

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

YURI OSTI BARBOSA

**ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS COM USO DE DIFERENTES
TECNOLOGIAS: REFLEXÕES E AVANÇOS DE UM GRUPO DE
PROFESSORES EM UMA FORMAÇÃO SOBRE CÔNICAS**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2022

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

YURI OSTI BARBOSA

**ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS COM USO DE DIFERENTES
TECNOLOGIAS: REFLEXÕES E AVANÇOS DE UM GRUPO DE
PROFESSORES EM UMA FORMAÇÃO SOBRE CÔNICAS**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** sob orientação do **Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira**

SÃO PAULO

2022

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processo de fotocopiadoras ou eletrônicos, desde que citada a fonte.

Assinatura:_____Local e Data:_____

Barbosa, Yuri Osti
Estratégias Didáticas com uso de Diferentes
Tecnologias: Reflexões e Avanços de um Grupo de
Professores em uma Formação sobre Cônicas / Yuri Osti
Barbosa. -- São Paulo: [s.n.], 2022.
183p ; cm.

Orientador: Gerson Pastre Oliveira.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica
de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em
Educação matemática.

1. Formação continuada de professores de
Matemática. 2. Grupos colaborativos de professores
. 3. Estudo de cônicas e formação continuada de
professores. 4. Tecnologias digitais e formação
continuada de professores. I. Oliveira, Gerson
Pastre. II. Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática. III. Título.

YURI OSTI BARBOSA

**ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS COM USO DE DIFERENTES
TECNOLOGIAS: REFLEXÕES E AVANÇOS DE UM GRUPO DE
PROFESSORES EM UMA FORMAÇÃO SOBRE CÔNICAS**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** sob orientação do **Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira**

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira

Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima

Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni

Prof. Dr. Emerson Freire

Profa. Dra. Ana Lúcia Manrique

**Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento
de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil. – Código do financiamento
88887.196266/2018-00**

O amor é paciente; o amor é bondoso. Não inveja, não se vangloria, nem é arrogante.

Não se porta de maneira inconveniente, não age egoisticamente, não se enfurece facilmente, não guarda ressentimentos.

O amor não se alegra com a injustiça, pois sua felicidade está na verdade. Tudo sofre, tudo crê, tudo espera, tudo suporta.

O amor jamais morre; todavia as profecias deixarão de existir, as línguas cessarão, o conhecimento desaparecerá.

Porquanto em parte conhecemos e em parte profetizamos; quando, no entanto, chegar o que é perfeito, o que é imperfeito será extinto.

Quando eu era criança pensava como um menino, sentia e falava como menino. Quando cheguei à idade adulta deixei para trás as atitudes próprias das crianças. Agora, portanto, enxergamos apenas um reflexo obscuro, como em um material polido; entretanto, haverá o dia em que veremos face a face. Hoje, conheço em parte; então, conhecerei perfeitamente, da mesma maneira como plenamente sou conhecido.

Sendo assim, permanecem até o momento estes três: a fé, a esperança e o amor. Contudo, o maior deles é o amor!

Apóstolo São Paulo

AGRADECIMENTOS

A Deus, que manifestou sua maior expressão de amor em Cristo Jesus.

Aos meus pais Lucas e Ednea, pelo constante apoio moral e financeiro que tornaram possível esse sonho.

À minha esposa Michele, que sofreu junto comigo em cada dia de luta e provação provocados por essa empreitada. Obrigado por suas orações constantes e amor incondicional.

Aos meus filhos Felipe e Catarina, que mesmo sem saber me incentivaram com seu amor e carinho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira que, com grande sensibilidade e competência me ajudou nessa grande travessia.

Aos professores da PUC/SP que sempre estiveram dispostos a me auxiliar no que fosse necessário.

Aos professores que constituíram a Banca Examinadora, pelas suas importantes contribuições, que muito auxiliaram para a consecução da pesquisa.

Ao Colégio Objetivo Itupeva que sempre apoiou essa pesquisa, inclusive auxiliando nos custos de deslocamento e mensalidade, no período anterior à bolsa de estudos da CAPES.

Aos meus alunos, que sempre torceram por mim.

Aos amigos Jonas Alencar, Michele Debone, Filipe Augusto e todos os professores e funcionários do colégio Objetivo Itupeva, pelo incentivo e constante preocupação.

À Doutora Maria Teresa Merino Ruz pelo apoio constante e pronto atendimento às minhas diversas dúvidas.

Ao amigo Alexandre que tantas vezes me proporcionou o transporte até São Paulo, viabilizando esse projeto.

Mais uma vez agradeço à CAPES, sem a qual essa pesquisa de doutorado seria impossível.

Aos professores que participaram desta pesquisa, que mesmo com tantas coisas contra, não desistiram e foram até o final.

À Suzanne Lima Freitas, assistente de coordenação do Programa, que nunca me deixou na mão, respondendo as mensagens desesperadas deste pesquisador, mesmo nos horários mais inapropriados possíveis.

A todos que de alguma maneira fizeram parte desta história.

Qualquer caminho é apenas um caminho e não constitui insulto algum – para si mesmo ou para os outros – abandoná-lo quando assim ordena o seu coração. (...) Olhe cada caminho com atenção. Tente-o tantas vezes quantas julgar necessárias... Então faça a si mesmo e apenas a si mesmo uma pergunta: possui esse caminho um coração? Em caso afirmativo, o caminho é bom. Caso contrário, esse caminho não possui importância alguma.

Carlos Castañeda, *The Teachings of Don Juan*

Amo a liberdade, por isso deixo as coisas que amo livres. Se elas voltarem é porque as conquistei. Se não voltarem é porque nunca as possuí.

John Lennon

BARBOSA, Y. O. **Estratégias Didáticas com uso de Diferentes Tecnologias: Reflexões e Avanços de um Grupo de Professores em uma Formação sobre Cônicas**. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022. 183 páginas.

RESUMO

A presente tese investigou as formas pelas quais um grupo de estudos colaborativo, formado por professores de Matemática do Ensino Básico, cria possibilidades para a ressignificação da noção de cônicas, tendo por base o uso de estratégias didáticas com diferentes tecnologias. O ambiente virtual eleito foi a plataforma Zoom, onde os quatro professores, sujeitos da pesquisa, participaram de quatro encontros, nos quais foram realizadas discussões sobre cônicas, em seus aspectos didático, do conteúdo e tecnológico. Com o intuito de possibilitar ao grupo a comunicação assíncrona, foi criado um grupo de WhatsApp, onde os professores puderam trocar informações e pensar a respeito dos tópicos abordados nos encontros virtuais síncronos. Essa pesquisa se realizou numa abordagem qualitativa, onde o paradigma de pesquisa adotado foi de pesquisa participante. As análises dos encontros foram realizadas numa abordagem descritiva e interpretativa, onde buscou-se identificar e interpretar os significados produzidos pelos sujeitos durante as interações. Devido à excessiva carga de trabalho dos professores participantes da pesquisa os encontros realizados na plataforma Zoom precisaram ser adiados diversas vezes e apenas em um dos quatro encontros todos os professores estiveram presentes na plataforma. A dificuldade encontrada na realização dos encontros virtuais, atividades síncronas, foi compensada com a ativa participação dos professores na troca de informações e ideias no grupo de WhatsApp, ou seja, nas atividades assíncronas. As análises dos encontros foram desenvolvidas com base no conhecimento didático, tecnológico e do conteúdo, bem como nos diferentes níveis de fluência tecnológica. A Pandemia de COVID-19 foi um grande empecilho à pesquisa, onde todos os integrantes adoeceram em diferentes momentos. O isolamento social acabou se mostrando um catalisador à aversão que os docentes demonstraram em relação ao ensino à distância. Eles ansiavam por encontros presenciais e a volta à normalidade. Os aspectos didáticos discutidos nos encontros foram aqueles que mais atraíram a atenção dos professores, que se mostraram ansiosos em se aprofundar nesses aspectos. Um dos grandes problemas para a realização de atividades síncronas foi a insuficiente conexão com a internet. A falta de conhecimento prévio do conteúdo matemático impossibilitou um aprofundamento nas discussões. Apontamos para a eficácia da formação do grupo aqui apresentado, uma vez ampliado o número de encontros.

Palavras-chaves: professores; formação continuada; ambiente virtual; cônicas; tecnologia virtual; ambiente virtual de aprendizagem.

ABSTRACT

This thesis investigated the ways in which a collaborative study group, formed by Mathematics teachers of Basic Education, creates possibilities for the redefinition of the notion of conics, based on the use of didactic strategies with different technologies. The chosen virtual environment was the Zoom platform, where the four teachers, research subjects, participated in four meetings, in which discussions about conics were held, in their didactic, content and technological aspects. In order to make asynchronous communication possible for the group, a WhatsApp group was created, where teachers could exchange information and think about the topics covered in the synchronous virtual meetings. This research was carried out using a qualitative approach, where the research paradigm adopted was participant research. The analyzes of the meetings were carried out using a descriptive and interpretative approach, in which we sought to identify and interpret the meanings produced by the subjects during interactions. Due to the excessive workload of the teachers participating in the research, the meetings held on the Zoom platform had to be postponed several times and only in one of the four meetings were all the teachers present on the platform. The difficulty encountered in carrying out virtual meetings, synchronous activities, was compensated with the active participation of teachers in the exchange of information and ideas in the WhatsApp group, that is, in asynchronous activities. The analyzes of the meetings were developed based on didactic, technological and content knowledge, as well as different levels of technological fluency. The COVID-19 Pandemic was a major impediment to the research, where all members fell ill at different times. Social isolation turned out to be a catalyst for the aversion that teachers showed in relation to distance learning. They longed for face-to-face encounters and a return to normalcy. The didactic aspects discussed in the meetings were those that most attracted the attention of the professors, who were eager to delve deeper into these aspects. One of the major problems for carrying out synchronous activities was the insufficient internet connection. The lack of prior knowledge of the mathematical content made it impossible to deepen the discussions. We point to the effectiveness of the formation of the group presented here, once the number of meetings has increased.

Keywords: teachers; continuing education; virtual environment; conicals; virtual technology; virtual learning environment.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	CICLO DA FLUÊNCIA NO USO DE TECNOLOGIAS EM PROCESSOS EDUCACIONAIS.....	70
FIGURA 2	ARTICULAÇÕES RELATIVAS À FLUÊNCIA NO USO DE TECNOLOGIAS NOS PROCESSOS EDUCACIONAIS (PLANO REFERENCIAL E PLANO APLICADO).....	71
FIGURA 3	CÍRCULOS REPRESENTANDO O CONHECIMENTO DO CONTEÚDO (C) E O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO (P) VISTOS SEPARADAMENTE.....	74
FIGURA 4	INTERSECÇÃO DOS CÍRCULOS ORIGINAIS, REPRESENTANDO O PEDAGICAL CONTENT KNOWLEDGE (PCK).....	74
FIGURA 5	TECHNOLOGICAL PEDAGICAL CONTENT KNOWLEDGE (TPACK).....	76
FIGURA 6	CONSTRUÇÃO DE UM FAROL AUTOMOTIVO.....	94
FIGURA 7	CORTE DE CONES APRESENTADO NO CADERNO DO ALUNO DO ESTADO DE SÃO PAULO.....	100
FIGURA 8	LUGAR GEOMÉTRICO DE UMA PARÁBOLA.....	100
FIGURA 9	PARÁBOLA NO PLANO CARTESIANO.....	101
FIGURA 10	LUGAR GEOMÉTRICO DE UMA ELIPSE.....	102
FIGURA 11	ELIPSE E SEUS EIXOS.....	102
FIGURA 12	FOCOS DA ELIPSE E PONTO GENÉRICO.....	103
FIGURA 13	HIPÉRBOLE.....	105
FIGURA 14	EXCENRICIDADE DA ELIPSE.....	107
FIGURA 15	EXCENRICIDADE DA PARÁBOLA.....	108
FIGURA 16	EXCENRICIDADE DA HIPÉRBOLE.....	108
FIGURA 17	EXCENRICIDADE E SUAS VARIAÇÕES.....	109
FIGURA 18	DOBRADURA E PARÁBOLAS.....	110
FIGURA 19	DOBRADURA E ELIPSES.....	110
FIGURA 20	DOBRADURA E HIPÉRBOLES.....	111
FIGURA 21	ESFERAS DE DANDELIN/QUETELET E A ELIPSE.....	111
FIGURA 22	PARÁBOLAS E HIPÉRBOLES E AS ESFERAS DE DANDELI/QUETELET.....	112

FIGURA 23	LUGAR GEOMÉTRICO DE UMA PARÁBOLA.....	131
FIGURA 24	GRÁFICOS DE PARÁBOLAS.....	133
FIGURA 25	LINK PARA VÍDEO SOBRE PARÁBOLA.....	138
FIGURA 26	LINK PARA VÍDEO ABC DA ASTRONOMIA.....	141
FIGURA 27	LINK PARA VÍDEO DE INTRODUÇÃO À ELIPSE.....	141
FIGURA 28	LINK PARA GEOGEBRA – EPLIPSE.....	143
FIGURA 29	ELIPSE E GEOGEBRA.....	146
FIGURA 30	QUESTÕES SOBRE ELIPSE NO GEOGEBRA.....	146
FIGURA 31	CONSTRUÇÃO DE UMA ELIPSE NO GEOGEBRA.....	147
FIGURA 32	ATIVIDADES <i>ONLINE</i> – KHAN ACADEMY.....	149
FIGURA 33	EXPLORAÇÃO DA ELIPSE COM O GEOGEBRA.....	150
FIGURA 34	A HIPÉRBOLE E O EXEMPLO DO ABAJUR.....	156
FIGURA 35	HIPÉRBOLOGRAFO.....	156
FIGURA 36	INTRODUÇÃO À HIPÉRBOLE.....	157
FIGURA 37	HIPÉRBOLE NO GEOGEBRA.....	159
FIGURA 38	HIPÉRBOLE E ORIGAMI.....	159

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1	TRABALHOS CONTEMPLADOS NA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	40
QUADRO 2	RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES PARTICIPANTES.....	90
QUADRO 3	SÍNTESE DAS PARTICIPAÇÕES DOS PROFESSORES.....	169

SUMÁRIO

CAPÍTULO I	17
INTRODUÇÃO E PROBLEMÁTICA	18
CAPÍTULO II	38
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
CAPÍTULO III	56
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	57
3.1 Os três tempos do espírito: a oralidade, a escrita e a informática	57
3.1.1 Tempo da oralidade	58
3.1.2 Tempo da escrita	60
3.1.3 Tempo da informática	61
3.2 Fluência e convergência	63
3.3 Technological pedagogical content knowledge – TPACK	72
3.4 Tecnologias digitais e formação docente	78
CAPÍTULO IV	86
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	87
CAPÍTULO V	97
CÔNICAS	98
5.1 Parábolas	100
5.2 Elipses	102
5.3 Hipérboles	105
5.4 Excentricidade	107
5.5 Dobraduras e Teorema de Dandelin/Quetelet	109
CAPÍTULO VI	113
ANÁLISES	114
6.1 A primeira reunião	117
6.2 A segunda reunião	124
6.3 A terceira reunião	140
6.4 A quarta reunião	152
CAPÍTULO VII	163
CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	164
REFERÊNCIAS	174
APÊNDICE 1	180

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática se estabeleceu como um importante campo de pesquisa científica no Brasil, no âmbito da qual diversos trabalhos foram desenvolvidos com a preocupação evidente de buscar, entre outros objetivos, melhoras no processo de ensino e aprendizagem.

Neste contexto, licenci-me em Matemática no ano de 2006 e venho lecionando essa disciplina desde 2004. Em 2005, tive meu primeiro contato real com a Educação Matemática, quando tive a oportunidade de desenvolver uma pesquisa de Iniciação Científica, na qual investiguei a concepção de alunos das séries finais do Ensino Fundamental sobre equações, em uma escola pública Estadual do município de Itupeva, Estado de São Paulo.

Foi neste momento que percebi que minha vida e carreira estavam irremediavelmente associadas à Educação Matemática. No ano de 2009, defendi minha dissertação de Mestrado, cuja temática permitiu continuar minhas investigações em Educação Algébrica.

No ano de 2008, comecei a lecionar no Ensino Superior, segmento no qual permaneci até meados de 2020, sendo que, nos últimos sete anos, trabalhei exclusivamente no curso de Ciência da Computação, no qual tive a oportunidade de ressignificar alguns de meus conhecimentos na área, do ponto de vista desse campo de formação.

Além disso, sou professor da rede particular de ensino, lecionando no Ensino Médio e nos anos finais do Ensino Fundamental. Na rede pública estadual, atuei como docente por mais de 10 anos, optando por desligar-me definitivamente do serviço público em dezembro de 2019. Nesses anos, tive a oportunidade de trabalhar com diversos professores e pude observar que a atuação desses profissionais é determinante para o sucesso da educação escolar, particularmente da aprendizagem de Matemática.

No decorrer desses anos, lecionando na escola pública estadual, tive a oportunidade de fazer diversos cursos oferecidos pelo Governo do Estado de São Paulo, todos eles em ambientes virtuais de aprendizagem. Formei-me em Pedagogia

por meio de um curso a distância, via internet, e fiz uma pós-graduação lato sensu dessa mesma maneira, em Psicopedagogia Institucional; pude verificar que os processos formativos oferecidos a partir dessas plataformas podem ser efetivos, quando planejados de forma consistente e com efetiva participação de professores, tutores e alunos.

Em minha experiência como docente na escola pública, percebi um descompasso entre os professores, no sentido de uma falta de sincronia em suas práticas e até mesmo objetivos educacionais. Na área da Matemática, durante os ATPC (Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo), espaço destinado ao desenvolvimento docente na escola pública paulista, existia um isolamento mútuo entre os professores e, ainda que frequentando o mesmo ambiente, quando atividades eram propostas, eles tendiam a realizá-las individualmente. O trabalho colaborativo entre professores de Matemática, ao menos nos ambientes em que me coloquei, parecia não acontecer de forma espontânea. Essa situação acontece também quando esses docentes estão inseridos num ambiente virtual de aprendizagem, conforme relatado por Kenski (2013, p. 14), em sua obra “Tecnologias e Tempo Docente”, no qual os professores, quando participando de atividades em ambiente virtuais de aprendizagem, se esforçam de forma isolada na resolução das questões e atividades propostas.

Os professores não possuem muito tempo para trocas de ideias a respeito de suas práticas, mesmo durante os ATPC ou espaços correlatos: o tempo normalmente é utilizado para outros fins, satisfazendo necessidades burocráticas da instituição. Apesar de verificar que o trabalho colaborativo entre professores de Matemática não se dá de forma natural e que eles tendem a realizar as atividades de forma isolada, percebi claramente uma vontade entre esses profissionais para que essa interação e colaboração efetivamente acontecesse.

Os professores anseiam por um espaço no qual possam trocar ideias sobre suas práticas, aprenderem juntos e terem a oportunidade de visitar e aprofundar seus conhecimentos. Com base nessa percepção, busquei um objeto de pesquisa que pudesse auxiliar nessa demanda e que também viesse a se tornar tema de minha tese de doutoramento.

Da mesma forma, alguns conteúdos que fazem parte do currículo oficial do Estado de São Paulo parecem ficar relegados a segundo plano – normalmente, tais temas não são trabalhados ou abordados, de forma a privilegiar outras frentes que, de alguma forma, se prestariam mais a uma abordagem predominantemente algorítmica. Esse fato parece ficar evidente nas resoluções de problemas formuladas por alunos, não apenas do Brasil, que privilegiam uma resolução algorítmica, não atentando, muitas vezes, para aspectos conceituais da proposta.

Nesse sentido, Dreyfus e Hoch (2004) realizaram uma investigação junto a alunos do ensino secundário em Israel, nível escolar equivalente ao último ano do Ensino Médio brasileiro, na qual esses estudantes foram submetidos a diversas questões envolvendo equações. Nesse trabalho, os pesquisadores investigaram as diferentes maneiras em que os alunos resolviam uma equação: 1) atentando-se para o aspecto estrutural; 2) atentando-se para as propriedades algébricas – ou ao que os pesquisadores nomearam de “estrutura interna de uma equação”; 3) buscando uma resolução por meio de procedimentos prescritos (mesmo que extremamente longos); ou 4) utilizando algoritmos de resolução de equação conhecidos.

Alguns resultados dessa pesquisa parecem concorrer para a forma como essas equações são normalmente apresentadas e trabalhadas nos principais livros didáticos utilizados pelos estudantes. Os sujeitos dessa pesquisa apresentaram grande habilidade de manipular algoritmos e baixa capacidade de compreensão das estruturas internas das equações, incorrendo em resoluções extremamente longas, aumentando as possibilidades de erros e o custo operacional da resposta.

Ainda quanto à trajetória como pesquisador, em minha dissertação de mestrado, investiguei as concepções de professores de Matemática a respeito de equações, tendo como quadro teórico os Multisignificados de Equação (RIBEIRO, 2007). Este estudo, permitiu a constatação de que, dentre os sujeitos da pesquisa, apenas alguns significados estavam presentes em suas imagens de conceito (VINNER; TALL, 1991). Os professores que participaram de minha pesquisa de mestrado mostraram uma forte tendência a trabalhar com as equações de forma intuitiva, por meio de palpites e aproximações, além de tentarem empregar algoritmos, quando conhecidos.

De forma convergente, percebemos na pesquisa desenvolvida por Sirotic e Zazkis (2007), que envolveu professores de Matemática canadenses, que se preparavam com o intuito de se tornarem docentes do ensino básico, uma tendência de adaptar os conhecimentos formais e algorítmicos conforme suas crenças. Nesse estudo, as pesquisadoras buscaram identificar as concepções, corretas ou equivocadas, apresentadas por esses sujeitos, quando do estudo dos números irracionais, analisando como e por que as dificuldades ocorrem. A compreensão dos números irracionais, segundo as autoras, é essencial para a compreensão da mudança dos números racionais para os números reais.

As autoras dividem o conhecimento em três dimensões: a *dimensão algorítmica*, a *dimensão formal* e a *dimensão intuitiva*. A *dimensão algorítmica* do conhecimento, segundo as autoras, é processual por natureza, consistindo no reconhecimento e familiaridade com regras e padrões a respeito de certo domínio matemático; assim, o indivíduo pode ser capaz de explicar os sucessivos passos desenvolvidos na operação apresentada. A *dimensão formal* se baseia na apresentação de definições e conceitos, bem como de demonstrações formais, teoremas e provas, relativas às estruturas envolvidas. Esses conhecimentos podem também ser mobilizados na resolução de problemas. A *dimensão intuitiva* (também chamado de conhecimento intuitivo), consiste das ideias, crenças e intuições dos estudantes a respeito de entes matemáticos, incluindo modelos mentais para representação de conceitos numéricos e operações. Encontramos no conhecimento intuitivo algo que os alunos tendem a aceitar imediatamente como sendo algo evidente e psicologicamente consistente. As crenças aqui mencionadas têm a ver, portanto, com criações dos sujeitos acerca dos objetos matemáticos, e podem representar inconsistências em relação aos conhecimentos formais: são engendradas a partir da experiência objetiva com alguns casos e, muitas vezes, indevidamente generalizadas.

Especificamente, para as autoras:

A dimensão algorítmica é de natureza procedural: diz respeito ao conhecimento de regras e prescrições ligadas a certo domínio matemático e envolve a capacidade do estudante em explicar os sucessivos passos envolvidos em diversas operações padrão. A *dimensão formal* é representada por definições e estruturas importantes em relação ao domínio de certo conteúdo, assim como por teoremas e suas provas: refere-se à capacidade do aluno em recorrer e implementar definições e teoremas em uma situação em que problemas devem ser resolvidos. A *dimensão intuitiva* do

conhecimento é formada por intuições do estudante, assim como por ideias e crenças sobre os objetos matemáticos, incluindo modelos mentais empregados para representar conceitos numéricos e operações. Esta dimensão é caracterizada como um tipo de conhecimento que se tende a aceitar diretamente e confiantemente, é auto-evidente e psicologicamente resistente (SIROTIC; ZAZKIS, 2007, p. 51, tradução nossa).

As três dimensões do conhecimento aqui apresentadas podem se comunicar e se sobrepor constantemente. Essas dimensões possuem o potencial de cooperar na realização de atividades matemáticas e a validade desse procedimento depende de uma sólida construção que conecte algoritmos, intuição e conceitos formais.

Em suas considerações as pesquisadoras relatam:

Parece que as pessoas têm a tendência de adaptar seus conhecimentos formais e os algoritmos a eles ligados de modo a acomodar suas crenças, possivelmente como resultado de uma tendência natural ligada à consistência. Dessa forma, inconsistências poderiam resultar da oposição em relação a procedimentos muito arraigados e que aparecem nos casos em que a pessoa não está vigilante em relação a essas crenças, mas age automaticamente (SIROTIC; ZAZKIS, 2007, p.52, tradução nossa).

Ainda que o presente trabalho não se situe no terreno de tensões apontadas por Sirotic e Zazkis (2007), consideramos fundamental discutir essas asserções nesse ponto, uma vez que as análises nesse trabalho mostrarão episódios em que diversos trânsitos entre os conhecimentos formal, algorítmico e intuitivo puderam ser identificados.

As considerações finais apresentadas em Barbosa (2009) apontam para a necessidade de se possibilitar uma formação inicial e continuada de professores que contemple os multisignificados de equação possibilitando uma ampliação da imagem de conceito dos professores. Em Sirotic e Zazkis (2007) as pesquisadoras concluem relatando a importância da formação Matemática para os professores.

Uma vez licenciados em Matemática e trabalhando efetivamente no Ensino Básico, esses (e outros) professores almejam uma possibilidade real de formação continuada. Observei, durante esses anos de prática docente, que a maior queixa dos professores em relação à formação continuada é a falta de tempo para estudar, uma

vez que muitos deles lecionam até 60 aulas por semana. Outro fator importante é a alegação de que os cursos oferecidos pelas escolas não atendem às suas necessidades, faltando espaço para um maior protagonismo dos professores e possibilidades para debater e estudar situações de sala de aula vivenciadas por eles.

O Brasil é um país de dimensões continentais e o Estado de São Paulo recebe pessoas de todas as regiões, constituindo, assim, uma população extremamente heterogênea, de cultura e valores muito diferentes. Os cursos que são oferecidos como possibilidades de formação continuada para os professores são os mesmos para toda a rede Estadual de Ensino, o que pode concorrer para torná-los desinteressantes e desvinculados da realidade escolar local, na qual o professor desenvolve realmente sua prática diária.

Pensando em todas essas vivências, acredito que esse espaço aglutinador, na qual um grupo de professores de Matemática pode se “encontrar”, apesar da massacrante carga horária de trabalho a que são submetidos, trocar ideias sobre suas práticas, socializar atividades e estudar sistematicamente conteúdos matemáticos e teorias didáticas, seja, de fato, um ambiente virtual.

A importância das cônicas se evidencia em diversas disciplinas como a Física, a Química e as ciências médicas, acreditamos que o estudo das cônicas, conteúdo do 3º ano do Ensino Médio, seja importante e adequado à presente pesquisa. Dessa forma, o tema da presente pesquisa é o estudo das cônicas por professores de Matemática, em um espaço virtual de aprendizagem. Proponho, dessa forma, investigar como a organização colaborativa de um grupo de estudo pode concorrer entre professores de Matemática do Ensino Básico para a revisita e aprofundamento da noção de cônicas, em termos do conhecimento pedagógico e tecnológico do conteúdo. Para subsidiar tal empreitada, utilizamos os trabalhos de Lévy (1993), que desenvolve um estudo bastante criterioso sobre as tecnologias da inteligência, mais especificamente no que o autor chamou de “os três tempos do espírito”; de Oliveira (2018), que realizou um estudo sobre fluência e convergência, envolvendo conhecimento matemático e tecnologias; de Mishra e Koehler (2006), que desenvolveram um modelo teórico chamado TPACK – *Technological Pedagogical Content Knowledge*; e Kenski (2013), que traz reflexões importantes sobre as tecnologias e o tempo docente. Esses trabalhos serão explorados com maior profundidade no primeiro capítulo da presente tese.

O grupo colaborativo proposto se constituiu e interagiu, prioritariamente, no espaço proporcionado pelo *software* de videoconferências Zoom, que pode ser visto como uma plataforma que apresenta versão gratuita e que dispõe de ferramentas com potencial para ações colaborativas, dependendo da estratégia didática adotada.

Ao pesquisar no banco de Teses e Dissertações da CAPES e em sites de programas de Pós-Graduação *Strictu Sensu* em Educação Matemática e Ensino de Matemática, pudemos constatar que, embora as tecnologias da informação e comunicação no ensino de Matemática constituam um assunto bastante recorrente, não são encontrados trabalhos que tratem da formação continuada de professores de Matemática em ambientes virtuais (ou em plataformas com finalidades equivalentes), tendo como objeto de estudo a revisita e aprofundamento do conhecimento acerca do conteúdo matemático “cônicas”, em uma perspectiva de trabalho colaborativo.

Encontramos, na tese de doutoramento de Adriana Tiago Castro dos Santos (2016), que tem por título “O Estado da Arte das pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica no período de 1991 a 2014”, um importante delineamento do cenário das pesquisas envolvendo Geometria Analítica. Tal pesquisa mostra que, no período considerado, foram realizadas 20 investigações que utilizaram as TIC (Tecnologias da Informação e do Conhecimento) como foco principal. Dentre essas pesquisas, 10 tiveram como sujeitos alunos do Ensino Médio, 7 foram realizadas com alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática e 3 investigaram alunos da engenharia. Existe uma evidente carência em pesquisas envolvendo a formação continuada do professor que ensina Matemática, em especial no que diz respeito ao conteúdo “cônicas”:

Constatamos que há falta de aprofundamento dos tópicos que abordam as cônicas: elipse, parábola e hipérbole. Tais conceitos são importantes caso os estudantes prossigam seus estudos nas áreas de Engenharia, Arquitetura, Matemática, Física, etc. (SANTOS, 2016. p. 177).

Andrade (2012), em sua tese de doutorado, trabalhou o enfrentamento da desarticulação de conteúdos matemáticos, em especial de tópicos da geometria analítica e como essa tarefa pode constituir-se em um dispositivo de formação de professores. Esse trabalho investigou uma comunidade de doze professores de um colégio particular.

No que diz respeito ao eixo tecnologias digitais e cônicas, foram encontradas 8 pesquisas, sendo três mestrados e 5 doutorados, que investigaram o ensino de cônicas utilizando tecnologia digital. No campo da formação continuada de professores, encontramos 4 teses de doutorado que trabalham em uma perspectiva colaborativa, porém não fazem um estudo específico das cônicas.

Ao realizarmos uma investigação em documentos oficiais, pudemos verificar que o estudo das cônicas não recebe a devida atenção, sendo marginalizado e pouco citado. No entanto, acreditamos que esse mesmo conteúdo possua o potencial de se tornar uma importante ferramenta para se alcançar os objetivos gerais desses mesmos documentos.

Por exemplo, encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000, p. 5) diretrizes que apontam para uma formação dos alunos voltada para o desenvolvimento de capacidades que possibilitem aprender, criar e formular, em detrimento do simples exercício de memorização.

No decorrer do Ensino Médio, o aluno pode desenvolver capacidades e conhecimentos básicos que sirvam de alicerce para a realização de estudos futuros, nos quais o mesmo será instruído em campos mais específicos de atuação.

Quando olhamos para a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica, lei 9394/96 – BRASIL, 1998) percebemos claramente a preocupação do documento em garantir a formação de um cidadão crítico, com plenas condições de exercer sua cidadania.

Quando voltamos nosso olhar para o PCNEM (BRASIL, 2000, p. 44), é possível perceber uma preocupação diferente emergir no que tange à formação científica. Esse documento apresenta propostas no sentido de complementar as diretrizes apresentadas na LDB, em que as disciplinas específicas se tornam ferramentas para que os alunos compreendam e interajam com o mundo que os cercam. Para alcançar tal intento, o aluno pode desenvolver suas capacidades de raciocínio lógico, intuição, resolução de problemas, argumentação, investigação de problemas físicos e geométricos.

Aprofundando nossas investigações, encontramos o PCN + Ensino Médio (BRASIL, 2002), que são diretrizes para os professores de Matemática feitas com o

intuito de orientar sua prática, de forma mais condizente com os documentos mencionados anteriormente. Os PCN + estruturam o currículo de tal forma que as competências e habilidades se tornem eixos norteadores do trabalho docente: a escola deixa de ser organizada por disciplinas estanques e passa a possibilitar um trabalho por áreas, de forma interdisciplinar, buscando a construção de competências gerais.

Esse mesmo documento apresenta o estudo da geometria em eixos temáticos, sendo que o primeiro trabalha com geometria plana, dando ênfase à semelhança, congruência e representações de figuras; no segundo, aborda-se a geometria espacial, em que a atenção maior está no estudo dos poliedros, suas classificações e representações. Os sólidos redondos também aparecem, bem como sólidos inscritos e circunscritos; cabe à métrica o estudo das áreas, volumes, estimativas e aproximações; e, finalmente, na geometria analítica, nosso campo de maior interesse na presente pesquisa, fica a algebrização da geometria no plano cartesiano.

Mantendo nossas atenções na geometria analítica, observamos, na última parte desse documento, que, no que diz respeito às cônicas, apenas circunferências e parábolas são mencionadas:

Mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1º e 2º graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas (BRASIL, 2002, p. 124).

Continuando nossa exploração em documentos oficiais, encontramos, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006), algumas informações que podem nos ser úteis na construção de nossa problemática.

A OCEM está estruturada sob três perspectivas, sendo elas: *a)* do conteúdo, *b)* da maneira de se trabalhá-los e *c)* do projeto pedagógico ou curricular. Nesse documento (BRASIL, 2006, p. 69), além das recomendações anteriormente colocadas sobre a necessidade de que os alunos desenvolvam a capacidade de se tornarem cidadãos críticos, tendo como ferramenta principal de tal condição as disciplinas específicas, o referido documento apresenta também a questão da modelagem como

importante ferramenta e a necessidade de que o aluno reconheça a Matemática como uma área do saber por si só.

Esse último tópico parece importante e não mencionado anteriormente nos outros documentos. A visão da Matemática como uma área do conhecimento, e não apenas de forma utilitária ou de suporte a outras áreas, pode gerar importantes discussões nas aulas do Ensino Médio, e, por vezes, nos Anos Finais do Ensino Fundamental sobre a Filosofia da Matemática, envolvendo importantes questões epistemológicas.

Quando olhamos para a geometria analítica, esse documento reduz àquilo que se considerou essencial, ou seja, o estudo da reta e da circunferência, argumentando a favor do que poderia ser visto como um estudo significativo, desvinculado da simples memorização. O estudo das cônicas é considerado complementar, cabendo ao professor julgar sua relevância.

Ainda segundo esse documento, as cônicas podem ser abordadas por meio de seu lugar geométrico, acompanhado de suas equações canônicas. Essas equações são tratadas como sendo de 2º grau com duas variáveis, embora exista a recomendação de se explorar as coordenadas polares e esféricas.

Esse documento apresenta, também, a necessidade de desmistificar a Matemática, afastando a ideia pela qual essa disciplina seria algo para gênios ou para pessoas superdotadas. Essa abordagem motivadora pode ser determinante na realização das atividades matemáticas.

O documento de orientação curricular mais recente, à época da escrita desse relatório, é a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), que traz algumas abordagens relacionadas à geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental, como segue:

Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano (BRASIL, 2018, p. 272)

A BNCC destaca, nesse mesmo contexto, que o estudo da geometria pode avançar para além da mera aplicação de fórmulas e realização de cálculos, o que permitiria a resolução de problemas a partir de abordagem geométrica em interação com outros campos da Matemática, como álgebra, por exemplo. No entanto, ainda que recomende, em diversas de suas explicações, uma abordagem integrada, envolvendo álgebra e geometria, principalmente, esse documento não menciona, especificamente, nas competências e habilidades, ou mesmo no discurso sobre os tópicos que podem ser oferecidos à aprendizagem dos alunos no Ensino Médio, o estudo das cônicas. Ainda que a BNCC não seja o currículo em si, essa omissão pode restringir o estudo desse tema por alunos da escola básica. Esse é outro motivo pelo qual esse estudo se reveste de importância.

Assim, não encontramos referências diretas à ideia de cônicas na BNCC, ainda que o documento apresente a proposta de utilização de diversos recursos metodológicos na prática dos professores, articulando-os a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 298).

Essa autêntica ausência do tema “cônicas” nas recomendações curriculares mais recentes não é um fenômeno isolado ou exclusivo: a predileção por determinados conteúdos ou aspectos do currículo pode ser compreendida à luz da Teoria da Transposição Didática, elaborada pelo matemático francês Yves Chevallard, a partir da década de 1980. A referida teoria sistematiza o processo de transformação do saber sábio, aquele desenvolvido pela academia, em um saber a ensinar, típico dos documentos e, posteriormente, em um saber ensinado, no contexto da sala de aula.

No sentido da teoria mencionada, o espaço em que se pensa as necessidades do ensino, relevância dos conteúdos, metodologias de ensino, particularidades sociais das diferentes comunidades, formas de aplicação prática do conhecimento na resolução de problemas é chamado de *noosfera*. Em outras palavras, de acordo com Chevallard (1991), a noosfera pode ser vista como uma coleção de instâncias e/ou lugares no âmbito dos quais ocorrem negociações acerca dos saberes que se deseja ver ensinados em dado contexto social, o que inclui o engendramento de mudanças no sistema educacional e em seu contexto/entorno. A noosfera é a dimensão na qual se podem propor soluções provisórias em relação aos problemas existentes nos

diversos contextos educativos (sistemas também, no sentido do triângulo didático) com a intenção de buscar convergências em relação a um projeto, de cunho político e social, previamente definido. São componentes dessa dimensão os especialistas disciplinares, os órgãos governamentais, os agentes políticos, as associações e comissões relacionadas à educação, além de representantes da sociedade civil e dos segmentos governamentais e profissionais de algum modo correlacionados com o projeto educacional mencionado.

Conforme aponta nossa revisão bibliográfica e pesquisa em documentos oficiais, o conteúdo relativo às cônicas tem sido relegado a segundo plano, cabendo ao professor julgar sua relevância. Assim, as decisões provenientes da noosfera podem sofrer reelaborações no âmbito da sala de aula, no trânsito entre o saber a ensinar e o saber ensinado. Nesse sentido, a compreensão do professor acerca do conteúdo pode influenciar nessa decisão. Essa discussão precisa ser ampla, feita com os pares, levando em conta fatores locais, sociais, metodológicos e de conteúdo.

Por sua vez, o Currículo do Estado de São Paulo – CESP (SÃO PAULO, 2011) apresenta cônicas no nono ano, por meio do estudo da parábola. Esse estudo é feito explorando a noção de interdependência na proporcionalidade de uma grandeza com o quadrado da outra, pela representação dessa parábola no plano cartesiano, utilizando uma função polinomial de 2º grau.

No terceiro ano do Ensino Médio, o conteúdo das cônicas é contemplado por meio do estudo da elipse, hipérbole e parábola. A ênfase é dada no estudo de seus lugares geométricos, em suas equações canônicas centradas na origem do sistema cartesiano, ou, tratando-se de parábola, com seu vértice nesse ponto.

Apesar da pouca ênfase mostrada pelos documentos oficiais apresentados, acreditamos que o conteúdo referente às cônicas seja muito importante e necessário para a formação crítica dos alunos, ampliando seus repertórios, melhorando assim sua leitura de mundo por meio desse instrumental matemático e, dessa forma, contribuindo para os objetivos gerais apresentados nesses mesmos documentos.

Acreditamos que uma proposta de formação continuada para os professores que explore esse conteúdo possa contribuir para o aprofundamento dos saberes relacionados ao mesmo, permitindo uma maior articulação entre os docentes, trocas de experiências e aprimoramento profissional.

Ao investigarmos os PPC (Projeto Pedagógico de Curso) das licenciaturas em Matemática, encontramos outro grande desafio: raríssimas são as instituições que as disponibilizam, em ambiente virtual, para qualquer pessoa interessada em fazer uma consulta. O que encontramos são apenas os nomes das disciplinas, o que não é suficiente para descobrirmos o que é realmente proposto.

A maior parte das universidades que disponibilizam o PPC são instituições públicas. As instituições privadas que foram consultadas, ou não mencionam cônicas em seu PPC ou o fazem de forma bastante geral, como, por exemplo, “conhecer as características de um plano cartesiano ortogonal, da circunferência, parábola e elipse”.

Como já se mencionou, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que norteia e estrutura um conjunto de saberes básicos que todos os estudantes podem alcançar ao longo das etapas da Educação Básica. Esse documento serve de referência para a construção de políticas públicas e outras ações, nas diversas esferas administrativas, que objetivam a formação de um cidadão crítico, ético, integral, que compreenda e atue em uma sociedade democrática e justa.

A BNCC serve de norte para a construção curricular de cada localidade, levando em consideração as características próprias de cada local, contexto e alunos, envolvendo a família e a comunidade na vida escolar. A BNCC (BRASIL, 2018) destaca diversas ações que podem ser tomadas para a concretização de tais metas; dentre elas, destacamos algumas:

- Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos;
- Decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;
- Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de

diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;

- Selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
- Manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino.

No Estado de São Paulo, surge, baseado na BNCC, o Currículo Paulista, que busca definir as aprendizagens que poderão acontecer para todos os estudantes paulistas. Esse currículo procura integrar os conteúdos específicos com os itinerários formativos e educação tecnológica.

Os estudantes possuem a oportunidade de escolher sua área de interesse, percorrendo o itinerário formativo eleito, aprofundando-se, assim, nessas áreas do saber. Esse currículo foi implantado no Estado de São Paulo em 2021, sendo que os alunos de 1º ano do Ensino Médio já estão inseridos nesse contexto. Os demais anos do Ensino Médio continuarão segundo o antigo currículo. A previsão é que a implementação do novo currículo seja concluída com terceiro ano do Ensino Médio, em 2023.

Todos esses esforços institucionais indicam buscar um processo de aprendizagem no qual os alunos possam assumir uma postura mais autônoma e participativa. Para alcançar esse intento, o docente assume posição fundamental, considerando seu papel como orientador e seu domínio de conteúdos e técnicas adequadas. Dessa forma, essas preocupações parecem se alinhar com a presente tese, no que diz respeito a uma busca por um ensino mais efetivo, com professores bem-preparados e motivados.

