 e 360 cadeiras no mês de julho do mesmo ano. Então pergunta-se ao modelo de linguagem quantas cadeiras seriam vendidas por essa loja em agosto de 2024 caso continuasse o crescimento nas vendas em progressão aritmética.

Figura 47 – Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT em inglês sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética

DA

If a store sold 300 chairs on may, 2022, on june of 2022, it sold 330 chairs and on july of the same year, it sold 360 chairs. If the sales of this store keep growing in a arithmetic progression, how many chairs will it sell on august of 2024?

To find out the number of chairs sold in August 2024, we first need to determine the common difference in the arithmetic progression (AP) of sales growth.

The given data implies the following:

- May 2022: 300 chairs
- June 2022: 330 chairs
- July 2022: 360 chairs

Let's use the formula for the nth term of an arithmetic sequence:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

where:

- a_n is the nth term,
- a_1 is the first term,
- d is the common difference,
- n is the number of terms.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 225).

O ChatGPT iniciou sua resposta indicando que, para determinar a quantidade de cadeiras a serem vendidas por essa loja em agosto de 2024, é necessário, primeiramente, determinar a diferença comum (a razão) dessa progressão aritmética. O LLM então lista os dados do enunciado e propõe a utilização da fórmula do n-ésimo termo de uma sequência aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, em que a_n é o n-ésimo termo, a_1 é o primeiro termo, d é a diferença comum e n é a quantidade de termos. Então, utilizando os dados do enunciado, o modelo de linguagem chega à informação de que a razão dessa progressão aritmética é 30.

Em seguida, o ChatGPT afirma que a diferença, em meses, entre maio de 2022 e agosto de 2024 é de 27 meses. Entretanto, ao utilizar essa informação, o LLM toma

que se o primeiro termo é referente às vendas do mês de maio de 2022, o termo referente às vendas do mês de agosto de 2024 deve ser o vigésimo sétimo.

Figura 48 – Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT em inglês sobre o n-ésimo termo de uma progressão aritmética

Using the given information, we can find the common difference (d):

$$330 = 300 + (2 - 1)d$$

$$330 = 300 + d$$

$$d = 330 - 300 = 30$$

So, the common difference is 30. Now we can find the number of chairs sold in August 2024:

The difference in months between May 2022 and August 2024 is 27 months. Using the formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

where $n = 27$ (since August 2024 is 27 months after May 2022), $a_1 = 360$ (the number of chairs sold in July 2022), and $d = 30$ (the common difference):

$$a_{27} = 360 + (27 - 1) \times 30$$

$$a_{27} = 360 + 26 \times 30$$

$$a_{27} = 360 + 780$$

$$a_{27} = 1140$$

So, the store will sell 1140 chairs in August 2024.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 226).

Então, para determinar a quantidade de cadeiras a serem vendidas no mês de agosto de 2024, o modelo de linguagem volta a utilizar a fórmula para o n-ésimo termo de uma progressão aritmética. Dessa vez, entretanto, embora tenha utilizado as vendas do mês de maio como o primeiro termo dessa sequência em toda a sua resolução, o ChatGPT utilizou as vendas referentes ao mês de julho como primeiro termo. Com isso e a informação equivocada obtida anteriormente de que a quantidade de cadeiras a serem vendidas no mês de agosto de 2024 seria o vigésimo sétimo termo dessa progressão, o *chatbot* chega à resposta final de que, caso as vendas seguissem aumentando em progressão aritmética, seriam vendidas 1140 cadeiras no mês de agosto de 2024, 30 a mais do que a resposta correta.

Neste exemplo, verifica-se, seguindo os escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023), como potencialidades, o entendimento de linguagem, tendo em vista que o ChatGPT compreendeu perfeitamente o que lhe foi solicitado; a velocidade; a conversação similar à humana; a abordagem lógica e bem-organizada; e, como limitações, o entendimento de contexto, demonstrado pela falta de compreensão do significado da diferença entre os meses; a criação de informação falsa; e a variação na qualidade das respostas.

4.4 Geometria

Na Figura 49, expõe-se uma questão matemática realizada em dezembro de 2023 baseada em questão do vestibular da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP, 2023, questão 58, disponível em <https://bit.ly/3TOZ7wY>). Pediu-se à versão gratuita do ChatGPT que determinasse o maior valor possível de a , dado um segmento de reta medindo 50 centímetros que foi dividido em três partes medindo a , b e c , sendo $a \leq b \leq c$, sabendo que não é possível formar um triângulo com essas três partes e que $b = a + 2$.

O modelo de linguagem iniciou sua resposta utilizando a informação de que não é possível formar um triângulo com essas três partes e, então, deduziu que a soma das medidas das duas partes menores deveria ser menor do que a medida da maior parte.

Com isso estabelecido, o ChatGPT afirma que, por serem partes de um segmento que mede 50 centímetros, a soma das medidas dessas partes deve ser de 50 centímetros também.

Com isso, o LLM tenta resolver as equações – que, precisamente, são uma equação e uma inequação – simultaneamente. Não há aqui um passo a passo detalhado para que se possa afirmar assertivamente o erro gerador do equívoco apresentado pelo modelo de linguagem, mas, analisando o contexto da resposta, pode-se inferir que, da equação $a + (a + 2) + c = 50$, o ChatGPT deduziu que $c = 50 - a$, quando, dessa equação, pode-se deduzir que $c = 48 - 2a$. Este erro levou à resposta final de que o maior valor possível para a seria de 16 centímetros.

Figura 49 – Captura de tela de questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre a condição de existência de um triângulo

DA A line segment with a length of 50 cm was divided into 3 different parts measuring a , b , and c , where $a \leq b \leq c$. Knowing that it is not possible to form a triangle with these parts and that $b = a + 2$, determine the greatest possible value of a .

To find the greatest possible value of a , we can use the fact that the three segments cannot form a triangle. For three line segments to form a triangle, the sum of the lengths of any two segments must be greater than the length of the third segment. Given that $a \leq b \leq c$, we have a , $a + 2$, and c as the three segments. The fact that it is not possible to form a triangle implies:

$$a + (a + 2) \leq c$$

We also know that the total length of the line segment is 50 cm:

$$a + (a + 2) + c = 50$$

Solving the two equations simultaneously will allow us to find the greatest possible value of a .

$$2a + 2 \leq 50 - a$$

$$3a \leq 48$$

$$a \leq 16$$

So, the greatest possible value of a is 16 cm.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 222).

Nesse exemplo, o ChatGPT apresentou, entre as potencialidades e limitações descritas por Rudolph, Tan e Tan (2023), o entendimento de linguagem, com a compreensão e realização do que foi requisitado; a velocidade, redigindo sua resposta em segundos; a conversação similar à humana; a abordagem lógica e bem-organizada, embora não tenha aparecido um passo a passo bem detalhado, há uma sequência lógica e breves explicações entre os passos; a variação na qualidade das respostas, tendo, nesse exemplo, apresentado uma resposta com um passo a passo não tão detalhado; e a criação de informação falsa, com o erro cometido e a resposta final equivocada.

Figura 50 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo

You
 A circumference is inscribed in a triangle ABC with sides AB, AC, and BC measuring 17 cm, 18 cm, and 19 cm, respectively. What is the length of the segment that connects vertex B to the point of tangency on side AB with the circumference?

ChatGPT
 To find the length of the segment that connects vertex B to the point of tangency on side AB with the inscribed circumference, we can use the concept of tangents from a point to a circle.

Let D be the point of tangency on side AB. The length of the tangent segment from a point to a circle is equal to the radius of the circle.

Let r be the radius of the inscribed circle. The triangle formed by the radius, the tangent segment, and the portion of side AB creates a right triangle.

Using the Pythagorean Theorem, we can express this relationship:

$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

Since AD is the radius (r) and BD is the tangent segment we're looking for, we have:

$$BD^2 + r^2 = AB^2$$

Now, let's find the lengths of sides AB, AC, and BC using the given information:

$$AB = 17 \text{ cm}$$

$$AC = 18 \text{ cm}$$

$$BC = 19 \text{ cm}$$

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 231).

Nas Figuras 50, 51 e 52, expõe-se um exemplo de dezembro de 2023 em que é escrito à versão gratuita do ChatGPT sobre um triângulo ABC, com lados medindo 17cm, 18cm e 19cm, no qual uma circunferência é inscrita. Pergunta-se ao LLM a medida do segmento de reta que liga o vértice B ao ponto de tangência do lado AB com a circunferência.

Figura 51 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo

We can use Heron's formula to find the area of the triangle:

$$s = \frac{AB+AC+BC}{2}$$

$$s = \frac{17+18+19}{2} = 27$$

Now, use Heron's formula:

$$\text{Area} = \sqrt{s(s - AB)(s - AC)(s - BC)}$$

$$\text{Area} = \sqrt{27(27 - 17)(27 - 18)(27 - 19)}$$

$$\text{Area} = \sqrt{27(10)(9)(8)}$$

$$\text{Area} = \sqrt{19440}$$

$$\text{Area} \approx 139.58 \text{ cm}^2$$

Now, use the formula for the area of a triangle ($\text{Area} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$) where the base is BC and the height is the length of the altitude from A to BC.

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times BC \times \text{altitude}$$

Solve for the altitude:

$$139.58 = \frac{1}{2} \times 19 \times \text{altitude}$$

$$\text{altitude} = \frac{2 \times 139.58}{19}$$

$$\text{altitude} \approx 14.68 \text{ cm}$$

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 232).

O ChatGPT iniciou sua resposta dizendo que a medida do segmento tangente de um ponto a um círculo é igual ao raio do círculo. Em seguida, afirma que o triângulo cujos vértices são A, B e o ponto de tangência no lado AB é retângulo. Entretanto, o ponto de tangência no lado AB está no segmento \overline{AB} e, portanto, A, B e este ponto são colineares, não formando um triângulo.

Figura 52 – Captura de tela da terceira parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo

Now, use the altitude to find the radius of the inscribed circle using the formula:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times BC \times \text{altitude}$$

$$r = \frac{\text{Area}}{s}$$

$$r = \frac{139.58}{27}$$

$$r \approx 5.17 \text{ cm}$$

Now, use the Pythagorean Theorem to find the length of BD:

$$BD^2 + r^2 = AB^2$$

$$BD^2 + (5.17)^2 = 17^2$$

$$BD^2 + 26.68 = 289$$

$$BD^2 = 289 - 26.68$$

$$BD^2 \approx 262.32$$

$$BD \approx \sqrt{262.32}$$

$$BD \approx 16.2 \text{ cm}$$

So, the length of the segment that connects vertex B to the point of tangency on side AB with the inscribed circumference is approximately 16.2 cm.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 233).

Na sequência, o LLM afirma que, devido a ABD ser um triângulo retângulo, pode-se utilizar o Teorema de Pitágoras e, portanto, $BD^2 + r^2 = AB^2$. O ChatGPT, então, utiliza as medidas dos lados, cedidas pelo enunciado, para determinar o semiperímetro do triângulo ABC: $s=27\text{cm}$. Com esse dado, o modelo de linguagem faz uso da fórmula de Heron para determinar a área desse triângulo, chegando à

informação de que a área é igual a $\sqrt{19440}\text{cm}^2$ e indicando que isso seria aproximadamente igual a $139,58\text{cm}^2$. Todavia, o valor aproximado da raiz quadrada de 19440 é 139,43.

Em seguida, ele apresenta novamente a fórmula da área do triângulo – embora não a utilize – e utiliza a relação $r = \text{Área}/s$, em que r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC, “Área” se refere à área desse triângulo e s é o semiperímetro desse triângulo, e utilizando os valores supracitados, encontra uma aproximação para a medida do raio.

Com esse valor, o ChatGPT retorna ao Teorema de Pitágoras, utilizando os valores encontrados: $BD^2 + 5,17^2 \cong 17^2$. Então, o LLM substitui, 17^2 por 289 e $5,17^2$ por 26,68, embora $5,17^2$ seja aproximadamente igual a 26,73, chegando ao resultado que $BD = \sqrt{262,32}$, chegando ao valor aproximado de 16,2cm.

Devido à premissa inicial, o ChatGPT chegou a uma resposta incorreta. Alguns cálculos também foram realizados incorretamente pelo LLM.

Nesse exemplo, pode-se verificar, à luz de Rudolph, Tan e Tan (2023), a velocidade, a conversação similar à humana, uma abordagem lógica, mas não bem-organizada, a limitação no entendimento do contexto, os limites de conhecimento e a criação de informação falsa.

O exemplo exposto nas Figuras 53 e 54 é de dezembro de 2023 e é a repetição da questão apresentada nas Figuras 50, 51 e 52 em que se pergunta à versão gratuita do ChatGPT sobre a medida de um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo ao ponto de tangência de um dos lados desse triângulo com uma circunferência inscrita nele. É dado no enunciado que os lados do triângulo têm medidas 17cm, 18cm e 19cm.

O ChatGPT iniciou sua resposta, assim como na primeira vez em que foi perguntado, indicando que a medida do segmento tangente de um ponto externo ao círculo é igual à medida do raio do círculo.

Em seguida, o LLM afirma que o triângulo cujos lados medem 17cm, 18cm e 19cm é um triângulo retângulo, por se tratar de um terno pitagórico. Isso é facilmente

contradito, uma vez que $19^2=361$ e $17^2+18^2=613>361$ e, portanto, trata-se de um triângulo acutângulo, não retângulo.

Figura 53 – Captura de tela da primeira parte da repetição de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo

 **You**
 A circumference is inscribed in a triangle ABC with sides AB, AC, and BC measuring 17 cm, 18 cm, and 19 cm, respectively. What is the length of the segment that connects vertex B to the point of tangency on side AB with the circumference?

 **ChatGPT**
 To find the length of the segment that connects vertex B to the point of tangency on side AB with the inscribed circumference, we can use the fact that the length of the tangent from an external point to a circle is equal to the radius of the circle.

Let's denote the point of tangency on side AB as D. So, BD is the segment we want to find.

