

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO
PAULO - PUC/SP**

DANILO DAIDONE CHALITA

**BUSCA DE PADRÕES ALGÉBRICOS NO ENSINO
FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA COM O JOGO
“CORRIDA AO VINTE”**

**São Paulo
2023**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO -
PUC/SP**

DANILO DAIDONE CHALITA

**BUSCA DE PADRÕES ALGÉBRICOS NO ENSINO
FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA COM O JOGO
“CORRIDA AO VINTE”**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho**.

**São Paulo
2023**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

Local e Data: _____

DANILO DAIDONE CHALITA

**BUSCA DE PADRÕES ALGÉBRICOS NO ENSINO
FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA COM O JOGO
“CORRIDA AO VINTE”**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho**.

Aprovado em: __/__/__

BANCA EXAMINADORA

À minha família, aos alunos e professores de matemática que atuam na educação fundamental.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pelas orientações e apoio dado em todos os momentos e, sobretudo, por contribuir com minha formação.

Ao Professor Doutor Celso Ribeiro Campos, à Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva e à Professora Doutora Auriluci de Carvalho Figueiredo, pelas valiosas discussões e contribuições nas aulas do curso.

Aos Professores do Programa de estudos pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelas valiosas contribuições à minha formação.

À CAPES, pelo financiamento da metade final desta pesquisa.

À minha família, que compreendeu e vivenciou comigo esses anos de mestrado e que, com garra e galhardia, me ajudaram financeiramente na primeira metade do curso enquanto a bolsa não saía.

À minha mãe, Maria Claudia, que muito me ajudou durante o processo de pesquisa e escrita, além de todo apoio sempre dado e por sempre ter acreditado e torcido por mim.

À minha tia, Ivana, que é pedagoga e me ajudou no processo da pesquisa, além de ter participado presencialmente comigo no dia da aplicação do jogo com os alunos.

Ao meu amigo Guilherme Abud, pelas longas discussões, contribuições e pelo auxílio em momentos difíceis.

À minha amiga Bruna Vendrasco, que me apresentou o voluntariado da Cruz Vermelha Brasileira, que foi a chama de todo o projeto desta pesquisa.

À minha colega de curso Fabiana Venhoven Martins, pelas longas conversas durante o processo do Mestrado.

*“Um mundo onde a magia forma os ideais
E o saber não se difere por camadas sociais
É hora de reflexão
E consciência em cada coração”*

*Samba Enredo do Grêmio Recreativo Cultural Escola de Samba Leandro de Itaquera,
em homenagem ao grande educador Paulo Freire.
São Paulo, Carnaval de 1999*

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo principal o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem na busca por padrões algébricos em sequências numéricas no ensino fundamental por meio do jogo *Corrida ao Vinte*. Buscaremos responder quais foram as características de aprendizagem que surgiram durante o desenvolvimento do jogo e quais foram os conhecimentos mobilizados pelos alunos para que chegassem à solução do problema. A pesquisa foi feita em uma turma de sexto ano de uma Escola Pública Estadual da periferia da cidade de São Paulo. Em seu desenvolvimento, procuramos responder à seguinte questão: Quais fatores influenciam o processo de ensino e de aprendizagem de sequências com a utilização de recursos alternativos como jogos educativos? Tudo isso, observando a construção do conceito de sequência aritmética e busca por padrões pelo aluno. Os procedimentos metodológicos serão relacionados à metodologia da engenharia didática, quais sejam: análise *a priori*, aplicação, observação, análise *a posteriori* e conclusão. Como resultados desejados, esperamos que o aluno consiga aplicar seus conhecimentos prévios para a solução de problemas de busca por padrões nas sequências numéricas. Tais resultados nos permitirão o aprofundamento dos conhecimentos e do campo dos fenômenos didáticos e cognitivos no que diz respeito ao ensino e aprendizagem por meio de jogos educativos.

Palavras-Chave: *Corrida ao Vinte*; ensino fundamental; teoria das situações didáticas (tsd); jogos educativos; ensino de sequências; busca por padrões.

ABSTRACT

The research presented in this project has as its main objective the study of teaching and learning phenomena in the search for algebraic patterns in numerical sequences in elementary education through the game “*Corrida ao Vinte*” We will seek to answer what were the learning characteristics that emerged during the development of the game and what were the knowledge mobilized by the students to arrive at the solution of the problem. The research was carried out in a 6th grade class at a State Public School on the outskirts of the city of São Paulo. In its development, we tried to answer the following question: What factors influence the teaching and learning process of sequences with the use of alternative resources such as educational games? All this, observing the construction of the concept of arithmetic sequence and search for patterns by the student. The methodological procedures will be related to the methodology of didactic engineering, namely: a priori analysis, application, observation, a posteriori analysis and conclusion. As expected results, we hope that the student will be able to apply their previous knowledge to solve problems of searching for patterns in numerical sequences. Such results will allow us to deepen knowledge and the field of didactic and cognitive phenomena regarding teaching and learning through educational games.

Keywords: Run to Twenty; elementary School; theory of didactic situations (tsd); educational games; teaching of sequences; search for patterns.

Lista de figuras

Figura 1. A aparição dos teoremas (Guy Brousseau)	26
Figura 2. Habilidades referentes a sequências no currículo Paulista, 2019.....	45
Figura 3. Atividade 1: Livro da 4ª série – Caderno do Professor.....	48
Figura 4. Atividade 2: Livro da 4ª série – Caderno do Professor.....	49
Figura 5. Atividade 1 na aula 1: Livro da 4ª série	50
Figura 6. Desenvolvimento da atividade 1 na aula 2: Livro da 4ª série.....	52
Figura 7. Atividade 1 na aula 2: Livro da 4ª série.....	53
Figura 8. Proposta da 1ª atividade: Livro da 5ª série.....	55
Figura 9. Atividade 1: Livro da 5ª série – Caderno do Professor.....	56
Figura 10. Atividade 1: Livro da 6ª série.....	58
Figura 11. Atividade 2: Livro da 6ª série.....	58
Figura 12. Folha da atividade proposta em sala de aula.....	89
Figura 13.1. Imagem de um jogo jogado pela dupla 1.....	92
Figura 13.2. Imagem dos jogos jogados pela dupla 2.....	93
Figura 13,3. Imagem dos jogos jogados pela dupla 3.....	93
Figura 13.4. Imagem de um jogo jogado pela dupla 4.....	93
Figura 13.5. Imagem de um jogo jogado pela dupla 5.....	93
Figura 13.6. Imagem dos jogos jogados pela dupla 6.....	94
Figura 14.1. Atividade feita pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória.....	94
Figura 14.2. Um dos jogos jogados pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória.....	95
Figura 14.3. Um dos jogos jogados pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória.....	95
Figura 14.4. Um dos jogos jogados pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória.....	96
Figura 14.5. Atividade feita pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória, parte 2.....	97
Figura 15. Atividade feita pelos alunos Adriano e João.....	98
Figura 16. Atividade feita pelas alunas Emilly e Ana.....	99
Figura 17. Atividade feita por alunos (sem nome).....	100

Lista de tabelas

Tabela 1. Médias do Enem 2019. Brasil e Escola Madre Paulina.....	21
Tabela 2. Trabalhos selecionados para o estudo.....	27

Sumário

1	PROBLEMÁTICA	13
1.1	Relevância pessoal e social.....	14
1.2	Justificativa	15
1.3	Objetivos de pesquisa.....	16
1.4	Apresentação do jogo (regras)	17
1.5	Contextualização: a situação inicial e a escola donde o jogo foi aplicado.....	19
1.6	Questão de pesquisa	21
2	OUTROS TRABALHOS QUE DISCORREM SOBRE O MESMO ASSUNTO	23
2.1	O jogo apresentado por Brousseau.....	23
2.2	Revisão bibliográfica	26
2.2.1	A dissertação de Carlos Leandro A. SCHWALB (2002)	28
2.2.2	A dissertação de Emily Cassiana Santolin GRECCO (2008)	29
2.2.3	A dissertação de Débora Silva VELOSO (2012).....	30
2.2.4	A dissertação de José Vitor Ramos de LIMA (2023)	32
2.2.5	A tese de Karina de Oliveira CASTRO (2023).....	33
2.2.6	Outros trabalhos que contribuíram para esta pesquisa.....	35
2.2.6.1	O artigo de Saddoag ALMOULOUUD e Cileda de Queiroz e Silva COUTINHO (2008).....	35
2.2.6.2	O artigo de Wagner Marcelo POMMER (2008).....	37
2.2.6.3	O artigo de Paulo Jorge Magalhães TEIXEIRA e Claudio Cesar Manso PASSOS (2008)	38
2.2.6.4	As notas de aula da professora Maria José Ferreira da SILVA (2005).....	39
3	ESTUDO DO OBJETO	41
3.1	Uma breve apresentação da Teoria Antropológica do Didático (TAD).....	41
3.1.2	Análise dos livros didáticos segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard.....	43

4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA	66
4.1	Aspectos teóricos	66
4.1.1	A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau	68
4.1.2	O conceito de meio (<i>milieu</i>) na TSD de Brousseau	72
4.1.3	O jogo <i>Corrida ao Vinte</i> à luz dos conceitos da TSD.....	73
4.2	Aspectos metodológicos.....	75
4.2.1	A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.....	77
4.3	Procedimentos da equipe de pesquisa	78
5	ANÁLISE A <i>PRIORI</i>	82
5.1	Breve apresentação do jogo	82
5.2	A atividade	83
5.3	O cenário da pesquisa.....	85
5.3.1	Conhecimento esperado dos alunos	86
6	ANÁLISE A <i>POSTERIORI</i>	90
6.1	Experimentação.....	90
6.2	Análise das atividades	92
6.3	Anotações da professora Ivana - Avaliações da atividade <i>Corrida ao Vinte</i> pelo Professor Danilo na Escola Madre Paulina.....	103
7	CONCLUSÃO	105
	Referências	109
	Listagem de Anexos	112

1 PROBLEMÁTICA

Ao longo de toda a minha trajetória, desde que comecei a enxergar a matemática pelo outro lado, o lado de quem ensina, pude notar um certo tipo de medo prévio ou preocupação prévia quando o assunto é matemático. Durante os anos como professor e nas discussões com outros colegas professores, sempre notamos uma grande dificuldade no processo de aprendizagem da matemática, tanto no pensamento algébrico e geométrico quanto na resolução de problemas; dificuldade essa que foi trazida por B. D'AMBROSIO em seu artigo de 1989 (“*Como ensinar Matemática hoje?*”). Essa dificuldade não aparece apenas quando a matemática “deixa de ser” concreta e passa a ser abstrata. Muitos alunos têm dificuldades para resolver operações básicas da aritmética e não conseguem aplicar esse raciocínio lógico que é o mesmo raciocínio aplicado em uma situação cotidiana como o pagamento e recebimento de um troco, por exemplo.

O pensamento algébrico é fundamental na base da construção do aprendizado da criança, o que lhe permite conseguir fazer abstrações e generalizações. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998):

[...] o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio de exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a reconhecer que sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer possíveis soluções. (BRASIL, 1998, p. 64).

Sendo assim, um dos objetivos dessa pesquisa é analisar o pensamento algébrico mobilizado pelos alunos a partir do jogo *Corrida ao Vinte*, observando a introdução desse pensamento a partir do uso de sequências e dos padrões que podem ser observados de acordo com o jogo. Esses pensamentos colaboram com a construção do pensamento algébrico dos jogadores.

É interessante também propor situações em que o aluno possa investigar padrões. Tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas; e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica necessária para descrevê-los. Esse trabalho favorece que os alunos construam a idéia de álgebra como uma linguagem para expressar suas singularidades. (BRASIL, 1998, p. 117).

Assim, a presente pesquisa apresenta uma proposta de introdução à Álgebra a partir do trabalho com as sequências geradas pelas rodadas do jogo *Corrida ao Vinte*. O jogo será apresentado detalhadamente mais adiante neste texto.

1.1 Relevância pessoal e social

Minhas experiências pessoais e profissionais e o constante pensamento sobre a docência e o processo de aprendizagem e os aspectos desenvolvidos por este jogo, levaram-me à escolha do tema da presente pesquisa.

Durante as aulas do curso do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, entrei em contato com algumas teorias de ensino da matemática e com autores que discorrem sobre o ensinar e o aprender matemática. Um autor que admirava desde a juventude, despertou-me particularmente o interesse: o professor Julio Cesar de Mello e Souza (famoso sob o pseudônimo de Malba Tahan), que escreveu diversos livros de didática e ensino de matemática, e em seu livro *Didática da Matemática*, de 1957, disse que o Matemático Algebrista seria “aquele que impõe aos alunos problemas enfadonhos, irreais, sem finalidade prática ou teórica, com a única preocupação de tornar a matemática muito difícil” (TAHAN, 1957). Essa frase, escrita em 1957, torna-se atemporal pois o autor afirma que há um estigma sobre a matemática como um todo que cria um bloqueio no aluno antes mesmo de ele entrar em contato com ela. Fenômeno esse que ainda viria a ser estudado anos depois por Beatriz D’Ambrosio nos anos 1980 e 1990.

D’Ambrósio (1989), afirma que “A comunidade de Educação Matemática internacionalmente vem clamando por renovação na atual concepção do que é a matemática escolar e de como essa matemática pode ser abordada” (D’AMBROSIO, 1989, p. 1). A autora segue afirmando:

Sabe-se que a típica aula de Matemática, a nível de primeiro, segundo ou terceiro grau, ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia a lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D’AMBROSIO, 1989, p. 15).

E então a autora conclui este pensamento dizendo que os alunos acreditam que a aprendizagem se dá por meio de um acúmulo de fórmulas e algoritmos, que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se pode duvidar e que esses conceitos matemáticos foram criados por gênios. Sendo assim, o aluno perde toda a intuição autoconfiança que poderia haver ali “perdendo, dia a dia, seu ‘bom-senso’ matemático.” (D’AMBROSIO, 1987, p. 2). A disciplina, assim, vai se tornando desinteressante ao aluno.

Sendo assim, proponho a introdução ao estudo de sequências, por meio do jogo *Corrida ao Vinte*, visando à percepção de padrões. A citação de Malba Tahan reproduzida anteriormente foi a motivação para eu querer evidenciar essa barreira criada pela maioria dos alunos para com a matemática, e que é possível sim ao aluno conseguir resolver problemas mesmo sem ter tido exatamente o contato com a matéria propriamente dita. Acredito que, por meio desse jogo, o aluno possa aprender e desenvolver pensamentos e estratégias com mais entusiasmo do que com uma aula tradicional, como é praticado na maioria das escolas.

1.2 Justificativa

Exposto à necessidade de aprofundar os estudos sobre novas formas de ensinar e aprender matemática por meio de jogos na escola básica, com novas estratégias e metodologias que podem ser aplicadas no processo de ensino e de aprendizagem, a presente pesquisa aborda aspectos relativos ao ensino de sequências que, em articulação com o jogo *Corrida ao Vinte*, pretende estimular o desenvolvimento de pensamento crítico e curiosidade científica nos alunos na escola básica e, posteriormente, - como propôs Brousseau em sua tese de doutorado de 1986 - criar uma “estratégia vencedora” para o jogo.

O jogo será utilizado para construir o conceito de sequência aritmética, o que se aplica diretamente com um conteúdo que será visto pelos alunos nos anos seguintes: *Progressão Aritmética*.

Este trabalho vai também apresentar uma análise sobre essa nova forma de se ensinar matemática, focando na busca por padrões em sequências numéricas. “A falta de uma grande reflexão do próprio professor sobre novas formas de se ensinar matemática e de deixar o assunto que quer explicar mais interessante ao aluno acaba deixando enfadonho o ensino da mesma.” (TAHAN, 1957). Esta foi a chama condutora deste trabalho.

1.3 Objetivos de pesquisa

Esta pesquisa tem por objetivo analisar o jogo *Corrida ao Vinte* como uma ferramenta didática para o ensino e para a aprendizagem da matemática na Escola Básica. A proposta é fazer uma análise didática do experimento feito em sala de aula, com o foco no conhecimento que surge no aluno à medida que ele vai jogando e se apropriando do jogo e a disputa com seu oponente para que ele se introduza no conteúdo de sequências numéricas e, mais precisamente, na busca por padrões nas sequências numéricas geradas a cada jogo.

A pesquisa foi feita em uma escola pública da periferia da cidade de São Paulo, em uma turma do sexto ano do ensino fundamental. Os alunos foram organizados em 7 duplas e um trio e as duplas de pesquisa se mobilizaram para responder, principalmente, às seguintes questões: Há uma estratégia vencedora para o jogo em questão? Essa estratégia pode ser aplicada para o mesmo jogo, porém com outros números?

Buscamos também:

- Identificar os elementos do *milieu* mobilizados pelos alunos ao longo do desenvolvimento do jogo *Corrida ao Vinte*, até o momento em que percebem a generalização da estratégia construída;
- Identificar as características de aprendizagem que surgem com a aplicação e discussão do jogo.

Sendo assim, a presente pesquisa busca analisar o pensamento algébrico voltado para a busca de padrões que foi mobilizado pelos e, posteriormente, para o estudo de sequências numéricas, construída a partir de um jogo relativamente simples e que os alunos do Ensino Fundamental podem jogar uns contra os outros, divertir-se, e, sozinhos, chegar ao resultado. O trabalho do professor, nesse caso, é propiciar ao aluno a possibilidade de mobilização dos seus conhecimentos para a resolução daquele problema em questão. O papel do professor é fundamental para a gestão e organização das atividades em sala de aula que permitam ao aluno a percepção de aplicabilidade da matemática em todas as camadas de sua vida. Tardif (2000, p. 15) diz que:

Quer se trate de uma aula ou do programa a ser ministrado durante o ano todo, percebe-se que o professor precisa mobilizar um vasto cabedal de saberes e de habilidades, porque sua ação é orientada por diversos objetivos: objetivos

emocionais, ligados à motivação dos alunos, objetivos sociais, ligados à disciplina e à gestão da turma, objetivos cognitivos ligados à matéria ensinada e objetivos coletivos ligados ao projeto educacional da escola e etc.

Para tanto, o professor necessita saber ensinar, saber se preparar para ensinar e saber o que está a ensinar e, portanto, utilizar a melhor estratégia para, eventualmente, modificar o seu trabalho pedagógico e se adequar às mais diversas eventuais situações de sala de aula que lhe podem aparecer.

1.4 Apresentação do jogo (regras)

O jogo *Corrida ao Vinte* é utilizado como ferramenta didática para ilustrar a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau.

Este jogo é jogado entre duas pessoas (uma contra a outra) e vence quem disser “vinte” primeiro. Suas regras são:

- Sorteia-se um jogador para iniciar;
- O primeiro jogador deve escolher o número 1 ou 2 para iniciar e verbaliza sua escolha. Agora, é a vez do seu oponente;
- O oponente deve acrescentar uma ou duas unidades ao último número dito pelo primeiro jogador na jogada anterior, ou seja, caso o primeiro jogador tenha dito “1”, o seu oponente pode dizer “2” ou “3”; caso o 1º jogador tenha dito “2”, o seu oponente poderá dizer “3” ou “4”. E então, a vez volta para o primeiro jogador;
- O primeiro jogador, com a vez da jogada, deve dizer um número que esteja a uma ou duas unidades maior do que o último número dito na jogada anterior e o jogo segue assim, alternadamente, até algum dos jogadores chegar ao número vinte.

Vejamos dois exemplos:

Legenda: os números em **negrito** são as jogadas do primeiro jogador e os números sem negrito são as jogadas do segundo jogador:

Jogo 1:

1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20. Vitória para o Jogador nº 2.

Jogo 2:

2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 20. Vitória para o Jogador nº 1.

Exemplifiquei, aqui, os números escolhidos de dois jogos quaisquer (retirados dos jogos feitos pelos alunos no dia da aplicação) e vemos que não há um padrão nas sequências de números. Tanto que, em cada uma, um jogador ganhou e em cada uma, o primeiro jogador iniciou com números diferentes e gerou sequências diferentes ao longo das jogadas.

Porém, existe um algoritmo vencedor (uma sequência vencedora) em que, caso o jogador que inicie o jogo a conheça, ele irá vencer sempre. Note que, para chegar ao vinte, o jogador deve ter parado no 17 na sua jogada anterior pois, pelas regras do jogo, se eu disse “17”, o meu oponente só poderá dizer “18” ou “19”: caso ele diga “18”, eu direi duas unidades acima, caso ele diga “19”, eu direi uma unidade acima e vencerei o jogo. Todavia, para que eu esteja no número 17, eu devo ter estado no número 14 na minha jogada anterior pois, tendo dito “14”, o meu oponente só poderá dizer “15” ou “16” e eu, munido da estratégia vencedora, direi “17” e depois “20” e vencerei o jogo. Só que, para eu chegar ao 14, eu precisarei, necessariamente, ter estado no 11 e assim por diante retroativamente.

O algoritmo vencedor pode ser notado pelos jogadores ao longo das partidas. Ele consiste em escolher inicialmente o número 2 e depois, os valores da sequência (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20). Os valores dessa sequência numérica, que é uma Progressão Aritmética de razão 3 e termo inicial 2, são obtidos pela divisão euclidiana do número 20 por 3 que resulta, como quociente, o nº 6 e como resto, o nº 2, que é o termo inicial ou, então, a descoberta da sequência por subtrações sucessivas de 3, a partir do 20, que resultem na sequência (17, 14, 11, 8, 5, 2).

Vejam, agora, dois jogos em que os participantes conhecem a estratégia vencedora. **Legenda:** os números em **negrito** são as jogadas do primeiro jogador e os números sem negrito são as jogadas do segundo jogador:

Jogo 1 (O jogador que inicia conhece a estratégia vencedora):

2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 20. Vitória para o Jogador Nº 1.

Jogo 2 (O jogador que inicia não conhece a estratégia vencedora, mas seu oponente conhece e toma o controle da partida o jogo):

1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 20. Vitória para o Jogador Nº 2.

Desta maneira, notamos que a utilização dos números “1” e “2” não é casual, já que eles são os restos possíveis e diferentes de zero para o divisor 3. O jogador que inicia, se souber aplicar a estratégia descrita acima, sempre vencerá. Caso não inicie, deve contar com um tropeço do outro jogador e, aí sim, tentar assumir o comando chegando aos termos da sequência citada acima (e mesma situação ocorre caso o jogador que não inicie souber a estratégia vencedora e o outro, não).

O jogo pode ter algumas variações, como corrida a outros números e com intervalos maiores, mas a ideia é a mesma. Ele assume, também, abordagens diferentes no que tange ao objeto matemático, como para a introdução da divisão euclidiana nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF) (3º/4º anos); para a introdução do estudo de sequências no 9º ano do EF ou para o estudo de uma Progressão Aritmética propriamente dita no 1º e 2º ano do Ensino Médio (EM). Isso será evidenciado mais adiante neste texto.

1.5 Contextualização: a situação inicial e a escola donde o jogo foi aplicado

A ideia primordial de aplicação do jogo *Corrida ao Vinte* como ferramenta didática para a introdução do ensino de sequências por meio da busca por padrões e regularidades com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental vem do fato do pouco contato que essas crianças tiveram com este conteúdo na vida escolar, como nos indica a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) e o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019), justamente para não enviesar a busca, deles mesmos, pela estratégia vencedora.

A Escola Estadual Madre Paulina fica no bairro do Itaim Paulista, no extremo leste da capital e é uma das maiores da região. Anualmente, recebe mais de 1000 matrículas e é considerada de grande porte (nível 5), segundo o *indicador Complexidade de Gestão da Escola* do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP), que classifica as escolas de acordo com sua complexidade de gestão. Tem, de 6 a 8 turmas de cada série por ano, desde o 1º ano do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio.

O primeiro contato com a escola ocorreu quando fui aplicar uma oficina de percussão voluntária com as crianças de lá em um mutirão social da Cruz Vermelha Brasileira (CVB). À época, segundo relatado pelas autoridades escolares, a escola recebia muitos alunos expulsos de outras escolas da região e que não tinham grandes expectativas sobre seus futuros e por isso que a escola foi escolhida pela CVB e a oficina de samba e percussão foi uma dessas ações motivacionais para os alunos e eu fui escolhido por também ser ritmista de escola de samba há 20 anos e apaixonado pela música brasileira.

Fui muito bem recebido pelas equipes da escola e retornei lá algumas outras vezes e, em uma delas, apliquei o jogo *Corrida ao Vinte* com os alunos que estavam no ócio naquele dia devido à falta de professores. Todos adoraram, interagiram e se entusiasmaram com o certame que eu havia proposto. Eu mal poderia imaginar que um ano depois eu retornaria àquela escola para aplicar, novamente, o jogo em outras turmas, mas, dessa vez, como professor pesquisador e que este viria a ser o tema da minha dissertação de mestrado. O relato completo e mais detalhado dessa primeira experiência de aplicação do jogo *Corrida ao Vinte* foi feito em um artigo submetido ao Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM) de 2022. E mais adiante, nesta dissertação, explicarei todas as etapas, processos e análises da aplicação do jogo como uma situação didática.

Ao longo do trabalho voluntário desenvolvido na escola, eu pude observar, empiricamente, a baixa motivação dos alunos, dos professores e da coordenação no que tange ao dia a dia escolar, além de alguns adventos que atrapalharam a aplicação da pesquisa advindos de problemas estruturais da escola como, por exemplo, a indisponibilidade da sala para aplicação da pesquisa, que havia previamente sido reservada por mim junto à coordenação além da deficiência de materiais didáticos básicos para viabilizar as aulas como canetão de lousa, apagador e ou panos com álcool.

Vale ressaltar, também, que a nota da escola no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi abaixo da média geral em todas as disciplinas, como vemos na Tabela 1.

Vejamos as notas na tabela abaixo. O cálculo feito pelo ENEM 2019, o último presencial antes da pandemia de Covid-19.

Tabela 1 - Médias do Enem 2019. Brasil e Escola Madre Paulina

Disciplina	Média ENEM	Média E.E. Madre Paulina
Matemática	535,50	480,05
Linguagens	526,90	483,55
Ciências da Natureza	493,80	471,66
Ciências Humanas	569,20	482,55
Redação	522,8	516,25
Geral	529,64	487,07

Fonte: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), 2020.

1.6 Questão de pesquisa

Esta pesquisa foi realizada em uma sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no extremo leste da capital paulista por meio da aplicação do jogo *Corrida ao Vinte* aos alunos daquela turma que, na ocasião, estavam separados em duplas.

O cerne, então, desta pesquisa consiste em fazer uma análise didática do experimento feito em sala de aula, estudando o processo didático no qual os alunos foram inseridos e que lhes fora proposto para que conseguissem encontrar padrões numéricos no jogo *Corrida ao Vinte* a fim de encontrar uma estratégia que sempre fosse a vencedora. Ou seja, a busca é para que as duplas conseguissem responder a estas questões:

1. Há uma estratégia vencedora para o jogo em questão?
2. Essa estratégia pode ser aplicada para o mesmo jogo, porém com outros números?
3. Quais padrões vocês puderam observar ao longo das partidas jogadas entre vocês?

Sendo assim, como questão de pesquisa, busco identificar:

1 - Quais foram os conhecimentos mobilizados pelos alunos para que chegassem a uma solução baseada em seus conhecimentos prévios.

2 - Quais as características de aprendizagem que surgem com a aplicação do jogo *Corrida ao Vinte* e em todo o seu desenvolvimento até o momento em que os alunos percebem a generalização esperada.

Ao longo do presente trabalho, buscarei responder a estas questões e aprofundar as discussões sobre este tema.

2 OUTROS TRABALHOS QUE DISCORREM SOBRE O MESMO ASSUNTO

Neste capítulo, irei apresentar alguns estudos que ajudaram na composição do nosso trabalho, bem como uma breve apresentação do jogo *Corrida ao Vinte* propriamente dito e ele como situação didática em sala de aula.

2.1 O jogo apresentado por Brousseau

O jogo *Corrida ao Vinte* é jogado entre duas pessoas e consiste em utilizar inicialmente os números 1 ou 2 e então, o oponente acrescenta uma ou duas unidades ao último número dito pelo seu oponente na jogada anterior e o jogo segue assim, alternadamente, até que um deles chegue primeiro ao número 20 e, portanto, ganhe. O algoritmo vencedor pode ser notado pelos jogadores ao longo das partidas. Ele consiste em escolher inicialmente o número 2 e depois, os valores da sequência 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. A explicação detalhada das regras do jogo está descrita no capítulo anterior.

A partir dessa primeira constatação de estratégia vencedora, é proposto ao aluno um novo jogo: corrida ao número 35, por exemplo, e podendo utilizar os algarismos 1, 2 e 3. E então é perguntado a ele se é possível vencer esse novo jogo com a estratégia vencedora utilizada no *Corrida ao Vinte*.

Não foi possível encontrar a origem histórica do jogo em questão. O primeiro registro sobre o jogo encontrado por mim foi nas referências bibliográficas da tese de doutorado de Brousseau de 1986, intitulada “*Théorisation des phénomènes des Déseignement des mathématiques*” (Teorização de fenômenos da educação matemática). O jogo foi apresentado por ele mesmo, Brousseau, junto a G. Vinrich e N. Brousseau em 1972 em forma de artigo em um periódico da Universidade onde estudavam, a “*Unité de formation de mathématiques et interactions*” (Unidade de treinamento de matemática e interações), IREM 1 de Bordeaux.

O artigo de nome simples “*Division Euclidienne*” (Divisão Euclidiana) de oito páginas é destinado a professores que costumam utilizar experimentações e aplicações em sala de aula. A primeira parte do artigo explica o que é a divisão euclidiana, que eles obviamente sabem perfeitamente, mas em uma linguagem um pouco diferente, mais

semelhante a uma cartilha. A segunda parte do artigo apresenta uma situação cuja natureza matemática os professores não reconhecem de imediato. Uma forma aparentemente distante da tradicional e da definição formal. Os leitores tiveram que interpretar: “*Qui dirá vingt?*” (Quem dirá vinte?). Coube-lhes descobrir e mostrar que a divisão pode ser definida diretamente por uma situação de "busca de um resto" bem como por uma "busca de um quociente". Essa estranha tarefa se tornaria, então, em uma situação que levou à descoberta de um novo método de cálculo de divisão.

Segundo o website do próprio autor, a atividade “*Qui dirá vingt?*” viria a se tornar um filme (curta metragem), rodado em 1973 e seria apresentada em rede nacional pela televisão francesa aberta TF1 (o primeiro canal em audiência na França à época), em 1980 para os professores da “*école primaire*” (escola primária), o ensino fundamental francês, no programa intitulado “*Atelier maîtres de pédagogie*” (Oficina mestres da pedagogia), mostrando a realização dessa, à época, estranha nova atividade com os alunos. O roteiro, em quatro páginas, dessa atividade ocorrida na TV francesa está (Anexo D).

Já como doutor, em Bordeaux, Brousseau deu um curso em forma de tópicos com o nome de Interações didáticas e publicou um artigo de 59 páginas com esses tópicos cujo nome é o mesmo de sua teoria (Teoria das Situações Didáticas), separando cada parte do artigo por título, um pequeno resumo, e a explicação mantendo a topicidade em cada tema. Na parte A de seu artigo (“A modelagem de situações para uso didático”), no capítulo “As situações”, Brousseau usa o jogo *Corrida ao Vinte* como o primeiro exemplo de uma situação didática. Ele explica o jogo e começa a fazer algumas considerações, as quais trarei em resumo mais adiante.

Brousseau diz que a ignorância de um jogador em relação à teoria é representada pela escolha aleatória de um dos dois números permitidos (1 ou 2) para se adicionar ao último número citado pelo jogador oponente e complementa dizendo que a tática de cada jogador é manifestada por uma certa distribuição de probabilidade em relação aos números em aberto, ou seja, os números que ainda não foram alcançados. Ele finaliza, então, dizendo que uma estratégia correta determina todas as escolhas em todas as jogadas por cada jogador e que isso será determinante para o resultado do jogo e que a tática de cada jogador se manifesta nas escolhas de números feitas por ele.