Com o intuito de evitar a polissemia que geralmente acontece, relacionada a certos termos, esclarecemos que na presente tese de doutorado empregamos o termo “conceito” da mesma maneira que a utilizada por Vinner e Tall (1991). Segundo tais autores, esse termo se refere às ideias academicamente aceitas, enunciadas, ou não, em linguagem matemática. Utilizaremos na presente tese “concepção” e “noção” como sinônimos e referem-se às impressões pessoais do indivíduo em relação a um determinado tema.

Da mesma maneira, o termo ressignificação é empregado nesse trabalho no sentido por ele atribuído por Oliveira (2018). Para esse autor, ressignificar significa, em conexão com o estatuto formal do conhecimento matemático, adquirir uma compreensão mais adequada e correta. O autor menciona que o professor nem sempre constrói uma ampla compreensão acerca dos conteúdos com os quais trabalha em sala de aula. Assim, a ressignificação compreenderia uma revisita ao saber adquirido em sua formação, de maneira a ampliá-lo e a reconstruir naquilo em que eventualmente apresentava com imprecisões ou erros. O termo também se refere aos recursos e estratégias didáticas que podem ser empregados no trabalho com determinado elemento de saber. A presente proposta de ressignificação de cônicas se dá prioritariamente em um ambiente de encontros não presenciais (ou remotos, como também é habitual mencionar). Essa opção se justifica duplamente, quer pelo fato de recursos ligados às tecnologias digitais comporem os cotidianos das pessoas em diversas áreas e se apresentarem como possibilidades interativas nos processos de ensino, quer pelo fato de as alternativas presenciais se encontrarem severamente limitadas no período dessa investigação, coincidente com o da ocorrência das fases mais aflitivas da pandemia do COVID-19.

De fato, os recursos de comunicação e de interação presentes nas tecnologias digitais já se constituíram, no âmbito da sociedade contemporânea, como um paradigma de interação social. Ainda que alguns professores se mostrem relutantes em utilizar semelhantes recursos em suas aulas, por alegarem não dominar o aparato técnico e/ou o conhecimento necessário, ou mesmo por falta de condições ligadas à infraestrutura, é bastante amplo o uso de meios de interação de natureza tecnológica no cotidiano, inclusive por esses profissionais, por meio de aplicativos relacionados às redes sociais, por exemplo.

A utilização das tecnologias digitais pode auxiliar na prática docente, de tal forma a proporcionar a esse professor a solução para o problema apresentado anteriormente, quanto à vontade desses profissionais em estudar e trocarem ideias sobre suas práticas. A falta de tempo para que eles se encontrem pode ser compensada de alguma forma quando olhamos para o tempo de forma não linear, mas como algo muito mais vasto e desafiador (KENSKI, 2013).

É comum que o professor possua a tendência de reproduzir o mesmo modelo de aula que teve enquanto aluno na escola básica. Enquanto os professores não

receberem a formação específica necessária para transformar as técnicas informatizadas em reais ferramentas ao serviço da aprendizagem dos alunos, a simples inserção de tais tecnologias nas escolas não garante uma apropriação dos docentes em relação a elas. Além disso, sabemos que esses profissionais trabalham muitas vezes em condições precárias e com baixo investimento das esferas governamentais. Trata-se de outro desafio, portanto.

O simples fato de trocar de ambiente, mudando da técnica do lápis e papel para um ambiente virtual não significa que a tecnologia digital esteja sendo bem empregada: ela pode estar sendo usada para reproduzir situações de aprendizagem idênticas aos dos livros didáticos quando esses exploram apenas exercícios de aplicação e demandam abordagens estáticas. Entretanto, como indica Oliveira (2018), o uso de tecnologias digitais abre possibilidades que não estão disponíveis em outros meios, tais como dinamismo, uso intensivo de visualização de resultados provisórios/parciais e de experimentações. Isso significa que as estratégias didáticas que prevejam o uso de tecnologias digitais podem ser planejadas para explorar as potencialidades disponíveis nessas interfaces. O sucesso da atividade proposta, nesse caso, passa pela apropriação das formas pelas quais se dá sua utilização.

Foram tiradas lições das muitas experiências anteriores neste assunto? Foram analisadas as transformações em andamento da ecologia cognitiva e os novos modos de constituição e de transmissão do saber a fim de orientar a evolução do sistema educativo a longo prazo? Não, apressaram-se em colocar dentro das salas as primeiras máquinas que chegaram. Em vez de conduzir um verdadeiro projeto político, ao mesmo tempo acompanhando, usando e desviando a evolução técnica, certo ministro, quis mostrar a imagem da modernização, e não obteve, efetivamente, nada além de imagens (LÉVY, 1993. p. 9).

Segundo Lévy (1993), a técnica é o que permite ao ser humano se transformar, e, transformando a si mesmo, transformar também a sociedade em que se insere, tornando impossível dissociar o ser humano da técnica, recaindo em uma espécie de Ouroboros, a serpente mítica que engole a própria cauda representado um eterno recomeço. Dessa forma, não podemos rotular a técnica como boa ou ruim, mas antes nos ocupar de entendê-la, discuti-la, para melhor atuarmos, possibilitando o estabelecimento do que Lévy nomeou de tecnodemocracia.

Diversos autores fazem uma clara diferenciação entre os termos “técnica” e “tecnologia”, sendo que a primeira se refere de forma primária às ferramentas, sejam elas materiais ou intelectuais, criadas pelo homem, para interferir e mudar o seu meio, conforme a sua conveniência. Por outro lado, a ideia de tecnologia seria o estudo da interação da técnica e do ser humano, quer individualmente ou coletivamente, e do meio.

Para Lévy (1993), o sujeito e a técnica se tornam algo indissociável, como uma única coisa, tornando-se irrelevantes as taxonomias exaustivas que não seriam úteis para estudos mais sérios. As técnicas deixam de ser “ferramentas” que, após sua utilização, vão para uma gaveta e ficam esquecidas até uma próxima tarefa.

Os produtos da técnica moderna, longe de se adequar apenas a um uso instrumental e calculável, são importantes fontes de imaginário, entidades que participam plenamente da instituição de mundos percebidos (LÉVY, 1993)

Dessa forma, a utilização de técnica e tecnologia passam a ser empregados como sinônimos para esse autor, uma vez que não é possível, segundo ele, falar-se de técnica, ou de sujeito, ou mesmo do ambiente que o cerca de forma estanque, uma vez que um está tão impregnado no outro que qualquer tentativa de taxonomia se tornaria superficial. Adotamos, na presente pesquisa, a mesma perspectiva teórica de Lévy (1993), utilizando técnica e tecnologia como sinônimos.

Para Lévy, tecnodemocracia é antes de tudo uma ideia e não uma definição. Embora não seja o foco de nossa pesquisa, pode ser importante esclarecer esse termo. Nessa ideia, o paradigma de comunicação e interação social é o digital/midiático, no qual a troca de informações, desenvolvimento de novas técnicas e a produção de conhecimento se dão de forma tão rápida e colaborativa que a consequência é o aprimoramento das relações e fortalecimento das instituições democráticas, tornando assim a produção e compartilhamento de conhecimento mais horizontalizado, dificultando a constituição de sociedades que tendam a flertar com o autoritarismo.

A técnica, em si, não é boa nem má, é apenas uma dimensão de análise, uma abstração, sem qualquer poder de ação em si mesma.

Os agentes efetivos são indivíduos situados no tempo e no espaço. Abandonam-se aos jogos de paixões e embriaguez, às artimanhas do poder e da sedução, aos refinamentos complicados das alianças e das reviravoltas nas alianças. Transmitem uns aos outros, por um sem-número de meios, uma infinidade de mensagens que eles se obrigam a trincar, falsear, esquecer e reinterpretar de seu próprio jeito (LÉVY, 1993. p. 13-14).

É muito comum nos depararmos com posicionamentos radicais nos quais uma técnica mais atual é vista como inferior e, por vezes, contra os costumes estabelecidos na sociedade. Por outro lado, a técnica antiga é vista como guardiã dos verdadeiros valores sociais. Essas mesmas pessoas que, por exemplo, criticam a internet e a utilização de computadores, talvez não dirigissem tal crítica à escrita ou à tipografia, ainda que, com o advento da tipografia, muitos escribas tenham perdido seus empregos, tornando-se duros críticos da nova técnica.

Conforme aponta Lévy (1993), as pessoas que criticam uma tecnologia vista como nova não ousariam criticar uma mais antiga, como a escrita e os livros, por exemplo, pois tais tecnologias são indissociáveis de seu próprio ser. Portanto, não se trata de negar as tecnologias ou técnicas “antigas”, mas, antes, possibilitar uma ligação multidimensional entre elas, de tal forma que uma possa fluir para a outra sem interrupções ou processos estanques. Utilizar e aceitar as novas técnicas não significa esquecer ou abandonar a oralidade ou a escrita, mas sim ressignificá-las em um novo contexto social.

Assim nos parece fundamental que os nossos sujeitos de pesquisa adquiram essa relação com a tecnologia, pois a utilização da mesma pode se dar de forma facilitada, possibilitando um ambiente real de interação e troca de experiências, podendo, assim, estabelecer-se um grupo colaborativo, de tal forma que o conteúdo relativo às cônicas possa ser realmente ressignificado.

Dessa maneira, o **objetivo geral** dessa pesquisa é *investigar as formas pelas quais um grupo de estudos colaborativo, formado por professores de Matemática do Ensino Básico, cria possibilidades para a ressignificação da noção de cônicas, tendo por base o uso de estratégias didáticas com diferentes tecnologias.*

Mediante a elaboração de nosso objetivo geral, formulamos nossa **questão de pesquisa**: *como a organização de um grupo de estudos colaborativo, constituído por*

professores de Matemática do Ensino Básico, pode concorrer para a ressignificação da noção de cônicas, em termos do uso de estratégias didáticas com diferentes tecnologias?

No intuito de alcançarmos nosso objetivo geral, delineamos alguns objetivos específicos, de forma a nortear nosso trabalho:

- *Analisar as interações de natureza síncrona e assíncrona de um grupo de professores de Matemática que participam de uma formação sobre o tema matemático “cônicas” sob os aspectos do próprio conteúdo, das propostas didáticas e do uso de diferentes tecnologias;*
- *Descrever e interpretar os diálogos e propostas dos professores participantes do processo formativo quando buscam aprimorar seus conhecimentos sob o tema matemático em tela e sobre a base de conhecimentos docentes;*
- *Analisar se e como as visões iniciais sobre o uso de tecnologias em estratégias didáticas para o ensino de cônicas se alteram com base em processos colaborativos de formação.*

Para atingir tais objetivos, dividimos o trabalho aqui apresentado da seguinte forma:

No capítulo I, apresentamos a introdução de nosso trabalho, expondo algumas motivações pessoais que geraram o interesse pelo tema em questão. Nesse capítulo, apresentamos um breve levantamento em documentos oficiais, que orientam, de certa forma, o olhar sobre o estudo de cônicas. Nossa questão de pesquisa é, então, formulada e apresentada, bem como os objetivos da investigação.

No capítulo II, realizamos uma revisão bibliográfica, expomos nossos parâmetros de busca por trabalhos; além disso, analisamos alguns dos principais trabalhos encontrados, dentro da temática referida. Dos trabalhos apresentados, nenhum investigou a formação continuada de professores, quando do estudo das cônicas, em ambiente virtual e sob enfoque colaborativo.

No capítulo III, apresentamos nosso referencial teórico, que está fortemente ancorado nos trabalhos de Lévy (1993), sobre as tecnologias da inteligência; de Oliveira (2018), sobre tecnologias e Educação Matemática, em particular abordando

as ideias de fluência, convergência e suas correlações; Mishra e Koehler (2006), que abordam o *Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)*; e Kenski (2013), em diversos aspectos sobre a tecnologia e o trabalho docente.

No capítulo IV, apresentamos nossos procedimentos metodológicos, que se alicerçam em uma perspectiva de pesquisa qualitativa, como pesquisa participante. Definimos os sujeitos da pesquisa e a maneira em que os encontros aconteceram, sendo todos de forma remota, utilizando a plataforma Zoom, em sua versão gratuita. Utilizamos, também, um questionário, elaborado com o intuito de construir um perfil a respeito de alguns conhecimentos dos participantes da pesquisa, acerca do conhecimento matemático sobre cônicas, bem como aspectos pedagógicos e tecnológicos.

No capítulo V, realizamos um estudo do conteúdo “cônicas”, conforme apresentado no livro “Cálculo com Geometria Analítica”, de Earl William Swokowski, amplamente utilizado nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil e no mundo.

Apresentamos, também, algumas abordagens para o estudo das cônicas que não constam do livro mencionado, como o Teorema de Dandelin, a construção das cônicas por tangentes utilizando dobraduras, além da possibilidade de unificação das cônicas por meio de uma abordagem contemplando a ideia de excentricidade.

No capítulo VI, são realizadas as análises dos encontros e confrontados os dados com nosso referencial teórico.

O capítulo VII apresenta nossas conclusões e considerações finais.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção, desenvolvemos a revisão bibliográfica, que foi realizada junto à plataforma de teses e dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior), que é o principal órgão de fomento à pesquisa vinculado ao governo federal brasileiro. Utilizamos, como parâmetros de busca, o descritor “cônicas”, obtendo, assim, 395 resultados, sendo 65 doutorados, 160 mestrados acadêmicos e 186 mestrados profissionais.

Refinando as buscas, utilizamos o filtro com o descritor “grupos colaborativos”, em que obtivemos 119 trabalhos, sendo 43 doutorados, 64 mestrados acadêmicos e 35 mestrados profissionais. Quando utilizamos o descritor “tecnologias digitais” AND “cônicas”, não encontramos registros; para “grupos colaborativos” AND “cônicas”, também não obtivemos resultados; para “formação continuada de professores”, obtivemos 2715 trabalhos, sendo 623 doutorados, 1915 mestrados acadêmicos e 551 mestrados profissionais. Quando utilizamos, em nas buscas, o descritor “formação continuada de professores” AND “cônicas”, tampouco encontramos resultados. Ao utilizarmos “formação inicial de professores” AND “cônicas”, encontramos apenas um trabalho de doutorado, realizado por Ricardo Nicasso Benito (2019) e contemplado na revisão bibliográfica.

Alterando o descritor para “formação continuada de professores” AND “tecnologias digitais”, obtivemos 104 trabalhos, dos quais 28 são teses de doutorado, 84 são mestrados acadêmicos e 33 são mestrados profissionais; alterando o descritor para “formação continuada de professores de Matemática” AND “tecnologias digitais”, encontramos 10 resultados, dos quais 2 são teses de doutorado e 10 são dissertações de mestrado acadêmico.

Objetivando uma ampliação nas buscas, encontramos, no Google Acadêmico, inserindo na busca o termo “*aprendizaje de las cónicas*”, o trabalho de Gomez e Medina (2014), que se tornou parte da revisão bibliográfica.

O Quadro 1 traz as pesquisas selecionadas para compor a revisão bibliográfica:

Quadro 1 – Trabalhos contemplados na revisão bibliográfica

TÍTULO	AUTOR	ANO	NÍVEL	INSTITUIÇÃO
Tradução comentada da obra “Novos Elementos das Seções Cônicas (Philippe de La Hire, 1679) e sua relevância para o ensino de Matemática.”	Neto, Q. F.	2008	ME	UFRJ
O Estudo da Equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ Utilizando o <i>Software</i> Grafeq: Uma Proposta para o Ensino Médio.	Goulart, J. B.	2009	ME	UFRS
Cônicas e Aplicações	Lopes, J. F.	2011	ME	UNESP – Rio Claro
Abordagem e Atividades para a Cônica Hipérbole	Habib, N. C. P.	2013	ME	UFLA
O Ensino das Cônicas Através de Estudos Contextualizados até sua Concepção na Geometria Analítica: Parábola	Pereira, G. P. R.	2013	ME	UFLA
O Estudo das Cônicas a partir da Construção Geométrica	Lenz, M.	2014	ME	UNESP – Rio Claro
<i>Influencia del software educativo GeoGebra en el aprendizaje de las cónicas em los estudiantes de 10° Grado de la institución educativa Simón Araujo</i>	Goméz Mongüa, P. J.: Ruiz Medina, C. A.	2014	ME	Universidad Norbert Wiener – Lima/Peru
Formação Continuada de Professores e a Apropriação das Tecnologias da Informação e Comunicação: o Percuro de uma Intervenção Formativa	Diogo, R. C.	2016	TE	UFMT
Um Mapeamento de Pesquisas Brasileiras sobre o Trabalho Educativo com Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação no Processo de Ensinar e Aprender Geometria Analítica	Júnior, A. J. S.; Lopes, E. M. C.	2017	ARTIGO	VYDIA - Santa Maria
Grupo Colaborativo: Desenvolvimento Profissional, Produção e Ressignificação de Saberes Docentes Para o Ensino de Geometria	Gomes, F. L.	2018	ME	UFAC
Explorando Recursos do GeoGebraBook: O Estudo de Quádricas a partir de diferentes Representações	Londero, N.	2017	ME	UFMS
Construção de um Percuro de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: O Ensino de Cônicas	Benito, R. N.	2019	DO	PUC - SP

Fonte: dados da pesquisa

Encontramos pesquisas que utilizaram tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, ou, ainda, na formação inicial de professores. Tais pesquisas apontam para um padrão, no qual a tecnologia digital é empregada para tornar mais rápidas ou atraentes as resoluções das tarefas propostas. De diferentes maneiras, autores como Tikhomirov (1981), Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018) indicaram que a principal proposta de uso de tecnologias em processos educativos poderia ser a de reconfiguração do pensamento, por meio de construções integradas entre pessoas e interfaces, no sentido de propor e aplicar estratégias didáticas que privilegiassem a aprendizagem com base em interatividade, experimentação, dinamismo e visualização.

Como relatado anteriormente, a quantidade de pesquisas envolvendo cônicas, no âmbito dos programas de mestrado e doutorado em Educação Matemática no Brasil, é bastante restrita. Por outro lado, centenas de trabalhos podem ser encontrados ao considerarmos os mestrados profissionais em Matemática.

Encontramos em Habib (2013) uma proposta de ensino de cônicas que parte de situações manipuláveis concretas para, então, demonstrar as fórmulas canônicas. A pesquisadora relata que “o ensino de cônicas se restringe a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos por trás delas” (HABIB, 2013, p.5). Essa autora fez uma análise de alguns livros didáticos amplamente utilizados nas escolas brasileiras, e percebeu que o estudo das cônicas se dá prioritariamente da mesma forma, com fórmulas sendo demonstradas a partir dos focos, exemplos e exercícios. A atividade de aplicação desenvolvida por Habib (2013) focou na construção de uma hipérbole, juntamente com alunos de Ensino Médio. Os sujeitos de pesquisa utilizaram barbantes, régua graduada, cartolina, cola e tesoura. Após a construção artesanal da curva foram feitas perguntas norteadoras para auxiliar os alunos a abstraírem propriedades dessa curva.

Em sua dissertação de mestrado, Goulart (2009) apresentou uma proposta para o ensino e aprendizagem de parábolas, elipses, hipérbolas e circunferências, utilizando o *software* Grafeq, tendo como referencial metodológico pressupostos da Engenharia Didática. Essa pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Médio, em sete encontros com duração de 90 minutos cada. Essa investigação foi estruturada tendo como instrumento uma sequência didática. Cada encontro foi dividido em dois momentos distintos, em relação aos quais, no primeiro, os alunos tinham contato com

a equação algébrica de cada curva, manipulando seus parâmetros no *software*. Em um segundo momento, esses alunos poderiam replicar, no computador, com auxílio do Grafeq, uma obra de arte, previamente selecionada pelo pesquisador, de tal forma que nessa obra aparecesse evidenciada a curva trabalhada anteriormente.

Durante a primeira parte de cada encontro os alunos ficavam livres para explorar as equações e seus parâmetros, para que, no segundo momento, passassem, então para a parte que efetivamente eles mais apreciaram, que foi a reconstrução da obra de arte. O papel do professor foi essencial na sistematização e deduções das equações utilizadas anteriormente pelos alunos. Essa intervenção do professor se deu entre os dois momentos anteriormente descritos.

Em suas conclusões, o pesquisador relata que foi necessário intervir diversas vezes, no período de exploração do *software* e seus parâmetros, uma vez que os alunos se mostraram duvidosos quanto ao que fazer em seguida e, sem a intervenção do pesquisador, o experimento teria fracassado, sem que os alunos percebessem por si só as potencialidades da atividade.

Segundo Goulart (2009), a utilização do *software* Grafeq permitiu que, de forma dinâmica, os alunos percebessem que círculos, parábolas, elipses e hipérbolas são geradas a partir da mesma equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$. Esse pesquisador reafirma o importante papel do professor, que precisa fazer as intervenções adequadas nos momentos precisos para que as atividades alcancem seus objetivos.

Observando o trabalho de Goulart (2009), percebemos que o *software* foi utilizado de forma a propiciar um dinamismo que não seria possível sem o mesmo. Dessa forma, os alunos puderam manipular os parâmetros da equação geral, observando as consequências e generalizando resultados. A utilização da tecnologia digital com a mediação competente do professor possibilitou um aprendizado que se refletiu na construção das réplicas de obras de arte.

Londero (2017) apresentou, em sua dissertação de mestrado, um estudo, que teve por objetivo construir um material didático virtual, utilizando o GeoGebrabook, que propiciasse a mobilização de diversos registros de representação quando do estudo de superfícies quádricas. A pesquisadora relata o descompasso existente entre a escola e a sociedade, no sentido de que as tecnologias da informação e comunicação (TIC) são amplamente utilizadas pelos agentes sociais, enquanto que

esses mesmos indivíduos, quando contidos no âmbito escolar, não possuem a mesma liberdade e acesso a essas TIC. Apesar dessa, situação Londero (2017) reafirma a importância das TIC no âmbito escolar e do papel do professor nesse processo.

A crescente e perceptível expansão tecnológica atual torna possível que os professores envolvidos com o ensino e aprendizagem de Matemática tenham a possibilidade de potencializar suas aulas através do uso da tecnologia, mobilizando seus alunos de forma diferenciada na direção da compreensão e da construção de conceitos matemáticos. (LONDERO, 2017. p. 40).

A escolha por utilizar, em sua pesquisa, o GeoGebraBook ocorreu devido ao fato deste ser um *software* gratuito e que oferece recursos para a construção de e-books, a inserção de vídeos, arquivos PDF, entre outros.

Como fundamentação teórica, a pesquisa se baseou nos Registros de Representações Semióticas, teoria elaborada pelo pesquisador francês Raymond Duval. A pesquisadora analisou uma série de livros de geometria analítica, utilizados no ensino superior, no Brasil, publicados a partir da década de 1940. Com base nessas análises, a autora elaborou uma série de atividades, com o intuito de propiciar uma melhor compreensão dos alunos sobre a temática e uma melhor articulação entre os diferentes registros de representação semiótica.

A investigação se desenvolveu na modalidade qualitativa, orientada pelos princípios da pesquisa bibliográfica, segundo os pressupostos de Gil (2002). Como resultado, o referido trabalho apresentou a construção de três e-books: o primeiro focou em uma breve descrição envolvendo cônicas; o segundo aborda superfícies quádricas e; o terceiro apresenta doze atividades, incluindo o uso de *applets*, buscando diferenciar as representações, dando ênfase à representação gráfica.

A pesquisadora aponta que a utilização do GeoGebraBook, aliado às construções realizadas no GeoGebra, possibilitaram uma maior transformação de conversão. A maior articulação entre os diversos registros de representação semiótica, seus tratamentos e conversões foram otimizados com o emprego dos *softwares*. Uma sugestão feita para futuras pesquisas consistiu na aplicação dos e-books produzidos junto à alunos da graduação que já tiveram aula de Geometria Analítica. Os e-books encontram-se hospedados no site oficial do GeoGebra.

Lopes (2011) realizou uma investigação histórica sobre as cônicas, atentando para os aspectos geométricos e analíticos e da definição unificada através da propriedade foco-diretriz. Esse estudo foi desenvolvido no ambiente do *software* GeoGebra. Esse autor realizou um estudo em livros didáticos e percebeu que a visão funcional da Matemática abarca também as cônicas: “observou-se também que na maioria destes livros, o esboço das cônicas é obtido considerando-as como gráfico de função, o que dificulta a percepção destas curvas enquanto lugar geométrico” (LOPES, 2011, p. 151).

O autor utilizou em seu trabalho diversas demonstrações das cônicas envolvendo foco-diretriz e relata em suas conclusões que essa abordagem dificilmente é encontrada nos livros de Geometria Analítica. O pesquisador, durante suas intervenções, fornecia aos alunos uma aula na qual eram feitas as demonstrações das equações algébricas das referidas curvas:

É importante ressaltar que a compreensão dos conceitos e das demonstrações foram imprescindíveis para a elaboração das construções através do *software*, por isso, tais construções geralmente aparecem no texto após as respectivas demonstrações ou definições (LOPES, 2011. p. 165).

A utilização do *software* GeoGebra pelo autor se deu após o desenvolvimento teórico do conteúdo, não sendo, assim, utilizado na construção de noções ou na exploração das propriedades das cônicas. A importância e maior relevância do *software* se deu na possibilidade da exploração dos conceitos, anteriormente definidos, agora de forma dinâmica.

As cônicas podem se constituir como uma possibilidade singular para o professor de Matemática, quanto às suas aplicações em outras áreas do saber. Muito tem se questionado sobre a relevância de se aprender determinados conteúdos matemáticos durante o ensino básico. Alguns conteúdos são difíceis de se mostrar como úteis para esses alunos, porém esse fato não ocorre com as cônicas.

Mesmo com toda essa potencialidade de trabalhos, as cônicas são normalmente trabalhadas de forma pouco criativa, ou interessante, do ponto de vista da articulação desse saber com outras áreas do conhecimento. Esse fato pode estar apoiado na visão estritamente Matemática dos docentes, não possibilitando as devidas articulações com a física ou a astronomia, por exemplo.

A ausência de outras visões sobre um assunto pode resultar numa incapacidade do professor em justificar sua importância. O ensino atual de cônicas no Brasil possui uma abordagem normalmente limitada ao universo da Geometria Analítica. A partir da propriedade bifocal, são deduzidas as equações. Além disso, quase nada é apresentado. O reconhecimento de uma elipse, por exemplo, é feito apenas através de sua equação. Nenhuma outra propriedade das cônicas é apresentada, explorada ou provada (NETO, 2008).

Encontramos, em Neto (2008), uma proposta de análise da obra “Novos Elementos das Secções Cônicas”, de Philippe de La Hire, de 1679, na qual o pesquisador procura trazer à luz todas as proposições matemáticas desenvolvidas por esse autor, no que se refere às cônicas. A obra de La Hire (1679) é desenvolvida completamente no plano, na perspectiva da geometria sintética, não fazendo assim utilização do plano cartesiano, buscando estabelecer relações de proporcionalidade entre as curvas e os focos. Neto (2008) sugere que a obra de La Hire teria impactado profundamente a maneira como se dá o ensino de cônicas atualmente e sugere que novos estudos sejam desenvolvidos.

Na dissertação de mestrado de Pereira (2013), a pesquisadora apresenta cinco atividades diferenciadas para serem trabalhadas com alunos do Ensino Médio, relativas às parábolas. É apresentada a construção de parábolas com massinha de modelar, com cone de papel, na construção de uma mesa de sinuca parabólica e de uma antena – no trabalho, essas atividades são detalhadas e até são acompanhados por um “passo a passo” para sua realização; entretanto, na investigação em si, elas não foram aplicadas, não sendo possível, dessa forma, recolher subsídios empíricos.

A autora relata que, em muitos livros didáticos encontrados nas escolas, os alunos são levados à memorização de fórmulas em detrimento da construção do significado das ideias trabalhadas (PEREIRA, 2013, p. 5). Para essa pesquisadora, a utilização de aulas contextualizadas pode permitir aos estudantes a construção de tais significados. Pereira (2013) associa contexto com aulas manipulativas, que trazem elementos do dia a dia dos alunos, não parecendo considerar o contexto matemático como um contexto em si próprio.

Em sua pesquisa de doutorado, Rodrigo Claudino Diogo (2016) realizou uma investigação, no âmbito da formação continuada de professores de Ciências e Matemática, no qual observou a apropriação, por parte destes professores, das TIC

em suas atividades docentes. A mera compra de produtos como computadores, calculadoras, impressoras e *softwares*, não garantem sua boa utilização. Concordando com as experiências relatadas por Lévy (1993), ocorridas na França, Diogo (2016) afirma que “não é suficiente que o computador e as TIC cheguem à escola; é necessário que essas tecnologias sejam integradas ao cotidiano escolar e que se tornem um recurso útil aos professores e, principalmente, aos alunos” (DIOGO, 2016, p. 18).

O referencial teórico utilizado nessa pesquisa foi a Teoria da Atividade, de Leontiev, desenvolvida em uma perspectiva qualitativa. Os encontros com os professores ocorreram por um período aproximado de um ano e oito meses. Dos dezenove professores que participaram da proposta de formação, apenas três estiveram presentes do início ao término da pesquisa.

Os docentes que participaram da pesquisa encontraram dificuldades para utilizar as TIC em suas respectivas salas de aula, uma vez que o emprego dessas tecnologias demandava maior tempo na utilização e na preparação das aulas, conflitando, desta forma, com as obrigações dos currículos estabelecidos.

Dois professores, dentre os três que permaneceram do início ao fim da pesquisa, acreditavam no início que as TIC serviriam para motivar os alunos, mas, ao término da formação continuada, perceberam que a utilização das TIC se tornou essencial no desenvolvimento das atividades e que, sem as mesmas, essas atividades não seriam realizadas.

Como conclusão, o autor relata que houve um incremento nos conhecimentos e utilização das TIC por parte desses professores, embora ainda de forma discreta devido à limitação imposta pelo currículo oficial e que acabou se tornando um elemento limitador para que esses docentes utilizassem com autonomia os recursos tecnológicos estudados.

Encontramos na dissertação de mestrado de Medina e Mongua (2014) uma investigação com alunos do 10º grau de uma instituição particular, *Institución Educativa Simón Araújo*, que buscou determinar as influências que a utilização do *software* GeoGebra gera na aprendizagem desses alunos, quando estudado o assunto “seções cônicas”. Segundo os autores, a pesquisa se desenvolveu em uma

perspectiva descritiva, com a análise das diferentes maneiras pelas quais os alunos resolveram problemas envolvendo secções cônicas utilizando o *software* GeoGebra. Os pesquisadores sortearam 23 alunos, de um universo de 140, e submeteram esses alunos a uma proposta de resolução de problemas utilizando o GeoGebra, enquanto outros 23 alunos tiveram as aulas tradicionais, sem auxílio do *software*, e serviram como grupo de controle.

Os alunos que trabalharam com GeoGebra, em um primeiro momento, fizeram atividades com objetivo de familiarização com o *software*, passando a utilizar o GeoGebra para auxiliar na percepção de propriedades das secções cônicas, para somente após essa experimentação serem introduzidos ao conhecimento das respectivas expressões algébricas. Foi aplicada a ambos os grupos, o experimental e o de controle, uma avaliação de saída, objetivando mensurar o grau de conhecimentos prévios que cada grupo possuía. Ao término da pesquisa, foi aplicado um novo teste, o qual mostrou grande desenvolvimento do grupo experimental, o que não aconteceu com o grupo de controle.

Como conclusão de sua pesquisa, os autores afirmam que a possibilidade de manipulação das figuras, deformando-as sem perda das propriedades que a definem, levou a inferência, a conjectura e a busca pelos conceitos importantes envolvidos.

Foram destacados alguns aspectos desenvolvidos pelo grupo experimental, dentre eles, a dimensão comunicativa. Uma vez proposta a situação, os alunos trabalhando em grupos, exploraram o GeoGebra, compartilhando entre si suas opiniões, formulando conjecturas e buscando uma solução comum ao problema. Além disso, os alunos atuaram em outras dimensões, como a do raciocínio, por meio da qual os alunos buscaram encontrar generalizações; a dimensão do pensamento crítico, quando os estudantes propõem variantes da situação apresentada; dimensão do pensamento criativo, que permitiria aos estudantes, utilizando o GeoGebra, fazerem mudanças nos parâmetros das curvas plotadas, buscando identificar suas regularidades; e a dimensão da solução de problemas, na qual as situações propostas foram efetivamente resolvidas.

Para os autores, a dimensão comunicativa foi essencial para que as demais dimensões se desenvolvessem – essa parte do estudo ocorreu de forma presencial, em sala de aula. Os autores afirmam terem enfrentado algumas dificuldades na

realização da pesquisa devido à limitada oferta de internet na escola e à greve de professor realizada neste ano.

Encontramos, na tese de doutorado de Benito (2019), uma pesquisa que investigou o ensino das cônicas em um grupo de alunos, da formação inicial de professores de Matemática, na Universidade Federal de Sergipe (UFS), tendo como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático. O trabalho investigou de que maneira esses professores poderiam ser auxiliados pelo dispositivo dos Percursos de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores, a questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino a respeito de cônicas. A pesquisa se desenvolveu em uma perspectiva metodológica baseada em princípios da Engenharia Didática, contendo quatro fases. A primeira etapa é considerada preliminar, no qual se realizou as análises praxeológicas, sendo feito um questionamento epistemológico do conteúdo, bem como discutida a necessidade de se introduzir tal conteúdo na escola. Na segunda etapa, foram realizadas as análises a priori e o planejamento matemático e didático das situações de intervenção. Na terceira fase aconteceram as intervenções e as análises, ficando para a última etapa as análises a posteriori.

Seguindo a metodologia eleita para o referido trabalho, foi realizado um Modelo Epistemológico de Referência (MER), envolvendo a geometria das cônicas e um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), tendo sido aplicado em alunos do Ensino Médio e Superior, objetivando a obtenção de elementos para o desenho da formação inicial. Os resultados da pesquisa indicam que a formulação do PEP auxiliou os futuros professores na elaboração de aulas, de modo que a abordagem dada às cônicas extrapolava o domínio da Geometria Analítica e apresentava estratégias de ensino que procuravam romper com o paradigma de visita às obras.

Podemos verificar, também, que outro importante fator apontado pela pesquisa foi de que a metodologia de pesquisa utilizada propiciou estabelecer uma relação dialética entre o MER e o PEP, auxiliando na construção de atividades para a formação inicial, trazendo contribuições para uma reformulação do MER, que, a partir da junção desses dois conceitos, levou à formulação de uma organização praxeológica para o ensino de cônicas na formação inicial de professores.

O autor apresentou o estudo das cônicas por diferentes perspectivas, ou quadros, da geometria: a geometria sintética, geometria analítica e geometria linear.

A geometria sintética é entendida pelo autor como um modelo epistemológico para as cônicas por meio do qual é possível o desenvolvimento do trabalho usando definições, lugares geométricos, focos e retas diretrizes dessas curvas, no espaço e no plano.

No quadro da geometria analítica, o autor identificou uma primeira algebrização de conceitos abordados no quadro da geometria sintética e identificou também que esse é o modelo dominante nos livros didáticos do ensino básico nos estados de São Paulo e Sergipe. Nesse modelo, as cônicas são representadas pela equação do segundo grau com duas variáveis $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, com A, B, C, D e F pertencentes ao corpo dos reais, tendo como restrição $A^2+C^2 \neq 0$, garantindo a existência de ao menos um termo de grau dois.

No quadro da geometria linear, são trabalhadas as ideias de quádricas (rotações). Nesse modelo acontece o emprego da álgebra linear, como autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes. Adicionalmente, o autor apresenta os principais tópicos trabalhados em cada quadro. Na geometria sintética, encontramos cortes no cone, Teorema de Dandelin, excentricidade, construção das curvas por tangentes, cônicas como lugar geométrico e os problemas históricos envolvendo esse conteúdo. Na geometria analítica, temos definição por meio dos lugares geométricos, equação das curvas (foco e reta diretriz), equação geral com duas variáveis e equação reduzida. No quadro da geometria linear, encontramos o estudo das quádricas (rotação) e estudo da equação completa (translação e rotação).

Benito (2019) apresenta um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), em que para sua construção, foi investigado o paradigma de visita às obras, o paradigma de questionamento do mundo e o esquema herbatiano. No paradigma de visita às obras, o aluno é conduzido pelo professor a “visitar” o conteúdo que lhe é apresentado. Essa ideia consiste em que os alunos conheçam o “monumento” sem que compreendam as questões epistemológicas envolvidas, sua real pertinência ou motivações para o seu desenvolvimento.

A analogia com um monumento se traduz no fato de ser algo que existe como um marco, que ninguém questiona, que se visita, tira-se fotos, ou seja, passamos por ele sem levantar grandes questionamentos e o esquecemos assim que o deixamos para visitar a próxima “atração”: “o paradigma de visita às obras vem de uma

pedagogia autoritária que impõe, a alunos e professores o que devem estudar, sem justificar porque deve ser estudado” (BENITO, 2019, p. 118).

Segundo Chevallard (2013), um sistema didático pode ser representado na forma $S(X, Y, O)$, em que X é um conjunto de pessoas que se interessam em aprender sobre determinada obra O , tendo Y como pessoas que auxiliarão neste processo. Nesse contexto, para aprender é necessário que o aprendiz investigue, questione, enfrente qualquer obstáculo que surja no processo, o que, segundo o autor, se constitui em atitudes difíceis de se encontrar atualmente. Os questionamentos que podem ser feitos a partir de O se assemelham muito ao trabalho de um pesquisador, uma vez que hipóteses são levantadas e conclusões refinadas, a todo momento.

Essa atitude esperada por parte dos alunos, em criar hipóteses, refinar resultados e continuar investigando, leva o autor a empregar um esquema didático, que, em homenagem ao filósofo Johann Friedrich Herbart (1776 – 1841), leva o nome de sistema herbartiano, no qual o monumento, ou conteúdo O , é substituído por uma questão de investigação Q , passando a ser representado como $S(X, Y, Q)$.

Na construção de seu PEP, Benito (2019) declara que, para ensinar determinado conteúdo O , o professor poderá ter como base o paradigma de questionamento do mundo, em que seus alunos X possuam condições de desenvolver a atitude herbertiana. Para a construção de um PEP é necessária a escolha de uma questão inicial de pesquisa Q_0 , que propicie as investigações e questionamentos desejados.

O autor elegeu Q_0 como sendo a construção de um fogão solar, proposta instigante para os alunos. Essa construção poderia ser “facilitada” pela disponibilidade de acesso à matéria prima necessária, uma vez que, com o avanço da TV digital, milhares de antenas parabólicas se tornaram sucatas e objetos de fácil aquisição. Diante dos graves problemas sociais que o Brasil e centenas de outros países enfrentam, a construção de um fogão que utiliza a luz solar como fonte de energia apresenta um interesse social que extrapola as dimensões de uma simples resolução de exercícios, ou de visita à obra.

Foi realizada uma análise à priori, elencando-se algumas das possíveis questões que poderiam ser feitas pelos alunos a respeito do tema. Uma das importantes contribuições da análise a priori é possibilitar uma comparação direta do

PEP com MER, propiciando ajustes e direcionamentos. Quando da consecução do projeto, os estudantes poderiam se perguntar quanto à forma da antena parabólica, o que poderia levar o estudo para uma análise no modelo da geometria sintética, definindo cônicas por meio das secções cônicas, ou utilizando a ideia de pontos equidistantes, definindo-a partindo de seu lugar geométrico (foco e diretriz). Ao se analisar a possibilidade deste fogão ter mais de uma “boca”, o aluno precisaria investigar as propriedades reflexivas da elipse e da hipérbole. Quanto aos modelos da geometria analítica e da geometria linear, poderiam ser trabalhados a partir dos temas “posição de instalação do fogão” e “uso”.

Os participantes da pesquisa foram alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Sergipe e alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Sergipe (UFS). Cada grupo participou de três encontros com duração de duas horas cada. Todos os encontros foram desenvolvidos em uma sala de informática da própria instituição.

O autor percebeu que, mesmo quando os sujeitos de pesquisa eram alunos da Licenciatura em Matemática, a abordagem era geralmente por meio da geometria sintética e/ou analítica, ficando, assim, inexplorada a geometria linear. Os alunos apresentaram dificuldades em “quebrar” com o paradigma da visita às obras para se tornarem agentes de suas próprias formações. Elaborar questões, a partir da questão geratriz Q_0 , se mostrou tarefa difícil para esses alunos, que, por vezes, formularam questões que não se vinculavam ou não cooperavam na resolução de Q_0 . Algumas questões elaboradas pelos alunos, como “são necessárias ferramentas de medir para efetuar o redirecionamento do fogão?” foram deixadas de lado por serem consideradas muito difíceis, contrariando a expectativa de que eles se motivariam a buscar soluções para Q_k (questões que surgiram a partir de Q_0).

Objetivando a elaboração de um PEP para ser trabalhado juntamente com alunos da formação inicial, o pesquisador aplicou uma série de questões, trabalho desenvolvido no LEM (Laboratório de Ensino de Matemática) da UFS, com vistas a observar algumas ideias desses alunos quanto a questões concernentes ao ensino, aprendizagem, currículo e epistemologia das cônicas. Em um segundo momento, foi proposto a esses alunos a questão Q_0 sobre o fogão solar.

O monumentalismo se mostrou muito presente nas questões Q_k , apresentadas pelos alunos. Para alguns alunos o motivo para se ensinar determinado conteúdo se baseia puramente no paradigma monumentalista, de visita às obras, e as questões relativas ao questionamento do mundo parecem não ter muita importância.

Por outro lado, estas primeiras questões também apontam para restrições impostas pelo sistema de ensino (dimensão ecológica) que limitam o trabalho com um dispositivo criado para fortalecer o paradigma do questionamento do mundo. Estas restrições se manifestam em questões que ditam a direção que o percurso deve seguir, em particular, aquelas que buscam o conhecimento matemático estrito ao conteúdo a ser ensinado, de forma pontual e monumentalista, sem questionar ou criticar a forma que este conteúdo está apresentado nos livros didáticos, qual a participação do aluno e do professor em sala de aula ou por qual razão é importante ensiná-lo (BENITO, 2019, p. 166-167).

Com o intuito de conduzir os integrantes da pesquisa a “escapar” das garras desse monumentalismo, o pesquisador introduziu algumas questões Q_k , que não foram elaboradas pelos estudantes, mas que constavam nas análises a priori e que seriam importantes para a elaboração do PEP. Essas questões dizem respeito ao conhecimento de documentos oficiais e o que tais documentos apontam sobre cônicas; se o autor dos livros didáticos apresenta alguma razão de ser do ensino de cônicas e se é possível ensinar cônicas com uma razão de ser.