The triangle ABC is a right-angled triangle with sides 17 cm, 18 cm, and 19 cm. This is a Pythagorean triple, so the triangle is a right-angled triangle with angle B as the right angle.

Now, let r be the radius of the inscribed circumference. The radius of the inscribed circle in a right-angled triangle is given by the formula:

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

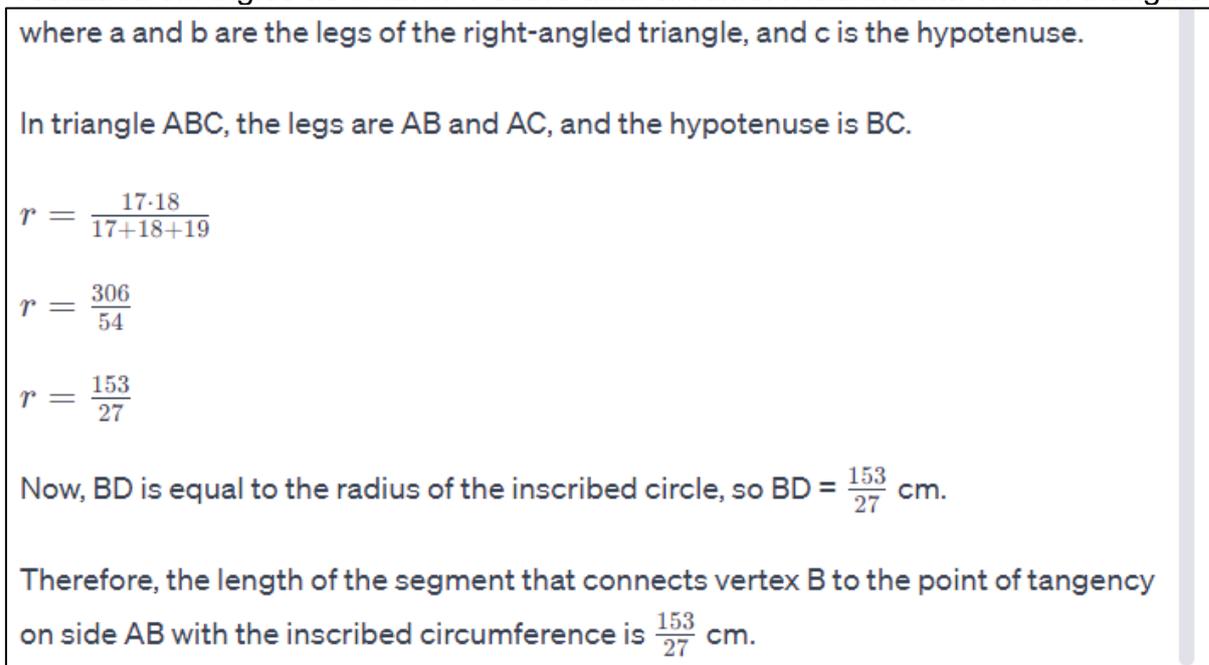
Fonte: Correia e Abar (2024, p. 235).

Utilizando a ideia de o triângulo em questão ser retângulo, o ChatGPT utiliza a fórmula para o raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo: $r = bc/a+b+c$ e, substituindo os valores fornecidos pelo enunciado, afirma que $r = 153/27$ e, portanto, a medida pedida no enunciado também é igual a $153/27$ cm.

Nessa resposta, embora o ChatGPT não tenha cometido erros de cálculo como da primeira vez em que foi perguntado, ele parte de uma premissa errada de que se trata de um triângulo retângulo e, por isso, chega à resposta incorreta.

Pode-se verificar nesse exemplo, em acordo com Rudolph, Tan e Tan (2023), a velocidade, o entendimento de linguagem, a conversação similar à humana, a falha no entendimento de contexto e a criação de informação falsa.

Figura 54 – Captura de tela da segunda parte da repetição de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre uma circunferência inscrita em um triângulo



Fonte: Correia e Abar (2024, p. 236).

4.5 Lógica

É exposta nas Figuras 55 e 56 um exemplo realizado com a versão gratuita do LLM em dezembro de 2023 sobre lógica. Nele, propõe-se um problema em que quatro amigos, Lucas, Mariana, Felipe e Carolina estavam na cozinha na casa de Lucas quando sua mãe chegou e perguntou quem havia comido o chocolate que estava no armário. A isso, Lucas respondeu que ele mesmo havia comido o chocolate, Mariana respondeu que Felipe havia comido o chocolate, Felipe disse que não havia sido Lucas a comer o chocolate e Carolina respondeu que a Mariana não havia comido o chocolate. O enunciado então afirma que apenas um dos quatro amigos estava mentindo e pergunta quem havia comido o chocolate.

O ChatGPT iniciou sua resposta listando as afirmações de cada um dos amigos. Em seguida, passou à análise dessas afirmações:

- Se Lucas estiver mentindo, a afirmação de Mariana sobre Felipe ter comido o chocolate também seria falsa, criando uma contradição;
- Se Mariana estiver mentindo, então a afirmação de Felipe sobre Lucas não ter comido o chocolate também seria falsa, criando uma contradição;
- Se Felipe estiver mentindo, então Lucas comeu o chocolate, criando uma contradição com a afirmação de Lucas;
- Se Carolina estiver mentindo, Mariana comeu o chocolate, criando uma contradição com a afirmação de Mariana.

Figura 55 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre lógica

 **You**

Four friends, Lucas, Mariana, Felipe, and Carolina, were in Lucas's kitchen when his mother entered and asked each one who had eaten the chocolate in the cupboard. Lucas replied, "I ate the chocolate." Mariana said, "Felipe ate the chocolate." Felipe stated, "Lucas didn't eat the chocolate." And Carolina replied, "Mariana didn't eat the chocolate."

Knowing that only one of them was lying, who ate the chocolate?

 **ChatGPT**

Let's analyze the statements:

1. Lucas said he ate the chocolate.
2. Mariana accused Felipe of eating the chocolate.
3. Felipe claimed Lucas didn't eat the chocolate.
4. Carolina stated that Mariana didn't eat the chocolate.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 228).

Pode-se verificar que nenhuma das análises feita pelo ChatGPT está correta, pois:

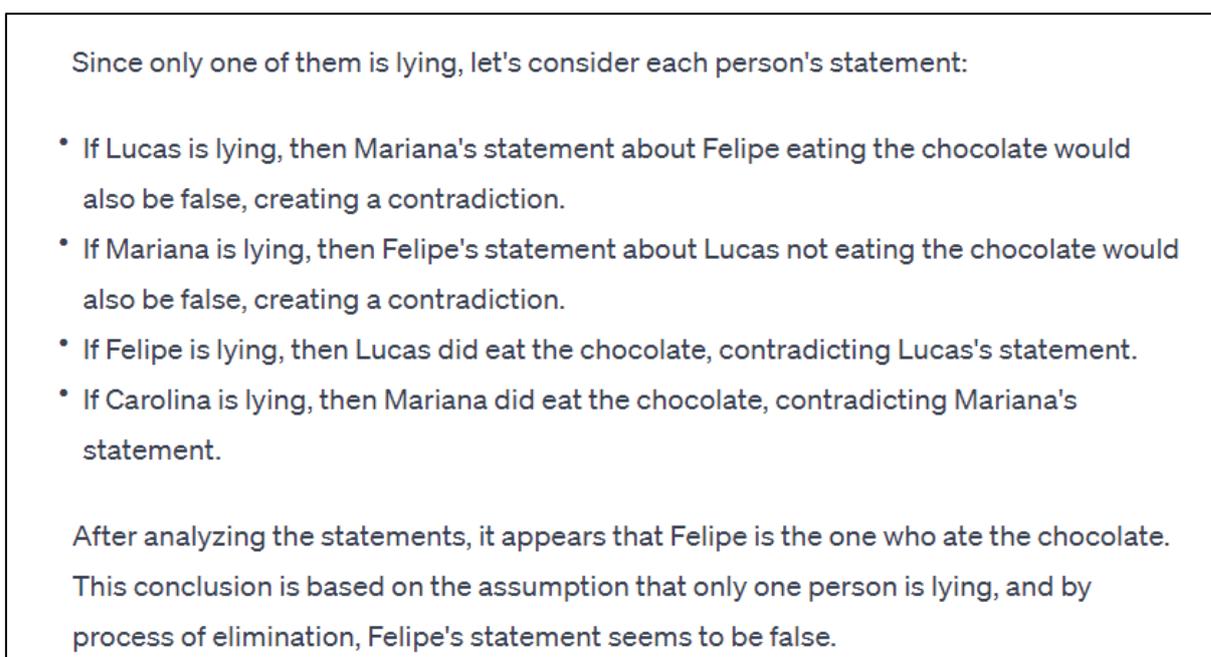
- Lucas estar mentindo não contradiz a afirmação de Mariana, uma vez que, se Lucas não comeu o chocolate, Felipe pode ter sido quem comeu;

- Mariana estar mentindo não contradiz a afirmação de Felipe, pois o fato de Felipe não ter comido o chocolate não implica no fato de Lucas ter comido;
- Felipe estar mentindo não contradiz a afirmação de Lucas, pelo contrário, reafirma a resposta de Lucas;
- Carolina estar mentindo não contradiz a afirmação de Mariana, uma vez que o enunciado não afirma que somente um deles comeu o chocolate, então se Mariana comeu o chocolate, Felipe também pode ter comido.

Embora a análise do ChatGPT indique que não há maneira em que somente um deles esteja mentindo, o modelo de linguagem chega à conclusão de que parece ter sido Felipe quem comeu o chocolate, baseado no fato de que parece a sua afirmação a falsa.

A conclusão do LLM possui uma contradição, pois se a afirmação de Felipe é falsa, então quem comeu o chocolate foram Lucas e Felipe, pois as afirmações de Lucas e Mariana teriam que ser verdadeiras. Há, também, outra resolução que seria Lucas estar mentindo e Felipe ter comido o chocolate.

Figura 56 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada ao ChatGPT em inglês sobre lógica



Fonte: Correia e Abar (2024, p. 228).

Neste exemplo, pode-se verificar que o ChatGPT alucinou (Cortiz, 2023), criando informações que, para o leitor menos atento, podem parecer plausíveis, mas que não possuem qualquer base na realidade dos fatos apresentados. O LLM apresentou, seguindo os escritos de Rudolph, Tan e Tan (2023), o entendimento de linguagem, demonstrado no resumo inicial do problema, apresentado no início da sua resposta; a abordagem lógica e bem-organizada, demonstrado pela estrutura da resposta, em uma sequência lógica; a conversação similar à humana; a velocidade; o entendimento de contexto, não percebendo as nuances e sutilidades do problema; e a criação de informação falsa, com a alucinação supracitada.

4.6 Função exponencial

Figura 57 – Captura de tela da primeira parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre crescimento exponencial

 **You**
 Experts predict that the population of a particular city will grow by 50% every 10 years. Knowing that today's population is 1 thousand people and assuming these experts are correct in their forecast, determine the size of the population of this city in 210 years.

 **ChatGPT**
 The population growth can be modeled using the exponential growth formula:

$$P(t) = P_0 \times (1 + r)^{t/T}$$

Where:

- $P(t)$ is the population at time t ,
- P_0 is the initial population,
- r is the growth rate per time period,
- t is the time elapsed, and
- T is the time period.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 229).

Nas Figuras 57 e 58, é exposto um exemplo de dezembro de 2023, utilizando a versão gratuita do modelo de linguagem, em que se fala de uma cidade fictícia na

qual especialistas preveem que haverá um crescimento de 50% na população a cada 10 anos e pede-se que determine a população dessa cidade em 210 anos, considerando que a previsão dos especialistas esteja certa e sabendo que a população atual dessa cidade é de 1000 pessoas.

Figura 58 – Captura de tela da segunda parte de uma questão realizada em inglês ao ChatGPT sobre crescimento exponencial

In this case:

- $P_0 = 1,000$ people (initial population),
- $r = 0.50$ (as the population grows by 50% every 10 years),
- $T = 10$ years (the growth occurs every 10 years).

Now, you want to find the population in 210 years ($t = 210$).

$$P(210) = 1,000 \times (1 + 0.50)^{210/10}$$

Let's calculate this:

$$P(210) = 1,000 \times (1.50)^{21}$$

$$P(210) = 1,000 \times 11,917,364,523$$

$$P(210) = 11,917,364,523,000$$

So, according to this model and assuming the experts are correct, the population of this city would be approximately 11.92 trillion people in 210 years. Keep in mind that this is a simplified model and actual population growth can be influenced by various factors.

Fonte: Correia e Abar (2024, p. 230).

O ChatGPT iniciou sua resposta afirmando que, para encontrar a população em 210 anos, pode-se utilizar a fórmula do crescimento exponencial, $P(t) = P_0 \times (1+r)^{t/T}$, em que $P(t)$ é a população no tempo t , P_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento da população, t é o tempo passado e T é o período de tempo.

Em seguida, o LLM utiliza os dados do enunciado ($P_0=1000$, $r=0,50$ e $T=10$) para descobrir a população dessa cidade em 210 anos ($t=210$). O ChatGPT substituiu corretamente os valores na fórmula do crescimento exponencial, chegando ao ponto

em que afirma que $P(210)=1000 \times (1,50)^{21}$. Na sequência, o modelo de linguagem alega que $P(210)=1000 \times 11917364523$, implicando que $(1,50)^{21}=11917364523$. O *chatbot* chega, então, à conclusão de que essa cidade terá 11917364523000 habitantes em 210 anos. Entretanto, $(1,50)^{21} \cong 4987,885$, o que implica que essa cidade teria 4987885 habitantes em 210 anos.

O ChatGPT ainda adiciona uma nota de que o modelo apresentado no exercício é simplificado e o crescimento populacional pode ser influenciado por diversos fatores.

Neste exemplo, pode-se verificar (Rudolph; Tan; Tan, 2023) o entendimento de linguagem, tendo o ChatGPT compreendido os dados do enunciado e o que foi solicitado; a velocidade; a conversação similar à humana; a abordagem lógica e bem-organizada; e a criação de informação falsa.