O texto segue e Brousseau apresenta uma parte de uma tabela de frequências com as escolhas feitas por 100 pares de jogadores de 9 a 10 anos em mais de 30 jogos. As

bolas pretas representam a escolha do nº 2 (soma de 2 unidades) e as bolas brancas representam a escolha do número 1 (soma de 1 unidade) e a ausência da bola significa que a escolha do oponente fora a mesma do outro naquela jogada. O entendimento da tabela não é imediato mas fica mais fácil pensar que são as anotações dos jogos de cada aluno: ambos começam com zero e vão adicionando os números. Bola preta significa 2 acima, bola branca significa 1 acima e ausência de bola significa que o jogador copiou a jogada de seu oponente. Vejamos a seguir, na Figura 1, essa tabela apresentada pelo próprio Brousseau, intitulada por ele como “A aparição dos teoremas”:

Figura 1 - A aparição dos teoremas

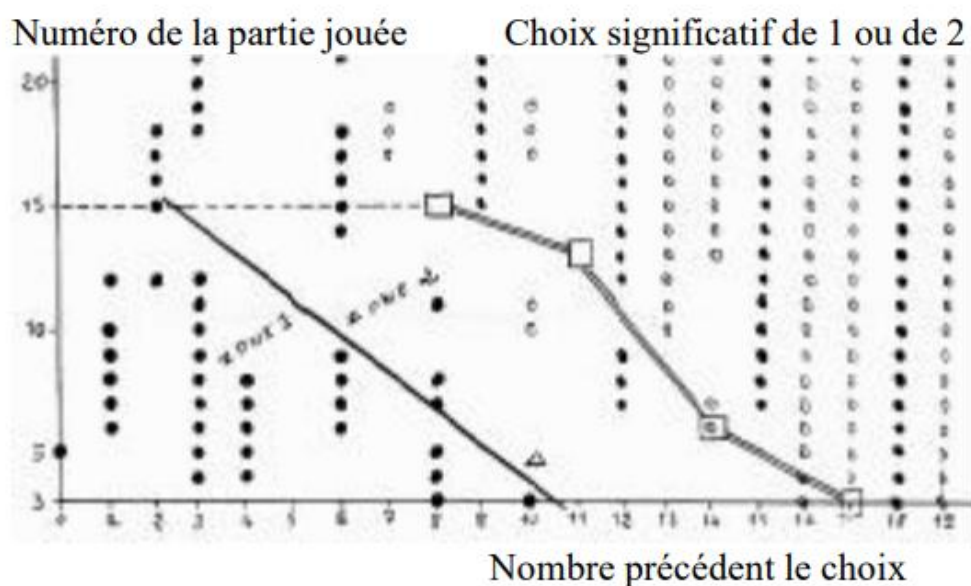


figure 1. L'apparition des théorèmes

Fonte: Brousseau, 1986.

Sobre a tabela, Brousseau diz que, primeiramente, temos o “teorema”: “você tem que jogar 20” (BROUSSEAU, 1986), e a tática para esse “teorema” é “jogar 17 se o outro disse 16 ou 15” (BROUSSEAU, 1986). Daí então, passamos para a segunda parte, que se repete mas, agora, a partir do “Você tem que jogar 17” e assim por diante. Até aqui, Brousseau ainda não consegue dizer se cada aluno desenvolve uma probabilidade determinada de escolha ou se joga de uma forma aleatória. Ele alerta para um ponto importante: ao se pensar no jogo na ordem inversa, ou seja, do 20 ao 0 (que é o que muitas crianças fazem), os “teoremas” citados acima desaparecem, o que mostra certas

limitações para o pensamento do sujeito, que age sem ter a oportunidade de tomar decisões com o objeto de estudo.

Brousseau finaliza repetindo que o conhecimento que é determinante para a estratégia vencedora é aquele que consiste em tomar, assim que possível, a sequência vencedora 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. O conhecimento que correspondente é o do resto da divisão por 3. E sugere que essa situação pode ser usada para introduzir o estudo do algoritmo de divisão para as crianças.

2.2 Revisão bibliográfica

Apesar de bastante conhecido e difundido no meio da educação matemática pelos professores, mestrados e doutorandos, o jogo *Corrida ao Vinte* não é tão explorado como ferramenta didática para a introdução de sequências ou pela busca de padrões. Ele é mais utilizado para a introdução das divisões euclidianas.

É de cabedal importância salientar que, além dos artigos, teses e dissertações pesquisadas, as disciplinas do curso de mestrado da PUC-SP também foram fundamentais para que eu pudesse colocar em palavras a minha pesquisa. Sem esses conjuntos de conhecimentos, seria impossível ela se concretizar.

Posto isto, as pesquisas bibliográficas foram buscadas na plataforma da Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), como descritor inicial e fazendo o uso dos conectivos booleanos do algoritmo do site, foi utilizado *Corrida AND ao AND vinte*, exatamente dessa forma, e sem aspas e obtive um total de 421.005 pesquisas divididas em 300.369 pesquisas de mestrado, 98.366 de doutorado e o restante, de artigos.

A maioria desse número é de pesquisas das áreas médicas e do esporte. Sendo assim, refiz a pesquisa com o termo *“Corrida ao Vinte”* exatamente dessa forma e respeitando o booleanismo do algoritmo do site e obtive um total de zero resultados. Então, para uma melhor filtragem, utilizei os filtros a meu favor, excluindo os trabalhos da área médica e de esportes e selecionando apenas resultados da área da educação matemática e obtive um total de 849 resultados. Ainda não satisfeito, utilizei, com os filtros já selecionados, as frases “jogos educativos”, “ensino de sequências” e “ensino fundamental”, chegando, por fim, a 14 resultados. Alguns dos 14, ainda, eram de outras áreas como da física, da nutrição e da geologia e então, fiz mais uma busca com as

palavras “**Ensino de seqüências**” AND “**teoria das situações didáticas**” e obtive mais 8 resultados. Todos falando de seqüências numéricas para o ensino médio e finalizei com a pesquisa: “**Ensino de seqüências**” AND “**teoria das situações didáticas**” AND “**Busca por padrões**” e obtive um resultado de 5 obras. Apresento na Tabela 2, os trabalhos encontrados:

Tabela 2 - Trabalhos Selecionados para o estudo

TÍTULO	AUTOR	ANO	UNIVERSIDADE	TEMA
Dissertação: Materiais alternativos para inovação tecnológica em sala de aula	Carlos Leandro A. Schwalb	2002	UFSC	Jogos educativos
Dissertação: O uso de padrões e seqüências: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do ensino fundamental.	Emily Cassiana Santolin Grecco	2008	PUC-SP	Padrões e Sequências
Dissertação: O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental: Análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano.	Débora Silva Veloso	2012	UFOP-MG	Pensamento e linguagem algébrica
Dissertação: Prototipação de uma versão digital do jogo do Nim com base no modelo de processo de software da engenharia didático-informática	José Vitor Ramos de Lima	2023	UFPE	Jogos combinatórios na educação matemática
Tese: Níveis de generalização mobilizados por alunos do 8º ano em tarefas de introdução à linguagem algébrica.	Karina de Oliveira Castro	2023	UNIAN-SP	Generalizações em álgebra

Fonte: Autor, 2023.

Após a leitura dos artigos e de partes selecionadas das teses e dissertações, cheguei à conclusão de que alguns estudos que versam – ou citam – o jogo *Corrida ao Vinte* como ferramenta didática de ensino de algum tema da matemática já foram feitos, mas nenhum com o enfoque pela busca de padrões para o 6º ano. Ele pode ter algumas abordagens diferentes no que tange ao objeto matemático: normalmente, o jogo *Corrida ao Vinte* é utilizado para a introdução da divisão euclidiana nos anos iniciais do Ensino Fundamental (3º/4º anos), para a introdução do estudo de sequências no 9º ano do Ensino Fundamental ou para o estudo de uma Progressão Aritmética propriamente dita no 1º e 2º ano do Ensino Médio e até mesmo, no Ensino Superior. Sendo assim, farei uma breve análise de outros trabalhos que utilizam o jogo *Corrida ao Vinte* como ferramenta de ensino e aprendizagem da matemática, os quais não apareceram na busca da CAPES.

2.2.1 A dissertação de Carlos Leandro A. SCHWALB (2002)

Em sua pesquisa *Materiais alternativos para inovação tecnológica em sala de aula*, Schwalb (2002) inicia fazendo uma breve explanação sobre as inovações tecnológicas em outros segmentos da sociedade como a agricultura, o comércio, a indústria, o transporte e a comunicação e destaca o ramo da educação que, segundo o autor, é “um bem cultural cujo acesso deve ser garantido aos indivíduos das mais variadas idades e classes” (SCHWALB, 2002, p. 14). A pesquisa de Schwalb foi de cunho exploratório e ocorreu em uma turma de alunos de uma escola privada de Curitiba, em que ele utilizou meios alternativos para a realização de experiências de aprendizado com os alunos, como o jogo *Corrida ao Vinte* e experimentos de física.

Visando o despertar do interesse dos jovens pelos estudos, o trabalho de Schwlab (2002) busca, baseando a parte teórica nos processos cognitivos dos alunos, encontrar um modelo de aprendizagem que contemple atividades experimentais em sala de aula, porém, utilizando recursos alternativos e de baixo custo. Sua hipótese inicial é o fato de que se deve fornecer aos alunos instrumentos que os instiguem para o conhecimento científico e que, ao mesmo tempo, facilitem sua aprendizagem, vinculando esses recursos alternativos ao meio em que estão inseridos (vida social, vida escolar etc.) para que possam construir o seu próprio saber por meio do raciocínio matemático e da reflexão.

A contribuição de Schwlab para o presente trabalho está no modo como ele

interpretou e analisou o jogo *Corrida ao Vinte*. O autor inicia falando sobre traçar um objetivo negativo, ou seja, como se começássemos por onde não queremos chegar. Segundo ele, um objetivo negativo “Assimila-se a ideia geral de que um objetivo negativo é criado quando se faz alguma coisa que conduza a uma situação que leva a um insucesso ou impasse.” (SCWALB, 2002 p. 34). Traçando um paralelo com o jogo *Corrida ao Vinte*, o objetivo principal do jogo seria chegar ao número 20, portanto, o objetivo negativo seria não chegar ao número 18 ou 19 pois, em acontecendo isso, na jogada seguinte, o seu oponente venceria.

E, assim, ele introduz a ideia de sub-objetivos. Um sub-objetivo consistiria em “reconhecer que um estado intermediário da situação deve necessariamente ser realizado para que o objetivo seja atingido.” (SCWALB, 2002, p. 35). Em outras palavras, traçando uma relação com o jogo *Corrida ao Vinte*, se o meu objetivo principal é chegar ao nº 20, um sub-objetivo seria qual é o número a que eu devo chegar para que eu possa alcançar o 20? Esse número seria o 17. E fazendo o mesmo pensamento para que se chegue ao 17? Eu deveria estar no nº 14 e assim por diante retroativamente.

Esse tipo de pensamento está bastante presente em nossa pesquisa e é explanado com mais detalhes ao longo do texto, todavia, esses objetivos negativos e sub-objetivos só não foram nomeados dessa forma.

2.2.2 A dissertação de Emily Cassiana Santolin GRECCO (2008)

Grecco (2008), em sua pesquisa *O uso de padrões e sequências: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do ensino fundamental* apresenta uma proposta de sequência didática para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental para a introdução de dois componentes da álgebra: as generalizações e as construções de expressões algébricas a partir da observação de padrões em sequências que são apresentadas em forma de problema. A pesquisadora executou uma parte de sua pesquisa experimentalmente, fazendo as realizações didáticas em sala de aula e, posteriormente, a análise *a posteriori* da sequência de ensino que fora aplicada, sendo assim, ela se baseou nos princípios da Engenharia Didática para fazer essa pesquisa.

Os procedimentos metodológicos utilizados pela autora são baseados na Teoria da Engenharia Didática, de Michelle Artigue, com dois pontos principais muito bem

definidos: a parte experimental, baseada nas realizações didáticas em sala de aula e a análise das realizações didáticas com uma validação específica para cada uma, confrontando a análise *a priori* e *a posteriori*.

Ela conclui apresentando os resultados e observa que houve sim um aumento gradual nos níveis de pensamento algébrico dos alunos após a aplicação das atividades que ela propôs e que, portanto, ela classifica como satisfatórios os resultados por ela obtidos.

A pesquisa de Grecco (2008) se aproxima bastante da pesquisa que lhes apresento aqui no tocante às novas formas de apresentar o conhecimento ao aluno e melhorar a construção do conhecimento deles como sujeitos da atividade ou compreensão que eles já têm (ou que criam) sobre o assunto.

Foi a primeira pesquisa com que eu tive contato, antes mesmo da aplicação com os alunos em sala de aula. Sendo assim, posso dizer que a pesquisa dela me ajudou bastante desde aspectos estruturais de encadeamento dos capítulos e temas como em antecipar problemas que pudessem vir a ter no futuro durante a aplicação da situação didática em sala de aula. Até as análises das atividades em sala de aula foram úteis para que eu pudesse direcionar e fazer as minhas próprias análises.

Além disso, concluímos, concordantemente, que é de cabedal importância a preparação e elaboração das sequências didáticas antes de serem aplicadas em sala de aula para a construção do processo de aprendizagem dos alunos. Assim, é possível diagnosticar as principais dificuldades apresentadas por eles na construção do seu próprio conhecimento e, então, explorá-las da melhor forma possível afim de sanar as dúvidas advindas do processo.

2.2.3 A dissertação de Débora Silva VELOSO (2012)

Em sua pesquisa *O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano* realizada em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental numa escola particular de Belo Horizonte, Veloso (2012) procura responder à seguinte questão de pesquisa: Que contribuições uma proposta de ensino baseada na percepção e generalização de padrões

e sequências pode trazer para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica em alunos que se iniciam no estudo da Álgebra?

Para isso, a autora inicia apresentando a álgebra como inegavelmente valorosa na formação matemática de qualquer cidadão, mas que, porém, é uma das áreas do conhecimento que mais oferece dificuldades tanto para o aprendizado dos alunos quanto para o ensinamento do professor e atribui essas dificuldades ao fato de o ensino da álgebra ser predominantemente mecânico e desprovido de sentido (para os alunos). A autora evidencia também o uso excessivo de símbolos em detrimento do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Posto isto, ela propõe sete tarefas aos alunos envolvendo padrões e sequências com a finalidade de investigar em como eles iriam lidar com o estudo da álgebra nos anos iniciais. As tarefas foram fundamentadas segundo os trabalhos de Radford (2009, 2010 e 2011) acerca do pensamento algébrico e dos processos de objetificação e de generalização cujos dados foram coletados por meio de gravações de áudio e vídeo, anotações e análises dos registros feitos pelos alunos.

Os resultados obtidos na pesquisa de Veloso (2012) (que, posteriormente virariam um livreto com a síntese comentada das tarefas desenvolvidas destinado a professores e formadores) evidenciam que a percepção de padrões e a construção e análise de sequências não são triviais para os alunos, mas que, quando são estimulados, podem desenvolver as habilidades necessárias para trabalhar com esses temas. Ela conclui também que os participantes do estudo apresentaram considerável avanço na compreensão de padrões e na percepção de regularidades.

A contribuição de Veloso com a presente pesquisa está, sobretudo, em suas análises da construção do pensamento algébrico para que eles chegassem onde era o esperado. Ela investiga as estratégias utilizadas pelos alunos em suas interações com as sequências numéricas e destaca o fato de alguns alunos terem conseguido desenvolver um raciocínio lógico e elaborado realizando sim as generalizações algébricas esperadas e finaliza exatamente com a chama que me trouxe até o tema de minha dissertação: “verificamos que é possível realizar tarefas que estimulem o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos iniciantes no estudo da Álgebra, antes mesmo que eles dominem a linguagem algébrica padrão.” (VELOSO, 2012, p. 244). Em outras palavras, podemos dizer que é possível que os alunos consigam desenvolver um raciocínio lógico

e encadeado para certos tipos de problemas, como os de busca de padrões em sequências numéricas, por exemplo, de acordo com seus conhecimentos prévios de matemática e de vida sem, necessariamente, ter tido contato formalmente com esse assunto na escola.

2.2.4 A dissertação de José Vitor Ramos de LIMA (2023)

Em sua pesquisa *Prototipação de uma versão digital do jogo do Nim com base no modelo de processo de software da engenharia didática na informática*, Lima (2023) apresenta o milenar jogo chinês chamado “*Nim*”. Esse jogo se aproxima bastante ao que conhecemos como “*pega varetas*”, porém, um pouco diferente. Mas se assemelha muito ao jogo da presente pesquisa (o *Corrida ao Vinte*) pois trata-se de um jogo em que dois jogadores jogam entre si e também há uma estratégia vencedora (dada por uma sequência numérica) para vencer o jogo, caso o jogador a conheça.

Em uma mesa com 16 “palitos” (ou varetas), cada jogador deve retirar da mesa uma, duas ou três unidades de palitos e então a vez passa para o oponente. Perde quem retirar o último palito. O jogo “*Nim*” é apresentado como um jogo combinatório, assim como o *Corrida ao Vinte* e também permite variações para outra quantidade de palitos e de retiradas, assim como no jogo tema dessa pesquisa.

Um jogo combinatório é um jogo em que dois participantes jogam entre si e eles tem total conhecimento das jogadas do outro e de tudo o que está acontecendo na partida, ou seja, o azar ou a sorte não estão presentes. O Xadrez, Jogo da velha ou jogo de Damas são outros exemplos de jogos combinatórios mais conhecidos.

A pesquisa de Lima (2023) teve como objetivo desenvolver um protótipo de uma versão digital do Jogo do “*Nim*”, alinhado metodologicamente pela Engenharia Didática aplicada à Informática. O Jogo do “*Nim*” foi um dos primeiros jogos a ser estudado matematicamente e teve sua primeira publicação produzida por Bouton (1901). Trata-se de um jogo simples por meio do qual podem ser trabalhados diversos conhecimentos matemáticos e torna-se uma excelente alternativa para desenvolver a capacidade dos alunos a atuarem como sujeitos na construção do seu próprio conhecimento na situação didática proposta, assim como o *Corrida ao Vinte*.

Para desenvolver sua versão digital, o jogo do “*Nim*” foi analisado sob a ótica das

dimensões epistemológica, cognitiva, didática e da informática de modo a estabelecer funcionalidades para o protótipo do jogo digital. A validação da versão digital do jogo do “*Nim*” bem como as potencialidades e limitações metodológicas foram baseadas no modelo de processo de software proposto pela Engenharia Didática aplicada à Informática.

A contribuição para a nossa pesquisa consiste na articulação da Teoria das Situações Didáticas com os jogos combinatórios em geral. O jogo do “*Nim*” digital foi apresentado aos alunos como situação didática em uma disciplina de mestrado dentro de duas plataformas: Scratch e Jamboard e foi jogado também em uma oficina de um evento científico da faculdade e concluímos que o uso desse jogo, bem como do jogo *Corrida ao Vinte*, pode ser mais uma ferramenta didática do professor para melhorar o ensino e a aprendizagem dos alunos no ensino fundamental.

2.2.5 A tese de Karina de Oliveira CASTRO (2023)

Em sua Tese de Doutorado *Níveis de generalização mobilizados por alunos do 8º ano em tarefas de introdução à linguagem algébrica*, Castro (2023) discorre acerca dos aspectos que levam o aluno dos anos iniciais do Ensino Fundamental a generalizar e analisar diante as tarefas de álgebra propostas a eles. O objetivo deste trabalho é investigar, por meio das atividades propostas, de que forma alunos dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental lidam com as atividades de análise de padrões e regularidades com condições e restrições impostas de modo que o professor, mediador da situação didática em sala de aula, possa intervir e possa, portanto, auxiliar aqueles alunos que ainda não atingiram o nível desejado de desenvolvimento do pensamento algébrico esperado, segundo Kaput (1998, 1999, 2008).

O embasamento teórico das análises está fundamentado na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e está associado ao raciocínio ligado às regularidades e à generalização de padrões. Já a metodologia aplicada, de cunho qualitativo, encaixa-se nos métodos da pesquisa documental, conforme Lüdke e André (2013). A pesquisa empírica busca analisar a especificidade dos dados coletados nas duas turmas diferentes em que a pesquisa foi aplicada (6º e 7º anos do Ensino Fundamental).

A hipótese inicial da pesquisa é a de que os estudantes dessa faixa etária (11-12

anos) possam evoluir em relação ao nível em que se encontram no tocante ao pensamento algébrico. Mas o professor deve permitir que os alunos iniciem a atividade de generalização e deve, quando apresentarem dificuldades, auxiliá-los por meio da mediação. Isto é, as relações entre o saber, o professor e os alunos devem se completar de maneira a construírem, em conjunto, novos conhecimentos.

Como questão de pesquisa, a autora pretende se aprofundar nas seguintes questões:

- Os alunos são capazes de “descobrir” o padrão nas atividades propostas?
- Os alunos “criam” regras segundo suas próprias convicções ou preferem “construir” generalizações a partir de outros padrões reconhecidos ou apresentados pelo professor (ou por seus colegas)?

A análise dos resultados mostra que, de modo geral, não houve diferença no raciocínio empregado pelos alunos. Os participantes de ambas as séries não demonstraram grandes dificuldades e demonstraram semelhança em seus questionamentos e conclusões. Este fato sugere que estes estudantes se encontram em um mesmo patamar no que se refere às habilidades iniciais da Álgebra e que, portanto, o trabalho com este tipo de tarefa pode ser aprofundado, já que eles estão prestes a trabalhar com esses conteúdos ainda no Ensino Fundamental.

Apesar das muitas semelhanças entre a pesquisa citada e o presente trabalho, as contribuições da dissertação de Castro (2023) para a presente pesquisa encontram-se, majoritariamente, em duas frentes: **1)** as análises das orientações da BNCC e **2)** as tarefas propostas aos alunos e a análise *a posteriori* realizada.

- 1- As análises das orientações da BNCC para a introdução à Álgebra nos anos iniciais (mais especificamente no que tange as sequências numéricas) e dos livros didáticos segundo a TAD de Yves Chevallard, já que o nicho de alunos estudados é praticamente o mesmo. Tais análises nos forneceram as contribuições necessárias para as investigações nas atividades do sexto ano do Ensino Fundamental, encorpando assim, o objeto de estudo da presente pesquisa.
- 2- As tarefas propostas aos alunos.

A atividade de Castro (2023) proposta aos alunos consistiu em: **1)** Observar uma sequência numérica e identificar a sua regularidade, indicando o valor dos números de acordo com a posição pedida;

2) A partir de um padrão dado, indicar o resultado da lei de formação de acordo com o número pedido;

3) Descobrir o padrão embutido em algumas sequências numéricas dadas.

Já a atividade proposta por mim consistiu em:

1) Após apresentar o Jogo *Corrida ao Vinte* e fazer com que os alunos jogassem entre si, pedir para que eles identificassem algum tipo de regularidade (padrão) nas sequências de números obtidos.

2) Perguntar aos alunos se existe uma estratégia vencedora (relacionando com Castro, poder-se-ia perguntar qual é a lei de formação da sequência vencedora)

3) Pedir para que os alunos aplicassem o mesmo pensamento em outras partidas do jogo, mas com valores diferentes (relacionando com Castro, descobrir o padrão em outras sequências de números).

Como vimos, a pesquisa de Castro em muito se assemelha a este trabalho e, portanto, muito contribuiu para minhas análises *a posteriori* das tarefas realizadas e entregues pelos alunos bem como as análises praxeológicas das atividades propostas nos livros de 6º ano.

2.2.6 Outros trabalhos que contribuíram para esta pesquisa

2.2.6.1 O artigo de Saddoag ALMOULOU e Cileda de Queiroz e Silva COUTINHO (2008)

Almouloud e Coutinho (2008), em seu artigo *Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos*, tecem reflexões sobre algumas pesquisas baseadas nos princípios da Engenharia Didática. Eles discutem os fundamentos e as características desta metodologia de pesquisa e propõem, à luz dessas características e fundamentos, uma reflexão sobre os trabalhos apresentados no Grupo de Trabalho de

Educação Matemática (GT-19)¹ da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd)² de 1999 a 2005 que se utilizam da Engenharia Didática e de seus pressupostos como metodologia de pesquisa.

Em seu texto, os autores analisam algumas pesquisas cujas abordagens apoiam-se nos princípios da Engenharia Didática. Discutem também seus fundamentos, e caracterizam as pesquisas apresentadas no GT-19 (Educação Matemática) da ANPEd, desde 1999, que usam, como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática. Os objetos desse estudo foram os objetivos, as questões, as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa, bem como os principais resultados alcançados por cada uma delas.

O artigo começa com os autores fazendo uma breve explicação sobre o que eles entendem por pesquisa e questão e hipóteses de pesquisa para, aí sim, partirem para as análises sob os pressupostos da Engenharia Didática observada como uma metodologia de pesquisa e então, após definirem alguns conceitos, iniciam as análises dos trabalhos apresentados no GT-19.

A leitura desse artigo me ajudou a ter mais clareza sobre o que é uma problemática de pesquisa, suas questões e como esclarecer e relacionar o problema proposto com os objetivos do estudo. O artigo me auxiliou também a compreender como a Engenharia Didática realmente é aplicada quando é utilizada, pois ele esclarece, didaticamente, todas as fases do processo de aplicação dessa metodologia na prática. Além disso, o presente artigo me auxiliou com a familiarização de termos associados à Engenharia Didática quando é utilizada como metodologia de pesquisa.

¹ O GT 19 foi criado em 1999 na 22ª reunião anual da Anped, em consequência da crescente participação, em reuniões anteriores, de estudantes e professores de programas de Pós-Graduação do país, com pesquisas em Educação Matemática. O GT representa um importante fórum, no âmbito da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, para exposição e debate de parte significativa da produção científica na área de Educação Matemática do país.

² A ANPEd - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação - é uma entidade sem fins lucrativos criada em 1978 que congrega programas de pós-graduação stricto sensu em educação, professores e estudantes vinculados a estes programas e demais pesquisadores da área. Ela tem por finalidade o desenvolvimento da ciência, da educação e da cultura, dentro dos princípios da participação democrática, da liberdade e da justiça social.

2.2.6.2 O artigo de Wagner Marcelo POMMER (2008)

Pommer (2008), em seu artigo para o Seminário de ensino de Matemática da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (SEMA/FE-USP) *Brousseau e a idéia de situação didática* cita, além das aplicações mais comuns do jogo *Corrida ao Vinte* como:

- Introdução ao estudo de sequências para o 9º ano do Ensino Fundamental.

- Introdução à divisão euclidiana para o 4º ano do Ensino Fundamental, a possibilidade de abordar a sequência vencedora do jogo (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20) como uma função de 1º grau de variáveis inteiras para o 1º ano do Ensino Médio.

- Congruência modular, como possibilidade para o Ensino Superior, o estudo da congruência modular. E então apresenta como exemplo, o esquema a seguir:

Para $n = 20$, então:

$$y = a + bx$$

$$y = 2 + 3r \quad e \quad 20 \equiv 2 \pmod{3}$$

Para $n = 35$, então:

$$y = a + bx$$

$$y = 3 + 4r \quad e \quad 35 \equiv 3 \pmod{4}$$

E então segue discutindo sobre o jogo, apresenta o já conhecido triângulo didático proposto por Guy Brousseau e propõe uma questão que será respondida ao final do artigo: “é possível um jogador saber qual(is) valor(es) poderá escolher para realizar variações do jogo *Corrida ao Vinte* e sempre ganhar, mantendo os números 1 e 2 para o início do jogo e a serem acrescentados? E para o jogo *corrida ao 35*?” (POMMER, 2008, p. 14).

A resposta vem em forma de anexo:

No jogo ‘*corrida ao 20*’, ganha quem escolher um número natural x tal que $x > 3$ e x for da forma $3n + 1$ ou $3n + 2$, onde n é um número natural não nulo. Na variação da ‘*corrida ao 35*’, utilizando os números 1, 2 ou 3, o vencedor deve escolher um número natural x tal que $x > 4$ e x for da forma $4n + 1$ ou $4n + 2$ ou $4n + 3$, onde n é um número natural não nulo. De modo geral, na ‘*corrida ao x* ’, utilizando algarismo 1, 2, ..., k , com k natural e $k < x$, perde quem escolher um número múltiplo e natural (não nulo) do número

($k + 1$). (POMMER, 2008).

A leitura do artigo de Pommer (2008) me fez enxergar outras perspectivas para o jogo *Corrida ao Vinte*. Outras formas em que o jogo pode ser utilizado que não fossem a forma usual (introdução para a divisão euclidiana) ou a forma e finalidade com que foi aplicado em sala de aula na presente pesquisa. A resposta a que o autor busca chegar e a validação que ele fez são muito próximas aos resultados que eu gostaria de chegar com esta pesquisa.

2.2.6.3 O artigo de Paulo Jorge Magalhães TEIXEIRA e Claudio Cesar Manso PASSOS (2008)

Teixeira e Passos (2014) usam o jogo *Corrida ao Vinte* para exemplificar a diferença entre conhecimento e saber na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Mas, antes disso, eles sugerem os níveis de abordagem a que o jogo *Corrida ao Vinte* poderia servir como objeto matemático. A divisão se assemelha à de Marcelo Pommer:

- Divisão euclidiana e subtrações sucessivas (4º/5º/6º anos do Ensino Fundamental)
- Progressão Aritmética (1º/ 2º anos de Ensino Médio).
- Sequência otimizadora como uma função polinomial de 1º grau de variáveis inteiras (1º ano do Ensino Médio).
- Congruência Modular (Ensino Superior).

O texto segue e os autores apresentam as regras do jogo e sugerem que os alunos percebam, após algumas partidas, que não é uma boa estratégia responder os números aleatoriamente na sua vez de jogar e aí eles já começam a demonstrar algum tipo de conhecimento. E esse conhecimento já pertence ao aluno mesmo sem ele notar. E são esses conhecimentos intrínsecos que os alunos trazem para a sala de aula para construir o saber.

Os autores concluem, então, dizendo que as crianças são hábeis em achar respostas para questões propostas, em muitos casos, sem mesmo examinar seu sentido e sua validade. “O aluno, nessa situação, mostra conhecimento, mas não, necessariamente, o

saber matemático.” (TEIXEIRA; PASSOS, 2014, p. 16). Esse é o saber matemático que vai sendo construído durante todo o desenvolvimento da situação didática, e essa construção do saber só evolui em função das decisões tomadas pelo ator da ação, ou seja, o aluno, que é aquele que resolve.

Este trabalho em muito contribuiu para o meu processo de imersão no tema e para a escrita da pesquisa pois ele se assemelha, em alguns pontos, com o que eu fiz. Eu pude observar, com os alunos da pesquisa, a mesma linha de raciocínio descrita pelos autores, com os alunos da pesquisa deles. O fato de o aluno querer dar uma resposta imediata (ou após ter tido um breve raciocínio) sem mesmo ter examinado a validação ou o sentido da resposta realmente aconteceu no meu caso e de forma muito semelhante. E poder ler que, de forma semelhante, a observação de todo o processo de desenvolvimento da situação didática e poder observar a construção do saber através das decisões tomadas pelos alunos, contribuiu bastante para a evolução da presente pesquisa.

2.2.6.4 As notas de aula da professora Maria José Ferreira da SILVA³ (2005)

Silva (2005), em suas aulas, também aplicou o jogo *Corrida ao Vinte* com seus alunos e focou na ludicidade do jogo como grande trunfo da ferramenta didática que ele é. Outro ponto importante levantado por ela são algumas ressalvas para o professor quando da utilização dessa atividade. A análise matemática do jogo em si foi o foco central da discussão, com o objetivo de organizar e viabilizar a utilização do *Corrida ao Vinte* nas aulas de matemática, utilizando-o como uma ferramenta pedagógica para construir, desenvolver ou cristalizar conceitos matemáticos.

Na atividade, ela propôs o clássico *Corrida* até o número vinte, escolhendo dentre os números 1 e 2 e, após a institucionalização, propôs diversas variações do jogo:

- Sequência de 1 a 21 e cada jogador escolhe um número entre 1 ou 2.
- Sequência de 1 a 21 e cada jogador escolhe um número entre 1, 2 ou 3.
- Sequência de 1 a 21 e cada jogador escolhe um número entre 2, 3 ou 4.

³ Informações fornecidas pela Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva. Notas de Aula: anotações sobre experiência com o jogo *Corrida ao Vinte*.

- Sequência de 1 a 21 e cada jogador escolhe um número entre 2, 4 ou 5.
- Sequência de 1 a 45 e cada jogador escolhe um número entre 1, 2 ou 6.

E, por fim,

- Sequência de 1 ao N e cada jogador escolhe um número entre a , $a + r$ ou $a + 2r$, isto é, uma sequência numérica finita e três números quaisquer em PA.

E, em todos os casos ela analisa a divisão euclidiana do último termo da sequência pelo quociente que é uma unidade maior que o maior termo que pode ser escolhido.

Assim, obtém-se a estratégia vencedora. E conclui que:

Então, utilizando-se desta propriedade, facilmente se verifica que é possível o jogador encontrar uma estratégia matemática vencedora “caminhando” pela PA. Esta propriedade é que justifica e possibilita a existência de uma estratégia matemática vencedora nas análises anteriores. Neste momento, seria conveniente, o professor institucionalizar a estratégia matemática vencedora e o conceito de PA, soma de PA e suas propriedades. (SILVA, 2005).

Ela finaliza, então, falando sobre alguns cuidados que o professor deve tomar ao se elaborar e propor as variações do jogo *Corrida ao Vinte*:

- 1- Primeiramente deve se escolher um número razoável de termos para a sequência numérica, pois, se este número for pequeno, torna-se difícil aos alunos jogarem e elaborarem uma estratégia vencedora. Por outro lado, se este número for muito grande, torna o jogo enfadonho e perde-se sua ludicidade.
- 2- É conveniente, sempre, começar com uma dupla de números a serem utilizados para somar a sequência, e só depois variar para trios, quartetos etc.
- 3- No início, esta dupla, estes trios, estes quartetos etc de números devem ser consecutivos e, de preferência, começando pelo número 1. Caso opte por números consecutivos não começados por 1, isso poderá causar uma certa insegurança aos alunos no momento de encontrar uma estratégia matemática vencedora para o jogo. Isso devido à dificuldade que poderá haver ao encontrar o primeiro termo da Progressão Aritmética.
- 4- Para finalizar, é cabível ao professor que escolha uma dupla trio ou quarteto de números em Progressão Aritmética. No momento desta sugestão é oportuno que os alunos já tenham discutido e o professor, institucionalizado uma

estratégia matemática vencedora. Com isso, torna-se possível aos alunos, conjecturar teorias nas quais, dependendo da Progressão Aritmética fornecida, vai existir uma estratégia vencedora, isto é: existirá um primeiro termo dessa P.A. em que a estratégia vencedora se tornará conveniente ou não.