Ao término das atividades propostas, os alunos da graduação perceberam que a questão Q_0 , como construir um fogão solar, conduzia à resposta de vários dos questionamentos feitos. Constataram também a importância de se conhecer, como futuros professores de Matemática, a diferença entre os modelos de geometria sintética, analítica e linear. O trabalho desenvolvido a partir de Q_0 , apresentou o potencial de se desenvolver o estudo das cônicas com vistas aos três modelos de geometria apresentados, possibilitando um questionamento de mundo e um rompimento com o monumentalismo puro. Embora a geometria linear não tenha aparecido em Q_k , juntamente aos alunos da graduação, o conteúdo foi explorado como parte do estudo epistemológico realizado para cônicas:

De uma forma mais técnica, a estratégia de ensino usada pelo PEP-FP, permite que o professor em formação questione o conteúdo proposto nos livros didáticos e, assim, perceba a necessidade de desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência para guiá-lo, tanto nas análises dos livros, como também em suas escolhas

didáticas, além de determinar, de forma explícita, novas praxeologias para um conteúdo já estudado (BENITO, 2019, p. 202)

Os estudantes de graduação que participaram da pesquisa comprovaram essa declaração ao apresentarem em suas propostas de ensino para cônicas, uma abordagem distinta daquelas normalmente encontradas nos livros didáticos.

Encontramos, na dissertação de mestrado (Mestrado Profissional em Rede Nacional) de Mainara Lenz (2014), uma investigação junto a alunos do último ano do Ensino Médio, na qual a pesquisadora, utilizando-se do desenho como ferramenta didática, elaborou e ministrou aulas, tendo por objetivo desenvolver conceitos relativos às cônicas, tendo como princípio a manipulação e construção geométricas.

Os materiais utilizados nas intervenções foram, basicamente, régua não graduada e compasso, possibilitando, conforme as conclusões do trabalho, uma maior compreensão dos alunos sobre ideias básicas envolvidas nas curvas estudadas, principalmente a ideia de simetria.

Os trabalhos desenvolvidos por Lenz (2014) e por Habib (2013) não diferiram muito de trabalhos realizados e apresentados nessa revisão bibliográfica, nos quais pesquisadores utilizam a tecnologia digital em suas aulas de tal forma que poderia ser perfeitamente substituída pela tradicional tecnologia de régua não graduada e compasso. Podemos observar, inclusive, que os resultados alcançados nessas pesquisas parecem se assemelhar bastante.

Nesse sentido, a grande diversidade de *softwares* e aplicativos específicos para o ensino e aprendizagem de Matemática torna indispensável que os professores, mais do que aprenderem conceitos básicos sobre eles, possa desenvolver articulações com essas tecnologias, a tal ponto que, independentemente das variações que o mercado digital ofereça, o professor possa ser capaz de interagir e fazer escolhas adequadas para a sua prática docente. A tecnologia digital deixa de ser uma ferramenta apenas e passa a integrar, a constituir a própria prática do indivíduo, caminhando para a concepção explicitada por Oliveira (2018) como “a tecnologia como extensão de si”.

A tecnologia como extensão de si: consiste no desenvolvimento de competência tecnológica como parte integrante dos repertórios didático e/ou matemático dos sujeitos; inclui o desenvolvimento de *expertise* no uso de diversos recursos tecnológicos e formas de “pensar diferente” a partir do desenvolvimento de autonomia na

construção na construção do conhecimento matemático (OLIVEIRA, 2018. p. 64).

Junior e Lopes (2017) apresentam, em seu artigo, um mapeamento envolvendo dissertações e teses brasileiras que tratam da utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação quando empregadas com o propósito de ensinar e aprender Geometria Analítica.

Das 47 pesquisas encontradas, 17 faziam parte do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, 14 estavam no escopo da Educação Matemática, 8 em Ensino de Ciências e Matemática, 3 em Ensino de Ciências Exatas, 1 em Educação, 1 em Educação de Ciências e Matemática, 1 em Educação Matemática e Ensino de Física, 1 em Educação Matemática e Tecnológica e 1 em Educação nas Ciências.

Dentre as pesquisas investigadas, os autores separaram 4 delas, categorizando-as como “trabalhos inseridos no contexto da Educação a Distância”; todas elas foram desenvolvidas com alunos da graduação em Matemática e a maior dificuldade apresentada apontava para a pouca, ou nenhuma, interação via fóruns e *chats*. Os autores apontam, como principal dificuldade dos participantes, a falta de aptidão para utilizar ferramentas como o *Equation* ou o *Latex*, restringindo assim a comunicação de ideias matemáticas em linguagem algébrica.

Tais trabalhos confirmam as asserções da tese de Santos (2016), que aponta para a necessidade de mais pesquisas que abordem a temática das cônicas. Conforme é possível verificar em Junior e Lopes (2017), a maior parte dos trabalhos estão no âmbito do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e as que tratam do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica em ambiente virtual de aprendizagem possuem, como sujeitos de suas pesquisas, alunos da graduação em Licenciatura em Matemática.

Utilizando como parâmetro de busca no site da CAPES o descritor “PROFMAT” AND “CÔNICAS”, encontramos 5 trabalhos, os quais não constam da presente revisão de literatura por não apresentarem referenciais teóricos e metodológicos compatíveis com os praticados na Educação Matemática.

O trabalho produzido por Francisco Leugênio Gomes (GOMES, 2018), junto à Universidade Federal do Acre, promoveu a constituição de um grupo colaborativo de professores de Matemática, em início de carreira, de tal forma que tiveram a oportunidade de construir e/ou ressignificar conteúdos vinculados à Geometria, por meio das trocas de ideias e interações colaborativas no contexto do grupo formado.

A revisão da literatura aqui efetuada nos possibilitou ter uma ideia mais ampla sobre as pesquisas realizadas no âmbito da Educação Matemática e áreas correlatas que de alguma forma estão ligadas ao tema “cônicas”, por meio de diferentes abordagens. Esse “mergulho” na literatura disponível permitiu que tivéssemos uma ideia mais clara das produções, dos tratamentos dados aos objetos matemáticos ligados ao tema, do uso das tecnologias nesse âmbito e, principalmente, das carências relativas à formação de professores nesse contexto. Também possibilitou o surgimento de reflexões mais aprofundadas em torno das teorias que seriam pertinentes para subsidiar esse estudo, das quais tratamos no próximo capítulo.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Essa pesquisa tem, como principais referências, os trabalhos de Lévy (1993), Oliveira (2018), Mishra e Koehler (2006) e Kenski (2013), dos quais procuramos tratar a seguir.

3.1 Os três tempos do espírito: a oralidade, a escrita e a informática

O autor Pierre Lévy não define a palavra espírito em sua obra, porém entendemos espírito como “essência, ou ideia predominante”, evitando assim qualquer polissemia futura.

Há tempos somos bombardeados com frases do tipo, é preciso utilizar computadores para tornar o ensino mais interessante para o aluno ou os alunos não param de mexer no celular durante as aulas. A questão mais adequada talvez esteja relacionada em como fazer para que as tecnologias digitais possam ser efetivamente incorporadas na vida escolar.

A escola está ancorada em um paradigma que perdura por muito tempo, no qual o professor/mestre transmite seus ensinamentos, esperando que o aluno os assimile em um formato que lembra a mera reprodução. Uma maior integração de tecnologias digitais na escola precisa passar por essa quebra de paradigma, algo que se encontra em processo na época da redação desse trabalho, mas que não pode ser feito em apenas alguns anos.

Para ilustrar essa asserção, pode-se dizer, por exemplo, que a simples aquisição de computadores pelas escolas não resolve o problema. Lévy (1993) relata que a França passou por esse processo e os resultados não foram os esperados. O governo francês fracassou ao implementar tal iniciativa, pois escolheu erroneamente o material, que apresentou avarias em muitos casos, capacitou os professores de forma inadequada, dando muita ênfase a um tipo específico de linguagem de programação, engessando, dessa forma, os trabalhos desenvolvidos e ignorando as potencialidades da ferramenta, minimizando muito a interação dos usuários com a máquina.

O que teria levado a tal fracasso? Será que o governo francês realizou uma pesquisa para averiguar os conhecimentos prévios dos docentes, seu nível de

familiaridade e aceitação ao programa? A ecologia cognitiva e as novas formas de constituição e transmissão do saber foram observadas? Esses fatores não podem ser deixados de lado quando se objetiva transformações profundas no sistema educativo a longo prazo.

Segundo Lévy (1993), aquilo que estava solidamente formatado em termos de configuração do saber desde o advento da impressão no século XVII passou por um processo de redistribuição de seus centros, a partir da reconstrução de suas ecologias cognitivas, possibilitando que as tecnologias intelectuais contribuíssem para profundas mudanças de nossas bases culturais, o que, em última instância, determina nossa apreensão acerca do real. Em termos mais amplos, o autor apresenta uma categorização das tecnologias da inteligência, relacionando-as aos tempos do espírito. Essa categorização não pode ser empregada para hierarquizar grupos sociais, pois as tecnologias da inteligência se situam em transição constante, assentadas que estão em um *continuum* complexo.

3.1.1 Tempo da Oralidade

Ao primeiro tempo do espírito, Levy (1993) chama de *oralidade*, sendo a oralidade primária a condição anterior ao advento da escrita e a oralidade secundária o estatuto da oralidade posterior à escrita.

A função da oralidade primária era não apenas a de comunicação cotidiana, mas também a de perpetuação da memória. A tradição oral foi responsável pela perpetuação de nossa história até o advento da escrita. Nessa sociedade, indivíduos que possuíam grande facilidade de memorização adquiriam uma elevada posição social.

Indivíduos inteligentes eram aqueles capazes de memorizar com precisão muitos dados. Com o surgimento da escrita, essa faculdade deixa de ser tão relevante, uma vez que os registros escritos passaram a cumprir esse papel com maior eficiência. A oralidade não se extinguiu, porém foi ressignificada, passando a ter um papel mais ligado à comunicação diária.

A memória desempenha um papel muito importante no processo de complexificação advindo das tecnologias da inteligência. Podemos encontrar diversos

teóricos que explicam o que é e como funciona a memória. Encontramos, em Fuentes et al (2014. p. 103-114), um estudo que apresenta uma categorização dos tipos de memórias e suas funções.

A memória de longo prazo é aquela que acumulamos, porém que não está disponível tão facilmente para utilização. Um tipo muito conhecido de memória de longo prazo é a memória declarativa, que é caracterizada pela capacidade de arquivamento e recuperação dos dados, relacionando-os às experiências vividas.

Outra forma de armazenarmos dados na memória de longo prazo é por meio da repetição, que tende a não ser tão eficiente quanto a memória declarativa. Na memória de curto prazo encontramos informações que são prontamente resgatadas para utilização, como por exemplo a memória de trabalho, que armazena dados relativos a uma prática diária, ou a memória prospectiva, que traz dados que nos levam a lembrar de ações futuras.

Essa breve apresentação acerca do assunto serve para clarificar a maneira pela qual a sociedade oral fazia uso da memória para gravar informações que precisavam perdurar no grupo social em questão. A memória declarativa era amplamente utilizada, pois, para se memorizar algo, se criava uma história periférica, possibilitando que o conteúdo a ser memorizado ficasse impregnado de todo um campo semântico, recheado por emoções e teatralidade. Esses arquétipos mitológicos que iam surgindo eram repassados de pai para filho, servindo de base moral para a constituição do grupo.

Ainda que redefinida pela emergência de outras tecnologias intelectuais, os reflexos da oralidade ainda se encontram presentes na contemporaneidade, uma vez que parte dos conhecimentos que utilizamos cotidianamente advém de nossa tradição oral familiar. Cozinhamos, geralmente, da forma como nos foi ensinado por nossos pais, e não consultando compêndios de gastronomia; dirigimos de forma empírica, sem que a maior parte de nós, sequer, tenha lido o manual do veículo, mas em função de instruções recebidas em algum momento e que foram faladas por alguém.

3.1.2 Tempo da escrita

Quando surge a escrita? Provavelmente, não obteremos uma resposta específica para essa questão. Encontramos a escrita em diversas civilizações antigas, mas, possivelmente, os rudimentos da escrita, ou pelo menos a utilização de símbolos, teriam surgido concomitantemente com a instituição da agricultura sistematizada.

Com a agricultura, o homem passa a ter a necessidade de planejar, de calcular, de prever, enfim, de esperar. O ritmo muda, pois na caça os resultados são mais imediatos; já na agricultura, é necessário contar com a maturação dos grãos, preparação da terra, clima, contenção de pragas e esperar o tempo da colheita.

Da mesma forma, existe uma mudança de ritmo na tecnologia da informação, uma vez que, na oralidade, a comunicação se dá de forma imediata, o emissor e o receptor atuam de forma praticamente simultânea. Esse fato pode não acontecer na escrita, e geralmente não acontece, uma vez que o indivíduo escreve e o leitor só tomará conhecimento do conteúdo após certo tempo.

No tempo da oralidade primária, o emissor tem a oportunidade de adaptar a mensagem conforme as atitudes do receptor, pode mudar a linguagem, a expressão corporal, ou até mesmo mudar de assunto, se for o caso. Esse tipo de situação não ocorre no tempo da escrita, em que o emissor não tem mais controle do impacto que sua mensagem causará no receptor. A escrita exige um nível de exegese, somente comparada nos tempos da oralidade às mensagens transmitidas pelos oráculos ou profetas.

Do ponto de vista cognitivo, a utilização de símbolos para representar coisas, ou, ainda, a associação de tais símbolos sendo traduzidos por sons, foi um salto significativo em nossa história. A escrita apresenta uma tradição hermética, da qual o leitor, dependendo do grau de erudição da mensagem, necessita se embrenhar no texto, por vezes encontrando significações e possibilidades que sequer o próprio autor havia conjecturado.

Com o passar do tempo se torna cada vez mais árduo o trabalho da leitura. Por exemplo, o leitor atual que se aventura pela obra “O cortiço”, de Aluísio Azevedo, certamente tem um trabalho exegético maior que o leitor que habitou a cidade do Rio

de Janeiro no final do século XIX. Esse fato não ocorria na oralidade, embora seja muito comum à escrita, que com isso se torna cada vez mais suscetível a pequenas, ou não tão pequenas assim, corruptelas semânticas.

Ao separar o emissor do receptor, tanto no espaço quanto no tempo, a escrita traz à luz a ambição da universalidade, ou seja, que suas mensagens possam ser válidas em qualquer lugar ou época, não ficando assim à mercê das variações ocorridas na memória de longo prazo. Agora, é como se todo conhecimento estivesse na memória de trabalho, facilmente acessível e ainda intacto.

Com a mudança da tecnologia da inteligência ocorre uma mudança em toda a sociedade. Na oralidade, o encadeamento das ideias, a retórica e a adaptabilidade imediata às situações eram fundamentais. Com a escrita, a capacidade de sistematização, hierarquização e, por vezes, até de introspecção passam a ser importantes. O teatro, antes tão valorizado pelas apresentações de cânticos e mitos, agora divide seu status com os livros.

Desde o seu surgimento até os dias atuais, grandes foram as mudanças e transformações pela qual passou a escrita. No início os textos eram escritos em tábuas, pedras ou blocos de argila, passando para o uso do papiro e dos pergaminhos. A grande mudança começa com a invenção do livro, sistema no qual o pergaminho é reorganizado em páginas e tem outro formato, o *códex*.

Com Gutemberg, no século XV, e o aprimoramento dos livros, ganhando índices, notas de rodapé, apresentação, sumários, tabelas e gráficos, a sistematização do processo de escrita alcança outro nível, sem o qual a ciência que foi construída sobre um alicerce bastante sólido não teria como sair do empirismo puro e se tornar o que conhecemos hoje.

Esse tipo de organização da informação e do conhecimento alcança sua mais vertiginosa expansão com o advento dos computadores e outros dispositivos eletrônicos, inaugurando, assim, o terceiro tempo do espírito, a informática.

3.1.3 Tempo da informática

Ao lançar um breve olhar sobre a história da informática, obrigatoriamente precisamos mencionar o gigantesco, para os padrões atuais, Eniac, estrela da década

de 40. Esse computador ocupava um andar inteiro de um prédio, e se parecia mais com uma central telefônica, cheio de cabos, que precisavam ser conectados para a programação.

Atualmente, a maior parte das máquinas são pequenas e com o surgimento dos computadores domésticos, as interfaces acabaram se tornando cada vez mais amigáveis. Não é mais necessário se voltar para uma linguagem de programação para interagir com a máquina. As interfaces estão cada vez mais acessíveis e intuitivas, possibilitando ao usuário leigo uma boa interação com os dispositivos.

O fator principal que move esse fenômeno que se apresenta, a informatização, é a digitalização. Tudo passa a ser digital – ou digitalizável. Podemos digitalizar uma imagem e, a partir disso, alterá-la, desmembrá-la, categorizá-la, enfim, criando sistematizações e simulações do real de uma maneira nunca imaginada.

A disponibilidade de armazenamento e compartilhamento de informações supera as previsões mais otimistas de qualquer biblioteca física. A possibilidade relacionada à busca de dados por meio de hiperlinks é mais ampla do que aquelas apresentadas nos livros, por meio de seus textos ou notas de rodapé.

A questão posta não é relativa à velocidade, exatamente, ainda que buscas em bases de dados possam ser mais ágeis e mostrar mais resultados em um tempo mais curto do que as pesquisas manuais em materiais escritos, por exemplo. Nesse sentido, autores como Borba e Villarreal (2005), Oliveira (2018) e, principalmente, Tikhomirov (1981) mencionam as tecnologias como reorganizadoras do pensamento, no sentido em que suas possibilidades criam perspectivas para a compreensão dos objetos de conhecimento, além de dinâmicas diferenciadas. A informática não apenas automatiza as dimensões anteriores da tecnologia da inteligência, mas representa redefinições em várias direções, incluindo outras categorias abertas pela consolidação dos bancos de dados integrados, das redes computacionais e da inteligência artificial, para citar apenas alguns aspectos.

Devemos nos contrapor à informatização? Seremos defensores de uma época em que o tempo era mais retilíneo, as coisas mais previsíveis e a informação mais privilegiada? No tempo da informática as relações se tornaram mais fugazes e a informação é tão difundida quanto a contrainformação, por vezes perdendo o seu

alcance de compartilhamento. Porém, conforme Lévy (1993), podemos aproveitar as boas coisas, que certamente são muitas, desse processo e aprender com ele:

Podemos sempre lamentar o “declínio da cultura geral”, a pretensa “barbárie” tecnocientífica ou a “derrota do pensamento”, cultura e pensamento estando infelizmente congelados em uma pseudociência que não é outra senão a imagem idealista dos bons velhos tempos. É mais difícil, mas também mais útil apreender o real que está nascendo, torná-lo autoconsciente, acompanhar e guiar seu movimento de forma que venham à tona suas potencialidades mais positivas (LÉVY, 1993, p. 119).

As categorias tradicionais da filosofia do conhecimento, o mito, a ciência, a teoria, a interpretação ou a objetividade, são constituídas a partir da utilização devidamente datada e estabelecida temporalmente das tecnologias intelectuais. As mudanças da oralidade, da escrita e da informática como ferramentas de gestão social não ocorrem por simples substituição, mas por complexificação e reorganização dos centros de gravidade.

Da mesma forma que o surgimento da escrita não extinguiu a oralidade, o surgimento da informática não extingue a escrita ou a oralidade, mas propiciou uma transformação e ressignificação dos polos anteriores.

3.2 Fluência e convergência

Encontramos, em Oliveira (2018), ideias que concordam com as até aqui exploradas e desenvolvidas, originadas do pensamento de Levy (1993), no que tange à importância das tecnologias, e, em particular, das digitais, como as materializadas em computadores, tablets, celulares, entre outras, que se apresentam na atualidade e que estão amplamente presentes na vida das pessoas, inclusive, de certa forma, entre os jovens estudantes do Ensino Básico.

Antigos paradigmas perpetuados nos bancos escolares por séculos não atendem às necessidades de aprendizagem das gerações presentes e vindouras. Os tempos e espaços nunca foram tão relativos, e a ideia de agrupamentos e interações sociais tão diluídos e atemporais.

Até certo tempo, quando era solicitada aos alunos a realização de um trabalho em grupo, eles precisavam se encontrar na casa de um deles, na biblioteca ou na

escola: enfim, um encontro físico era inevitável para a realização da tarefa. Hoje, os alunos se comunicam pelas redes sociais, enviam arquivos de áudio e vídeo pelos aplicativos, realizam debates e chats em tempo real ou não, sem precisar sair de suas casas.

Esse novo paradigma de tecnologia da inteligência não é pior ou melhor do que os anteriores. Alguns docentes podem acreditar que a técnica que aprenderam é a melhor, quando não a única possível, no processo de ensino e aprendizagem. Podemos observar, em Levy (1993), que as tecnologias da inteligência não se anulam, ou seja, a escrita não extinguiu a oralidade, bem como os dispositivos computacionais não fizeram nem farão desaparecer a escrita. Esse processo se dá por complexificação, no qual as técnicas passam por um processo de ressignificação e adaptação à nova condição.

Segundo Oliveira (2018, p. 26), “a informática deu à oralidade e à escrita outras formas de manifestação e outras dimensões”. O autor menciona, evidentemente, a tecnologia intelectual assim identificada, uma vez que os dispositivos eletrônicos e computacionais podem, e efetivamente são substituídos de tempos em tempos, tornando-se obsoletos, dependendo de sua dimensão aplicada, ou seja, quanto à utilização de tais dispositivos, já que os novos tendem a realizar as mesmas tarefas de forma mais rápida, econômica e eficaz, além de agregar novas possibilidades de utilização.

Todos já ouvimos frases como “os dias estão passando cada vez mais rápido”, ou “esse ano voou”. A tecnologia da inteligência permeia a sociedade contemporânea condiciona e é condicionada pela cultura vigente. A organização do tempo, de deslocamentos e espaços, parece não seguir a mesma lógica de décadas atrás. A internet faz parte da constituição dos seres humanos que se desenvolveram na malha social e no caldo cultural constituído, principalmente, a partir da porção final do século XX. Ela está presente nas casas, nos estabelecimentos comerciais, nas academias, e, certamente, querendo ou não o professor, na escola.

O que se postula não é a aniquilação da tecnologia da inteligência “antiga”, nem a “demonização” da nova. O que se busca são critérios de convergência, como destaca Oliveira (2018):

Esta substituição se dá, via de regra, por etapas. Tende a ocorrer gradualmente, com velocidades reguladas pela relevância e disseminação da “tecnologia velha” no contexto social, em sua dimensão aplicada. Também pode suceder de forma total ou parcial, em um dado estágio histórico, ao ponto de até mesmo não permitir vislumbrar se de fato fará cessar o recurso à “tecnologia velha” ou se com ela se associará: esta é uma das formas de *convergência*, ou seja, o potencial que determinadas tecnologias possuem, na dimensão aplicada, para serem usadas conjuntamente, em processos mais ou menos integrados, nos quais são importantes as demandas impostas pelas atividades, as aprendizagens desenvolvidas pelas pessoas em relação aos conhecimentos envolvidos e a fluência acrisolada em relação a cada uma das forma de uso dos dispositivos (OLIVEIRA, 2018, p. 27).

Logo, podemos observar que, para esse autor, a convergência é uma possibilidade para se redefinir os papéis de atuação das tecnologias intelectuais. Podemos facilmente observar que atualmente as régulas de cálculo e tábua de logaritmos, tão utilizadas pelos engenheiros do passado, acabaram se tornando peças de interesse histórico, sem utilização prática. A total assimilação de uma tecnologia por outra não é uma regra e, ao contrário das régulas de cálculo, o compasso, a régua comum, o lápis, a lousa, o giz, a borracha, e outros artefatos não deixaram de existir no cenário educativo; porém, com o advento de novos *softwares* dinâmicos de geometria, por exemplo, tornou-se possível um reposicionamento dessas “antigas” técnicas, face às “novas”. Os *softwares* dinâmicos de geometria permitem uma maior articulação entre as diversas representações de um objeto matemático, valendo-se de características como facilidade de visualização, dinamismo das representações e amplas possibilidades de experimentação (OLIVEIRA, 2018).

Esse reposicionamento das antigas técnicas face às novas se dá pelo que chamamos de convergência, palavra que condensa em si termos como imbricações, articulações etc. A Matemática apresenta características muito peculiares em relação às demais áreas do conhecimento humano, pois os aprendizes não trabalham diretamente com o objeto que se pretende compreender, mas, antes, com suas representações: “o acesso aos objetos matemáticos, considerando a possibilidade de visualizar ou intervir de alguma forma sobre eles, se dá somente por meio de representações dos mesmos” (OLIVEIRA, 2018, p. 31).

Reconhecemos, ao menos em um primeiro momento, uma aproximação dessas representações com os recursos computacionais. Faz-se necessário

esclarecer, contudo, que a utilização de tais recursos tecnológicos, para que se alcancem resultados ligados ao aperfeiçoamento das práticas no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática pode ser feito mediante um cuidadoso trabalho de elaboração de estratégias didáticas, que elas concorram para levar “[...] o estudante a pensar, investigar, agir, tomar decisões, conjecturar, discutir, enfim, investigar e propor soluções para problemas que o levem a construir o conhecimento, tendo o professor como orientador, mediador, parceiro e especialista nos temas em foco” (OLIVEIRA, 2018, p. 34).

A evolução dos *softwares* criados para o ensino e aprendizagem de Matemática ocorreu à medida que as interfaces e seus respectivos sistemas operacionais foram se aprimorando e possibilitando ao usuário maiores recursos voltados ao dinamismo, à visualização, à experimentação e à interatividade. Em grande parte, o projeto de interfaces inovadoras como elementos a partir dos quais se pode tomar contato com a representação dos objetos interferiu decisivamente nesse processo. É nesse sentido que Lévy (1993) posiciona a noção de interface:

Interface é uma superfície de contato, de tradução, de articulação entre dois espaços, duas espécies, duas ordens de realidade diferentes: de um código para outro, do analógico para o digital, do mecânico para o humano... Tudo aquilo que é tradução, transformação, passagem, é da ordem da interface (LÉVY, 1993, p. 181).

A interatividade não diz respeito apenas ao ato de interação em si entre o usuário, máquina e todas as implicações técnicas envolvidas, mas, antes, abarca a ideia de comunicação, levando-nos a concluir que, em última instância, interagir é comunicar. Para alcançar tal ideal de interatividade, se faz necessária a utilização de uma interface adequada, permitindo ao usuário uma comunicação simples e eficiente com a máquina.

Nesse nível da interface, o usuário está lidando com a camada mais superficial, tátil, sonora, imagética, artística e simbólica. Essa camada permite ao usuário interessado se aprofundar e “escavar” outras camadas. As possibilidades de comunicação aumentam consideravelmente à medida que as linguagens envolvidas se desenvolvem, possibilitando uma variedade maior de ações. Dessa forma, adentrar no nível das diferentes linguagens de programação, por exemplo, poderia permitir uma

comunicação entre usuário e máquina que iria além daquela oportunizada por interfaces a partir das quais os níveis de intervenção e controle são menores.

Todas as reflexões apresentadas até o momento parecem convidar os educadores a refletir acerca da utilização desses recursos nas escolas brasileiras. Os dispositivos computacionais chegaram às escolas do país há pelo menos duas décadas. A pergunta que reverbera é por que, apesar dos computadores, os resultados das aprendizagens, ao menos quando mensuradas por avaliações institucionais (como o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP) nas escolas brasileiras, parecem não apresentar melhoras significativas?

Certamente não possuímos uma resposta simples a essa questão, mas podemos adiantar que a simples introdução de equipamentos no contexto escolar não possui o condão de efetivar mudanças e evoluções automáticas, o que nos leva a pensar sobre o papel do professor no processo de ensino a partir do uso de recursos computacionais para auxiliar em sua prática.

Encontramos em Oliveira (2018) uma categorização a respeito da mediação entre máquina e seres humanos, desenvolvida por Merrilyn Goos e seus colaboradores (2003), a partir de seus estudos, que nos parece útil para pensarmos nas questões relativas à interação até aqui exploradas, considerando os níveis diferentes em que as trocas podem ocorrer.

Para a autora, pode-se encontrar situações nas quais a tecnologia surge como *mestre*: nesse caso, e no âmbito em que repousam as discussões desse trabalho, a falta de conhecimento matemático pode impedir o usuário de explorar o *software*, limitando-o à superficialidade em suas operações. De outro modo, pode ocorrer que o usuário possua conhecimentos matemáticos suficientes para desenvolver um ótimo trabalho, mas as dificuldades encontradas na utilização do programa acabam se tornando limitadoras para o desenvolvimento de suas atividades. Em ambos os casos, pode ocorrer que o usuário da interface se limite àquilo que lhe é oferecido mais direta e intuitivamente pelo programa, adaptando seu trabalho, de forma reducionista, àquilo que consegue fazer diante de um cenário que vê como repleto de dificuldades.

De outro modo, a tecnologia pode ser vista como *serva*: nessa perspectiva, o professor se utiliza da ferramenta computacional para fazer aquilo que já fazia sem

ela, ou seja, a tecnologia digital passa a ser algo que facilita o trabalho operacional do professor, por tornar mais rápidas, em sua visão, as operações e construções, sem que por isso planeje, para si ou para os estudantes, outras possibilidades de dinamizações e avanços cognitivos. De certa forma o professor continua fazendo exatamente o que fazia na lousa, porém, agora, na tela do computador.

Partindo de outro ponto de vista, a tecnologia pode ser encarada como *parceira*, na medida em que oportuniza algo diferente daquilo que era realizado nas aulas, de forma a permitir interações a partir das quais os estudantes assumam protagonismo em relação à aprendizagem que desenvolvem. Nesse cenário, as discussões ganham espaço e novos ingredientes na construção do conhecimento são acrescentados.

Fechando esse quadro, outra perspectiva seria a da tecnologia como *extensão de si*. Das asserções de Goos, conclui Oliveira (2018):

consiste no desenvolvimento de competência tecnológica como parte integrante dos repertórios didático e/ou matemático dos sujeitos; inclui o desenvolvimento de expertise no uso de diversos recursos tecnológicos e formas de “pensar diferente” a partir do desenvolvimento de autonomia na construção do conhecimento matemático (OLIVEIRA, 2018, p. 64).

Isso implica em que, nessa forma de empregar os recursos, a tecnologia não se configure apenas como um suporte ao ensino, mas como parte integrante da constituição profissional do professor, que possui condições técnicas para utilizar esses elementos a ponto de ressignificá-la e modificá-la conforme seus interesses didáticos e em articulação com seu conhecimento matemático. Percebe-se, desse modo, que as duas últimas categorias descritas demandam maior fluência dos usuários, bem como uma reconstrução/ressignificação de conteúdos matemáticos a partir das novas possibilidades que se abrem com as estratégias empregando tecnologias. Essa articulação leva a pensar de que maneira se poderiam propiciar aos professores oportunidades de formação para que os mesmos possam ter a tecnologia como extensão de si. Nesse sentido, Oliveira (2018) indica que a construção da fluência necessária nesse ponto não ocorre por meio de simples treinamentos na utilização de *softwares*:

No âmbito dos processos educacionais, a fluência pressupõe dois tipos de construção de conhecimento, os quais, em sua configuração ideal, ocorrem simultaneamente – ou em pontos muito

próximos/conectados: a exploração dos elementos da interface e a apropriação da lógica de uso dos recursos disponíveis (OLIVEIRA, 2018, p. 67)

Para o autor, explorar os elementos da interface, um dos aspectos da fluência, significa “desenvolver habilidades em manipular as ferramentas disponibilizadas pelo amplexo tecnológico em relação ao qual se está constituindo alguma desenvoltura” (OLIVEIRA, 2018, p. 67). Relaciona-se com conhecimentos operacionais, ou seja, liga-se a “um saber-fazer técnico/tecnológico, mas que não se desvincula e nem ocorre isoladamente em relação à apropriação da lógica de uso” (p. 68).

A natureza deste saber vincula-se a um caráter exploratório, que articula o saber com a apropriação da lógica de uso. Dessa forma, tal articulação pode possibilitar uma integração entre a perspectiva matemática e a operação da interface. A fluência para o uso das tecnologias passa pelo potencial interativo da interface em articulação com os saberes e seus contextos.

Deste ponto de vista, é o refinamento das perspectivas abertas pela fluência que possibilita a formação de coletivos constituídos por configurações de seres humanos-com-mídias, por meio do desenvolvimento de um saber integrado do uso de tecnologias para a construção do conhecimento matemático (ou sua ressignificação) em um contexto de estratégias de ensino ou trajetórias de aprendizagem. (OLIVEIRA, 2018. p. 68)

O pensar com tecnologias parte da interação entre dispositivos digitais, experimentação, visualização e dinamismo, possibilitando assim uma expansão da própria estrutura cognitiva, ampliando as possibilidades, por exemplo, na elaboração de conjecturas. A utilização de tecnologias digitais possibilita, ainda, o desenvolvimento de trajetórias investigativas, reorganizando o pensamento, tanto em relação ao conceito em si quanto na dimensão didática.

Assim, a interação entre os recursos tecnológicos e didáticos, bem como o conhecimento matemático, possibilitam trajetórias alternativas de formação, podendo passar pelo planejamento e elaboração de planos de ensino, questões sobre avaliação do processo de ensino e aprendizagem, questões burocráticas institucionais, entre outros aspectos. Para representar essas relações, acreditamos que o ciclo (Figura 1) seja a melhor metáfora, pois ele remete a uma ideia de

continuidade e não linearidade: um ciclo parece se retroalimentar, estando em constante movimento e refinamento.

O ciclo se refere às projeções que ocorrem a partir de um processo de constituição ou refinamento da fluência no uso de dispositivos tecnológicos em processos educacionais e as tecnologias envolvidas são todas aquelas de ordem aplicada que têm como referência constitutiva as tecnologias inteligência, digitais ou não digitais. (OLIVEIRA, 2018. p. 70)

Figura 1 – Ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais



Fonte: OLIVEIRA (2018, p. 71)

Conforme indica Oliveira (2018), os elementos deste ciclo não correspondem a programas cronológicos pré-determinados, dependendo assim, das intencionalidades dos sujeitos envolvidos, do planejamento e do conhecimento matemático referencial. Os tempos dos sujeitos são respeitados, propiciando um ambiente de aprendizagem e investigações próprios, o que não necessariamente é alcançado com a utilização de uma tecnologia específica.

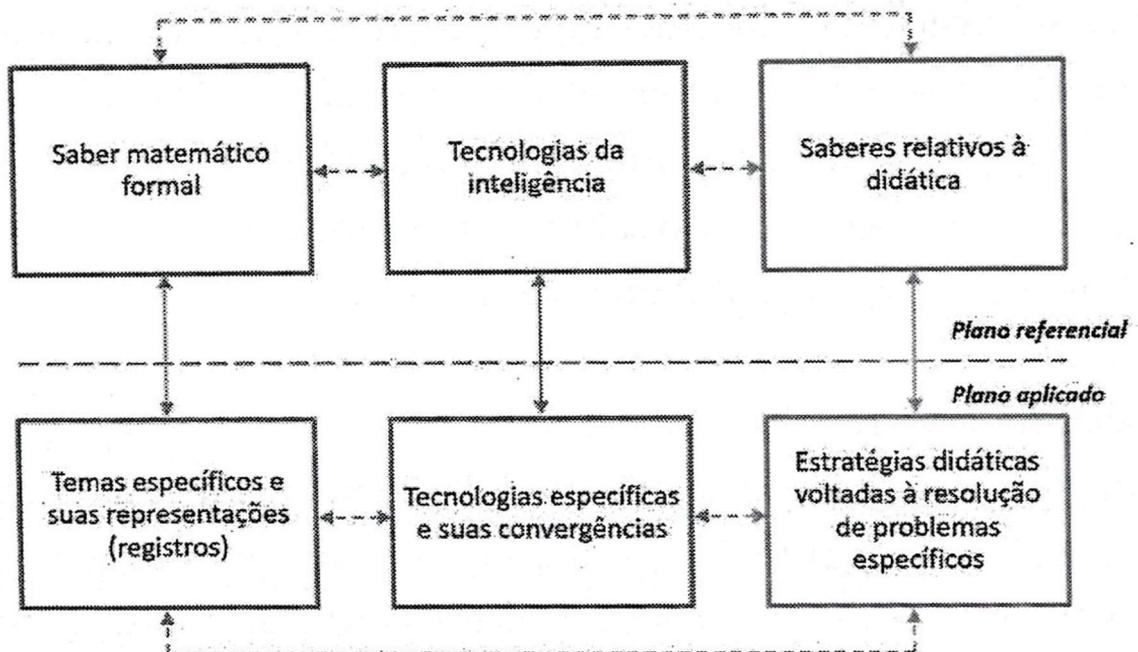
Não precisa envolver uma tecnologia específica ou de apenas um tipo (ainda que isto seja possível), mas, eventualmente, um grupo heterogêneo de recursos tecnológicos, com base na proposta de convergência, a qual, como já se mencionou, tem por referências principais as redefinições promovidas pelas tecnologias da inteligência (OLIVEIRA, 2018. p. 72).

Dessa forma, quando consideramos fluência e tecnologias, não é possível dissociá-las dos campos do saber aos quais se relacionam e, embora possam ser pensadas de forma isolada, não se desvinculam de suas referências.

Ao encaminharem trajetórias por meio das quais desenvolvem e aprimoram a fluência no uso de tecnologias em processos educacionais, alunos e professores podem considerar as possibilidades abertas pela convergência, envolvendo tecnologias de múltiplas naturezas, digitais ou não digitais, cujas referências permanecem conectadas às redefinições promovidas por dinâmicas típicas das tecnologias da inteligência e seus processos de transição. (OLIVEIRA, 2018. p. 75)

A Figura 2 apresenta as articulações relativas à fluência no uso de tecnologias nos processos educacionais.

Figura 2 – Articulações relativas à fluência no uso de tecnologias nos processos educacionais (plano referencial e plano aplicado)



Fonte: OLIVEIRA (2018, p. 76)

No sentido indicado na Figura 2, quando do emprego de tecnologias digitais em processos de ensino, as atividades e resoluções de problemas são marcadas pela existência de dois planos, o referencial e o aplicado, com correspondências mútuas. Os temas específicos, em matemática, no caso, são apresentados por meio de representações que têm por referência o saber matemático formal; essa apresentação

parte da possibilidade de uso de tecnologias adequadas para o trabalho didático com o tema, sejam elas digitais ou não, mas sempre em regime de convergência – tais tecnologias específicas (GeoGebra, lápis e papel, elementos manipulativos etc.) têm por base os princípios consolidados referencialmente pelas tecnologias da inteligência. Finalmente, as estratégias didáticas, elementos fundamentais do processo, são engendradas em relação ao cenário temático específico e impactam na escolha das tecnologias mais adequadas, de acordo com o planejamento – essas escolhas têm por base, no campo referencial, os conhecimentos advindos dos estudos sobre didática, em temáticas de interesse daqueles que promovem o processo de ensino.

A compreensão da ideia de fluência, como indicada principalmente por Oliveira (2018), tem fortes conexões com outro componente teórico, conhecido como TPACK (MISHRA; KOEHLER, 2006), que apresentamos a seguir.

3.3 Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)

Vasta quantidade de pesquisas foram desenvolvidas nos últimos anos no intuito de elaborar e aplicar modelos teóricos que pudessem traduzir e aprimorar a prática docente, quer focando no conteúdo a ser ministrado, quer focando no aprendiz ou, ainda, no meio em que tal atividade ocorre.

Com a evolução das ideias e quadros teóricos, surgiram linhas de estudo que colocaram todos esses elementos em um único corpo argumentativo, um ambiente indissociável e dinâmico, no qual as interações ocorrem e as aprendizagens potencialmente acontecem.

Conforme as ideias apresentadas por Levy (1993) e corroboradas por Oliveira (2018), as tecnologias da informação não compõem uma técnica, no sentido de algo que possa ser guardado e esquecido após seu uso, ao menos não para grande parte dos jovens que integram os sistemas de educação básica no Brasil. A grande questão que se coloca é como propiciar situações aos docentes para que essas técnicas se tornem, também para eles, algo indissociável em sua prática, no sentido assumido por essa fundamentação teórica.

Mishra e Koehler (2006) apresentam um trabalho em que as ideias elaboradas por Shulman (1986) foram estendidas, de tal forma que o modelo apresentado

pudesse incorporar as tecnologias da informação no ensino e aprendizagem de Matemática.

Os autores chamam a atenção para que, primeiramente, atentemos para a maneira em que as tecnologias são empregadas a partir do século XXI. Diversos estudos são realizados pelo mundo e os casos de sucesso precisariam ser estudados, avaliados, repensados e, talvez, reproduzidos. Essa ideia, porém, tem se mostrado ineficaz como generalizadora de bons resultados: casos de sucesso raramente podem ser replicados, dadas as particularidades envolvidas. Para os autores, então, surgiria daí a necessidade de uma teoria que pudesse embasar de forma mais ampla as propostas provenientes de pesquisadores e educadores.

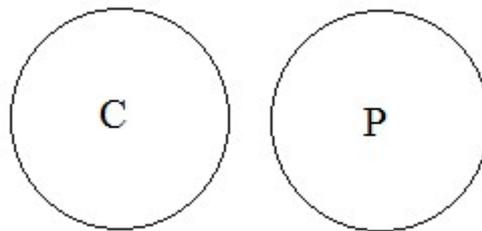
Apesar da necessidade de pensar acerca de um quadro teórico, os autores lembram a impossibilidade de engessar o processo educacional. Esse mesmo processo é vivo e vibrante, não sendo possível engaiolá-lo em uma única teoria. A imagem é muito mais ampla e abrangente do que é capaz de captar qualquer lente teórica. Em outras palavras, o que tornaria tão complicada a tarefa de analisar o processo educacional são as inúmeras variáveis envolvidas. Precisamos levar em consideração aspectos físicos locais, o currículo escolar oficial, o currículo oculto estabelecido socialmente, os professores com suas diferentes formações e crenças, recursos pedagógicos disponíveis, o conteúdo a ser ensinado, a política macro e micro, e, certamente, o aluno.

O ofício docente exige o desenvolvimento de habilidades complexas, que envolvem as variáveis citadas acima, além de outros fatores exógenos que vão desde a saúde do professor e do aluno até a participação dos pais no processo. Por muito tempo, acreditou-se que um bom professor era aquele que apresentava o maior domínio possível do conteúdo específico de sua disciplina, além de uma erudição reconhecida por seus pares, exclusivamente.

Com o desenvolvimento das pesquisas em educação, percebeu-se que apenas esses fatores não eram suficientes para se alcançar bons resultados na prática docente. Era necessário que, além do conteúdo específico da disciplina, o professor também possuísse conhecimentos acerca da forma como os alunos aprendem o conteúdo em questão.