Neste capítulo, foram expostos exemplos do uso do ChatGPT na Matemática e foram analisadas sua capacidade matemática quanto a alguns objetos matemáticos, suas potencialidades e suas limitações (Rudolph; Tan; Tan, 2023). É possível verificar que o modelo de linguagem possui limitações que são determinantes quanto à sua capacidade matemática e, por vezes, fazem com que ele cometa erros na resolução dos exercícios matemáticos. Entretanto, “[...] a necessidade de verificação faz parte de pressupostos de construção do conhecimento, e potencializa o aprendizado” (Vieira; Santos, 2024, p. 74).

No capítulo seguinte, é verificado como o LLM pode ser utilizado na prática docente em Matemática, com o uso de perguntas efetivas e a criação de atividades didáticas e conteúdos utilizando textos referenciados.

5 EXPLORANDO O CHATGPT NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No presente capítulo, são exploradas possíveis maneiras nas quais o ChatGPT pode contribuir para a Educação Matemática, em especial, para a prática docente. Para isso, são apresentados dois aspectos, a habilidade para fazer perguntas e a proposta de criação de atividades de acordo com textos referenciados e anexados.

5.1 Como perguntar ao ChatGPT

De acordo com o Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente – ILDPD (2024), a criação de *prompts* bem elaborados pode ser a chave para obter respostas detalhadas, precisas e ricas em informações do ChatGPT, promovendo a aprendizagem e a compreensão. Segundo ILDPD (2024), um *prompt* é um estímulo verbal ou textual que é utilizado para induzir uma resposta do LLM, podendo se tratar de uma pergunta, uma afirmação, um problema ou qualquer tipo de instrução que leve o modelo de linguagem ao tipo de resposta desejada.

Para isso, é necessário considerar alguns princípios fundamentais, como: a clareza e a especificidade do *prompt*, para evitar ambiguidades e garantir que o ChatGPT compreenda corretamente a solicitação; a contextualização, que assegura a relevância e utilidade das respostas; e a adaptabilidade, permitindo ajustar a complexidade e profundidade dos *prompts* e respostas conforme o nível de conhecimento e as necessidades do estudante-alvo (ILDPD, 2024).

Freire e Faundez (2024) defendem uma pedagogia da pergunta, em que alunos sejam encorajados a perguntarem, a refletirem sobre o que perguntar e que haja um incentivo à curiosidade destes alunos em oposição ao que os autores se referem como a pedagogia da resposta, em que o professor fornece respostas a perguntas que sequer foram feitas e já é esperado que o aluno, quando pergunta, já saiba a resposta para a questão antes mesmo de realizá-la.

Segundo o ILDPD (2024), o desenvolvimento de *prompts* efetivos não apenas conduz o ChatGPT a fornecer respostas pertinentes, mas também fomenta o pensamento crítico e a criatividade dos alunos.

Além disso, há quatro componentes fundamentais a serem considerados no desenvolvimento de *prompts* para alcançar resultados otimizados (ILDPD, 2024):

1. A identidade ou o papel que o ChatGPT deve assumir para formular a resposta. No contexto da Educação Matemática, por exemplo, se o objetivo for explicar um conceito complexo, o *prompt* pode ser iniciado com "Atue como um professor de Matemática e me explique...";
2. O tema ou tarefa específica. Caso o intuito seja, por exemplo, reforçar a compreensão de alunos do oitavo ano o Teorema de Pitágoras, pode-se solicitar que o ChatGPT elabore situações-problema relacionadas ao tema;
3. O contexto ou informações adicionais. Por exemplo, se o objetivo é trabalhar com números negativos, pode-se pedir ao ChatGPT para criar um plano de aula que envolva os estudantes em atividades utilizando dados como as temperaturas nos polos Sul e Norte;
4. O público-alvo. É essencial definir claramente o nível de conhecimento do público-alvo para que o ChatGPT possa adaptar sua resposta adequadamente. Por exemplo, ao ensinar funções para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, o *prompt* pode solicitar uma explicação sobre o conceito de função, para alunos do Ensino Médio, pode-se incluir exemplos de funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e outros.

Ao incorporar esses quatro elementos, as respostas geradas pelo ChatGPT podem ser significativamente enriquecedoras para os processos de ensino e aprendizagem, abrangendo desde a explicação de conceitos fundamentais até a elaboração de materiais didáticos e planos de aula (ILDPD, 2024).

Ademais, o ILDPD (2024) indica o que é aconselhável para o desenvolvimento de *prompts* efetivos com o ChatGPT:

1. **Perguntas abertas:** em vez de utilizar perguntas que requeiram apenas respostas curtas, é importante que se faça perguntas que permitam que os

estudantes expressem seus pensamentos e opiniões de maneira mais detalhada;

2. **Análise e avaliação:** os *prompts* que requerem análise e avaliação podem ajudar os estudantes a desenvolverem habilidades críticas e aprofundarem sua compreensão acerca de um tema;
3. **Criatividade:** assim, pode-se ajudar estudantes a encontrarem soluções inovadoras a problemas;
4. **Colaboração:** os *prompts* que incentivam o trabalho em equipe podem ajudar os estudantes a aprenderem com os colegas;
5. **Reflexão pessoal:** auxiliando os estudantes a pensarem na sua própria aprendizagem e a desenvolverem habilidades de autorreflexão;
6. **Pesquisa e a descoberta:** ajudando a encontrar informação relevante e confiável;
7. **Aplicação prática:** ajudando os estudantes a estabelecerem um elo entre o que aprendem e situações reais;
8. **Criação de conteúdo:** os *prompts* que incentivam a criação de conteúdo podem auxiliar no desenvolvimento das habilidades de escrita;
9. **Empatia e consciência social:** incentivando a reflexão sobre temas de justiça social, inclusão e diversidade;
10. **Resolução de problemas éticos:** desafiando os estudantes a olharem para o tema sob diferentes perspectivas e tomarem decisões fundamentadas.

O ILDPD (2024) separa, também, uma lista de 15 palavras para serem utilizadas com vistas a gerar *prompts* efetivos, conforme o quadro 2.

Quadro 2 - Palavras para gerar prompts efetivos e exemplos de seu uso

Palavra	Exemplo
Escreva	“Escreva três parágrafos sobre o desenvolvimento da lógica matemática”
Atue	“Atue como um professor de Matemática e me explique o que são os números complexos”
Crie	“Crie 3 perguntas sobre equações de retas que envolvam retas paralelas ou perpendiculares”
Liste	“Liste 5 livros sobre História da Matemática para alunos dos anos finais do Ensino Superior”
Rubrica	“Faça uma rubrica de 4 níveis, de 1 a 4, em formato de tabela, para avaliar apresentações orais sobre a história de Tales de Mileto para alunos do Ensino Médio”

Traduza	“Traduza o seguinte texto sobre vetores do espanhol para o português... [colar o texto]”
Resuma	“Resuma o que afirma o Teorema de Tales em, no máximo, três parágrafos para retomar o conteúdo com alunos da primeira série do Ensino Médio”
Ideias	“Me dê cinco ideias de como levar o conteúdo de funções afim para o cotidiano do aluno da primeira série do Ensino Médio”
Defina	“Defina o que é um losango de maneira acessível para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental”
Análise	“Análise e extraia conclusões dos resultados de uma enquete sobre a compreensão da Matemática entre alunos do Ensino Fundamental do Brasil... [inserir resultados da enquete]”
Corrija	“Corrija o seguinte texto sobre o desenvolvimento dos números irracionais e me mostre em uma tabela as frases originais e corrigidas... [inserir o texto a ser corrigido]”
Explique	“Me explique a importância da Matemática no cotidiano das pessoas como se eu fosse uma criança de 11 anos”
Esquema	“Faça um esquema para organizar um projeto sobre as curvas geradas na secção de um cone por um plano para alunos da terceira série do Ensino Médio”
Entrevista	“Escreva uma entrevista fictícia de cinco perguntas com Al-Khwarizmi sobre suas contribuições para a Matemática e o mundo moderno”
Problema	“Apresente um problema matemático sobre o crescimento constante no número de vendas de uma loja mês a mês e desenvolva uma solução passo a passo para esse problema que envolva o conceito de progressões aritméticas”

Fonte: adaptado de ILDPD (2024).

Propõe-se, assim, na utilização da IA generativa, um foco na criação de perguntas que não apenas busquem respostas diretas, mas que incentivem o pensamento crítico e a aprendizagem colaborativa.

Para o seu uso mais eficaz, espera-se que os docentes desenvolvam competências avançadas na formulação de perguntas direcionadas a sistemas de IA generativa, o que potencialmente favorecerá interações mais produtivas e otimizará o uso dessas tecnologias no contexto educacional. Tal aprimoramento contribuirá para a promoção de um ambiente de aprendizagem crítico, participativo e dialógico, fortalecendo o engajamento e a reflexão dos estudantes.

Leite (2024) utilizou o ChatGPT para a criação de planos de aula em conteúdos de Química e, na elaboração destes, o autor verificou que a IA generativa não questiona a quem, por que, o que ou como vai ensinar o conteúdo, que são perguntas fundamentais para os processos de ensino e de aprendizagem. Assim, a elaboração

do plano de aula se limita a uma realização de tarefas, atividades ou ações, sem que haja qualquer reflexão (Leite, 2024).

Para Leite (2024), o ChatGPT carece de contexto, significando que a ferramenta pode não ser capaz de entender as sutilidades de uma conversa e fornecer respostas equivocadas, completando:

[...] o *prompt* que se dá ao *chatbot*, desempenha um papel crucial na qualidade da resposta que se recebe. Para obter as melhores respostas, importa fazer perguntas específicas e detalhadas. Contudo, nem sempre perguntas específicas e detalhadas geram respostas corretas [...] (Leite, 2024, p. 497, grifos do autor).

5.2 A criação de atividades por meio de textos referenciados

O presente subcapítulo tem como objetivo utilizar o ChatGPT na criação de atividades e conteúdo. Para isso, com base no subcapítulo anterior da presente dissertação, optou-se por contextualizar os *prompts* pedindo que o modelo de linguagem respondesse de acordo com documentos referenciados, anexados ao LLM. Foram utilizados trechos curtos para obter respostas menos vagas, esperando-se que, confinado a estes textos, as alucinações da ferramenta fossem minimizadas e que, dessa forma, a IA conseguisse auxiliar mais na prática docente do professor de Matemática.

Foram utilizados textos de Costa (1981a), Iezzi e Murakami (2013) e Lima (2013). Em cada caso, pediu-se que a ferramenta se limitasse ao documento anexado para responder às perguntas seguintes.

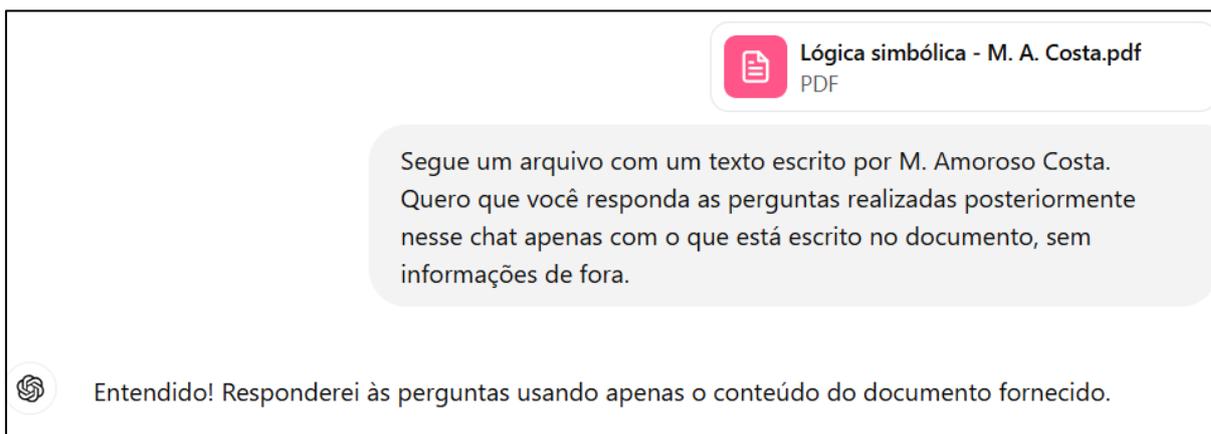
5.2.1 Lógica simbólica – esboço histórico

Nesta seção, utilizou-se a versão gratuita do ChatGPT e as interações ocorreram em novembro de 2024.

Na Figura 59, expõe-se o comando realizado ao ChatGPT ao qual é anexado um documento com o esboço histórico da lógica simbólica realizado por Costa

(1981a), referenciado na seção 3.1.1, sendo possível, assim, realizar uma comparação entre as respostas do LLM a uma pergunta aberta e a uma pergunta limitada a um texto anexado, pedindo-se que, nas interações posteriores, a ferramenta se limite ao que está escrito no documento.

Figura 59 - Captura de tela de interação com o ChatGPT pedindo que as suas respostas se limitem ao documento anexado



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, solicitou-se ao ChatGPT que citasse alguns autores da lógica simbólica e suas contribuições, como mostram as Figuras 60 e 61.