3 ESTUDO DO OBJETO

O nosso objeto matemático de estudo são as sequências numéricas. Neste capítulo, irei apresentar a gênese do saber científico relacionado com o estudo das sequências numéricas e a busca por padrões algébricos, bem como analisar quais conhecimentos seriam esperados dos alunos nessa fase da vida escolar em que se encontram para que pudessem realizar a atividade proposta. Verificarei também quais eram os conhecimentos que eles tinham, efetivamente, no momento da aplicação do jogo e se conseguiram usar todas as ferramentas necessárias esperadas de um aluno do 6º ano do ensino fundamental por meio da análise dos livros didáticos utilizados por eles.

A álgebra que há por trás das sequências numéricas está associada à noção geral de sequências e, em particular, das sequências numéricas e seus padrões, que estão estreitamente associadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração.

Os livros serão analisados segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard em 1995, que coloca a matemática como uma das atividades humanas e sociais. Vale ressaltar que o estudo foi feito com esses alunos após 1 ano e meio de pandemia, portanto, com os estudos prejudicados.

3.1 Uma breve apresentação da Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Trata-se de uma teoria criada e advinda da Didática da Matemática francesa que permite analisar situações de ensino e aprendizagem da matemática escolar adicionando a essa análise o viés social e levando-se em conta o conhecimento prévio do aluno. A TAD situa, portanto, as atividades matemáticas dentro do conjunto das atividades sociais

humanas e suas instituições.

[...] uma obra matemática surge sempre como resposta para uma questão ou para um conjunto de questões. Mas em que se materializa tal resposta? Em uma primeira aproximação, poderíamos dizer que a resposta matemática para uma questão se cristaliza em um conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas inter-relações, isto é, em uma organização matemática. Essa organização é o resultado final de uma atividade matemática que, como toda atividade, humana, apresenta dois aspectos inseparáveis: a prática matemática ou “práxis”, que consta de tarefas e técnicas e o discurso fundamentado ou “logos” sobre essa prática, que é constituído por tecnologias e teorias. (Chevallard, 2001, p. 275 *apud* MAIA, 2007, p. 28).

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi formalizada na década de 1990 pela necessidade de ampliação da Teoria da Transposição Didática, desenvolvida, também por Yves Chevallard, na década de 1980, que por sua vez consiste em analisar as transformações pelas quais o saber sofre ao passar do campo da ciência para o campo escolar e também viabilizar que o saber possa ser ensinado pelo professor e aprendido pelo aluno dentro das possibilidades cognitivas de cada aluno, ou seja, transformar o conhecimento científico em conhecimento cotidiano de sala de aula. Chevallard (1985) afirma que “uma transposição didática é o trabalho de fabricar um objeto de ensino, ou seja, transformar um saber produzido pelo ‘sábio’ ser o objeto do saber escolar.” (CHEVALLARD, 1985 *apud* MENEZES 2001, p 71). E, como dito na citação de Chevallard, reproduzida, mais acima, por Maia, a palavra praxeologia tem o radical “práxis”, que vem do grego e que significa prática e o sufixo “logia” também do grego “logos”, significa o estudo de determinado assunto e logos, razão.

Sendo assim, segundo Maia (2007), como não existe práxis sem logos e nem logos sem práxis a palavra praxeologia afirma que em uma atividade matemática existem duas partes que se necessitam mutuamente, como em qualquer outra atividade cotidiana, afirmando assim a organização proposta por Chevallard em sua teoria.

A TAD considera que toda atividade humana consiste em resolver uma tarefa de algum tipo T , por meio de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ que permite simultaneamente pensá-la, produzi-la e que, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ . A essa quadra recém apresentada, Chevallard (1999) chama de praxeologia, ou organização praxeológica, e é simbolizada por $[T, \tau, \theta, \Theta]$. O autor designa essa praxeologia como uma organização do saber. Diz-se que $[T, t, \theta, \Theta]$ é uma praxeologia pontual para indicar que esta é uma relativa a um único tipo de tarefa.

Mas o que é exatamente essa praxeologia? Para explicá-la melhor, vamos supor

que haja uma tarefa a ser resolvida. Essa tarefa é uma ação que fora demandada ao sujeito (que, no caso, é o aluno). Para cada tarefa a ser realizada há, pelo menos, uma técnica que possa ser utilizada para a resolução dessa tarefa, seja essa técnica algorítmica ou não. Mas essa técnica precisa ser explicada e ela é explicada (justificada) pelo conjunto de teoremas, conceitos e propriedades matemáticas. A esse conjunto damos o nome de tecnologia. Todavia, a tecnologia, em si, também deve ser explicada por algo maior: a teoria. No caso da presente pesquisa, a teoria maior é a Álgebra. E é assim que se constitui a organização praxeológica de Chevallard. É assim que ela amalgama todos os conceitos. Maia (2007) deu um exemplo que ajuda a compreender essa praxeologia:

Problema: **“Esboçe o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$ a partir dos seus pontos notáveis.”** Neste caso, observamos que o tipo de tarefa proposta consiste em esboçar o gráfico de uma função quadrática e a técnica a ser utilizada consiste em determinar os pontos notáveis desta função, ou seja, consiste em determinar as intersecções com os eixos e coordenadas do vértice da parábola. O discurso teórico-tecnológico compreende o conceito de função quadrática dado pela sua forma desenvolvida e já conhecida: $y = ax^2 + bx + c$, inclusive com suas propriedades e notações. (MAIA, 2007. p. 29).

Sendo assim, iremos analisar os livros didáticos apresentando brevemente como o conteúdo sobre sequências numéricas é abordado e os tipos de tarefas e exercícios que são propostos, identificando as técnicas que o texto permite que o aluno utilize e observar qual a tecnologia que estaria envolvida em cada resolução.

3.1.2 Análise dos livros didáticos segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard

Utilizaremos os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) apenas para fazer uma análise prexeológica nos livros didáticos dos alunos que participaram da pesquisa. Analisaremos tanto os livros didáticos vigentes à data da aplicação da pesquisa bem como os dos anos anteriores.

Aqui, estamos interessados em observar as atividades que envolvem a busca por padrões algébricos em sequências numéricas, sejam elas propostas em forma de problemas ou imagem ou até mesmo uma simples observação. Aqui, apenas as atividades de sala de aula serão analisadas, mas, nos livros dos alunos, após as atividades de sala de aula (que devem ser feitas em grupo e com o professor), aparecem alguns exercícios que devem ser resolvidos por eles (sozinhos) como tarefa de casa.

A coleção de livros selecionada é intitulada “A *CONQUISTA DA MATEMÁTICA*”, dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci, publicada pela Editora FTD em 2020. A coleção é composta por oito livros do Ensino Fundamental sendo, respectivamente, um volume para cada série. Os livros aqui analisados foram os cadernos do professor dos volumes 4, 5 e 6, referentes à 4^a, 5^a e 6^a séries mas vale dizer que, na apostila do aluno, estão presentes as mesmas atividades a serem feitas. A diferença é que, no caderno do professor, além das respostas, há também a proposta de desenvolvimento da atividade bem como alguns exemplos ou dicas para que ele possa melhor elucidar o aluno. Esses foram os livros a que tivemos acesso, os quais, todos, foram cedidos pela coordenadora da escola.

Os conteúdos explicitados nas tarefas propostas pelos livros didáticos em questão serão confrontados com as habilidades propostas pela BNCC de 2018 e, conseqüentemente, verificado se estão de acordo com as diretrizes do Currículo Paulista de 2019, já que a pesquisa foi feita em meados de 2021 e essas eram a base e o currículo vigentes aos alunos à época.

Vale ressaltar que a BNCC é uma referência obrigatória e não um currículo. BNCC é uma base que estabelece os objetivos que se espera alcançar, já o Currículo Paulista define como alcançar esses objetivos. O Currículo Paulista explicita a todos os profissionais da educação que atuam no Estado de São Paulo as competências e habilidades essenciais para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes paulistas e considera sempre, em sua formação, a perspectiva do desenvolvimento humano.

A noção geral de seqüências e, em particular, das seqüências numéricas, estão estreitamente associadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Segundo Youssef (2005) “[...] é por isso que há muitos registros de problemas envolvendo os mais diversos tipos de seqüências numéricas nos principais documentos das civilizações antigas.” (YOUSSEF, 2005, p. 154 *apud* CUNHA, 2009, p. 146)

Existe um saber matemático científico por trás do estudo das seqüências numéricas. E aqui iremos estudar de que forma esse saber científico matemático efetivamente vai para os livros, pois é nos livros didáticos em que a transposição didática acontece.

Iremos analisar os seguintes aspectos: 1- Qual é a tarefa proposta? 2- Qual é a didática utilizada e qual é a técnica necessária para o aluno solucionar aquele certo tipo de problema? 3- Quais são as tecnologias utilizadas?

De acordo com as diretrizes da BNCC (BRASIL, 2018) é esperado que:

[...] no ensino fundamental, a matemática deve articular com seus diversos campos: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, articulando com outras áreas do conhecimento, gerando confiança na construção e aplicação do conhecimento matemático.

O Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) organiza as habilidades do ensino fundamental em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, exatamente como proposto pela BNCC. O documento fala da importância do domínio das técnicas da Álgebra na formação do cidadão, trazendo a leitura e compreensão de problemas, além de gráficos e tabelas como fundamental na formação do aluno.

Vamos ver, aqui, as propostas do Currículo Paulista de 2019, no que tange ao estudo das sequências numéricas em forma de habilidades até o 6º ano do E.M. (ano da turma onde foi a aplicação).

Veja na (Figura 2):

Figura 2 - Habilidades referentes à sequências no Currículo Paulista, 2019

Álgebra	1º	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos do cotidiano ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.
Álgebra	1º	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).

Álgebra	2º	(EF02MA09) Construir seqüências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.	Construção de seqüências repetitivas e de seqüências recursivas.
Álgebra	2º	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de seqüências repetitivas e de seqüências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.	Identificação de regularidade de seqüências e determinação de elementos ausentes na seqüência.
Álgebra	2º	(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em seqüências repetitivas e em seqüências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.	Identificação de regularidade de seqüências e determinação de elementos ausentes na seqüência.

Álgebra	3º	(EF03MA10) Identificar regularidades em seqüências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da seqüência e determinar elementos faltantes ou seguintes.	Identificação e descrição de regularidades em seqüências numéricas recursivas.
----------------	----	---	--

Álgebra	4º	(EF04MA11) Identificar regularidades em seqüências numéricas compostas por múltiplos de um número natural, completando seqüências numéricas pela observação de uma dada regra de formação dessa seqüência.	Seqüência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.
Álgebra	4º	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.	Seqüência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero.

Álgebra	5º	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.	Linguagem algébrica: variável e incógnita.
Álgebra	5º	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	Linguagem algébrica: variável e incógnita
Álgebra	5º	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.

Álgebra	6º	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.	Sequências recursivas e não recursivas.
Álgebra	6º	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.	Sequências recursivas e não recursivas.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Vemos aqui que, no estudo de sequências nos anos iniciais do Ensino Fundamental (2º, 3º e 4º anos), a proposta é conceber o estudo de noções de sequências, visando à compreensão e identificação da ideia de repetições e padrões, ainda, sem as operações propriamente ditas. A proposta tem como início do desenvolvimento da noção de que há um certo tipo de padrão nas sequências de números, seja ele qual for. Já nos anos finais (5º e 6º anos), o estudo incrementa e refina o estudo com as sequências. Nessa fase, o aluno, já tendo adquirido o conhecimento de identificação dos padrões, passa a reconhecer que sempre há uma mesma diferença entre o número seguinte e o número atual e entre o número atual com o número anterior e aprende a calcular essa razão e a ter que, além de identificar a regularidade em cada sequência, construir um algoritmo que o permita sintetizar essa sequência inteira por meio de uma fórmula geral.

Já a BNCC, propõe que o aluno saia do ensino fundamental tendo a capacidade de:

Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes” além de propor também que o aluno consiga “reconhecer padrões de resolução para encontrar elementos faltantes. (BRASIL, 2018).

Sendo assim, podemos observar que o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) está de acordo com a organização proposta pela BNCC (BRASIL, 2018) para abordar as sequências numéricas e identificação de padrões no Ensino Fundamental, inferindo que o Currículo Paulista é construído a partir das normas de ensino propostas pela BNCC.

Iremos, aqui, analisar praxeologicamente as atividades propostas pelos livros didáticos utilizados na Escola Estadual Madre Paulina no que tange ao estudo de sequências numéricas. Uma atividade no livro da 4ª série, duas no livro da 5ª série e duas no da 6ª série. Em cada atividade, será(ão) analisada(s) a(s) tarefa(s) T , por meio de uma técnica τ , executada com uma tecnologia θ que é justificada por uma teoria Θ .

Os capítulos sobre sequências dos livros são estruturados de forma simples e com bastante figuras, tornando-se assim, de fácil entendimento para o aluno. Os autores não definem exatamente o que é uma sequência de números, e dizem que podem apresentar sempre o mesmo padrão ou não e então apresentam vários exemplos com imagens para que o aluno entenda.

No livro da 4ª série, os autores exemplificam a sequência dos números naturais, depois mostram a sequência dos números pares, apresentam uma sequência de 5 em 5 começando a partir do 20; após, dizem que uma sequência pode começar a partir de qualquer número e, por fim, apresentam uma imagem como se fosse um tabuleiro com números em sequência em cada casa, porém com algumas casas faltantes e daí então, apresentam os números faltantes. Esse mesmo tabuleiro apareceria, mais adiante em forma de exercício proposto aos alunos.

No livro da 5ª série, os autores dão um exemplo de sequências que não têm um padrão pré-estabelecido como, por exemplo, a placa dos carros que passam por uma rua e apresentam uma sequência decrescente para o aluno ver que não é necessariamente obrigatório que a sequência seja crescente e então, apresenta uma atividade, fazendo com que o aluno pense sobre o que acaba de ser apresentado e crie a sua própria sequência de números.

As sequências didáticas que serão analisadas a seguir estão presentes no caderno do professor dos livros utilizados pela escola. E, antes delas, as habilidades propostas no mesmo caderno. As atividades são as mesmas que estão presentes no livro do aluno, a diferença é que, por ser caderno do professor, existem as propostas de direcionamento das atividades e como agir em cada ponto da sequência didática proposta, bem como as respostas dos exercícios. Para o aluno, estão apenas os exemplos e as perguntas dos exercícios com o espaço para a resolução. O primeiro recorte que apresentaremos (Figuras 3, 4, 5) é uma proposta de atividade do volume 4 (livro da 4ª série).

Figura 3 - Atividade 1: Livro da 4ª Série– Caderno do Professor

Matemática – 4º ano – 1º trimestre – Plano de desenvolvimento – 4ª sequência didática

4ª sequência didática: Sequências recursivas

Serão abordadas sequências, sua organização e seus padrões, com ênfase em sequências de ordens crescente e decrescente de números naturais. Para iniciar a discussão sobre o tema, serão trabalhadas algumas sequências não numéricas.

Relação entre BNCC, objetivos e conteúdos

Objeto de conhecimento	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural
Habilidade	<ul style="list-style-type: none"> (EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
Objetivos de aprendizagem	<ul style="list-style-type: none"> Compreender a organização de uma sequência em ordens crescente e decrescente. Identificar termos de uma sequência. Reconhecer os padrões de diferentes sequências. Completar sequências em ordens crescente e decrescente de números até quarta ordem.
Conteúdos	<ul style="list-style-type: none"> Termos de uma sequência Padrões de diferentes sequências Sequências numéricas recursivas em ordens crescente e decrescente

Materiais e recursos

- 1 imagem impressa da atividade da sequência da etapa 2 para cada grupo
- 1 imagem impressa da atividade da sequência de bolinhas (etapa 3) para cada grupo
- 1 imagem impressa da atividade de sequência do coelho (etapa 6) para cada aluno
- 1 folha de papel sulfite para atividade em grupo
- 1 folha de papel sulfite para atividade em dupla

Desenvolvimento

- Quantidade de aulas: 2 aulas

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Figura 4 - Desenvolvimento da atividade 1 na Aula 1: Livro da 4ª Série– Caderno do Professor

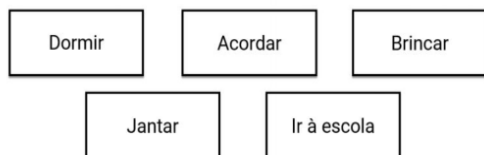
Aula 1

Esta sequência didática será composta de seis etapas: quatro na Aula 1 e duas na Aula 2.

Etapa 1: Nesta aula, serão trabalhadas sequências com números de até terceira ordem, mas, para iniciar o tema de sequências, o professor pode solicitar aos alunos de cada fileira que se organizem: do aluno mais baixo para o mais alto. Discutir sobre os dois padrões de organização que podem ser analisados: ordem crescente e ordem decrescente.

Questionar os alunos sobre o que eles conhecem que apresenta regularidade, como a escala musical, os dias da semana etc.

Etapa 2: Dividir a turma em grupos de até quatro alunos e entregar a sequência de atividades que eles desenvolvem ao longo do dia. Pedir que recortem e coloquem na ordem em que elas ocorrem. Adaptar a atividade de acordo com o contexto da turma: se eles estudam pela manhã, devem brincar à tarde, a atividade da manhã será "Brincar".



Observar se os alunos apresentam dificuldades em sequenciar os fatos. Caso seja necessário, auxiliá-los. Após o conceito estar bem compreendido por todos, iniciar o trabalho com a linguagem matemática.

Etapa 3: Para prosseguir com o estudo de sequências, entregar a sequência de imagens de bolinhas abaixo e pedir que, individualmente, pensem qual será a quantidade de bolinhas do quarto termo dessa sequência e como será o desenho dela:

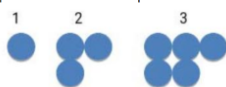


Ilustração elaborada pelo autor

A resposta é a seguinte:

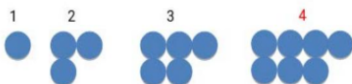


Ilustração elaborada pelo autor

Em seguida, discutir com os alunos qual foi o padrão percebido: o acréscimo de duas bolinhas a cada termo, sempre à direita da última bolinha da primeira e da segunda linha, da seguinte maneira:



Ilustração elaborada pelo autor

Etapa 4: Nesta etapa, passar para questões utilizando a linguagem matemática. Informar que os números também podem ser organizados em sequências. Explicar a reta numérica, representando-a na lousa:

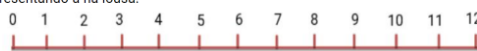


Ilustração elaborada pelo autor

Discutir com os alunos que o primeiro termo dessa reta numérica é o 0 e o último é o 12. Questionar se sabem dizer qual seria o próximo termo. Quando a resposta 13 for obtida, questionar qual é a regularidade dessa sequência.

Também explicar que essa é uma sequência crescente e está na horizontal, mas existem retas numéricas na vertical e/ou em ordem decrescente. Isso porque, durante a formalização matemática, é importante destacar que a reta numérica pode ser apresentada tanto na vertical como na horizontal. Representar na lousa essa mesma reta, mas na vertical. Esse conhecimento será muito útil na futura abordagem de plano cartesiano.

Em seguida, apresentar uma nova sequência em ordem crescente:

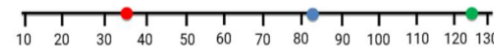


Ilustração elaborada pelo autor

Solicitar que, com os mesmos grupos (em uma folha separada para ser entregue), respondam às questões abaixo para cada uma das sequências dadas (A, B, C e D), considerando o início da sequência de baixo para cima:

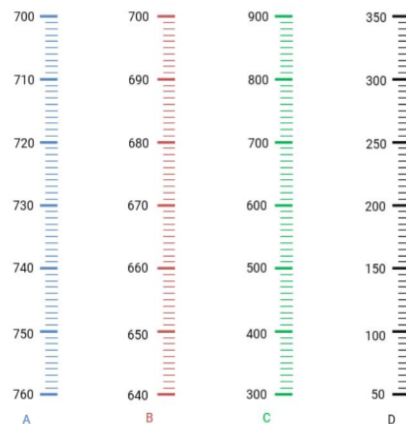


Ilustração elaborada pelo autor

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Em seguida, a atividade continua com as tarefas (exercícios) para que o aluno faça, como veremos a seguir.

Figura 5 - Atividade 1 na aula 1- Exercícios com resposta e diretrizes ao professor. Livro da 4ª Série – Caderno do Professor

1. Qual é o primeiro termo da sequência? E o último?
Primeiro termo – Sequência A: 760; B: 640; C: 300; D: 50.
Último termo – Sequência A: 700; B: 700; C: 900; D: 350.
2. Qual regularidade pode ser observada em cada sequência?
Sequência A: tiram-se 10 unidades a cada termo; B: somam-se 10 unidades a cada termo;
C: somam-se 100 unidades a cada termo; D: somam-se 50 unidades a cada termo.
3. Qual é o termo seguinte em cada sequência?
Sequência A: 690; B: 710; C: 1 000; D: 400.
4. As sequências estão em ordem crescente ou decrescente?
Sequência A: decrescente; B: crescente; C: crescente; D: crescente.

Avaliação

Com as atividades realizadas na primeira aula, será possível avaliar a compreensão dos alunos quanto à organização de sequências não numéricas e sequências numéricas recursivas em ordens crescente e decrescente de números de até três ordens, identificando seus termos e padrões. A avaliação contínua da aprendizagem poderá ser feita em diversos momentos: por meio das atividades entregues (realizadas em grupo, em dupla ou individualmente) e das discussões realizadas em aula.

Para trabalhar dúvidas

Caso algum aluno apresente dificuldades nas atividades da Aula 1, procurar delimitar a dúvida e auxiliá-lo nessa superação. Sequências podem ser trabalhadas de diversas maneiras, com imagens, números, objetos etc. Utilize a melhor maneira para sanar cada dúvida.

Caso surjam dúvidas sobre a identificação de regularidade de sequências, solicitar que eles mesmos construam uma sequência, por exemplo, de multiplicidade 9. Nesse caso, terão de construir uma sequência como a seguinte:

9 18 27 36 45...

Outra dúvida que pode surgir é na identificação de algum termo específico da sequência. Nesse caso, pode ser que o aluno esteja se esquecendo de considerar a regularidade que aparece em algum momento da sequência; assim, sugere-se trabalhar mais exercícios que o façam refletir sobre um termo qualquer de uma sequência.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Notamos, aqui, que a atividade proposta nº 1 fora dividida em quatro etapas para a primeira aula: a primeira etapa sugere que o professor peça aos alunos de cada fileira que se enfileirem do menor para o maior ou do maior para o menor, para que a noção de ordem seja discutida em sala de aula dando ao aluno a possibilidade de dizer onde mais ele reconhece o conceito de ordem em sua vida, como a escala das notas musicais, a altura dos colegas ou os dias da semana, por exemplo. No Quadro 1, temos a atividade 1 da primeira aula:

Quadro 1 - Análise praxeológica da atividade 1 – Aula 1

<p>Tarefa [T]: Na atividade 1, temos 4 tarefas que foram propostas para a primeira aula [T_1, T_2, T_3, T_4].</p> <p>As tarefas 1 e 2 consistem em fazer com que o aluno ordene. Em T_1, ele deve se colocar em ordem junto aos seus colegas de acordo com a altura. Em T_2, ele deve colocar em ordem 5 cartões em que há um evento corriqueiro escrito nele, como acordar, almoçar, estudar, brincar e ir dormir.</p> <p>Em T_3, é fornecido a ele 3 imagens com uma, três e cinco bolinhas desenhadas em ordem. Então, é pedido a ele para que pense qual será a quantidade de bolinhas no 4º termo dessa figura e pede para que desenhe como ele seria. Em T_4, são fornecidas 4 sequências numéricas e são pedidas 4 coisas ao aluno:</p> <p>1 - Para que o aluno determine o primeiro e último termo de cada sequência. 2 - Qual é a regularidade que pode ser observada em cada sequência. 3 – Pede-se para que o aluno determine o próximo termo de cada sequência. 4- Pede-se para determinar qual sequência está em ordem crescente ou decrescente.</p>
<p>Técnica [τ]: Para resolver as tarefas T_1 e T_2, o aluno deve se utilizar de conceitos intuitivos. Para se colocar em ordem com seus colegas, por mais que nunca tenha tido contato com o tema de sequências numéricas em sua vida, o aluno sabe que deve ficar à frente do colega mais baixo que ele e atrás de um colega mais alto. Ele sabe também que só pode almoçar caso já esteja acordado e só pode jantar, caso já tenha almoçado, e assim por diante. Já para as tarefas T_3 e T_4, o aluno também deve se utilizar de conceitos intuitivos, mas, agora, também de conceitos matemáticos. Analisando as bolinhas, é possível ver que sempre uma bola é adicionada à linha de cima e à linha de baixo. Olhando os números em sequência, é possível ver qual é o primeiro e qual é o último e se eles estão em ordem crescente ou decrescente. Em T_4, o aluno verifica também (sem necessariamente se utilizar da adição ou subtração) o quanto um número está distante do outro para poder determinar o próximo termo dessa sequência.</p>
<p>Tecnologia [θ]: Conceitos de ordem mostrados pelo professor por meio de exemplos numéricos ou de eventos. Ideia intuitiva de tamanho: qual número é maior?</p>
<p>Teoria [θ]: Noções de ordenação e Aritmética simples como conceitos de adição e subtração.</p>

Fonte: Autor, 2023.

Em seguida, a atividade continua com as tarefas (exercícios) propostas para serem desenvolvidas na segunda aula. Como veremos a seguir (Figuras 6 e 7):

Figura 6 - Desenvolvimento da atividade 1 na Aula 2: Livro da 4ª Série – Caderno do Professor

Aula 2

Iniciar a aula revisando a aula anterior. Utilizar como referência a avaliação das atividades desenvolvidas na Aula 1.

Etapa 5: Nesta segunda aula, será dada continuidade ao estudo de sequências recursivas, agora com números de até quarta ordem.

Para iniciar a discussão, apresentar aos alunos a sequência a seguir, que pode ser copiada na lousa:



Ilustração elaborada pelo autor

Pedir que respondam em duplas às seguintes questões (a atividade deverá ser feita em uma folha à parte, para entregar no final da aula):

1. Qual é o primeiro e o último termo dessa sequência?
O primeiro termo é 1 200 e o último é 1 800.
2. Qual é o próximo termo dessa sequência?
1850. Para responderem a esta questão, os estudantes terão de perceber que, a cada termo dessa sequência, são acrescentadas 50 unidades.
3. Essa sequência está em ordem crescente ou decrescente?
Crescente.
4. Considerando o valor 1 443, qual é a cor da bolinha que provavelmente poderia representá-lo?
Azul.
5. Considerando o valor 1 270, qual é a cor da bolinha que provavelmente poderia representá-lo?
Vermelha.
6. Considerando a cor da bolinha que sobrou, dê um exemplo de um número que ela poderia representar.
O aluno pode responder qualquer número maior que 1 600 e menor que 1 650.

Em seguida, copiar na lousa a sequência decrescente a seguir e buscar identificar com a turma sua regularidade, que é de 500 unidades a menos a cada termo.



Ilustração elaborada pelo autor

Em seguida, copie na lousa a sequência a seguir. Solicitar a vários alunos que preencham, cada um, um termo faltante: os alunos deverão identificar que, a cada termo, são acrescentadas 250 unidades. Incentivar a turma a ajudar os colegas que estiverem na lousa.

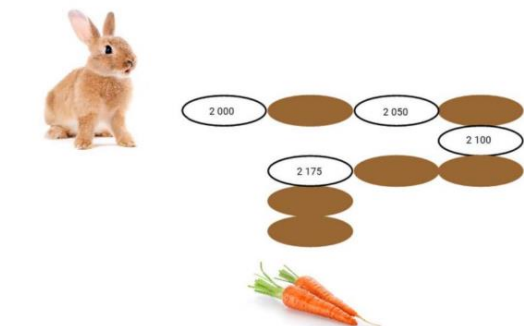


Ilustração elaborada pelo autor

Etapa 6: Em seguida, entregar a atividade do coelho (a seguir) e pedir que, individualmente, resolvam a seguinte situação (passar na lousa ou entregar impressa com a imagem):

O coelho quer chegar à sua cenoura, mas só conseguirá seguir o caminho pulando nas pedras marrons. Para isso, você precisa descobrir quais números estão faltando nessa sequência. Você consegue ajudá-lo?

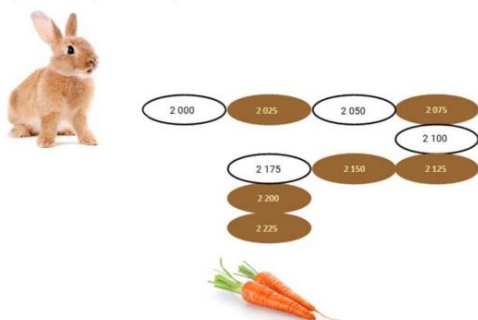
Figura 7 - Atividade 1 na aula 2 - Exercícios com resposta e diretrizes ao professor. Livro da 4ª Série- Caderno do Professor



Africa Studio/Shutterstock.com; Angorius/Shutterstock.com

Atividade a ser entregue aos alunos na etapa 6.

Essa atividade pode ser discutida em sala ou ser solicitada sua posterior entrega. Para respondê-la corretamente, o aluno precisa descobrir qual valor deve ser somado a cada termo dessa sequência. A resposta a essa questão é 25.



Africa Studio/Shutterstock.com; Angorius/Shutterstock.com

Resposta em marrom da atividade da etapa 6.

Avaliação

Com as atividades realizadas na Aula 2, será possível avaliar a compreensão dos alunos quanto à organização de uma sequência recursiva de ordens crescente e decrescente de números naturais de até quarta ordem e identificar termos e padrões de seqüências (por meio das atividades entregues, que poderão ser analisadas posteriormente, ou pelas discussões feitas em aula).

As atividades em grupo ou em dupla são momentos interessantes para a aprendizagem, pois os alunos podem perceber, com os pares, dúvidas e divergências para a explicação dos conceitos estudados. Nesses casos, intervir para solucionar tais problemas.

Por fim, analisar as formas avaliativas tanto da Aula 1 quanto da Aula 2 buscando nos comentários, atitudes e atividades entregues pelos alunos indícios de que atingiram ou não os objetivos de aprendizagem propostos e possíveis erros ou dúvidas comuns para serem revisados ou explicados de maneiras diferentes em aulas futuras.

Ampliação

Propor aos alunos em uma aula de informática ou utilizando *tablets* um jogo educativo sobre seqüências lógicas (a atividade poderá ser desenvolvida na escola ou em casa). No jogo, o aluno deve estar atento para descobrir a lógica em cada uma das fases, que pode variar no padrão para pares, ímpares e números múltiplos. É uma ótima atividade para estimular o cálculo mental e a concentração. Trata-se de um jogo interessante, que estimula a autoavaliação dos estudantes ao permitir que eles corrijam um erro cometido, antes de ser dada a resposta correta.

O jogo não necessita de cadastro e está disponível em: <<http://www.escolagames.com.br/jogos/completandoNumeros/>>. Acesso em: 15 jan. 2018.

Outra proposta pode ser um jogo com cartas de baralho. O jogo consiste em entregar nove cartas para cada aluno e o objetivo é formar trios de seqüências como 1, 2, 3; 2, 3, 4; 4, 5, 6; 7, 8, 9, ou seqüências de mesmo número como 1, 1, 1; 2, 2, 2 etc.

A atividade deve ser feita em grupos de, no máximo, cinco integrantes cada e com um baralho por grupo. Inicialmente, as cartas deverão ser embaralhadas (essa etapa deve ser feita pelo professor), posteriormente deverão ser distribuídas 9 cartas para cada aluno. Em cada rodada, um aluno deve pegar uma carta do baralho (que deve estar virada com os números para baixo) e verificar se ela forma algum trio com as que já possui. Caso a carta não o ajude, ele deverá descartá-la. O mesmo deverá fazer o jogador seguinte, que agora também tem a possibilidade de pegar a carta descartada pelo colega ou, caso não lhe sirva, pegar outra carta do baralho e, se não lhe for útil, descartá-la. Em seguida, é a vez de outro aluno, realizando o mesmo procedimento, sempre seguindo a mesma ordem dos jogadores. Ganha quem formar três trios primeiro.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Aqui, novamente, percebemos os autores preocupados com uma grande quantidade de exemplos e figuras para que facilitasse o entendimento do aluno e para que ele compreendesse e imaginasse diversos tipos de seqüências numéricas existentes em seu dia a dia. Para essa etapa do aprendizado, é notório que o aluno precisa ter o conhecimento dos números naturais e sua ordem, bem como das operações aritméticas e a percepção, dos padrões que ali aparecem.