Com essa constatação, houve uma inversão de prioridades e as questões de cunho pedagógico invadiram a formação inicial de professores, como atesta Shulman (1986). Entretanto, o tempo mostrou que conhecimento pedagógico sem um profundo conhecimento da área específica também não era suficiente para o sucesso nos processos de ensino e de formação de professores. A Figura 3 representa como essas áreas eram vistas de forma estanque, sem relação entre elas.

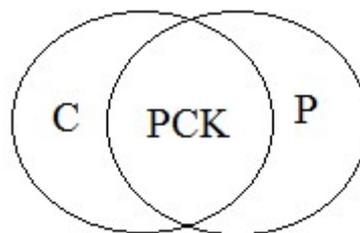
Figura 3 – Círculos representando o Conhecimento do Conteúdo (C) e o Conhecimento Pedagógico (P) vistos separadamente



Fonte: Mishra e Koehler, 2006

Shulman (1986), percebendo essa dicotomia, postula sobre a importância de se relacionar esses conhecimentos, indicando essa possibilidade por meio da proposta de um conhecimento interseccional, o PCK (*Pedagogical Content Knowledge*), conforme traduz a Figura 4.

Figura 4 – Intersecção dos círculos originais, representando o Pedagogical Content Knowledge (PCK)



Fonte: Mishra e Koehler, 2006

O PCK considera como os diversos aspectos e representações de um conteúdo específico são influenciados e transformados pelo ambiente escolar e como os aspectos pedagógicos se relacionam com esse conteúdo a ser ensinado. Cabe ao professor compreender essas interações e fazer as melhores escolhas didáticas para apresentar a seus alunos.

Com base no trabalho desenvolvido por Shullman (1986), Punya Mishra e Matthew Koehler perceberam que um fator muito importante e que poderia ser incluído nesse diagrama diz respeito às tecnologias. Os autores pontuam que as tecnologias, principalmente as digitais, modificaram a dinâmica da sociedade e, por consequência, potencialmente, as salas de aula. Diversos professores tentam incorporar o uso dessas tecnologias em suas práticas docentes, por meio de recursos diversos, como, por exemplo, jogos, planilhas e acesso à internet.

Para Mishra e Koehler (2006), as tecnologias, mesmo aquelas vistas como tradicionais (livros, giz e lousa) até as que apresentam potencial inovador (internet, computadores) podem mudar a natureza da sala de aula já que teriam um papel crítico no trabalho didático, podendo transformar determinado conteúdo em algo mais compreensível para os estudantes. Isso porque o tema não está restrito aos instrumentos e dispositivos tecnológicos em si, mas envolve saberes ligados a técnicas e competências para a utilização desses recursos – trata-se, pois, de um conhecimento específico, uma vez que se encontra em evolução contínua.

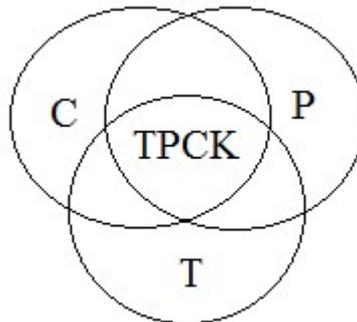
Os autores afirmam que a estabilidade no uso didático das tecnologias deixou de existir, o que resulta em que, durante a atuação profissional dos professores, muitas alterações ocorrerão desse ponto de vista. Assim, ter formação para empregar as tecnologias mais adequadas, considerando aspectos técnicos e didáticos, passou a ser um importante componente no amplexo formado pelos saberes necessários à docência. Como consequência, da mesma forma em que os conhecimentos do conteúdo e didático não podem ser vistos disjuntamente, o uso didático dos elementos tecnológicos pode ser encarado em conjunto, considerando as interseções possíveis com os aspectos que já eram apontados por Shulman (1986). Nesse sentido,

As relações entre o conteúdo (o assunto específico a ser ensinado e aprendido), a didática (o processo e a prática ou métodos de ensino e aprendizagem) e a tecnologia (considerando as tradicionais, como lousas, e as avançadas, como computadores digitais) são complexas e cheias de detalhes. As tecnologias constantemente têm seus

próprios imperativos, que condicionam o conteúdo a ser coberto e a natureza das representações possíveis. Essas decisões têm um efeito cascata, definindo, ou, de outra maneira, condicionando a dinâmica didática e outras decisões de caráter pedagógico. Dessa maneira, não é adequado perceber o conhecimento ligado à tecnologia de forma isolado em relação aos conhecimentos do conteúdo e didáticos (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1025, tradução nossa).

Desta forma, os autores propõem um framework, em que se relaciona os conhecimentos relativos ao Conteúdo (C), Pedagogia (P) e Tecnologias (T), como indicado na Figura 5.

Figura 5 – Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)



Fonte: Mishra e Koehler, 2006

O TPACK é o acrônimo que identifica o Technological Pedagogical Content Knowledge, e que tem, como proposta principal, a visão integrada das dimensões do conhecimento essenciais à atuação docente, considerando, inclusive, as interações que acontecem no âmbito do conteúdo, da didática e das tecnologias. Nesse sentido, uma proposta de ensino teria, por exigência fundamental, a compreensão das relações complexas existentes entre as dimensões mencionadas, o que permitiria desenvolver estratégias e representações pertinentes, considerando o contexto. Isso significa que não existe um uso padronizado dos componentes; assim, os mesmos podem ser compreendidos de maneira conjunta e inter-relacionada.

Do ponto de vista de Mishra e Koehler (2006), não haveria sentido em ver as tecnologias como elemento separado e apenas funcional, principalmente quando se trata do ensino e da formação de professores. Isso implica em dizer que a apropriação das competências típicas para atuação nesse contexto com tecnologias não seria óbvia, nem simples, mas detentora de complexidades típicas, o que eliminaria a

possibilidade de apenas realizar treinamentos sobre softwares. Neste sentido, para Leite (2017), em um cenário de constantes e rápidas mudanças tecnológicas, inclusive na concepção, interatividade e apresentação dos *softwares*, o treinamento puro e simples em determinadas aplicações não seria suficiente para o desenvolvimento das competências relacionadas ao uso, pelo professor, de tecnologias em sala de aula. Tais treinamentos, voltados para uma abordagem do tipo “o que fazer” geralmente não cuidam do aspecto fundamental, relacionado a “como fazer”, incluindo objetivos, métodos e propostas, o que não permitiria desvincular a didática e o conhecimento do conteúdo

Assim, o TPACK seria.

[...]uma emergente forma de conhecimento, que excede seus três componentes (conteúdo, didática e tecnologia). Este conhecimento é diferente do de um especialista na disciplina ou em tecnologia e do conhecimento pedagógico compartilhado pelos professores por meio das disciplinas. O TPACK é a base do bom ensino com tecnologias e requer compreensão da representação de conceitos por meio das tecnologias; técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneiras construtivas para ensinar o conteúdo; conhecimento do que faz conceitos difíceis ou fáceis de aprender e como a tecnologia pode ajudar a corrigir alguns dos problemas que os alunos enfrentam; ciência acerca dos conhecimentos prévios dos alunos e teorias epistemológicas; e conhecimento de como tecnologias podem ser usadas para construir sobre o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1028-1029, tradução nossa)

Para os autores, a proposta permitiria intervir naquilo que representa a falha de certas propostas curriculares: a fragmentação das frentes aqui tratadas em elementos isolados, divididos entre o conteúdo, as propostas didáticas e as intervenções tecnológicas. Assim, na visão dos autores:

Nossa conceituação de conhecimento docente como uma complexa teia de relações entre conteúdo, pedagogia e tecnologia tem implicações significativas para a aprendizagem dos professores e seu desenvolvimento profissional. Nitidamente, a formação que se concentra em apenas um desses itens de cada vez seria relativamente ineficaz em apoiar o desenvolvimento dos professores acerca de uma compreensão de como estas bases de conhecimento se relacionam. Por exemplo, oficinas de tecnologia que se concentram no desenvolvimento de habilidades relativas ao *software* e ao *hardware* não ajudam os professores a compreender como as tecnologias interagem com determinadas pedagogias ou conteúdos específicos. Defendemos que o desenvolvimento do TPACK requer o design de um sistema curricular coerente e não uma coleção de módulos

isolados que se concentram em apenas uma das três bases de conhecimento em um determinado momento. Desenvolver o TPACK requer um sistema curricular que deveria honrar estas relações complexas e multidimensionais por meio do tratamento integrado dos três componentes, em termos epistemológicos e conceituais. (...) A aprendizagem relativa às tecnologias por meio desta abordagem de design tem caráter construtivista e enxerga o conhecimento como situado na ação e codeterminado por interações entre as pessoas e o ambiente (MISHRA; KOEHLER, 2006, p.134, tradução nossa).

Para os autores, o conhecimento tecnológico necessário à prática docente diferia do conhecimento tecnológico adquirido pelos especialistas em tecnologias digitais, assim como do conhecimento específico do catedrático e do conhecimento pedagógico dos educadores. O TPACK inaugura uma área de conhecimento específico, que habita na intersecção desses setores e é de fundamental importância para os professores, que precisam desenvolver estratégias de ensino que se encaixem nesse espaço, a partir dos pressupostos aqui mencionados.

Na continuidade dessas reflexões, caberia, então, discutir mais especificamente sobre a formação dos professores e a influência das tecnologias digitais, o que faremos a seguir.

3.4 Tecnologias digitais e formação docente

Construindo um cenário para suas asserções, Kenski (2013) apresenta questões relativas ao tempo e às concepções de espaços de formação de professores e uso de tecnologias digitais.

As discussões acerca do tempo têm empenhado filósofos desde épocas imemoriais em profundos debates e reflexões. O tempo linear, o tempo relativo, o tempo sentido e vivenciado, enfim, a discussão parece mais atual do que nunca. Vivemos em uma sociedade que parece estar sempre correndo, na qual temos a sensação de estarmos sempre atrasados, ou esquecendo alguma coisa.

As relações de tempo, estudo, trabalho, lazer, descanso, família, parecem ter mudado nas últimas décadas. Há algumas gerações, era possível aprender um ofício com o pai e trabalhar toda uma vida empregando aqueles conhecimentos adquiridos, até que chegasse o momento de ter, por sua vez, um aprendiz, que normalmente era

o próprio filho, e passar adiante aquele conhecimento, como uma tradição, uma espécie de dogma familiar.

Tempos bem definidos, previsíveis, as coisas pareciam funcionar com uma certa cadência que era, por vezes, monótona, e embalava a simplicidade da vida. As pessoas que viveram entre os anos de 1970 e 2000 puderam perceber esse status mudar, gradativamente primeiro, e, depois, de forma cada vez mais rápida. Habitantes de um tempo que parece ter ficado congelado em algum lugar da memória e que não mais pode ser encontrado fora dela, muitos relutam em aceitar os novos paradigmas que se estabelecem, muito embora, com a velocidade que se transformam, talvez nunca cheguem a se tornar novos paradigmas.

Essa mudança de percepção temporal se abate de forma perceptível na vida dos professores. Muitas vezes, os empregadores não percebem que o tempo docente não é constituído apenas dos minutos que compõem sua aula.

O professor planeja suas aulas buscando dados na internet, garimpa fatos correlacionáveis para atualizar e enriquecer seu discurso, participa de grupos de discussões formados por docentes de sua escola, grupos formados pelas diversas turmas em que leciona, grupos de estudo e formação continuada e ainda precisa dispende grande parte do seu tempo em obrigações burocráticas, como diários de classe e outros documentos, que, embora possuam o potencial para se tornarem ferramentas pedagógicas, raramente o são.

Com a presente inserção das tecnologias digitais na escola, tornou-se necessário repensar a utilização do tempo, as propostas de atividades e principalmente o paradigma de “inteligência” adotado. As escolas brasileiras, principalmente aquelas situadas nas principais cidades de cada estado, podem possuir, eventualmente, computadores que poderiam ser usados como recursos didáticos; porém, não é raro que os cenários escolares surjam como se estivéssemos vivendo no tempo da oralidade primária (LÉVY, 1993), na qual a memorização é o principal fator a ser alcançado. Nesse sentido, Oliveira (2007) argumenta que o modelo reprodutor, no qual o aluno é visto como um repositório de conteúdos disciplinares memorizáveis, persiste até mesmo quando são adotadas propostas baseadas em tecnologias digitais. Para o autor, nesse caso, a mera adoção de aparatos de *software* e *hardware*, o uso de redes, de ambientes virtuais ou da Internet

não basta em si mesmo: são necessárias estratégias didáticas que permitam ao aluno escalar a montanha que o separa da autonomia e da participação efetiva em relação à sua aprendizagem. O mesmo autor indica que essas tecnologias não excluem aquelas vistas como mais tradicionais (compasso, régua, lousa) que, redefinidas em relação às possibilidades que apresentam, podem ser usadas com as tecnologias digitais em estratégias que admitam convergência (OLIVEIRA, 2018).

Da mesma forma, percebe-se uma redefinição nos papéis exercidos pelo professor, mas não a extinção de sua atuação. Esse profissional nunca foi tão imprescindível como hoje, considerando, inclusive seu papel crítico em relação à abundância de dados disponíveis em redes informatizadas, e na Internet, em particular. A proliferação de redes sociais e o espalhamento de *fake news*, contendo, por vezes, absurdos e delírios fanatizados, são exemplos de situações nas quais o professor pode argumentar em favor de atitudes mais reflexivas e críticas. Além disso, o docente pode auxiliar nos processos de construção de conhecimento dos alunos, articulando dados e experimentos e empregando estratégias didáticas que usem recursos tecnológicos integrados aos conteúdos a ensinar. Pode, igualmente, possibilitar que seus alunos trabalhem de maneira colaborativa, explorando o potencial de ferramentas digitais com funcionalidades projetadas para esse fim.

Um licenciando, que irá atuar em um espaço educacional tão variado quanto esse, precisa ser formado para atender tal demanda. Essa formação, que se inicia na graduação, vai permear toda a sua vida, por meio de processos continuados, que podem conter, além das providências individualizadas de estudo, cursos nos mais variados modelos. Esses modelos tendem a ser cada vez mais autônomos menos institucionais; neles, seus integrantes exercem papéis cada vez mais colaborativos, de exploração e construção do saber.

Os novos recursos disponíveis nas tecnologias digitais aumentaram a produção e a oferta de cursos em diferenciados formatos: acoplados a celulares (*mobile learning*); pela formação de comunidades de aprendizagem; via redes ou fóruns permanentes de especialistas; por meio de jogos de variados tipos e níveis de complexidade, entre outros. Também oferecem condições para que os próprios interessados em ampliar seus conhecimentos construam suas trilhas de aprendizagem, totalmente personalizadas, de acordo com suas disponibilidades (KENSKI, 2013, p. 60).

O estudo de conteúdos linearizados, a compartimentalização excessiva das diversas disciplinas, suas áreas e subáreas, não atendem mais às demandas de formação pessoal. Quando um aluno busca determinada informação na Internet, muitas vezes ela vem carregada de links, os quais, por sua vez, levam a outras possibilidades de conexão, sendo muito fácil que esse aluno se perca no processo. O professor, em sua figura de orientador, também cresce em relevância.

O mundo não é compartimentado como, por vezes, a escola pode sugerir; tampouco as redes ligadas à Internet, como a *world wide web*, por exemplo, que apresenta uma infinidade de possibilidades de explorações, simulações, jogos e interações pessoais. É necessário repensar as estruturas educacionais estabelecidas, para que se propiciem espaços de aprendizagem significativos e contemporâneos.

É necessário discutir propostas em que convergem princípios educacionais que privilegiam não mais a aquisição de conteúdos descontextualizados e rígidos; não mais o próprio processo regrado e fragmentado de disposição de temas em disciplinas, arranjadas em estruturas fechadas que não dialogam entre si. Ou seja, propostas educacionais que têm no acesso e no uso fluente dos múltiplos meios de comunicação a possibilidade de transpor os limites físicos e temporais das salas de aula e alcançar as pessoas que querem, têm interesse e estão conectadas na mesma sintonia, independentemente do tempo e do espaço em que se encontram (KENSKI, 2013. p. 88)

Essa abertura de possibilidades, que respeita o tempo e o espaço de cada um, envolvendo atividades síncronas e assíncronas, nos parece contemplada, a depender da estratégia didática utilizada, em uma plataforma de comunicação como o Zoom, que possui recursos para realizar chamadas de vídeo para grupos de pessoas, inclusive com versões gratuitas para sessões de até 40 minutos e 100 participantes – além disso, é possível interagir por meio de ferramentas como *chat*, compartilhamento de tela e envio de arquivos. O Zoom não é um AVEA (Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem), mas pode ser empregado como ambiente de interações em ações educativas e de formação, desde que a partir da criação de estratégias didáticas que planejem as ações de modo que sejam efetivamente colaborativas, como é a proposta dessa investigação. Em função da pandemia do COVID-19, que ocorreu a partir de 2020, boa parte das aulas foi transferida do modo presencial para a modalidade

remota, que não se confunde com educação a distância¹; as plataformas criadas para reuniões remotas e *home office*, como o próprio Zoom e o Microsoft Teams, por exemplo, passaram a ser usadas intensivamente para permitir a continuidade das aulas nos diversos níveis escolares. Essa será a ambientação das atividades desenvolvidas por essa pesquisa.

Em relação ao uso de tecnologias em processos de formação, pode-se indicar que o paradigma informacional não é melhor nem pior do que os anteriores, ligados à leitura e à oralidade, conforme indica Lévy (1993): as tecnologias da inteligência se entrelaçam em um processo de complexificação e convergência, e não de substituição dos paradigmas anteriores, conforme indica Oliveira (2018): para o autor, inclusive, o processo não é simples e existem diversos desafios que se apresentam, entre os quais o de conjugar o conhecimentos dos conteúdos específicos a serem ensinados, as estratégias didáticas que venham a servir de base para esse ensino e a fluência nas tecnologias a serem empregadas para ampliar as possibilidades de interatividade, dinamismo, visualização e experimentação que podem ser disponibilizadas para as pessoas envolvidas. Nesse sentido, também, o maior desafio seria o de garantir a aprendizagem de todos como pessoas melhores, para que possam convergir suas atenções e interesses em aprender a lidar com as informações e com as demais pessoas com respeito, civilidade, atenção, cortesia, postura crítica e colaboração (KENSKI, 2013, p. 89).

O professor se encontra em um momento de redefinição de seu papel profissional. Antes, ele era o detentor do conhecimento, o portador das regras e era quem tinha sempre a razão. Hoje, esse conhecimento pode ser constituído a partir de estudo autônomo, usando, entre outras possibilidades, materiais de diversos formatos disponíveis na Internet. Não se trata de substituir o professor, mas de compreender o cenário no qual vive e trabalha, que multiplicou as fontes de consulta e de possíveis

¹ A educação a distância (EaD), nas primeiras décadas do século XXI, prevê o oferecimento de iniciativas educacionais com formato diverso, geralmente, da modalidade presencial, usando tecnologias digitais e com a confecção de materiais instrucionais por conteudistas especializados, sendo esses materiais voltados para o autoestudo; a previsão de realização de atividades assíncronas previamente planejadas e de, eventualmente, momentos síncronos agendados de acordo com cada iniciativa; o atendimento de cursistas por tutores, entre outras características próprias. O ensino remoto prevê, principalmente quando se considera seu caráter emergencial, apenas a transferência das aulas presenciais para alguma plataforma provida por tecnologias digitais que permita interações não presenciais e a realização da aula em formato on-line, com a presença simultânea de alunos e professores geralmente no horário em que a aula ocorreria normalmente – pode, sem dúvida, ser planejada e contemplar estratégias, mas tem formato em natureza bastante diversos da EaD.

questionamentos; ou seja, não é algo que venha desprestigiar a atuação docente, até porque essas possibilidades se encontram abertas também para o professor, mas de perceber como esses recursos podem integrar suas estratégias e ampliar as possibilidades de interação, colaboração, simulação e acesso a realidades que extravasam o espaço habitual da rotina escolar. Assim, a função do professor também passa pela de articulador de conhecimentos, de compartilhador de possibilidades e ligações:

A mudança que se deseja em educação, com a apropriação da nova lógica mediada, não se dá apenas no campo da aquisição e da compreensão das possibilidades dos novos meios. As mudanças são profundas e englobam hábitos, posicionamentos, tratamentos diferenciados da informação e novos papéis para professores e alunos. O foco se desloca para a interação, a comunicação, a aprendizagem, a colaboração entre todos os participantes do ato educativo. Isso tudo precisa ser aprendido e vivido de forma significativa e duradoura para que os professores se sintam seguros na definição de estratégias de ação mediadas pelo computador e pela internet em suas aulas. Para isso, uma disciplina é pouco (KENSKI, 2013. p. 96)

Grande parte do fracasso e decepções que o uso das tecnologias digitais tem proporcionado aos docentes nas últimas décadas se deve em grande parte à falta de preparo desses profissionais em compreendê-las e articulá-las, bem como à ausência de estratégias didáticas que explorem o potencial das interfaces disponíveis para ampliar formas de acesso, comunicação e interação entre as pessoas (OLIVEIRA, 2018).

Outro ponto a se considerar é que as tecnologias digitais, quando empregadas em uma sala de aula, não devem reproduzir a mesma prática secularmente estabelecida. A utilização de um computador, por exemplo, não pode ser apenas para fazer mais rápido aquilo que já se fazia na lousa. A tecnologia, para ser utilizada de forma eficiente, pode ser utilizada a partir do princípio de convergência (OLIVEIRA, 2018), anteriormente explicitado, e não apenas como uma ferramenta para reproduzir o mesmo padrão de procedimentos.

Para que o professor trabalhe de forma eficaz em um ambiente virtual de ensino e aprendizagem (AVEA) ou com uma plataforma de comunicação, como é o caso dessa pesquisa, não é necessário que ele se torne um *expert* em *softwares*, mas, antes, que reconheça as ferramentas e potencialidades disponíveis a partir desses

recursos. Para isso, ele precisa dominar o conteúdo que deseja ensinar, bem como desenvolver estratégias didáticas que permitam abordar os temas. Na visão de Mishra e Koehler (2006), ao articular tais fatores, o docente pode criar um ambiente com maior potencialidade de criar condições para uma aprendizagem efetiva. Além disso, os mesmos autores indicam que a velocidade com que novos *softwares* são criados é muito grande e criar cursos de formação em tecnologias para professores não é o melhor caminho: as novas propostas acabam alijando as anteriores do cenário, o que poria em risco todo o processo.

Além disso, os autores mencionam que ver o aspecto tecnológico da ação e da formação docente separado dos aspectos didático e de conteúdo é um erro, por proporcionar uma perspectiva fragmentada, na qual as tecnologias seriam apenas uma ferramenta e seu uso não traria maiores consequências, seja qual fosse a forma pela qual fosse feito. De fato, as tecnologias poderiam alterar a forma como a sala de aula funciona, e isso inclui mesmo as tecnologias vistas como antigas/tradicionais, como giz e lousa, por exemplo. Entretanto, as tecnologias digitais alteraram a noção de estabilidade de saberes relacionados ao seu uso didático, que se altera bastante com o passar do tempo. De todo modo, a integração desses três pilares (conteúdo, didática e tecnologias) concorre para tornar o ensino de determinado tema mais compreensível. Dada essa integração, o simples treinamento de professores para usar determinadas tecnologias ou interfaces perderia o sentido. Para os autores, então:

As relações entre o conteúdo (o assunto específico a ser ensinado e aprendido), a pedagogia (o processo e a prática ou métodos de ensino e aprendizagem) e a tecnologia (tanto as tradicionais, como lousas, como as avançadas, como os computadores digitais) são complexas e cheias de nuances. As tecnologias frequentemente trazem seus próprios imperativos, os quais condicionam o conteúdo a ser coberto e a natureza das possíveis representações. Estas decisões têm um efeito cascata, definindo, ou, de outro modo, condicionando a dinâmica didática e outras decisões pedagógicas. Assim, não é adequado ver o conhecimento relativo à tecnologia de forma isolado em relação aos conhecimentos do conteúdo e da didática (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1025).

O quadro de asserções teóricas formado por essa proposta integradora ficou conhecido como TPACK, como já mencionamos, um acrônimo que poderia ser traduzido por conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo. Trata-se de uma

proposta construtivista, como alegam os autores, que levaria a enxergar o conhecimento docente “como uma complexa teia de relações entre conteúdo, pedagogia e tecnologia” e que teria, nesse sentido, “implicações significativas para a aprendizagem dos professores e seu desenvolvimento profissional” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 134). Assim, as propostas formativas que se concentrassem em apenas um dos componentes dentre os três necessários resultariam em iniciativas que privilegiariam a fragmentação, em detrimento da integração necessária.

Em termos práticos, atualmente, os docentes possuem diversas opções de formação continuada. Normalmente, acabam aderindo àquelas que chegam a eles de forma institucional. Não raramente, porém, esses cursos não levam em conta a especificidade da região, ou escola, e acabam fornecendo abordagens gerais, que embora interessantes, acabam não atendendo às necessidades reais desses professores.

Pensando na proposta formativa patrocinada pelo TPACK e nas observações sobre desenvolvimento de fluência em tecnologias e em estratégias didáticas, é necessário que se estabeleça um “lugar” de formação que respeite o tempo de cada professor, que atenda suas necessidades e que possa tê-lo como participante ativo, agindo e interagindo, com o sistema e com os outros, tornando-se agente de sua própria formação.

O processo de formação docente é contínuo, não se esgota. Realinhamentos permanentes são necessários, mas, nem sempre, se dão por meios de iniciativas formais e estruturadas de ensino. A abertura para novas possibilidades de formação docente garante a otimização dos tempos desses profissionais e a qualidade do sistema educacional (KENSKI, 2013, p. 145).

Apontamos para as potencialidades que um grupo colaborativo de professores tem para ressignificar conteúdos e práticas, trabalhando de forma ativa e com o máximo de autonomia possível. Falamos disso nessa pesquisa, cuja abordagem metodológica apresentamos a seguir.

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Desenvolvemos essa pesquisa mediante uma abordagem qualitativa, buscando investigar as interações de um grupo de professores de Matemática que convivem em uma plataforma de comunicação geralmente empregada também para aulas online, objetivando a ressignificação do conteúdo matemático conhecido como “cônicas”.

O paradigma de pesquisa adotado é o da “pesquisa participante”, na qual o pesquisador se insere entre os participantes, se tornando mais um membro de suas atividades, porém não interferindo demasiadamente nos trabalhos realizados. Seu papel é mais de observador e, conforme a necessidade se apresente, intervindo de forma pontual. A pesquisa participante é aquela

[...] em que o pesquisador, para realizar a observação dos fenômenos, compartilha a vivência dos sujeitos pesquisados, participando, de forma sistemática e permanente, ao longo do tempo da pesquisa, das suas atividades [...] Observando as manifestações dos sujeitos e as situações vividas, vai registrando descritivamente todos os elementos observados bem como as análises e considerações que fizer ao longo dessa participação (SEVERINO, 2007, p. 120).

Subsidiariamente, para análise das interações, empregamos a proposta de Erickson (1989), pautada na abordagem descritiva e interpretativa. Essa proposta é bastante promissora na análise de ocorrências que o autor chama de “locais”, ou seja, cujo significado, à luz das teorias escolhidas, deve ser pensado em um contexto de ocorrências específicas para o grupo em análise. Segundo o autor, ainda, a explicação da causa das ações humanas deve incluir a identificação das interpretações de significado dos sujeitos. Assim, o ponto de vista interpretativo conduz o pesquisador a formular perguntas diferentes daquelas que se produzem sob o enfoque positivista nas pesquisas sobre o ensino, perguntas estas que se deslocam do foco na conduta e detêm-se sobre os significados, inclusive do ponto de vista dos atores.

A investigação envolvendo pessoas nunca é tarefa simples. Assim, para auxiliar na elaboração do ambiente da investigação, utilizamos uma entrevista estruturada para o estabelecimento de algumas diretrizes e rumos. Tal entrevista foi vista como indispensável face à escassez de pesquisas envolvendo o tema, como foi detectado

em nossa revisão bibliográfica, o que confirmou apontamentos desse tipo que já haviam sido indicados em pesquisa anterior (SANTOS, 2016).

Adotamos a perspectiva de entrevista estruturada apresentada por Severino (2007), que define esse recurso de levantamento de dados como:

[...] aquelas em que as questões são direcionadas e previamente estabelecidas, com determinada articulação interna. Aproxima-se mais do questionário, embora sem a impessoalidade deste. Com questões bem diretivas, obtém, do universo de sujeitos, respostas também mais facilmente categorizáveis, sendo assim muito úteis para o desenvolvimento de levantamentos sociais (SEVERINO, 2007, p. 125)

Os sujeitos dessa investigação são quatro professores de Matemática, habilitados para exercerem a profissão e que lecionam na rede pública ou privada de ensino no Estado de São Paulo – com o objetivo de preservar seu anonimato, optamos por nomeá-los como P1, P2, P3 e P4.

Embora o conteúdo “cônicas” seja contemplado apenas nas séries finais do Ensino Médio, existe uma grande movimentação entre os professores nas escolhas de aula todos os anos. Dessa forma, o professor que atualmente leciona no Ensino Fundamental, poderá, nos anos seguintes, trabalhar com esse conteúdo no Ensino Médio. Além disso, é esperado que o professor que ensina Matemática e que é oriundo de uma formação em licenciatura nessa especialidade detenha conhecimentos acerca desse tema.

Assim, o ambiente da pesquisa foi composto pelos professores mencionados e pelo próprio pesquisador, que, segundo o delineamento e tipo de pesquisa adotados, participou das atividades, observando, instigando e, principalmente, analisando os trabalhos e interações.

De acordo com os objetivos traçados inicialmente para esse trabalho, os sujeitos da pesquisa deveriam constituir um grupo colaborativo; assim, a expectativa era a de que todos desempenhassem um papel atuante, não linear ou hierarquizado, buscando participar, interagir, pesquisar e contribuir com as propostas apresentadas de forma ativa. Nesse sentido, a colaboração assume uma característica típica, que não pode ser confundida, por exemplo, com a cooperação. Encontramos, em Fiorentini e Lorenzato (2006), uma clara diferenciação entre essas ideias, em relação ao significado que sustentam.

Assim, na *cooperação*, alguns ajudam os outros (co-operam), executando tarefas cujas finalidades geralmente não resultam de negociação conjunta do grupo, podendo haver subserviência de alguns em reação a outros e/ou relações desiguais e hierárquicas. Na *colaboração*, todos trabalham conjuntamente e se apoiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo (FIORENTINI; LORENZATO, 2006. p. 115).

Entendemos que a constituição de um grupo colaborativo de professores não é tarefa fácil, pois, como relata Kenski (2013):

Um dos pontos mais presentes, descobertas nas pesquisas e ações que realizei, é que os professores se esforçam de forma isolada para atender às necessidades propostas pelo ensino *on-line*. Da mesma forma como atuam solitários nas aulas presenciais, os professores se fecham “em si”, para a viabilização de suas aulas nos AVAs (KENSKI, 2013, p. 14).

Atendendo aos pressupostos supramencionados, elaboramos o roteiro com as perguntas a serem feitas na entrevista estruturada, que ocorreu junto aos professores com o intuito de subsidiar a formação do grupo colaborativo. Cada questão foi pensada de forma a levantar dados acerca do perfil profissional do professor participante da pesquisa – mais adiante, inclusive, as correlações entre as características do ambiente de pesquisa e as questões presentes no instrumento ficarão mais claras.

Além disso, a partir das respostas às questões, importantes informações sobre as crenças e saberes desses docentes emergem, o que possibilitou um melhor delineamento do ambiente virtual utilizado na sequência da pesquisa, de forma efetiva e contextualizada, ou seja, pensado especificamente para esse grupo de professores. Esse pressuposto se justifica devido à importância de discussões como a do conhecimento docente acerca do conteúdo que ensinam, e de como as pesquisas podem aprofundar discussões nesse sentido:

Os estudos sobre os saberes profissionais do professor, até início dos anos de 1990, têm revelado baixos níveis de compreensão e domínio do conhecimento matemático a ser ensinado. Relacionado a esse problema, ainda continua em alta o debate sobre que tipo de conhecimento matemático deve ter o professor e como deve combiná-lo com seu conhecimento pedagógico. Se a pesquisa não pode decidir sobre isso, pelo menos ela pode aprofundar nossa compreensão sobre como os professores utilizam e mobilizam os conhecimentos quando ensinam matemática em sala de aula. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006)

A entrevista aplicada buscou, adicionalmente, identificar características da formação inicial, prática docente e um pouco das concepções que esses professores possuem sobre a utilização das tecnologias digitais e seus respectivos empregos no ensino e aprendizagem de Matemática. Assim, o roteiro foi constituído por 12 questões (apêndice 1), com 4 delas relativas à formação inicial, pós-graduação e formação continuada (questões 1, 2, 5 e 8), 1 questão sobre o tempo de experiência docente (questão 3), 1 questão que investiga os níveis de ensino em que atuam (questão 3), 3 questões que buscam detectar algumas impressões que esse docentes apresentam sobre o ensino a distância (questões 6, 7 e 9), 2 questões sobre o conteúdo “cônicas” (questões 8 e 10) e 3 questões envolvendo a experiência desses professores com as tecnologias digitais em sala de aula e com o ensino de cônicas (questões 9, 11 e 12).

Apresentamos, no Quadro 2, um resumo dos resultados obtidos com a aplicação dessa entrevista; esses resultados foram utilizados na elaboração e proposta do ambiente da pesquisa, no qual os professores trabalharam colaborativamente com o tema matemático “cônicas”. Após o quadro, elaboramos uma pequena análise descritiva das respostas obtidas.

Quadro 2 – Respostas ao questionário aplicado aos professores participantes

	P1	P2	P3	P4
Formação	- Licenciatura em Matemática - Pedagogia	- Licenciatura em Matemática - Pedagogia Licenciatura em Ciências Biológicas	- Licenciatura em Matemática - Pedagogia - Bacharelado em Ciências Contábeis - Pós-Graduação em Metodologia do Ensino da Matemática	- Licenciatura em Matemática - Licenciatura em Ciências Biológicas
Tempo de docência (Matemática)	Entre 2 e 5 anos	Entre 11 e 20 anos	Entre 11 e 20 anos	Entre 2 e 5 anos
Níveis de ensino em que leciona	Ensino Fundamental (6° ao 9° ano)	Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Fundamental (6° ao 9° ano)	Ensino Fundamental e Ensino Médio
Já participou de formação continuada?	Não	Sim, muitas vezes.	Sim, algumas vezes.	Cursando Pós-graduação em Ensino da Matemática
Participou de cursos não presenciais?	Não	- Formação para ensino de aceleração; - Formação para Ensino Fundamental (ensino de Matemática);	- Avaliação educacional; - Inova educação; - Matmídias; - Mediação escolar e comunitária; - Transtornos globais do desenvolvimento.	- Geometria e números racionais.

Opinião sobre cursos não presenciais	Requer muita dedicação e tempo do aluno, para compensar as lacunas deixadas pelos professores.	Alguns cursos foram bons para a prática profissional, outros foram mal planejados, uma perda de tempo. O sucesso depende do aluno, o problema é manter a rotina de estudos.	Cursos que agregaram conhecimentos para o dia a dia, além de proporcionar flexibilidade de horário, possibilitando a conciliação entre estudo e trabalho. O aluno precisa ser autônomo, persistente, sabendo organizar seu tempo, onde o professor funciona mais com um mentor.	É bom. Depende só de você para que tudo corra perfeito. Dedicação, foco e determinação. É bom porque muitas vezes não conseguimos ir para uma faculdade presencial por conta do tempo e condição financeira.
O tema cônicas já foi abordado em alguma capacitação ou pós-graduação que você estudou?	Não	Não	Não	Não
Usou recurso de tecnologia digital em suas aulas?	Não	Mathema na resolução de problemas. O maior problema é que a sala de informática raramente está disponível para uso.	Sim, o celular para construção de gráficos de funções. Os alunos gostaram da aula diferenciada, ocorrendo uma melhor aprendizagem do conteúdo.	Utilizo sim, quando tenho recursos na escola.
Como estudante em que níveis estudou o tema cônicas?	Ensino Médio e Ensino Superior	Ensino Médio e Ensino Superior	Ensino Superior	Ensino Médio
Você já ensinou cônicas?	Não	Sim, no Ensino Médio	Não	Não
Qual o maior problema, por você enfrentado no ensino de cônicas?		Falta de conceitos básicos de geometria, número de aulas insuficiente e falta de materiais para uma prática eficaz.		

Fonte: dados da pesquisa

O professor P1 leciona nas séries iniciais do Ensino Fundamental e trabalha com reforço escolar para todo Ensino Básico. Possui menos de cinco anos de experiência docente em Matemática, atuando na rede privada de ensino. O professor P2 leciona Matemática há mais de dez anos e trabalha na rede privada, atuando nos anos finais do Ensino Fundamental e é professor titular na rede estadual de São Paulo, atuando como docente no Ensino Médio. O professor P3 também possui experiência superior a dez anos e leciona a disciplina de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, em escolas da rede privada e pública do Estado de São Paulo. O professor P4 possui experiência que se enquadra na faixa de 2 a 5 anos e atua como

docente nas séries finais do Ensino Fundamental. Os professores P1 e P4 fizeram sua formação inicial em Matemática, na modalidade EAD (ensino a distância); já os professores P2 e P3 fizeram formação inicial na modalidade presencial – todos os sujeitos da presente pesquisa são formados por instituições privadas brasileiras.

Observando os dados obtidos com o questionário, pudemos perceber que dois professores são graduados em Pedagogia, além de possuírem Licenciatura em Matemática, e o professor que não é pedagogo está cursando pós-graduação *lato sensu* em Ensino de Matemática, o que revela uma importante característica desses indivíduos, que é a preocupação em obter formação em áreas da educação, provavelmente como forma de colher subsídios para a prática.

Os sujeitos possuem diferentes tempos de experiência docente, sendo que os dois que apresentam menor tempo de docência são graduados em Matemática na modalidade EAD. Apenas os professores P2 e P4 lecionam atualmente no Ensino Médio, sendo que os demais lecionam no Ensino Fundamental, podendo vir a lecionar no Ensino Médio em anos futuros.

Os professores P1 e P4 ainda não participaram anteriormente de formações continuadas, embora P4 esteja fazendo pós-graduação *lato sensu*. Por sua vez, P2 e P3 já participaram de diversas formações continuadas, sendo que a maioria delas oferecidas pela Secretária de Educação do Estado de São Paulo para os professores que compõem a sua rede de ensino.

Quanto às concepções que esses professores revelaram a respeito do ensino a distância, notamos que todos acreditam que o sucesso do curso depende do aluno, de sua dedicação e autonomia. O papel do professor, nos moldes de uma aula tradicional, é questionado por P3 que classifica o professor como um mentor. O professor P1 relata que o aluno precisa ser muito dedicado e utilizar muito tempo para suprir as lacunas deixadas pelos professores. Tal opinião parece discordar daquela emitida por P3 para a mesma questão, já que este entende o papel do professor como o de um orientador – ou seja, não seriam exatamente lacunas deixadas pelos professores, mas espaço à autonomia discente. Uma característica importante colocada por P3 é a liberdade de horários que este sistema permite, facilitando a conciliação entre estudos e trabalhos. Encontramos em P4 uma forte afirmação de que a condição financeira interfere diretamente na escolha por essa modalidade de

ensino. Todos, enfim, reconhecem pontos positivos e negativos na modalidade de ensino a distância.

Quanto ao conteúdo matemático “cônicas”, todos os sujeitos da pesquisa são unânimes em relatar que esse tema jamais foi abordado em iniciativas de formação continuada por eles vivenciadas. Dos quatro professores participantes, apenas P3 alega não ter estudado cônicas no Ensino Médio, mas sim na graduação. Os outros professores estudaram cônicas no Ensino Médio; além disso, P4 alega não ter estudado esse conteúdo no Ensino Superior.

Quando olhamos para as questões que envolvem a prática docente, percebemos que apenas P2 já ensinou o conteúdo cônicas, porém sem relatar suas experiências pessoais. Quanto ao uso de tecnologias digitais em sala de aula, encontramos P2 e P3 como professores que já se utilizaram de tais recursos. O professor P2 utilizou o Mathema na resolução de problemas com seus alunos do Ensino Médio, porém relata que sua utilização se mostra inviabilizada no cotidiano escolar devido à recorrente indisponibilidade da sala de informática. O professor P3 utilizou o celular na construção de gráficos de funções, porém não explicitou o *software* utilizado. Esse professor relata que os alunos gostaram da aula diferenciada, ocorrendo uma melhor aprendizagem do conteúdo.

O professor P2 relata como principais dificuldades no ensino de cônicas a falta de conceitos básicos de geometria, o número insuficiente de aulas e a falta de materiais para uma prática eficaz. Esse relato de P2 vai ao encontro dos apontamentos provenientes de nossa revisão bibliográfica, nos quais foi possível perceber que o conteúdo “cônicas” é colocado no final do currículo, ficando a critério do professor julgar sua relevância.

Com base nos dados obtidos e nos estudos realizados para construção desse trabalho, elaboramos situações que apresentam o potencial de contribuir para a formação do grupo colaborativo no ambiente virtual da pesquisa, o Zoom, cujas principais características já foram explicadas anteriormente.

A proposta foi dividida em quatro encontros. Apresentamos, a seguir, a ideia central de cada um deles e, posteriormente, exploramos as ocorrências observadas neles no capítulo VI, onde, efetivamente, foram realizadas as análises.

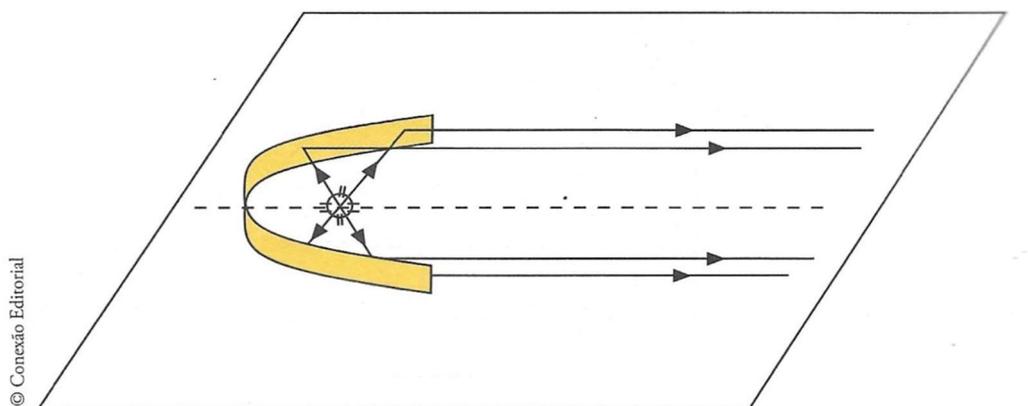
Encontro 1

Com o objetivo da formação de um grupo colaborativo, esse primeiro encontro visou o estabelecimento de um primeiro contato entre os integrantes da pesquisa e o pesquisador, no ambiente virtual Zoom, tendo o pesquisador como anfitrião. Os sujeitos conversaram livremente sobre suas impressões a respeito do conteúdo “cônicas”, sua relevância no currículo de Matemática, suas percepções sobre o interesse dos alunos quando esse conteúdo é ensinado e sua familiarização com ele.