Figura 60 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT citando autores da lógica simbólica e suas contribuições

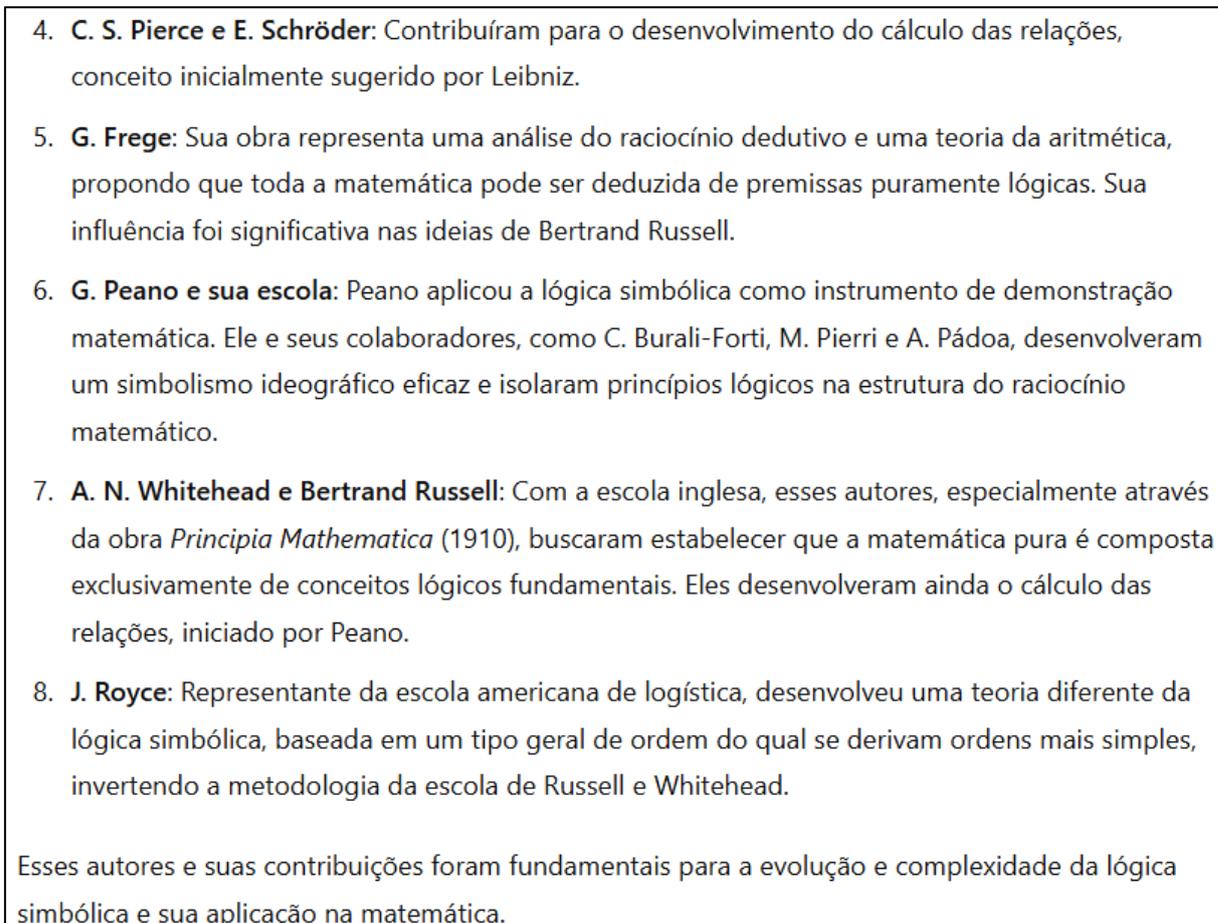
Cite alguns autores da lógica simbólica e suas contribuições

 O documento menciona vários autores que contribuíram para o desenvolvimento da lógica simbólica e suas respectivas contribuições:

1. **Leibniz:** Introduziu as ideias de uma "característica universal" (uma linguagem simbólica para representar conhecimentos científicos) e de um "cálculo lógico" (um sistema para reduzir raciocínios dedutivos a transformações de fórmulas). Ele também introduziu as operações fundamentais de adição e multiplicação lógicas de classes e a ideia de igualdade entre classes de objetos.
2. **G. Boole:** Considerado o verdadeiro criador da lógica simbólica no que se refere ao cálculo das classes. Sua obra *Mathematical Analysis of Logic* (1847) estabeleceu a lógica simbólica como um sistema bem estruturado, introduzindo os símbolos 1 e 0 para representar o universo lógico e o nada lógico, respectivamente. Boole desenvolveu um sistema algébrico que permite transformações algébricas em raciocínios dedutivos.
3. **A. de Morgan, J. Venn e S. Jevons:** Esses autores ingleses aperfeiçoaram e ampliaram o trabalho de Boole. Suas contribuições resultaram na chamada "Álgebra da lógica", uma teoria das classes e suas relações de identidade e inclusão.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 61. Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT citando autores da lógica simbólica e suas contribuições



Fonte: dados da pesquisa (2024).

O LLM citou oito autores citados no texto compartilhado (Costa 1981a) e suas respectivas contribuições para o desenvolvimento da lógica simbólica. Verifica-se que o modelo de linguagem de fato se limitou às informações presentes no documento anexado, inclusive utilizando as mesmas palavras de Costa (1981a) em alguns trechos de sua resposta.

Na Figura 62, apresenta-se a resposta do ChatGPT à pergunta “Quem pode ser considerado o verdadeiro criador da lógica simbólica?”

É possível verificar a utilização de argumentos encontrados no texto de Costa (1981a), anexado, para a formulação da resposta do LLM. Não há elementos exteriores ao documento fornecido e o ChatGPT esclarece no início de sua resposta que esta está baseada no texto anexado.

Figura 62 - Resposta do ChatGPT sobre o verdadeiro criador da lógica simbólica

Quem pode ser considerado o verdadeiro criador da lógica simbólica?

De acordo com o documento, **George Boole** é considerado o verdadeiro criador da lógica simbólica, especificamente no que se refere ao cálculo das classes. Sua obra *Mathematical Analysis of Logic*, publicada em 1847, estabeleceu um sistema coordenado que utilizava símbolos (como 1 e 0) para representar conceitos lógicos, permitindo transformar raciocínios dedutivos em operações algébricas.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Na sequência, como apresentado nas Figuras 63 e 64, pediu-se ao ChatGPT que construísse uma tabela com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições, de maneira que alunos que estão sendo introduzidos ao conteúdo conseguissem compreender.

Figura 63 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT construindo uma tabela com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições

Faça uma tabela com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições de maneira simples para que alunos que estão sendo introduzidos ao conteúdo consigam compreender

Aqui está uma tabela simples com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições para facilitar o entendimento:

Autor	Contribuição Principal
Leibniz	Introduziu a ideia de uma "linguagem universal" (para traduzir o conhecimento científico) e um "cálculo lógico" (para simplificar o raciocínio dedutivo).
George Boole	Criou a base da lógica simbólica moderna com símbolos 1 e 0, representando "tudo" e "nada", tornando o raciocínio dedutivo uma série de operações algébricas.
Augustus De Morgan, John Venn e Stanley Jevons	Desenvolveram e expandiram o trabalho de Boole, criando a "Álgebra da Lógica", que estuda relações entre classes e identidades.
C. S. Pierce e Ernst Schröder	Desenvolveram o cálculo das relações, aplicando a lógica para entender como diferentes elementos se relacionam entre si.
Gottlob Frege	Analisou o raciocínio dedutivo e mostrou que a matemática poderia ser deduzida a partir de premissas lógicas; influenciou Bertrand Russell.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 64 - Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT construindo uma tabela com os principais autores da lógica simbólica e suas contribuições

Giuseppe Peano e colaboradores	Aplicaram a lógica simbólica como ferramenta para a matemática, criando símbolos específicos e isolando princípios lógicos básicos.
Bertrand Russell e Alfred North Whitehead	Desenvolveram o "cálculo das relações" e escreveram <i>Principia Mathematica</i> , unificando lógica e matemática.
Josiah Royce	Desenvolveu uma teoria baseada em uma ordem geral de onde se derivam ordens mais simples, contrastando com os métodos de Russell e Whitehead.

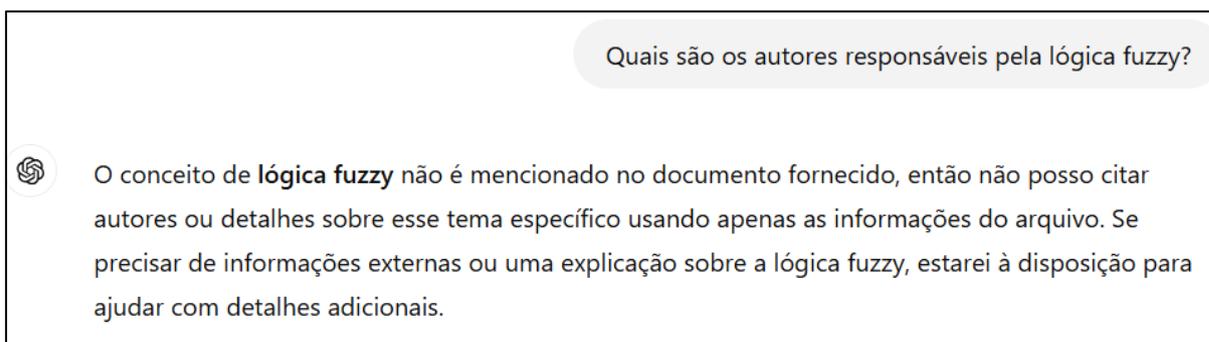
Essa tabela resume de forma simples as contribuições de cada autor para facilitar o entendimento inicial dos estudantes.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Verifica-se a organização utilizada pelo ChatGPT na construção da tabela solicitada e a alta capacidade de entendimento de linguagem, utilizando o texto anexado e construindo corretamente (Costa, 1981a) uma tabela relacionando os autores às suas contribuições para a lógica simbólica.

Na Figura 65, expõe-se a resposta do LLM sobre os autores responsáveis pela lógica *fuzzy*, que não é mencionada em Costa (1981a).

Figura 65 - Captura de tela da resposta do ChatGPT sobre os autores responsáveis pela lógica *fuzzy*

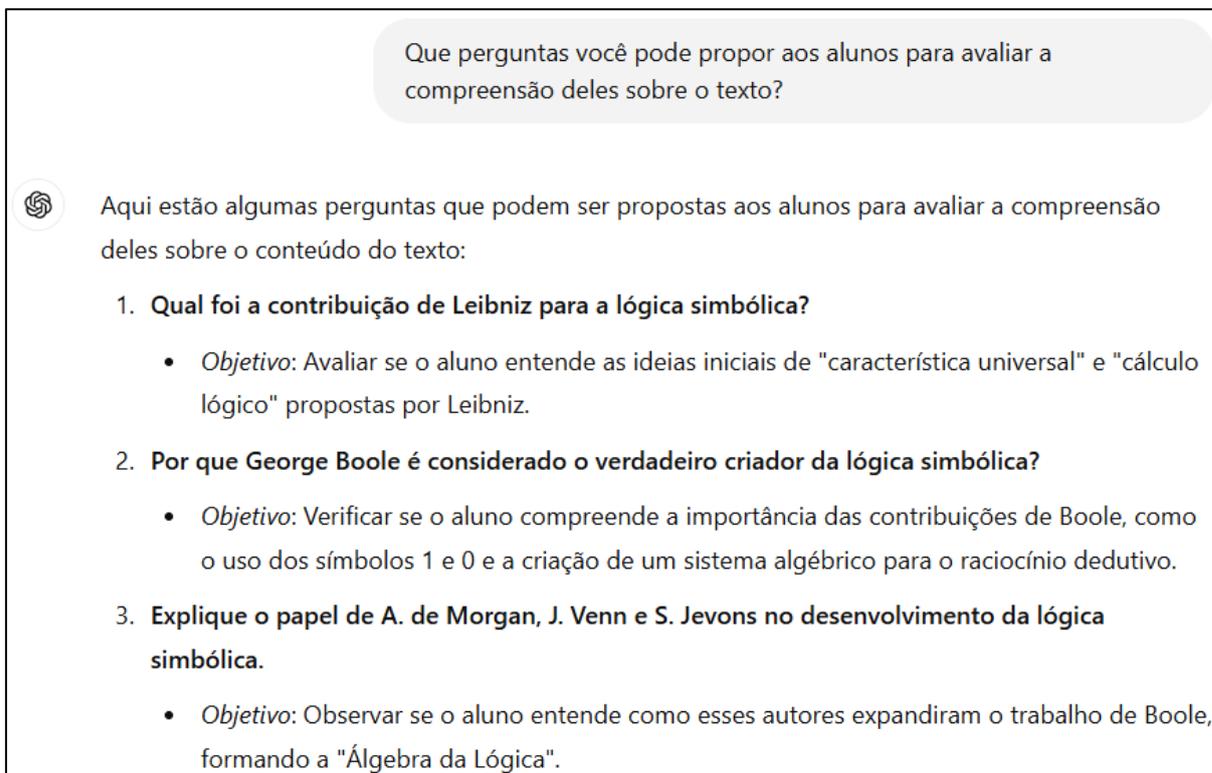


Fonte: dados da pesquisa (2024).

Com sua resposta, o ChatGPT expõe que o tópico da pergunta não é citado no texto fornecido e, portanto, não poderia responder ao que foi pedido utilizando apenas as informações do arquivo, se colocando à disposição para fornecer informações externas sobre a lógica *fuzzy*.

É exposta nas Figuras 66 e 67 a resposta do ChatGPT ao serem solicitadas perguntas que poderiam ser propostas aos alunos para avaliar a compreensão deles sobre o texto.

Figura 66 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT listando perguntas para avaliar a compreensão de alunos sobre o texto



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 67 - Segunda parte da resposta do ChatGPT listando perguntas para avaliar a compreensão de alunos sobre o texto

4. **Qual foi a importância dos trabalhos de Peano e seus colaboradores para a aplicação da lógica simbólica na matemática?**

- *Objetivo:* Avaliar se o aluno reconhece a transição da lógica simbólica como ferramenta teórica para instrumento de demonstração matemática.

5. **Como Bertrand Russell e A. N. Whitehead contribuíram para o desenvolvimento da lógica simbólica e sua conexão com a matemática?**

- *Objetivo:* Checar se o aluno compreende o impacto das obras *Principles of Mathematics* e *Principia Mathematica* na sistematização da lógica simbólica.

6. **Explique a diferença entre a abordagem de J. Royce e a da escola inglesa de Russell e Whitehead.**

- *Objetivo:* Testar a compreensão do aluno sobre as metodologias contrastantes entre a decomposição de ordens de Royce e a construção lógica progressiva de Russell e Whitehead.