Vemos aqui, no Quadro 2, a atividade nº 1 para a 2ª aula. Aqui, os conceitos de ordem, termo inicial, termo final e termo seguinte que foram dados na 1ª aula foram retomados. Mas, além disso, também foi introduzido o conceito de termos faltantes. O aluno, agora, precisa descobrir as lacunas nas seqüências propostas para que ela seja completada. Sendo assim, o conceito de recursão e identificação de padrões fica mais explícito.

Quadro 2 - Análise praxeológica da atividade 1 – Aula 2

<p>Tarefa [T]: Na atividade 1, temos três tarefas que foram propostas para a aula 2 [T_1, T_2, T_3].</p> <p>A tarefa 1 é, basicamente, uma recapitulação da aula anterior e relembra a noção de ordem. Em T_1, é fornecida uma sequência numérica e são pedidas seis coisas ao aluno: 1 - Para que o aluno determine o primeiro e último termo dessa sequência. 2 - Pede-se para que o aluno determine o próximo termo de dessa sequência. 3- Pede-se para determinar se a sequência está em ordem crescente ou decrescente. E então desenha três bolinhas coloridas (uma vermelha, uma azul e outra verde) em três pontos diferentes e entre valores da sequência numérica fornecida e pergunta: 4- Qual é a cor da bolinha que está mais próxima ao 1143. 5- qual é a cor da bolinha que está mais próxima ao 1270. 6- Qual seria o valor aproximado da bolinha de cor azul? Em T_2, pede-se para que o aluno determine a regularidade da sequência decrescente dada. Em T_3, pede-se para que o aluno complete os números faltantes da sequência dada. Em T_4 É desenhado um coelho, várias casas (representando os seus pulos) com números escritos em cada casa e pede-se para que o aluno ajude o coelho a chegar em sua cenoura, dado que o coelho só pula nas casas de cor marrom e que essas casas estão sem números escritos.</p>
<p>Técnica [τ]: Para resolver as tarefas T_1 e T_2, o aluno deve se utilizar de conceitos adquiridos na aula anterior, como os conceitos de ordenação, primeiro e último termos da sequência, recursão e identificação de padrões. Já para as tarefas T_3 e T_4, o aluno também deve se utilizar de conceitos intuitivos, mas, agora, também de conceitos matemáticos. Analisando os números faltantes em cada sequência, bem como seu termo inicial e os seguintes, é possível notar qual é o padrão apresentado em cada uma e, portanto, é possível completar os termos faltantes</p>
<p>Tecnologia [θ]: Conceitos de ordem, já adquiridos na aula anterior. Ideia intuitiva de distância de um número a outro e a ideia intuitiva de tamanho: qual número é maior? E, portanto, qual número vem depois ou antes?</p>
<p>Teoria [Θ]: Noções de ordenação e Aritmética simples como conceitos de adição e subtração. Recursão e identificação de padrões</p>

Fonte: Autor, 2023.

Após essas duas atividades, encerra-se o conteúdo programático de sequências numéricas no 4º ano.

A intenção do material para com os alunos, ao propor essas atividades, era de que 1- o aluno conseguisse compreender e identificar uma sequência numérica e dizer se é crescente ou decrescente, bem como reconhecer os seus termos. 2- o aluno conseguisse reconhecer os padrões nas diferentes sequências apresentadas, bem como completá-las com os termos faltantes.

Já a BNCC, espera que o aluno 1- consiga identificar as regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural e completar as

sequências por meio da observação da regra de formação dessa sequência (princípio da recursão); 2- consiga reconhecer, por meio de investigação, que haja grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultem em restos iguais, identificando assim as regularidades.

Sendo assim, podemos inferir que o material didático proposto pelo Currículo Paulista 2019 está de acordo com as habilidades esperadas pela BNCC para o 4º ano do Ensino Fundamental no que tange ao estudo das sequências numéricas.

Vamos, agora, para a análise da atividade proposta no livro do 5º ano (Figura 8):

Figura 8 - Proposta da 1ª Atividade: Livro da 5ª Série – Caderno do Professor

(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

(EF04MA01A) Ler, escrever e ordenar números naturais, com pelo menos três ordens, observando as regularidades do sistema de numeração decimal.

TEMPO

Uma aula.

PREPARAÇÃO

É importante realizar a leitura prévia das atividades e buscar diferentes estratégias de resolução e de cálculos para fazer intervenções adequadas a partir dos conhecimentos e propostas dos estudantes.

MATERIAIS

Material do estudante, giz e lousa.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

A turma pode ser organizada em duplas. Durante a socialização, solicite que os estudantes disponham as cartelas em U para as discussões e o compartilhamento das estratégias e resultados.

DESENVOLVIMENTO E INTERVENÇÕES

Inicie uma conversa com os estudantes comentando que algumas sequências de números apresentam um padrão e outras, não. Por exemplo, ao promover uma roda de recitação de números de 5 em 5, a partir do número 20 a sequência apresentará uma regularidade ou padrão. Mas se observarmos os carros que passam pela rua e registrarmos os dois últimos dígitos das placas, é provável que não encontremos um padrão na sequência dos números. Promova a leitura dos números apresentados nas cartelas e peça que os estudantes resolvam a atividade. Verifique se, ao determinar o padrão de cada sequência numérica, eles identificam o número que devem adicionar ou subtrair para manter a regularidade.

No item D, eles podem comentar que a regularidade consiste em considerar os algarismos e a ordem em que estão posicionados, sem determinar o número que está sendo adicionado.

O QUE APRENDEMOS HOJE?

Ao final da aula, retome com os estudantes os procedimentos que utilizaram para determinar os elementos faltantes em cada sequência. Na Atividade 2, os estudantes deverão inventar duas sequências numéricas para que um colega resolva. Oriente-os a construírem primeiro a sequência em ordem crescente. Solicite que escolham um número para iniciá-la e definam o padrão do intervalo. Em seguida, alerte-os para o fato de que devem decidir quais números ficarão ausentes. Peça que resolvam a sequência antes de entregá-la ao colega de dupla. Solicite que resolvam a sequência inventada pelo colega, discutindo, ao final, as estratégias que utilizaram para criar e resolver as sequências. Repita os mesmos encaminhamentos na produção da sequência em ordem decrescente.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Esta foi a proposta de desenvolvimento da atividade no caderno do professor e, a seguir, veremos a atividade propriamente dita (Figura 9), como está na apostila do aluno,

só que, com as respostas. Note que as cartelas em branco seriam as faltantes para os alunos.

Figura 9 - 1ª atividade: Livro da 5ª Série – Caderno do Professor

AULA 10 – SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS

O que vamos aprender?

Nesta aula, vamos observar regularidades em sequências de números e determinar elementos para ampliá-las.

Ao voltarem para casa, Ana Júlia e seu pai recitavam alguns números obedecendo a um padrão, como 21, 31, 41... Nesse desafio, um solicitava ao outro que desse continuidade à sequência. Em casa, eles construíram cartelas para continuar a brincadeira.

1. Ana Júlia construiu cartelas com números e montou sequências numéricas com padrões. Leia as cartelas numeradas, identifique o padrão estabelecido em cada sequência e escreva os números que estão faltando em cada caso:

A	26	29	32	35	38	41
B	134	154	174	194	214	234
C	116	114	112	110	108	106
D	1203	1304	1405	1506	1607	1708
E	5200	5100	5000	4900	4800	4700

2. Que tal construirmos sequências numéricas como a Ana Júlia? Elabore duas sequências: uma em ordem crescente, outra em ordem decrescente. Depois, troque com um(a) colega, para que ele(a) resolva a sequência criada por você.

As respostas dependem das sequências numéricas inventadas pelas crianças.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Aqui, vemos duas atividades com maior grau de dificuldade em relação às últimas apresentadas, devido à quantidade maior de números e sua natureza (como números de 3ª e 4ª ordem). Notamos o cuidado dos autores em diferenciar cada sequência (visualmente falando) e em fazer com que o aluno pense nos números em branco sem fazer o trabalho por eles, ou seja, deixando mais de uma casa em branco em cada uma das sequências (ao invés de mostrar uma casa, deixar a próxima em branco e mostrar a próxima), obrigando, assim, o aluno a pensar. Na segunda atividade, os mesmos conceitos são cobrados só que, agora, o aluno deve construir as sequências e evidenciar os números faltantes.

Do ponto de vista tecnológico, temos aqui o significado de uma sequência numérica, ou seja, qual número sempre deve ser adicionado ao termo anterior para se

obter o termo seguinte? Introduz-se aí a noção de razão ou de um padrão propriamente dito nas sequências de números apresentadas.

Do ponto de vista cognitivo, o aluno é levado a abstrair seu pensamento, já que ele é obrigado a trabalhar (ou a descobrir) números que não estão ali presentes para ele. Além disso, ele já precisa demonstrar um conhecimento mais abrangente dos números naturais pois trabalha com elementos não convencionais para uma criança, ou seja, números mais altos do que uma dezena (como visto no livro didático de volume anterior).

Portanto, ele passará a ter que trabalhar cada vez mais com o abstrato e cada vez menos com o palpável. Além disso, ele passa a ter que regredir na sequência de números ao invés de apenas adicionar, o que também se torna uma operação um pouco mais complicada para a criança do que uma soma simples. Aliado a esses conhecimentos, o aluno também precisará de todo o conhecimento adquirido anteriormente na atividade da 4ª série (citada acima) para que ele consiga executar a presente atividade. No Quadro 3, podemos ver a análise das atividades 1 e 2 para a 5ª série:

Quadro 3 - Análise praxeológica das atividades 1 e 2 – 5ª Série

<p>Tarefa [T]: Nas duas atividades, temos duas tarefas que foram propostas: $[T_1, T_2]$. Após uma contextualização do problema, é fornecida uma imagem com 5 sequências numéricas com os números dentro de cartelas. Alguns números estão faltando e é pedido, em T₁, para que se descubra o padrão em cada caso e, em T₂, para que o aluno complete os números faltantes. Na atividade 2, após a contextualização do problema (a mesma que serviu para a atividade 1), é pedido, em T₁, para que o aluno crie duas sequências, uma crescente e uma decrescente nos moldes do enunciado, ou seja, com alguns termos faltantes. Em T₂, é pedido para que o aluno se junte em dupla com um colega e troque as sequências criadas entre eles para que o outro complete os números faltantes e descubra o padrão.</p>
<p>Técnica [τ]: Tanto na atividade 1 quanto na 2, para se resolver as tarefas T₁ e T₂, o aluno deve se utilizar de conceitos já adquiridos por ele no estágio da vida escolar em que ele se encontra, como os conceitos de ordenação (crescente e decrescente), primeiro e último termos da sequência, recursão, termos faltantes e identificação de padrões.</p>
<p>Tecnologia [θ]: Conceito de ordem. Conceitos de sequências numéricas. Identificação de padrão.</p>
<p>Teoria [Θ]: Conceito de ordem crescente e decrescente, e aritmética simples como conceitos de adição e subtração. Recursão e identificação de padrões</p>

Fonte: Autor, 2023.

Vamos agora para as próximas atividades apresentadas nos livros do Ensino Fundamental utilizados pela escola E.E. Madre Paulina. Começamos com a primeira atividade da 6ª série. Essas imagens (Figura 10) são do livro do aluno, portanto, sem resolução e sem direcionamento para a condução da aula.

Figura 10 - 1ª atividade: Livro da 6ª Série

Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.	Aula 4
---	---	--------

ATIVIDADE 2 – MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL

A Professora Carmem propôs para a sua turma que pensassem numa sequência com os dez primeiros números naturais, múltiplos do número da chamada de alguns dos estudantes da classe, começando pelo próprio número.

Como exemplo, apresentou a sequência dos múltiplos do número de chamada de Ana (2) e de Amélia (3):

Ana (2) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.

Amélia (3) = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

- 2.1 Que cálculos a Professora Carmem fez para obter os números da sequência?
- 2.2 Por que o número 15 não aparece na sequência dos múltiplos do número de chamada de Ana?
- 2.3 Observe as sequências dos múltiplos do número de chamada de Ana e de Amélia. Quais números se repetem nas duas sequências? Dentre os números que se repetem, qual é o menor? Comente.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Percebemos, aqui, uma atividade mais rigorosa para o aluno. Dessa vez, ele deve descrever a lei da sequência e ainda responder a algumas questões sobre os números e seus múltiplos. Essa atividade compactua com a construção do conhecimento que ele já vinha construindo ao longo de sua escolaridade junto às atividades anteriores e seus outros conhecimentos de matemática (como o conceito de múltiplo, de ordem) e conhecimentos de vida.

Diferentemente dos exercícios da 4ª ou 5ª série, aqui, não há figuras ou desenhos. O exercício apresenta as sequências e as perguntas de forma direta. Nota-se, também, a preocupação dos autores para que o aluno infira argumentos sobre a sequência apresentada.

Além dos conhecimentos prévios que ele deveria ter utilizado acima, o aluno, aqui, vai precisar abstrair mais ainda o seu pensamento. Similarmente à atividade anterior, aqui se trabalha com números altos, mas também diferentemente da atividade anterior, os números em questão não estão escritos ou desenhados, mas apenas alguns deles, obrigando assim o aluno ter que realmente descobrir um padrão para esses números escritos nessa ordem. Assim, introduz-se o conceito de múltiplo de um número natural, fazendo com que ele consiga saber o n-ésimo múltiplo de qualquer número e, conseqüentemente, introduzindo o tema das progressões. No Quadro 4, temos a análise praxeológica da atividade 1 para a 6ª série:

Quadro 4 - Análise praxeológica da atividade 1 – 6ª Série

<p>Tarefa [T]: Nesta atividade, temos 3 tarefas propostas: $[T_1, T_2, T_3]$. Após uma contextualização do problema, o enunciado exemplifica duas sequências para explicar mais explicitamente o que se pede e então, traz as perguntas. Em T_1, é pedido para que se descubra quais cálculos foram utilizados para se obter os valores das sequências apresentadas. Em T_2, é perguntado ao aluno qual a razão de o número 15 não aparecer na 1ª sequência fornecida. Em T_3, é perguntado ao aluno qual é o menor número dentre os que se repetem nas duas sequências.</p>
<p>Técnica [τ]: Tanto na atividade 1 quanto na 2, para se resolver as tarefas T_1, T_2 e T_3, o aluno deve se utilizar de multiplicação e do conhecimento de números pares e números repetidos.</p> <p>Na tarefa 1, por exemplo, teríamos a seguinte resolução: dado o número de chamada (2) da aluna Ana, a sequência de 10 termos em que cada termo seria o seu múltiplo e começando por ele mesmo seria:</p> $a_1 = 2 \times 1 = 2$ $a_2 = 2 \times 2 = 4$ $a_3 = 2 \times 3 = 6, \text{ e assim por diante até o décimo termo da sequência.}$ <p>Analogamente, o mesmo processo seria repetido para os próximos números de chamada pedidos.</p> <p>As respostas das tarefas T_2 e T_3 seriam teóricas, portanto, sem necessidade de resolução matemática.</p>
<p>Tecnologia [θ]: Ideia intuitiva de números que se repetem em duas sequências, bem como qual número é maior que outro. Conhecimento sobre números naturais (pares e ímpares), e a ordenação.</p>
<p>Teoria [θ]: Conceito de ordem, Conjunto dos Números Naturais, conceito de multiplicidade e identificação de padrões numéricos.</p>

Fonte: Autor, 2023.

Vamos agora para a segunda atividade proposta no livro didático do 6º ano (Figura 11). Essa será a última atividade a ser analisada neste texto e é a que finaliza os conceitos de sequências para o 6º ano do Ensino Fundamental. Mais uma vez, as imagens são do livro do aluno, portanto, sem resolução e sem direcionamento para a condução da aula.

Figura 11 - A 2ª atividade: Livro da 6ª Série

Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.	Aula 10
--	---	---------

ATIVIDADE 3 – DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

- 3.1 Na sequência, a Professora Carmem propôs aos seus alunos que verificassem quantos são os divisores de um determinado número. Assim, escolheu um aluno da lista e perguntou se o seu número de chamada era divisor de 26.
- A primeira a responder foi Amélia, número 3 da lista. Ela respondeu que seu número era divisor de 26. Sua resposta estava correta? Justifique sua resposta.
 - Célia, número 13 da chamada, disse que seu número era divisor de 26. Está correto? Justifique sua resposta.

Fonte: Currículo Paulista, SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019.

Antes de analisarmos o exercício proposto propriamente dito, não podemos deixar de citar que o livro dá um exemplo (com resolução) logo antes de propor essa atividade. Ele fornece uma sequência de 5 números e dá três informações sobre ela: o 1º termo: 2; o 3º termo: 6; diz que a soma dessa sequência vale 30 e então pergunta os termos faltantes. Antes de revelar o resultado, os autores pedem para que o aluno divida o valor da soma da sequência pelo número de termos dessa sequência e então, propõe que utilize esse pensamento para que os ajude na resolução desse problema. A sequência do livro é uma progressão aritmética da forma **(2, X, 6, 8, 10)** mas, antes de revelá-la, eles sugerem que os alunos pensem em sequências de três números, que resultam em soma igual a 30, depois pedem para que os alunos pensem em sequências de 4 números com soma igual a 30 e então, por fim, pede para que pensem em qual é a sequência de 5 números cuja soma dê 30, utilizando o pensamento da divisão citado acima.

A tecnologia apresentada - e necessária - para a resolução desse exercício é o conceito dos divisores de um número natural, tanto a definição quanto a aplicação. O modo como os autores apresentam o problema leva o aluno a ter que pensar efetivamente em qual sequência está ali proposta, já que não há uma sequência propriamente dita escrita

com seus termos. E isso leva o aluno a ter que pensar. Percebemos que o aluno deve se apropriar desses conhecimentos de divisão para seguir o seu estudo nas séries acima para poder compreender as progressões aritméticas e, posteriormente, as geométricas (e outras que o professor queira falar ou não). Essa é a que mais se aproxima do jogo *Corrida ao Vinte* em relação aos seus conceitos teórico-tecnológicos, segundo a teoria de Chevallard.

Já incorporado dos conhecimentos de adição, subtração, multiplicação, divisão e dos múltiplos de um número natural, o aluno aqui deve fazer a volta. Ainda no campo dos pensamentos, o aluno deve utilizar o mesmo pensamento que ele teve para obter o múltiplo de um número natural relativamente pequeno, mas por outro viés. Ao invés de partir de um número pequeno para descobrir os seus múltiplos, ele parte de um número grande e para descobrir os seus divisores e, assim, ele descobre também que o divisor daquele número grande também é múltiplo de algum número menor do que ele e assim por diante. Temos, no Quadro 5, a análise praxeológica da atividade 2 para a 6ª série:

Quadro 5 - Análise praxeológica da atividade 2 – 6ª Série

Tarefa [T]: Nesta atividade, temos 2 tarefas propostas: $[T_1, T_2]$. Após uma breve contextualização do problema, o enunciado pede para que a professora escolha um aluno e pergunte a ele se o seu número de chamada é ou não divisor do número 26. **Em T₁**, afirma-se que Amélia (nº 3) é divisor de 26 e então, pergunta-se com a justificativa, se essa afirmação está correta. **Em T₂**, ocorre o mesmo mas, agora, com o Célio (nº 13 na chamada). O enunciado afirma que 13 é sim divisor de 26 e pede-se para que o aluno diga se essa afirmação é ou não verdadeira e pede-se para que ele justifique.

Técnica [τ]: para se resolver as tarefas **T₁** e **T₂**, o aluno deve se utilizar da divisão ou da multiplicação para conseguir escrever os múltiplos do seu número de chamada (e, assim, chegar ou não ao 26) ou tentar dividir o 26 pelo seu número de chamada (e, assim, verificar se é ou não divisor).

Na tarefa 1, por exemplo, teríamos a seguinte **resolução**: dado o número de chamada (3) da aluna Amélia, a sequência de seus múltiplos seria:

$$a_1 = 3 \times 1 = 3$$

$$a_2 = 3 \times 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \times 3 = 9$$

•

•

•

$$A_8 = 3 \times 8 = 24$$

$A_9 = 3 \times 9 = 27$, e assim por diante, gerando a sequência (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...) e concluindo, assim, que o 3 não é divisor de 26 ou, por outro lado, que 26 não é um múltiplo de 3.

Já na tarefa 2, por exemplo, teríamos a seguinte **resolução**: dado o número de chamada (13) da aluna Célia, a sequência de seus múltiplos seria:

$$a_1 = 13 \times 1 = 13$$

$$a_2 = 13 \times 2 = 26$$

$a_3 = 13 \times 3 = 39$, e assim por diante, gerando a sequência (13, 26, 39, 52, 65, ...) e concluindo, assim, que o 13 é divisor de 26 ou, por outro lado, que 26 é um múltiplo de 13.

Tecnologia [θ]: Ideia, já intuitiva, dos números que estão na tabuada do 3 e do 13, conhecimento sobre números naturais, seus múltiplos, seus divisores e a ordenação deles. Argumentação para poder justificar sua resposta.

Teoria [Θ]: Conjunto dos Números Naturais, conceito de multiplicidade, conceito de divisor e conceitos de Aritmética básica.

Fonte: Autor, 2023.

Finalmente, podemos observar que as praxeologias utilizadas no material de apoio ao professor dos livros para o Ensino Fundamental do Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) em relação às sequências está de acordo com a organização proposta pela BNCC (BRASIL, 2018) para abordar o estudo de sequências numéricas ao longo do Ensino Fundamental, pois ela amalgama todo o conhecimento do aluno para que ele possa canalizar na resolução de problemas com repetições.

Observamos uma baixa quantidade de problemas propostos sobre o assunto de sequências nos 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, praticamente, duas atividades (com alguns exercícios em cada) por ano. Todavia, sabemos que esse assunto pode ressurgir em outras matérias que possam vir no futuro e sabemos também que o cronograma é enxuto e que o professor se esforça para manter a programação das aulas em dia, mas não poderíamos deixar de citar esse fato e inferir que seria mais interessante haver uma maior quantidade de atividades sobre as sequências (sejam elas numéricas, de eventos, de imagens ou abstratas).

Sabemos das dificuldades encontradas por professores, coordenadores e alunos nas escolas do Brasil e não conseguimos dizer, aqui, em quantas aulas essas atividades efetivamente foram feitas; se essas atividades foram executadas corretamente, e até

mesmo se elas foram finalizadas. Não conseguimos também dizer, aqui, se houve tarefa para casa preparada pelo professor e nem qual foi a devolutiva do aluno e o efeito que essas atividades causaram neles e nem o quanto eles foram expostos a isso e nem se houve a repetição para a apreensão e construção do conhecimento.

Nosso trabalho apenas visa contribuir para a evolução do ensino e da aprendizagem dos conceitos de sequências numéricas e pela busca de padrões algébricos de modo geral, fazendo com que o aluno possa conseguir perceber as repetições, as recursões, e as interações que há entre um número, o seu sucessor e o seu antecessor em uma determinada sequência e que o aluno possa, também, perceber que esses números estão relacionados sempre por uma mesma razão que, no contexto desse trabalho, devido à idade das crianças, devemos chamar de padrão.

Podemos observar que a sequência didática proposta e aplicada na presente pesquisa converge, em teoria, com o que é proposto nos livros didáticos até o ano vigente, diferindo apenas no dinamismo e atuação e autonomia do aluno, já que os livros propõem apenas atividades teóricas e a nossa, apesar de também teórica, é também lúdica.

Apesar dessas ressalvas e baseado no material que nos foi cedido (tanto o vigente quanto o passado) e no que é proposto pelo Currículo Paulista de 2019, podemos inferir, então, que o Currículo Paulista foi sim construído e baseado a partir das normas da BNCC e que fornece, caso utilizado em sua totalidade, uma boa base ferramental para que o aluno desenvolva os conceitos de sequência numérica e busca por padrões para a sua vida adiante.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

A pesquisa realizou-se em uma ação de resolução de problema coletivo após uma explicação feita pelo professor (eu mesmo, no caso). O problema em questão se trata do antigo jogo *Corrida ao Vinte*, que é jogado entre duas pessoas. A atividade foi preparada e executada baseada nos conceitos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau e será analisada à luz dos conceitos da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. A Teoria Antropológica do Didático, explanada e aplicada no capítulo anterior, não fará parte deste capítulo pois foi utilizada apenas para a análise dos livros didáticos dos alunos.

Serão apresentados, neste capítulo, os aspectos teóricos do experimento, como, por exemplo, analisar o *milieu* do aluno que é um *milieu* potencial, mas que passa a se tornar um *milieu* efetivo com as discussões feitas por eles mesmos em sala de aula. Os alunos foram organizados em duplas e as duplas foram observadas ao longo das discussões para a resolução do problema proposto.

4.1 Aspectos teóricos

A Teoria das Situações Didáticas é uma teoria que proporciona condições favoráveis ao professor para que ele consiga elaborar, aplicar, acompanhar e realizar análises sobre a sequência didática que fora proposta por ele mesmo em sala de aula, visando, sempre, à melhora nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Os envolvidos no processo são sempre o aluno, o professor e o saber sempre com a finalidade de melhorar o conhecimento matemático do aluno. Ao professor, cabe propor um problema ao aluno e ao aluno, cabe aceitar esse problema e tentar resolvê-lo, iniciando, assim, o processo de aprendizagem.

O aluno só terá adquirido esse conhecimento quando conseguir aplicá-lo novamente, sozinho, em outras situações naturalmente sem a indicação intencional de um professor, todavia, no processo do ensino e aprendizagem, dentro das situações didáticas, existem algumas variáveis que podem ser controladas pelo professor e outras que não

podem e a essas variáveis, as que o professor não tem o controle direto, damos o nome de situação adidática.

Para Brousseau, a situação adidática é representada pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem. Quando o aprendiz tem dificuldades na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática. (BROUSSEAU, 1986 *apud* TEIXEIRA P.J.M; PASSOS; C.C.M., 2013).

Já uma situação didática é o conjunto de circunstâncias em que um aluno é inserido e de relações que o ligam ao seu ambiente. E, segundo BROUSSEAU (1972), podem ser interpretadas de duas formas:

A: Situação didática é o ambiente do aluno criado e manipulado pelo professor ou pelo educador que o considera como uma ferramenta didática para a atividade.

B: Situação didática é todo o ambiente do aluno, do professor e, inclusive, do sistema educacional em si.

Uma sequência didática consiste em um conjunto de situações didáticas que se torna em uma atividade de sala de aula em que o aluno é convidado a construir saberes relativos a um conteúdo matemático, sem a interferência direta do professor. O professor e o aluno firmam um contrato didático (que será melhor explicado mais à frente), pelo qual ambos se comprometem com o saber e em como o saber é tratado por ambas as partes. O professor, no caso, é o mediador das atividades didáticas em sala de aula e tem por intuito fazer com que o aluno se aproprie de saberes presentes na sequência didática proposta. E o aluno, por sua vez, tem o dever de gerenciar a sua relação com o saber que é passado pelo professor, visando à apropriação daquele saber. O funcionamento do contrato didático é influenciado pelo contexto em que a situação didática está inserida; pelas escolhas pedagógicas feitas pelo professor; pelos objetivos do curso; pelas normas de avaliação do professor e pelos tipos de tarefas que são propostas aos alunos.

4.1.1 A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau

A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau foi concebida formalmente como resultado de muitas pesquisas e livros escritos em sua tese de doutorado *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques* (A teorização dos fenômenos do ensino de matemática) para a obtenção do título de Doutor Estadual em Ciências em 1986 pela Universidade de Bordeaux que continha, entre outros nomes, Gerard Vergnaud como banca examinadora e fora apresentada formalmente no Curso dado por ele mesmo quando lhe fora concedido o título de Doutor Honoris Causa pela Universidade de Montréal em Genebra, na Suíça.

Essa teoria tem o objetivo estudar os fenômenos que interferem nos processos de ensino e aprendizagem do aluno quando lhes é apresentada uma situação-problema. Essa teoria propõe um modelo teórico de construção, análise e experimentação das situações didáticas que ocorrem em sala de aula, levando em conta as interações ocorridas entre professor e aluno que é mediada pelo saber em uma situação de ensino/aprendizagem.

Segundo o autor, em sua tese de doutorado em 1986:

Uma concepção de ensino requer que o professor provoque uma adaptação em seus estudantes mediante uma escolha racional de problemas que são colocados diante deles. Estes problemas são escolhidos de tal maneira que permitam ao aluno: agir, falar, pensar e evoluir por seus próprios meios. (BROUSSEAU, 1986).

Ou seja, desde o momento em que o aluno aceita o problema sugerido pelo professor e produz sua própria resposta, o professor não deve interferir e nem sugerir o conteúdo que ele quer que se aprenda. A lógica interna da situação faz com que o aluno adquira novos conhecimentos que podem ser construídos sem ter nenhum recurso didático propriamente dito à sua disposição. E é exatamente a essa situação que o autor alcunha de **situação adidática**. É nela que, por seus próprios meios, o aluno consegue sintetizar o conhecimento e obter o sucesso (ou não) na resolução daquela situação-problema.

O conjunto de situações adidáticas que permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula leva o nome de situação fundamental. É nela que os diferentes valores dados às variáveis didáticas devem permitir administrar todas as situações representativas do

saber em jogo. Segundo Marrie Jeanne Perrin-Glorian (1999, p. 286), a “situação fundamental é uma situação adidática característica de um saber ou um conhecimento”.

Já a **situação didática**, caracteriza-se por um conjunto de interações entre o professor e o problema proposto, cujo objetivo é aprender, pois o professor faz a devolução ao aluno de uma situação adidática e esta, por sua vez, tem o objetivo de ensinar, oferecendo uma maior responsabilidade ao aluno na construção do conhecimento. O aluno não consegue distinguir, com propriedade, o que se trata de uma situação didática e uma situação adidática. Vale ressaltar também a pertinência das escolhas das variáveis didáticas. Segundo Almouloud (2000, p. 102), “as variáveis didáticas são aquelas para as quais as escolhas de determinados valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas”. E a determinação dessas variáveis são pontos muito importantes para a construção dessas situações.

BROUSSEAU (1986) divide o processo de aprendizagem em quatro fases (ação, formulação, validação e institucionalização) e apoia sua teoria em três grandes hipóteses:

Hipótese I: O aluno aprende adaptando-se a um meio, no qual o saber se manifesta pelas novas respostas.

Hipótese II: O meio sem intenções didáticas não é suficiente para permitir a aquisição do conhecimento pelo estudante, ou seja, o professor deve criar e organizar um meio e uma situação capazes de provocar essas aprendizagens no aluno.

Hipótese III: O meio e as situações didáticas devem sempre engajar os saberes matemáticos, cuja aquisição é visada pelo aluno.

Mas o professor doutor Saddo Ag Almouloud, em seu livro *Fundamentos da Didática da Matemática*, do ano 2000, acrescenta uma **quarta hipótese** à teoria de Brousseau, tomando como base as ideias de Gaston Bachelard e diz que um novo conhecimento se constrói a partir de conhecimentos antigos e, ao mesmo tempo, contra esses mesmos conhecimentos antigos. Ressalto, ainda, que o conceito de “meio” para Brousseau será apresentado um pouco mais adiante.

Nas quatro fases do processo de aprendizagem da TSD, o saber em jogo tem funções diferentes e o aluno não tem a mesma relação com o saber:

Na fase da ação, é o professor quem apresenta as situações didáticas de sala de aula em que as tomadas de decisão se centralizam nas interações entre o aluno e a situação

didática proposta. É nesta fase que o aluno julga e ajusta os resultados de seus pensamentos sem a intervenção do professor. Esta ação tem caráter ainda experimental, sem se preocupar com as teorias que, possivelmente, venham a justificar os resultados e o professor, aqui, espera que o aluno empregue os conhecimentos que irão funcionar como ferramentas que irão auxiliá-lo na resolução do problema daquela situação.

Na fase de formulação, o professor espera que o aluno aplique seus conhecimentos e verbalize (ou escreva) qual foi a linha de raciocínio e a solução a que chegou, mas ainda sem querer verificar ou justificar a validade de sua resposta.

Na fase da validação, o professor espera que o aluno socialize o saber. É o momento em que o aluno dirige os seus comentários no sentido de querer justificar, provar ou criticar os resultados obtidos com a finalidade de corrigir e evoluir as suas resoluções ou até mesmo, elaborar uma resposta coletiva. Nesta fase, o professor promove e gerencia debates com os alunos de modo a que eles reflitam sobre a certeza das afirmações formuladas no momento da ação e da formulação. É este o momento em que os alunos utilizam as ferramentas que têm para provar e demonstrar seus resultados, mesmo que esta seja feita em uma linguagem mais popular (não uma linguagem técnica matemática de uma demonstração propriamente dita).