Esse primeiro encontro teve um caráter mais de socialização de experiências e compartilhamento de crenças e o pesquisador optou em permanecer a maior parte do tempo em silêncio, criando assim um local de escuta e liberdade de expressões. Esse primeiro momento se justifica pelo desejo de se constituir um grupo colaborativo e a troca de experiências e perspectivas educacionais parecem favorecer essa constituição.

Ao término desse encontro, o pesquisador propôs uma atividade para a próxima reunião, na qual os professores poderiam trabalhar de forma conjunta para discutir ideias que contemplassem aspectos didáticos, do conteúdo e tecnológicos a respeito das parábolas.. A situação mencionada consta do caderno do aluno, material produzido pela Secretária da Educação do Estado de São Paulo, e vigente para o período de 2014 a 2017 (Figura 6).

Figura 6 – Construção de um farol automotivo



Fonte: Caderno do aluno, 1º bimestre, 3ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2014, p. 50)

A atividade trazia o seguinte comando: “verifique, por meio da construção de uma superfície parabólica com uma lâmina de alumínio, fixada em uma tábua, com uma pequena lanterna no foco da parábola, a propriedade citada das parábolas nas superfícies cromadas dos faróis dos automóveis” (SÃO PAULO, 2014, p. 50).

Após o primeiro encontro foi criado um grupo de WhatsApp objetivando um ambiente virtual onde os professores e o pesquisador pudessem trocar materiais, sugerir vídeos, discutir estratégias e, principalmente, instituir um ambiente onde os professores pudessem trabalhar de forma assíncrona, atendendo às demandas de tempo colocadas no primeiro encontro.

Encontro 2

Neste encontro, inicialmente, os professores discutiram a respeito da atividade inicial proposta no encontro anterior. A participação no grupo de WhatsApp foi pequena e os professores precisaram de diversas explicações para compreender a proposta do trabalho colaborativo.

A proposta de construção da lanterna do carro, conforme proposta no caderno do aluno, foi descartada pelos professores, o que propiciou uma discussão sobre aspectos didáticos, do conteúdo e tecnológicos. Quanto aos aspectos didáticos, os professores apresentaram forte associação entre didática e “saber ensinar”, ficando essa ideia sem um lastro teórico. No quesito tecnológico a atividade da lanterna do carro propiciou uma discussão sobre tecnologias digitais e não digitais, enquanto o aspecto do conteúdo foi explorado pelo pesquisador utilizando o *software* dinâmico de geometria GeoGebra.

Nesse encontro os professores apresentaram uma predileção pela utilização de tecnologias analógicas, mesmo na consecução da atividade proposta como questão inicial para o encontro.

Como questão motivadora para o terceiro encontro, o pesquisador sugeriu que fossem investigadas as órbitas planetárias e as Leis de Kepler. Apresentamos agora um breve resumo desse encontro que é analisado com maior profundidade no capítulo das Análises.

Encontro 3

Os preparativos para esse encontro se deram de forma muito mais intensa do que no encontro anterior. Os professores utilizaram o grupo de WhatsApp para trocar sugestões, vídeos e outros materiais, construindo assim um ambiente propício para a realização do terceiro encontro, que tinha por objetivo investigar o objeto matemático elipse, quanto aos aspectos do conteúdo, pedagógicos e tecnológicos do conhecimento (MISHRA; KOEHLER, 2006).

Os professores atentaram para aspectos históricos e com isso foi possível a realização de uma discussão de caráter epistemológico sobre esse conteúdo. A utilização do *software* GeoGebra foi novamente requerido, porém com uma busca evidente pelos seus aspectos dinâmicos. Quanto ao aspecto pedagógico, surge um elemento teórico para servir de fio condutor das discussões, a sala invertida.

Para a realização do quarto e último encontro, o pesquisador não apresentou uma questão inicial motivadora. Coube aos professores discutirem e buscarem questões que pudessem se tornar boas opções para questões iniciais.

Encontro 4

Os professores utilizaram várias vezes o grupo de WhatsApp e compartilharam vídeos e outros materiais que poderiam se tornar uma boa questão inicial para as discussões do quarto encontro. As discussões foram pautadas nos materiais compartilhados no grupo pelos professores.

A mudança da tecnologia da inteligência (LÉVY, 2003) ocorrendo por complexificação se evidencia quando esses professores compartilham materiais e sugerem o estudo a respeito da construção de uma hipérbole, tanto fazendo uso de um hiperbológrafo (a ser construído com alunos), quanto utilizando o *software* GeoGebra para apresentar tal construção.

CAPÍTULO V

CÔNICAS

A presente tese de doutorado investiga o processo de ressignificação do conteúdo cônicas entre professores de Matemática, que constituem um grupo colaborativo, em um ambiente comunicacional remoto (o Zoom). Apesar da importância desse conteúdo matemático, anteriormente mencionado, o trabalho poderia ter sido desenvolvido utilizando qualquer outro conteúdo matemático.

O estudo das cônicas, embora remonte há alguns milênios, ainda se mostra bastante atual e importante, devido às suas inúmeras aplicações práticas, além de sua intrínseca beleza Matemática. Apolônio de Perga é considerado, de acordo com alguns registros históricos, o principal nome relacionado a este tema. Ele teria nascido na cidade de Perga, na Panfília; foi, provavelmente, educado em Alexandria, tendo vivido entre 262 e 190 a.C. Como costuma ser comum em personagens como este, na verdade, pouco se sabe sobre sua vida.

A maior parte das obras de Apolônio foram perdidas e apenas conseguimos ter uma certa ideia de seus conteúdos por meio de restaurações, ocorridas principalmente no século XVII, permitindo, assim, que esses conhecimentos ficassem disponíveis para a humanidade.

Os originais dos trabalhos de Apolônio "*Dividir segundo uma razão*", em grego, se perderam; porém, uma tradução foi feita para o árabe antes que isso acontecesse. As cônicas já eram conhecidas há cerca de 150 anos desde sua época quando Apolônio, a pedido de um geômetra de nome Naucrates, escreveu oito livros sobre o assunto. Embora este tema fosse um assunto já discutido por pensadores da época, como Aristeu e Euclides, devemos a Apolônio a melhor obra a esse respeito, ao que tudo indica:

[...] mas assim como Os Elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio, derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive As cônicas de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo (BOYER, 1996. p. 99)

Apolônio foi o primeiro a utilizar dois cones (ou um cone duplo) em uma representação na qual apresentam sentidos opostos e são indefinidamente estendidos. Dessa forma, ele se aproxima muito da definição de hipérbole que

utilizamos hoje, substituindo a ideia de duas hipérbolas pela de uma hipérbole com dois ramos, ou folhas. Outra descoberta atribuída a Apolônio diz respeito ao tipo de cone utilizado. Antes, acreditava-se que as cônicas eram obtidas pela intersecção de um cone reto com um plano, porém foi demonstrado que o cone pode ser oblíquo ou reto.

Os estudos sobre cônicas, realizados por Apolônio e por seus predecessores, utilizam o cone para obter a curva dada pela intersecção desse cone com um plano secante para, então, abandonar a tridimensionalidade do cone e trabalhar exclusivamente no plano bidimensional.

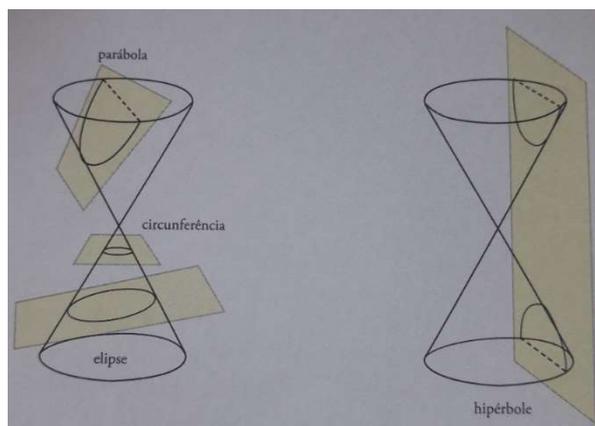
Na atualidade, o conteúdo matemático “cônicas” possui ampla aplicação prática, podendo ser utilizado na física, na astronomia, na arquitetura e em muitas outras áreas. Podemos citar como exemplos mais específicos os movimentos de determinadas partículas, os campos gravitacional e elétrico, as órbitas planetárias, a forma de determinados edifícios, a acústica, enfim, o assunto não se esgota facilmente e se mostra muito promissor no campo da educação.

O estudo das cônicas é realizado no Brasil desde o século XIX, tendo seu início no Colégio Pedro II, na cidade do Rio de Janeiro, para, posteriormente, expandir-se para as demais regiões do país. Bordallo (2011) investigou de que maneira as secções cônicas foram apresentadas nos livros didáticos desde 1892 até a época em que escreveu seu trabalho. Como consequência de suas investigações, a pesquisadora percebeu que, em 120 anos de ensino de cônicas nas escolas de ensino básico, isso se deu, em sua maioria, de forma fragmentada, de tal maneira que os alunos não eram levados a perceber as relações existentes entre parábola, elipse e hipérbole:

Os livros seriados abordam as cônicas por período, o empobrecimento do estudo das cônicas, com o passar dos períodos, vários assuntos a respeito das cônicas foram deixando de ser ensinados, inclusive o que as tornam unificadas, o que relaciona as três curvas (BORDALLO, 2011, p. 27)

Encontramos, normalmente, nos livros didáticos a imagem de um cone, como o proposto por Apolônio, cortado por um plano, para elucidar as relações entre as três curvas: parábola, elipse e hipérbole (Figura 7).

Figura 7 – Corte de cones apresentado no caderno do aluno do Estado de São Paulo



Fonte: SÃO PAULO, 2014. p. 44

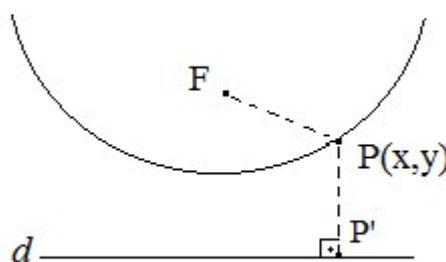
Conforme nos relata Bordallo (2011), a tentativa de unificação das três curvas para por aí na maioria dos livros utilizados no Brasil, ou seja, na percepção que as três curvas são a intersecção do cone com o plano secante, passando por demonstrações no âmbito da geometria analítica, utilizando como referência a ideia de lugar geométrico, dos focos, de reta e ponto genérico sobre a curva.

Apresentamos, a seguir, as definições e demonstrações comumente utilizadas nos estudos das cônicas, conforme pode ser verificada no livro “Cálculo com Geometria Analítica”, de Earl William Swokowski, amplamente utilizado nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil e no mundo.

5.1. Parábolas

Definição: uma **parábola** é um conjunto de pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo F (foco) e de uma reta fixa d (diretriz) do plano (Figura 8).

Figura 8 – Lugar geométrico de uma parábola

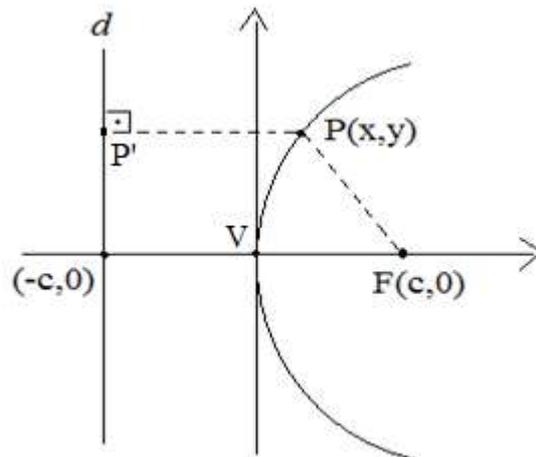


Fonte: elaborado pelo autor

Adotaremos um ponto F , não pertencente à reta d , para que a parábola não se degenerere em uma reta. Tomamos P um ponto do plano e P' pertencente a d , tal que PP' determine uma reta perpendicular a d . A distância entre P e d é a mesma de P a F e a reta perpendicular à d e que passa por F é chamada de eixo da parábola. O ponto V , que consiste no ponto médio do segmento perpendicular, formado por F e d , é chamado de vértice da parábola.

Para obtermos uma equação simples da parábola, escolhemos o eixo dos xx ao longo do eixo da parábola, com a origem do sistema no vértice da parábola (Figura 9).

Figura 9 – Parábola no plano cartesiano



Fonte: elaborado pelo autor

Da Figura 9, observamos que $d(PF) = d(Pr)$

Obtemos, então:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = x + c$$

$$\left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2 = (x + c)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2$$

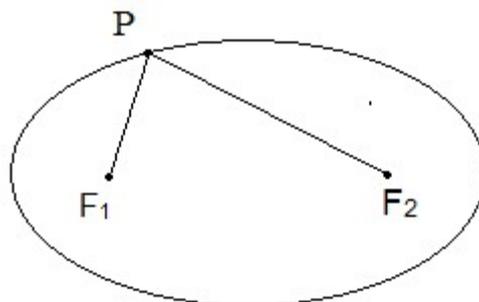
$$- 2xc + y^2 = 2xc$$

$$y^2 = 4xc$$

5.2. Elipses

Definição: uma **elipse** é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do plano (focos) é constante (Figura 10).

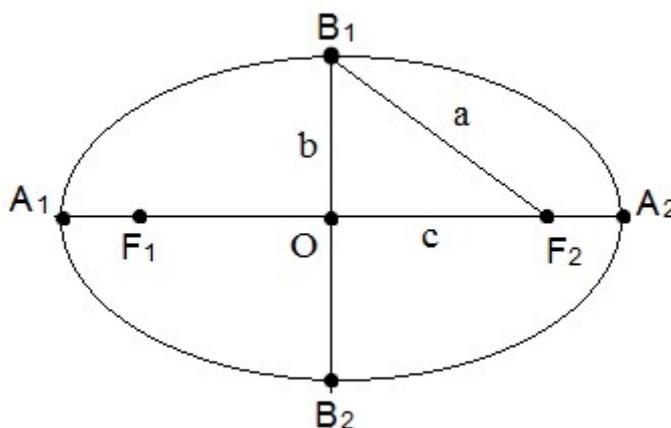
Figura 10 – Lugar geométrico de uma elipse



Fonte: elaborado pelo autor

Da definição, expressa graficamente na Figura 4, temos que $d(F_1P) + d(F_2P) = 2a$, onde $2a$ é o valor do comprimento máximo da elipse em seu maior eixo. Podemos estabelecer alguns parâmetros que nos auxiliarão na compreensão desse objeto matemático (Figura 11).

Figura 11 – Elipse e seus eixos



Fonte: elaborado pelo autor

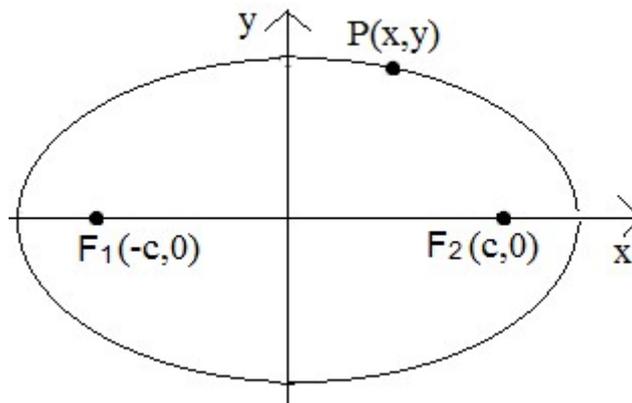
Na Figura 11, a medida do segmento de reta determinado pelos pontos A_1 e A_2 corresponde à medida da soma dos segmentos $F_1B_1 + F_2B_1$ e o designaremos por $2a$. Utilizando o Teorema de Pitágoras, é imediata a constatação de que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Utilizando o sistema cartesiano e tomando o centro da elipse como a origem do sistema, podemos deduzir sua equação canônica. Consideremos a ilustração contida na Figura 12.

Figura 12 – Focos da elipse e ponto genérico



Fonte: elaborado pelo autor

Da definição, decorre que $|PF_1| + |PF_2| = 2a$

Desenvolvendo algebricamente a igualdade acima temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2}^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc$$

$$2xc + 2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4, obtemos:

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2$$

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Sendo $a^2 - c^2 \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da equação por esse valor e obtemos:

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} = a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{a^2y^2}{a^2 - c^2}}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} \frac{1}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Assim, conforme demonstrado anteriormente, $b^2 = a^2 - c^2$.

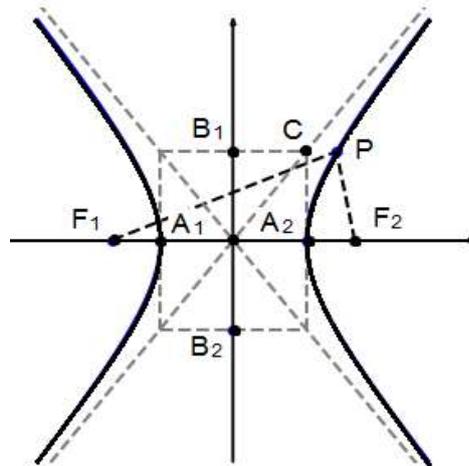
Dessa forma, obtemos a equação canônica da elipse, com eixo maior sobre o eixo das abscissas e centro na origem do sistema cartesiano:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5.3 Hipérboles

A definição de hipérbole se dá de forma semelhante à de elipse, porém, conforme se observa na Figura 13, a hipérbole se dá pela diferença dos segmentos dados, pelos focos e um ponto P genérico, pertencente a ela.

Figura 13 – Hipérbole



Fonte: elaborado pelo autor

Definição: uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos de um plano, tais que a diferença das suas distâncias a dois pontos fixos no plano (focos) é uma constante positiva.

Nomeando o segmento de extremidades C e O de **c**, e o segmento de extremos O e A₂ de **a** e o de extremos O e B₁ de **b**, é imediato estabelecermos a seguinte relação pitagórica.

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Conforme a definição apresentada, temos que $|PF_1| - |PF_2| = 2a$

De forma analítica, encontramos a distância entre os referidos pontos e procedemos às operações algébricas necessárias.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - 2xc$$

$$2xc + 2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4, obtemos:

$$xc = a^2 + a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$(xc - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = -a^4 + a^2c^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividindo ambos os membros da equação por $c^2 - a^2$ obtemos:

$$x^2 - \frac{a^2y^2}{c^2 - a^2} = a^2$$

Buscando a forma canônica da equação da hipérbole, dividimos a equação por a^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2y^2}{c^2 - a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2y^2}{c^2 - a^2} \frac{1}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Como demonstrado anteriormente, temos: $c^2 = b^2 + a^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

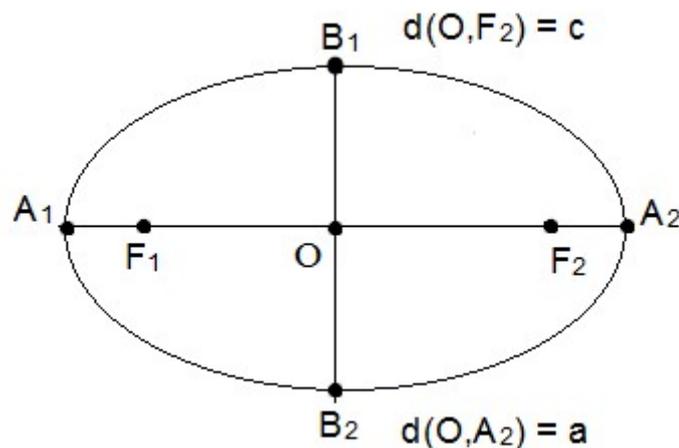
Dessa maneira, alcançamos a forma canônica de uma hipérbole, com o seu centro na origem do sistema cartesiano.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5.4. Excentricidade

A excentricidade de uma secção cônica é um parâmetro que nos auxilia na interpretação e análise dessa curva. Esse parâmetro é obtido pela razão entre as medidas de **c** e **a**, conforme podemos observar na Figura 14:

Figura 14 – Excentricidade da elipse

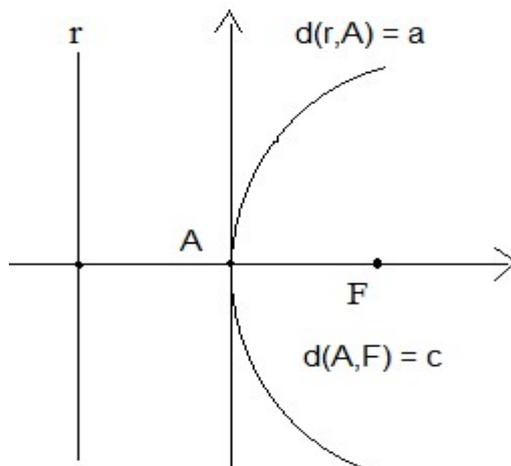


Fonte: elaborado pelo autor

Desse modo, o valor da excentricidade **e** é dada por $e = \frac{c}{a}$.

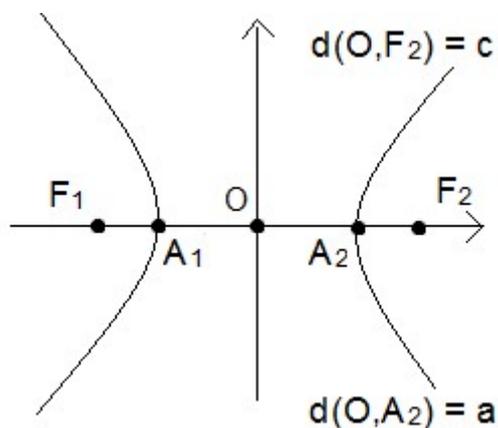
Uma vez que o valor da medida de **c** sempre será menor do que o valor da medida de **a**, temos que **e** sempre será menor que zero para as elipses, ou seja, $0 < e < 1$.

Quando abordamos a excentricidade das parábolas, é imediata a constatação de que $e = 1$, uma vez que a medida de **c** é igual à medida de **a**, para todas as parábolas, $e = \frac{c}{a} = 1$ (Figura 15).

Figura 15 – Excentricidade da parábola

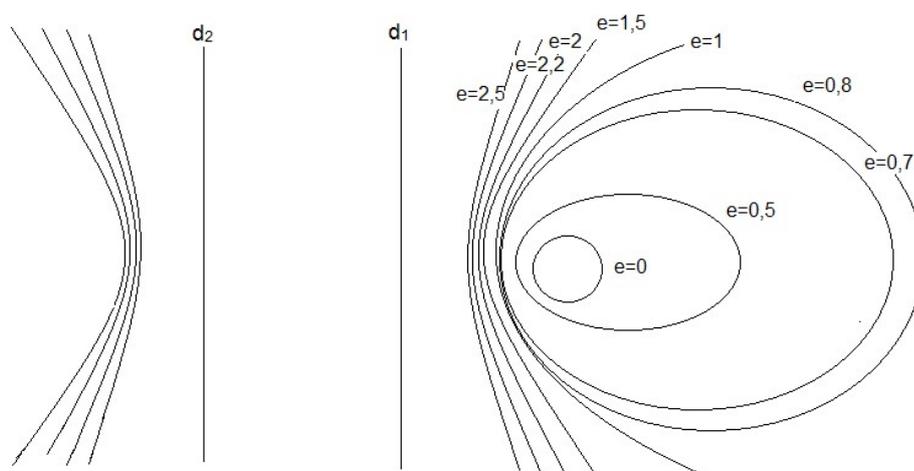
Fonte: elaborado pelo autor

Ao estudarmos a excentricidade das hipérbolas, constatamos que o valor desse parâmetro é sempre maior do que 1, ou seja, $e = \frac{c}{a} > 1$ (Figura 16).

Figura 16 – Excentricidade da hipérbole

Fonte: elaborado pelo autor

A maneira como a excentricidade é apresentada nos livros didáticos (BORDALLO, 2011) não explicita uma clara relação entre as cônicas. Dessa forma, segundo a autora, esta abordagem não se mostra efetiva para uma visão integrada desse conteúdo. A Figura 17 apresenta uma relação mais clara entre as diversas cônicas e suas respectivas excentricidades.

Figura 17 – Excentricidade e suas variações

Fonte: elaborado pelo autor

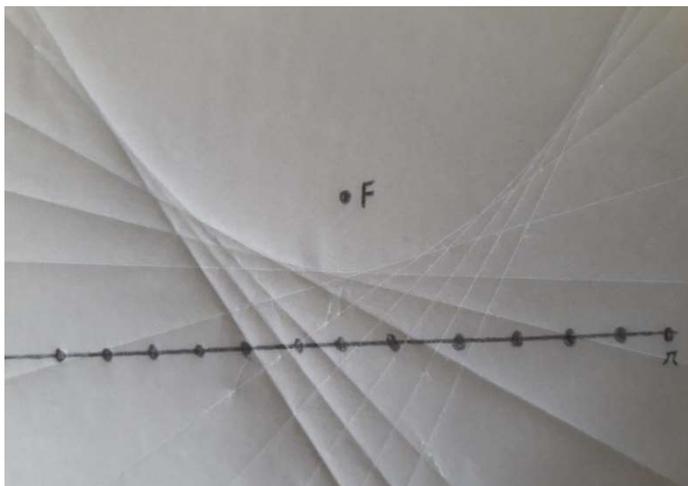
Conforme indica Lopes (2013), a imagem apresentada na Figura 17 representa uma mesma família de curvas, que pode ser percebida e determinada por uma classe de equivalência sobre o conjunto das cônicas. Cada uma dessas classes é composta por cônicas com expressões analíticas diferentes, mas que possuem a mesma forma do ponto de vista geométrico. Isto significa que as dimensões fundamentais entre eixos de uma elipse de mesma classe são proporcionais, pois definem o valor da excentricidade. A mesma ideia é aplicada às parábolas e hipérbolas.

5.5. Dobraduras e Teorema de Dandelin/Quetelet

Podemos também, de forma mais intuitiva, fazer o estudo das cônicas por meio de construções geométricas. Essa abordagem possibilita ao aluno uma alternativa para melhor compreensão a respeito do objeto de estudo apresentado, podendo se tornar um ponto de partida para as demonstrações apresentadas anteriormente.

Considere uma reta r e diversos pontos pertencentes a essa reta. Marque um ponto F não pertencente a r e por meio de dobradura; utilizando papel vegetal, podemos construir uma parábola, que é formada pelas retas mediatrizes dos pontos contidos em r e o ponto F (Figura 18).

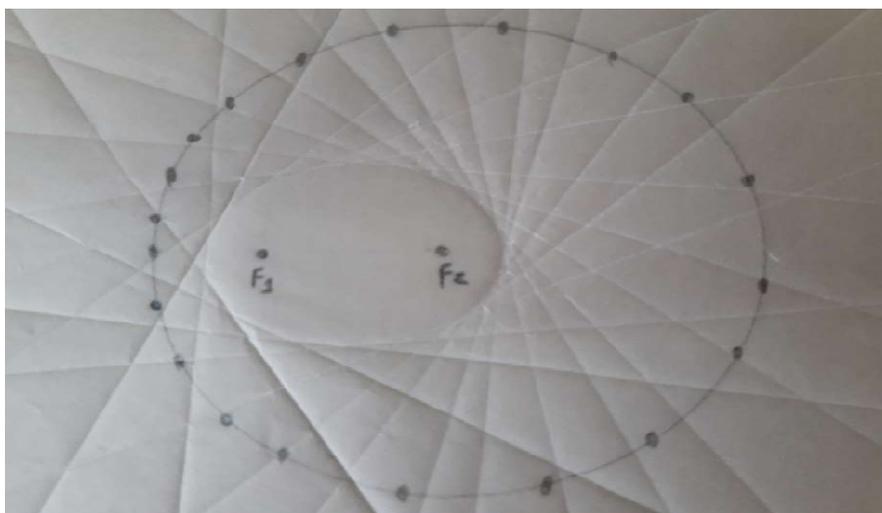
Figura 18 – Dobradura e parábolas



Fonte: elaborado pelo autor

Agora, considere dois pontos, F_1 e F_2 ; trace uma circunferência com centro em um dos focos e raio maior que a distância F_1F_2 . Marque pontos sobre a circunferência e dobre o papel vegetal sobrepondo cada ponto marcado sobre a circunferência com o foco que não foi escolhido para centro da mesma. A imagem obtida é a de uma elipse (Figura 19).

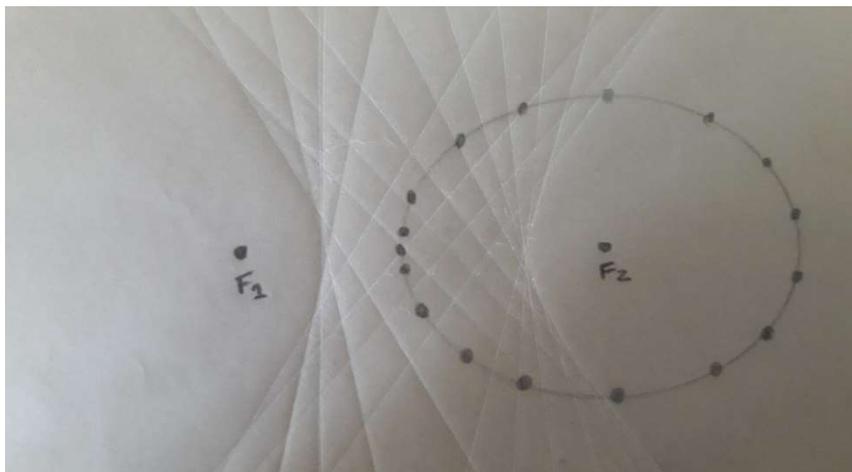
Figura 19 – Dobradura e elipses



Fonte: elaborado pelo autor

Para prosseguir a construção da hipérbole, o processo é semelhante, porém, precisamos adotar agora uma circunferência de raio com medida menor que a medida da distância F_1F_2 (Figura 20).

Figura 20 – Dobradura e hipérboles

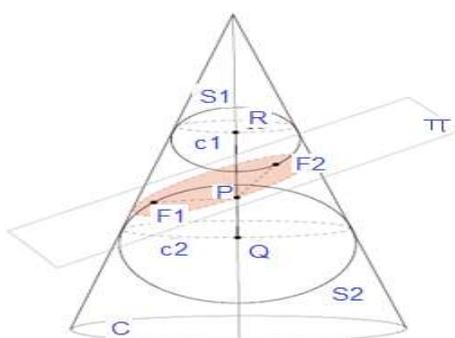


Fonte: elaborado pelo autor

Essas dobraduras podem auxiliar, dependendo da estratégia didática, na construção de conjecturas, estabelecimento de valores de referência e dedução de fórmulas e algoritmos.

Uma interpretação interessante sobre cônicas foi dada pelo belga Germinal Pierre Dandelin, em 1822, que observou, juntamente com seu colaborador e conterrâneo, Adolphe Quetelet, que as cônicas podem ser descritas a partir da geratriz de um cone, conforme se vê na Figura 21.

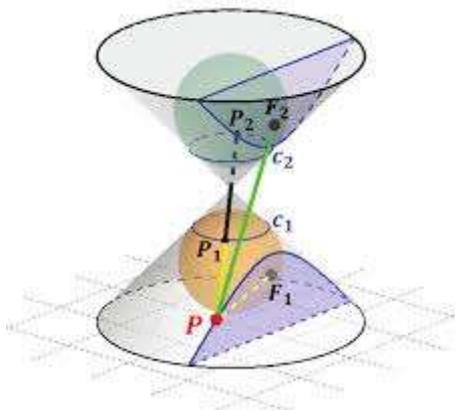
Figura 21 – Esferas de Dandelin/Quetelet e a elipse



Fonte: elaborado pelo autor

Podemos observar que a medida dos segmentos $PF_1 + PF_2$; $PQ + PR$ e RQ são iguais, quando a geratriz dada por RQ se desloca por C_1 e C_2 (Figura 22).

Figura 22 – Parábolas e Hipérbolas e as Esferas de Dandeli/Quetelet



Fonte: Lima (2015)

Uma vez que os pontos P_1 e F_1 são pontos de tangência às esferas, podemos observar que a distância $PP_1 = PF_1$ e que $PF_2 - PP_1$ é constante à medida que a geratriz dada por P_1P_2 se desloca por C_1 e C_2 .

Discutidos, nesse capítulo, os temas matemáticos envolvidos, passamos às descrições correspondentes às análises.

CAPÍTULO VI

ANÁLISES

As atividades propostas no Zoom possuem, na forma como discutimos anteriormente, o potencial de favorecer a constituição do grupo colaborativo formado pelos professores P1, P2, P3 e P4. Neste momento da pesquisa, retomamos nosso objetivo geral e questão de pesquisa, para auxiliar o leitor a melhor compreender o trabalho.

Nosso objetivo geral, conforme explicitado anteriormente, é *investigar as formas pelas quais um grupo de estudos colaborativo, formado por professores de Matemática do Ensino Básico, cria possibilidades para a ressignificação da noção de cônicas, tendo por base o uso de estratégias didáticas com diferentes tecnologias.*

Diante do objetivo de pesquisa, foi formulada a questão: *como a organização de um grupo de estudos colaborativo, constituído por professores de Matemática do Ensino Básico, pode concorrer para a ressignificação da noção de cônicas, em termos do uso de estratégias didáticas com diferentes tecnologias?*

Muitas são as opções quando o assunto se liga às plataformas que permitem comunicação não presencial em diversas atividades – o ensino entre elas. Durante a pandemia de COVID-19, ficou notória a grande diversidade desses serviços, bem como algumas de suas qualidades e fragilidades. Nesta pesquisa, optamos pela utilização do Zoom por se tratar de uma plataforma que apresenta uma versão gratuita e que possui ferramentas que podem ser utilizadas com relativa facilidade em atividades que prevejam interação e colaboração. Existem diversas outras ferramentas de comunicação digital que poderiam ser utilizadas para a consecução desta pesquisa. O grupo colaborativo de professores poderia ser proposto no Facebook, Instagram, grupos de WhatsApp, Moodle e até mesmo em ambientes virtuais constituídos por meio de jogos nos quais são possíveis a realização de reuniões virtuais privadas entre jogadores, utilizando seus avatares. Os diversos *softwares* que poderiam ser utilizados como um potencial espaço virtual de formação continuada muito provavelmente continuarão a surgir, de tal forma que o valor da presente pesquisa não se restringe a uma única aplicação, mas, antes, a toda uma miríade de potenciais espaços virtuais. Nesse sentido, aduz Lévy:

A inteligência humana se auto-organiza em um meio para recolher os dados que ela produz e explorar os dados que ela recolhe. Web das pessoas, Web dos dados, Web das coisas, Web local e ubíqua. Web

dos saberes e dos tesouros culturais, a grande rede constitui um só e um único meio digital. (LÉVY, 2014, p. 81).

A escolha do Zoom se deu mais em função da familiaridade que a maior parte dos professores da pesquisa já possuíam com a ferramenta, possibilitando uma adaptação mais rápida às atividades. Ressaltamos que o Zoom não foi planejado para servir como uma plataforma de ensino, ou seja, não é, por origem, um Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem (AVEA). No entanto, acreditamos que a estratégia didática e o planejamento das atividades com um grupo de aprendizes podem se valer desse programa a partir dessa perspectiva. Assim, vamos entender que o *tratamento da pesquisa*, em relação às atividades e à utilização do recurso pelos professores, permite simular um AVEA a partir do Zoom. Especificamente, os Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem:

...viabilizam uma nova dinâmica na transposição dos conteúdos e informações, a partir da multiplicidade de conexões e possibilidades de comunicação, na aplicação dos recursos midiáticos e no uso diferenciado da reflexão possibilitando a construção coletiva do conhecimento de forma colaborativa (BORTOLATO, 2016, p. 95).

A ideia de AVEA por nós empregada na presente tese não se limita à simples exposição de conteúdos *online*, mas, antes, busca um ambiente que possibilite uma real interação entre os seres humanos envolvidos e a tecnologia digital.

Um fator preponderante, indicado por Bortolato (2016), para o sucesso das atividades ocorridas nos AVEA, está diretamente relacionada à motivação de cada participante, exigindo uma nova postura, uma curiosidade epistemológica, permeada por uma legítima vontade de aprender e contribuir nas atividades. Refere-se a uma mudança de paradigma, considerando que os AVEA não são simulacros das situações presenciais, mas apresentam, em si, um novo padrão de exploração e descoberta.

Atualmente existem diversas plataformas educacionais que almejam propor a seus usuários ambientes de interação e aprendizagem, oferecendo diversas ferramentas de interação e colaboração. A escolha feita pelo Zoom se deu, como já mencionado, pela facilidade de utilização do mesmo, pela existência de sua versão gratuita e, acima de tudo, pelo fato de que 3 dos 4 professores participantes da presente pesquisa já possuem familiaridade com o *software*.

Os professores brasileiros, principalmente das escolas particulares, foram submetidos a uma carga brutal de trabalho a partir das consequências advindas da pandemia do COVID-19 – aliás, de forma geral, essa carga jamais foi pequena. Em alguns casos, a partir do segundo semestre de 2021, muitos docentes passaram a lecionar de forma presencial e remota de maneira praticamente simultânea. Esse sistema “híbrido” nasceu da necessidade e em grande parte foi uma adaptação de última hora, em uma medida emanada das esferas governamentais, que fez com que as escolas precisassem atender às famílias que desejavam aulas presenciais e àquelas que desejavam que as aulas ficassem remotas.

De acordo com Borba (2021), de maneira súbita, docentes e outras pessoas ligadas à administração escolar, nos diversos níveis de ensino, foram praticamente forçados a desenvolver suas atividades profissionais de modo remoto, ou seja, em outra modalidade de ensino. Essas pessoas não estavam preparadas para esse cenário e foram submetidas a um contexto a partir de improvisos, usando de criatividade e enfrentando precariedades, entre as quais infraestruturas ruins e salários defasados, o que é particularmente correto considerando professores de escolas públicas da educação básica. Sem um planejamento, viu-se nas tecnologias digitais uma forma para que as escolas não fechassem. Questões relativas ao tempo, exigências profissionais, maneiras de ensinar e aprender, formação de professores, participação dos agentes sociais nas trajetórias dos estudantes, entre outras, entraram em jogo e envolveram pais, administradores, professores e os próprios alunos. Nesse contexto, inserir esses professores em um AVEA totalmente desconhecido seria mais um desafio, que, no atual cenário, poderia se tornar mais desmotivador do que o contrário.

O Zoom é uma plataforma desenvolvida com o intuito de realizar reuniões virtuais em um ambiente simples e eficiente. O aplicativo não foi desenvolvido originalmente objetivando a utilização específica por instituições de ensino, mas sim para atender a ambientes corporativos. Com o advento da COVID-19, as instituições de ensino precisaram, no ano de 2020 em boa parte de 2021, oferecer aulas na modalidade remota, e essa mudança precisou acontecer de forma imediata, sem uma preparação ou estudos aprofundados sobre o assunto. Os professores não receberam qualquer tipo de instrução metodológica a respeito, sendo, literalmente, imersos nessa nova realidade, tendo que se adaptar e aprender durante o processo. Os treinamentos

oferecidos aos professores, quando existiam, estavam centrados em apresentar as ferramentas dos sistemas adquiridos pelas instituições.

O Zoom, portanto, não foi desenvolvido como um AVEA, porém foi eleito por uma grande parte das instituições de ensino ao redor do mundo como uma opção para a realização das aulas remotas. O sistema é continuamente aperfeiçoado e tem se mostrado uma ferramenta realmente útil e com grande potencial de ações colaborativas.

Optamos pela versão gratuita, pois a maior diferença entre a versão gratuita e as demais se concentra no tempo de reunião. Na versão gratuita as reuniões são encerradas automaticamente quando o tempo atinge 40 minutos. Caso a reunião se encerre no prazo limite de 40 minutos, os participantes ainda podem continuar conectados, bastando iniciar uma nova reunião, com outros 40 minutos de prazo.

Com o intuito de auxiliar as comunicações entre os integrantes do grupo de professores participantes da presente pesquisa, foi criado um grupo no aplicativo WhatsApp, a partir do qual as reuniões foram combinadas e os códigos e senhas para entrar nas sessões do Zoom foram compartilhados.

6.1. A primeira reunião

A primeira reunião do grupo aconteceu em uma quarta-feira à noite, após um dia inteiro de aulas presenciais e remotas. Os professores que trabalharam em escola particular no decorrer do ano de 2021 lecionaram para um grupo reduzido de alunos presentes na escola, e, de forma simultânea, por meio do Zoom, para o restante dos alunos que acompanhavam as aulas remotamente.

Nesse primeiro encontro, todos participaram intensamente das discussões. Esse primeiro encontro teve a duração de 1 hora, 10 minutos e 23 segundos. Apesar de utilizarmos a versão gratuita, com reuniões de até 40 minutos, o aplicativo permitiu que fosse ultrapassado esse limite. As interações entre os professores foram muito produtivas e esse tempo extra foi muito apreciado e aceito pelos integrantes.

O foco desse primeiro encontro foi o de possibilitar aos professores, um ambiente descontraído, no qual fosse possível contar um pouco de suas histórias pessoais e profissionais. Três professores já se conheciam e um professor era conhecido de apenas dois deles. As apresentações e o compartilhamento de

experiências tiveram por objetivo uma maior aproximação entre os sujeitos da pesquisa, favorecendo um ambiente propício à constituição de um grupo colaborativo. As interações ocorreram por áudio e vídeo e foram gravadas pelo próprio sistema Zoom.

Os participantes foram instruídos quanto à finalidade básica daquele encontro virtual. O pesquisador esclareceu que não existia nenhum tipo de critério de avaliação e que o intuito era que todos trabalhassem efetivamente em equipe, sem a ideia de competição. Os professores começaram falando de suas práticas e formações inicial e continuada.