Essas perguntas ajudam a reforçar os conceitos fundamentais e a identificar se os alunos captaram as ideias principais e as contribuições dos autores mencionados no texto.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Observa-se que o LLM criou questões que estão de acordo com o texto anexado e, portanto, poderiam ser utilizadas para avaliar a compreensão de alunos sobre o texto.

Verificou-se que, em todas as suas respostas, o ChatGPT se baseou no texto anexado, não tendo grandes alucinações e nem acrescentando informações de outras fontes. Em comparação com os exemplos apresentados na seção 3.1.1 do presente texto, observa-se que o método de anexação do documento e contextualização dos *prompts* contribuiu para que o LLM formulasse respostas mais confiáveis e, portanto, com mais utilidade para a prática docente.

5.2.2 Conjuntos

Nesta seção, compartilhou-se com o ChatGPT parte do quinto capítulo da obra 'Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções', de Gelson lezzi e Carlos Murakami (2013). Para este texto, foi utilizado o mesmo *prompt* exposto na Figura 59. As interações com o modelo de linguagem aqui expostas foram realizadas em dezembro de 2024, utilizando-se a versão paga do ChatGPT. Trata-se de um conteúdo que é estudado tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Por isso, em um dos *prompts*, optou-se por indicar o ano em que a atividade seria aplicada.

Nas Figuras 68 e 69, é exposto o resumo realizado pelo LLM com base no texto de lezzi e Murakami (2013).

Figura 68 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT realizando um resumo do texto de lezzi e Murakami

Faça um resumo do que está escrito no texto.



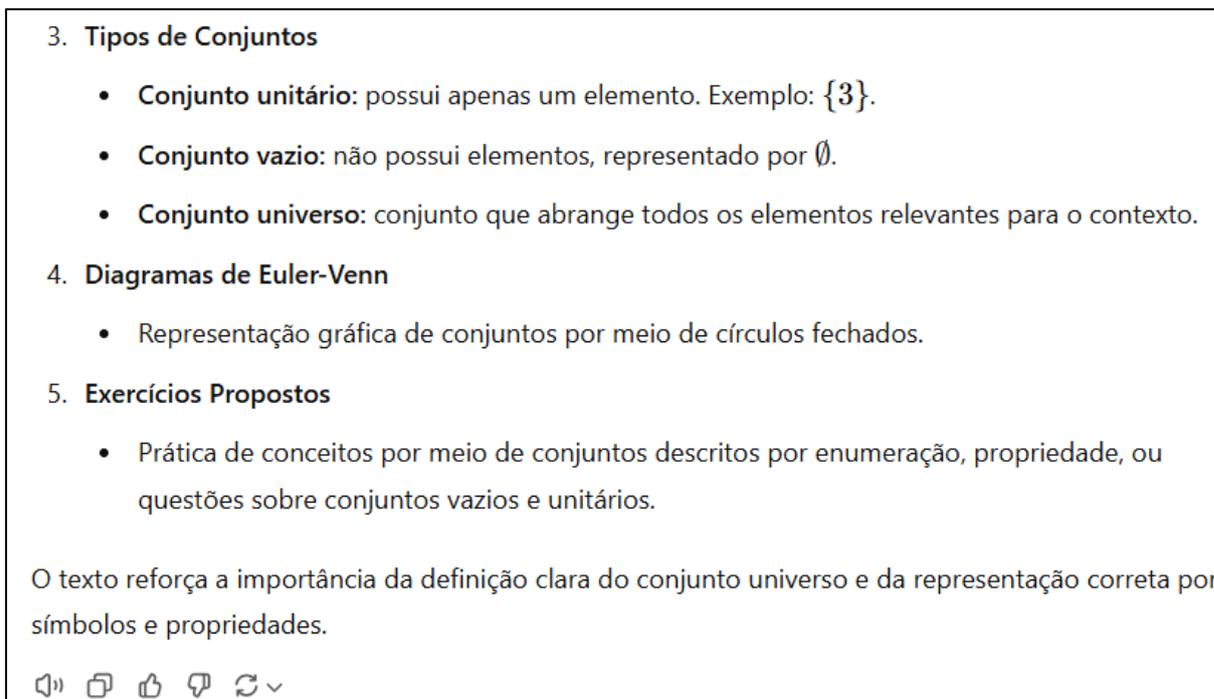
Resumo do Capítulo 2 – Fundamentos de Matemática Elementar (Conjuntos e Funções)

O capítulo aborda conceitos fundamentais da **Teoria dos Conjuntos**, essenciais para a matemática elementar. Os principais tópicos são:

1. **Noções Primitivas**
 - Conjunto: agrupamento, classe ou coleção de elementos.
 - Elemento: membro de um conjunto.
 - Pertinência: relação entre um elemento e um conjunto, representada por $x \in A$ (x pertence ao conjunto A) ou $x \notin A$ (x não pertence ao conjunto A).
2. **Descrição de Conjuntos**
 - **Enumeração dos elementos:** elementos listados entre chaves. Exemplo: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
 - **Propriedade característica:** descrição por uma regra. Exemplo: $A = \{x | x \text{ é um número par não negativo}\}$.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 69 - Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT realizando um resumo do texto de lezzi e Murakami



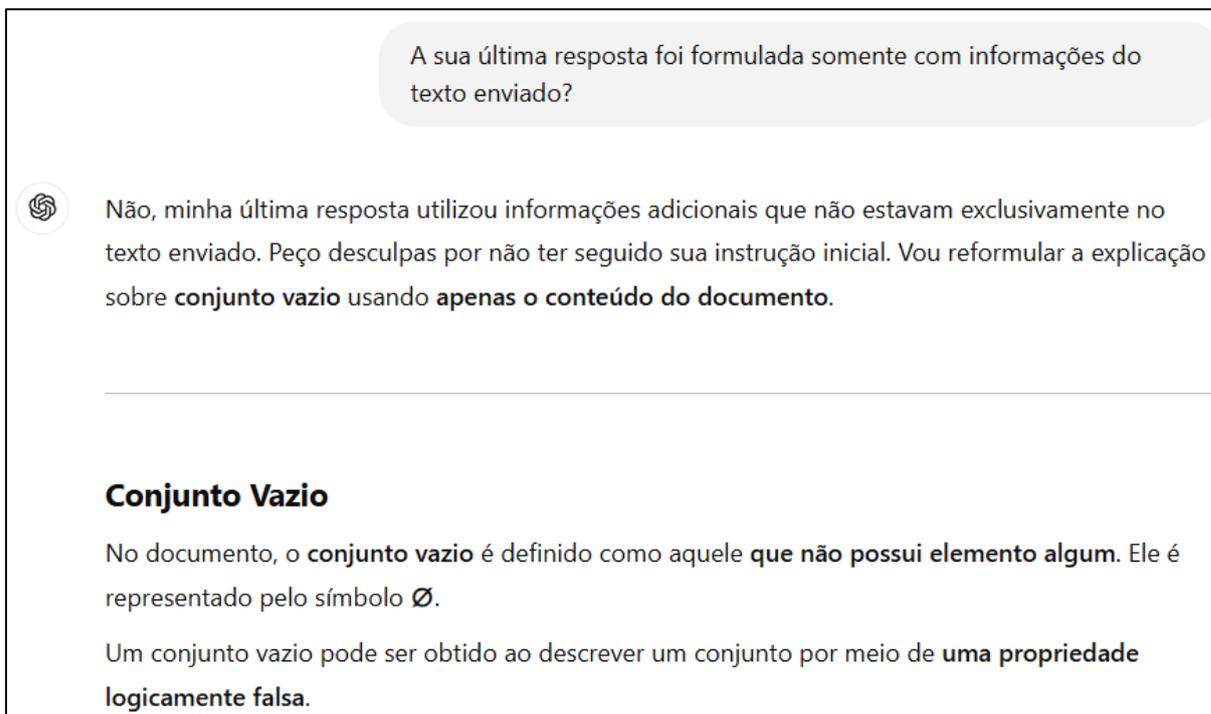
Fonte: dados da pesquisa (2024).

É possível verificar que, em seu resumo, o ChatGPT abordou todos os temas citados pelo texto anexado, não se aprofundando, mas explicando cada ponto e utilizando exemplos retirados do texto para esclarecer cada tópico.

Em seguida, pediu-se para que o modelo de linguagem explicasse sobre o conceito de conjunto vazio. Para esse *prompt*, o ChatGPT respondeu com informações que foram retiradas de textos alheios ao anexado. Então, perguntou-se se a sua resposta anterior havia sido formulada somente com informações contidas no texto compartilhado. A resposta do LLM está exposta nas Figuras 70 e 71.

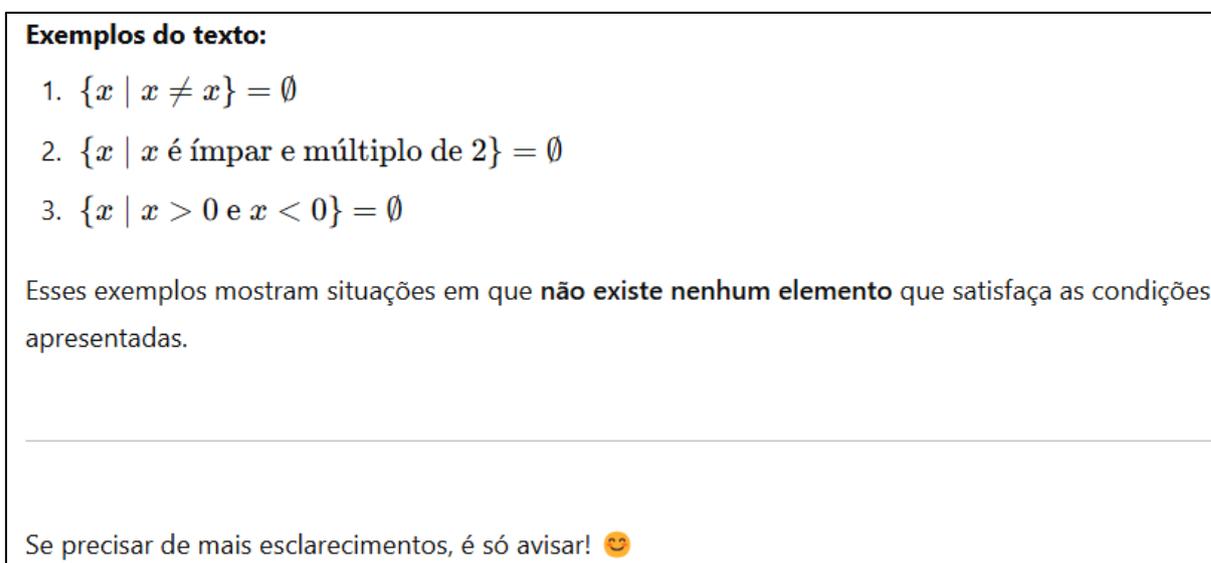
Evidenciou-se que, quando confrontado sobre a utilização de informações que não estavam contidas no texto, o ChatGPT indicou que, de fato, sua resposta não continha apenas elementos do texto, mas também informações adicionais, além de formular uma resposta que está de acordo com o que foi proposto inicialmente.

Figura 70 - Captura de tela da primeira parte da resposta do ChatGPT sobre o conjunto vazio e a utilização de informações adicionais



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 71 - Captura de tela da segunda parte da resposta do ChatGPT sobre o conjunto vazio e a utilização de informações adicionais



Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, solicitou-se à ferramenta que criasse uma atividade baseada no conteúdo do texto compartilhado para a aplicação com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. É exposta nas Figuras 72, 73, 74, 75 e 76, a resposta fornecida pelo ChatGPT.

Figura 72 - Primeira captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

Crie uma atividade baseada no conteúdo do texto para aplicar com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental



Atividade: Explorando os Conjuntos - 8º Ano do Ensino Fundamental

Tema: Conceitos básicos de conjuntos (elementos, descrição, conjunto unitário, vazio e universo).

Objetivo: Identificar, representar e descrever conjuntos, diferenciando conjuntos unitários, vazios e universo.

Duração: 50 minutos

Materiais: Papel, lápis, borracha, quadro branco.

Parte 1: Aquecendo os motores (10 minutos)

Pergunta para reflexão em grupo:

- O que é um conjunto?
- Vocês conseguem pensar em exemplos de conjuntos do dia a dia?

Respostas esperadas: Conjunto de frutas, conjunto de cores do arco-íris, conjunto de planetas, etc.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 73 - Segunda captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

Parte 2: Atividade Principal (30 minutos)

1. Identificando Conjuntos (10 minutos)

Enunciado:
Analisar os conjuntos abaixo e responder:

a) Qual é o conjunto unitário?
b) Qual é o conjunto vazio?
c) Qual é o conjunto universo?

Conjuntos:

- $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar e múltiplo de } 2\}$
- $B = \{3\}$
- $C = \{x \mid x \text{ é um número inteiro positivo menor que } 10\}$

Espaço para resposta:

a) ____
b) ____
c) ____

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Verifica-se que o ChatGPT cometeu erros no primeiro exercício da atividade principal, exposto nas Figuras 73 e 74, em que considera que o conjunto dos números inteiros positivos menores do que 10 é o conjunto Universo – o que pode ser verdadeiro em determinado contexto, mas não o é de forma generalizada. Entretanto, o LLM criou uma atividade extensa, organizada e baseada no texto anexado (Iezzi; Murakami, 2013).

Figura 74 - Terceira captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

Gabarito:

- a) Conjunto unitário: B
- b) Conjunto vazio: A
- c) Conjunto universo: C

2. Descrevendo Conjuntos (10 minutos)

Enunciado:
Descreva os conjuntos abaixo utilizando a **propriedade característica**.

a) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Espaço para resposta:

a) $A = \{x \mid \underline{\hspace{2cm}}\}$
b) $B = \{x \mid \underline{\hspace{2cm}}\}$

Gabarito:

- a) x é um número par positivo menor ou igual a 10.
- b) x é um algarismo arábico.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 75 - Quarta captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

3. Criando Seu Próprio Conjunto (10 minutos)

Enunciado:
Crie 3 conjuntos seguindo as instruções abaixo:

a) Um conjunto unitário.
b) Um conjunto vazio (explique a regra para que fique vazio).
c) Um conjunto descrito por propriedade característica.