Já a fase da institucionalização fica sob a responsabilidade do professor, pois ela visa fixar explicitamente qual o estado cognitivo do saber construído ali para que este possa ser utilizado posteriormente em outras situações didáticas. Dessa forma, os alunos devem se apropriar do saber que era o objeto inicial de estudo, analisando as linguagens, notações, teoremas, definições que ali foram apresentadas e, assim, aprendendo e automatizando as técnicas e processos de utilização daquele saber que fora apresentado, de modo a que se consiga resolver os problemas de outras situações similares ou não a ela. No caso da presente pesquisa, a fase de institucionalização não conseguiu ser concluída em sua totalidade devido a muitos fatores. A institucionalização foi feita parcialmente com as duplas que se destacaram no processo.

Assim, podemos perceber que o saber envolvido atua de diferentes maneiras durante cada uma dessas fases. Inicialmente, há o saber implícito (relacionado com o contexto da situação proposta), depois ele passa a se tornar um objeto de estudo e, finalmente, é contextualizado na situação proposta, tornando-se uma ferramenta que pode ser aplicada em novas situações.

Existem outros pontos muito importantes na teoria de Brousseau que são: os conceitos de *milieu* e contrato didático. Ambos já citados e que serão detalhados a seguir.

A partir do momento em que um professor pisa em sala de aula e os alunos estão à sua espera, está instituído, ali, um contrato didático. As cláusulas desse contrato didático são algo implícito e que, na maioria das vezes, não é verbalizada. Mas sim, aparecem ao fazer a atividade ou ao ler o enunciado que o aluno entende o que o professor espera que ele, aluno, faça naquela atividade. O professor e o aluno firmam um contrato didático pelo qual o aluno se compromete a fazer a atividade, tendo o professor como mediador e tendo por intuito fazer com que o aluno se aproprie de saberes presentes na sequência didática proposta por ele.

Brousseau (1986) define o contrato didático como o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Em outras palavras, são as normas que regem a relação do professor com o aluno e do aluno com o professor.

Muitas vezes, o contrato didático é confundido com o contrato pedagógico ou com o conjunto de regras da escola. O aluno, mesmo supondo que esteja em seu primeiro dia de aula, nunca espera, por exemplo, que o professor cante ou esteja vestido de jogador de futebol em sala de aula. Já o professor, não espera que um aluno bata em outro ou que chegue atrasado na aula, mas isso são coisas que podem acontecer. São normas que podem ser quebradas e essas regras não são o contrato didático.

O aluno, quando vai à escola, não espera também dar algum tipo de ordem ao professor, pelo contrário, o aluno espera receber algum comando ou ensinamento do professor em forma de atividade ou de aula expositiva para que ele, o aluno, possa aprender ali com aquela atividade.

O contrato didático faz parte da situação didática que o professor irá apresentar ao aluno. Segundo Brousseau (1986, p.51), “Esse contrato é o conjunto de regras que determinam [...] implicitamente o que cada parceiro da relação didática deve gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar as contas perante ao outro.” O contrato didático é a justificativa do professor para apresentar a situação, todavia conforme a situação didática vai evoluindo, o contrato didático muda.

4.1.2 O conceito de meio (*milieu*) na TSD de Brousseau

O conceito de meio na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau tem o objetivo de analisar as relações entre os alunos, os conhecimentos e os saberes envolvidos na situação didática proposta, a relação entre os conhecimentos bem como as relações entre as situações didáticas em questão.

Para Brousseau, o meio é um sistema externo ao sujeito que é constituído por vários elementos, que podem ser eles materiais e não materiais. Podem fazer parte do meio um problema ou um exercício como, por exemplo, um material dourado, uma atividade, um jogo educativo, e até mesmo uma dobradura. O meio deve ser modelado pelo professor, sempre visando atingir um determinado conteúdo que, no caso dessa pesquisa, são sequências numéricas visando à busca pela identificação de padrões.

O meio didático pode estar estruturado de duas maneiras: meio material e meio objetivo. O primeiro se caracteriza no momento em que o professor organiza a sua aula, por mais que não haja objetos concretos, ele organiza, ali, um meio e o segundo se caracteriza no momento em que o aluno atua efetivamente neste meio, tomando a ação do problema.

Brousseau (1986) afirma que o “meio” deve satisfazer a três condições:

1ª Condição: o meio deve atuar como um fator de desequilíbrio, dificuldades, contradições e que, portanto, induz o aluno a se adaptar.

2ª Condição: O meio deve permitir o funcionamento autônomo do aluno.

3ª condição: O meio deve ter a aprendizagem como consequência, ou seja, deve induzir o aluno à dominação dos saberes matemáticos.

Assim, o meio torna possível determinar a relação que o aluno tem com os saberes, com os conhecimentos e, além disso, é possível analisar a relação entre os conhecimentos e a própria situação. Ademais, Almouloud (2007, p.32) afirma que o *milieu* “é formado pelos elementos de conhecimento e eventualmente elementos físicos com os quais o aluno interage efetivamente ao longo da resolução do problema.”

4.1.3 O jogo *Corrida ao Vinte* à luz dos conceitos da TSD

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau traz reflexões de como podemos planejar e expor o conteúdo matemático aos alunos de forma que faça sentido o contexto para eles. Uma situação didática é formada quando ocorrem relações pedagógicas entre o professor, o aluno e a matéria a ser aprendida, levando em consideração o meio. Para que o aluno compreenda a interação entre o ambiente externo, a vida cotidiana e o ambiente escolar, sugerem-se as situações adidáticas, em que o aluno busca soluções, de forma autônoma, que fogem ao controle do professor.

Sendo assim, na aplicação do jogo *Corrida ao Vinte*, como uma situação didática em sala de aula, o jogo é apresentado ao aluno, que aceita o desafio e toma o problema para si, buscando estratégias que o levem a superar o problema posto e a encontrar uma solução. Quando esta situação acontece, dizemos que ocorreu uma devolução.

O ideal é que, desde o momento em que o problema é apresentado ao aluno até a chegada da resposta, o professor não faça intervenções para que o aluno chegue ao conhecimento que ele (o professor) quer ver surgir, pois o aluno sabe que o problema fora escolhido para que ele adquira um novo conhecimento.

É nessa dialética da formulação, segundo Brousseau (1986), em que o aluno troca informações com uma ou mais pessoas, no caso uma pessoa, e no qual se cria as condições para que o aluno construa, progressivamente, um raciocínio compreensível por todos envolvidos na situação didática e que faz com que o aluno, sozinho, adquira novos conhecimentos que são construídos sem ter nenhum recurso didático exatamente a sua disposição.

E essa estrutura de dialética é denominada de situação adidática, em que o aluno vai conseguir ou não aplicar o seu conhecimento para obter o sucesso na resolução daquele problema. Para Brousseau, a situação adidática é representada pelo esforço independente do aluno em certos momentos de aprendizagem.

O processo da aprendizagem é analisado pela Teoria das Situações Didáticas de acordo com a observação de quatro fases diferentes, no decorrer das quais o aluno passa por momentos diferentes na construção do saber. São elas: ação, formulação, validação e institucionalização, conforme a seguir:

- **A situação de ação:** ao começar o jogo, o aluno recebe a informação do meio, nesse momento, à medida em que eles vão jogando, ele está atuando nesse meio. O aluno busca, nos elementos do seu *milieu*, os elementos que o auxiliam na construção de uma estratégia que o leve a ganhar o jogo, e passa a perceber a importância do pensamento para optar por um número no lugar de outro.

- **A situação de formulação:** quando um aluno joga contra outro, eles descobrem a importância de discutir e definir as estratégias para vencer ao invés de apenas “jogar”. O aluno expõe a sua estratégia ao seu oponente de jogo para que, juntos, possam construir a estratégia que será aplicada. É nesse momento que o *milieu* de seu parceiro é introduzido, também, no *milieu* do sujeito.

- **Na situação de validação,** um aluno valida a sua estratégia, tentando convencer o outro de que uma estratégia é melhor do que outra, de acordo com os seus conhecimentos que foram mobilizados no *milieu*. Muitas vezes, isso ocorre com argumentos falsos, mas que, naquele momento faziam sentido para o aluno (como realmente ocorreu na pesquisa de campo e está relatado neste trabalho) como, por exemplo, só dizer números pares ou copiar a estratégia do oponente.

- **É na fase de institucionalização** que a intenção do professor é revelada e é o momento em que acontece a conferência dos resultados obtidos pelos alunos nas fases anteriores e então, o objeto de estudo é claramente formalizado, identificado, verificado e oferecido aos alunos. Além disso, também, é nesta fase em que a dialética da institucionalização acontece: o ganho cognitivo é fixado e o conhecimento é construído e validado passando a incorporar o repertório individual do aluno.

Depois dessas etapas, o professor passa a propor o mesmo jogo utilizando os números de 1 a 3 e depois até chegar a números mais altos que o 20 (como a corrida ao 35 ou a corrida ao 53) fazendo, assim, com que os alunos reapliquem as estratégias construídas (na fase de ação), buscando validá-las com as adições ou subtrações sucessivas até se chegar ao objetivo pretendido.

Em 2008, Brousseau publicou um artigo que reúne os relatos das quatro sessões de uma oficina dada por ele mesmo sobre a análise dos processos didáticos, com o objetivo de permitir que os leitores aprendessem sobre os métodos de análise, projeto e condução de processos didáticos mais complexos e as características que os compõem

Nessa oficina, Brousseau utilizou o jogo *Corrida ao Vinte* como situação didática em sala de aula para iniciar o conteúdo de divisão euclidiana e disse:

Essa construção autônoma não pode dar aos conhecimentos desenvolvidos o status de saber. [...] A intervenção didática do professor é a que permite identificar conhecimentos canônicos no que o aluno, ou os alunos, conceberam em situações autônomas. (BROUSSEAU, 2008, p.51).

4.2 Aspectos metodológicos

O processo de uma Engenharia Didática vista como uma metodologia de pesquisa, de acordo com (ARTIGUE, 1980 *apud* ALMOULOU; COUTINHO, 2008), caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado nas “realizações didáticas” que foram feitas em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sessões de ensino. Desse modo, contemplamos as fases indicadas nessa metodologia: análises prévias, tais como a análise do contrato didático do professor/pesquisador em sala de aula e a relação que fora construída com o aluno. Também serão analisadas as concepções dos estudantes no processo didático a que eles foram inseridos, além das dificuldades e obstáculos encontrados por eles durante todo o processo que é o que determina a sua evolução no contexto do problema proposto.

Na análise *a priori*, serão apresentados os resultados esperados e as possíveis dificuldades que os alunos possam encontrar ao longo do percurso de resolução do problema, bem como as hipóteses do contexto de ensino e aprendizagem em que eles estão inseridos desde o princípio de toda sua vida escolar. Já na análise *a posteriori* serão analisados os resultados obtidos para ver se corroboram ou não com aquilo que era esperado que acontecesse, além de uma breve análise sobre o possível legado que tenha sido deixado para os alunos.

Vale ressaltar, ainda, que metodologicamente falando, houve alguns adventos (previstos e imprevistos) que valem ser destacados a essa altura do trabalho. Devemos deixar claro aqui que há sim uma diferença entre o professor de sala de aula, o pesquisador em sala de aula e o professor de sala de aula quando também é o pesquisador daquela turma. Segundo Araújo (2022), a prática pedagógica seria a prática que visa ensinar

alguma coisa ao aluno e, para isso, é necessário a escolha do tema para o objeto de estudo e atividade em sala de aula, a definição dos objetivos, a busca de informações, a coleta de dados e a busca por soluções. Já a pesquisa seriam os procedimentos de pesquisa que ajudam o pesquisador a construir os dados que serão analisados como, por exemplo, o registro das atividades, a pesquisa, as anotações, as gravações em áudio e vídeo dos participantes da pesquisa etc.

Ao mesmo tempo em que os alunos estão ali fazendo as atividades, também estão sendo filmados ou gravados e tendo seus comportamentos anotados por um pesquisador e essas duas coisas não se atrapalham, mas sim, se influenciam. Ainda, segundo ela: prática pedagógica e pesquisa “fazem parte de uma unidade única, se influenciam e se desenvolve mutuamente. São diferentes e têm propósitos diferentes e podem até ser incompatíveis, mas uma pressupõe e constitui a outra.” (ARAÚJO; CAMPOS; FREITAS, 2012, p. 10).

Sendo assim, gostaria de deixar claro aqui que o rigor metodológico fora, de certa forma, afetado no dia da minha pesquisa de campo pois eu fui o pesquisador de sala de aula e, ao mesmo tempo, o professor de sala de aula, mesmo apesar de eu ter levado comigo outra pedagoga que me auxiliou na pesquisa, anotando tudo o que pôde perceber sobre o comportamento dos alunos além de dois gravadores de áudio e uma câmera de vídeo que ficou parada em um tripé no canto da sala (todos os instrumentos de minha propriedade). Segundo Araújo (2022, p.12), “toda pesquisa de campo em educação matemática é enviesada o tempo todo” pois, por mais bem-intencionado que o pesquisador esteja, ele faz escolhas em detrimento de outras. Pesquisas realizadas pela autora na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) apontam que o professor, quando é o pesquisador, muitas vezes se furta, ao aplicar a pesquisa com sua turma, e acaba ajudando os alunos, nem que seja com uma mínima resposta pois, no momento em que o pesquisador começa a agir como professor, os participantes da pesquisa passam a agir como estudantes e começam a fazer perguntas demonstrando sua menor familiaridade com a matemática.

A prática pedagógica e a pesquisa devem ser vistas como parte de uma unidade única, desenvolvendo-se e influenciando-se mutuamente. Eles são diferentes, têm finalidades diferentes e podem ser incompatíveis, mas um pressupõe e constitui o outro. Quando uma prática pedagógica está ocorrendo ao mesmo tempo que uma pesquisa, o pesquisador pode ter um duplo papel, como pesquisador e como professor, e os participantes da pesquisa também podem ter o papel de alunos, nessa prática pedagógica. (ARAÚJO, 2022 p.16).

Além desse fator (que é um certo fator de confusão para a pesquisa), ela toca em outro ponto importante: as escolhas feitas pelo pesquisador:

O pesquisador, na educação, não pesquisa a realidade mas sim, produz dados sobre a realidade de acordo com as escolhas feitas por ele. (...) Diante da quantidade de dados de uma pesquisa, um pesquisador faz uma escolha de um recorte para colocar na tese. Outro pesquisador para a mesma pesquisa faria outras escolhas. (ARAÚJO, 2022 p.16).

Araújo indica a leitura de Powell, que pesquisou sobre a análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. Powell (2004, p. 44) diz que “no momento em que o pesquisador posiciona a câmera, por mais que seja algo técnico e por mais bem-intencionado que seja, ele está fazendo uma escolha”. Ao fazer essa escolha, o pesquisador estará privilegiando um grupo de alunos de acordo com o posicionamento ou angulação da câmera e daí ele conclui que “o fato de o aluno estar vendo que está sendo gravado já é um fator de viés para a pesquisa”. (POWELL, 2004, p. 44).

Outro ponto importante que deve ser dito, é o fato de ter havido alguns eventos inconvenientes que, de certa forma, atrapalharam um pouco a aplicação da pesquisa propriamente dita advindos de algumas impossibilidades estruturais da escola como o fato de que, na sala de aula física onde a pesquisa foi aplicada, os materiais físicos como canetão ou giz, lousa e apagador para que eu pudesse iniciar a construção do conhecimento e a turma que me fora oferecida que foi, como já disse, diferente do que eu havia previamente combinado com a coordenadora e com a orientadora daquela escola.

Portanto, achei necessário escrever esses parágrafos sobre o rigor metodológico para deixar claro que tenho a ciência de que não é proibido o pesquisador ser também o pesquisador de sala de aula, mas que tenho ciência de que o rigor metodológico foi afetado. Dado o viés que essa pesquisa teve, gostaria de deixar claro também que não tenho a pretensão de dizer ela é a única verdade possível, - mas sim, de fazer um recorte coerente sob uma perspectiva que eu encontrei em meu processo de pesquisa.

4.2.1 A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

A Engenharia Didática, em prática desde a década de 1980, é uma metodologia que tem por objetivo estruturar as análises, concepções, realizações e observações das

sequências de ensino no contexto da Didática da Matemática em sala de aula, as já supracitadas sequências didáticas. Em 1988, foi caracterizada por Michele Artigue (1988, p. 283) como um “esquema experimental baseado em realizações didáticas feitas em sala de aula”. Outra definição, feita por ela mesma, é assim descrita na mesma obra de 1988:

[...] este termo foi “cunhado” para o trabalho didático como sendo aquele que é comparável ao trabalho do engenheiro que para realizar um projeto preciso se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1988, p. 283).

Artigue (1996, p. 196), ainda, diz que “[...] as experimentações em sala de aula servem também para os seus propósitos, pois insere o pesquisador na investigação” e termina dizendo que a validação para o pesquisador é externa pois “utiliza métodos comparativos para validar seus resultados.”

Com a pretensão de controlar as situações didáticas do processo, Artigue (1988) afirma que a Engenharia Didática se apropria dos conceitos da Teoria das Situações Didáticas. Segundo Michele Artigue 1988, “a Teoria das Situações Didáticas serve de base à metodologia da Engenharia Didática, que se ocupa da construção de uma teoria de controle baseada no sentido das situações envolvidas.” Desse modo, a Engenharia Didática é uma metodologia que, ainda segundo a mesma obra da autora visa “etiquetar uma forma do trabalho didático” (ARTIGUE, 1988, p. 198). Esta etiquetagem é um meio para abordar as relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino e sobre o papel que as realizações didáticas poderiam vir a desempenhar em sala de aula, tendo em vista as metodologias da investigação didática.

4.3 Procedimentos da equipe de pesquisa

Mesmo tendo ciência dos riscos e de que algumas observações poderiam não ser percebidas e de que alguns dados possam ter tido algum tipo de viés, nos termos de ARAÚJO (2019), já explanados acima, foram engajadas nessa pesquisa dezenove pessoas, dentre elas, 17 alunos, que foram, ao mesmo tempo, os participantes da pesquisa e os estudantes de sala de aula, o professor que também foi o pesquisador e mediador da

atividade (eu mesmo, Danilo Daidone Chalita) e a outra pessoa foi Ivana Chalita Mender Abi Samra, pedagoga que me ajudou com a pesquisa, observando, na sala de aula, ações dos alunos que, eventualmente, possam ter passado despercebidas por mim ao aplicar o experimento do jogo *Corrida ao Vinte* com os alunos. Todos nós, é claro, interessados pelos problemas de ensino e de aprendizagem de matemática, mais especificamente dos temas escolhidos para estudo nesta pesquisa. Os 17 alunos foram divididos em 8 duplas e um trio e a experiência de campo dessa pesquisa durou um período de 4 aulas. O procedimento de o que foi feito em cada aula será apresentado adiante. A pesquisa foi feita na escola pública estadual E. E. Madre Paulina, já citada nessa pesquisa, que fica na Zona Leste de São Paulo, bem afastada do grande centro urbano da capital paulista.

Eu e a outra pesquisadora visitamos a escola algumas vezes antes do dia oficial da pesquisa de campo para conversar com a coordenação e alinhar tudo o que seria necessário (e que não foi cumprido na totalidade por parte deles) para que a pesquisa pudesse tomar o melhor rumo possível. Levamos, previamente as fichas de autorização para a escola e para os pais dos alunos para que todos tivessem ciência da seriedade da pesquisa que ali seria feita. A data que fora combinada previamente também não foi cumprida por eles e pediram para que eu fosse lá aplicar a pesquisa em outra data (mais próxima do que o combinado) e, como eu já havia me preparado antes e já tinha tudo alinhado com a orientadora professora Cileda, eu aceitei.

No dia da pesquisa, chegamos para a primeira aula na turma do 6º ano do Ensino Fundamental e entramos na sala, apresentei-me, apresentei a professora Ivana e, depois de uma breve introdução e conversa com as crianças, entreguei uma ficha com a atividade e expliquei o funcionamento do jogo *Corrida ao Vinte* e a atividade que seria proposta para eles. A atividade estava explanada na ficha (em anexo), que fora previamente preparada por mim em parceria com a minha orientadora, Cileda. Vale ressaltar que nós decidimos, um dia antes da aplicação, facilitar a linguagem da ficha de atividades com receio de que os alunos pudessem não compreender na totalidade o que estava escrito e já antecipando o meu papel de pesquisador, aplicando uma situação didática em sala de aula, não podendo interferir na pesquisa.

E ressalto aqui um fato que percebi após a aplicação: ter facilitado a linguagem da folha da atividade foi uma boa atitude tomada por nós pois notei que alguns alunos ainda me pareciam semialfabetizados. No momento em que eu pedi a eles que escrevessem a parte final da atividade (que será evidenciada em breve neste texto), muitos alunos, ali,

tinham dificuldades em escrever uma frase no papel e até mesmo de conseguir expressar em palavras verbalmente (para mim) o que eles estavam pensando.

Pedi para que os alunos se dividissem em duplas para que pudessem jogar uns contra os outros. Dentre os 17 alunos, 7 duplas foram formadas, além de um trio. Posicionei o tripé com a câmera na parte dianteira da sala no canto esquerdo (pela orientação do professor) e posicionei os dois gravadores, um no outro canto frontal da sala, tentando pegar o áudio ambiente e o outro, na mesa de uma dupla, para registrar com clareza as suas discussões iniciais. Esses gravadores eu viria a mudar de posição ao longo do experimento para poder pegar as discussões de outras duplas.

Inicialmente, antes de começar a atividade, mas após já tê-la explicado aos alunos, e já com todos sentados, eu joguei o jogo duas vezes na lousa com a professora Ivana (que não conhecia o jogo) e pedi para que os alunos se separassem em duplas (sete) mas, como havia um número ímpar de alunos, houve também um trio. Então, pedi para que eles jogassem algumas partidas do jogo *Corrida ao Vinte* entre si e para que fossem anotando as jogadas de cada um para que eles mesmos pudessem ter um entendimento sobre o funcionamento do jogo. Após três ou quatro partidas jogadas, o experimento começou. Dessa vez, sem a minha ajuda. Tentei, ao máximo, manter distância dos alunos, mas eles não paravam de me chamar, na maioria das vezes, para contar que tinham ganho uma partida do colega ou para dizer que haviam concluído a primeira parte da atividade: encontrado a estratégia vencedora.

A pesquisadora Ivana ficou observando e anotando as discussões que percebia por entre as duplas e, como esperado, os alunos também pediam ajuda para ela. Prevendo este fato, intencionalmente não expliquei previamente o jogo à Ivana, para que ela tivesse o mínimo de influência enviesadora na pesquisa.

E deixo claro que caso a escola, ou o professor de sala de aula, não tivesse permitido que eu mesmo aplicasse todo o processo, reuniões com o professor daquela sala e daquela turma teriam sido feitas para não ficar absolutamente nenhuma aresta na condução da pesquisa e, sendo assim, eu mesmo acompanharia o processo dentro daquela sala de aula.

Após as fases de ação e formulação (e uma dupla já na fase de validação), já haviam se passado duas aulas e era a hora do recreio. Eu os liberei para que a atividade continuasse após o intervalo. Após o recreio, os alunos estavam mais calmos e mais

concentrados no experimento. Prosseguimos com as atividades para a fase de validação e para que, por fim, eles propusessem novos jogos utilizando os pensamentos aplicados e adquiridos até ali.

A fase de institucionalização não foi, em sua totalidade, concluída. Conversei com as duas duplas que já haviam concluído a atividade e explanei aos alunos dessas duplas qual era a real intenção do jogo e quais eram os conhecimentos que eu intencionava ver surgindo com eles. E então, foi possível fazer, com eles a proposta de criar outros jogos e fazer a validação para outras sequências de números.

Por fim, chegara o momento da despedida. Eu e a professora Ivana agradecemos aos alunos, demos um doce a cada um deles como recompensa pela colaboração, tiramos a foto de recordação e eles, muito animados, foram para a última aula do dia, que era educação física na quadra.

A atividade do *Corrida ao Vinte* aplicada por mim aos alunos segue abaixo e, no próximo capítulo, será explicada como foi proposta para quatro aulas.

I) Cronograma da atividade em sala de aula:

Atividade preparada para ser executada em um período de 4 aulas. Detalhes sobre o que foi feito em cada aula será explanado mais adiante.

O Jogo “*Corrida ao Vinte*”⁴

1) Regras do jogo:

- O jogo deve ser jogado em dupla.
- O jogador que começa, deve escolher o número um ou dois e passa a “vez” para o seu oponente.
- O outro jogador deve escolher um ou dois números seguintes ao número dito anteriormente pelo outro jogador e passa a “vez” para seu oponente de novo e assim por diante.

⁴ Baseado no texto Setting the scene with an example: the race to 20 de Guy Brousseau em Theory of Didactical Situations in Mathematics, Didactique des Mathématiques, 1970-1990 by Guy Brousseau, Kluwer Academic Publishers, Mathematics Education Library, volume 19.

- Ganha o aluno que chegar ao número “20” primeiro.

2) **A discussão:**

- Discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.

3) **A validação:**

- Testar essa mesma estratégia usada no *Corrida ao 20* para uma *Corrida ao 35*, escolhendo apenas entre os números 1, 2 ou 3.

4) **Inventar outros jogos:**

- Com os números 1, 2, 3, 4 e/ou 5, seria possível a corrida a outros números?

II) O debate:

a) Qual conhecimento matemático você utilizou para resolver este problema?

b) Existe uma estratégia para que um jogador ganhe este jogo sempre?

5 ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo, irei analisar quais conhecimentos eram esperados dos alunos nessa fase da vida escolar deles para que pudessem realizar a atividade e se eles efetivamente tinham todas as ferramentas necessárias para um aluno do 6º ano do Ensino Fundamental, já que o estudo foi feito após um ano de meio de pandemia e, portanto, com estudos que foram prejudicados. Veremos, também, o que era esperado pelo pesquisador na proposição da situação didática. Os resultados serão analisados no próximo capítulo.

5.1 Breve apresentação do jogo

O jogo foi proposto por Guy Brousseau, no início dos anos 1970 como um recurso didático para colocar em prática a sua teoria (TSD) e foi formalizado e apresentado em sua tese de doutorado em meados dos anos 1980. Brousseau aplicou seu jogo em uma escola pública periférica da cidade de Bordeaux, cidade onde ele concluiu seus estudos e onde foi professor (IREM 1, da Universidade de Bordeaux).

Como está apresentado no Capítulo 1 deste texto, este jogo é jogado entre duas pessoas e consiste em utilizar inicialmente os números 1 ou 2 e então, o oponente acrescenta uma ou duas unidades ao último número dito pelo seu oponente na jogada anterior e o jogo vai assim, alternadamente, até que um deles chegue primeiro ao número 20 e, portanto, ganhe.

O algoritmo vencedor pode ser notado pelos jogadores ao longo das partidas. Ele consiste em escolher inicialmente o número 2 e depois, os valores da sequência (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20). Os valores dessa sequência numérica, que é uma Progressão Aritmética de razão 3 e termo inicial 2, são obtidos pela divisão euclidiana do número 20 por 3 que resulta, como quociente, o nº 6 e como resto, o nº 2, que é o termo inicial. O jogador que inicia, se souber aplicar a estratégia descrita acima, sempre vencerá. Caso não inicie, deve contar com um tropeço do outro jogador e, aí sim, tentar assumir o comando chegando aos termos da sequência citada acima.

O jogo pode ter algumas abordagens diferentes em relação ao objeto matemático, como a congruência modular no Ensino Superior, como vimos em (POMMER, 2008) mas o jogo *Corrida ao Vinte* é mais comumente utilizado para a introdução da divisão euclidiana nos anos iniciais do Ensino Fundamental (3º/4º anos); para a introdução do estudo de sequências no 9º ano do Ensino Fundamental ou para o estudo de uma Progressão Aritmética propriamente dita no 1º e 2º ano do Ensino Médio.

Agora, vamos ver como o jogo foi aplicado na sala de aula e quais eram os conhecimentos matemáticos que os alunos tinham quando da aplicação do jogo.

5.2 A atividade

Jogo *Corrida ao Vinte* em 4 aulas:

Atividade proposta para as duas primeiras aulas:

Na aula I

a) O jogo: em dupla, cada jogador deve escolher o número entre os números 1 ou 2 e somar ao número escolhido pelo outro elemento da dupla. Ganha quem falar “20” primeiro.

b) A discussão: discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.

Na aula II

a) A validação: testar a estratégia para uma corrida ao 35, escolhendo apenas entre os números 1, 2 ou 3.

b) Inventar outros jogos: com 1, 2, 3 e 4. Seria possível a corrida a outros números?

Atividade proposta para as duas últimas aulas:

Nas aulas III e IV

a) Qual conhecimento matemático você mobilizou para resolver este problema?

b) Que estratégia deve ser usada por um dos jogadores para ganhar sempre?

c) Que conceito matemático pode ser trabalhado a partir desse jogo?

Gostaria de deixar claro aqui que não há uma resposta certa e que o aluno poderia responder tudo o que ele quisesse, o que ele pensou e o caminho dele para chegar na resposta. Tudo isso foi analisado por mim, de modo a não constranger possivelmente algum aluno.

Para o professor/pesquisador

Minhas análises sempre serão no sentido de responder à estas perguntas:

a) Que conhecimentos matemáticos o aluno mobiliza para desenvolver uma estratégia para ganhar esse jogo?

b) Que elementos do meio, em que o aluno está inserido, interagem com ele nessa busca da melhor estratégia?

c) Quais são os conhecimentos e/ou saberes matemáticos que podem ser identificados nas produções dos alunos, que o professor pode exigir futuramente como ferramenta na resolução de novos problemas?

5.3 O cenário da pesquisa

A pesquisa foi feita em julho de 2022, com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Todavia, os alunos vêm de um conhecimento defasado devido à pandemia de Covid – 19 e, no caso dessa escola, muito defasados, de acordo com a coordenadora da escola no período em questão. Em conversa com a coordenadora da escola, senhora Rose (optamos por preservar o sobrenome da coordenadora), perguntei sobre como havia sido o estudo das crianças durante a pandemia pois estava querendo palmilhar em que nível matemático eles estavam naquela época. Perguntei, ainda, sobre como eram feitas as aulas e as tarefas de casa: se eram pedidas e cobradas e corrigidas ou não.

Todas as respostas eram muito vagas mas afirmou, algumas vezes, que os alunos estudavam sim e faziam as tarefas sim durante a pandemia. Ao ser perguntada por onde aconteciam as aulas, ela repetiu, por várias vezes, que os alunos utilizavam as plataformas Google Meet, Google Classroom, Microsoft Teams, redes sociais e que os alunos assistiam a aulas produzidas pelo Centro de Mídia de São Paulo (CMSP) na TV aberta. Todas as informações muito vagas e sem uma melhor explicação. Ao ser perguntada sobre as tarefas de casa, ela respondia que a coordenação enviava o material impresso para os alunos que não tinham acesso à internet e que os professores realizavam uma “busca ativa” das tarefas e então pedi para que ela me explicasse melhor sobre o que seria essa busca ativa e ela me respondeu que os professores iam atrás das tarefas dos alunos, seja por telefone, e-mail, redes sociais e até mesmo, por carta. Eu insisti perguntando a frequência com que essa busca ativa era feita e qual a proporção de alunos que faziam as tarefas, mas ela não me respondeu.

Durante toda a pandemia, eu fui coordenador do Cursinho Popular FERA, o cursinho social do Curso Anglo Vestibulares. Os alunos dessa pesquisa eram alunos de baixa renda que vinham de longe para estudar mas tinham um bom rendimento escolar e tinham foco nas grandes faculdades públicas de São Paulo. À época, fizemos uma pesquisa com os nossos alunos sobre o estudo na pandemia em todos os meses do ano letivo. As nossas aulas eram diárias e todas online pela plataforma Google Meet, com as aulas das turmas regulares do cursinho.

Nas pesquisas que foram feitas com os nossos alunos, pudemos perceber que a maioria deles não estava frequentando as aulas, seja por falta de aparelhos por onde isso pudesse estar sendo feito, seja por falta de sinal de internet (*wi-fi* ou 3G) em casa ou na

rua, seja por falta de um espaço adequado em casa para poder estudar ou até mesmo por não terem tempo hábil para fazê-lo (pois estavam trabalhando para ajudar no orçamento da casa). Esses alunos do cursinho popular eram bastante dedicados e o interesse para estudar era o de passar em alguma universidade pública (como muitos o fizeram).

Portanto, dadas as similaridades socioeconômicas dos alunos do cursinho popular (supracitados) e os da escola estadual (da presente pesquisa), é possível traçar um paralelo entre esses dois grupos de alunos. É possível, portanto, inferir também que as dificuldades de acesso às aulas online também eram bem grandes com os alunos da escola estadual. O que difere é a maturidade e o interesse deles. No cursinho, os alunos, em posse das apostilas, estudavam sozinhos e frequentavam os plantões de dúvidas ou procuravam os professores no particular. Porém, tenho dificuldades em acreditar que as crianças - ainda sem a maturidade escolar - no Ensino Fundamental estudassem por conta própria todos os dias, todas as matérias, fazendo todas as tarefas ao longo do ano, e recebendo as devolutivas dos professores como afirmara a coordenadora Rose.

As aulas presenciais na E. E. Madre Paulina retornaram na segunda quinzena de outubro de 2021, portanto 1 ano e 7 meses após as aulas presenciais terem sido interrompidas. E, quando as aulas voltaram, eu estava presente na escola. Foi nessa época que eu tive meu primeiro contato com o colégio por meio de um projeto social da Cruz Vermelha Brasileira, em que íamos lá fazer gincanas e workshops com os alunos, já descrito acima.

Posto esse preâmbulo, podemos iniciar a discussão sobre qual era o conhecimento matemático desses alunos quando em julho de 2022. Na data de aplicação da pesquisa, era esperado que o conhecimento dos alunos fosse de um aluno já de 6ª série, mas era, aparentemente, de um aluno de 3ª série, que fora cursada no ano de 2019. No capítulo seguinte, veremos se, efetivamente, o aluno já tinha adquirido (ou não) esses conhecimentos no momento da aplicação do jogo.

5.3.1 Conhecimento esperado dos alunos

De acordo com Castro e Dias (2019), o trabalho com sequências numéricas visando à busca por padrões é muito adequado a essa faixa etária (em torno de 11 anos de idade). Os estudantes tendem a gostar da atividade e a receberem como desafio e

possibilita, ainda, diversificar o estudo das sequências e introduzir o trabalho com os padrões figurais e geométricos.

Curiosamente, para poder começar a jogar o jogo *Corrida ao Vinte*, o aluno não precisa ter o conhecimento prévio de sequências numéricas ou até mesmo da divisão, mas sim, de outras habilidades que serão explicadas um pouco mais adiante.

Os alunos de 6º ano já tiveram contato com vários tipos de sequências em seu dia a dia como, por exemplo: a sequência dos meses do ano, a listagem dos nomes em uma lista de chamada, a numeração das casas de uma rua, os anos em que fazem aniversário, a sequência dos anos nos quais ocorrem copa do mundo ou as olimpíadas e até mesmo a ordem das notas dos alunos no diário do professor mas, segundo Cunha (2009), por mais que eles percebam algum tipo de repetição nesses números ordenados, nem sempre encaram isso como uma sequência numérica propriamente dita.

De acordo com as habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2019) para a introdução do pensamento algébrico, nos anos iniciais, vem desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, destacando, sempre, as habilidades que devem ser desenvolvidas durante os anos iniciais até que, por fim, se introduza a álgebra simbólica para o aluno, como listado a seguir:

Habilidade 1: compreender padrões, relações e funções;

Habilidade 2: representar e analisar situações e estruturas matemáticas utilizando símbolos algébricos;

Habilidade 3: usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;

Habilidade 4: analisar as mudanças em vários contextos.

Ainda de acordo com as habilidades propostas, aluno de 6º ano já deve ter o conhecimento das operações básicas da aritmética como soma e subtração (de números inteiros e racionais), divisão e multiplicação de números inteiros. No caso específico dos números em sequência o conhecimento das ideias de equivalência, ordem, proporcionalidade e chegando até o conceito de generalização, cujo pensamento e desenvolvimento favorecem a noção de variações iguais entre os termos. Ainda seguindo as diretrizes da BNCC nos anos iniciais, ela mostra que deve ficar a cargo do professor

construir as praxeologias específicas para cada ano do fundamental no que diz respeito às sequências, levando em conta, sempre, os conhecimentos prévios dos alunos até ali.

Para conseguir começar a jogar o jogo e conseguir construir a sua estratégia vencedora, o aluno precisa estar apropriado de alguns conhecimentos matemáticos prévios que iremos explicar a seguir:

É necessário que ele tenha o conhecimento das técnicas de adição e é necessário também que ele tenha o conhecimento dos números naturais e de que eles estão em ordem e qual é a ordem deles. Além disso, o aluno precisa saber reconhecer padrões e isso é um conhecimento implícito para ele, já que, desde os anos iniciais, ele vem sendo treinado a reconhecer o que é um padrão como, por exemplo, identificar uma sequência de cores em uma figura geométrica ou sequência de figuras em um desenho etc. Este é um conhecimento que ele sabe sem saber, é um conhecimento adquirido sem exatamente ele ter tido uma aula sobre padrões, diferentemente com o que ocorre com a adição ou divisão euclidiana.

Inicialmente, é esperado que os alunos comecem o jogo (as primeiras partidas) falando números aleatoriamente, porém, após um início meio desordenado, os alunos devem perceber que responder aleatoriamente não é uma boa estratégia e, aí sim, começam a pensar em algo mais lógico para se poder vencer.

É esperado que os primeiros compreendam que ao se chegar no número 17, a vitória é (quase) garantida e que alguns compreendam que ao se chegar até o nº 14 também é, porém, não compreendem, ainda, o jogo como uma sequência de números (mesmo porque esse é um assunto que ainda não fora apresentado para eles) e é por isso que o nosso foco será na busca por padrões. Ou seja, para que eles busquem por padrões nas sequências de números que lhes é apresentada mesmo sem ter a noção de que é uma sequência de números propriamente dita, e, aí sim, utilizar isso como teoria inicial para que, no futuro, eles sejam introduzidos ao assunto de sequências propriamente dito.

O jogo permite variações para qualquer resultado final inteiro. Por exemplo, considerando a variação que Brousseau (1988) denominou “*Quem vai dizer 35!*”, e os números a ser acrescentados (1, 2 ou 3), a sequência otimizada é a Progressão Aritmética (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35). O vencedor também será o iniciante, se souber que a escolha inicial deverá ser três, que é o resto da divisão de 35 por 4 (número subsequente aos valores “1”, “2” e “3”) e que, a seguir, sempre deverá escolher um número entre os

possíveis (“1”, “2” ou “3”), que complete o próximo número da sequência.

O jogo também permite a abordagem do objeto matemático em diferentes níveis, além da busca por padrões: divisão euclidiana e subtrações sucessivas (4º/5º/6º anos do Ensino Fundamental) e Progressão Aritmética (1º/2º anos do Ensino Médio). Também há a possibilidade de uma abordagem da sequência como uma função polinomial.

Desse modo, os alunos teriam que mobilizar alguns conceitos matemáticos como os conhecimentos básicos da aritmética, é claro, e, também, os de lógica e de ordenação dos números, bem como suas experiências próprias de vida, já que a matéria de sequências propriamente dita ainda não fora ensinada oficialmente a eles. E é aí que está o cerne da pesquisa: o aluno não necessariamente precisa ter tido contato com o conhecimento matemático específico para poder solucionar certos tipos de problemas.

6 ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo, iremos nos secundar sobre os dados colhidos durante a aplicação da sequência didática e relatar a parte experimental do experimento realizado em sala de aula, bem como analisar as construções didáticas e resoluções feitas pelos alunos e todas as observações e anotações feitas por eles durante todo o processo.

Primeiramente, a sequência didática desenvolvida será apresentada, realizando um comparativo dos objetivos individuais e coletivos dos alunos, bem como as dificuldades apresentadas por eles. Após, as análises das resoluções dos exercícios propriamente ditas.

6.1 Experimentação

A atividade programada para esta pesquisa tem por objetivo analisar o pensamento algébrico mobilizado pelos alunos quando jogam, entre si, em duplas, o jogo *Corrida ao Vinte*. Observando, com foco principal para o pensamento do aluno a partir do uso de sequências na investigação por padrões que possam ser observados de acordo com o jogo. Esses pensamentos colaboram com a construção do pensamento algébrico dos jogadores.

Como já explicado anteriormente neste texto, eu mesmo fui o pesquisador e o professor em sala de aula. Sabemos que isso acarreta alguns problemas de viés durante a aplicação da pesquisa, mas tudo isso foi levado em conta e baseado em estudos de pesquisadores da área, como já explanado nos capítulos anteriores. Além de mim, também

esteve presente durante a aplicação do jogo a professora e pedagoga Ivana Chalita para ajudar com as observações das duplas. O relato completo da aplicação assim como maiores detalhes também estão melhores descritos nos capítulos anteriores, mas farei um breve resumo para que possamos adentrar nas análises propriamente ditas.

Ao chegar na sala, a professora titular nos apresentou e fez uma breve conversa com a turma e aí, então, foi a nossa vez de nos apresentar. Como um início do estabelecimento de um contrato didático (nos termos de BROUSSEAU, 1986), explicamos para os alunos como seria a atividade, o propósito de minha pesquisa de mestrado e reiteramos que a atividade não deveria ser encarada como uma avaliação, mas sim, como uma atividade de aprendizagem e que, portanto, a participação de todos seria deveras importante. Preparamos todo o material para que a aplicação fosse feita, expliquei as regras do jogo aos alunos e joguei o jogo algumas vezes, na lousa, contra a professora Ivana para que eles tivessem um melhor entendimento de como o jogo é jogado. Importante ressaltar que, propositalmente, eu não expliquei as regras do jogo à Ivana (que também não o conhecia) para que não houvesse qualquer tipo de viés na atividade. Também deixei claro que nós poderíamos ajudá-los, já que estávamos investigando exatamente o processo de aprendizagem que eles estavam construindo.

Entreguei a ficha da atividade a eles e estabeleci algumas regras: pedi para que jogassem o jogo com seu oponente 3 vezes, mas deixei livre a escolha aos que quisessem jogar mais vezes (caso sentissem a necessidade) para chegar ao resultado pretendido. Além disso, todos deveriam anotar suas jogadas (números escolhidos em cada vez) para que os elementos do jogo de cada um ficassem registrados. Reforcei, mais uma vez, o resultado que eles deveriam buscar. Sempre mirando em: se existe e qual seria a estratégia vencedora para aquele jogo. Abaixo, a ficha da atividade (Figura 12).

Figura 12 – Folha da atividade proposta em sala de aula



Pontifícia Universidade Católica de São Paulo / PUC-
SP

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Professor/Pesquisador Danilo Daidone Chalita

Jogo “Corrida ao 20”

- 1) **O jogo:** em dupla, cada jogador deve escolher o número entre os números 1 ou 2 e somar ao número escolhido pelo outro elemento da dupla. Ganha quem falar “20” primeiro.
- 2) **A discussão:** discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.
- 3) **A validação:** testar a estratégia para uma corrida ao 35, escolhendo apenas entre os números 1, 2 ou 3.
- 4) **Inventar outros jogos:** com 1, 2, 3 e 4. Seria possível a corrida a outros números?

O Debate

Para o Aluno:

- a) Qual conhecimento você mobilizou para resolver este problema?
- b) Que estratégia deve ser usada por um dos jogadores para ganhar sempre?
- c) Que conceito matemático pode ser trabalhado a partir desse jogo?

Gostaria de deixar claro aqui que não há uma resposta certa e que o aluno pode responder o que ele quiser, o que ele pensou e o caminho dele para chegar na resposta. Tudo isso será analisado por mim, de modo a não constranger possivelmente algum aluno

Fonte: Autor, 2022.

6.2 Análise das atividades

Desde o início, os alunos já demonstraram um grande interesse na atividade e começaram a jogar contra seus oponentes de uma forma bem interessante. Confesso que imaginei que eles demorariam alguns minutos para tomarem o problema para si e começarem a jogar dando a devida atenção ao jogo. Rapidamente, os alunos começaram a ler e se envolver (alguns mais, outros menos) com a sequência proposta. Percebemos o maior envolvimento dos alunos à medida que iam jogando (ganhando ou perdendo) e incorporando, de certa forma, o problema e, conseqüentemente, com vontade de jogar mais uma vez para ganhar do colega.

Aos poucos - em meio a gritos de ‘ganhei’-, as mãos iam se levantando para nos chamar. Cada vencedor, após ter ganho uma ou duas partidas, querendo nos mostrar que já haviam descoberto a estratégia vencedora. Como nem eu nem a professora Ivana podíamos auxiliar os alunos e nem dar dicas a eles, eu respondia ao aluno para que ele, então, aplicasse exatamente essa estratégia que ele acabara de me contar novamente contra seu colega oponente e que verificasse se funcionaria.

Notei, depois de alguns minutos, que a maioria dos alunos já havia se destacado da proposta inicial (que seria a de descobrir a estratégia vencedora para o jogo) ou que, talvez, não tinham compreendido exatamente qual era a finalidade da atividade. Percebi

isso justamente pois toda vez que um aluno vencia, ele já achava que aquela seria a estratégia vencedora.

Muitas estratégias vencedoras surgiram em cada dupla: jogar apenas números pares, jogar apenas uma ou duas unidades a mais do que o último número dito pelo oponente (seja lá qual fosse esse número) e até mesmo copiar a estratégia do rival (o aluno joga exatamente a mesma quantidade de números que seu oponente disse), entre outras estratégias que surgiram.

Abro aspas, aqui, para uma frase escrita pela professora pedagoga Ivana Chalita, que me acompanhou durante a pesquisa:

Em minha opinião, senti que os alunos têm vontade de aprender o “novo”, porém, por não terem uma maior motivação no dia a dia, aumenta a dificuldade de entendimento, levando, assim, ao não respeito pelo colega e instituição de ensino, dificultando assim o aprendizado [...]. No final agradeceram muito o Danilo e, pediram pra que ele voltasse mais vezes, pois a atividade foi diferente, dinâmica e construtiva.

Todas as outras anotações feitas pela professora Ivana estão transcritas e serão apresentadas ainda neste capítulo, logo após as análises. A transcrição do áudio do dia da aplicação também estará disponível mais adiante, porém, em forma de anexo, dado o tamanho do texto. Vamos, agora, às análises propriamente ditas.

Imagens das atividades das crianças:

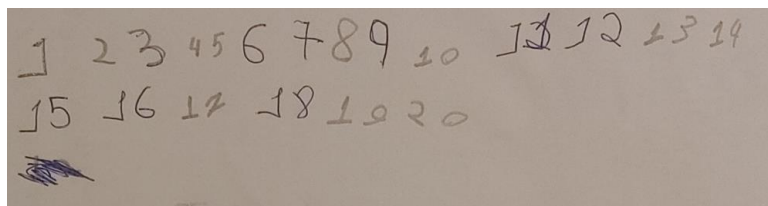
A atividade consistia em:

- 1) **O jogo:** em dupla, cada jogador deve escolher o número entre os números 1 ou 2 e somar ao número escolhido pelo outro elemento da dupla. Ganha quem falar “20” primeiro.
- 2) **A discussão:** discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.
- 3) **A validação:** testar a estratégia para uma corrida ao 35, escolhendo apenas entre os números 1, 2 ou 3.
- 4) **Inventar outros jogos:** com 1, 2, 3 e 4. Seria possível a corrida a outros números?

A maioria das duplas não completou a atividade inteira. Apenas jogou o jogo algumas vezes (como fora pedido) e não respondeu às perguntas propostas. Estes casos estão representados abaixo nas Figuras de nº 13.1 a 13.6. Em alguns casos, os alunos até responderam, mas ou o fizeram oralmente e não formalizaram a resposta ou escreveram coisas incompletas em meio a rabiscos, com letras ilegíveis e de qualquer jeito, o que dificultou muito a análise dos dados e que, por isso, não exibiremos aqui.

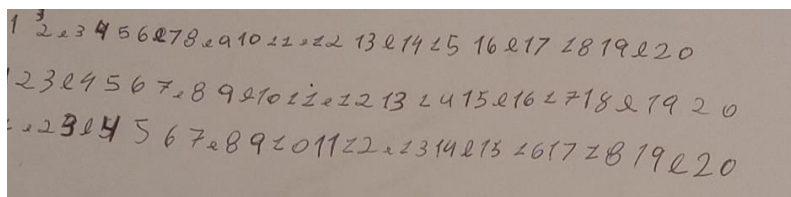
Ao passar a atividade para os alunos, pedi para que eles diferenciavam a jogada de cada jogador, seja por tabelas ou linhas escrevendo o nome de cada um ou seja pela cor do lápis e caneta de cada jogador para que eu pudesse perceber o jogo de cada um posteriormente e isso eles fizeram. Muitos não escreveram o nome sequer na ficha mas, pelo menos, utilizaram cores diferentes para diferenciar a jogada de cada um como podemos ver nas figuras abaixo:

Figura 13.1 – Imagem de um jogo jogado pela dupla 1



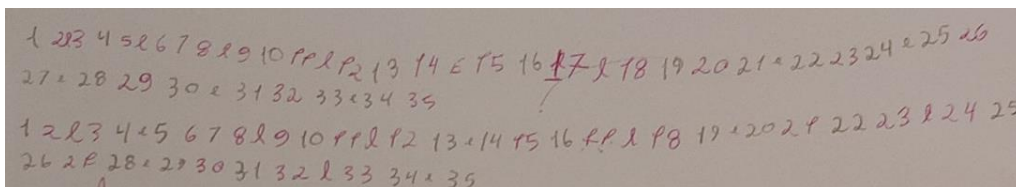
Fonte: Autor, 2022.

Figura 13.2 – Imagem dos jogos jogados pela dupla 2



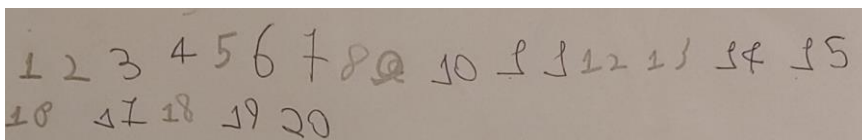
Fonte: Autor, 2022.

Figura 13.3 – Imagem dos jogos jogados pela dupla 3



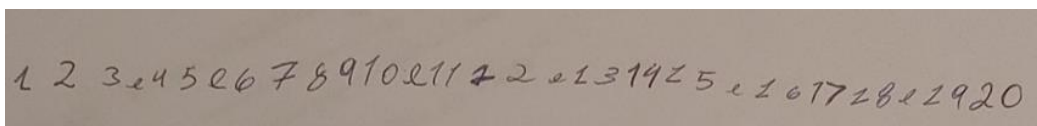
Fonte: Autor, 2022.

Figura 13.4 – Imagem de um jogo jogado pela dupla 4



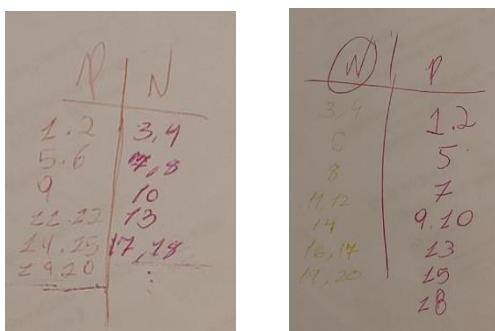
Fonte: Autor, 2022.

Figura 13.5 – Imagem de um jogo jogado pela dupla 5



Fonte: Autor, 2022.

Figura 13.6 – Imagem dos jogos jogados pela dupla 6



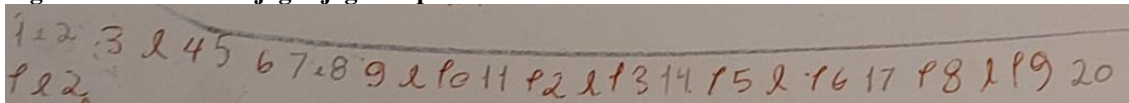
Fonte: Autor, 2022.

Após apresentadas, aqui, as respostas dos jogos da maioria dos alunos (muitos entregaram apenas isso), vamos agora analisar a atividade completa (Figura 14.1):

Figura 14.1 – Atividade feita pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória, parte 1

ambientação. Em cada partida é possível perceber a totalidade (ou quase a totalidade) da estratégia vencedora no jogador que vence. Observemos o jogo a seguir:

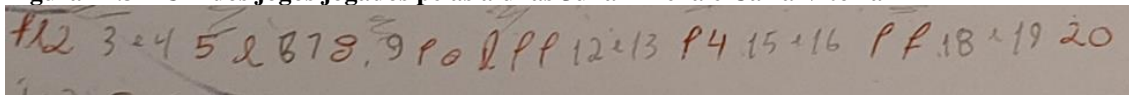
Figura 14.2 – Um dos jogos jogados pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória



Fonte: Autor, 2022.

Olhando de trás para frente, percebemos, aqui, que o jogador que jogou o número 20, esteve no 17 antes disso. Antes de esse jogador jogar o nº 17, ele jogou o nº 14 e, antes do 14, ele esteve no 11, no 8, no 5 e no 2, representando, assim, uma total consciência de quem conhecia a estratégia vencedora e a aplicou. A mesma coisa se repete no jogo mostrado abaixo (Figura 14.3). Outra partida jogada pelas alunas:

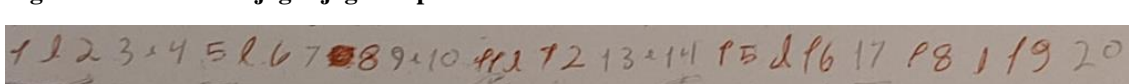
Figura 14.3 – Um dos jogos jogados pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória



Fonte: Autor, 2022.

Olhando algumas partidas anteriores a essas duas analisadas anteriormente, podemos ver certos “deslizes” da jogadora que começou a partida. O jogador de vermelho inicia a corrida ao 20 corretamente, escolhendo os números da sequência vencedora: 1 e 2, depois 5 e 6 (aqui, ele saiu do caminho vencedor e entregou a chance de vitória ao seu oponente). O oponente jogou o número 7 e então, o jogador de caneta vermelha se apossa da estratégia vencedora novamente e escolhe o número 8, seu oponente escolhe os números 9 e 10 e ele escolhe o 11 (corretamente) mas então, escolhe também o número 12 e entrega o jogo para seu oponente novamente. O jogador de caneta cinza, então assume a estratégia vencedora e dita os números 14, 17 e 20 e vence o jogo. Veja isso na Figura 14.4 abaixo:

Figura 14.4 – Um dos jogos jogados pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória



Fonte: Autor, 2022.

É notório, aqui, que ambas as jogadoras tinham consciência sobre o que estavam fazendo, porém, não tinham o domínio total da estratégia vencedora ainda. Então, à

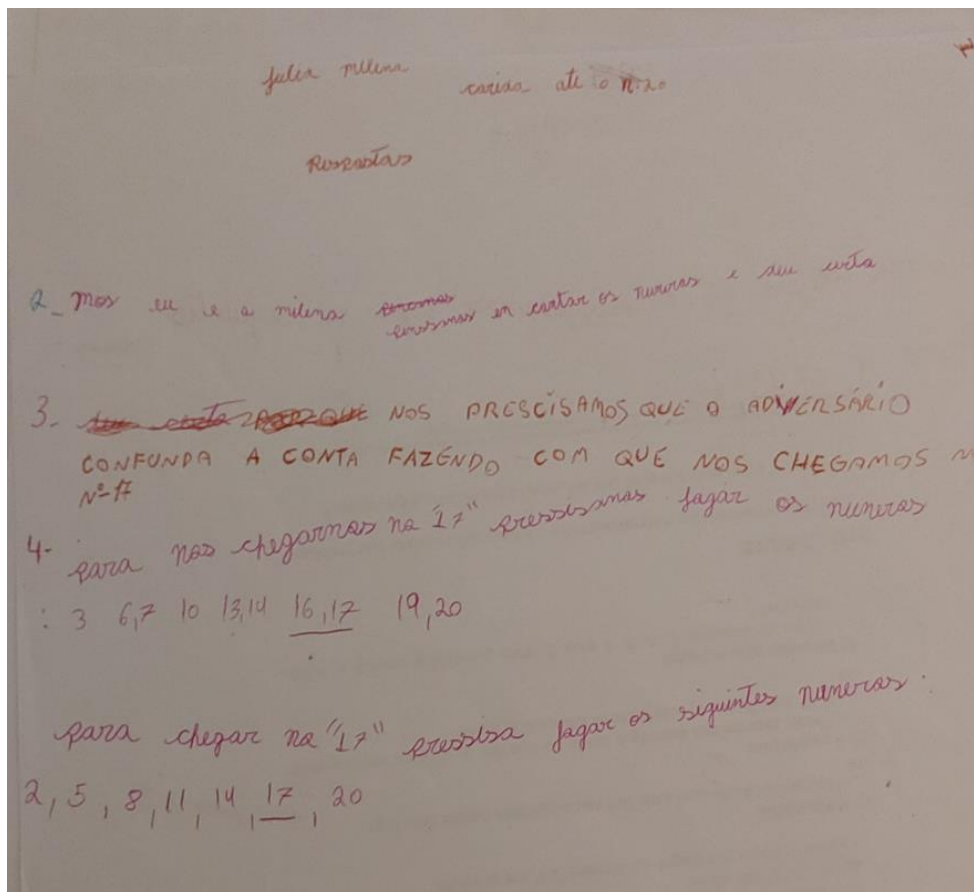
medida que o jogo se aproximava do número 20, era mais fácil para o aluno conseguir visualizar as jogadas futuras suas e de seu oponente para que vencessem o jogo. Essa maior familiarização com a estratégia vencedora à medida que o jogo vai chegando ao seu final é bastante comum. Isso ocorreu com todas as outras duplas que participaram da atividade também.

Todos perceberam que, ao se chegar no número 17, o jogador que ali está vence o jogo. Alguns conseguiram ter o mesmo pensamento também para o número 14, porém, conseguir pensar que basta estar no número 2 para que se vença o jogo, torna-se uma abstração um pouco mais complicada de se fazer para os alunos.

Pudemos perceber que, ao longo do tempo e à medida que as partidas iam sendo jogadas, o aluno cria, intrinsecamente, uma percepção de o que se deve fazer para vencer o jogo e, então, ele vai começando a perceber o pensamento que nos leva à estratégia vencedora e, portanto, vai pensando: “em qual número eu deveria estar para estar onde eu quero”.

Vejamos agora, a resposta aos outros itens respondidos por estas alunas (Figura 14.5):

Figura 14.5 – Atividade feita pelas alunas Julia Milena e Carla Vitória, parte 2



Fonte: Autor, 2022.

Pergunta nº 2: **A discussão:** discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo. Resposta: “mas eu e a Milena pensamos em contar os numeros e deu certo”

Pergunta nº 3: **A validação:** testar a estratégia para uma corrida ao 35, escolhendo apenas entre os números 1, 2 ou 3. Resposta: “nos precisamos que o adversário confunda a conta fazendo com que nos chegamos no N° 17”. Aqui é possível perceber um início de pensamento. As meninas perceberam que, para chegar ao número 20, é necessário chegar ao número 17.

E então elas continuam a resposta, detalhando mais o jogo que elas julgam ser o correto: “para nos chegarmos no “17” precisamos jogar os números 3, 6, 7, 10, 13, 14, 16, 17, 19, 20”. Com esta resposta, já é possível perceber nuances da estratégia vencedora que foi percebida por elas. Elas detalham as jogadas desde o início para se chegar ao 20. Nessa teoria de estratégia vencedora, apenas o 14 e o 17 se igualam à estratégia vencedora real do jogo.

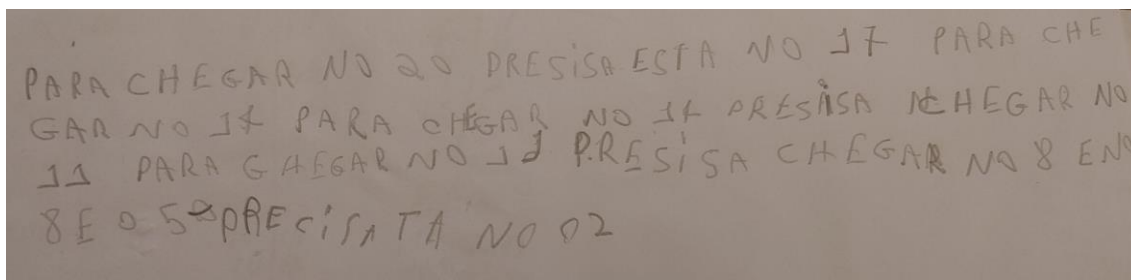
Interessante notar que a maioria dos alunos conseguiu perceber o padrão de quem joga o número 17, vence o jogo. E aproximadamente metade desses que perceberam esse padrão, notam que para se chegar ao número 17, é necessário jogar o número 14.

Não satisfeitas, ainda, elas reescrevem um jogo vencedor: “*para chegar no “17” precisa jogar os seguintes números: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20*”. Vemos aqui que elas chegaram ao que era pedido: a estratégia vencedora. Analisando a Figura 14.1, notamos que elas obtiveram o resultado correto após muita perseverança. A cada vez que elas jogavam o jogo, percebiam algum aspecto diferente da estratégia vencedora até que chegassem no resultado correto. Importante ressaltar que a maioria dos alunos parou de tentar após a terceira ou quarta vez em que jogaram a partida.

Para resolver este tipo de tarefa, as alunas se valem de conceitos de adição e subtração e também exige um pouco de abstração no sentido de que elas devem pensar em números que ainda não estão no jogo. Tal abstração se torna desafiante às alunas.

Ainda na figura 14.1, é possível ver os jogos obtidos fruto da pergunta de nº 4: **Inventar outros jogos: com 1, 2, 3 e 4. Seria possível a corrida a outros números?** As alunas Julia Milena e Carla Vitória jogaram o jogo “*Corrida ao 35*” algumas vezes, mas não formalizaram uma resposta propriamente dita para esta pergunta. Vamos ver, a seguir, outras respostas dadas por outros alunos.

Figura 15 – Atividade feita pelos alunos Adriano e João.

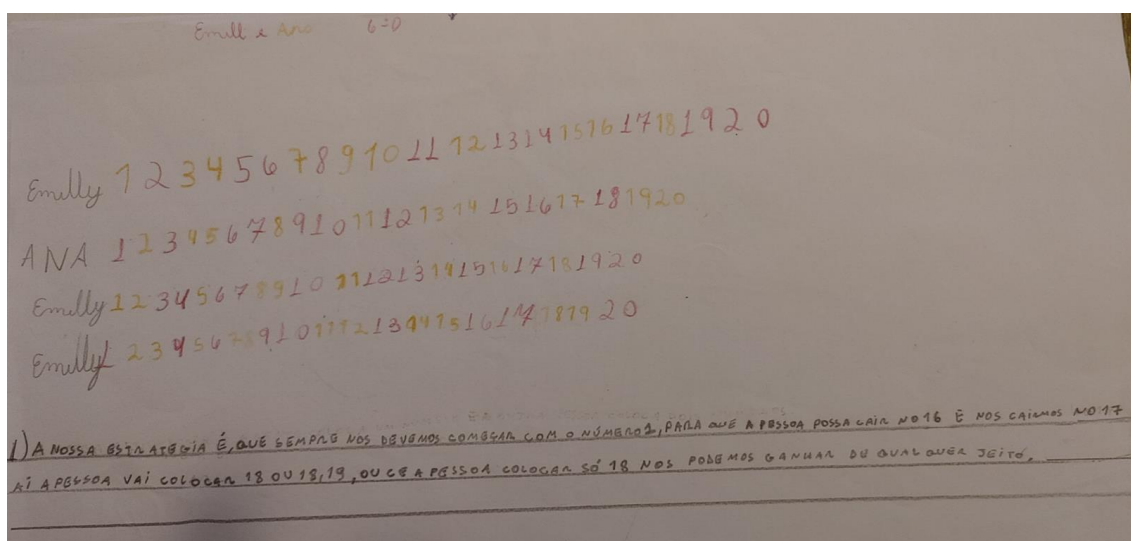


Fonte: Autor, 2022

Os alunos Adriano e João se engajaram bastante com a atividade no momento em que ela foi proposta. Quando começaram a jogar, eles vibravam, comentavam e discutiam (sobre o jogo) durante o certame. Porém, produziram apenas a seguinte resposta: **pergunta nº 2: A discussão: discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.** Resposta: “*para chegar no 20 preciso esta no 17 para chegar no 14. Para chegar no 14 precisa chegar no 11 para chegar no 11 precisa chegar no*

8 e no 8 e o 5 precisa ta no 02”. Notamos aqui, mais uma vez, que os alunos da dupla chegaram à resposta esperada. A noção de em qual número cada jogador deve estar para que ele consiga chegar onde ele deseja torna-se de fácil entendimento após os alunos, com um direcionamento correto, terem jogado o jogo uns contra os outros por algumas vezes. O padrão “de 3 em 3” ou o padrão de pensar exatamente uma jogada anterior se faz presente e é de fácil compreensão aos alunos. Vamos ver agora outras respostas fornecidas por alunos de outras duplas:

Figura 16 – Atividade feita pelas alunas Emilly e Ana.



Fonte: Autor, 2022.