Em relação ao ambiente interativo, os sujeitos se mostraram bastante familiarizados com o *software* Zoom, exceção feita ao professor P4, que, por trabalhar apenas em escolas estaduais, não teve contato anterior com esse programa.

O primeiro encontro foi, acima de tudo, um espaço para que os professores se conhecessem: embora três deles trabalhassem na mesma escola, o outro lecionava em escola pública estadual de tempo integral. Esse espaço de troca de experiências e expectativas em relação ao futuro buscou a criação de um grupo no qual existisse empatia no lugar de competição, colaboração ao invés de ações meramente individuais.

O professor P4 contou sobre suas experiências na escola de tempo integral e os demais professores se mostraram verdadeiramente curiosos sobre esse assunto, aproveitando para fazer-lhe diversas perguntas.

Quando o pesquisador perguntou aos participantes o que eles pensavam sobre cônicas, quanto à sua importância e necessidade de ensino, podemos observar, pelas transcrições seguintes, que esse conteúdo é visto como portador de particularidades e dificuldades por esses profissionais.

Decorridos alguns minutos de interação livre entre os participantes, o pesquisador faz a seguinte pergunta: *vocês acham importante ensinar cônicas? Nós sempre questionamos o motivo de um currículo tão conteudista, mas será que cônicas deveria ser ensinado?*

P4²: *É um conteúdo difícil, né? Para o aluno isso se torna muito difícil, para o aluno se torna muito difícil para ele entender todo aquele processo, né? Para nós professores já é assim, às vezes encontramos muitos obstáculos. Até na forma como vamos mostrar, explicar aquilo para eles. Na forma que vamos passar para aqueles alunos para eles entenderem, de uma forma bem fácil, não pegando o muito complexo, né? Pegando a parte mais fácil para passar para eles. Eu penso dessa forma, tem muitos conteúdos mesmo que eu acabo nem passando, se for muito complexo mesmo a gente acaba deixando ele de lado e pega um outro conteúdo.*

O posicionamento do professor P4 é confirmado por P3, que complementa suas observações:

P3: *Ou às vezes você dá uma pincelada, aí! Explica lá no GeoGebra. Porque é um conteúdo que nós professores achamos que não é tão importante para o aluno saber.*

Essa declaração de P3 revela seu posicionamento quanto ao trabalho didático com cônicas, e, de forma indireta, sobre a utilização do *software* GeoGebra: nessa fala, aparece como recurso para realizar abordagens superficiais com conteúdos “não tão importantes”, de maneira aligeirada. Na classificação de Goos et al (2003), adaptada por Oliveira (2018), seria uma forma de utilização da tecnologia como serva, já que o foco é apenas passar de maneira mais “veloz” por um conteúdo em relação ao qual o professor quer se livrar rapidamente.

O professor P2 alega que a atual visão que temos sobre cônicas se deve a uma questão histórica.

P2: *Eu acho que a partir do momento em que a Matemática foi dividida aconteceu isso, os escritores dos livros didáticos fizeram isso. Porque se você for pegar os livros didáticos bem antigos, tipo aquele grossão dos Elementos, lá, não existia essa separação. Ao mesmo tempo que ele dava a parte da Álgebra, ele também dava Geometria junto. Depois com esses escritores modernos que vieram, começando ali do Gelson lezzi e aquela galera toda que veio depois... essa separação que veio separando Álgebra de Geometria é que*

² Optamos por manter as falas dos participantes da maneira como foram proferidas, ou seja, sem quaisquer ajustes.

deu rolo. Se você pegar todos os livros didáticos, a partir de 98, 97 até 2015, todos eles pegam a parte da Geometria e jogam lá na parte final do livro, porque eles sabem que os professores dificilmente vão chegar naquele final. Agora se você pega os livros desses escritores modernos de hoje, a coisa já mudou, aí começa a aparecer a Geometria logo nos primeiros capítulos.

Os posicionamentos do professor P2 revelam um olhar sobre os materiais e as questões históricas, epistemológicas e didáticas. Embora de maneira um pouco desconexa e imprecisa, essas preocupações ficam evidentes em sua fala, principalmente no que se refere ao suporte para um ensino desconectado e compartimentalizado, da maneira como referido por Bordallo (2011). O professor P2 defende, ainda, que as aulas de Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental poderiam ser ministradas por especialistas e não por professores polivalentes. Alega, ainda, que seria necessária “uma postura de humildade perante a Matemática”: o professor especialista não precisaria saber tudo, mas poderia buscar aprender.

P2: *O professor de Matemática não tem que ter vergonha de pedir ajuda não, se ele não sabe... mas eu acho que é aquela coisa, o professor de Matemática ter que saber tudo, eu acho que foi isso que acabou com a Matemática, de achar que o professor de Matemática é o dono do saber, e não é!*

O que podemos perceber é que P2 indica existirem, em seu entendimento, defasagens de conhecimento de conteúdo matemático mesmo entre os professores especialistas. Shulman (1986), por exemplo, já indicava a necessidade de que a formação do professor cuidasse de tipos diversificados de conhecimento, envolvendo o perfil dos alunos, o currículo, a didática específica da disciplina e, evidentemente, o conteúdo da disciplina a ensinar em si.

Outro fator que chama atenção em P2 é que, ao mesmo tempo que esse professor defende a utilização de recursos computacionais como ferramenta didática nas aulas de Matemática, seu discurso é, por vezes, paradoxalmente contrário, principalmente quando alega que as pessoas não aprendem geometria porque “existem *softwares* que fazem tudo”.

P2: *Eu tenho uma galera de Geometria que eu conheço, um pessoal que está se formando aí, que nem eles, tem noção, porque assim... já tem os programas montados, eles entram digitam o que tem que digitar e boa.*

A visão que P2 indica possuir, de certa forma, sobre tecnologias não comporta, de acordo com sua fala, a ideia de que professores e alunos formam coletivos de *peessoas-com-tecnologias*, ou, como preferem, Borba e Villarreal (2005), *seres-humanos-com-mídias*. No lugar de perceber as reorganizações do pensamento (TIKHOMIROV, 1981) promovidas pelas interfaces dessa natureza, indica apenas notar, no uso de dispositivos informatizados, algo pronto e utilitarista, que, de alguma forma, tiraria do professor a necessidade de conhecer Matemática, de maneira contrária, aliás, ao que prevê Oliveira (2018) quando explora tópicos a respeito de fluência em tecnologias: para esse autor, a fluência não dispensa o conhecimento matemático e esse dois aspectos ocorrem de forma articulada.

Além disso, o professor P2 acredita que algo em sua prática não está correto ou que existe um problema no ensino e aprendizagem de Matemática no Brasil, porém não é capaz de definir com precisão o que seria:

P2: *A gente que é professor de Matemática, ou a gente que está ultrapassado ou a gente está fazendo alguma coisa muito errada. O problema também é a gente nessa história toda.*

O professor P2 alega que, ao estudar em suas pós-graduações, percebeu a necessidade da utilização de blocos, como material dourado, porém “a coisa desaba quando precisa sair dos blocos e ir para o papel”. Considerando o material mencionado pelo sujeito como de natureza tecnológica, podemos fazer um paralelo com as afirmações de Mishra e Koehler (2006), que indicam que as abordagens sobre uso de tecnologias, quando isoladas e desconectadas dos conteúdos específicos e didáticos, tendem a repetir os mesmos erros do passado, quando a didática era vista de maneira disjunta em relação ao conteúdo disciplinar propriamente dito. A fala de P2 pode indicar que a abordagem pela qual passou em sua formação continuada também divide os saberes em compartimentos, prejudicando uma visão integral no ensino.

Esse mesmo professor alega que, quando aparecem cônicas para o aluno no Ensino Médio, o estudante “assusta com o nome”, mas que esse é um tema com o

qual o estudante se defrontará durante sua vida inteira. Segundo esse participante, o problema maior estaria na questão motivacional, ou seja, na dificuldade de motivar os alunos a desejarem conhecer o conteúdo, uma vez que ele chega ao Ensino Médio com uma série de “amarguras” em relação à disciplina.

Uma maneira exposta por P2 para amenizar ou até evitar que essa “amargura” se estabeleça é trabalhar o vínculo entre professor e aluno, levando os docentes a apresentarem os conteúdos de tal forma a permitir que esses alunos construam o conhecimento, evidenciando, dessa maneira, sua “preocupação didática”. Pode-se perceber que o professor reconhece a necessidade de construção de estratégias didáticas de abordagens diferenciadas, mas parece não ter base para externar essas preocupações de maneira mais objetiva, o que indica que semelhantes saberes não compõem seu repertório. Nesse aspecto, autores como Oliveira (2018) ressaltam a importância da construção de estratégias didáticas, de modo a conjugar o uso de tecnologias, digitais ou não, de acordo com o conteúdo a ensinar e o perfil do grupo de alunos específico.

Na continuidade, P2 elogia os cadernos de atividades dos alunos do Ensino Médio do Estado de São Paulo e diz que eles são muito bons, porém muito difíceis:

P2: *O livrinho do Estado é sensacional, show de bola, mas você tem de ter uma base, por quê, senão, como é que você faz?*

Nesse ponto, aproveitamos o discurso em torno da necessidade de melhorar a formação Matemática, apontada por P2 e confirmada pelos demais participantes, para propor a seguinte pergunta: *nós realizamos uma série de cursos em nossa formação continuada; de que maneira vocês acham que poderíamos ter mais autonomia em relação a esse processo formativo?*

O professor P2 alega que o problema está na falta de vontade em fazer os cursos. Os cursos de formação propostos são feitos sem o comprometimento do professor. O professor entrega o mínimo, apenas para alcançar a certificação almejada. Essa fala de P2, generalizadora, revela certo desânimo, e não pode ser levada à conta de verdade incontestável, nem ser tomada como regra: cada professor encara o processo de formação continuada de uma forma muito particular. Entretanto, questões como desmotivação e dificuldades diante de cenários difíceis ligados à docência na escola básica foram tratados recentemente por Borba (2021), como já

mencionamos, quando falava sobre os impactos da pandemia do COVID-19 sobre o trabalho docente. Essas questões são importantes e podem levar o professor a cumprir tais etapas como se fossem exigências meramente impositivas, e não acréscimos em suas possibilidades como gestor de aprendizagens.

A partir dessa reflexão, colocamos a questão da tecnologia em discussão, e as mudanças emergenciais para ensino remoto devido à pandemia, que os docentes foram obrigados a fazer, em uma velocidade vertiginosa. O maior problema, apontado pelos professores participantes dessa pesquisa, diz respeito à exposição que os docentes estão sujeitos, sendo observados pelos pais, alunos e gestores. No discurso dos sujeitos, aquela secular liberdade, na qual o professor entrava na sala de aula, fechava a porta e conduzia as coisas da forma que achava mais adequado, não seria mais possível no novo paradigma estabelecido.

P1: *Todo dia está sendo um novo aprendizado, todo o dia eu estou aprendendo, como lidar com essa desconstrução, não sei ainda. Na faculdade não foi nos dado para aprendermos mais.*

Aqui, é possível perceber que os saberes docentes delimitados, estabelecidos, cercados de certezas precisam ser expandidos para novos territórios. Os repertórios constituídos nos períodos de formação inicial e nas ocasiões de formação continuada não foram suficientes para os enfrentamentos das perplexidades que ocorreram, por exemplo, no período pandêmico.

O quadro teórico dessa pesquisa traz algumas pistas que sustentam as análises nesse ponto. Oliveira (2018), por exemplo, indica a relevância da construção de fluências e da integração do saber docente, notadamente no campo matemático, com os elementos referenciais das tecnologias e da didática. Em clara releitura de autores como Shulman (1986) e Mishra e Koehler (2006), o autor indica que o desenvolvimento integrado dos saberes relativos ao conteúdo, às tecnologias e à didática deve constituir o cerne das formações docentes, e que a fluência também tem seu desenvolvimento necessário no âmbito matemático e se estende pelo campo das estratégias que possam envolver os aprendizes, por meio de problematizações, desafios, trabalho colaborativo. Além disso, Kenski (2013) já indicava que propostas, intervenções e estratégias em ambientes virtuais necessitariam de conhecimentos

específicos por parte de professores e alunos, e que não seria apenas o caso de transportar a velha sala de aula para a tela dos dispositivos.

Essas foram as reflexões provenientes da primeira reunião. Descrevemos, em seguida, os acontecimentos, diálogos e propostas da segunda.

6.2. A segunda reunião

A realização da segunda reunião aconteceu após duas tentativas de encontro. Na primeira, os participantes alegaram não terem compreendido a proposta da atividade, o que levou o pesquisador a explicar que se tratava de uma ideia de formação continuada na qual eles seriam os atores principais dos encontros. Os participantes estavam, até o momento, apresentando uma atitude passiva, imaginando que os encontros se dariam em uma perspectiva de aluno/professor como em aulas tradicionais, nas quais o pesquisador ministraria aulas sobre cônicas, usando o *software* Zoom, e eles assistiriam a essas aulas, reproduzindo, assim, o modelo conhecido por eles na trajetória formativa da qual participaram até então.

Feitos os esclarecimentos, a reunião foi remarçada para daí a quinze dias. Na hora combinada, o pesquisador enviou pelo grupo de WhatsApp o link e a senha para a reunião. Os professores P3 e P4 não entraram no ambiente. O professor P3 avisou, no dia da reunião, que estava com um problema pessoal e não conseguiria participar, enquanto P4 justificou posteriormente, informando ter esquecido do encontro.

Os professores P1 e P2 entraram normalmente no ambiente Zoom, na hora combinada, porém não tinham produzido qualquer conteúdo para compartilhar. Dessa forma, o pesquisador conversou com esses professores sobre a importância do constante aperfeiçoamento dos aspectos tecnológicos, didáticos e de conteúdo em suas formações continuadas, fazendo uso dos elementos teóricos que baseiam essa pesquisa. Assim, em função desses imprevistos, a reunião foi novamente remarçada para quinze dias após essa tentativa de encontro. No dia dessa nova reunião, o professor P3 mais uma vez alegou não poder participar, pois tinha uma reunião familiar da qual havia se esquecido e que não poderia adiar.

Dessa maneira, o encontro foi realizado no ambiente Zoom e estiveram presentes os professores P1, P2 e P4. Por utilizarmos a versão gratuita do Zoom, as reuniões ficavam restritas a 40 minutos, o que tornava os atrasos bastante

contraproducentes. Entretanto, o professor P1 estava com problemas em se conectar, fato que nos foi informado no grupo de WhatsApp, o que acarretou um atraso de 15 minutos no início da reunião. Dessa forma, o tempo restante foi de cerca de 25 minutos.

A questão inicial colocada para os professores, com o objetivo de possibilitar um começo de trabalho, foi a proposta envolvendo a lanterna de um carro, apresentada no caderno do aluno, da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, e que já trouxemos anteriormente nesse trabalho (Figura 6, página 94).

Nesse encontro, optamos por dividir as análises em subseções, constituídas pelos conhecimentos docentes apontados inicialmente por Shulman (1986) e, mais tarde, por Mishra e Koehler (2006), e tendo como foco as interações entre os participantes em uma perspectiva de trabalho colaborativo.

Aspecto Didático

A questão inicial proposta para o encontro gerou uma discussão no grupo sobre as dificuldades que poderiam advir da mesma, ao ser utilizada em uma aula. Segundo os professores, o enunciado não estaria claro. Argumentando nesse sentido, P2 sugeriu que a única forma viável de utilizar essa atividade seria aplicá-la ao término de algumas aulas, em que os alunos teriam abordagens tradicionais, por meio da explicação do professor e, posteriormente, à guisa de encerramento, a questão da lanterna poderia ser proposta. Preso às concepções mais tradicionais da aula como transmissão de conteúdos, o professor em questão não vislumbra a possibilidade de desenvolver problematizações, por exemplo, que poderiam levar grupos de alunos a construir o artefato proposto – ou seja, não percebe como poderia estender as questões de fluência em artefatos em articulação com a fluência Matemática, como defende Oliveira (2018).

Na tentativa de ampliar o diálogo, o pesquisador pergunta ao grupo quais suas impressões sobre os materiais trocados no grupo de WhatsApp. O professor P2 declara não ter gostado do vídeo compartilhado por P3³ e alega, paradoxalmente, que o vídeo reproduz a aula tradicional, ressaltando tal característica como negativa.

³ <https://www.youtube.com/watch?v=CBQ-jPq1YKQ>

P2: *Eu não gosto daquele tipo de método entendeu? Eu acho que a minha visão é diferente daquilo né? Senão a gente bate no tradicional, né? Eu não gosto dessa coisa assim de colocar e está colocado, eu acho que esse assunto precisa ser construído. Pode ver entra ano e sai ano e esse é um assunto que fica esquecido. E ele está esquecido mesmo. Pode ver ninguém consegue diferenciar parábola, todo mundo acha que é função.*

O professor relacionou a aula apresentada no vídeo com uma aula tradicional e infere que a falta de uma metodologia de ensino adequada relega o conteúdo ao esquecimento. Na visão desse professor, os alunos reconhecem uma parábola apenas do ponto de vista funcional.

O professor P2 continua seu relato e revela a crença de que o conteúdo “cônicas” é muito mais “fácil” do que trigonometria, por exemplo; porém, ele acredita que se criou um certo medo a respeito desse tópico e que parte disso pode ser atribuído às “figuras utilizadas”.

P2: *E também não é um assunto difícil. Todo mundo que vê cônicas acha que é oh! Mas não é, se a gente for ver é muito mais simples que um seno um cosseno uma tangente, é muito mais simples. Eu acho que o problema é o medo da imagem, daquela imagem, sabe quando a gente vê o assunto cônicas a gente vê aquelas imagens que dão medo. Quem não trabalha com isso... meu Deus. Até entender aquela imagem.*

O professor P4 faz um comentário em concordância com a observação de P2.

P4: *É verdade!*

O professor P2 revela que no caderno do aluno, no qual consta a atividade de parábola sugerida, a apresentação do conteúdo é feita de forma tradicional.

P2: *No livrinho, eu acho que ele está totalmente... para o professor a linguagem está difícil, porque ele faz demonstração de fórmulas e você imagina um professor que já não é habituado a lidar com aquilo, ver aquela demonstração de fórmulas, ver aquela imagem extremamente confusa. Eu acho que aquele exercício seria para fechar uma aula, depois de toda uma aula.*

O professor P1 ressalta que, no vídeo de introdução à parábola postado no grupo, o apresentador inicia dizendo que aquele conteúdo é do ensino superior.

P1: *Ele até começa falando que aquele exercício mesmo é para um nível superior. Ele já começa falando que não é para a gente se assustar, que aquele exercício não é para um aluno do Ensino Médio: “ – Mas, aluno, se você está vendo isso, não se preocupe, porque isso é para um nível superior”.*

P4: *Exatamente.*

O pesquisador chamou a atenção para a fala de P2, quando relata que o exercício sugerido, sobre a lanterna de um automóvel, poderia ser inserido no término da aula, como fechamento dela, evidenciando uma preocupação de cunho didático. O professor P3, embora não tenha participado do encontro, compartilhou uma sugestão de pensar uma aula a partir da perspectiva da Sala de Aula Invertida⁴ como método de ensino, porém P3 não especificou quais conhecimentos possuía sobre essa ideia.

P2: *Eu acho que a sala invertida, eu vejo assim, ela é muito mais trabalhosa do que a gente pensa. Vamos supor que a gente vá falar de parábolas, só que se você for jogar na mão do aluno e o aluno for um aluno pesquisador, o professor pode cair numa grande armadilha, entendeu? Então, esse negócio de você jogar na mão do aluno e esperar, você não sabe o que vem de lá, então eu acho que numa dessas o professor de Matemática pode se desestabilizar, ele pode perder o controle daquela sala, perder o controle daquela aula e ainda virar motivo de “sarro” dos outros. Então eu tenho um pouco de receio dessa história de sala invertida.*

Os posicionamentos de P2 revelam uma preocupação com a utilização da metodologia da Sala de Aula Invertida, o que parece se justificar em grande parte pelo desconhecimento a respeito das formas pelas quais o método pode ser usado, quais suas reais finalidades e de que forma semelhante uso poderia subsidiar o trabalho didático do professor e a autonomia do aluno.

P4: *Eu faria assim, construindo junto com o cara, entendeu? Até lá no final, aí o professor que não está preparado ele vai se preparar junto com o cara, óbvio que*

⁴ O conceito de sala de aula invertida, que tem como um de seus precursores o pesquisador norte-americano Jon Bergmann, se baseia na ideia na qual o estudante realiza pesquisas, antes da aula, utilizando materiais fornecidos pelo docente e seguindo suas orientações sobre onde, e como, realizar pesquisas na internet. Os alunos se apresentam dessa forma como protagonistas de seu aprendizado, compartilhando informações durante a aula, sem adotar a postura passiva de um receptor de informações.

ele acaba aprendendo mais e o próprio aluno vai desenvolvendo esse interesse mútuo. Eu vejo assim. Agora jogar e esperar eu tenho um pouco de receio. Em história que dá para gerar aqueles debates... agora em Matemática onde o professor tem que ficar intervindo o tempo inteiro para eles construírem algum conhecimento, eu tenho um pouco de receio. Talvez eu possa estar errado também, sei lá talvez a minha linha esteja muito antiga.

O professor P2 revela sua preocupação quanto à maneira que o professor pode conduzir a atividade de tal forma a envolver os alunos na proposta da aula.

P2: *Mas o problema é fazer um aluno do Ensino Médio entrar nessa com você né? Mandar o cara bater duas estacas no chão e amarrar uma cordinha e fazer com que ele veja... não sei se ele cai nessa.*

Nesse ponto, o pesquisador buscou explorar, por meio de definições e exemplos, o que seria a Sala de Aula Invertida como método de ensino. Algumas possíveis etapas do processo são exploradas: a forma como o professor poderia orientar os alunos sobre o que eles poderiam pesquisar sobre o tema eleito, quais vídeos poderiam assistir, quais livros deveriam consultar etc. Dessa forma, o professor orientaria sobre as fontes de estudo dos alunos, o que faria que os estudantes pudessem, por exemplo, uma vez inseridos na perspectiva da Sala de Aula Invertida, apresentar aquilo que pesquisaram, e, em colaboração com outros colegas e com o professor, encaminhassem a institucionalização do conhecimento. Detentor de conhecimento do conteúdo – *content knowledge*, na perspectiva de Shulman (1986) – e organizado a partir de um planejamento que leva em conta as estratégias adequadas para o ensino daquele conteúdo – *pedagogical content knowledge* (SHULMAN, 1986) – o professor incentiva o aluno a buscar subsídios para o processo de construção do conhecimento, em papel ativo, e se coloca como um orientador e alguém que também pode aprender.

A sugestão da sala invertida foi especialmente rica para discutir questões referentes ao aspecto pedagógico/didático do conhecimento e que poderiam ser empregados pelos professores nas elaborações de suas aulas. O professor P3 estava mais familiarizado com essa proposta, participando mais das discussões. Os professores P1 e P4 não conheciam a ideia em debate, mas se mostraram interessados em aprender mais sobre o assunto.

A proposta da Sala de Aula Invertida levou os participantes a refletirem sobre as questões pedagógicas/didáticas do conhecimento. Antes do encontro, esses professores associavam questões pedagógicas a “saber ensinar”, algo como “falar de forma clara e que o aluno compreendesse”. Durante todo o encontro, os professores P1 e P4 se mostraram muito reticentes em participar das discussões, porém observaram tudo com muita atenção.

As discussões levantadas aqui permitem pensar, principalmente a partir do discurso de P2, que ainda persiste certo receio de delegar ao aluno responsabilidades sobre seu próprio processo de aprendizagem. Autores como Kenski (2003) e Oliveira (2007) indicam que essa forma de pensar ficou evidenciada com a maior disponibilidade de tecnologias digitais em sala de aula; ainda antes, Borba e Penteado (2001) mencionam que o uso de semelhantes interfaces faria com que os professores tivessem que deixar suas “zonas de conforto”, o que nem sempre seria visto como algo positivo.

Ainda que boa parte dessa discussão possa representar algo superado, dada a pervasividade das tecnologias contemporâneas, e sua inserção cada vez mais intensiva nos ambientes escolares, não se pode descartar a influência dessa relutância que alguns professores podem ter, o que acaba interferindo em seus próprios processos de formação. Ainda que não tenham mencionado diretamente, a maior parte das pesquisas e leituras relacionadas às tarefas delegadas aos alunos quando do emprego da Sala de Aula Invertida advêm de páginas da rede mundial de computadores instaurada a partir da Internet. Buscar nas fontes previamente selecionadas pelo professor não impede, é claro, que os alunos recorram a outras, mas representam uma forma de que o professor, ele mesmo, também leia, pratique e busque maiores subsídios. Deslocado da posição de fonte absoluta de saber, o professor não deve conhecer ou se preparar menos. Ao contrário, deve aprimorar seus conhecimentos a partir, também, da elaboração de estratégias didáticas que integrem as diversas formas de conhecer e de obter informações para a resolução de problemas matemáticos. Colocando-se em debate, em discussão, em aprendizado conjunto, o professor desloca a perspectiva do que Freire (1968) chamava de “conhecimento bancário” e ajuda a instituir formas mais autônomas e democráticas de aprender.

O próximo aspecto da discussão e da análise tem seu foco voltado para o conhecimento do conteúdo, de forma mais específica.

Aspecto do Conteúdo

Conforme já mencionado, o professor P3, embora não tenha participado do encontro, enviou um *link* para o grupo de WhatsApp, de modo a permitir o acesso a um vídeo no *YouTube*⁵ no qual uma pessoa faz uma demonstração da equação reduzida da parábola, a partir de uma parábola com o vértice na origem do sistema cartesiano e concavidade voltada para cima.

O autor do vídeo inicia sua explanação relatando que parábola é um conteúdo da geometria analítica ensinada no Ensino Superior. Por outro lado, conforme nossa revisão de literatura apontou, esse conteúdo já é trabalhado desde o Ensino Básico. A questão da seleção de conteúdos que façam parte seja do aprendizado do professor, seja de seus grupos de alunos, já era tratado como essencial desde Oliveira (2007) – nesse sentido, ter um recurso empregado como parte da estratégia de ensino e que contenha um erro, no caso, relacionado a um aspecto curricular, é algo a ser evitado, ou, pelo menos, ressaltado, se for o caso.

Os professores P1 e P4 disseram que não se lembravam de terem estudado esse conteúdo, enquanto o professor P2 possui experiência lecionando cônicas para o Ensino Médio por mais de 10 anos. Nesse sentido, então, P1 e P4 indicaram que achavam difícil a abordagem proposta no vídeo. Assim, o pesquisador buscou refazer os passos da problematização proposta nesse recurso utilizando a lousa digital do próprio Zoom e, depois, utilizando o GeoGebra, na versão disponível no endereço eletrônico https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

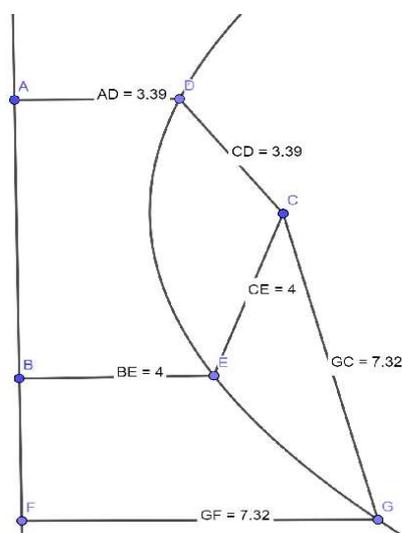
A demonstração feita pelo pesquisador, a partir da proposta do vídeo trazido por P3, foi a mesma constante de nosso capítulo sobre cônicas. A utilização do *software* GeoGebra foi muito útil para que os professores relacionassem a parábola do ponto de vista da Geometria Analítica, da Geometria Sintética e do pensamento funcional. Ainda que o vídeo possa ter pontos em que ressalvas possam ser feitas, como já mencionado anteriormente, foi importante discutir suas propostas, levando em conta, inclusive, o aspecto colaborativo do qual se investe a proposta de pesquisa

⁵ <https://www.youtube.com/watch?v=CBQ-jPq1YKQ>

– não se pode esquecer que P3, um dos membros do grupo, propõe o vídeo como recurso e elemento de discussão acerca das cônicas, trazendo essa proposta como contribuição às aprendizagens em jogo no grupo e como forma de incentivar uma discussão acerca do conteúdo em trabalho.

Conforme observamos na Figura 23, as propriedades envolvendo lugar geométrico dos pontos que constituem uma parábola são evidenciadas com a utilização do *software*. Colaboram para essa caracterização aspectos mencionados por autores como Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018) e explorados pelo pesquisador, como o dinamismo proporcionado à construção pelo *software* e empregado para ressaltar as propriedades em discussão, as possibilidades abertas à experimentação, em grande parte disponíveis a partir da implementação do conceito de *clicar-e-arrastar*, e, em articulação com os outros dois, a perspectiva da visualização, com um *feedback* praticamente imediato às ações tomadas e às intervenções na representação.

Figura 23. Lugar geométrico de uma parábola



Fonte: construído pelo autor

Neste ponto, o emprego da tecnologia digital se mostrou uma ferramenta importante, a qual possibilitou uma melhor exploração da ideia de lugar geométrico de uma parábola. Ainda aqui, optamos pela utilização do *software* dinâmico de geometria GeoGebra, por ser um *software* conhecido por P2 e P3 e sugerido por P2.

O pesquisador evidenciou para os professores o lugar geométrico de uma parábola e a observância de que nem sempre uma parábola será representada por

uma função. O professor P2 relatou que a fragmentação do ensino de cônicas e o isolamento desse conteúdo em relação aos demais conteúdos curriculares se constitui como um problema que só poderá ser solucionado perante uma revisão curricular.

Os professores se mostraram muito interessados em pensar uma aula envolvendo parábolas e P4 sugeriu a realização de outros encontros objetivando um aprofundamento na metodologia de ensino da sala de aula invertida. Esses professores se mostraram bastante motivados em explorar metodologias de ensino de Matemática. Quando o pesquisador perguntou aos professores sobre quais metodologias de ensino eles estariam mais familiarizados, eles sentiram dificuldades em definir tais metodologias. A associação de metodologias de ensino com teorias de aprendizagem resultantes de estudos efetuados por Piaget ou Vygotsky surgiu de forma predominante entre os professores, o que, em si, representa um equívoco, já que não se pode indicar que teorias de aprendizagem como o construtivismo ou o sociointeracionismo representem, diretamente, metodologias de ensino. Além disso, ainda que também não representem metodologias, mas teorias da educação Matemática predominantemente ligadas à didática, e em que pesem as extensões e cursos de pós-graduação mencionados no âmbito do ensino de Matemática, os professores não pareciam conhecer pressupostos de teorias bastante discutidas no meio: não houve qualquer menção à Teoria Antropológica do Didático (Yves Chevallard), à Teoria das Situações Didáticas (Guy Brousseau), às teorias relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado (David Tall e colaboradores), à Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Raymond Duval), dentre outras, evidenciando uma desconexão entre as pesquisas acadêmicas e a prática docente na escola básica. É preciso esclarecer que, mesmo que as menções relacionadas não se tratassem diretamente de métodos de ensino, teria sido possível discutir mais amplamente sobre tais métodos com base em teorias que os subsidiassem.

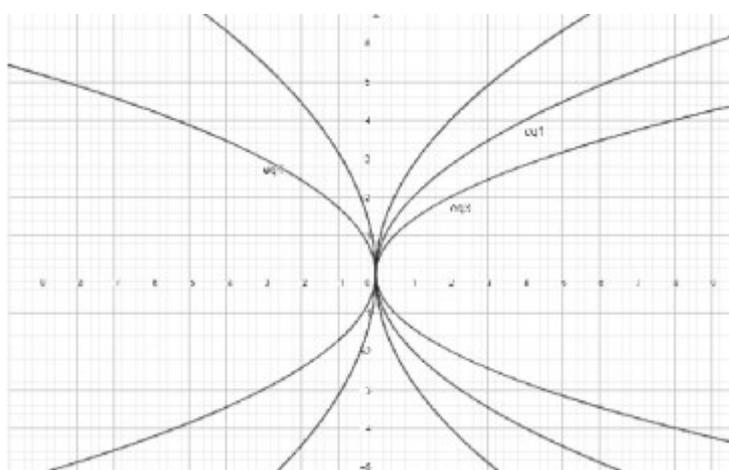
O compartilhamento de informações no grupo de WhatsApp, as indicações de vídeos e leituras, bem como o prévio estudo dos integrantes antes dos encontros virtuais possibilitam um melhor aproveitamento do tempo. A instituição permanente de tal grupo de trabalho, que tinha como objetivo se tornar parte de uma cultura de formação continuada dos professores, pode representar a ponte necessária entre a escola e as pesquisas acadêmicas.

Prosseguindo com aspectos relacionados ao conteúdo matemático, após explorarmos as propriedades da parábola do ponto de vista da Geometria Sintética, passamos a explorar esse conteúdo do ponto de vista da Geometria Analítica e construímos algumas parábolas no plano cartesiano, de tal forma a evidenciar as variações gráficas à medida que as equações eram alteradas.

- Podemos observar, a partir da Figura 24, as representações gráficas das expressões algébricas estabelecidas por meio das seguintes equações:

eq 1: $y^2 = 4x$; eq 2: $y^2 = 8x$; eq 3: $y^2 = 2x$; eq 4: $y^2 = -3x$; eq 5: $y^2 = -10x$

Figura 24. Gráficos de parábolas



Fonte: construído pelo autor

Nesse encontro foram discutidas algumas ideias que emergiram das discussões, como a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Os professores P1 e P4 não se recordavam acerca de outros tópicos da Geometria Analítica, como a equação da circunferência. Tal fato, aliado ao tempo limitado do encontro, fez com que a abordagem sobre parábolas ficasse restrita ao seu vértice na origem do sistema cartesiano.

Sobre as questões acerca do conhecimento do conteúdo (SHULMAN, 1986), os professores P2 e P3 reconheceram que o estudaram, mas tinham pouca experiência em seu ensino. Segundo P2, em sua prática docente, houve um esvaziamento de conteúdo e as demonstrações “foram retiradas” de suas intervenções. Por não se recordarem de conceitos como a distância entre dois pontos no plano cartesiano, em uma perspectiva da Geometria Analítica, o desenvolvimento das demonstrações matemáticas ficou prejudicado, e, devido ao pouco tempo

disponível, a exploração da parábola se concentrou com seu vértice na origem do sistema cartesiano.

A utilização do *software* dinâmico de geometria GeoGebra possibilitou aos professores perceberem a relação dos parâmetros da equação e sua respectiva representação gráfica. O professor P2 associa essa dificuldade à fragmentação do ensino de cônicas e à falta de recursos tecnológicos de boa parte das escolas brasileiras.

Mais uma vez os professores sugeriram encontros onde esses conteúdos introdutórios da Geometria Analítica pudessem ser estudados, evidenciando novamente, a pertinência de um espaço de formação mais amplo e menos direcionado. Mais do que o estudo de conteúdos matemáticos, esses professores buscavam, sempre que possível, discutir problemas envolvendo os desafios por eles vividos na prática escolar. Colocados em um âmbito em que se mostram essenciais o conhecimento do conteúdo, o conhecimento didático e o conhecimento da tecnologia, interrelacionados nas formas previstas inicialmente por Shulman (1986) e posteriormente por Mishra e Koehler (2006), pode-se aventar que boa parte das fragilidades formativas dos professores incide diretamente sobre como discutem um tema matemático e como fazem uso do conhecimento sobre ele em suas aulas (ou não fazem): claramente, o distanciamento do tema como conteúdo a ser explorado no cotidiano escolar faz com que os professores não desenvolvam maiores apropriações sobre ele.

Esse distanciamento não é suprido pelas tecnologias de forma simplista, uma vez que tais recursos são escalados em função da pertinência da estratégia didática, que não prescinde de amplo conhecimento sobre o conteúdo. Usar simplesmente a tecnologia, ou seja, apenas inserir um *software* ou aplicação no processo de ensino, não é a intervenção recomendada, por exemplo, por Oliveira (2018), que condiciona o uso de recursos no plano aplicado ao planejamento e à estratégia didática engendrados no plano referencial, como já argumentamos no capítulo um desse relatório e ilustramos na Figura 2. Ali, vemos claramente que os temas matemáticos obedecem às referências de saber formal a que se filiam, assim como as tecnologias específicas representam aportes às tecnologias da inteligência e as estratégias se ligam às referências didáticas originais.

Ainda sobre as intervenções dos sujeitos no âmbito das discussões, o professor P2 prossegue em suas colocações, ao associar o Teorema de Pitágoras com as equações reduzidas da parábola.

P2: *A nível de fórmula, as fórmulas são todas fórmulas reduzidas, assim, você já pega a fórmula reduzida... porque você não vai mostrar a fórmula desde o início. Elas são muito parecidas, então é assim, é substituição, não tem muito o que pensar. Aí eu acho bacana, porque a gente pode ver que em todas elas aparece Pitágoras ali né? Constantemente e é uma coisa que eles já estão acostumados.*

Para esse professor, ampliar o conhecimento do aluno, para que ele reconheça uma parábola do ponto de vista da geometria analítica e não apenas como uma função é uma tarefa difícil. Entretanto, apesar das alegadas dificuldades, esses professores desejam uma mudança nesse quadro, embora não consigam esclarecer a forma como isso poderia vir a ocorrer. Esse sentimento de impotência carrega em si um autêntico “pedido de socorro”. Isso se evidencia pelo fato desses professores desejarem participar de outros encontros e, mesmo com todas as limitações, continuarem estudando, de modo a prover melhor suporte a seus alunos. As limitações de formação docente e de acesso a recursos, que tornam esse processo ainda mais “sofrido”, são trazidos nos trabalhos de Oliveira (2018) e de Borba (2021), inclusive, no caso dessa segunda referência, indicando como as questões ligadas à pandemia do COVID-19 foram determinantes para aprofundar diferenças e acentuar as dificuldades, tanto de uso de tecnologias e de interfaces relacionadas ao ensino de Matemática, quanto de formação continuada para trabalho com os temas da escola básica.

O mesmo professor prossegue em suas asserções, justamente ao indicar suas perplexidades relacionadas ao tema matemático em discussão:

P2: *Na parte da parábola, talvez eu fosse sofrer um pouco porque ele vem com aquela coisa de função de parábola, né? E quando chega nessa parte de cônicas a gente não está falando de função né? A gente está falando da própria parábola né?*

Nessa constatação P2 nos revela que possui o conhecimento sobre a distinção dos diferentes tipos de registros de representação, embora esse conhecimento pareça precisar de um aprofundamento para que a confusão se dissipe. Apesar do forte interesse desses professores em realizar mais encontros de formação continuada,

como os iniciados na presente pesquisa, são comuns as alegações, por parte deles, de que a brutal carga de trabalho impossibilita um real envolvimento com os estudos. As atividades assíncronas, como as realizadas no grupo de WhatsApp, obtiveram maior adesão, uma vez que os diferentes tempos docentes puderam ser respeitados, conforme já mencionava Kenski (2013) em seus estudos sobre essa temática.

Esses professores reconheceram que seus saberes não eram os mais adequados, ou suficientes, para se ensinar o conteúdo “cônicas” e se mostraram desejosos de outras oportunidades de formação continuada. Os professores puderam mais especificamente nesse encontro, compreender um pouco melhor a ideia de lugar geométrico de uma parábola, a importância de seus elementos (como foco, vértice e reta diretriz) para a compreensão do conceito, tanto no universo da geometria sintética, quanto na geometria analítica.

Além disso, os professores demonstraram desconforto com a possível utilização de *softwares* como o Winplot ou Cabri, preferindo o emprego de uma interface deles conhecida, como o GeoGebra. Devido ao tempo e quantidade de encontros serem limitados, acabamos utilizando o GeoGebra mesmo, porém acreditamos que a realização de mais encontros e a exploração de outras *softwares* com diferentes interfaces, aliados a uma sólida constituição do grupo de WhatsApp, propiciaria aos integrantes da pesquisa atingir diferentes estágios de fluência (OLIVEIRA, 2018).

Para um melhor aproveitamento da exploração das parábolas na perspectiva da Geometria Analítica, seria necessária a realização de outros encontros nos quais fosse possível um estudo de conteúdos introdutórios, como distância entre dois pontos, distância entre ponto e reta, ponto médio e circunferências.

Aspecto Tecnológico

As tecnologias digitais foram amplamente empregadas durante os encontros, tendo em vista, inclusive, a forma de realização deles, que implicava no uso da plataforma Zoom, porém o grupo de WhatsApp acabou ganhando grande relevância para a dinâmica das discussões e para o estabelecimento de ações colaborativas.

O grupo de WhatsApp constituiu-se como um local propício para trocas de ideias e compartilhamento de material. O professor P3, por exemplo, mesmo não

podendo participar do encontro virtual, participou ativamente no grupo de WhatsApp, compartilhando links para vídeos e propondo como opção didática a Sala de Aula Invertida. Esses compartilhamentos acabaram se tornando o início das discussões durante o encontro, permitindo reflexões sobre as questões didática e de conteúdo. Aqui, percebe-se que as questões ligadas ao uso intensivo de tecnologias se aliam às propostas de convergência indicadas em Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018), que indicam que os caminhos de intervenção e participação em ambientes mediados por tecnologias virtuais vão se constituindo a partir de interações que não exatamente lineares e controladas, no sentido impeditivo, mas que se abrem às possibilidades e adaptações que os próprios contextos de aprendizagem formam. A convergência, por sua vez, abre espaço para alternativas, nem sempre previstas formalmente nos planejamentos, mas que podem ser inseridas nos contextos formativos a partir de iniciativas dos próprios participantes. Nesse sentido, para processos de aprendizagem e formação, Oliveira (2007) menciona o importante papel do planejamento flexível, que é permeável em relação às interações dos sujeitos e às suas trajetórias.

Ainda sobre as impressões colhidas no encontro, a concepção dos professores participantes da pesquisa acerca de possíveis usos das tecnologias digitais em processos de formação se mostrou um tanto confusa, se entendermos que os diálogos acerca de como se dariam semelhantes processos sempre trouxeram perspectivas emancipadoras e autônomas (FREIRE, 1968). Entretanto, a concepção de ensino por reprodução ou por assimilação passiva de conteúdos, criticada por Bordieu (1975) desde a década de 1970, ainda se encontrava presente, como podemos observar na colocação feita por P3, no grupo de WhatsApp e que reproduzimos na Figura 25.