Espaço para resposta:

a) _____
b) _____
c) _____

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 76 - Quinta captura de tela da resposta do ChatGPT criando uma atividade sobre conjuntos para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental

Parte 3: Encerramento e Reflexão (10 minutos)

Discussão:

- Qual foi a parte mais fácil?
- Qual foi a parte mais desafiadora?
- O que vocês aprenderam sobre conjuntos hoje?

Conclusão:

Reforce que conjuntos são formas importantes de organizar informações e que aparecem em muitos contextos do dia a dia.

Tarefa de Casa (Opcional):

Peça aos alunos que tragam exemplos de conjuntos observados no cotidiano, escritos por enumeração e por propriedade característica.

Pronto! Atividade estruturada para fixar os conceitos apresentados no texto. 😊

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Por fim, perguntou-se ao ChatGPT se há, além dos contidos em lezzi e Murakami (2013), outros exercícios que poderiam ser utilizados para avaliar o aprendizado dos alunos no conteúdo. Nas Figuras 77, 78, 79, 80, 81 e 82, é exposta a resposta do modelo de linguagem para essa pergunta.

Novamente, verifica-se erros na resposta do ChatGPT, como no exercício 2, exposto na Figura 78, em que cita que o conjunto $\{x|x^2=4\}$ é unitário, sem citar o conjunto universo que o transforme em um conjunto unitário.

Verifica-se, também, que o ChatGPT definiu o objetivo de cada exercício e deu sugestões de como utilizá-los (atividade em grupo, atividade individual e desafio para casa), indicando que os exercícios possuem diferentes níveis de dificuldade.

É importante ressaltar que, nesse exemplo, é possível notar que, mesmo com o texto anexado, é necessário que se faça uma verificação das respostas fornecidas pela IA generativa, pois ainda há alucinações.

Figura 77 - Primeira captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013)

Além dos exercícios propostos no texto, há outros exercícios que poderiam ser utilizados para avaliar o aprendizado dos alunos nesse conteúdo?

 **Novos Exercícios para Avaliar o Aprendizado sobre Conjuntos**

Com base no conteúdo do texto enviado, aqui estão mais alguns exercícios que podem ser usados para reforçar e avaliar o aprendizado dos alunos sobre **Conjuntos**.

1. Complete com os Símbolos Corretos (\in ou \notin)

a) $5 __ \{1, 2, 3, 4\}$
b) $a __ \{a, b, c, d\}$
c) $0 __ \{x \mid x > 1\}$
d) $azul __ \{vermelho, verde, amarelo\}$

Objetivo: Testar se os alunos compreendem a relação de pertinência entre elementos e conjuntos.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 78 - Segunda captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013)

Gabarito:

- a) \notin
- b) \in
- c) \notin
- d) \notin

2. Identificação de Conjuntos Especiais

Determine se os conjuntos abaixo são **unitários**, **vazios** ou **infinito**:

- a) $\{x \mid x^2 = 4\}$
- b) $\{x \mid x > 10 \text{ e } x < 5\}$
- c) $\{x \mid x \text{ é um número ímpar positivo}\}$

Objetivo: Avaliar o entendimento sobre conjuntos unitários, vazios e infinitos.

Gabarito:

- a) Unitário
- b) Vazio
- c) Infinito

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 79 - Terceira captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013)

3. Enumere os Elementos dos Conjuntos

Escreva os elementos dos seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \mid x \text{ é uma vogal da palavra "ESCOLA"}\}$

b) $B = \{x \mid x \text{ é um número inteiro entre -2 e 3}\}$

Objetivo: Praticar a enumeração de conjuntos com base em uma propriedade característica.

Gabarito:

a) $A = \{E, O, A\}$

b) $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

4. Verdadeiro ou Falso?

a) Todo conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

b) O conjunto $\{0\}$ é o mesmo que o conjunto vazio.

c) O conjunto dos números pares positivos é finito.

Objetivo: Estimular o raciocínio lógico e a compreensão de conceitos fundamentais.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 80 – Quarta captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013)

Gabarito:

a) Verdadeiro
b) Falso
c) Falso

5. Crie um Conjunto

Descreva por **propriedade característica** os seguintes conjuntos:

a) O conjunto dos números múltiplos de 5 entre 0 e 50.
b) O conjunto das cores da bandeira do Brasil.
c) O conjunto das vogais presentes na palavra "MATEMÁTICA".

Objetivo: Avaliar a capacidade dos alunos de representar conjuntos usando propriedades.

Gabarito:

a) $\{x \mid x \text{ é múltiplo de } 5 \text{ e } 0 \leq x \leq 50\}$
b) $\{x \mid x \text{ é uma cor da bandeira do Brasil}\}$
c) $\{x \mid x \text{ é uma vogal da palavra MATEMÁTICA}\}$

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 81 – Quinta captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013)

6. Desafio: Diagrama de Venn

Enunciado:

Desenhe dois conjuntos no Diagrama de Venn:

- Conjunto A : números pares entre 1 e 10.
- Conjunto B : números ímpares entre 1 e 10.

Preencha corretamente os elementos nos círculos.

Objetivo: Desenvolver habilidades visuais e entender interseções entre conjuntos.

Gabarito:

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
- $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- Interseção: vazio

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 82 – Sexta captura de tela da resposta do ChatGPT com exercícios complementares para o texto de lezzi e Murakami (2013)

Como Usar Esses Exercícios:

1. **Atividade em Grupo:** Exercícios 1, 2 e 3.
2. **Atividade Individual:** Exercícios 4 e 5.
3. **Desafio para Casa:** Exercício 6.

Esses exercícios cobrem diferentes níveis de dificuldade e abordagens (interpretação, lógica, representação gráfica) para garantir que os alunos compreendam os conceitos principais apresentados no texto. 😊

🔊 📄 👍 🗨️ ↻

Fonte: dados da pesquisa.

5.2.3 Logaritmos

Para esta seção, anexou-se ao ChatGPT o primeiro capítulo do livro ‘*Logaritmos*’ de Lima (2013), em que o autor fala sobre a história de como os logaritmos foram desenvolvidos. As interações foram realizadas em dezembro de 2024 e foi utilizada a versão paga do modelo de linguagem.

Figura 83 - Captura de tela de interação com o ChatGPT indicando o uso do texto de Lima (2013) como base para suas respostas


Elon Lages Lima - Logaritmos - Capítu...
PDF

Segue um arquivo com um texto escrito por Elon Lages Lima. Quero que você responda as perguntas realizadas posteriormente nesse chat apenas com o que está escrito no documento, sem informações de fora.



Entendido! Responderei às suas perguntas apenas com base no conteúdo do documento enviado. Pode prosseguir.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Pediu-se ao ChatGPT que utilizasse o texto anexado como base para as respostas posteriores, como é exposto na Figura 83.

Então, foi solicitado que o LLM atuasse como um professor de Matemática e desenvolvesse atividades baseadas no texto anexado a serem aplicadas em sala de aula para avaliar o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo do documento, como mostram as Figuras 84, 85, 86, 87, 88, 89 e 90.

Figura 84 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Com base no texto anexado, atue como um professor de matemática e desenvolva atividades a serem aplicadas em sala de aula para avaliar o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo do documento.



Plano de Aula: Logaritmos – História, Conceito e Aplicações

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio (3º ano) ou início do Ensino Superior

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada

Objetivo Geral: Compreender o contexto histórico, a importância e as aplicações iniciais dos logaritmos.

Objetivos Específicos:

- Conhecer os principais personagens envolvidos na descoberta dos logaritmos.
- Entender como os logaritmos simplificaram cálculos complexos.
- Resolver problemas aplicando métodos históricos alternativos para multiplicação e potenciação.

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Verifica-se que o ChatGPT produziu o que considerou ser um plano de aula, indicando o público-alvo, a duração da aula, o objetivo geral e os objetivos específicos.

Neste plano de aula, o LLM criou quatro atividades baseadas no texto anexado. A primeira atividade, intitulada “Linha do Tempo – História dos Logaritmos”, possui o objetivo de compreender o contexto histórico e os principais personagens envolvidos na história dos logaritmos. Trata-se de uma atividade em grupo em que os alunos devem criar uma linha do tempo destacando alguns autores e o contexto histórico em que os logaritmos foram desenvolvidos.

A segunda atividade, com o título “Resolução de Problemas com Métodos Alternativos”, deve ser realizada em dupla e objetiva aplicar métodos alternativos para

multiplicação e potenciação usando contextos históricos. Nela, há duas partes, em que os alunos devem resolver exercícios contidos no texto anexado.

Figura 85 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Atividade 1: Linha do Tempo – História dos Logaritmos

Objetivo: Compreender o contexto histórico e os principais personagens envolvidos na descoberta dos logaritmos.

Metodologia: Trabalho em grupo.

Materiais necessários: Cartolina, canetas coloridas, régua.

Instruções:

1. Divida a turma em grupos de 4 alunos.
2. Cada grupo deve criar uma linha do tempo destacando os seguintes pontos:
 - Quem foram John Napier e Jost Bürgi?
 - Em que contexto histórico os logaritmos foram desenvolvidos?
 - Qual foi a contribuição de Henry Briggs?
 - Por que as tábuas de logaritmos foram importantes para a astronomia e navegação?
3. Apresente a linha do tempo para o restante da turma.

Crterios de avaliao: Clareza, organizao e abrangncia das informaes.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

A terceira atividade se trata de um debate sobre a eficincia dos mtodos histricos em contraposio aos logaritmos. O ChatGPT sugere alguns tpicos para discusso e orientaes para que o professor realize esse debate.

A quarta e ltima atividade a realizao de uma redao com os principais pontos discutidos nas demais atividades e no texto. A sugesto do LLM a que esta seja uma atividade individual.

Para o encerramento, o ChatGPT sugere a reviso dos contedos, com destaque a relevncia dos logaritmos, e uma atividade para os alunos realizarem em casa sobre o uso dos logaritmos atualmente.

Figura 86 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Atividade 2: Resolução de Problemas com Métodos Alternativos

Objetivo: Aplicar métodos alternativos para multiplicação e potenciação usando conceitos históricos.

Metodologia: Atividade prática em duplas.

Materiais necessários: Calculadoras (opcional), papel e lápis.

Parte A – Método Trigonométrico (Exercício 1 do documento)

Enunciado:

Calcule os seguintes produtos usando o método trigonométrico descrito no texto:

a) $0,921 \times 0,758$

b) $(0,85771)^2$

c) $0,873 \times 0,802$

Orientação ao aluno:

- Utilize as etapas fornecidas no texto para realizar os cálculos.
- Compare seu resultado com o obtido por uma calculadora.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 87 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Parte B – Método da Diferença de Quadrados (Exercício 2 do documento)

Enunciado:

Use a fórmula:

$$x \cdot y = \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x - y}{2} \right)^2$$

Calcule:

a) 13×7

b) 25×15

c) $0,82 \times 0,64$

Orientação ao aluno:

- Efetue as somas e diferenças conforme descrito no método.
- Utilize tabelas ou calculadora para verificar os resultados finais.

Critérios de avaliação: Precisão nos cálculos, entendimento das etapas e comparação crítica entre os métodos.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 88 - Quinta captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Atividade 3: Debate – Métodos Alternativos vs Logaritmos

Objetivo: Comparar a eficiência dos métodos históricos com o uso dos logaritmos.

Metodologia: Debate estruturado em sala de aula.

Tópicos para discussão:

- Qual método (trigonométrico ou da diferença de quadrados) é mais simples para realizar multiplicações?
- Por que esses métodos não substituíram os logaritmos?
- Como a invenção das calculadoras afetou a importância das tábuas de logaritmos?

Orientação ao professor:

- Divida a turma em dois grupos para defender cada método.
- Reserve tempo para perguntas e respostas.
- Finalize destacando os principais pontos discutidos.

Critérios de avaliação: Participação ativa, argumentação clara e respeito às opiniões divergentes.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 89 - Sexta captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Atividade 4: Redação Matemática – Reflexão Final

Objetivo: Avaliar o entendimento conceitual dos alunos sobre a importância histórica e prática dos logaritmos.

Metodologia: Atividade individual escrita.

Enunciado:

Escreva uma breve redação respondendo:

- Como os logaritmos facilitaram os cálculos matemáticos na época de Napier?
- Apesar do uso de calculadoras, por que ainda estudamos logaritmos hoje?
- Qual foi a descoberta mais interessante para você durante essas atividades?

Critérios de avaliação: Clareza, coesão, compreensão histórica e matemática.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 90 - Sétima captura de tela de resposta do ChatGPT criando atividades baseadas no texto de Lima (2013)

Encerramento:

- Faça uma revisão dos principais pontos abordados nas atividades.
- Destaque a relevância dos logaritmos, tanto historicamente quanto nos dias atuais.
- Atribua uma atividade de casa opcional para pesquisar sobre aplicações modernas dos logaritmos (ex.: escalas logarítmicas, crescimento populacional, terremotos).

Recursos adicionais:

- Material complementar sobre logaritmos modernos.
- Tabelas de logaritmos simplificadas.

Essas atividades equilibram teoria, prática e reflexão, proporcionando uma compreensão completa do conteúdo histórico e matemático abordado no documento.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Em seguida, perguntou-se ao ChatGPT quais erros poderiam ser esperados nessas atividades, como mostram as Figuras 91, 92, 93, 94, 95, 96 e 97. O modelo de linguagem iniciou sua resposta ressaltando a importância de antecipar possíveis dificuldades e erros que os alunos possam cometer durante atividades. Então, a ferramenta listou erros esperados em cada uma das atividades propostas na resposta anterior.

Na primeira atividade, o ChatGPT listou como erros esperados a falta de clareza na cronologia, o foco excessivo em um personagem e a omissão do contexto histórico. Com o intuito de corrigir esses erros, o LLM sugere uma breve explicação cronológica anterior à atividade, a distribuição de informações-chave para cada grupo e que, durante a explicação, seja pedido a cada grupo que explique mais sobre a importância de cada personagem.

Na parte A da segunda atividade, o modelo de linguagem listou a interpretação do método, a soma e diferença dos ângulos e a dependência excessiva na calculadora como possíveis erros. Como forma de corrigi-los, o ChatGPT indica a resolução passo

a passo de um exemplo, a verificação da compreensão da fórmula antes que os alunos iniciem os cálculos e o incentivo à revisão etapa a etapa.

Figura 91 - Primeira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

Como um educador matemático, quais erros podem ser esperados nas atividades propostas?



Possíveis Erros nas Atividades Propostas e Como Corrigi-los

Como educador matemático, é importante antecipar possíveis dificuldades e erros que os alunos possam cometer durante as atividades. Abaixo estão listados os erros mais prováveis para cada atividade, juntamente com sugestões de intervenção pedagógica.

Atividade 1: Linha do Tempo – História dos Logaritmos

Erros Esperados:

1. **Falta de Clareza na Cronologia:** Os alunos podem confundir a ordem cronológica dos eventos, especialmente entre Napier, Bürgi e Briggs.
2. **Foco Excessivo em um Personagem:** Alguns grupos podem concentrar-se demais em um personagem e ignorar outros importantes.
3. **Omissão do Contexto Histórico:** A importância dos logaritmos para a Astronomia e Navegação pode ser negligenciada.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Na parte B da segunda atividade, o LLM que os erros esperados estão na aplicação da fórmula, no cálculo de somas e diferenças e na interpretação dos resultados. As sugestões da ferramenta para corrigir esses erros são uma revisão da fórmula antes da atividade, o monitoramento dos cálculos durante a atividade e a comparação com os resultados obtidos com calculadoras para validar os resultados.

Na terceira atividade, os erros esperados, segundo o ChatGPT, são argumentos superficiais, falta de engajamento e desvio do tema. O LLM sugere que se utilize perguntas norteadoras para o debate, que se crie um ambiente inclusivo para que todos participem e que se faça intervenções para o redirecionamento do debate quando necessário.

Figura 92 - Segunda captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

Como Corrigir:

- Antes da atividade, faça uma breve explicação cronológica no quadro.
- Distribua fichas com informações-chave para cada grupo.
- Durante a apresentação, peça que os grupos expliquem a importância de cada personagem.

Atividade 2: Resolução de Problemas com Métodos Alternativos

Parte A – Método Trigonométrico

Erros Esperados:

1. **Erro na Interpretação do Método:** Os alunos podem não entender as etapas para obter os valores trigonométricos correspondentes.
2. **Erro na Soma e Diferença dos Ângulos:** Erros aritméticos simples ao somar e subtrair os valores de $x + y$ e $x - y$.
3. **Dependência Excessiva da Calculadora:** Alguns alunos podem confiar apenas na calculadora, sem tentar entender o processo manual. 

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Na quarta atividade, o modelo de linguagem cita como erros esperados a falta de clareza no texto, uma compreensão equivocada sobre o contexto histórico e os logaritmos e a dificuldade em relacionar a história e a Matemática. Como forma de corrigir esses erros, a ferramenta sugere um modelo de redação curta com tópicos sugeridos, que se mostre exemplos positivos e o incentivo aos alunos a utilizarem exemplos concretos dos métodos abordados.

Em seguida, o ChatGPT lista erros gerais esperados durante as atividades, como a desatenção às instruções, a dificuldade com cálculos manuais e a desmotivação em atividades históricas. Para finalizar, o modelo de linguagem sugere que o professor realize um monitoramento ativo, uma revisão conjunta e um *feedback* construtivo.

Figura 93 - Terceira captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

Como Corrigir:

- Faça um exemplo passo a passo no quadro antes da atividade.
- Verifique se os alunos compreendem a fórmula antes de iniciar os cálculos.
- Incentive-os a revisar cada etapa antes de passar para a próxima.

Parte B – Método da Diferença de Quadrados

Erros Esperados:

1. **Erro na Aplicação da Fórmula:** Confundir as posições das variáveis x e y na fórmula.
2. **Erro ao Calcular Somas e Diferenças:** Problemas básicos de aritmética podem aparecer.
3. **Interpretação Equivocada dos Resultados:** Alguns alunos podem esquecer que a fórmula requer subtração dos quadrados no final.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 94 - Quarta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

Como Corrigir:

- Faça uma revisão rápida da fórmula antes da atividade.
- Monitore os cálculos durante a atividade e corrija erros individuais.
- Faça comparações com resultados obtidos por calculadora para validar os cálculos.

Atividade 3: Debate – Métodos Alternativos vs Logaritmos

Erros Esperados:

1. **Argumentos Superficiais:** Os alunos podem apresentar argumentos vagos ou sem embasamento.
2. **Falta de Participação:** Alguns alunos podem se sentir inseguros para participar do debate.
3. **Desvio do Tema:** O debate pode se afastar do tema central dos logaritmos.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 95 - Quinta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

Como Corrigir:

- Antes do debate, forneça perguntas norteadoras para manter o foco na discussão.
- Crie um ambiente inclusivo, incentivando a participação de todos.
- Faça intervenções para redirecionar o debate quando necessário.

Atividade 4: Redação Matemática – Reflexão Final

Erros Esperados:

1. **Falta de Clareza no Texto:** Os alunos podem apresentar respostas vagas ou desconexas.
2. **Erro Conceitual:** Alguns alunos podem demonstrar uma compreensão equivocada sobre a importância histórica e prática dos logaritmos.
3. **Dificuldade em Relacionar História e Matemática:** Pode haver uma desconexão entre a teoria histórica e a aplicação prática.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 96 - Sexta captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

Como Corrigir:

- Forneça um modelo de redação curta com tópicos sugeridos.
- Leia e comente algumas redações em grupo para mostrar exemplos positivos.
- Incentive os alunos a usar exemplos concretos dos métodos abordados.

Erros Gerais Esperados ao Longo das Atividades:

1. **Desatenção às Instruções:** Alguns alunos podem não seguir corretamente as instruções fornecidas.
 - **Correção:** Leia as instruções em voz alta antes de iniciar cada atividade.
2. **Dificuldade com Cálculos Manuais:** Muitos alunos estão habituados a usar apenas calculadoras.
 - **Correção:** Incentive o uso manual primeiro e permita o uso da calculadora apenas para verificar os resultados.
3. **Desmotivação em Atividades Históricas:** Alguns alunos podem não ver relevância no estudo histórico dos logaritmos.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Figura 97 - Sétima captura de tela de resposta do ChatGPT sobre os erros esperados nas atividades propostas

- **Correção:** Relacione a história com aplicações modernas (ex.: escalas logarítmicas em terremotos ou pH).

Sugestões Finais para o Professor:

- **Monitoramento Ativo:** Caminhe pela sala durante as atividades para ajudar alunos que estiverem com dificuldade.
- **Revisão Conjunta:** Reserve tempo no final de cada atividade para revisar os principais pontos com a turma.
- **Feedback Construtivo:** Forneça feedback específico sobre os erros cometidos, reforçando os acertos.

Ao antecipar esses erros e aplicar as sugestões propostas, a experiência dos alunos com o conteúdo histórico e matemático dos logaritmos será mais rica e produtiva.

Fonte: dados da pesquisa (2024).

Observa-se nesta seção, que, com o texto anexado e os *prompts* com perguntas fechadas, específicas para que o LLM responda prontamente, minimiza-se o espaço para que a ferramenta alucine ou fuja do contexto desejado, fornecendo assim respostas mais relevantes e confiáveis.

Neste capítulo, é possível verificar que, com *prompts* bem desenvolvidos, contextualizados e limitantes, as respostas do ChatGPT tornam-se mais confiáveis, tendendo a ser menos alucinatórias e mais relevantes para o que se espera, se tornando assim, uma ferramenta com potencial para auxiliar na prática docente e, em específico, na Educação Matemática.

No capítulo seguinte, são expostas as considerações finais desta pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa está inserida no contexto da Educação Matemática, visando explorar o uso da inteligência artificial, em especial o ChatGPT, como auxiliar na prática docente do professor de Matemática.

A questão norteadora desta pesquisa foi:

- De que maneira o ChatGPT aborda alguns conteúdos matemáticos e como sua utilização pode contribuir para a Educação Matemática?

Para responder essa questão, este estudo teve como objetivo geral identificar como o ChatGPT pode contribuir para o estudo de alguns tópicos de Matemática e como pode ser abordado na prática docente contribuindo para a Educação Matemática.

Quanto aos objetivos específicos, procurou-se:

- verificar como funciona o ChatGPT, identificando algumas de suas potencialidades e limitações de modo geral e no contexto matemático;
- identificar a abordagem do ChatGPT sobre algumas ideias fundamentais da Matemática, com base em pesquisas de outros autores;
- explorar possíveis maneiras nas quais o ChatGPT pode contribuir para a Educação Matemática, em especial, para a prática docente.

Ressalta-se que os objetivos foram alcançados. Com leituras preliminares e a análise de exemplos, verificou-se a funcionalidade do ChatGPT, identificando-se potencialidades e limitações. Utilizando o LLM sobre os escritos de Costa (1981a; 1981b), foi possível identificar a abordagem do ChatGPT sobre algumas das ideias fundamentais da Matemática citadas pelo autor. E explorou-se possíveis maneiras nas quais o ChatGPT pode contribuir para a Educação Matemática identificando formas mais assertivas para a escrita dos *prompts* e utilizando este conhecimento para a formulação de perguntas sobre textos referenciados e anexados ao modelo de linguagem.

No Capítulo 2, foi elaborado um panorama histórico sobre a evolução da inteligência artificial, desde sua criação até os dias atuais, com o objetivo de oferecer

uma compreensão histórica do desenvolvimento desse campo de pesquisa. Além disso, foram investigados os mecanismos de funcionamento do ChatGPT como modelo de linguagem baseado na arquitetura de redes neurais, destacando suas principais potencialidades e limitações. Por fim, foram apresentados os resultados de estudos conduzidos por diversos autores acerca da aplicação do ChatGPT no contexto educacional, com ênfase particular em sua utilização na Educação Matemática, à qual Santos (2023) considera que a incorporação de IA generativas pode ajudar a desenvolver o pensamento crítico e a criatividade dos estudantes.

No Capítulo 3, foram apresentadas algumas das ideias fundamentais da Matemática conforme discutidas por Costa (1981a; 1981b), juntamente com uma análise da abordagem dessas ideias realizada pelo ChatGPT. Identificou-se que o modelo de linguagem apresenta limitações significativas, manifestadas pela geração de erros, como a criação de eventos fictícios atribuídos a determinados momentos históricos e a produção de informações imprecisas ou incorretas sobre alguns dos temas investigados.

No Capítulo 4, foram apresentados exemplos da aplicação do ChatGPT na Matemática, acompanhados de uma análise de sua capacidade de lidar com determinados objetos matemáticos, bem como de suas potencialidades e limitações (Rudolph; Tan; Tan, 2023). Observou-se que o modelo de linguagem apresenta limitações que impactam sua capacidade matemática e, em algumas situações, resultam em erros na resolução de exercícios matemáticos. Contudo, segundo Vieira e Santos (2024), a necessidade de verificação potencializa o aprendizado, destacando a importância do processo de validação no desenvolvimento do conhecimento.

O terceiro e o quarto capítulos evidenciam que há muita divergência na qualidade das respostas do ChatGPT, o que vai ao encontro de Rudolph, Tan e Tan (2023). Portanto, necessita-se de uma abordagem cautelosa quanto à utilização desse modelo de linguagem em se tratando da resolução de exercícios matemáticos ou da exploração de conceitos matemáticos.

No Capítulo 5, constatou-se que, por meio de *prompts* bem elaborados, devidamente contextualizados e com delimitações claras, as respostas fornecidas pelo ChatGPT tornam-se mais consistentes, reduzindo a ocorrência de respostas alucinatórias e aumentando sua relevância em relação às expectativas estabelecidas.

Dessa forma, o modelo demonstra potencial para atuar como uma ferramenta de apoio na prática docente, com destaque particular para sua aplicação na Educação Matemática.

Desse modo, existem possibilidades de integrar o uso do ChatGPT à prática docente do educador matemático, destacando-se, entre elas, a inclusão de textos nos *prompts* direcionados ao modelo de linguagem. Essa estratégia permite contextualizar as perguntas e delimitar as respostas fornecidas pelo LLM, reduzindo a ocorrência de alucinações e aumentando a precisão e a relevância dos retornos obtidos, contribuindo para a elaboração de conteúdo, questões e reflexões acerca de tópicos da Matemática.

Conclui-se, portanto, que, embora o ChatGPT esteja em processo contínuo de aprimoramento e ainda apresente aspectos a serem melhorados, o modelo de linguagem pode ser aplicado no âmbito da Matemática e da Educação Matemática. Contudo, é fundamental enfatizar a necessidade de cautela em sua utilização. A aplicação do pensamento crítico na verificação das respostas fornecidas pelo *chatbot* é indispensável, considerando sua propensão a produzir alucinações e erros. Ademais, esse processo de verificação pode contribuir para o desenvolvimento da criatividade e das habilidades de resolução de problemas matemáticos, conforme argumentado por Santos (2023).

Para futuras pesquisas, sugere-se:

- Investigar o conhecimento de professores de Matemática sobre o ChatGPT e como ele está sendo utilizado na Educação Matemática;
- Realizar uma formação de professores sobre o uso do ChatGPT e outras IA generativas para os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática;
- Comparar os desempenhos das diversas IA generativas quando utilizadas no contexto da Educação Matemática;
- Analisar o impacto do ChatGPT na aprendizagem de Matemática de estudantes do ensino básico;
- Investigar a capacidade do ChatGPT na função de um sistema de tutoria inteligente.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P. **Noções de Lógica Matemática**. 2004. Disponível em: <https://www.pucsp.br/~logica/>. Acesso em: 31 maio 2024.
- ABELIUK, A.; GUTIÉRREZ, C. Historia y evolución de la inteligencia artificial. **Revista Bits de Ciencia**, [S.l.], v. 1, n. 21, p. 14-21, 3 ago. 2021. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.71904/BITS.VI21.2767>. Acesso em: 12 jan. 2025.
- ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.
- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2013.
- BAIDOO-ANU, D.; ANSAH, L. O. Education in the Era of Generative Artificial Intelligence (AI): understanding the potential benefits of ChatGPT in promoting teaching and learning. **Ssrn**. [S.l.], p. 1-20. 27 jan. 2023. Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4337484. Acesso em: 15 mar. 2023.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C.; BALBINO JUNIOR, V. R. O ChatGPT e Educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 25, n. 3, p. 142-156, 3 out. 2023. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p111-1410>. Acesso em: 04 abr. 2024.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. Tradução de Elza F. Gomide.
- BRASIL está entre os 4 países que mais usam o ChatGPT; veja o ranking. **Forbes**, 08 mar. 2024. Forbes Tech. Disponível em: <https://forbes.com.br/forbes-tech/2024/03/brasil-esta-entre-os-4-paises-que-mais-usam-o-chatgpt-veja-ranking/>. Acesso em: 22 set. 2024.
- BROAD, W. J. Como as alucinações da IA têm ajudado a ciência a criar novos remédios e até ganhar o Nobel. **O Globo**. [S.l.], p. 1-2. 29 dez. 2024. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/saude/noticia/2024/12/29/como-as-alucinacoes-da-ia-tem-ajudado-a-ciencia-a-criar-novos-remedios-e-ate-ganhar-o-nobel.ghtml>. Acesso em: 12 jan. 2025.
- CORREIA, D. Z.; ABAR, C. A. A. P. ChatGPT na Educação Matemática: potencialidades e limitações. *In*: IV SITEM - Simpósio Internacional de Tecnologias em Educação Matemática, 2023, Rio Claro. **Anais [...]**. Brasil: Even3, 2023. p. 1-12. Disponível em: <https://doi.org/10.29327/1332864.1-8>. Acesso em: 30 nov. 2023.
- CORREIA, D. Z.; ABAR, C. A. A. P. ChatGPT and Mathematics Education: exploring its mathematical competencies. *In*: ALMAZÁN-LÓPEZ, O. *et al.* (org.). **IA, Educación y Medios de Comunicación: modelo TRIC**. Madrid: Dykinson, 2024. Cap. 11. p. 217-239.
- CORTIZ, D. **Entendendo as alucinações do ChatGPT**. 2023. Disponível em: <https://diogocortiz.com.br/entendendo-as-alucinacoes-do-chatgpt/>. Acesso em: 16 mar. 2023.

- COSTA, M. A. A lógica simbólica e a matemática. *In*: COSTA, M. A. **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. 3. ed. São Paulo: Convívio, 1981a. Cap. 5. p. 205-216.
- COSTA, M. A. A evolução histórica da noção de número. *In*: COSTA, M. A. **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. 3. ed. São Paulo: Convívio, 1981b. Cap. 6. p. 217-224.
- CRUZ, L. T. A lógica de Boécio: breves considerações acerca da relevância de argumentos tópicos na consolação da filosofia. **Revista Seara Filosófica**, Pelotas, v. 1, n. 13, p. 30-42, 15 jan. 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/searafilosofica/issue/view/604>. Acesso em: 31 maio 2024.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.
- FAJARDO, R. A. S. Conceitos fundamentais da Lógica. *In*: FAJARDO, R. A. **S. Lógica Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2023. p. 15-30.
- FREIRE, P.; FAUNDEZ, A. **Por uma Pedagogia da Pergunta**. 13. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2024.
- FRIEDER, S. *et al.* Mathematical Capabilities of ChatGPT. **Arxiv**, [S.l.], p. 1-29, jan. 2023. ArXiv. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.48550/arxiv.2301.13867>. Acesso em: 22 set. 2024.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- HALAWEH, M. ChatGPT in education: strategies for responsible implementation. **Contemporary Educational Technology**, [S.l.], v. 15, n. 2, p. 1-11, 1 abr. 2023. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.30935/cedtech/13036>. Acesso em: 16 maio 2023.
- ICL NOTÍCIAS. **Impactos do ChatGPT no mercado de trabalho em 2025**. 2025. Disponível em: <https://iclnoticias.com.br/atg/mercado-de-trabalho/>. Acesso em: 13 jan. 2025.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Conjuntos. *In*: IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. Cap. 2. p. 18-24.
- ILDPD - INSTITUTO LATINOAMERICANO DE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE. **Aprendizaje ilimitado: Potenciando la Educación con ChatGPT y DALL-E Aprendizaje ilimitado: una exploración pragmática de la IA en la educación**. Buenos Aires: [s.n.], 2024.
- JANČAŘÍK, A.; DUŠEK, O. The Problem of AI Hallucination and How to Solve It. **European Conference On E-Learning**, [S.l.], v. 23, n. 1, p. 122-128, 23 out. 2024. Disponível em: <https://papers.academic-conferences.org/index.php/ecel/article/view/2584>. Acesso em: 08 nov. 2024.
- JUNAID, M. T. *et al.* Adopting the Power of AI Chatbots for Enriching Students Learning in Civil Engineering Education: a study on capabilities and limitations. *In*: AL-MARZOUQI, A. *et al.* (org.). **Artificial Intelligence in Education: the power and dangers of ChatGPT in the classroom**. [S.l.]: Springer, 2024. p. 25-47. Disponível em:

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-52280-2>. Acesso em: 05 maio 2024.

KHAN, S. **Brave new words**: how AI will revolutionize education (and why that's a good thing). Nova Iorque: Viking, 2024.

KHANMIGO. Disponível em: <https://www.khanmigo.ai/>. Acesso em: 12 jan. 2025.

KASNECI, E. *et al.* ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. **Learning And Individual Differences**, [S.l.], v. 103, p. 1-13, abr. 2023. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>.

Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1041608023000195>. Acesso em: 25 maio 2023.

KNEALE, W.; KNEALE, M. **The Development of Logic**. Londres: Oxford University Press, 1971.

LAUNAY, M. **A Fascinante História da Matemática**: da pré-história até os dias de hoje. 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2021.

LEITE, B. S. Análise da inteligência artificial ChatGPT na proposição de planos de aulas para o ensino da química. **Revista Electrónica de Enseñanza de Las Ciencias**, [S.l.], v. 3, n. 23, p. 473-497, 2024. Disponível em:

http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen23/REEC_23_03_07_ex2207_1077.pdf.

Acesso em: 05 jan. 2025.

LIEBERMAN, M. What is ChatGPT and How Is It Used in Education? **Education Week**, [S.l.], v. 42, n. 18, 18 jan. 2023. Disponível em:

<https://www.edweek.org/technology/what-is-chatgpt-and-how-is-it-used-in-education/2023/01>. Acesso em: 14 abr. 2023.

LIMA, E. L. História. In: LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. p. 1-4.

MAGAT, R. J. B.; SANGALANG, E. M. Teachers' Familiarity, Perceptions, and Training Needs on the Use of ChatGPT in Mathematics Instruction. **International Journal Of Education In Mathematics, Science And Technology**, [S.l.], v. 12, n. 6, p. 1471-1487, 22 set. 2024. Disponível em:

<https://www.ijemst.net/index.php/ijemst/article/view/4332>. Acesso em: 14 nov. 2024.

MORAIS, L. I. Uma Breve Introdução ao Paradoxo de Russell: o que ele é, como ele afetou o sistema fregeano e sua possível solução. **O Manguenzal**, [S.l.], v. 1, n. 2, p. 32-41, jun. 2018. Disponível em:

<https://periodicos.ufs.br/omanguenzal/article/view/9405>. Acesso em: 09 set. 2024.

OPENAI. **Hello GPT-4o**. 2024. Disponível em: <https://openai.com/index/hello-gpt-4o/>. Acesso em: 16 jul. 2024.

PEANO, I. **Arithmetices principia, nova methodo exposita**. Torino: Fratres Bocca, 1889. Disponível em:

https://books.google.com.br/books?id=z80GAAAAYAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 02 jan. 2025.

PUGA, L. Z.; COSTA, N. C. A. Sobre a lógica deôntica não-clássica. **Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofia**, México, v. 19, n. 55, p. 19-37, abr. 1987.

Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40104392>. Acesso em: 15 jul. 2024.

PUTRA, F. R.; CIPTANINGRUM, D. S. Understanding the Role of Generative Pre- Trained Transformer (GPT) In Improving Learning Quality and Practices. **Qalamuna: Jurnal Pendidikan, Sosial, Dan Agama, Ponorogo**, v. 16, n. 1, p. 91-100, 22 fev. 2024. Disponível em:

<https://ejournal.insuriponorogo.ac.id/index.php/qalamuna/article/view/3248>. Acesso em: 04 abr. 2024.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUDOLPH, J.; TAN, S.; TAN, S. ChatGPT: bullshit spewer or the end of traditional assessments in higher education?. **Journal Of Applied Learning & Teaching**, [S.l.], v. 6, n. 1, p. 1-22, 24 jan. 2023. Disponível em:

<https://journals.sfu.ca/jalt/index.php/jalt/article/view/689>. Acesso em: 24 abr. 2024.

RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. Introduction. In: RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. **Artificial Intelligence**: a modern approach. 3. ed. Nova Jersey: Pearson, 2009. p. 1-33.

SALLOUM, S. A. *et al.* The Coming ChatGPT. In: AL-MARZOUQI, A. *et al.* **Artificial Intelligence in Education**: the power and dangers of chatgpt in the classroom. [S.l.]: Springer, 2024. p. 3-9. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-52280-2>. Acesso em: 05 maio 2024.

SANTAELLA, L. Prefácio - Do Bebê Eliza às Traquinagens do ChatGPT. In: FERRARI, P. (Org.). **Descententes de Eliza**: os impactos da inteligência artificial generativa no mercado de trabalho, na desinformação, nas artes e no pensamento crítico. Cachoeirinha: Fi, 2024. p. 7-18.

SANTOS, M. C. N. **Principais Axiomas da Matemática**. 2014. 43 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7529/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 10 set. 2024.

SANTOS, R. P. A inteligência artificial como metodologia na aprendizagem de Matemática. In: OLGIN, C. A.; FERNANDES, M. T.; HOMA, A. I. R.. **Construindo Saberes**: práticas pedagógicas para ciências e matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2023. p. 205-241.

SOARES, E. **Lógica Formal**: da lógica aristotélica ao cálculo sentencial bivalente. Marília: Oficina Universitária, 2023. p. 13-59. Disponível em: <https://bit.ly/3Xo8O7m>. Acesso em: 13 jun. 2023.

SOUZA, F. R. *et al.* Simulação de Diálogos e Personagens no Chat-GPT4: análise comparativa do desempenho em idiomas inglês e português. In: IV Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, 1., 2023, Diamantina. **Anais [...]**. Brasil: Even3, 2023. p. 1-8. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/cobicet2023/659738-simulacao-de-dialogos-e-personagens-no-chat-gpt4--analise-comparativa-do-desempenho-em-idiomas-ingles-e-portugues/>. Acesso em: 10 set. 2024.

SPENCER, J. **A.I. for Educators (including ChatGPT)**. 2023. Disponível em: <https://spencerauthor.com/ai-education/>. Acesso em: 16 mar. 2023.

STRATHERN, P. Vida e obra. *In*: STRATHERN, P. **São Tomás de Aquino (1225-1274) em 90 minutos**. Rio de Janeiro: Zahar, 1999. p. 13-60. Disponível em: <https://bit.ly/4bSS7Fk>. Acesso em: 13 jun. 2024.

TLILI, A. *et al.* What if the devil is my guardian angel: ChatGPT as a case study of using chatbots in education. **Smart Learning Environments**. [S.l.], p. 1-24. 22 fev. 2023. Disponível em: <https://slejournal.springeropen.com/articles/10.1186/s40561-023-00237-x>. Acesso em: 16 mar. 2023.

TRIVIALIDADE. *In*: Dicionário Brasileiro Brasileiro da Língua Portuguesa. [S.l.]: Melhoramentos, 2024. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/trivialidade>. Acesso em: 20/09/2024.

VIEIRA, M. M. S.; SANTOS, R. P. Limites e Possibilidades do Professor no Uso do ChatGPT no Ensino da Matemática. **Arbre**, Belo Horizonte, v. 2, p. 67-81, jul./dez. 2024. Disponível em: <https://revista.fbmq.edu.br/index.php/arbre/article/view/95>. Acesso em: 12 jan. 2025.

WARDAT, Y. *et al.* ChatGPT: a revolutionary tool for teaching and learning mathematics. **Eurasia Journal Of Mathematics, Science And Technology Education**, [S.l.], v. 19, n. 7, p. 1-18, 1 jul. 2023.. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.29333/ejmste/13272>. Acesso em: 12 jun. 2024.

WEIZENBAUM, J. ELIZA: a computer program for the study of natural language communication between man and machine. **Communications of the ACM**, [S.l.], v. 9, n. 1, p. 36-45, jan. 1966. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1145/365153.365168>. Acesso em: 01 nov. 2024.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. Introduction: the theory of logical types. *In*: WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. **Principia Mathematica**. Cambridge: Messrs Lowe & Brydone, 1963a. p. 37-65.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. Mathematical Logic: primitive ideas and propositions. *In*: WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. **Principia Mathematica**. Cambridge: Messrs Lowe & Brydone, 1963b. p. 91-97.

YANG, M. New York City schools ban AI chatbot that writes essays and answers prompts. **The Guardian**. [S.l.]. 06 jan. 2023. Disponível em: <https://www.theguardian.com/us-news/2023/jan/06/new-york-city-schools-ban-ai-chatbot-chatgpt>. Acesso em: 22 mar. 2023.