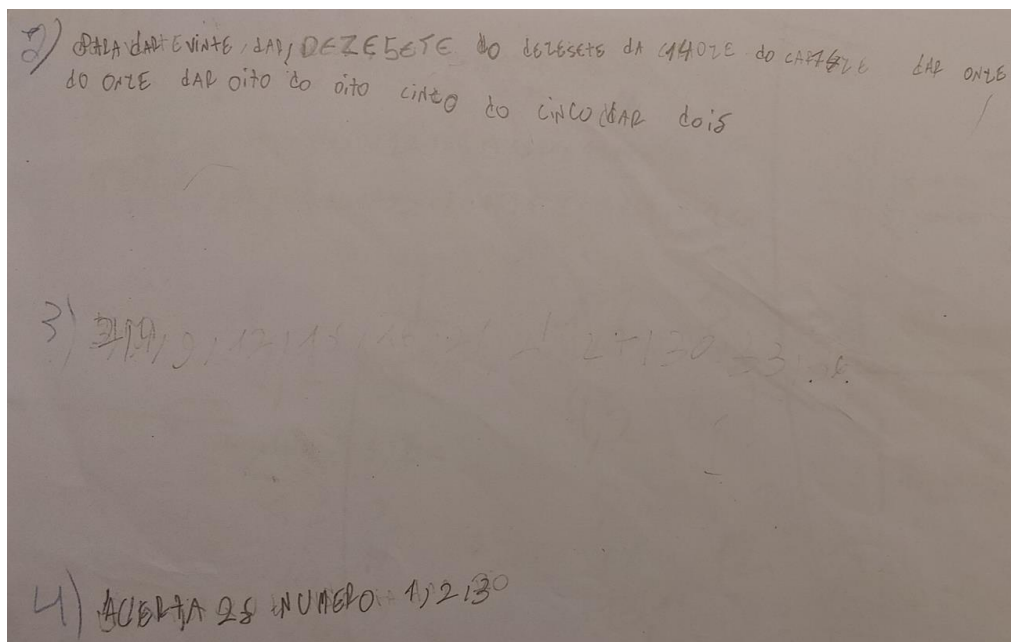
As alunas Emilly e Ana também se destacaram dentre as outras duplas. Jogaram o jogo entre si por 4 vezes e anotaram os vencedores (Emilly 3 x 1 Ana) diferenciando, por cores, a jogada de cada uma. Nota-se uma maior – digamos – autonomia das jogadoras levando se em conta do primeiro ao quarto jogo. Percebe-se menos aleatoriedade nas últimas partidas e uma maior consciência acerca dos números que elas estão escolhendo para jogar. A dupla produziu apenas uma resposta. A resposta para a pergunta de número 2: **pergunta nº 2: A discussão: discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.** Resposta: “A nossa estratégia é, que sempre nos devemos começar com o número 1 para que a pessoa possa cair no 16 e nos caíamos no 17 aí a pessoa vai colocar 18 ou 18,19 ou ce a pessoa colocar só 18 nos podemos ganhar de qualquer jeito”.

A estratégia vencedora para o jogo “Corrida ao Vinte” não foi apresentada,

todavia, uma estratégia, criada por elas, foi. Algumas semelhanças podemos perceber entre a estratégia proposta pelas meninas e a estratégia do jogo: o fato de que quem chegar ao número 17 vence. Mais uma vez, Esse aspecto da estratégia vencedora foi percebido rapidamente pelos alunos. Outro ponto importante a se notar aqui é o fato de elas terem achado que deve-se começar em um para que se possa chegar ao 16 e, portanto, o oponente chegue ao 17 e, assim, vença. E essa estratégia (a proposta pelas alunas) pode ser vista nos 4 jogos aplicados por elas. Todas que começaram com o número 1, chegaram ao 16 (e não venceu), deixando a vitória para o oponente. Creio, olhando para as sequências numéricas produzidas por elas, que o fato de quem começou pelo número um e também chegou ao número dezesseis tenha sido uma coincidência nos 4 jogos, porém, justamente devido ao fato de isso ter acontecido por 4 vezes seguidas, elas perceberam isso como um “padrão perdedor”, já que, nas 4 vezes, o oponente venceu. É interessante notar esse tipo de padrão e como ele pôde enviesar a análise (que não foi errada) das alunas.

Vamos ver a seguir mais uma atividade realizada por outra dupla.

Figura 17 - Atividade feita por alunos (sem nome)



Fonte: Autor, 2022

Nesta atividade a seguir, a dupla (que não escreveu o nome na folha de

respostas) respondeu às perguntas 2 e 4: **pergunta nº 2: A discussão: discutir na dupla qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo.** Resposta: “*para dar vinte, dar dezessete do dezessete dá 14 do catorze dar onze do onze dar oito cinco do cinco dar dois*”. Mais uma vez, podemos inferir que os alunos chegaram ao resultado esperado e compreendeu a estratégia vencedora, por mais que eles não tenham conseguido expressar fidedignamente o pensamento deles. A dupla, após realizar algumas partidas, redonda, novamente na recursão do padrão da sequência numérica. Notamos, mais uma vez que pensar no número que vem anteriormente é de mais fácil entendimento ao aluno. Para resolver este tipo de tarefa, o aluno se utiliza dos métodos (já conhecidos por ele) de adição e subtração dos números e também um pouco de abstração no sentido de que eles tem que pensar em um número que ainda não está posto, o que exige um certo desafio a eles.

6.3 Anotações da professora Ivana - Avaliações da atividade *Corrida ao Vinte* pelo Professor Danilo na Escola Madre Paulina

Aqui estão os relatos de observação que a professora Ivana Chalita, ajudante em minha pesquisa (no dia da aplicação), anotou durante a atividade, bem como as considerações que ela escreveu após a atividade. Como ela escreveu algumas frases separadas e alguns textos pequenos (devido a ter sido durante a atividade), preferi deixar cada uma das anotações como sendo um parágrafo para que ficasse o mais fidedigno possível às anotações.

Anotações durante a aplicação:

A EE Madre Paulina, Situada na Zona Leste, oferece o ensino Fundamental e Médio. Fomos recebidos pela Diretora e Coordenadora, que nos encaminhou para a sala de aula.

Os alunos do 6º ano ficaram empolgados e nos receberam muito bem com a nossa presença, onde Danilo desenvolveu uma atividade didática de raciocínio lógico.

As salas de aula são próximas, conseqüentemente, muito barulho ao redor. Não percebi, nenhum movimento de funcionário, para tentar mudar. Apenas o que todos, funcionários e alunos, já estão acostumados.

Acredito que havia mais ou menos 10 salas no andar que ficamos e impressionante

como as vozes de cada sala e gritos dos alunos, já é algo normal para a turma.

Danilo começou nos apresentando e explicando de maneira bastante clara o motivo de seu trabalho.

O jogo “Corrida ao Vinte”, foi explicado de maneira clara para a turma e qualquer dúvida que ficasse, também era explicado de maneira simples.

Na sala em que ficamos, as crianças formaram duplas para desenvolver o jogo e senti muito interesse, por parte dos alunos, em resolver a questão.

A atividade foi excelente onde os alunos denotaram interesse e curiosidade.

Então apresentou a atividade “Corrida ao 20”, de maneira clara e didática. A atividade foi excelente, o que despertou nos alunos grande interesse e curiosidade.

Alguns alunos, tentavam resolver e até faziam contas para tentar acertar, porém desanimavam. Nestes momentos, foi muito importante a motivação que que foi dedicada a eles, com dicas e motivação para acertarem e entenderem a solução.

A maior questão que percebi foi a dispersão e problemática de relacionamento, entre eles. Ao mesmo tempo que querem aprender, parece que precisam provocar o colega.

Com o tempo passando, e não conseguindo acertar e entender a estratégia vencedora, as duplas se provocavam, mas voltavam para a atividade. Cabe aqui dizer que parece que tal provocação é rotineira.

Mesmo com a dificuldade do barulho externo, algumas duplas se destacaram, conseguindo desenvolver o que foi solicitado.

Senti também, que tiveram muito respeito com o Danilo, o qual o tempo todo os incentivava a pensar, raciocinar com raça e brio.

Muitas duplas conseguiram encontrar caminhos para encontrar a estratégia e dinâmica do jogo e nesses momentos, Danilo os questionava se realmente era a estratégia vencedora. Porém, antes deles desanimarem, de imediato, já eram incentivados a tentar novamente.

Uma das duplas que se destacou, foi muito interessante, pois não desistiu em momento algum, e se esforçou demais para conseguir o resultado esperado, e quando

percebiam que não era o certo, decidiam tentar “pensar com a cabeça do professor”.

Cabe aqui, também falar, que neste aspecto de tentativa de acerto, muitas duplas não desanimaram, e procuraram encontrar resposta para o desafio.

Alguns alunos, tentavam resolver e até faziam contas para tentar acertar, porém desanimavam. Nestes momentos, foi muito importante a motivação que foi dedicada a eles, com dicas e motivação para acertarem e entenderem a solução.

Os alunos adoram provocar uns aos outros. Parece ser quase que uma necessidade.

A turma foi dividida em duplas. Uma dupla se destacou e era composta por 2 alunas, que sempre tentavam entender qual seria o raciocínio lógico, para poderem ensinar as outras pessoas. No final, elas conseguiram. Outros alunos se destacaram e, paulatinamente, foram entendendo o raciocínio da atividade e começaram a ganhar.

Um momento que foi interessante também, foi quando Danilo fez a dinâmica de mudar as duplas, para mostrar para eles, que estavam conseguindo resolver a questão.

Em dois momentos, as professoras das respectivas aulas, ficaram em sala, porém, não se pronunciavam, nem tentaram interagir, nem tentavam motivar os respectivos alunos.

No final agradeceram muito ao Danilo e, pediram para que ele voltasse mais vezes, pois a atividade foi diferente, dinâmica e construtiva.

Alguns outros professores e coordenadores também gostaram da atuação do Danilo na escola e também pediram para ele retornar mais vezes.

Considerações finais – Professora Ivana:

A atividade foi muito boa e produtiva e surpreendente para mim, pois eu não sabia o que esperar. Os alunos se engajaram na atividade e tentaram fazer com muita alegria e vontade, mas muitos não conseguiram seja porque estavam muito dispersos, seja porque desistiram de tentar no meio do caminho ou pelo cansaço. O Danilo conduziu a turma com muita garra e energia pois o barulho externo era realmente muito forte, a ponto de ser difícil com que os alunos escutassem o que se fala dentro da sala de aula.

Uma das questões que pudemos perceber foi a problemática de relacionamento entre eles, onde ao mesmo tempo que queriam aprender, precisam provocar o colega.

Também desanimavam rapidamente ao não conseguirem resolver o jogo. Nestes momentos, Danilo os incentivava a raciocinar e não desistir e assim foi conseguindo que os alunos ficassem mais atentos.

Em minha opinião, senti que os alunos têm vontade de aprender o “novo”, porém, por não terem uma maior motivação no dia a dia, aumenta a dificuldade de entendimento, levando assim, ao não respeito pelo colega e instituição de ensino, dificultando assim o aprendizado. Infelizmente os alunos estão acostumados a conviver com barulho externo e interno e provocação entre eles. Por sua vez, os professores também estão cansados de tentar mudar e muitos já até desistiram.

Partindo do princípio de que a Escola é um direito do aluno, fica registrado o grande legado do Educador, que deve ser de transformar e inspirar cada um, procurando sempre os levar a crença em si mesmo e reflexão para se ter um objetivo na vida. Foi exatamente o que Danilo fez. Mostrou com criatividade e perseverança que eles têm que acreditar mais em si, não desistir das dificuldades diárias e sempre lutar para ser uma pessoa melhor. Acredito muito que ainda é possível modificar várias coisas, pois a escola é uma ponte para torná-los pessoas melhores, com interesse, disposição e respeito para com a instituição.

No final agradeceram muito o Danilo e, pediram para que ele voltasse mais vezes, pois a atividade foi diferente para eles, com uma dinâmica e construtiva e atuante, coisa que os alunos não estavam acostumados.

O Educador, seja de qual meteria for, deve proporcionar aos alunos engajamento, atividades diferentes, escutar os alunos e principalmente não desistirem das dificuldades diárias, pois assim, estarão fazendo a diferença na vida de cada um.

7 CONCLUSÃO

A utilização do jogo *Corrida ao Vinte* como ferramenta didática para o aprendizado de conceitos matemáticos é um claro exemplo da possibilidade de se construir conceitos e conhecimentos matemáticos nos jovens alunos, utilizando-se, para isso, de um ambiente lúdico, no qual o jogo torna-se uma ferramenta desta construção e passa a se tornar (o jogo) um motivador nas descobertas e conjecturas dos alunos.

Primeiramente, o jogo é de fácil acesso a qualquer professor, pois não necessita de materiais caros nem livros, apenas papéis. É possível, ao professor, construir conceitos matemáticos como: algoritmo da divisão euclidiana, sequências numéricas, busca de padrões em sequências numéricas, Progressão Aritmética (PA), propriedades de PA, soma dos termos de uma PA, termo geral da PA, generalização de uma PA, congruência modular, polinômios e etc.

De acordo com Vorderer (2003 *apud* FERREIRA, 2005), a atratividade dos jogos educativos desperta emoção, conduzindo o usuário a uma experiência eufórica de apreciação que aumenta a motivação para enfrentar as situações apresentadas. Nestas análises, o aluno lida e observa o conhecimento com um olhar de pesquisador, isto é, os conceitos matemáticos não estão prontos e acabados, mas sim, estão sendo desenvolvidos e, para isso, os alunos tem de observar este conhecimento utilizando-se de uma análise científica pois o aluno passa a ser o pesquisador de um novo conhecimento.

Foi possível observar, empiricamente, durante esta pesquisa e até mesmo em outras vezes em que apliquei o jogo em alguma outra sala de aula (que não fosse a desta pesquisa propriamente dita) que os alunos demonstram um total interesse imediato para fazer a atividade. Inicialmente, ele não pensa muito no aprendizado em si pois ele só quer jogar e vencer o seu colega oponente de partida, todavia, o aprendizado acontece dentro dele, ao longo das vezes em que ele repete os jogos. O aluno, em posse de seus conhecimentos, cria o conhecimento e, com a ajuda e o direcionamento do professor, ele consegue organizar as ideias e transformar esse saber que acaba de surgir em um conhecimento matemático e aí então, quando o aluno se dá conta, o conhecimento já está adquirido.

A atividade gerou bastante engajamento nos alunos e atingiu o objetivo de pesquisa, que era estudar o conhecimento que surgia nos alunos através da repetição dos jogos ao longo das partidas e como eles próprios lidavam com esse conhecimento. Além de que, satisfatoriamente, os objetivos que os livros didáticos (Livros do Currículo

Paulista 2019) utilizado pelos alunos propunham também foram alcançados. Tal engajamento deve-se também ao viés natural que eu, como pesquisador e professor de sala de aula dos alunos (professor novo para eles) criei ao adentrar a sala de aula munido de duas câmeras, gravador de áudio e uma ajudante. Esse acontecimento, por si só, já tirou os alunos da mesmice e já quebrou o contrato didático inicial que havia (e que sempre há) entre professor e aluno, iniciando-se assim, um novo contrato didático. E, nesse caso, não haveria como expurgar o viés que ali já estava criado, pois o ambiente natural dos alunos já fora alterado.

Interessante ressaltar também que, como ressaltado no capítulo um do presente texto, nos moldes de D'Ambrosio (1989), a maioria dos alunos tende a criar uma barreira prévia, ou uma aversão prévia, ao conhecimento futuro quando lhes é apresentado um problema matemático porém, quando lhes é apresentado um jogo ou uma atividade, a aceitação passa a ser maior e os alunos, além de criarem e adquirirem o conhecimento, ainda se divertem durante o aprendizado.

O pesquisador e teórico francês Guy Brousseau aplicou, primeiramente, o jogo “*Corrida ao Vinte*” em uma escola pública e periférica da cidade de Bordeaux⁵. Apesar de periférica, as condições para a aplicação da atividade didática em sala de aula eram propícias. A escola era equipada com uma sala de aula especialmente projetada para o estudo das atividades didáticas com os alunos. A classe foi arquitetada com um fundo de vidro que permitia a quem estivesse do lado de fora que enxergasse tudo o que estivesse acontecendo do lado de dentro mas que, porém, a quem estivesse dentro da sala de aula, não conseguiria enxergar os observadores do lado de fora. A sala era equipada também com microfones (posicionados em locais estratégicos) e câmeras de vídeo posicionadas na parte traseira para que houvesse a menor interferência possível nas aplicações das atividades. Esta ótima estrutura é rara de se ver nas escolas públicas e periféricas, em escolas particulares e até mesmo em universidades ao redor do mundo. Assim, Brousseau (e outros pesquisadores da didática francesa) também poderiam desenvolver, com mais maestria, suas pesquisas no campo da didática.

⁵ Bordeaux é uma das 10 maiores cidades francesas em população, com cerca de 300.000 habitantes. Fica localizada ao Sudoeste da França a cerca de 600 quilômetros da capital, Paris.

A presente pesquisa também foi realizada em uma escola pública e periférica da cidade de São Paulo⁶, porém, a realidade escolar brasileira é outra. A sala onde a pesquisa foi aplicada apresentava muitos problemas estruturais básicos como canetas sem tinta para escrever na lousa e uma baderna e barulho excessivo vindo dos corredores do lado de fora durante o horário de aula (o áudio das câmeras e do gravador foi bastante prejudicado devido a esse fator). Esses problemas estruturais da aplicação foram detalhadamente descritos anteriormente neste texto. Além disso, os alunos sabiam que estavam sendo gravados (o que já representa algum viés na pesquisa) mas, mesmo com todas as adversidades, o aluno se apropria da atividade e tenta, ainda assim, resolver o que se fora pedido e isso merece ser enaltecido aqui.

Como resultados esperados, era desejado que o aluno conseguisse aplicar seus conhecimentos prévios para a solução de problemas de busca por padrões nas sequências numéricas. Era desejado também que todos os alunos conseguissem chegar ao algoritmo vencedor para o jogo, mas este resultado não foi alcançado por todos os alunos. Porém, isso não representa, exatamente, um problema, já que o presente trabalho busca estudar os elementos do conhecimento que surgem com o aluno durante a situação didática ali proposta, portanto, as estratégias vencedoras que surgiram, mesmo que errôneas, devem sim ser levadas em conta também. Acredito que os trabalhos futuros que irão discorrer sobre o mesmo assunto ou similares convergirão em observações próximas à aqui apresentadas.

A análise dos resultados nos permitiu um aprofundamento dos conhecimentos do modo de pensar dos alunos e do campo dos fenômenos didáticos e cognitivos referentes ao ensino e aprendizagem da matemática por meio de jogos educativos, mais especificamente, na busca por padrões por meio da aplicação do “*jogo Corrida ao Vinte*”. A pesquisa teve um saldo satisfatório mesmo com todas as adversidades apresentadas, devido ao tamanho engajamento que os alunos tiveram.

A Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau permite o encaminhamento de propostas metodológicas em sala de aula visando o estudo do saber que ali surge. Esta teoria, juntamente com outros elementos da didática da Matemática, é favorável para a contribuição da evolução da aprendizagem dos alunos.

⁶ São Paulo é a maior cidade brasileira, em população, com cerca de 12 milhões de habitantes e é a 8ª mais populosa do mundo. Fica Localizada ao Sudeste do Brasil a cerca de 1000 quilômetros da capital, Brasília.

Aos professores que tendem a empreender uma aplicação dos conceitos da Teoria das Situações Didáticas em sala de aula, devem pesquisar e estudar outras atividades e jogos que possuam as características adequadas para a aplicação das situações didáticas. É de cabedal importância que o professor medie, cada vez menos, as interações dos alunos e valorize, cada vez mais, essas interações. Nas palavras do pesquisador Wagner Marcelo Pommer, *“Este é o sutil tempero a ser dosado pelo professor interessado em aplicar tais princípios a sua dinâmica de aula. Isto requer um trabalho reflexivo e coletivo, onde a dialética da teoria com a prática possa contribuir para formar um cidadão com uma cultura matemática mais significativa”* (POMMER, 2008 p. 09).

Referências

- ALMOULOUD, S. Ag; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados GT-19 / ANPed. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.3, n.1, p. 62-77, 2008. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62>. Acesso em: 18 dez. 2022.
- ALMOULOUD, S. Ag; MONTEIRO, P. Leitura comentada do artigo "**Contrato didático: 'o não dito' é essencial**", escrito por Guy Brousseau, publicado na revista Nova Escola na edição de agosto de 2013. Edição e curadoria de Beatriz Vichessi. Editora da Revista Nova Escola, vídeos de 1 a 6, 2013.
- ALMOULOUD, S. Ag; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22>. Acesso em: 22 abr. 2022.
- ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (org.). **Didática das matemáticas**. Tradução de M. J. Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1988.
- BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.
- BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître. **Bulletin de l' A.M.Q.**, Montréal, n. 23, p.14-24, 1988.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
- BROUSSEAU, G. Website Oficial do autor, Guy Brousseau, **Didactique des Mathématique**, 2022. Disponível em: <https://guy-brousseau.com>. Vários acessos durante o processo de pesquisa.
- RODRIGUES, Cristimara; DE ALMEIDA, Heloísa; RODRIGUES, Chang Kuo. Engenharia didática como metodologia de pesquisa e procedimento metodológico para a sala de aula. **Revista EMP: Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 429-456, 2020.
- CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANNI JR.; José Ruy. **A conquista da Matemática**. v. 2, 3, 4. São Paulo: FTD.

COUTINHO, C. Q. S. **Anotações de discussões no grupo de estudos PEA-MAT de Estatística e Probabilidade e Educação Financeira.** Notas de aula, não paginado, de 2020 a 2021.

D'AMBRÓSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje.** Temas e debates, v. 2, n. 2, p. 15-19, 1989.

DE LOIOLA ARAÚJO, J. Toward a framework for a dialectical relationship between pedagogical practice and research. *In: Lines of inquiry in mathematical modelling research in education.* 2019. p. 21-36.

DE OLIVEIRA CASTRO, Karina. **Níveis de generalização mobilizados por alunos do 8º ano em tarefas de introdução à linguagem algébrica.** 2023. Universidade Anhanguera – São Paulo.

DE OLIVEIRA CASTRO, Karina.; DIAS, Marlene. Alves. O trabalho com regularidades e padrões no 6º e 7º anos do ensino fundamental. **Revista EMP: Educação matemática em pesquisa: perspectivas e tendências**, v. 2, 2019.

DUBOIS, J; MITTERAND, H; DAUZAT, A. **Larousse: Dictionnaire étymologique et historique du français.** 5. ed. São Paulo: Lafonte, 1995.

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio. **Dados da prova diagnóstica de Matemática e suas tecnologias.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação, 2019.

GRECCO, E. C. S. **O uso de padrões e seqüências:** uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do ensino fundamental, 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

HENRY, M. **Analyses des situations didactiques,** Curso da PUC-SP/I.R.E.M (Universidade de Besançon, França), junho 2006. Apresentação em pdf. Acesso em: 23 mar. 2023.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo Brasileiro de 2010.** Rio de Janeiro: IBGE, 2012.

LIMA, J. V. R. de. **Prototipação de uma versão digital do jogo do Nim com base no modelo de processo de software da engenharia didático-informática.** 2023. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

MENEZES, E. T. de. Verbete transposição didática. **Dicionário Interativo da Educação Brasileira - EducaBrasil.** São Paulo: Midiamix Editora, 2001. Disponível em: <https://www.educabrasil.com.br/transposicao-didatica/>. Acesso em: 2 nov. 2022.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Da produção do ensino ideal à análise das situações comuns em sala de aula. O desenvolvimento de um conceito fundamental na teoria das situações

didáticas: a noção de milieu. **Revista Veras**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 16-25, jan./jun. 2020.

POMMER, W. M. Brousseau e a ideia de Situação Didática. *In*: SEMINÁRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2008, São Paulo: FEUSP, 2008.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 17, n. 21, p. 81-140, 2004.

SÃO PAULO. SEESP - Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**, União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE- SP/UNDIME-SP, 2019.

SCHWALB, C. L. A. **Materiais alternativos para inovação tecnológica em sala de aula**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

SILVA, M. J. F. **Anotações dos cursos Didática da Matemática I e II**. Notas de aula, não paginado, 2021.

SOUZA, J. C. M. **Didática da Matemática**: cap. v - O Algebrismo e o Algebrista. Rio de Janeiro: Ed. Aurora, 1957.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários. **Revista Brasileira de Educação**, p. 13, 2000.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **ZETETIKÉ: Revista de Educação Matemática**, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

VELOSO, D. S. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano**. 2012. 245 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

WELLER, W. PFAFF, N. Transcrições entre o meio social de origem e o milieu acadêmico: discrepâncias no percurso de estudantes oriundos de escolas públicas na Universidade de Brasília. **PPGS: Revista do Programa de Pós-Graduação em Sociologia** da UFPE, 2012.

Listagem de Anexos

ANEXO A

Documento 1

Assinatura Colégio

São Paulo, ____ de _____ de 2022.

Ao Comitê de Ética em Pesquisa da PUC/SP – CEP-PUC/SP

A/c Prof. Edgard de Assis Carvalho

Coordenador do CEP-PUC/SP

Autorização para realização de pesquisa

Eu, _____, Diretor(a) responsável do Colégio _____, venho, por meio desta, informar a V. Sa. que autorizo a pesquisador Danilo Daidone Chalita, do projeto de pesquisa Introdução ao Ensino de Sequências através do jogo Corrida ao Vinte, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, a realizar/desenvolver a pesquisa intitulada "*Introdução ao Ensino de Sequências através do jogo Corrida ao Vinte*", sob a orientação da Profa. Dra. Cileda de Queiroz Silva e Coutinho, com o objetivo de diagnosticar concepções construídas por alunos da 8ª série do ensino fundamental sobre situações que se relacionem com o estudo de sequências, possibilitar aos alunos a construção e/ou aprofundamento de conhecimentos sobre Educação Financeira, e desenvolver objetos de aprendizagem para o ensino de sequências.

Declaro conhecer e cumprir as Resoluções Éticas Brasileiras, em especial as Resoluções CNS 466/12 e 510/2016. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa, e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Assinatura e carimbo do responsável institucional

ANEXO B

Documento 2

Carta de esclarecimento sobre o Projeto e a Pesquisa

PESQUISA: Introdução ao Ensino de Sequências através do jogo *Corrida ao Vinte*

Pesquisador: Danilo Daidone Chalita

Orientador(a): Prof^a. Dra. Cileda de Queiroz Silva Coutinho

Informações sobre a pesquisa:

A pesquisa a ser realizada faz parte de projeto em desenvolvimento no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

A pesquisa tem como objetivos:

- Diagnosticar concepções construídas por alunos do 8º ano do ensino fundamental sobre situações que se relacionem com a noção de sequências através do jogo centenário “*Corrida ao Vinte*”.

- Possibilitar aos alunos a construção e/ou aprofundamento de conhecimentos sobre Sequências numéricas e identificar padrões para uma estratégia vencedora para o jogo

- Desenvolver objetos de aprendizagem para o ensino de sequências.

Para este fim, serão levantados dados a partir de observações, questionários e documentos produzidos pelos participantes da pesquisa.

Destacamos que, a qualquer momento, os participantes são livres para deixar de participar da pesquisa, sem qualquer ônus ou penalização de qualquer parte. Caracteriza-se firmemente a participação voluntária.

Os dados coletados serão tratados de forma a manter o sigilo dos participantes, sem possibilidade de identificação dos mesmos.

ANEXO C

Documento 3

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Pesquisa: Introdução ao Ensino de Sequências através da busca por padrões no jogo
Corrida ao Vinte

Eu, _____, com e-mail
_____, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para que o aluno _____, pelo qual sou responsável, a participar como voluntário da pesquisa supracitada, sob a responsabilidade do Prof. Danilo Daidone Chalita, vinculada ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente:

- 1 Do objetivo da pesquisa.
- 2 Que assim que for terminada a pesquisa, o relatório com seus resultados será divulgados para a comunidade acadêmica.
- 3 Que estou livre para interromper, a qualquer momento, minha participação nesta pesquisa.
- 4 Poderei entrar em contato com o pesquisador responsável, Danilo Daidone Chalita pelo e-mail danilodchalita@gmail.com
- 5 Poderei entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da PUC-SP: rua Ministro de Godoi, 969, sala 63C, de segunda a sexta feira, fone 11-36708466 ou e-mail cometica@pucsp.br.
- 6 O Comitê de Ética em Pesquisa orienta e assegura que o planejamento e desenvolvimento da pesquisa transcorra sem constrangimento aos participantes, garantindo e salvaguardando seus direitos, tais como o do anonimato, de interromper sua participação a qualquer momento, e outra ação que julgar pertinente após diálogo com os responsáveis pela pesquisa.
- 7 Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a participação do aluno na referida pesquisa.

São Paulo, 30 de Janeiro de 2022.

Assinatura do responsável


Assinatura do pesquisador

ANEXO D

Roteiro da atividade “*Qui dirá Vingt?*” apresentado durante o programa “*Atelier maîtres de pédagogie*” (Oficina mestres da pedagogia), no canal de televisão aberto TF1 da França, em 1980, direcionado aos professores da “*école primaire*” (escola primária)

Qui dirá Vingt ?

préliminaire et co- information des
vendredi 8 février 1980, 17 h 20 - 18 h (TF1)



QUI DIRA VINGT ?

Cette émission a été enregistrée en août de l'année 1979 dans un C. M. 1 de cinq classes de l'école de l'île de France (Grosbois).

Le but de cette émission est d'introduire un jeu de la division (dans des conditions où le « jeu » de l'opération n'est pas conforme aux apprentissages habituels) et de favoriser la découverte et la démonstration, par les enfants, d'une série de techniques.

1. Le jeu.

Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire 20 en ajoutant 1 ou 2 au nombre de son adversaire, sans dépasser 20.

II. Développement de la leçon.

1. La maîtresse explique la règle de jeu et commence une partie au tableau, contre un élève, puis cède la place à un autre enfant.

4. Jeu de la découverte (20 à 25 mn).

La maîtresse demande alors aux enfants d'énoncer des propositions. Ce sont les découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis de gagner. Ces découvertes énoncées, alternativement par l'équipe A puis par l'équipe B, sont notées sur le tableau par la maîtresse (suivant la disposition ci-dessous) et sont-elles acceptées ou rejetées. Si elles sont acceptées, elles sont consignées sur le tableau.

II. Remarques.

1. Les stratégies et découvertes sont utilisées implicitement dans l'ère suivante, pour répondre aux questions d'une autre en cours. Exemple : le suite 5, 8, 11, 14, 17 apparaît avec une fréquence élevée dans la suite 14.

2. La formulation énoncée après la correction et avant la prise, pour répondre aux questions d'une autre, implique la communication. Plusieurs formulations illustrent la prise et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la laboriosité.

3. Les phrases énoncées ne servent pas tout d'abord à élargir les connaissances, leur utilisation vient découvrir ce qui a été. La même phrase est notée plusieurs fois, même par un même enfant.

4. Ce sont les enfants qui jouent une partie qui veulent le plus expliquer leur choix, ou les conditions de la réussite.

5. Le développement aboutit à unifier mathématiquement la division et la soustraction comme moyen de conversion et comme opérations d'une conversion. Ce qui ne peut se faire qu'en se déplaçant, entre enfants. Le maître doit relancer les questions aux enfants.

6. L'explication doit être nécessaire, lorsqu'il s'agit d'expliquer et d'expliquer, et le résultat est évident, comme il se doit — accepté par tous, on revient à une situation.

IV. Suite de la leçon.

1. Qui dira 25 ? 20 + 5 (sans changer le pas).

2. Qui dira 25 ?

3. Les enfants reprennent le jeu 2 par 2 (comme pour la course à 20) et sont notés chaque fois, dans 2 colonnes, les nombres qu'ils énoncent.

4. Une minute après le commencement de la partie le jeu à 2 parties ou ils cessent de jouer.

5. Un élève a énoncé : « à partir de 10 on ajoute, d'abord de 2 et 3 ». Après une phase de vérification, toute la classe a accepté la proposition.

6. Qui dira 25 ?

On a procédé de la même manière que pour la course à 20.

Après deux parties de jeu à 2, un élève a énoncé : « on peut continuer par 1. À partir de 10 on ajoute 2 et 3 ». Vérification par la classe. Proposition acceptée.

Qui dira 20 ?

Même développement que précédemment. Les enfants ont trouvé très vite qu'il fallait laisser commencer l'adversaire pour gagner et battre le score.

Remarque : la liste des nombres qu'il faut dire dans les courses à 20, à 25, à 30 pour gagner, n'est pas la même.

On écrit alors :

Qui dira 20 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 ; Qui dira 25 : 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 ; Qui dira 30 : 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Les enfants ont remarqué que la liste des nombres de la course à 20 était la même que celle de la course à 25. Ils ont dit sans raison que ce serait la même pour la course à 30, 35, etc.


2^e partie jeu : course à 30, 35, etc. (en changeant le pas).

Il s'agit de trouver avant l'adversaire par quel nombre il faut commencer. Les enfants le choisissent par suggestions successives ou « oui ». Ainsi, le jeu « Qui dira 25 ? avec un pas de 27 doit être commencé par 25 (on sait qu'il faut dire 27 de 27 de 27) ; on est le quotient et 27 la reste de la division de 628 par 27.

C'est en recourant à cette longue suite de suggestions grâce à diverses découvertes (en particulier la possibilité de sauter une ou deux fois de 27) que l'enfant réussit la division.

V. La division - disposition des calculs.

Il faut effectuer la division de 628 par 27. Le dividende est copié d'abord comme l'indique la figure 1 (sans le zéro de droite).

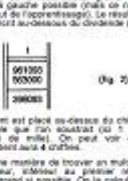


Le quotient sera énoncé entre les colonnes au-dessus de la barre, les restes successifs sous le dividende ; les multiplications auxiliaires se feront à gauche des restes. La partie droite sera vide.

On met un zéro dans les colonnes du quotient où l'on n'a rien trouvé.


Le quotient est 23 et le reste 8.

Si on ne trouve pas de premier coup le plus grand multiple, on peut trouver des quotients partiels dont on fait la somme (fig. 2).



Le chiffre du quotient est placé au-dessus du chiffre des unités du dividende que l'on soustrait (ou s'ajoute) du 3, unité de mille. On peut voir des dizaines que le quotient aura 4 chiffres.


On tente de la même manière de trouver un multiple de 100 et du dividende, obtenu au premier reste intermédiaire, le plus grand si possible. On le colle à gauche et s'y prendra à plusieurs fois si le fait (fig. 3).



Le chiffre correspondant du quotient, 7, se place au-dessus du chiffre des unités de 3.

Si l'on a de suite...

Le même produit partiel peut servir plusieurs fois (fig. 4).



On met un zéro dans les colonnes du quotient où l'on n'a rien trouvé.

Le quotient est 23 et le reste 8.

1. Une partie par Guy Brousseau.

ANEXO E

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 1 e 2

Transcrição do Áudio

Aplicação da Atividade Didática “*Corrida ao Vinte*” em sala de aula por Danilo Daidone Chalita e Ivana Chalita Mender Abi Samra na Escola Estadual Madre Paulina, no dia 22/06/2022 em uma Sala de Aula do 6º Ano do Ensino Fundamental.

Durante o início do áudio não estava muito claro o que as crianças estavam falando, portanto, a transcrição começa aos 1:00. Quero deixar claro que muitos alunos falavam (e muitos ao mesmo tempo), além da gritaria que havia do lado de fora da sala de aula.

Durante o áudio, muitos alunos falam mas, devido a isso, era um pouco difícil de associar a voz ao aluno, por isso que nomeei a fala de cada aluno de [Alunos], mas saibam que eram muitos que estavam ali falando, cada um na sua vez. Às vezes, possível notar qual aluno está a falar.

No diálogo há, portanto, 3 personas: [Professor Danilo]; [Professora Ivana] e [Alunos]:

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: Não, sou inteligente e forte

[Professora Ivana]: ÊÊÊ! Não fala assim!

[Alunos]: Desculpa

[Professora Ivana]: Muito bem, Nicolas!

[Alunos]: ai, ai, ai

[Professor Danilo]: Se errou vai de novo, é melhor de 3. Pode ser. Melhor de 3, tá? Melhor de 3. É ida e volta e desempate. A não ser que você meta 2 a 0 ai.

[Alunos]: errei, errei, 19-20. Você começa agora! Você começa.

[Alunos]: Você começa na minha mesma tática. (1:10)

[Professor Danilo]: Melhor de 3, mas escreve bonitinho – 2º jogo e tal. Escreve quem deu 1, quem deu outro.

[Alunos]: Olha pra cá

[Alunos]: Bora

[Alunos]: Ah, ótimo

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: 8, 10 – sou inteligente

[Professor Danilo]: Não esquece, sempre 1 ou 2 números, depois do último. (2:18)

[Alunos]: Não

[Professor Danilo]: Eu não posso responder nada (2:23)

[Alunos]: vai, vai, não pensa e vai. Vamos luís, vai na emoção. Eu não estou pensando não. Foi, colocou, colocou

[Alunos]: Colocou o que? 16, o certo é 17,18,19 e 20

[Alunos]: Ele vai ganhar

[Alunos]: Risos, ai errei, errei

[Alunos]: tá certo 18 e 19

[Professor Danilo]: Já foi 3

[Alunos]: já

[Alunos]: 18

[Alunos]: 19 e 20, ganhei de novo

[Professor Danilo]: Nicolas, descanso pra você e Jajá vai voltar pro eu grupo. (3:17)

[Professor Danilo]: Agora a Ivana vai fazer a parte dela com as anotações. Boa Nicolas – show

[Alunos]: Ganhei 2, eu começo

Professor Danilo é pode contar pros amigos

[Alunos]: To ganhando até 2

[Professor Danilo]: É não pode ajudar. Está 1 a 1. Agora melhor de 3

[Alunos]: borracha

[Professor Danilo]: Olha o gravador está aqui, hein? E você? Resposta em pai. Nicolas, não pode ajudar ninguém. Mas não vou postar em nenhum lugar.

[Alunos]: ta gravando tudo que to falando? (4:18)

[Alunos]: Fica quieto

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Professor Danilo]: Não pode colar né?

[Alunos]: posso ir ao banheiro?

[Professor Danilo]: Pode mas vai e volta rápido.

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: Isso, 16, 17

[Alunos]: Ah, escolhe, 18 ou 19 – Você escolhe se vai perder por 1 ou 2

[Professor Danilo]: Ivana não pode ajudar

[Alunos]: Vem aqui professor.

[Alunos]: Ganhei os 3

[Alunos]: Por sorte, por sorte

[Professor Danilo]: Nem precisava a 3ª (6:04) – Mas deixa eu falar? Beleza. Acabou?

Fonte: Autor, 2023.

ANEXO F

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 3 e 4

<p>[Alunos]: Mole, mole. Isso aqui é facinho! Estava fazendo a jogada 1.2. 3.4.5.6.7.9.10.11.12.13 e 14. 15 3 16. Fiz a mesma jogada de cima.</p> <p>[Professor Danilo]: Desempate, vai</p> <p>[Alunos]: Vozes e cantoria das crianças</p> <p>[Professor Danilo]: E vocês? Pode é 1 ou 2 depois. (7:27)</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: E aí, se você já tinha ganhado 2, não precisava da 3ª</p> <p>[Alunos]: Ah professor, eu joguei só pra humilhar ele.</p> <p>[Alunos]: Você ganhou por sorte.</p> <p>Alunos –Sorte? 3 x 0, é sorte?</p> <p>[Alunos]: Não, porque eu coloquei 15</p> <p>[Alunos]: Você errou, pois, colocou 15. Fez a mesma jogada de cima</p> <p>[Professor Danilo]: E aí, acabou?</p> <p>[Alunos]: a ultima foi a mais fácil que tudo. (8:30)</p> <p>[Alunos]: eu estava entrando na sua mente</p> <p>[Professor Danilo]: Show</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Alunos]: 2 pessoas que não sabem jogar direito – uma que ganha só 2 partidas e outro ganha 0 partida até agora</p> <p>[Professor Danilo]: Tô falando</p> <p>[Alunos]: Tô falando aqui com o gravador. Este aqui, ganhou 3 partidas e esse aqui, 0. Morreu já este aqui.</p> <p>[Professor Danilo]: Você que pediu</p> <p>[Alunos]: oi gravador, você é feio ´risos – falando no gravador. Fessor, ele ta chingando o gravador aqui</p> <p>[Professor Danilo]: Ta tudo gravado.</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: Poe o nome das 2 aí, que agora vai ter a 2ª parte. (9:55)</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: E aí, acabaram as 3? Todo mundo acabou?</p> <p>[Alunos]: Você fez com eles também?</p> <p>[Alunos]: Eu não.</p> <p>[Alunos]: Perdeu tudo e não ganhou nada. Foi por sorte.</p> <p>[Alunos]: Ah, 3 vezes é sorte?</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p>	<p>[Alunos]: Professor</p> <p>[Professor Danilo]: Oi?</p> <p>[Alunos]: Pode anotar na outra folha ou só nessa?</p> <p>[Professor Danilo]: Por enquanto nessa</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: Calma aí que elas estão acabando. Acabaram?</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: Beleza. Quem ganhou de 2 a 1, levanta a mão!</p> <p>[Alunos]: Eu</p> <p>[Professor Danilo]: Beleza. Quem ganhou de 3 a 0, levanta a mão! (11:35)</p> <p>[Alunos]: professor, só ele não</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: Tá pessoal, então a gente vai pra 2ª fase. Quem ganhou, vou dar um chocolatinho, tá?</p> <p>[Alunos]: Ai que delicia</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: Nicolas, aqui não é pra mexer. Pessoal, seguinte, vamos bater um papo. Vocês perceberam, Vitor e Nicolas, uma regra estratégia do jogo o foi aleatório?</p> <p>[Alunos]: Eu descobri. (13:20)</p> <p>[Professor Danilo]: Calma aí, um por vez.</p> <p>[Professor Danilo]: Nicolas o que você descobriu?</p> <p>[Alunos]: Que primeiro tem que jogar 1 e depois jogar 2 e 1. PRA MIM ISSO É FACIL.</p> <p>[Professor Danilo]: Nananão, o que você descobriu?</p> <p>[Alunos]: Nada, só fui ganhando</p> <p>[Professor Danilo]: Calma aí pessoal, falei pra vocês jogarem com radar atento para a estratégia vencedora.</p> <p>[Alunos]: Meu radar está desligado!</p> <p>[Professor Danilo]: Calma aí pessoal, isso é a regra do jogo. Mas quero saber se perceberam uma estratégia vencedora! Meninas prestem atenção aqui.</p> <p>[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.</p> <p>[Professor Danilo]: Show. E vocês? Não conseguiram perceber?</p> <p>[Alunos]: Eu consegui ver o chocolate. Mano tá tudo gravado. (14:45)</p> <p>[Professora Ivana]: Luís, qual foi a regra?</p>
--	--

Fonte: Autor, 2023.

ANEXO G

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 5 e 6

[Professor Danilo]: Vocês perceberam uma estratégia vencedora? Show

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Professor Danilo]: E vocês, não conseguiram perceber nada?

[Alunos]: Eu consegui ver o chocolate.

[Professor Danilo]: Pessoal, quero comportamento. Elas conseguiram perceber que a partir do 10, dá pra ganhar. Ninguém mais conseguiu pensar em nada? (15:03)

[Alunos]: Eu consegui um pouquinho

[Professor Danilo]: O que você conseguiu, quero saber, fale

[Alunos]: Sei lá, eu não sei explicar. É só repetir a mesma partida que os dois tem que fazer.

[Professor Danilo]: Mas você concorda que é aleatório, se você repetir a mesma partida, os dois tem que fazer.

[Alunos]: É

[Professor Danilo]: Vem você aqui na lousa fazer o jogo.

[Alunos]: Eu quero!

[Professor Danilo]: Vai vir fazer depois

[Alunos]: Eu fessor

[Professor Danilo]: Calma aí, calma aí

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Professor Danilo]: pessoal, pessoal, meninas eu quero que vocês prestem atenção no jogo, tentando num radar, mas com estratégia vencedora!

[Alunos]: Que radar?

[Professor Danilo]: Meninas, prestem atenção aqui por favor! Vocês estão me ajudando no meu trabalho. Eu quero que vocês olhem o jogo pra descobrir uma estratégia vencedora. Nisso que quero que vocês cheguem, rá? Elas já falaram. Já perceberam uma coisa partindo do 10. Vamos começar!

[Alunos]: 1º as damas!

[Professor Danilo]: Pessoal, prestem atenção. Sei que está uma gritaria lá fora, mas prestem atenção. A ideia, é descobrir a estratégia vencedora do jogo. Quero que vocês sozinhos descubram isso. Já dei a regra do jogo pra vocês. Quero que descubram o jeito de ganhar. Beleza, eu vou começar. Danilo e Nicolas. Eu vou dar 1 e 2, ele deu 3, vou dar 4 e 5, ele 6 e 7, dou 8, presta atenção nisso aqui, ele deu 9, dei 10 e 11, ele deu 12 e 13, dei 14, ele deu 15, eu dei 16 e 17, ele deu 18, eu dou 19,20 (18:51)

[Alunos]: o tempo todo falando, dando dicas e menosprezando o colega.

[Professor Danilo]: Eu ganhei. Próximo. Calma aí, não vai dar pra vir todo mundo. Nicolas, quero que preste atenção,

ajudando-o e chegue na estratégia vencedora, ta?

[Professora Ivana]: O que o Danilo falou é para prestarem atenção e chegarem a uma conclusão de como ganhar.

[Professor Danilo]: Exato, mas você não pode ajudar ninguém. Tem que ficar quieta. Eu quero que eles cheguem sozinhos ao resultado. Mas todo mundo tem que olhar com esse radar aceso. Pode começar Nicolas. Ele deu 1, dei 2, ele 3,4 dei 5, ele 6, dei 7 e 8. Ele 9,10, dei 11, ele 12, dei 13 3 14, ele 15, dei 16,17, ele 18,19 dei 20. Ok, vamos fazer só mais uma. Agora com uma menina. Quero que liguem os radares. O Nicolas vai tentar. Eu sei que você ganhou o jogo, mas não contra mim.

[Alunos]: Interjeições de risos (21:30)

[Professor Danilo]: Você entendeu? Você é Ana Carolina? Gabriela. Ela deu 1,2, eu 3, ela 4, eu 5, ela 6,7, dou 8, ela 9, dei 10 e 11, ela 12, dei 13 3 14, ela 15, dei 16,17, elq 18,19, eu 20. Pessoal, ficou mais claro pra vocês?

[Alunos]: Sim.

[Professor Danilo]: Então tá. Vamos para o segundo item: "A discussão". Discutir em duplas qual a melhor estratégia para ganhar esse jogo. Então na hora de responder, responde no item 2 ou 6, pois saiu errado em alguns. (25:59). Discutir na dupla, qual a melhor estratégia desse jogo. Depois testar se essa estratégia, se vale só na corrida ao 20. Por exemplo, se vale até a corrida 35, de 3 em 3, por exemplo, e inventar outros jogos, de 1,2,3,4, ou 5. Façam este tipo de pensamento. Botem a cabeça pra funcionar. Temos até a hora do intervalo pra discutir isso. Depois do intervalo, a gente volta e acaba a brincadeira.

[Alunos]: Não, aqui tá da horinha!

[Professor Danilo]: Mas vocês não querem ir pro intervalo?

[Alunos]: Não

[Professor Danilo]: beleza, rapaziada, vamos lá fazer o item 2 ou 6. Ivana, você fica quieta. Não pode ajudar ninguém. (26:54)

[Alunos]: Fessor, não sei ler.

[Professor Danilo]: Sabe sim. Discute entre vocês e coloquem uma estratégia

[Alunos]: Estão fazendo, mas se cutucando.

[Professor Danilo]: Pessoal, no 3º papel que dei pra vocês, escreva a estratégia vencedora. Agora é hora de fazer a atividade.

[Alunos]: Continuam se cutucando.

[Professor Danilo]: Eu sou mega expectador de vocês! Ivana não ajuda.

[Alunos]: Continuam se cutucando – ta gravando e falam mais bobagens.

[Professor Danilo]: Isso, escreve no papel. Já fez? Pessoal, quero uma resposta por dupla, uma resposta

ANEXO H

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 7 e 8

bonitinha. Ei, vamos nos comportar, né pai!

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Professor Danilo]: Tá já é um jogo, mas só isso não é estratégia. E até o 15, é loteria? Como fica do 15 pra trás? Isso, pode jogar, criar outro. Se vocês quiserem jogar de novo, pra lembrar da estratégia, podem jogar.

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Professor Danilo]: Sim, mas escreve o 4º jogo. Pra vocês tentarem aplicar a estratégia no novo jogo.

[Alunos]: Professor, está aqui.

[Professor Danilo]: Mas escreve bonitinho aqui no papel. Escreve a resposta aqui bonitinho. (32:26)

[Alunos]: Fessor, acabou minha folha.

[Professor Danilo]: Tem uma folha pra cada um de vocês. Vocês estão brigando por uma folha? Vou tirar o gravador de vocês e colocar em outra dupla. (a dupla desta vez foi feminina)

[Alunos]: Temos que pensar com a cabeça do professor, entendeu, pois então vamos ganhar e saber a estratégia. Mas vamos fazendo normal, pois se nossa teoria estiver errada, a gente muda. Mas vai colocando os números aí, quantos você quiser. Você colocou só 1 ne?

[Professor Danilo]: Pode falar alto, a conversa está sendo gravada. (33:59)

2 meninas concentradas em fazer o jogo.

- Tá bom. É essa você ganhou! Eu pensei que como se eu pensasse com a cabeça do professor, entenderia.

- Não é como se eu fosse o professor, e não você!

- Então foi por isso que você colocou vários números repetidos?

- É isso aí!

- Enfim, por isso deu tudo errado!

- Era pra você colocar o numero 2, mas vamos fazer outro, só que você é o professor.

- Tá mas se a gente estiver certa, chamamos o professor.

- Não é que as duas se colocaram no lugar do professor? Então foi por isso que deu errado. (34:32)

- Eu vou colocar aleatoriamente, assim so pra ver se da pra ter o raciocínio.

- Meia hora pra fazer 1 número 6?

- 8 e 9

- Ó. To jogando os números sem pensar.

- Eu também

- Não você ter que fazer teoria lá, que a gente falou que

você era o professor? Aí, só vou jogar aleatório, pra ver se realmente dá.

[Professor Danilo]: E aí, jogaram? Até aonde você quer chegar? Mas você vai pegar isso pra jogar que nem eu. Vai ganhar todas. Isso que eu quero. Quero que saiba a tática e desvende o jogo pra ganhar. E até o 17, é loteria? Tem que ganhar todos. É isso que quero! Ou você acha que ganhei todas aleatoriamente? Pensa, vai na raça pai. As meninas vão chegar em uma resposta.

[Neste momento, posiciono gravador ao lado de 2 meninas concentradas em fazer o jogo] (Duas meninas que, inclusive, conseguiram fazer a atividade inteira e muito bem. Perceberam a estratégia vencedora e com uma postura em sala de aula exemplar). Ana Julia e Yasmin é o nome delas e elas jpa estavam avançadas na atividade.

[Alunas Ana Julia e Yasmin]: Agora começa vai. Agora a gente vai, tipo saber se realmente vai dar certo

[Professor Danilo]: E aí, o que pensaram? Só que já é um princípio de pensamento.

[Alunas Ana Julia e Yasmin conversando]:

- Olha, deve pra você ganhar, acho que colocaria só o 24, mas se eu colocar o 24 e 25, ganharia.

- Que é o que a maioria das pessoas iriam pensar.

- Mas não pode dar errado.

- Mas aqui é, tipo 35. Então essa estratégia não funciona entendeu? Então, eu como qualquer outra pessoa, colocaria o numero 2, aí eu ganharia.

- Sim.

- Então, a gente está meio errada. Ó, acho que até o 20, dava pra ir e ainda funcionaria, mas até 35, não.

- Não

- O segundo a gente coloca aqui pois sempre que seu oponente coloca 2 números, você coloca 1. (38:02)

- Então o raciocínio, não pode estar errado. Por exemplo, o nosso raciocínio até o 35. Então ele não funciona aí. Então, estaremos meio erradas.

- E quando ele colocar 1, você coloca 2.

- Deixa eu ver, se do jeito que eu escrever vai dar. Meus lápis foram todos embora. (39:40)

- Enfim, nós conseguimos resposta da 2ª. A resposta seria não, que não da pra fazer até o 35

-Sim

- Mas aqui, talvez até o 20, esteja certo.

- É

[Professor Danilo]: Deixa eu falar um negócio – Nicolas como eu ganhei todos os jogos? Foi sorte?

[Alunos]: Não

Fonte: Autor, 2023.

ANEXO I

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 9 e 10

[Professor Danilo]: Todo mundo concorda que não foi sorte, certo? Mas estão falando pra mim, que a partir dos 5, tem estratégia. Tá bom. E se eu não chegasse no 16, iria ganhar? Até o 16 é loteria? Nicolas, presta atenção. Eu tinha uma estratégia desde o início. (41:27) Eu quero que vocês fiquem que nem eu. Ganhei todos os jogos.

[Alunos]: Vai ganhar bombom?

[Professor Danilo]: Vai. Já falei que quem chegar lá ganha. Calma aí. Então vocês estão indo pra trás. Conseguem pensar? Se eu ponho 17, o outro põe 18,19, eu ganho. Show. Alguns chegaram até mais pra trás. Quero que vocês deem uma raça agora, consigam pensar mais. Não é loteria.

[Alunos]: Então seria um micro estratégia, né?

[Professor Danilo]: Qual é a estratégia vencedora? Se quiserem joguem mais 1, 2, ou mais vezes até entender. Mas joga com esse olhar.

[Alunos]: Dá impressão que ela (colega) faz e sempre tá olhando na minha cara. Ela olha pra outra pessoa e olha pra mim.

[Alunos]: Professor, mas não sei qual a sua estratégia.

[Professor Danilo]: Nananao, não é a minha estratégia. Só existe 1 estratégia vencedora.

[Alunos]: Chama o pro pra ver se está certo

[Professor Danilo]: Só mais um pouquinho. Jaja vai ter um intervalinho, tá?

[Alunos]: A gente pode mostrar nossa estratégia?

[Professor Danilo]: Pode, deixa eu sentar aqui.

[Alunos]: Pelo que você fez ali no jogo, sempre que o oponente coloca 1 número, você coloca 2 e quando ele coloca 2, você coloca 1

[Professor Danilo]: Hum, será que foi assim em toda jogada?

[Alunos]: A gente não sabe se tá certo, mas pelo que você fez ali com a Milena, o que a gente pensou meio que a gente pensou que nos e primeiros números, o senhor colocou só 1 número. (43:55).

[Professor Danilo]: Tá, mas você lembra todos os meus jogos, com a Ivana e com os meninos?

[Alunos]: Ai, não

[Professor Danilo]: Será que apliquei isso em todos?

[Alunos]: O do Nicolas, senão me engano, a estratégia também não deu certo, né? Deu só na, ah, pena que a gente não lembrou. Deu só na da Milena e do Nicolas que você ajudou.

[Professor Danilo]: mas será que em toda jogada que ele pois 1, eu 2 e ele pois 2 e eu 1?

[Alunos]: Não sei. Foi o que a gente percebeu, né? Quando colocou 1 o outro 2.

[Professor Danilo]: Tá. Show! Vocês chegaram em uma estratégia! (44:20)

[Professor Danilo]: Será que apliquei isso em todos? Vamos ver se ela é vencedora? Joga aí, entre vocês. Escreve aqui atrás: "Testando a nossa estratégia"

[Alunos]: Até o 20? É que tem até o 35.

[Professor Danilo]: Ah não, vocês já testaram. Beleza.

[Alunos]: Essa daqui é só até o 35, só que a estratégia, não deu o que a gente pensou.

[Professor Danilo]: Tá. Então testa até o 20 pra ver se vai dar certo. Mas escreve, "Testando a nossa estratégia" e aí escreve qual é a estratégia.

[Alunos]: A estratégia é sempre você começar.

[Professor Danilo]: Mas eu não comecei em vários jogos!

[Alunos]: Eu escrevi aqui, olha. Sim vamos testar. Faz aí, um número aleatório.

[Alunos]: Eu sou professora, mas tipo é como vou falar, não pensa muito e não coloca muito número repetido assim 2,2,2,2, entendeu?

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: Qual o nome ele mandou escrever a estratégia. Já escrevi aqui e é que a pergunta 2 pra ver se vai dar certo mesmo. Fala um número aleatório. Eu sou professor, tá bom?

[Alunos]: Tá bom. Risquei minha calça.

[Alunos]: Eu espero que esteja certo, pois tipo, pelos 2 últimos jogos, foi o que deu pra entender.

[Alunos]: Sim, mas o da Ivana deu a mesma coisa. Ah, não deu não. Ele coloca 1 e ela 2 e nos primeiros números ele coloca 1. Então pode dar certo.

[Alunos]: É 1, 2

[Alunos]: Ô, lembra que eu sou o professor heim? Senão você vai fazer igual o meu.

[Alunos]: Acho que a gente fez, não tá certo.

[Alunos]: Tá, depende, depende. Vai que tá?

[Alunos]: É que pela cara que ele fez né, parece que tava errado.

[Alunos]: Sobreposições e fala simultânea.

[Alunos]: Vige essa? Eu não sei o que é? Eu juro e espero que dê certo.

[Alunos]: Também

[Alunos]: Mesmo ele só colocando 1 numero ou só 2, pelo menos, sempre vai dar certo, entendeu? Ele sempre vai ganhar. (47:28)

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

ANEXO J

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 11 e 12

[Alunos]: Hum, não, 19,20. Ai eu não sei então o que é.

[Alunos]: Mas esta estratégia que a gente pensou é (achei minha caneta, estava no chão)

[Alunos]: Sobreposições e fala simultânea.

[Professor Danilo]: Pessoal, por mais que vocês não tenham chegado exatamente nesta estratégia certa, escreve bonitinho a estratégia que vocês criaram.

[Alunos]: Nossa estratégia deu errado. A gente fez bem assim, como se fosse ela o aluno e eu fosse você, entende a estratégia que só você sabe. Ai a gente fez e no fim das contas, ela acabou ganhando.

[Professor Danilo]: Ou seja, furou a estratégia de vocês!

[Alunos]: Sim

[Professor Danilo]: Ou seja, tem que pensar em outra. Essa não é a estratégia vencedora. Ela pode vencer as vezes, mas a vencedora, vence sempre. Eu quero uma que vença sempre que nem eu. Tenta dar uma racinha. Uma raça.

[Alunos]: Ta bom!

[Professor Danilo]: Pessoal, mais 5 minutos vai, mas sem barulho.

[Alunos]: Ai, não sei agora, ainda mais que ele apagou o jogo dele.

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: Bo, tinha um jeito de fazer nossa estratégia dar certo, mas, calma ai, vamos chegar aqui.

[Alunos]: Vamos ver se eu consigo e primeiro começa a jogar. É pra jogar 1,2,3,4,5 certo?

[Alunos]: Falou.

[Alunos]: Começa com um número.

[Alunos]: Meninas como está?

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: É não, nossa estratégia está errada de qualquer forma. É que vence as vezes, mas não sempre. É cansei. Ah, eu não quero mais pensar.

[Alunos]: Achei que a nossa estaria certa porque faz total sentido. (51:17)

[Alunos]: Os 2 jogos que ele jogou, deu certo.

[Alunos]: A não ser que os 2 primeiros números que ele colocou, era só 1 e se a gente colocasse 2 números, depois ele ia colocar 2 números também. Então se a gente colocar só 2 números também, ele ia colocar 1 e assim por diante. Não sei. Cansei. Pelo menos é melhor que a aula de matemática.

[Alunos]:

- Verdade

- Vozes das crianças / conversas diversas.

- Ai, Vitória!

- Não quero mais pensar.

[Professor Danilo]: Vamos tentar como eu falei, entendeu? Pode dar certo! Nos 2 primeiros, não vai ser eu mesmo. Vou colocar 1 e mesmo que o oponente coloque depois do 1, ela colocou 2 e ele colocou só 1. Ai não sei. Mesmo se eu tivesse colocado 6,7, ele ia colocar 2 números, entendeu? Ai se a pessoa ia colocar 2 números, ele ia colocar 1. Também pode dar certo. Mas também pode dá errado. Não tentarei. Sei lá. Eu acho que sim.

[Alunos]: Vozes das crianças / conversas diversas.

[Alunos]: Pois foi diferente do que a gente pensou.

[Alunos]: Porque mesmo ele colocando 2 números, passou e ele colocou só 1 então foram 3 números seguidos.

[Alunos]: Depois, descansem um pouquinho que falta 3 minutos pro recreio. Vamos la organizar aqui as folhas pra não sumir. Vou enfiar aqui no meio do caderno.

[Professora Ivana]: Escreveram:

[Alunos]: Sim, só que a nossa estava errada. A gente colocou pro professor e ele falou que estava errado.

[Professora Ivana]: Mas veja que coisa boa. Vocês foram uma das poucas duplas que escreveram... Que tiveram atenção e a gente não aprende errando?

[Alunos]: Sim (52:53)

[Professora Ivana]: Isso que é bacana. Não desistir ne?

[Alunos]: A gente desistiu agora pouquinho. Depois que a gente voltar do recreio, a gente vê. É porque tem 2 aulas com ele, depois é português.

[Alunos]: Mas já foi uma aula com ele.

[Alunos]: É mesmo, Que tristeza! Eu raciocinei errado e a próxima é português, meu Deus!

[Alunos]: mas eu gostei da aula dele, foi bem legal.

[Alunos]: Seria bem legal também se tivesse 2 aulas da Elivete.

[Professor Danilo]: Que horas volta do recreio? Ta bom, entre 3 e 3:35 hs, todo mundo volta em, rapaziada. Não levem nada. Fiquem com o jogo na cabeça!

[Recreio]

ANEXO K

Transcrição do Áudio do dia da Aplicação. Páginas 13 e 14

<p>Transcrição – Continuação após o Recreio</p> <p>Na 3ª aula, após o recreio, depois de estarmos já, há duas aulas, imersos no assunto (ou seja, após eu ter apresentado o jogo para eles e eles terem jogado entre si algumas vezes), continuamos a atividade. Os alunos estavam animados para voltar a jogar e alguns não queriam nem ter saído para o intervalo.</p> <p>Então, eu pergunto para eles:</p> <p>[Professor Danilo]: Galera, o que vocês estão percebendo agora que vocês não estavam percebendo antes do intervalo?</p> <p>Aluno Nicolas: você tem que perceber a tática do adversário depois do 10</p> <p>[Professor Danilo]: Tá, e até o 10? É loteria? Vocês acham que eu ganhei todas as partidas na loteria?</p> <p>[Alunos]: Período de silêncio</p> <p>[Professor Danilo]: Pessoal, vocês acham que eu ganhei todas ao acaso? Eu tinha estratégia desde o começo!</p> <p>[Alunos]: Não, você tinha tática desde o começo</p> <p>[Professor Danilo]: Sim, eu tinha tática desde o início! Pensem comigo: quem chega ao 17 ganha?</p> <p>[Alunos]:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Sim - Não - Sim, professor! - Pera... Não necessariamente... Tudo depende da tática do adversário <p>[Professor Danilo]: Pessoal, pensem comigo: tem alguém que chega ao 17 e não ganha?</p> <p>[Alunos]:</p> <ul style="list-style-type: none"> - não - não! - não <p>[Professor Danilo]: - Isso! Todo mundo que chega ao 17, ganha! Então a gente acabou de desvendar um pedaço da estratégia! Mas e pra eu chegar ao 17? Pensem... Onde eu preciso estar para eu garantir que eu chegue ao 17.</p> <p>[Alunos]: Silêncio</p> <p>[Professor Danilo]: Vocês estão entendendo o que eu estou falando?</p> <p>Luis: - Sim</p> <p>[Professor Danilo]: Vamos lá: Vamos fazer esse pensamento de novo, Nicolas? Se eu chego ao 17, eu</p>	<p>ganho?</p> <p>[Aluno Nicolas]: Sim!</p> <p>[Aluno Luis]: Às vezes sim, às vezes, não</p> <p>[Professor Danilo]: Luis, veja: Finja que eu estou jogando contra você e eu coloquei o número 17. Daí então você se vai poder colocar o número 18 ou o 18, 19, correto?</p> <p>[Aluno Luis]: Não, eu posso por o 18 e você pode dormir e eu coloco o 19 e o 20</p> <p>[Professor Danilo]: Tá, ok. Mas se eu não dormir no meio do jogo, quem chegar ao 17 sempre ganha, né?</p> <p>[Aluno Luis]: É...</p> <p>[Professor Danilo]: Concordam, meninas?</p> <p>[Alunas Ana Julia e Yasmin]: Aham</p> <p>[Professor Danilo]: Já percebi que as meninas já sacaram a estratégia!</p> <p>[Professor Danilo]: Entendeu, professora Ivana (Ivana foi a minha ajudante na aplicação)? Entenderam, pessoal?</p> <p>[Alunos]: Sim! [em uníssono]</p> <p>[Professor Danilo]: Show! Então é um consenso de quem chega ao 17 sempre ganha! Então agora eu quero que vocês vão indo pra trás [...].</p> <p>[E aqui eu chamo a atenção do Nicolas, que estava amassando o papel que ele deveria me devolver ao final da aula]</p> <p>[Professor Danilo]: [...] continuando... Eu quero que vocês vão regredindo nesse mesmo pensamento... ou seja para chegar ao 20, eu preciso chegar ao 17; e para chegar ao 17? Eu preciso estar em qual? E para chegar ao número que vai chegar no número que chega ao 17? E assim por diante, show? Eu quero que vocês pensem e formalizem esse pensamento no papel que eu entreguei para vocês... De uma raça aí, pessoal!</p> <p>[...]</p> <p>Depois disso, os alunos começaram a escrever suas respostas no papel. Alguns alunos ainda fizeram mais algumas perguntas ou intervenções mas era perceptível que eles já estavam mais cansados no fim do dia e que já estavam com vontade de ir embora (percebi isso pois alguns antes de finalizar a atividade, já estavam arrumando suas mochilas).</p> <p>Dei, então, o encaminhamento para o final da atividade, recolhi as fichas dos alunos, falei algumas palavras de finalização, distribuí os bombons que havia levado e fizemos uma fotografia como recordação. Fotografia essa que está no último anexo deste texto.</p>
--	---

Fonte: Autor, 2023.

ANEXO L

Registro fotográfico da classe, com os alunos participante do estudo, o professor autor deste trabalho e Professora auxiliar Ivana Chalita



Fonte: Autor, 2023.

Muito Obrigado!