Figura 25. Link para vídeo sobre parábola



Fonte: dados da pesquisa

O link que pode ser visto na Figura 25, direciona para um vídeo no qual uma pessoa faz uma apresentação de parábolas utilizando uma lousa digital, empregando a mesma demonstração constante na presente tese, no capítulo sobre cônicas. Embora a tecnologia digital tenha sido empregada, a forma de utilização reproduziu aquela comumente utilizada no padrão lousa e giz – ou seja, houve apenas a mudança do suporte, sem que se propusesse uma concepção distinta da de reprodução de conteúdo (OLIVEIRA, 2018).

Ainda assim, não se pode aventar que a contribuição de P3 tenha representado um desserviço, muito pelo contrário. A partir da indicação do vídeo, que foi assistido por todos os integrantes da pesquisa, tornou-se possível uma discussão importante sobre o emprego das tecnologias digitais e não digitais nas aulas de Matemática, envolvendo temas como convergência entre distintas tecnologias, fluência e integração do uso das interfaces com os conhecimentos didáticos e específicos da disciplina (Matemática).

Os professores P1 e P4 apresentaram problemas de conectividade com a internet, dificultando assim a participação efetiva deles nas discussões. Os problemas de conectividade acabaram se tornando uma constante durante toda a pesquisa e uma das principais queixas dos professores. Em função dessas restrições, bastante

comuns entre os sujeitos e de seus cenários laborativos, não foi possível um melhor aproveitamento do tempo disponível para as interações – ainda aqui, é o cenário de precariedade tecnológica de dificuldades de acesso que permeiam a sociedade e que atingem mais as classes menos privilegiadas, como já mencionava Borba (2021).

Com base nas participações dos professores, podemos observar que P1 e P4 se mantiveram bastante reativos e não participaram de forma mais intensiva das trocas de mensagens no grupo de WhatsApp, mesmo possuindo grande familiaridade com o aplicativo. Esses professores parecem corresponder, no âmbito das asserções de Oliveira (2018), com base no trabalho de Goos et al (2003), à visão do uso da tecnologia como *mestre*, de acordo com a qual a defasagem no conhecimento específico (matemático, no caso) acaba se tornando um limitador do desenvolvimento das atividades.

O professor P2 contribuiu de forma significativa para as discussões no grupo de WhatsApp e, embora não tenha participado do encontro virtual, foram suas participações e sugestões de forma assíncrona que proporcionaram o fio condutor do encontro virtual. Importante aqui perceber, também, que as concepções de tempo podem ser diferenciadas em cenários que incluem as tecnologias digitais como interfaces de realização de atividades e de mediação de interações (KENSKI, 2013).

O professor P3 participou ativamente do encontro virtual, porém não o fez com a mesma intensidade no grupo de WhatsApp. Durante o encontro, as participações desse professor parecem colocá-lo na situação em que a tecnologia se mostra como *serva* (GOOS ET AL, 2003; OLIVEIRA, 2018), ou seja, quando os recursos tecnológicos apresentam uma forma de substituir recursos que demandariam alto custo operacional (cálculos intrincados, por exemplo), mas sem significativas mudanças nas práticas docentes. Além disso, esse professor não apresentou dificuldades com a utilização do *software* Zoom, porém a atitude de reatividade durante o encontro parece não ter contribuído para que ele explorasse diferentes possibilidades de ação e de intervenção.

A utilização do grupo de WhatsApp e a possibilidade de execução assíncrona das atividades corroboram a visão de Kenski (2013), na qual a valorização dos diferentes tempos dos professores é um fator de otimização dos processos de formação continuada – e, nesse caso, diríamos até de uma forma de facultar uma

participação que, de outra forma, talvez não fosse possível. É nesse sentido que entendemos a fala da autora, segundo a qual

O processo de formação docente é contínuo, não se esgota. Realinhamentos permanentes são necessários, mas nem sempre se dão por meios de iniciativas formais e estruturadas de ensino. A abertura para novas possibilidades de formação docente garante a otimização dos tempos desses profissionais e a qualidade do sistema educacional (KENSKI, 2013, p. 145).

Essas foram as reflexões que possibilitaram as análises aqui trazidas, relativas ao segundo encontro. A terceira reunião e suas descrições/análises é do que tratamos na seção seguinte.

6.3. A terceira reunião

O intervalo entre os encontros virtuais estava programado para ser de uma semana. A proposta sugerida para esse encontro foi o estudo das elipses, tendo como questão motivadora o movimento orbital dos planetas.

Dois dias antes da reunião, o professor P2 avisou que não poderia participar devido a um compromisso de última hora. As discussões e direcionamentos ocorridos no grupo de WhatsApp foram muito importantes para preparar e direcionar a reunião. Mesmo sem participar do encontro virtual, o professor P2 contribuiu com as discussões do grupo pelo WhatsApp, o que possibilitou uma troca maior de informações entre os integrantes da pesquisa.

De forma geral, os professores P1 e P4 se mostraram bastante tímidos e pouco participativos. Questões pessoais e de acesso podem ter interferido decisivamente nesse quadro: o professor P1 enfrentou problemas de saúde que comprometeram sua participação, enquanto o professor P4 enfrentou muitos problemas de conectividade com a internet.

Para a análise das interações ocorridas nesse encontro, também optamos por dividir o discurso em subseções, como ocorreu na seção anterior.

Aspecto Didático

A proposta desse encontro foi aprimorar os conhecimentos dos participantes, nos aspectos didático, tecnológico e do conteúdo, tendo como referência o conteúdo matemático “elipse”, por sua vez relacionado ao tema “cônicas”.

O primeiro participante a colaborar no grupo de WhatsApp foi o professor P2, que compartilhou o link para um vídeo de apresentação das leis de Kepler, com 3 minutos e 47 segundos. O professor P2 coloca o vídeo como um “bom conteúdo para introduzir o assunto e chamar a atenção dos alunos”, conforme observamos na Figura 26.

Figura 26. Link para vídeo ABC da Astronomia



Fonte: dados da pesquisa

Além disso, o professor P2 sugeriu ao grupo um estudo inicial sobre elipses por meio de um vídeo do YouTube, mantendo o padrão de materiais que esse professor julga adequados para o ensino, da mesma forma como sugeriu nos encontros anteriores: no vídeo selecionado por ele, uma pessoa faz uma demonstração das equações canônicas, com o centro da elipse na origem do sistema cartesiano.

Figura 27. Link para vídeo de introdução à elipse.



Fonte: dados da pesquisa

Dessa forma, os professores sugeriram uma sequência de aula em que, em um primeiro momento, fosse apresentado o vídeo de abertura sobre as leis de Kepler, para, então, passar a uma demonstração formal do conteúdo. Ainda que a sequência preveja alguma intervenção um pouco diferenciada da aula tradicional, talvez pela inserção do vídeo, não parecia haver um recuso teórico ou metodológico de fundo, ou seja, um direcionamento para planejar intervenções para além da mera intuição. Autores como Borba e Penteado (2001), Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018) mencionam que a mera introdução do recurso tecnológico sem a previsão de estratégias didáticas que considerem o uso da interface no contexto das representações e do tema matemático em discussão tendem a esbarrar em iniciativas que tendem apenas a substituir recursos vistos como tradicionais por elementos mais contemporâneos.

Dessa forma, o pesquisador procurou incentivar a construção de um contexto no qual aportes teóricos e metodológicos pudessem subsidiar as escolhas de estratégias. Dessa maneira, o pesquisador introduziu a ideia de *imagem de conceito e definição de conceito* (VINNER; TALL, 1991) como uma ferramenta que auxiliasse os professores a refletirem sobre a necessidade de ampliar a imagem de conceito dos alunos, antes de partir para uma definição formal do conteúdo. Nesse sentido – e nesse ponto – o quadro teórico de Vinner e Tall (1991) foi apresentado como um modelo teórico cognitivista e não metodológico. O pesquisador instigou os professores a apresentarem a metodologia que preferissem, podendo ser, inclusive, aquela com que tivessem maior familiaridade. Dessa forma, seria possível abrir discussões em torno dessas escolhas, de maneira a trazer à tona a ideia de integração entre conteúdo, didática e tecnologia e da pertinência de integração entre os diversos constructos (OLIVEIRA, 2018; MISHRA e KOEHLER, 2006; SHULMAN, 1986).

É preciso deixar claro que a sugestão de um aporte teórico não pretendeu ser intervencionista: conforme as discussões aconteceram, o pesquisador percebeu que a questão didática ficaria sem esse componente, a menos que ele próprio o introduzisse. Devido ao tempo escasso, o quadro teórico da *Imagem de conceito e Definição de conceito* (VINNER; TALL, 1991) pareceu ser pertinente para trazer uma reflexão mais sistematizada sobre a questão didática.

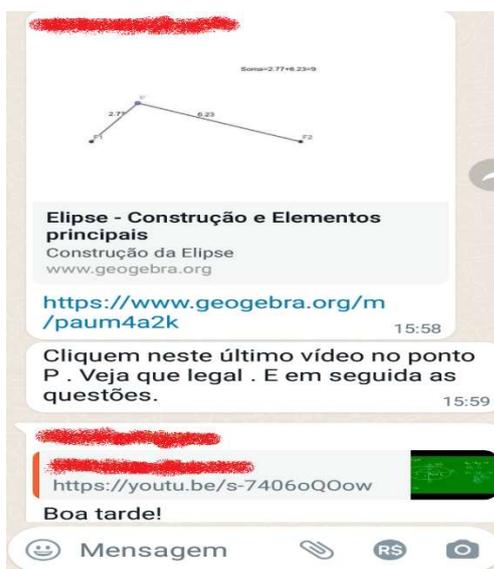
Os participantes da pesquisa se mostraram bastante interessados em saber mais sobre o modelo teórico apresentado (VINNER; TALL, 1991); assim, o

pesquisador sugeriu que essa ideia fosse incorporada às questões didáticas para o próximo encontro a ser realizado, que trataria sobre hipérbolos.

Os professores P2 e P3 se esforçaram em constituir um grupo de trabalho pelo WhatsApp, de tal forma que as reuniões realizadas na plataforma Zoom pudessem ser mais produtivas e para que o grupo mencionado se tornasse um espaço de discussões sobre as investigações sugeridas no WhatsApp.

A preocupação em utilizar a tecnologia digital como um componente em uma aula sobre elipses se evidenciou quando P3 relata acerca de uma busca que realizou na Internet, tendo encontrado um link para uma página do GeoGebra no qual é possível explorar a ideia de lugar geométrico de uma elipse e também compreender as relações entre os diversos elementos de uma elipse no plano cartesiano, inclusive explorando a ideia de excentricidade (Figura 28).

Figura 28. Link para GeoGebra - elipse



Fonte: dados da pesquisa

Os professores P2 e P3 foram os que mais participaram das discussões, contribuindo com materiais e experiências. Os demais professores preferiram se abster de participar no grupo de WhatsApp, deixando suas colocações e contribuições para os encontros no Zoom. As maiores preocupações didáticas apresentadas nesse encontro pelos professores se concentraram na maneira de utilizar a tecnologia digital de forma mais efetiva. Mesmo sem conhecer o *software* GeoGebra com profundidade, o professor P2 encontrou uma página do GeoGebra em que a atividade estava toda

preparada e o estudante só precisava interagir com o programa, explorando algumas possibilidades do *software* dinâmico de geometria. É preciso apontar, todavia, nesse sentido, que, apesar de a busca e o interesse representarem algum avanço no sentido de mobilizar recursos e ampliar o repertório didático e, eventualmente, matemático, a utilização de atividades prontas – ou, na visão de Lévy (1993), cuja interatividade seja apenas do tipo *reativo* – tende a centralizar a ideia de uso de roteiros, o que pode fazer com que as compreensões necessárias, no contexto matemático e didático, não sejam realmente mobilizadas. Autores como Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018) recomendam a construção das aplicações e a proposição de sequências didáticas (ainda que com diferentes nomes) para fomentar a intervenção no âmbito da proposta de *peessoas-com-tecnologias*, ou seja, um fazer conjunto de atores humanos e não humanos, no qual a mobilização de conhecimentos e o processo de aprender e reaprender para construir são movimentos essenciais. Ainda assim, como já afirmamos, a iniciativa foi importante por representar um movimento em direção de novas possibilidades e por permitir uma discussão justamente no sentido de que se pudesse propor uma abordagem mais crítica e autônoma.

Aspecto do Conteúdo

Os professores P1 e P4 relataram que não se lembravam de terem estudado o conteúdo sobre cônicas em algum momento de seus trajetos escolares ou acadêmicos. Durante a reunião, o pesquisador iniciou uma discussão sobre o conteúdo, comentando o vídeo postado por P2 sobre a história da Astronomia, passando, em seguida, aos comentários sobre o vídeo indicado por P3, no qual a equação reduzida da elipse, com centro na origem do sistema cartesiano, é demonstrada.

Dessa forma, o pesquisador comentou sobre o vídeo sugerido por P3, no qual são deduzidas as equações reduzidas da elipse, com foco na origem do sistema, e os professores P2 e P3 se mostraram familiarizados com aquele tipo de explanação. O link postado por P3 no grupo de WhatsApp, direcionando para uma página do *software* Geogebra (Figura 31), surpreendeu os participantes, no sentido de que os mesmos indicaram não saber sobre a possibilidade de acesso a esse tipo de recurso, da forma como era apresentado.

O pesquisador observou que aquele vídeo apresentava, ainda que de maneira bastante incipiente, uma forma de utilização da tecnologia digital, no sentido de possibilitar uma exploração que não seria possível na lousa comum. Em Oliveira (2018), esse tipo de pensamento relativo à tecnologia pode ser visto como pertencente aos estágios iniciais da “exploração e apropriação da lógica das interfaces”, quando o utilizador procura relacionar o recurso informacional às instâncias didáticas e de conteúdo apropriadas. Essa condição levou P4 a fazer a seguinte afirmação:

P4: *Eu nunca tinha visto aquilo, foi a primeira vez, eu fiquei assim...*

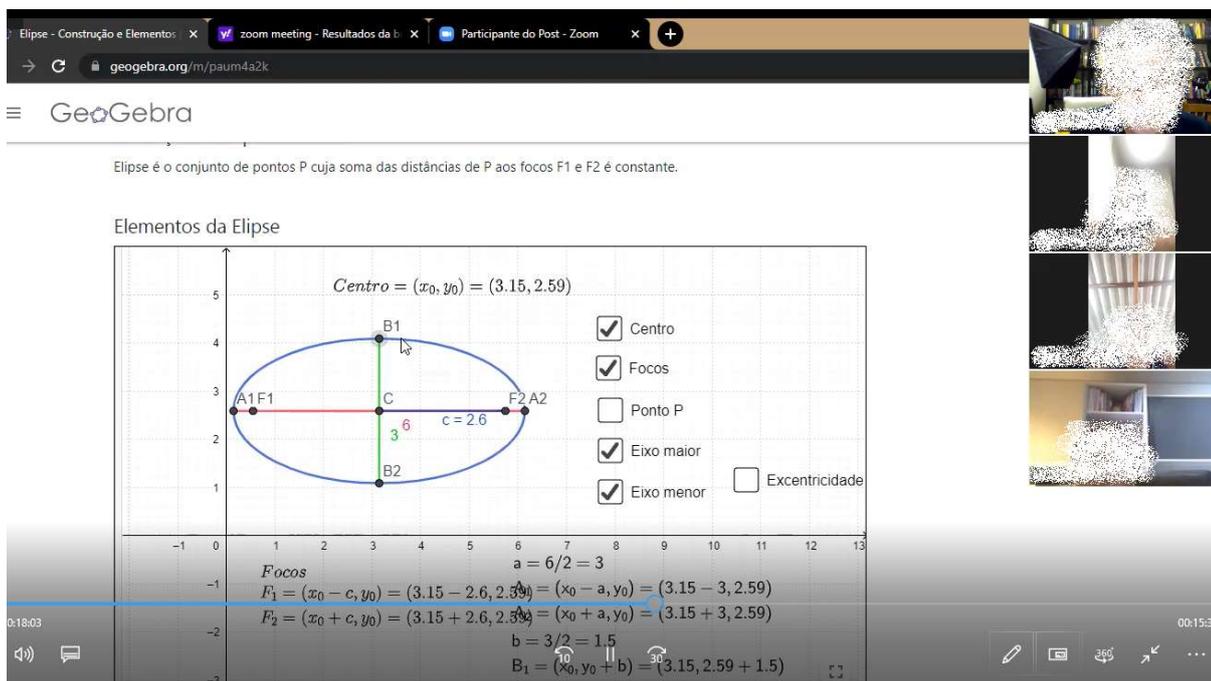
Os professores participantes do encontro evidenciaram acreditar que, para um bom desenvolvimento no processo de aprendizagem do conteúdo “elipse”, seria necessário que os alunos possuíssem um conhecimento prévio a respeito de alguns tópicos de geometria analítica, como, por exemplo, a noção de distância entre dois pontos e ponto médio.

O link apresentado nas Figuras 30, 31 e 32 proporcionou aos professores a oportunidade de ingressarem em uma página relativa do *software* GeoGebra (um repositório de aplicações), no qual o conteúdo elipse pode ser explorado de forma dinâmica, a depender a abordagem didática escolhida, permitindo a utilização de uma interface que os professores acharam fácil de utilizar, e dessa maneira, manipular elementos da elipse, como posicionamento dos focos, do centro, eixo maior e eixo menor. Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018) indicam, entre as principais possibilidades de uso de tecnologias digitais em estratégias didáticas para ensinar e/ou aprender Matemática, a *experimentação intensiva*, ou seja, a possibilidade de transformar o cenário de conjecturas iniciais em um quadro de experiências, que estimulam a formação de novas conjecturas. De outro modo, esta perspectiva

[...] compreende a elaboração de conjecturas em um espaço de experimentação, as quais são passíveis de teste e reconfigurações – as discussões assim encaminhadas podem, também, ocorrer em comunidades de pessoas-com-tecnologias que desenvolveram fluências específicas. Desta forma, é possível constituir fluxos autônomos de aprendizagem e propostas desvinculadas da mera transmissão, quanto ao ensino (OLIVEIRA, 2018, p. 69).

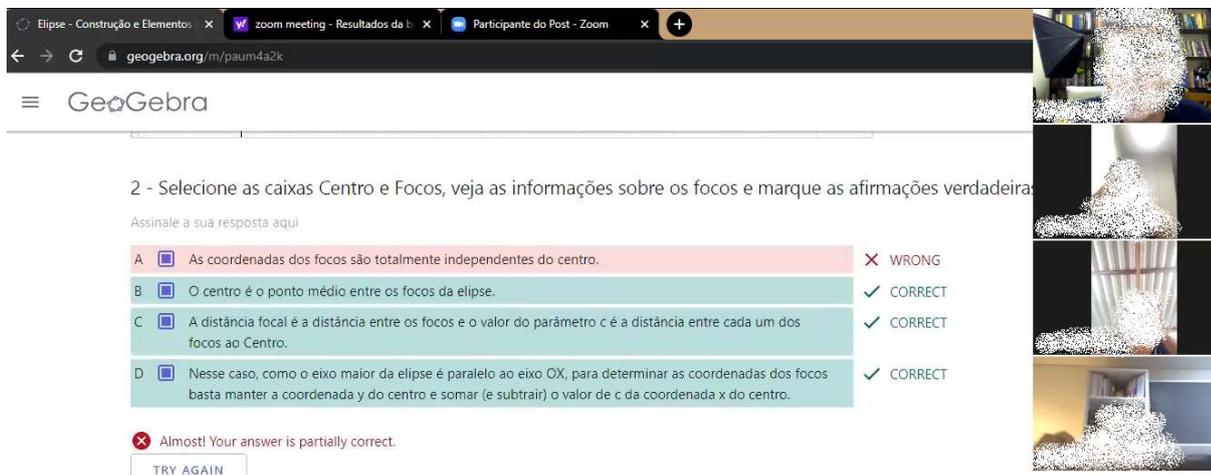
Após as manipulações, o aplicativo apresenta algumas questões que foram discutidas entre os professores e que se mostraram pertinentes para um aprofundamento em relação a esse conteúdo, como se pode verificar na Figura 30.

Figura 29. Elipse e GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa

Figura 30. Questões sobre elipse no GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa

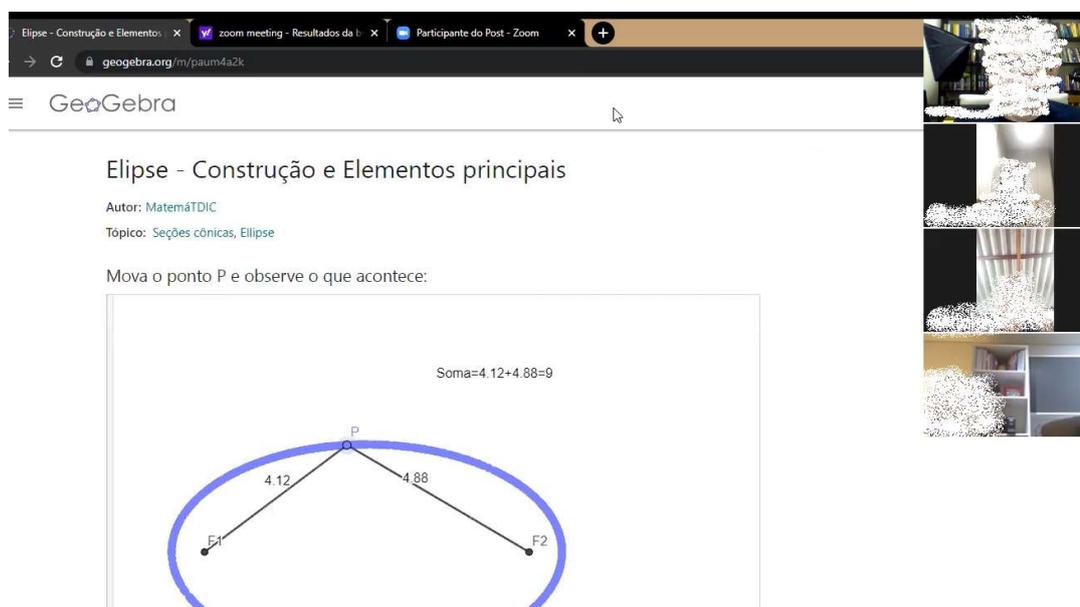
Os professores participaram das resoluções e posteriormente se ocuparam em descobrir os motivos de eventuais erros que tenham cometido. A ideia do centro da elipse independente dos focos foi resolvida com a manipulação do próprio aplicativo, no qual o deslocamento do centro da elipse mudava o posicionamento dos focos. Também foi explorada a ideia de o centro da elipse ser o ponto médio entre os focos,

o que cria uma relação de dependência entre eles. Esta situação trouxe a possibilidade da discussão sobre uma elipse com seu centro fora da origem do sistema cartesiano, possibilitando um aprofundamento sobre essas ideias.

Os professores P2 e P3 participaram mais do encontro, enquanto o professor P4, que alegou nunca ter estudado esse conteúdo anteriormente, adotou uma postura de observador. Embora não tenha participado com muitas colocações nas discussões deste encontro, P4 se mostrou extremamente interessado no tema, o que se evidenciou por perguntas que fez aos colegas. Nesse ponto, o pesquisador, atento à proposta colaborativa da formação do grupo, pouco interveio, permitindo que as interações se dessem e que a construção do conhecimento (ou sua reconfiguração) se processasse por meio da parceria que formaram.

A elipse foi também estudada do ponto de vista da geometria sintética, por meio do mesmo aplicativo. O professor P2 sugeriu que a visualização do lugar geométrico dos pontos que constituem uma parábola, da forma como é explicitada no *software* GeoGebra, poderia ser trabalhada com alunos desde o 6º ano do ensino fundamental (Figura 31).

Figura 31. Construção de uma elipse no GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa

Aspecto Tecnológico

As trocas de informações e compartilhamento de ideias no grupo de WhatsApp trouxeram uma dinâmica maior para os encontros virtuais. As possibilidades das interações assíncronas se mostraram muito proveitosas e foram ganhando força cada vez maior na constituição do grupo colaborativo. Esse aspecto é bastante importante e indica a relevância do uso de tecnologias como possibilidade em estratégias formativas, seja para a formação continuada de professores, como é o caso, seja em outras instâncias (sala de aula, oficinas, dentre outras iniciativas de ensino). Nesse sentido,

Em associação – ou melhor, *em conexão* – com professores, colegas, especialistas, dados institucionais, bancos de dados acadêmicos, enfim, com uma complexa rede de possibilidades para a construção do conhecimento, os interesses particulares passam a encontrar outros, semelhantes, afins. Aqui, as tecnologias digitais possibilitam um aprender junto de caráter amplo, em processos de cooperação e/ou colaboração, no qual os percursos são, sim, individualizados, mas as construções são potencialmente coletivas (OLIVEIRA, 2012, p. ..., grifo do autor).

As tecnologias podem constituir ambientes, mas a dinâmica e a estratégia é que podem (ou não) oportunizar a construção de uma trajetória colaborativa. Assim, o caráter quase subversivo da utilização de outra tecnologia, o aplicativo de mensagens WhatsApp, não concorreu para atrapalhar os objetivos da pesquisa ou para criar dificuldades no tratamento do assunto em discussão, mas abriu canais e possibilitou processos que talvez de outras formas não ocorressem.

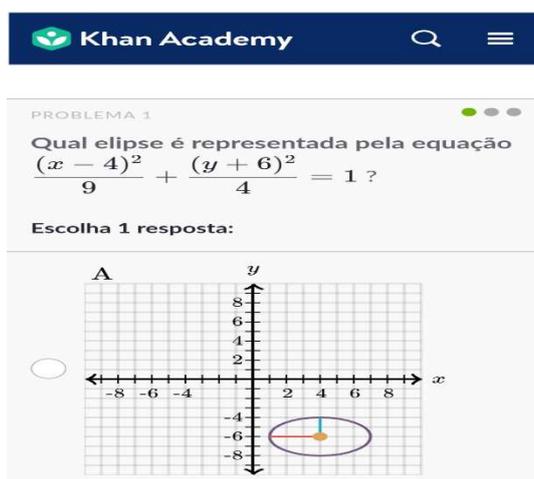
Além disso, é preciso considerar que a dificuldade em conseguir marcar um dia para as reuniões, de tal forma que todos os quatro participantes estivessem presentes, foi muito grande. Devido à grande carga de trabalho que cada participante se submete, o pouco tempo de descanso fica dividido entre trabalhos escolares e atenção à família. Dessa forma a possibilidade de um espaço virtual, em que as trocas de ideias pudessem ser realizadas de forma assíncrona, mostrou-se essencial.

O professor P2 indicou um vídeo no qual é feita uma breve explanação sobre as Leis de Kepler. Tal vídeo foi indicado pelo professor como um bom instrumento para se iniciar as discussões sobre o conteúdo.

O professor P3 indicou vídeos do YouTube, nos quais a elipse era definida como lugar geométrico e sua equação canônica demonstrada, tendo seu centro na

origem do sistema cartesiano. Os professores mencionaram algumas vezes durante a pesquisa a Khan Academy. O professor P3 compartilhou um link no qual é possível resolver alguns exercícios e fazer uma revisão sobre o conteúdo elipse de forma virtual (Figura 32).

Figura 32. Atividades *on line* – Khan Academy



Fonte: dados da pesquisa

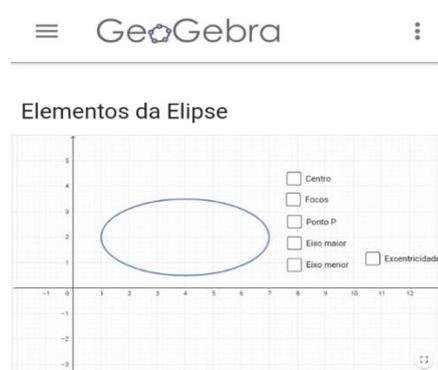
Ainda uma vez, é preciso ressaltar que os vídeos e recursos sugeridos pelos participantes nem sempre traziam aspectos nos quais o ensino era visto como uma possibilidade crítica de intervenção e autonomia, por um lado, e de construção do conhecimento em vez de sua assimilação passiva, por outro. O que pode ser deduzido das sugestões feitas pelos docentes é que os mesmos buscavam recursos que lhes permitissem usar interfaces diferentes das habituais, mas que não exigissem um grande afastamento da chamada “zona de conforto” (BORBA; PENTEADO, 2001). Aqui, o pesquisador incentivava que as discussões surgissem para aprofundar os aspectos possíveis do uso de tecnologias em propostas de ensino, de modo que os docentes pudessem avançar para perspectivas como “explorar e desenvolver trajetórias investigativas” e “elaborar estratégias didáticas” com o emprego de recursos digitais (OLIVEIRA, 2018, p. 71).

O professor P3 encontrou um link para uma página do *software* GeoGebra que trouxe uma nova perspectiva ao encontro. Por meio do recurso proposto, foi possível manipular uma elipse no plano cartesiano e observar a mudança em seus parâmetros. Esse é outro aspecto que se junta ao da experimentação, já explorado anteriormente, e que também foi tratado por Borba e Villarreal (2005) e Oliveira (2018), qual seja o

do *dinamismo*. Uma série de questões, apresentadas no próprio *software*, que poderiam ser respondidas após a observação do que acontecia com o gráfico relativo à equação da elipse, foram aproveitadas para a discussão no encontro (Figura 34). Ainda que as questões pudessem ser vistas como “estáticas”, posto que eram sempre as mesmas, as discussões que provocavam eram potencialmente diferentes pelo que se pode perceber: no grupo com o qual estávamos envolvidos, foram de uma determinada maneira, mas poderiam ser outras, dependendo das trajetórias, das experiências e de quanto os participantes eram versados no conteúdo matemático em jogo.

Os professores perceberam que seria possível encontrar materiais e ferramentas didáticas utilizando tecnologias digitais, sem a necessidade de se tornarem necessariamente peritos nesses recursos. Valeria, de maneira bastante relevante, a crítica sobre a pertinência do uso de cada recurso em determinadas situações de ensino e/ou de aprendizagem. Em relação ao uso de vídeos como recursos para aulas de Matemática, Borba e Oeshsler (2018) indicam que haveria três possibilidades do uso dos mesmos como recursos didáticos para o ensino de Matemática: gravação de aulas, como recurso didático e produção de vídeos. No caso em questão, claramente, o segundo tipo de utilização foi explorado pelos professores, que se valeram dessa modalidade para sugerir estratégias e construir propostas colaborativas de ensino.

Figura 33. Exploração da elipse com GeoGebra



2 - Selecione as caixas Centro e Focos, veja as informações sobre os focos e marque as afirmações verdadeiras:

Assinale a sua resposta aqui

A As coordenadas dos focos são

Fonte: dados da pesquisa

Todos os professores envolvidos, incluindo o pesquisador, sofreram com problemas de conectividade com a internet. O professor P4 foi o mais atingido, devido à região em que mora.

P4: *É raro ter internet, raro mesmo. Eles falam que melhorou, melhorou mas eu não vi muita mudança não... nessa parte de tecnologia.*

O professor P3 relatou as dificuldades vividas em 2020 para realizar as aulas na modalidade a distância sem um bom sinal de internet.

P3: *E depois quando a gente quer utilizar tecnologia em sala de aula, eu por exemplo às vezes quero passar um vídeo, não tem internet, não tem. Você quer fazer uma aula diferente e quando você quer utilizar o recurso tecnológico você não consegue.*

Essa crença e aparente desmotivação se mostrou presente em todas as reuniões e à medida que os encontros foram se sucedendo e os integrantes da pesquisa foram estabelecendo maiores laços de confiança, os relatos começaram a ser mais espontâneos. As diferentes condições de uso da internet e das tecnologias por alunos e professores foram identificadas, principalmente no período da pandemia, por Borba (2021), que indicou, de forma bastante taxativa, que a condição social foi determinante para que, nesse período, existissem melhores ou piores condições de uso de recursos digitais, sendo que as classes menos privilegiadas não puderam ter um acesso de qualidade às aulas e aos recursos digitais. Esse foi o aspecto em que o discurso dos professores participantes teve o tom menos entusiasmado e mais pessimista:

P4: *É isso que eu falo para você, na hora que a gente mais precisa, porque se fala tanto desse recurso tecnológico, que a gente precisa usar, precisa trabalhar, para reinventar, porque nós estamos reinventando todos os dias, tentando melhorar, buscar o aluno, para mudar a metodologia da gente trabalhar para ver se motiva ele a participar da aula, para a aula ficar interessante para o aluno, mas tem hora que a gente não tem o recurso apropriado, não dá, a hora que você mais precisa, você fala hoje eu vou fazer... na hora em que você chega na sala de aula é uma negação, a internet não funciona, não vai, não tem jeito, aí você perde tudo aquilo que você tinha planejado, tudo o que você estudou... daí tem que voltar tudo atrás e usar o plano B, né?*

P3: *O metodológico de sempre.*

P4: *É... falo para os meus alunos, professor entra na sala com o plano A, B e C. São três planos, todos os dias, várias estratégias, porque é muito raro funcionar o plano A.*

Em relação ao segundo encontro, pudemos perceber uma evolução no sentido da categorização proposta em Oliveira (2018) com base em Goos et al (2003), em que o professor P2 parece ver a tecnologia como *parceira*. Esse professor buscou um maior protagonismo em relação ao encontro, pesquisando vídeos que pudessem contribuir para uma visão mais ampla do conteúdo, valorizando aspectos históricos e epistemológicos sobre as elipses.

O professor P3, que não havia participado do segundo encontro, pesquisou estratégias de utilização das tecnologias digitais de tal forma que superasse a estratégia lousa e giz, em termos de dinamicidade e interação. Embora esse professor não tenha desvelado as diferentes interfaces do *software* GeoGebra, encontrou um tutorial no qual era possível ao professor fazê-lo. Oliveira (2018) menciona a autoaprendizagem como aspecto importante do uso de tecnologias no ensino. A superação da ideia dos roteiros e dos recursos semiprontos parece ser algo que tende a ocorrer com o tempo, a medida que os docentes adquirem maior autonomia e que envolvem e transformam, também, os outros dois aspectos de desenvolvimento profissional abordados por Shulman (1986), o didático e o relativo ao conteúdo.

As possibilidades de descrição e interpretação, como pretendidas por Erickson (1989), foram as que descrevemos até aqui, quanto ao terceiro encontro. Prosseguimos, finalmente, para a última reunião, cujos aspectos analisamos a seguir.

6.4. A quarta reunião

A realização da quarta reunião ocorreu após duas tentativas. O pesquisador, prevendo que esse seria o último encontro, pretendia ter todos os participantes presentes. A reunião foi agendada previamente para uma quinta-feira à noite, por ser esse o único dia/horário da semana que todos poderiam participar. No dia combinado, o professor P4 alegou ter esquecido da reunião e disse, posteriormente, que foi dormir cedo, pois estava extremamente cansado naquele dia (ainda que nenhuma justificativa tenha sido solicitada). O professor P2 também não conseguiu comparecer

devido a um problema familiar; desta forma, a reunião foi remarçada para a quinta-feira seguinte, no mesmo horário.

No dia combinado, o professor P1 avisou, dez minutos antes do encontro, que não poderia participar devido a um compromisso de última hora com amigos que estavam chegando em sua casa. O tempo estava muito instável na região da cidade em que se encontravam, o que potencializou os problemas já recorrentes com o acesso à internet. O professor P4 estava com uma conexão de internet completamente instável, impossibilitando, assim, sua participação. Dessa maneira, a última reunião precisou ser novamente remarçada.

A dificuldade encontrada em reunir todos os professores parece indicar o acerto nas asserções de Kenski (2013), segundo as quais os diferentes tempos docentes precisam ser valorizados e outros recursos tecnológicos para a realização de formações continuadas precisam ser considerados:

Os novos recursos disponíveis nas tecnologias digitais aumentaram a produção e a oferta de cursos em diferenciados formatos: acoplados a celulares (*mobile learning*); pela formação de comunidades de aprendizagem; via redes ou fóruns permanentes de especialistas; por meio de jogos de variados tipos e níveis de complexidade, entre outros. Também oferecem condições para que os próprios interessados em ampliar seus conhecimentos construam suas trilhas de aprendizagem, totalmente personalizadas, de acordo com suas disponibilidades (KENSKI, 2013, p. 60).

Sem que se considerasse, como ocorreu ao longo de toda formação, outros tempos além dos contatos online promovidos nas ocasiões dos encontros, as interações ficariam extremamente prejudicadas e talvez não fosse possível promover os estudos propostos – além disso, o aspecto de trabalho colaborativo ficaria prejudicado, pelo mais óbvio dos motivos: a impossibilidade de participação, calcada em questões básicas como falta de tempo (por excesso de trabalho) e dificuldade de acesso (por problemas de infraestrutura).

Do ponto de vista da reunião em si, esse encontro virtual teve por objeto de estudo a hipérbole. Dessa vez, não houve uma questão motivadora predefinida e os professores ficaram livres para encontrar uma, caso achassem necessário. Diferentemente das análises realizadas em relação aos outros encontros, aqui optamos por descrever e interpretar as interações sob os aspectos do conteúdo, didáticos e tecnológicos conjuntamente. Isso ocorreu porque a dinâmica desse

encontro foi distinta. As trocas realizadas foram mais fluidas e os professores assumiram, em maior o menor grau, posturas autônomas mais significativas, o que, por assim dizer, permitiu que eles mesmos direcionassem os rumos da reunião e dos espaços/tempos a ela agregados.

Aspectos Didático, Tecnológico e de conteúdo

Como mencionamos, com a evolução dos encontros e o maior entrosamento entre os participantes do grupo, algumas barreiras foram quebradas e a comunicação começou a ficar mais fluída. Quanto ao conteúdo “hipérbole”, apenas o professor P2 afirmou já ter tido contato com ele, e, inclusive, com experiência em ensino. Os demais professores, incluindo P3 que disse que estudou cônicas no ensino superior, disseram que nunca tinham estudado hipóbole, seja como aluno na educação básica ou no ensino superior.

Novamente, o grupo de WhatsApp foi determinante para o desenvolvimento/continuidade do encontro no ambiente virtual Zoom. Mesmo sem uma questão inicial sugerida pelo pesquisador, os professores buscaram aplicações da hipóbole que pudessem se transformar em uma questão inicial para os estudos.

Os professores iniciaram a reunião comentando sobre o papel das cônicas no Novo Ensino Médio. O professor P3 relatou que a escola estadual na qual trabalha está utilizando muito a ideia de projetos.

P3: *Agora no estado a gente só vive embaixo de projetos. Projetos, projetos e projetos.*

P4: *Exatamente. É uma coisa de louco.*

P2: *Mas vocês acham que isso aí está dando resultado? Você acha que dá resultado isso daí?*

P4: *Se o aluno se dedicasse mais um pouquinho, eu acho que fluiria sim.*

P3: *Está uma bagunça.*

Os professores revelaram não possuir clareza sobre as propostas do Novo Ensino Médio, e sentem que essa falta de clareza é de todo o sistema, não apenas deles, levando a práticas desconexas e aparentemente sem lastro teórico. A avaliação de novas propostas não compõe entre os objetivos desse estudo, mas parece ser

necessário que outras pesquisas se debrucem sobre a forma pela qual os professores estão sendo apresentados às mudanças curriculares, de maneira a avaliar como esses profissionais estão sendo engajados (ou não) nos contextos de formação e preparação para o trabalho sob novas diretrizes. Conhecimentos desse tipo, envolvendo os programas de ensino, as propostas e os currículos são apontados por Shulman (1986) como essenciais para a formação da base do conhecimento docente.

O professor P3 relata que se lembra de ter visto “alguma coisa” sobre o tema do encontro no ensino superior, em Geometria Analítica, ou seja, vagamente, em seu depoimento, alguns temas envolvendo hipérbole.

P3: *Eu não me lembro de ter visto no colegial, eu não me lembro mesmo. Eu lembro de ter visto na faculdade, algo bem pouco, mas vi.*

O professor P2 continua, nesse ponto, defendendo que as cônicas poderiam ser apresentadas desde o ensino fundamental.

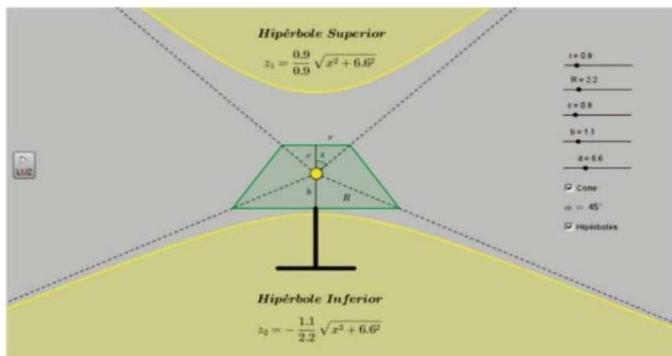
P2: *Depende muito de como é apresentado isso aí né? Na verdade, você pode apresentar isso desde o fundamental, com materialzinho para as crianças, de montar. Depende de como é implantado. É como eu disse no início, conforme ela foi ficando isolada, ela foi virando um monstro, em que o próprio nome dela foi se tornando um monstro para os professores. A partir do momento que eles pegam um conteúdo desses e jogam só lá para o médio, eles criam uma barreira.*

Essa fala de P2 revela uma vontade de discutir as questões curriculares e históricas que envolvem o ensino de cônicas, além do próprio conteúdo. Todos os professores se mostraram curiosos e participativos quando o assunto estava relacionado com currículo.

O professor P2 postou no grupo de WhatsApp o exemplo do abajur, colocando-o como uma possível questão motivadora, como se pode observar na Figura 34.

Figura 34. A hipérbole e o exemplo do abajur

Simulação no Geogebra.



Fonte: dados da pesquisa

A questão didática se mostrou uma preocupação evidente para esse encontro. Após a sugestão do professor P2 em apresentar o conteúdo hipérbole por meio do exemplo do abajur, o professor P3 sugere a construção de um hiperbológrafo, introduzindo aspectos da história da Matemática nas discussões.

Figura 35. Hiperbológrafo

4.1.3 Hiperbológrafo: Instrumento articulado para traçar hipérbolas



Figura 4.7: Hiperbológrafo 18:14

Proposta de aula 3

Esta atividade pode ser desenvolvida em grupos num laboratório de matemática. Os alunos deverão montar um instrumento denominado hiperbológrafo (Figura 4.7). Trata-se de um instrumento articulado utilizado para traçar hipérbolas. Após sua montagem os alunos devem utilizá-lo para construir hipérbolas e em seguida devem fazer discussões e verificações das propriedades da hipérbole. O professor deverá levar os pedaços de madeira já cortados nos tamanhos desejados e com os respectivos furos e a atividade pode ser desenvolvida com os alunos montando o instrumento e verificando o porquê de seu funcionamento, seguindo um roteiro pra aula. 18:15

Material:

- ✓ 8 pedaços de madeira já cortadas e com os respectivos furos;
- ✓ 4 suportes de espaçamento;
- ✓ Uma base para a montagem;
- ✓ Parafusos e porcas;

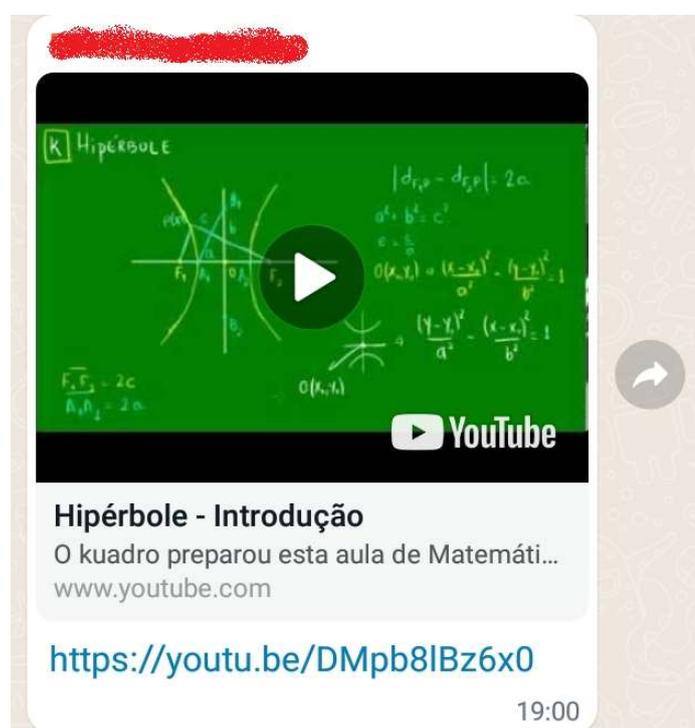
Fonte: dados da pesquisa

A construção de um hiperbológrafo suscitou a discussão sobre um possível laboratório de ensino de Matemática (LEM). O estudo sobre o LEM é algo que

interessou os professores e poderia se tornar um tema para futuras pesquisas, com base em uma proposta de desenvolvimento de formações com a proposta *pessoas-com-tecnologias* (OLIVEIRA, 2018), considerando que a construção de elementos formativos dessa maneira não inclui apenas tecnologias digitais, mas pode envolver dispositivos e interfaces de outros tipos, em regime de convergência.

O professor P2, nos moldes dos encontros anteriores, postou no grupo de WhatsApp um link para uma videoaula, em que a hipérbole é apresentada com seu centro na origem do sistema cartesiano (Figura 36). Dessa maneira, o recurso digital mencionado é empregado para discutir a equação reduzida da hipérbole.

Figura 36. Introdução à hipérbole



Fonte: dados da pesquisa

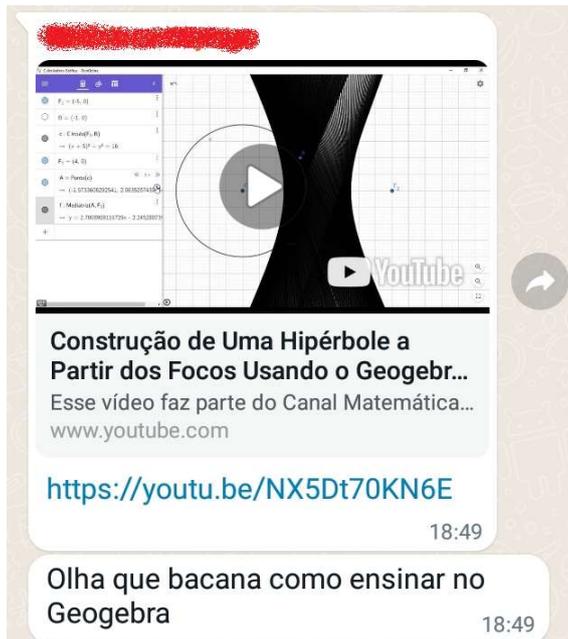
Para P2 a apresentação direta de conceitos desestimula os alunos, fazendo com que eles percam o interesse pelo tema da aula. Ele sugere que se trabalhe com instrumentos similares ao hiperbológrafo, que sejam feitas contextualizações nas quais a ideia de hipérbole seja apresentada, para que apenas no final fossem feitas demonstrações, ou seja, o desfecho se desse a partir de um recurso mais direto aos aspectos formais do conhecimento matemático envolvido. Essa forma de desenvolvimento de trabalho autônomo, por parte dos alunos, com sequências

didáticas e intervenções apenas orientadoras dos docentes tem diversas referências entre as teorias da didática da Matemática. Podemos citar, por exemplo, a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2012), que traz uma proposta que serve tanto à pesquisa quanto à dinâmica do trabalho de sala de aula, na qual o estudante é apresentado a um ou mais problemas, devendo aceitar a responsabilidade por sua resolução, a partir de um *milieu* (meio didático) antagonista, de forma que não previstas facilidades ou “atalhos” a partir de intervenções que não se enquadrem em uma sequência de descobertas que ocorrem por interações do sujeito com o próprio *milieu*, do qual participam seus pares. Nessa proposta, que mencionamos entre as diversas possíveis, a aprendizagem vai sendo construída por meio de transições não lineares entre dialéticas como as de ação, formulação e de validação. Finalmente, o docente só retoma seu trabalho didático, de maneira mais direta, quando da institucionalização do saber em jogo. De acordo com essa abordagem, o conhecimento que se procura construir surge como resposta do problema a ser resolvido. Experimentos envolvendo diversos tipos de tecnologias e teorias relativas à didática poderiam ser desenvolvidos em espaços de estudo como os laboratórios.

Os professores buscaram diversas maneiras de se trabalhar com o objeto matemático hipérbole, pensando em ampliar a imagem de conceito dos estudantes. O aspecto didático se evidencia na preocupação dos professores em ampliar a imagem de conceito dos estudantes e na forma como P2 foi buscar, na história da Matemática, ferramentas para enriquecer as discussões.

O professor P2 compartilhou um link de um vídeo, em que uma pessoa apresenta uma espécie de tutorial utilizando o GeoGebra. Nesse tutorial, segundo o participante da formação, o professor pode aprender a utilizar algumas ferramentas do *software*, introduzindo uma dinamicidade na apresentação do conteúdo hipérbole que seria muito difícil de outra maneira (figura 38).

Figura 37. Hipérbole no GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa

Nesse ponto, é possível perceber que o professor não estava interessado apenas em usar o recurso de forma pronta, como algo a ser reproduzido, mas como base para discussões sobre o tema, de maneira que uma estratégia pudesse emergir, usando o vídeo e/ou recursos semelhantes. A partir dessas asserções, o pesquisador levantou a discussão sobre a utilização de tecnologias não digitais e algumas vantagens das tecnologias digitais na construção de uma hipérbole.

Figura 38. Hipérbole e origami



Fonte: dados da pesquisa

Os professores apresentaram uma preocupação maior nesse encontro com as questões didáticas, porém não sugeriram uma metodologia de ensino específica, ou alguma teoria educacional, ou ainda, mais especificamente da Educação Matemática. De certa forma, isso já era esperado, uma vez que os professores não pareciam ter tido oportunidade de estudar, de forma sistematizada, elementos teóricos de educação Matemática em suas trajetórias formativas. Essa perspectiva não pode ser ignorada quando construímos essas análises, a de que os docentes estavam entregues a certa “espontaneidade” em relação ao conhecimento teórico, ou seja, ao conhecimento sobre a disciplina e aos elementos estruturantes da mesma, do ponto de vista didático e do conteúdo, da maneira como indicada por Shulman (1986).

Especificamente, nesse encontro, os professores mostraram mais participativos quando se observam as interações realizadas no grupo de WhatsApp; nesse sentido, é possível indicar que as trocas de natureza assíncrona foram efetivas para que cada um, dentro de seu ritmo (KENSKI, 2013), colaborassem na discussão dos conceitos e no aprendizado, mesmo, sobre o tema matemático em jogo. A evolução do olhar do professor P2, por exemplo, para a utilização de tecnologias digitais nas aulas de Matemática se evidencia quando, neste último encontro, ele mostra uma preocupação de que o professor seja capaz de utilizar as interfaces como parte de uma estratégia didática em que sua invenção, seu repertório e suas atividades componham uma proposta de ensino, e não apenas buscar e utilizar tarefas prontas.

Nessa reunião, também, a confrontação entre tecnologia digital e não digital permitiu que os professores tivessem uma percepção (e um exemplo claro) sobre a importância da convergência de tecnologias de distintas naturezas e suportes (OLIVEIRA, 2018) – uma das conclusões das discussões foi a de que o trabalho articulado entre essas tecnologias pode potencializar o ensino de hipérbolas. Além disso, confrontação da construção da hipérbole por meio do *software* GeoGebra e a construção muito semelhante utilizando dobradura mostrou que o mesmo conteúdo, por meio de uma proposta de mesma origem, que é a construção de retas mediatrizes, pode ampliar o entendimento dos alunos. Conforme apresentamos nesse trabalho, em nossos aportes teóricos, as tecnologias da inteligência não se anulam, ou seja, a escrita não extinguiu a oralidade, bem como os dispositivos computacionais não fizeram nem farão desaparecer a escrita (LÉVY, 1993) – são processos de

redefinição, que se processam em iniciativas de ensino, de aprendizagem e de formação como *articulações*: não é necessário abandonar o recurso “antigo”, mas é preciso saber que ele é parte de um acervo, é algo de que se pode lançar mão, principalmente quando as atividades se processam por variados suportes e meios. Esse processo se dá por complexificação, condição, segundo Morin (2005), do conhecimento pertinente – nessas condições, as técnicas passam por um processo de ressignificação e adaptação às novas condições. Essa constatação ocorreu também por parte dos professores da pesquisa, mediante a percepção de que o digital e o analógico não se anulam, mas, antes, permitem uma grande variedade de opções de trabalho.

Podemos aventar que o professor P3 apresentou um crescimento em relação às suas participações anteriores, do ponto de vista do uso crítico e reflexivo das mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Esse professor assumiu uma postura, de certa forma nova para ele, de que a utilização do *software* GeoGebra seria uma alternativa a ser considerada em suas aulas no encontro anterior; entretanto, no quarto encontro, sua participação foi mais propositiva, e que se materializou pela propositura de um vídeo postado no YouTube no qual uma pessoa constrói uma hipérbole utilizando o GeoGebra, descrevendo suas ações. Houve uma preocupação de P3 em inserir a discussão no grupo sobre como utilizar o GeoGebra além de sua interface inicial, ou seja, para além do uso de páginas pré-programadas, nas quais o usuário fica limitado às interações padronizadas. Na ideia do *ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais* (OLIVEIRA, 2018), é possível perceber que as propostas do professor em questão indicam uma aproximação do *pensar com tecnologias*, que o habilitam a *elaborar estratégias didáticas*. No *ciclo*, devemos lembrar, não há exatamente fases estanques e seriadas, mas as propostas podem se alternar, de acordo com a experiência e o desenvolvimento de cada docente em formação.

O mesmo pode ser dito de P2, uma vez que esse participante passou a buscar estratégias diferenciadas para enriquecer as discussões, o que se intensificou na última reunião. Ele participou ativamente do grupo de WhatsApp, postando links de vídeos e imagens. Esse professor optou por uma abordagem mais analógica, inclusive quando propôs a construção de um hiperbológrafo. A ideia foi recebida com entusiasmo pelo grupo e P2 sugeriu que o mesmo poderia ser feito com as outras cônicas. Essa tendência parece indicar uma necessidade de valorização da tecnologia

da inteligência (Levy, 1993) anterior, mostrando o processo de complexificação apontado em Oliveira (2018).

Os professores P1 e P4 ficaram bastante calados durante o encontro. O professor P4, embora se mostrasse interessado, se comportou de forma extremamente passiva, como um aluno que assiste uma aula nos moldes tradicionais – pode-se dizer que era um interesse quase curioso, por assim dizer, como se aquilo fosse realmente cativante, mas não lhe dissesse respeito diretamente – em uma palavra, P4 era o *expectador*. O professor P1 se mostrou uma incógnita durante todos os encontros, às vezes parecendo muito interessado em ouvir as discussões, em outras alheio a tudo o que acontecia.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente tese buscou investigar de qual maneira a constituição de um grupo colaborativo de professores de Matemática poderia concorrer para um aprofundamento, ou ressignificação, do conteúdo matemático cônicas, a partir da taxonomia exposta por Mishra e Kolhler (2006), quanto aos aspectos tecnológicos, do conteúdo e pedagógicos, que constituem o saber necessário a um professor de Matemática.

O grupo foi composto por quatro professores com diferentes experiências docentes e tempo de serviço. Com o intuito de preservar o anonimato dos integrantes, optamos por nomeá-los de P1, P2, P3 e P4. Esses professores foram escolhidos com base na localidade em que habitam e trabalham. Com a pandemia de COVID-19, as relações interpessoais sofreram grandes mudanças devido ao isolamento social imposto à grande parte dos cidadãos de todo o planeta. Os professores convidados a participar da pesquisa habitam nas cidades de Jundiaí e Itupeva, no Estado de São Paulo. Três deles já se conheciam por terem, em algum momento, trabalhado juntos na escola. O quarto professor foi introduzido no grupo por se mostrar solícito ao convite de participar da pesquisa. Uma vez que os integrantes da pesquisa não receberam nenhum tipo de auxílio financeiro, as opções se mostraram bastante restritas.

A pandemia de COVID-19 deixou marcas indeléveis em todos os participantes. Todos os integrantes da pesquisa, inclusive o pesquisador, se contaminaram com o vírus e adoeceram. O ritmo da pesquisa precisou respeitar essas ocorrências e com isso seu desenrolar acabou se protelando muito além do planejado.

O professor P1, além de adoecer com a COVID-19, sofreu um aneurisma e desenvolveu a partir daí problemas agudos de falta de memória de curto prazo e dores de cabeça intensas. Em diversas situações esse professor não pode participar de nossos encontros, o que nos levou a remarcar-los em alguns casos, e nos revelou no final da pesquisa que o motivo eram dores de cabeça que impossibilitavam seu convívio social por, às vezes por três dias consecutivos. Sem avisar o pesquisador sobre os problemas desenvolvidos durante a pandemia, esse professor valentemente

não desistiu de participar da pesquisa e só revelou sua real situação no final do último encontro.

O professor P4 enfrentou problemas de conexão com a internet em todos os encontros. A região de Itupeva, na época da pesquisa, apresentou problemas com a conexão de internet de forma sistêmica, sempre que o tempo ficava chuvoso. As tempestades comuns no verão, deixavam bairros inteiros sem internet por horas. Os problemas de conectividade com a internet também levaram ao adiamento dos encontros virtuais em duas oportunidades.

O professor P2 e o professor P3 foram mais constantes em suas participações, tanto no grupo de WhatsApp quanto nas reuniões virtuais. Tanto P2, quanto P3 se ausentaram de um encontro virtual devido a eventos familiares de imprevistos. A participação e interesse desses dois professores parecem indicar que o maior domínio do conteúdo, evidenciado nos encontros e apontados anteriormente na construção do perfil profissional dos mesmo, onde ambos participaram de diversas pós-graduações e oportunidades de formação continuada, colaborou para atitudes mais confiantes e um maior engajamento nas atividades propostas.

O professor P1 é o único que nunca lecionou no segmento do Ensino Médio e adotou uma postura mais de observador, participando apenas quando era solicitado, ou quando o assunto ficava limitado a relações interpessoais ocorridas na escola.

Os professores P2 e P3 se apresentaram de forma bastante ativa nos encontros e no grupo de WhatsApp. Percebemos em P2 grande dificuldade em participar dos encontros virtuais. Em diversos momentos esse professor, bem como P4, pediu para que os encontros fossem realizados de forma presencial. O professor P3 foi aquele que se mostrou menos incomodado com a proposta dos encontros virtuais. Esse docente foi o que apresentou maior experiência com o uso de tecnologias digitais em suas aulas de Matemática.

O grupo de WhatsApp se mostrou o grande fio condutor dos trabalhos. Nesse ambiente, de forma assíncrona, os professores puderam contribuir para as discussões, compartilhar material e sugerir formatos de trabalho. O instrumento tecnológico que mais contribuiu para se iniciar a formação de um grupo colaborativo foi o aplicativo WhatsApp.

A formação de um grupo colaborativo, na perspectiva utilizada nesse trabalho, não se realizou. Os professores P1 e P4 não conseguiram participar de forma mais ativa nos encontros virtuais e também não colaboraram de forma efetiva no grupo de WhatsApp. Esses professores além de apresentar problemas pessoais que dificultaram suas participações, ainda assumiram que tiveram uma formação inicial bastante precária.

Os professores P2 e P3, apresentaram características de cooperação, em que um auxiliou o outro na realização de determinada tarefa. O trabalho ficou muito reduzido à participação desses dois professores, que tentaram motivar os outros a participar, apresentando assim características colaborativas. A realização dos trabalhos aconteceu de forma não hierarquizada, respeitando os tempos desses professores, suas necessidades de pesquisa e centros de interesse dentro do tema.

O aspecto que mais chamou a atenção dos professores foi o aspecto pedagógico das cônicas. Sempre que possível o espaço se tornava um local de trocas de crenças educacionais, no qual esses docentes buscavam apoio mútuo para continuar a sonhar a respeito de sua profissão.

No término do último encontro o pesquisador explicou a ideia central da presente tese aos professores, na qual a construção de um grupo colaborativo de professores de Matemática, pudesse se constituir em um ambiente de formação continuada eficiente, que atendesse às reais necessidades docentes, sem a necessidade de um professor, sem a imposição institucional de um determinado formato de educação continuada. Esse espaço virtual não precisa ser necessariamente pensado para o estudo de cônicas, mas pode ser para qualquer conteúdo matemático.

O pesquisador perguntou aos professores quais as maiores dificuldades e empecilhos para fazer essa proposta funcionar corretamente.

P1: *Eu, com sinceridade, eu estou mais aprendendo com vocês do que tudo. Precisamos de tempos e confiança em nosso trabalho. Hoje ser professor não é fácil. O papel do professor mudou muito, está muito difícil ser professor hoje.*

P3: *Nós estamos nos sentindo esgotados. Eu acho que em poucos anos a maioria dos professores vão acabar adoecendo de esgotamento físico e psicológico,*

mais psicológico eu acredito. Eu trabalho de 12 a 15 horas por dia. O problema é que é muita burocracia, muito projeto, muita papelada. Não dá tempo para nada.

P4: *Aqui onde eu moro não precisa nem chover, é dia sim dia não sem internet. Na escola eles dizem que tem internet, porque o papel aceita tudo, a mídia aceita tudo, mas a realidade dentro da sala de aula hoje não tem nada disso. Laboratório tem, é muito lindo, mas quando você entra não tem o que você realmente precisa. Nem internet tem, se o professor quiser fazer algo ele precisa comprar do próprio bolsa.*

O professor P4 revela a crença de que o grande problema enfrentado por ele foi realmente os encontros virtuais.

P4: *Nós queríamos que fosse presencial esses encontros que tivemos aí, porque é melhor a gente estar olhando olho no olho, do que uma coisa virtual que é muito chato né? Assim, estranho para a gente que é educador, ficar através de uma tela aí trocando ideias. Não estamos acostumados com isso, é muito estranho mesmo.*

O professor P4 relata que a melhor parte foi a troca de experiências, em que pode aprender muito com seus pares e reforça o desejo de um encontro presencial.

P4: *Eu espero que a gente se encontre aí, o mais breve possível para a gente bater um papo e trocar aquela ideia.*

A pandemia de COVID-19 deixou marcas profundas nos professores, também do ponto de vista da utilização da tecnologia digital. Com o isolamento social, os professores, principalmente das instituições privadas, tiveram que mudar completamente sua prática docente, adotando um AVEA (ambiente virtual de ensino e aprendizagem) escolhido pela instituição e entrar em ação imediatamente.

Essa forçosa inserção dos professores ao mundo dos AVEA acabou por trazendo uma aversão ainda maior à utilização de tecnologias digitais por parte dos professores. Essa aversão se evidencia na fala acima do professor P1 e se repete em todos os professores participantes da pesquisa.

P2: *Eu, no início foi desesperador né? Depois de tudo o que a gente passou eu aprendi muito, aprendi muito mesmo. E percebi que realmente a máquina não substitui a presença humana mesmo, né? O contato humano mesmo, de estar cara a cara, ali com o aluno né? Os alunos que estavam online, mesmo os que participaram mesmo,*

fazendo perguntas, não é a mesma coisa. Uma coisa que ficou para mim do online é utilizar vídeos curtos para expor coisas que não dá tempo em sala de aula, isso eu vou levar para mim. É igual ao GeoGebra, ele é sensacional, mas eu tenho certeza de que o aluno vai se encantar muito mais construindo um aparelho, um instrumento, algo manual, onde ele possa ver as cônicas do que o GeoGebra. O GeoGebra é uma máquina, mas você ver a coisa acontecer, você tocar, ver que faz parte daquilo eu acho que ainda é mais vantajoso. É aquela história o medo do novo.... eu acho que o pior foi o medo do novo.

Embora o professor P2 valorize a tecnologia digital, sua predileção pelo analógico se evidencia em sua fala.

O professor P3 foi o que mais se envolveu com as propostas de encontro, tanto no grupo de WhatsApp quanto no ambiente virtual Zoom. Seu relato não se difere muito dos outros professores.

P3: *A ideia de usar tecnologia como forma de um programa de formação tem a oportunidade de expandir possibilidades, investigar, apresentar alternativas diferenciadas de aulas. E neste mundo de correria que todos nós estamos vivendo é uma alternativa muito válida. Mas não podemos esquecer que a tecnologia deve sempre estar aliada a teoria e prática e, principalmente, abrir um espaço para reflexão e discussão de suas ideias. Mas apesar da boa vontade de nós professores querermos implantar isso em nossas aulas, vários fatores vão contra. Por exemplo, é raro ter uma internet que funcione no espaço escolar. E muitas vezes nos frustramos em preparar uma aula e não ter como apresentar aos nossos alunos. Sem contar que esse período que vivemos de aulas on-line, nos deixou esgotados, ficando horas na frente do computador. Estamos todos esgotados, muito de nós professores trabalhamos de 10 a 12 horas por dia. E a falta de tempo nos deixa engessados para cumprir conteúdos e habilidades da BNCC.*

A brutal carga de trabalho é um fator constante entre os professores participantes da pesquisa. Tal fato se evidenciou nas dificuldades em encontrarmos datas possíveis para a realização dos encontros virtuais, de tal forma que os quatro professores estivessem presentes. Dessa forma o grupo de WhatsApp ganhou uma força e se tornou o principal eixo norteador da pesquisa.

Conforme relatado anteriormente o professor P1 sofreu diversos problemas de saúde e até a data dos encontros virtuais, ainda não havia se recuperado totalmente.

Os encontros propiciaram aos professores um espaço no qual puderam conversar sobre o ensino de cônicas, falar de suas experiências, ressignificar alguns conceitos sobre o conteúdo, pensar a utilização de tecnologias digitais e não digitais em sua formação e prática docente, aprofundar ideias de cunho didático e principalmente conversar sobre suas crenças e valores.

Embora não fosse o foco da presente pesquisa, pudemos constatar que os professores sofrem com um problema de identidade. Eles não conseguem definir quem eles são dentro do sistema educacional. Qual a sua real função hoje e o que esperam que eles façam.

O presente trabalho teve a preocupação, desde sua concepção, em incluir como seus integrantes, professores reais, com formação real e com preocupações reais. Professores que trabalham, como a maioria, 10 a 15 horas por dia e que possuem sua formação inicial igual à grande maioria dos professores em atuação atualmente, em instituições particulares, às vezes feita totalmente na modalidade a distância e ainda, em muitos casos, no que atualmente é chamada de graduação 2.0, feitas à distância para portadores de diploma de ensino superior.

O Quadro 3 apresenta um resumo sobre a participação de cada professor.

Quadro 3: Síntese das participações dos professores

P1	Esse professor possui formação inicial em Pedagogia e cursou três anos de licenciatura em Matemática, em que se licenciou, na modalidade EAD. Durante os encontros ele revelou que nunca estudou cônicas em sua vida ou lecionou esse conteúdo. Esse professor não participou das interações no grupo de WhatsApp e adotou uma postura passiva nos encontros virtuais. Para ele os encontros foram bons e diz que aprendeu muito na interação com os pares. Mediante sua pouca participação nos encontros e no grupo de WhatsApp esse professor parece se relacionar com a tecnologia, segundo Oliveira (2018), como mestre, na qual a falta de conhecimento matemático pode impedir o usuário de explorar o <i>software</i> . P1 apresentou diversos
-----------	---

	<p>problemas graves de saúde durante a pesquisa, sem nunca avisar o pesquisador ou os colegas, participando até o final do compromisso assumido.</p>
P2	<p>Esse professor é formado em Licenciatura em Matemática, num curso presencial de uma faculdade particular do noroeste do Estado de São Paulo. Possui experiência docente lecionando cônicas e cursou diversas pós-graduações oferecidas pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Ele leciona em uma escola estadual e em uma escola da rede privada. Demonstrou interesse pelos encontros virtuais no ambiente Zoom e participou ativamente das discussões no grupo de WhatsApp. Apresentou conhecimento a respeito do lugar geométrico dos pontos que constitui cada uma das cônicas, bem como das equações reduzidas delas. Buscou utilizar as tecnologias digitais de forma a dinamizar os encontros, porém sem explorar as diferentes interfaces dos <i>softwares</i>. Mostrou habilidade na utilização do <i>software</i> Zoom, bem como na interação entre WhatsApp, youtube e programas de busca. Esse professor corresponde ao nível da tecnologia como <i>parceira</i>.</p>
P3	<p>Esse professor participou ativamente do grupo de WhatsApp, compartilhando materiais que balizaram os encontros. Apresentou características colaborativas, ao buscar o envolvimento de todos, mas sem tentar se tornar líder do grupo. O professor P3 funcionou como um catalizador para P2 e uma inspiração para P4. Suas contribuições buscaram um repensar tanto do aspecto pedagógico quanto do aspecto do conteúdo e do aspecto tecnológico. Esse professor apresenta características que parecem condizentes, segundo Oliveira (2018) com a tecnologia como <i>parceira</i>.</p>
P4	<p>Esse professor se formou em Licenciatura em Matemática, num curso presencial de uma faculdade particular do município de Campo Limpo Paulista. Está cursando uma pós-graduação na área de Ensino de Matemática e assumiu perante o grupo nos encontros que nunca estudou cônicas, seja no ensino básico ou no ensino superior. Ele trabalha em uma escola estadual de tempo integral e enfrentou diversos problemas de conectividade com a internet durante nossos encontros e sua participação no grupo de WhatsApp também foi muito restrita. Ele disse que gostou muito das</p>

discussões, principalmente quando o aspecto didático, ou pedagógico, se tornava o centro das discussões. Pelas suas participações e declarações, entendemos que esse professor se encontra no estágio em qual a tecnologia é mestre. Tal impressão está pautada na declarada insuficiência de conhecimentos matemáticos para aproveitar melhor as potencialidades das diferentes interfaces tecnológicas empregadas nos encontros.
--

O tempo de duração das reuniões, limitadas a 40 minutos, foi um impeditivo à constituição de um grupo efetivamente colaborativo. Acreditamos que a constituição de um grupo colaborativos de professores, dentro do perfil dos professores da presente pesquisa, requer mais tempo, mais interações e um processo de confiança, que em apenas quatro encontros não foi possível de se estabelecer totalmente.

A melhoria na qualidade das interações e a evolução nas discussões sobre os aspectos didáticos e tecnológicos do conhecimento, parecem apontar para a eficácia de um trabalho mais longo. Os professores se comportaram de forma passiva nos primeiros encontros, aguardando que o pesquisador falasse e lhes “dessem uma aula” sobre cônicas. A perspectiva de se tornarem agentes de suas próprias aprendizagens causou desconforto em todos eles, principalmente em P1 e P4. Os professores P2 e P3 se adaptaram com mais facilidade à proposta, porém P3 pareceu realmente apreciar mais a perspectiva.

O ressentimento de todos pela falta de encontros presenciais ficou claramente percebida, principalmente em P4, e acreditamos que a pandemia de COVID-19 seja, em grande parte, responsável por isso. Após longos meses de isolamento social e aulas remotas, os professores estavam ansiosos pelo contato humano presencial.

O grupo de WhatsApp, devido às suas características assíncronas foi a ferramenta que melhor atendeu às necessidades dos professores. As necessidades reais desses professores reais, que possuem diferentes tempos e cargas de trabalho (Kenski, 2013) precisam ser consideradas.

Retomando a questão de pesquisa, *como a organização de um grupo colaborativo, constituído por professores de Matemática do Ensino Básico, pode*

concorrer para a ressignificação da noção de cônicas, em termos do uso de estratégias didáticas com diferentes tecnologias? Observamos que o envolvimento dos docentes participantes com as atividades assíncronas foi um fator fundamental para a realização das atividades síncronas. O grupo apresentou características de colaboração, como a troca de informações de forma horizontalizada e o incentivo mútuo. A realização de outros encontros poderia consolidar a formação do grupo colaborativo. O objeto matemático cônicas foi discutido em seus aspectos didático, do conteúdo e tecnológico. O grupo sentiu a necessidade de estudos na área da Geometria Analítica, como a distância entre dois pontos e circunferências. Esses estudos preliminares possibilitariam uma melhor compreensão das cônicas.

O desenvolvimento desses professores e seus respectivos níveis de fluência, conforme Oliveira (2018), precisam se tornar uma das prioridades dos sistemas educacionais e formação continuada de professores. Somente uma educação continuada na qual os professores atuem de forma colaborativa, sendo os protagonistas desse processo e evoluindo em relação ao seu nível de fluência, é o que poderá permitir no futuro uma educação realmente libertária, com professores reflexivos e atuantes em suas sociedades.

Professores reflexivos, atuando de maneira colaborativa, podem se tornar decisivos para a constituição de uma nação livre e democrática. Conforme Levy (1993) o desenvolvimento da tecnodemocracia é fundamental para a preservação da democracia e de suas instituições.

Para Lévy, tecnodemocracia é antes de tudo uma ideia e não uma definição. Nessa ideia, o paradigma de comunicação e interação social é o digital/midiático, no qual a troca de informações, desenvolvimento de novas técnicas e a produção de conhecimento se dão de forma tão rápida e colaborativa que a consequência é o aprimoramento das relações e fortalecimento das instituições democráticas, tornando assim a produção e compartilhamento de conhecimento mais horizontalizado, dificultando a constituição de sociedades que tendam a flertar com o autoritarismo.

A presente tese revela ainda que os professores participantes da pesquisa se sentiram desconfortáveis com a perspectiva de um trabalho colaborativo, no entanto, em diversas situações, essa é exatamente a atitude que se espera dos alunos em sala de aula nos mais diferentes níveis de ensino. O uso de diversas estratégias didáticas,

empregando diferentes tecnologias, em um ambiente virtual pode se tornar um elemento importante para a formação continuada desses professores de tal forma a respeitar os diferentes tempos docentes, conforme Kenski (2013).

Um fator que se evidencia com essa pesquisa é que não apenas muitos alunos brasileiros possuem dificuldades em ter acesso a internet, mas que essa dificuldade, também, se estende para boa parte dos professores. Iniciativas de formação continuada devem levar em consideração a situação real desses professores, como por exemplo, a excruciante carga de trabalho, os baixos salários, a falta de acesso a tecnologias digitais de última geração e os inúmeros problemas de conexão com a internet.

No decorrer desta tese, perguntas foram respondidas e algumas outras surgiram. Essas questões poderão ocupar a mente de futuros pesquisadores.

- Como a organização de um grupo de professores de Matemática, que atuam em uma mesma escola, pode concorrer para a ressignificação de conteúdos matemáticos? (o conteúdo pode ser eleito pelo grupo)
- Como a interação entre grupos colaborativos de professores de Matemática, em diferentes ambientes virtuais, podem concorrer para a ressignificação de conteúdos matemáticos, nos seus aspectos didáticos, tecnológicos e do conteúdo?
- A discussão curricular sobre conteúdos matemáticos, em um grupo colaborativo de professores de Matemática, pode propiciar práticas pedagógicas que contemplem princípios interdisciplinares?
- A utilização de games de realidade virtual, pode se tornar um ambiente de formação continuada de professores de Matemática?

De tempos em tempos, o mundo parece se esquecer das aulas de história e tende a incorrer nos mesmos erros do passado. As escolas se constituem locais privilegiados para o pensar, para a troca de ideias e experiências, não apenas de conteúdos específicos, mas acima de tudo sobre a sociedade, o mundo, o amor e a vida.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da geometria analítica.** Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará, 2012.

BARBOSA, Y. O. **Estudando as concepções de equação de alunos das últimas séries do Ensino Fundamental.** São Paulo, 2006. 60 p. Iniciação Científica. Universidade Paulista.

_____. **Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo, 2009.

BENITO, R. N. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2019.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática:** Belo Horizonte. Autêntica, 2001.

BORBA, M.C. The future of mathematics education since COVID-19: humans-with-media or humans-with-non-living-things. **Educational Studies in Mathematics**, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10043-2>.

BORBA, M. C.; OECHSLER, V. Tecnologias na educação: o uso dos vídeos em sala de aula. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**, v. 11, n. 2, 2018.

BORBA, M. C; VILLARREAL, M. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:** information and communication technologies, modelling, visualization and experimentation. 1. ed. New York: Springer, 2005.

BORDALLO, M. **As cônicas na Matemática escolar brasileira: história, presente e futuro.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011.

BORDIEU, P.; PASSERON, J. C. **A reprodução: elementos de uma teoria do sistema de ensino.** Tradução: Reinaldo Bairão. Rio de Janeiro: Ed. Francisco Alves, 1975.

BORTOLATO, M. M. **Inovação e Práticas Pedagógicas: o Moodle no Ensino Presencial da Universidade Federal de Santa Catarina**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. v.2. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério de Educação e Cultura. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, G.; MARZOUKI, M.; MÉADEL, C. **Governance, regulations and powers on the internet**. Cambridge University Press, 2012.

CHEVALLARD, Y. (1991). **The Didactic Transposition: From the Learned Knowledge to the Taught Knowledge**. Grenoble: The Wild Thought, 1991.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sábio al saber enseñado**. 3. Ed. Buenos Aires: Aique, 2009.

DIOGO, R. C. **Formação continuada de professores e a apropriação das tecnologias de informação e comunicação: o percurso de uma intervenção formativa**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Mato Grosso, 2016.

DREYFUS, T.; HOCH, M. Equations: A structural approach. **Proceedings of the 28th Conference Of Onternational Group for the PME**, 2004, p. 1-152 – 1-155.

ERICKSON, F. Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. In: WITTRICK, M.C. (Org.). **La investigación de la enseñanza: métodos cualitativos y de observación**. Barcelona: Ediciones Paidós, 1989. v.2.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1968.

FUENTES, D.; DINIZ, L; CAMARGO, C. H.; CONSENZA, R. **Neuropsicologia: teoria e prática**. Porto Alegre: Artmed, 2014.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOOS, M. et al. Perspectives on technology mediate learning in secondary school mathematics classrooms. **Mathematical Behavior**, n. 22, 2003. p.73-89.

GOMES, F. L. **Relatos de experiências e aulas de geometria produzidas e/ou ressignificadas de forma colaborativa: compartilhar saberes profissionais é preciso!** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal do Acre, 2018.

GOMES, M.; MEDINA, R. **Influencia del software educativo geogebra em el aprendizaje de las cónicas em los estudiantes de 10° de la intitucion educativa Simón Araujo**. Maestro em Informática Educativa. UNIVERSIDAD PRIVADA NORBERT WIENER: ESCUELA DE POSTGRADO. Perú, 2014.

GOULART, J. B. **O estudo da equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ UTILIZANDO O software grafeq – uma proposta para o ensino médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

HABIB, N. C. P. **Abordagem e atividades para a cônica hipérbole**. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Lavras, 2013.

JUNIOR, A. J. S.; LOPES, E. M. C. Um mapeamento de pesquisa brasileiras sobre o trabalho educativo com tecnologias digitais de informação e comunicação no processo

de ensinar e aprender geometria analítica. **VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 479-497, jul./dez., 2017 – Santa Maria, 2017.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e tempo docente**. São Paulo: Papyrus, 2013.

LEITE, R. S. **Formação de professores de Matemática e tecnologias digitais: um estudo sobre o teorema de Tales**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2017.

LENZ, M. **O estudo das cônicas a partir da construção geométrica**. Mestrado profissional em rede nacional. Unesp. Rio Claro, 2014.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. São Paulo: Editora 34, 1993.

_____ **O fogo liberador**. São Paulo: Editora Iluminuras, 2000.

_____ **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 2010.

_____ **O que é virtual?** São Paulo: Editora 34, 2011.

_____ **A esfera semântica**. São Paulo: Annablume, 2014

LONDERO, N. **Explorando recursos do Geogebra e o estudo de quádricas a partir de diferentes representações**. Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Santa Maria, 2017.

LOPES, J. F. **Cônicas e aplicações**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2011.

MISHA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**. Vol, 108, Number 6, June 2006, pp. 1017-1054.

MORIN, E. **Introdução ao Pensamento Complexo**. Porto Alegre: Editora Sulinas, 2005.

NETO, F. Q. **Tradução comentada da obra “novos elementos das seções cônicas” (Philippe de la Hire – 1679) e sua relevância para o ensino de matemática**. MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2008.

OLIVEIRA, G. P. **Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia**. São Paulo: Livraria da Física, 2018

_____ **Avaliação em cursos on-line colaborativos: uma abordagem multidimensional**. Tese em Educação. Universidade de São Paulo, 2007.

_____ **Uma abordagem para ensino de lugares geométricos com o GeoGebra**. Revista Eletrônica de Educação Matemática 7(2)209. December 2012.

_____ **Pesquisa em Educação Matemática: um olhar sobre a metodologia**. Curitiba: CRV, 2019.

PEREIRA, G. P. R. **O ensino das cônicas através de estudos contextualizados até sua concepção na geometria analítica: parábola**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS, 2013.

RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

SANTOS, A. T. C. **O estado da arte das pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica no período de 1991 a 2014**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

SÃO PAULO, Secretária da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. 1. ed. Atual. São Paulo: SE, 2011. 72 p.

_____ **Material de apoio ao currículo de São Paulo: caderno do professor: Matemática, Ensino Médio, 3ª. série, vol. (1)**. São Paulo, 2014.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SHULMAN, L. (1986) Those Who Understand: Knowledge Growth in **Teaching. Educational Researcher**, 15, 4-14.

SIQUEIRA, C. A. F. **Um estudo didático das cônicas: quadros, registros e pontos de vista**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

SIROTIC, N; ZAZKIS, R. Irrational Numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v.65, n. 1, 2007. pp. 49 – 76.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica, volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1979.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: **The Concept of Activity in Soviet Psychology**. J. V. Wertsch, ed., M.E. Sharpe Inc., New York, pp. 256-278, 1981.

TALL, D.; VINNER, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. In D.O. Tall (ad.), **Educational Studies in Mathematics**, 12. 151-169.

VINNER, S.; DREYFUS, T. 1991. Images and definitions for the concept of function. **Journal of Research in Mathematics Education**, 20 (5), pp. 356-366.

APÊNDICE 1**Questionário para professores de Matemática****Pesquisa de doutoramento em Educação Matemática (PUC-SP)**

1. Sua formação a partir do ensino superior inclui (pode assinalar mais de um item):

- a) Licenciatura em Matemática
- b) Bacharelado em Matemática
- c) Outras licenciaturas. Quais?

d) Outros bacharelados. Quais?

e) Curso superior de curta duração (tecnólogo ou similar. Quais?

f) Pós-graduação lato sensu (especialização). Quais?

g) Mestrado. Qual? _____

h) Doutorado. Qual? _____

2. Caso tenha feito cursos de Pós-Graduação (especialização ou mestrado/doutorado), use o verso deste formulário para falar um pouco dessas experiências.

3. Há quanto tempo você leciona matemática? Assinale apenas uma resposta:

- a) Menos de 2 anos;
 - b) De 2 a 5 anos;
 - c) De 6 a 10 anos;
 - d) De 11 a 20 anos;
 - e) Mais de 20 anos.
4. Em que níveis de ensino você leciona? Assinale quantas respostas precisar:
- a) Ensino Fundamental (6º ao 9º ano);
 - b) Ensino Médio;
 - c) Ensino Superior;
 - d) Pós-Graduação.
5. Você já participou de iniciativas de formação continuada, como cursos, oficinas, seminários ou similares?
- a) Não;
 - b) Sim, algumas vezes.
 - c) Sim, muitas vezes.

Descreva brevemente os temas das formações das quais participou. Use o verso da folha, se precisar:

6. Você já participou de cursos ou formações oferecidos em modalidade não presencial (cursos híbridos, EAD, formações online etc.)?
- a) Não;
 - b) Sim.

Caso tenha respondido “Sim”, faça uma breve descrição do que achou da qualidade dos cursos. Use o verso da folha, se precisar:

7. De forma geral, qual sua opinião sobre o ensino não presencial (EAD, ensino online, ensino híbrido etc.)? Use o verso da folha, se precisar:

8. O tema matemático “cônicas” já foi abordado em alguma capacitação, formação continuada ou pós-graduação da qual você tenha participado?

- a) Sim;
- b) Não.

9. Você utiliza, ou já utilizou, algum recurso de tecnologia digital, como planilhas eletrônicas ou *softwares* dinâmicos de geometria, em suas aulas? Caso já tenha usado, conte um pouco dessa experiência. Use o verso da folha, se precisar:

10. Em sua experiência como estudante, em que níveis de ensino você estudou o tema matemático “cônicas”? Assinale quantas respostas precisar:

- a) Ensino Médio;
- b) Ensino Superior;
- c) Pós-Graduação;
- d) Outra experiência de aprendizagem.

Qual? _____

11. Você já ensinou o tema matemático “cônicas” em sua experiência como professor? Assinale quantas respostas precisar:

- a) Sim, no Ensino Médio;
- b) Sim, no Ensino Superior;
- c) Sim, na Pós-graduação;

d) Não.

12. Caso tenha assinalado algum “sim” na questão anterior, descreva as principais dificuldades, relacionadas à sua prática, experiência, materiais etc., que você enfrenta no ensino desse conteúdo. Use o verso da folha, se precisar:
