PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

RONALDO DIAS FERREIRA

COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE POR ALUNOS DE CURSOS DE CIÊNCIAS EXATAS

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2021

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

RONALDO DIAS FERREIRA

COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE POR ALUNOS DE CURSOS DE CIÊNCIAS EXATAS

Tese apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Doutor em Educação Matemática**, sob a orientação da professora Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

SÃO PAULO

2021

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura____

Dedicatória

Dedico esta tese aos meus pais, Ercílio e Maria Ivete, à minha esposa, Cassia, às minhas filhas-Kethely e Maria Luiza-, os quais me apoiaram e incentivaram, em todos os momentos, a ir em busca dos meus sonhos.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por me guiar mais uma vez nesta eterna busca pelo conhecimento.

À minha eterna professora Ariadne Denise e ao meu tio João Salvador. Sem vocês talvez nada disso tivesse sido possível.

À minha orientadora, professora doutora Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, pela orientação amiga, pelo incentivo e compreensão ao longo deste trabalho. Que Deus a ilumine hoje e sempre.

Aos professores doutores Gabriel Loureiro de Lima, Celso Ribeiro de Campos, Edson Crisóstomo dos Santos e Vera Lucia Antonio D'Azevedo pela atenção e valiosas contribuições no momento da qualificação.

Ao professor Marcio Almeida pela paciência, contribuições e palavras de conforto nos momentos mais difíceis.

Aos professores do PPG em Educação Matemática da PUC-SP por compartilharem conhecimentos e experiências durante as aulas, que muito contribuíram para o meu crescimento e desenvolvimento profissional.

À Suzanne Lima, Assistente de Coordenação do Programa, pela presteza e compreensão.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

A todos os meus colegas de Doutorado, com os quais compartilhei momentos de aprendizagem, e, em especial, ao Lailson pelo convívio, amizade e solidariedade.

À Clea, ao Rogério e Felipe, que abriram as portas de sua residência e me acolheram, o meu muito obrigado. Que Deus seja benção constante em suas vidas.

À minha sogra Raimunda pela atenção e apoio nessa minha jornada.

Aos meus irmãos Rinaldo, Cláudio, Rone, Edvaldo, Raildo, Eliane e Elis. Aos meus sobrinhos, em especial, Caio e Jhonata e ao meu primo Hélio Siqueira.

Aos meus professores Cleusa (*in memorian*), Dilma (*in memorian*), Rosina, Rosivaldo e Romulo- em nomes dos quais agradeço aos demais.

Aos meus amigos Sebastião, Elder, Kennya, Christine, Alexandre, Narciso, Heloisa e Heverton, e a todos aqueles que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste sonho.

Muito obrigado!

Ler significa reler e compreender, interpretar.

Cada um lê com os olhos que tem. E interpreta

a partir de onde os pés pisam.

Todo ponto de vista é a vista de um ponto.

Para entender como alguém lê é necessário saber

Como os são seus olhos e qual é a sua visão de mundo.

Isso faz da leitura sempre uma releitura.

A cabeça pensa a partir de onde os pés pisam.

Para compreender, é essencial conhecer o lugar social de quem olha.

Vale dizer: como alguém vive, com quem convive, que experiências

tem, em que trabalha, que desejos alimenta,

como assume os dramas da vida e da morte e que esperanças o animam.

Isso faz da compreensão sempre uma interpretação.

(Leonardo Boff, 1997)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, sob número do processo: 88887.314227/2019-00

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001, process number: 88887.314227/2019-00

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

FERREIRA, RONALDO DIAS
F383 Compreensão do Conceito de Limite por Alunos de Cursos de Ciências Exatas. / RONALDO DIAS FERREIRA. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
289p. il. ; 21x29,7 cm.

Orientador: CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, (Mestrado Profissional) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Educação Matemática. 2. Limite. 3. GeoGebra. 4. Pensamento Matemático Avançado. I. ABAR, CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA . II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

FERREIRA, R. D. **Compreensão do Conceito de Limite por Alunos de Cursos de Ciências Exatas.** 2021. 289f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

RESUMO

Este trabalho está inserido na linha de pesquisa denominada “Tecnologia da Informação e Educação Matemática” e tem como objetivo analisar a compreensão do conceito de limite de função de uma variável real por alunos de cursos de Ciências Exatas de uma universidade pública. Para tanto, foram propostas e aplicadas seis Sequências de Atividades, as quais foram desenvolvidas, devido à pandemia da Covid-19, em encontros *on-line*, por meio da plataforma *Google Meet* e com a utilização de diferentes tecnologias, entre elas, o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Para a elaboração e a análise das atividades, utilizou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRSS) e a Teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA). Na metodologia utilizada, de cunho qualitativo, foram considerados aspectos da Engenharia Didática. Já as Sequências de Atividades envolveram Imagem Conceitual, Definição Conceitual, processos de abstração, representação e visualização do conceito de limite de função de uma variável real. Ainda que a definição de limite seja considerada de difícil aprendizagem para alunos de Cálculo, os resultados obtidos evidenciaram os elementos que emergiram de todas as atividades desenvolvidas e indicaram que diferentes representações podem potencializar a compreensão da definição formal de limite.

Palavras-chave: Educação Matemática, Limite, GeoGebra, Pensamento Matemático Avançado, Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

FERREIRA, R. D. **Understanding the Concept of Limit by Students of Exact Science Courses.** 2021. 289f. Thesis (Ph.D. in Mathematics Education). Pontifical Catholic University of São Paulo, São Paulo, 2021.

ABSTRACT

This work aims to analyze the understanding of the concept of the limit of a function of a real variable by students of Exact Sciences Courses at a public university and it is part of the research line of Information Technology and Mathematical Education. Sequences of Activities developed in online meetings by the Google Meet platform were proposed due to the Covid 19 pandemic using different technologies, among them the GeoGebra Dynamic Geometry software. For the elaboration and analysis of the activities, the Theory of Semiotic Representation Records (TSRS) and the Theory of Advanced Mathematical Thinking (AMT) were used. In the qualitative methodology used aspects of Didactic Engineering were considered. The Activity Sequences involved Conceptual Image, Conceptual Definition, abstraction processes, representation, and visualization of the limit of a function concept of a real variable. Although the definition of limit is considered difficult by Calculus students to learn, the results showed the elements that emerged from all the activities developed and indicated that different representations can enhance the understanding of the formal definition of limit.

Keywords: Mathematical Education, Limit, GeoGebra, Advanced Mathematical Thinking, Theory of Semiotic Representation Records

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A inquietude, no sentido de buscar alternativas metodológicas que possam contribuir com a melhoria do processo de aprendizagem dos alunos referente aos conceitos do Cálculo, levou-me a ingressar no Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, no qual realizei pesquisas centradas em conceitos matemáticos, especialmente relacionados a funções.

Dessa forma, desenvolvi a minha dissertação, no âmbito da linha de pesquisa "Tecnologia da Informação e Educação Matemática", intitulada: "Contribuições do GeoGebra para o Estudo de Funções Afim e Quadrática em um Curso de Licenciatura em Matemática" (FERREIRA, 2013). Essa pesquisa foi de cunho qualitativo, desenvolvida no laboratório de informática, por meio da utilização de Sequências de Atividades, com os alunos do 1º período do Curso de Licenciatura de Matemática.

No Doutorado em Educação Matemática, em consonância com a pesquisa que estou realizando, apresento um estudo, inserido na linha de pesquisa "Tecnologia da Informação e Educação Matemática, que tem como objetivo analisar a compreensão do conceito de limite por alunos de um curso de Ciências exatas de uma universidade pública.

Esse estudo tem como base a produção, aplicação e análise de Sequências de Atividades com a utilização de tecnologias, nesse caso, *applets* [1] do *software* GeoGebra- com possibilidade de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite[2].

Problemática

A minha inquietude diz respeito ao conteúdo de limite quando é abordada a definição formal, conforme será explicitado a seguir. Mas, antes disso, será feita uma contextualização do cenário no qual emergiu essa inquietude.

Na Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES) encontram-se vinculados ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas (CCET) os seguintes cursos: Licenciatura em Matemática, Engenharia Civil, Engenharia de Sistemas de Informação, Sistemas de Informação, Economia, Física Licenciatura e Química Licenciatura (estes dois últimos

---

[1] São aplicativos gerados na linguagem de programação *Java*.

[2] Neste trabalho, "limite" está indicando o limite de uma função de uma variável real.

suspensos devido a processos de transferência de cidade). Para cada um desses cursos, é direcionado um ementário da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Devido ao alto índice de reprovação, às vezes são criadas turmas de dependência cuja matrícula é aberta para todos os cursos. E como professor de uma dessas turmas, deparei-me com uma situação delicada, pois tinha que seguir uma ementa que atendesse a todos os cursos. Nessa turma foram matriculados 52 alunos de cursos distintos, a saber: Licenciatura em Matemática; Sistema de Informação; Engenharia Civil; Economia (curso do Centro de Ciências Sociais Aplicadas); Física Licenciatura (um aluno remanescente). E como trabalhar a definição formal de limites de modo que atenda todos os alunos? Vi-me, então, diante desse desafio. Nesse contexto, começaram a emergir algumas questões por parte dos alunos, como: “Para que sevem aqueles deltas e épsilon da definição de limite?”; “Onde vou usar isto, pelo menos no curso?”.

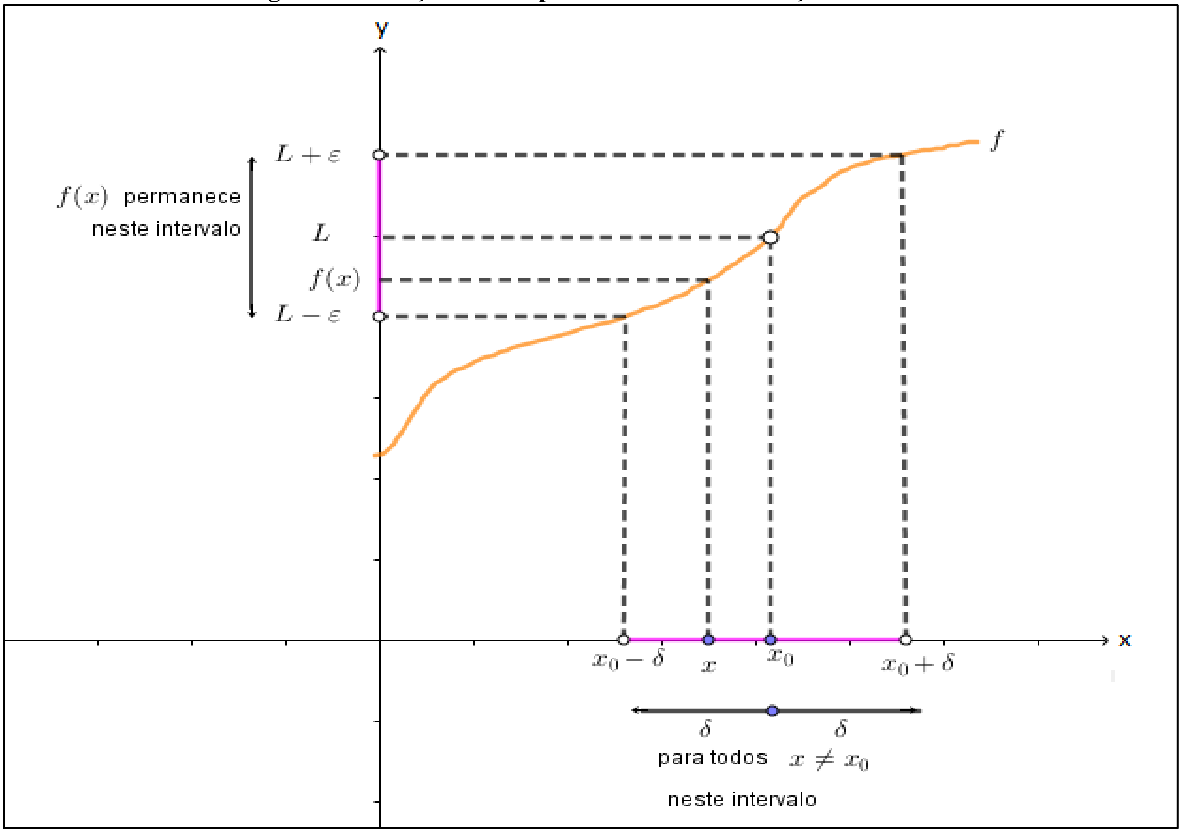
Diante dessa situação, fui em busca nas literaturas de algo que me desse suporte para apresentação do conteúdo de maneira a atender todos. E com base nessa situação, resolvi desenvolver na pesquisa de doutorado o conteúdo de limites e como apresentar exemplos de utilização desse conceito para os estudantes.

A partir das leituras realizadas, encontrei em Thomas *et al* (2009) uma proposta contextualizada, que serviu de referência para a elaboração de algumas atividades da sequência descrita no capítulo 4:

> Suponha que estejamos fabricando um eixo gerador com uma tolerância estreita. Poderíamos tentar conseguir um diâmetro L, mas, como nada é perfeito, temos de nos satisfazer com uma função de diâmetro $f(x)$ que fique entre L- ε e L+ ε. O δ é a medida de quão preciso nosso controle de x deve ser para garantir esse grau de precisão no diâmetro do eixo. Observe que, à medida que a tolerância de erro se tornar mais estreita, talvez tenhamos de ajustar δ - quão rígido nosso controle precisa ser - depende do valor de δ tolerância de erro. (THOMAS *et al*, 2009, p.86)

A Figura 1, apresentada por Thomas *et al* (2009), ilustra a citação acima.

Figura 1 - Relação entre épsilon e delta na definição de limite



Fonte: adaptado de Thomas *et al* (2009, p. 86)

Então, inspirado nesse argumento do autor, identifiquei a possibilidade de criar atividades para as sequências propostas nesta pesquisa. Tenho a intenção de apresentar a definição formal de limite de forma que seja possível compreender os elementos desse conceito e não apenas a aplicação.

Diante do exposto, tenho o seguinte objetivo geral: analisar a compreensão do conceito de limites de função, com utilização de *applets* do GeoGebra, pelos alunos de um curso de Ciências Exatas de uma universidade pública, a partir dos conhecimentos mobilizados sobre representação gráfica de funções, fatoração e manuseios algébricos, durante a implementação de Sequências de Atividades centradas na articulação das distintas representações desse objeto matemático.

Para atingir esse objetivo, esta pesquisa será norteada pela seguinte questão: *Como o desenvolvimento e a implementação de Sequências de Atividades elaboradas e centradas em processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) podem contribuir para a compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas?*

Para responder a essa questão, proponho os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as representações do objeto matemático limite de função, a partir de estudos preliminares, e utilizá-las para a elaboração e análises das produções dos alunos a partir dessas atividades;
- Analisar o desenvolvimento de processos de abstração, representação, visualização, sintetização, análise, intuição, simbólico, mudança de representação e tradução entre elas, generalização, assim como os construtos teóricos Imagem Conceitual e Definição Conceitual, do PMA, que emergem dos relatos dos alunos, de cursos de Ciências Exatas, ao resolverem as Sequências de Atividades elaboradas com a utilização de tecnologias e de *applets* do *software* GeoGebra, bem como as transformações de representações semióticas, a conversão e o tratamento;
- Contribuir com a construção e desenvolvimento da compreensão sobre limites a partir da utilização de *applets* educacionais disponibilizados no site do GeoGebra;
- Analisar como os conhecimentos mobilizados pelos alunos sobre esboço de gráficos, interpretação gráfica e manipulação algébrica, durante a implementação das Sequências de Atividades, poderão contribuir para a compreensão do conceito de limite de funções de uma variável na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior e das Tecnologias Digitais.

Esta pesquisa foi desenvolvida, inicialmente, com 13 alunos dos cursos de Matemática Licenciatura e Engenharia Civil, sendo 9 alunos do primeiro curso e 4 do segundo. No entanto, devido à pandemia e a dificuldades de acesso, alguns alunos não puderam continuar. Assim, nesta tese será analisada a participação de uma dupla que esteve presente durante todo o desenvolvimento das Sequências de Atividades elaboradas no âmbito deste estudo.

Esta tese está organizada em quatro capítulos. O Capítulo 1 consiste na Fundamentação Teórica e Metodológica, contemplando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Imagem Conceitual, Definição Conceitual, processos do PMA e aspectos metodológicos da Engenharia Didática. Análises preliminares, segundo a metodologia adotada, compõem o Capítulo 2. No Capítulo 3, no qual são descritos os procedimentos metodológicos, é destacada a utilização dos elementos da Engenharia Didática. Já a descrição e a análise das Sequências de Atividades estão inseridas no Capítulo 4. Por fim, são apresentadas as considerações finais, referências e anexos.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Neste capítulo, contemplaremos uma síntese teórica do Pensamento Matemático Avançado (PMA), a partir dos estudos de Tall e Vinner (1981) e de Dreyfus (2002). Discorreremos sobre alguns construtos teóricos, ressaltando *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* (TALL, VINNER, 1981). Os aspectos teóricos desenvolvidos na perspectiva do Pensamento Matemático Avançado serão levados em conta nesta pesquisa para a abordagem do conceito e análise de limite de função.

Fundamentaremos, ainda, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), por meio da qual serão sistematizados os registros relacionados ao conceito de limite de função, os quais também serão utilizados na elaboração e análise das Sequências de Atividades.

1.1.Pensamento Matemático Avançado

Diversos autores se dedicaram ao estudo do PMA como, por exemplo, Dreyfus (2002), Tall (2002), Gray *et al* (1999), entre outros.

Segundo Messias e Brandemberg (2015), o desenvolvimento do PMA favorece a aprendizagem de conteúdos matemáticos, de modo que "[...] o estudante deve manipular mentalmente, investigar e descobrir coisas a respeito do objeto foco de seu conhecimento, não de forma parcial e fragmentada, mas buscando visualizar a sua totalidade generalizante" (p.112).

O PMA, de acordo com Dreyfus (2002), é embasado em uma série de processos que interagem entre si de forma complexa como, por exemplo, os processos de representar, visualizar, induzir, intuir, abstrair, sintetizar e formalizar.

É importante destacarmos que os principais processos são o de representação e o de abstração, entretanto existem outros processos além desses, como classificar, conjecturar, induzir, analisar e formalizar. Mas é por meio dos dois processos principais que se passa de um nível de pensamento para outro.

Conforme Dreyfus (2002), esses processos podem ser encontrados tanto no Pensamento Matemático Elementar como no PMA, não existindo uma diferença nítida entre esses dois pensamentos, pois existem tópicos da matemática básica que podem ser tratados de forma avançada. Assim, há Pensamento Matemático Elementar sobre tópicos avançados. A distinção, porém, está na complexidade de como são tratados e gerenciados os processos presentes em cada um deles.

O processo de representar, para Dreyfus (2002), ocorre em registros compartilhados- como o da escrita, do desenho, da fala, dos gestos, entre outros. Já os processos indicados do PMA, como afirma Dreyfus (2002), são: representação simbólica; representação mental; visualização; mudança de representação; tradução entre representações; modelação.

As representações simbólicas e mentais envolvem relações entre signo e significado, com o intuito de fazer com que um conhecimento pessoal implícito seja explicitado em termos de símbolos- representações mentais- os quais se referem a esquemas internos que o indivíduo usa para se comunicar com o mundo externo e à visualização, que é um processo pelo qual as representações mentais podem ser construídas, e o ato de gerá-las está relacionado com os sistemas de representação, isto é, com artefatos externos concretos. Segundo Domingos (2003), a visualização, por ser um processo de formação de imagens, permite-nos intuir e compreender como os conceitos matemáticos são desenvolvidos. Na concepção de Dreyfus (2002), a visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência.

Nessa perspectiva, para que um indivíduo tenha sucesso na matemática, é desejável que ele possua uma rica representação mental dos conceitos. Vale ressaltar que uma representação pode ser considerada como rica se ela tem vários aspectos articulados do conceito como, por exemplo, a representação mental dos conceitos matemáticos- ou seja, do conceito de função-, a criação de vários componentes mentais para um mesmo objeto matemático, leis, tabelas, gráficos. Por outro lado, uma representação é pobre se possui poucos elementos que permitem a flexibilidade na resolução de problemas como, por exemplo, imagens mentais pobres do conceito de funções são típicas entre estudantes universitários iniciantes, que pensam em funções apenas em termos de fórmulas.

As representações, segundo Dreyfus (2002), são fundamentais na matemática, uma vez que os símbolos possibilitam aprender e pensar matematicamente. Desse modo, existe a representação mental que está atrelada aos aspectos matemáticos e psicológicos de um processo que raramente pode ser separado. Nesse sentido, quando se constrói um gráfico de uma função, está executando-se um processo matemático seguindo certas regras que podem ser estabelecidas em linguagem matemática. E, de acordo com Dreyfus (2002), é provável que se esteja gerando uma imagem mental desse gráfico- a qual poderá mais tarde ajudar a raciocinar sobre a função estudada.

Dessa maneira, quando se pensa a respeito de um limite de uma função, de uma integral ou qualquer outro objeto matemático, cada um relacionará com algo que já tem em mente; isso é o que Dreyfus (2002) denomina de representação mental do objeto em questão. Diante disso, é possível que as pessoas- a partir das definições matemáticas- construam representações mentais, que em essência são semelhantes, mas que podem diferir de pessoa para pessoa. O mesmo acontece com o objeto em que as representações mentais podem diferir (e diferem) de pessoa para pessoa.

O processo de tradução entre as representações, por sua vez, está intimamente ligado ao processo de mudança de representações e consiste em passar de uma formulação de um problema matemático ou de uma propriedade para outro.

O último processo da representação é a modelação, que é a formulação de uma representação matemática para um objeto não-matemático. Na visão de Dreyfus, a modelação

> significa a construção de uma estrutura matemática ou teoria que incorpora características essenciais do objeto do sistema. Esta estrutura, teoria, ou modelo, pode ser usado para estudar o comportamento do objeto ou processo a ser modelado, (DREYFUS, 2002, p.34, tradução nossa).

Até aqui todos os processos descritos (representar, mudança de representações e tradução entre elas, e a modelação) constituem o processo de representação. O segundo processo descrito por Dreyfus (2002) é a abstração, que é formado pelos processos de generalização e sintetização. Além disso, é considerado o processo mais importante no desenvolvimento das habilidades em certos conteúdos matemático. Conforme Dreyfus (2002)

> Se um aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático. Atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada. (DREYFUS, 2002, p.34, tradução nossa)

Assim, para Dreyfus (2002), generalizar é derivar ou induzir a partir de indicações, a fim de identificar pontos em comum e, desse modo, expandir domínios de validade. Tal processo se torna importante ao passo que, a partir de um caso particular, pode-se estender para uma grande quantidade de casos.

O outro processo que está vinculado à abstração é a sintetização. Este se refere à combinação de partes com o propósito de formar um todo. Segundo Messias e Brandemberg (2015), o processo de sintetização caracteriza-se pela construção de um quadro teórico que congrega e interrelaciona fatos, aparentemente isolados.

Dessa forma, a abstração contém

> O potencial para generalização e sintetização; e vice-versa, torna-se sua finalidade, principalmente a partir desse potencial de generalização e de síntese. A natureza do processo mental de abstração é, contudo, muito diferente da generalização e do de síntese. Abstrair é antes de tudo um

> processo de construção – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento de propriedades adequadas e estabelecimento de relações. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos objetos em si a estrutura das suas propriedades e relações. (DREYFUS, 2002, p.37, tradução nossa).

Para organizarmos os processos considerados por Dreyfus (2002), exibimos o Quadro 1:

Quadro 1 - Descrição dos processos do PMA, segundo Dreyfus (2002)

Processo de representação simbólica	Pode-se representar um conceito/objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto, é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito/objeto matemático representado.
Processo mental	A representação de um conceito/objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito/objeto.
Processo de visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de representação e tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito/objeto matemático demanda habilidades para interligá-las corretamente, sempre que necessário. Traduzir representações é se referir à passagem de informações de enunciado/propriedades matemáticas para outra, assim como a tradução entre linguagens (por exemplo, matemática e verbal).
Processo de modelação	O objeto/processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura/teoria matemática que abrange suas características. De certo modo, os processos de modelação e de representação são análogos, mas em níveis distintos. Ao modelar, a situação é física, e o modelo é matemático; ao representar, o objeto a ser representado é uma estrutura matemática, e o modelo, uma estrutura mental.
Processo de sintetização	Utilizar uma composição de objetos/conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver tarefa como um todo.
Processo de análise	Organiza as novas ideias dentro de uma forma lógica, refinando e dando precisão às deduções.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.
Intuição	Fazer afirmações pela cognição direta e imediata, sem evidência de um pensamento racional.
Processo de abstração ou formalização	É um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objetos para a estrutura de suas propriedades e relações.

Fonte: Adaptado de Dreyfus (2002)

Dreyfus (2002) considera que não há uma clara distinção entre os muitos processos que contemplam os pensamentos matemáticos elementar e avançado, apesar da matemática avançada ser mais focada nos processos de generalização, abstração ou formalização. Também afirma que muitos dos processos sobre conceitos elementares da matemática já estão presentes no pensamento das crianças-como, por exemplo, número e posição. Entretanto, Tall (2002) explica que

> [...] nós então, concentramos nossa atenção no ciclo completo da atividade do Pensamento Matemático Avançado: do ato criativo de considerar um contexto problemático na pesquisa matemática que leva à formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova. (TALL, 2002, p.3, tradução nossa)

Para Tall (2002), muitas das atividades que ocorrem nesse ciclo também ocorrem na resolução de problemas na matemática elementar. No entanto, a possibilidade de definição formal e a dedução de propriedades dos objetos matemáticos é um fator que distingue o Pensamento Matemático Avançado do elementar.

Como assevera Dreyfus (2002), os processos elementar e avançado não são uma exclusividade em matemática elementar nem em matemática avançada. Nessa perspectiva, abstrações são feitas na física, representações na psicologia, análise em economia e visualização, em artes.

Dreyfus sinaliza que é possível pensar em tópicos de matemática avançada de maneira elementar, como exemplo, há muitos exercícios padrões contemplando o estudo de anéis ou de grupos que podem ser resolvidos por meio de uma conexão direta com o conceito de número. E há um pensamento bastante avançado sobre tópicos elementares, como exemplos podemos considerar as conexões complexas relacionadas com uma matemática formal necessária para solucionar alguns problemas constantes nas avaliações das Olimpíadas Brasileiras de Matemática. Ainda ressalta que

> Uma característica distintiva entre o pensamento avançado e pensamento elementar é a complexidade e como ela é tratada. Conceitos avançados, como anéis ou grupos, provavelmente são muito complexos. A distinção está em como esta complexidade é gerenciada. Os processos poderosos são aqueles que permitem fazer isso, em particular a abstração e a representação. Por meio da abstração e representação, pode-se mudar de um nível de detalhe para outro e, assim, gerenciar a complexidade. (DREYFUS, 2002, p.26)

Tall (2002) faz algumas considerações pertinentes sobre o estudo do Pensamento Matemático Avançado, os quais servem de base para a compreensão do assunto. Ele considera a dificuldade em discutir a natureza da psicologia do Pensamento Matemático Avançado com base no matemático Hadamard (1945), o qual afirma

> [...] que o assunto envolve duas disciplinas, psicologia e matemática, e exigiria, para ser tratado adequadamente, ser um psicólogo e um matemático.

> Mas devido à falta da junção destes dois profissionais, o assunto foi investigado por um lado por matemáticos e por outro, por psicológos [...] (HADAMARD, 1945, p.1, *apud* TALL, 2002, p.3 tradução nossa).

Segundo Tall (2002), os representantes das duas disciplinas, psicologia e matemática, tendem a ver o assunto de maneiras diferentes. O psicológo procura estender teorias psicológicas ligadas aos processos de pensamento na tentativa de uma compreensão, de forma mais complexa, sobre o domínio do conhecimento; enquanto o matemático busca soluções para o processo de pensamento criativo, talvez com a esperança de contribuir para um avanaço na qualidade do ensino ou da pesquisa.

O nosso objeto de estudo está centrado no processo de aprendizagem do conceito de limites. Tomando como referência a implementação de Sequências de Atividades elaboradas com o auxílio de *applets* do GeoGebra, analisaremos como os alunos de cursos de Ciências Exatas mobilizam e compreendem o conceito de limite em um processo formativo centrado em processos do Pensameno Matemática Avançado (PMA) e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), bem como na formulação de conjecturas, no refinamento e na formalização desse conceito.

Corroboramos a ideia de Tall (2002, p. 3, tradução nossa) de que "[....] sequências didáticas apropriadas de aprendizagem bem elaboradas podem ajudar o aluno a construir ativamente os conceitos e assim poder ser bem sucedido".

Na visão de Tall (2002), é importante discutir sobre qualquer teoria relacionada à psicologia da aprendizagem matemática e levar em consideração não só as modificações das concepções dos alunos como também as concepções dos matemáticos mais experientes. Ele considera que a "Matemática é uma cultura compartilhada e há aspectos dependentes do contexto" (TALL, 2002, p. 6). Nesse sentido, dependendo das nossas experiências, em um nível mais profundo, todos nós temos formas sutilmente diferentes de enxergar um conceito matemático.

Existem muitas teorias concorrentes na psicologia, entre elas: a Teoria Behaviorista, que é construída sobre a observação de estímulos e respostas e se recusa a especular sobre o funcionamento da mente. Essa teoria estuda o comportamento do indivíduo. Entre outras, ela tem aplicação limitada na matemática, pois, conforme Tall (2002), só se aplica aos pensamentos matemáticos mecanizados, como é o caso dos algoritmos de rotina.

A Teoria Construtivista, que tem Piaget como seu principal representante, discute como as ideias são criadas na mente de cada indivíduo. Piaget estudou o desenvolvimento da criança até ela se tornar adulta e identificou quatro etapas principais: sensório-motora, a fase pré-operacional, a fase das operações concretas e, finalmente, a fase das operações formais, no início da adolescência, quando o tipo de hipotética "se - então" torna-se possível.

De acordo com Tall (2002), a teoria dos estágios piagetianos foi estendida para níveis mais altos, para abranger o Pensamento Matemático Avançado. Para que atingisse esse *status,* contou com a contribuição de pesquisadores, como Ellerton (1985, *apud* TALL, 2002), que sugeriu serem as três primeiras fases do ciclo de Piaget o primeiro nível de uma espiral do desenvolvimento cognitivo, no qual o estágio formal é o início de outro ciclo do mesmo tipo, em maior nível de abstração; e, Biggs e Collis (1992, *apud* TALL, 2002), que sugeriram a repetição das operações formais em níveis sucessivamente superiores.

Porém, Tall (2002) salienta a dificuldade de aplicar a teoria piagetiana no curso superior, pois é provável que a grande maioria dos estudantes universitários não seja capaz de operar ao nível abstrato das operações formais.

Em se tratando dos estágios, Tall (2002) faz a seguinte analogia: "o estágio pode ser visto de forma comum, linear, de um sistema muito mais complexo de mudança, quando se trata da transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado". (p. 9, tradução nossa)

Um aspecto valioso da teoria de Piaget destacado por Tall (2002) corresponde à transição mental de um estágio para outro. Durante a transição, é possível a existência de um comportamento instável, pois é possível que o conhecimento de novas informações possa causar conflitos com experiências anteriores. Piaget usa o termo '*assimilação'* para descrever os processos pelos quais o indivíduo recebe novos dados e '*acomodação'* para descrever os processos pelos quais a estrutura cognitiva do indivíduo dever ser modificada. Ele entende '*assimilação'* e *'acomodação'* como processos complementares e considera que, durante uma transição, é necessária muita acomodação.

Tall (2002) argumenta que Skemp (1979, *apud* TALL, 2002) apresenta duas formas de compreensão de um conceito matemático que são por ele chamadas de Instrumental e Relacional. A Instrumental envolve o conhecimento memorizado de regras que permitem usá-las para resolver certos tipos de problemas, e a Relacional que consiste na concepção de uma estrutura conceitual rica e integrada, que permite relacionar os significados, procedimentos, regra e representações, possibilitando a sua mobilização para comunicar e resolver problemas.

Para Tall (2002), as duas formas de compreensão de Skemp (1979, *apud* TALL, 2002) são postas de maneiras semelhantes, mas de modo diferente. A primeira corresponde ao processo de aprendizagem que provoca uma expansão da estrutura cognitiva do indivíduo; e a segunda, ao processo de aprendizagem em que há conflito cognitivo, exigindo uma reconstrução do pensamento. Nessa segunda ideia, Tall (2002) enfatiza a dificuldade de reconstrução do pensamento, considerando que as transições sempre ocorrem no Pensamento Matemático

Avançado, à medida que o indivíduo luta com a nova estrutura de conhecimento, uma vez que "conflito é um fenômeno bem conhecido da mente matemática." (TALL, 2002, p. 9, tradução nossa).

Portanto, segundo Tall (2002), o problema mais sério é quando as novas ideias não são satisfatoriamente acomodadas, podendo gerar conflito em um indivíduo. E, como consequência, essas ideias entram em conflito com o conhecimento já construído, podendo ou não gerar novos conhecimentos. Assim, muitas vezes o novo conhecimento contradiz o antigo e, para que haja aprendizado, é necessária a criação de estratégias para lidar com os conflitos, podendo ou não haver aprendizagem.

Quanto aos processos de abstração e generalização, Tall (2002) afirma que consistem em fatores cognitivos que dificultam ou impedem o aprendizado de matemática avançada. Como ressalta esse autor, a abstração é um objeto mental muito distinto, que é definido por uma lista de axiomas. Enquanto a generalização simplesmente envolve uma extensão dos processos conhecidos, a abstração requer uma reorganização mental volumosa.

Também consideramos relevante destacarmos as discussões relativas ao rigor e à intuição que devem ser contemplados nas abordagens dos conteúdos de matemática, especialmente no contexto do ensino superior. Nessa direção, Tall (2002) considera que essas questões devem ser levadas em consideração, quando se trata dos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos que requerem pensamentos matemáticos mais elaborados, destacando a possibilidade de uma visão dicotômica entre rigor e intuição.

Para a construção do Pensamento Matemático Avançado, Tall (2002) aponta dois aspectos como fundamentalmente complementares na elaboração de conceitos e resultados: a criatividade, ao se gerar novas ideias e conceitos, e o convencimento da validade de certo resultado, por meio da prova matemática.

A seguir, passaremos a discorrer sobre os construtos teóricos *Imagem Conceitual* e D*efinição Conceitual*, desenvolvidos pelos autores no âmbito do Pensamento Matemático Avançado.

1.2. Imagem Conceitual e Definição Conceitual

Entre as teorias cognitivas relativas à construção dos conceitos matemáticos, daremos destaque, na presente pesquisa, aos trabalhos de Tall e Vinner (1981), que foram os impulsionadores da discussão acerca da *Imagem Conceitual* e da *Definição Conceitual*, também chamadas, por alguns autores como, por exemplo, Domingos (2003) e Almeida e Igliori (2013), de Conceito Imagem e Conceito Definição.

Como enfatizam Tall e Vinner (1981), o cérebro humano não é uma entidade puramente lógica, uma vez que funciona de maneira complexa e, muitas vezes, em desacordo com a lógica matemática. Para entender como esses processos ocorrem, obtendo sucesso ou insucesso, devemos formular uma distinção entre os conceitos matemáticos formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos.

Partindo desse ponto de vista, para Tall e Vinner (1981), muitos conceitos que usamos não são formalmente definidos. Aprendemos a reconhecê-los por experiência e pelo uso em contextos apropriados. Mas esses conceitos podem, ao longo do tempo, ser refinados no seu significado e interpretados com certa sutileza com ou sem a definição precisa.

Geralmente, segundo os autores, nesse processo, o conceito recebe um símbolo ou nome que permite que ele seja comunicado e auxilia na manipulação mental. Todavia, a estrutura cognitiva total a qual envolve o significado do conceito é muito maior do que a evocação de um único símbolo. É muito maior do que qualquer imagem mental, seja pictórica, seja simbólica, ou de outra forma. Durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são criados, consciente e inconscientemente, afetando o significado e o uso.

Tall e Vinner (1981) definem Imagem Conceitual e Definição Conceitual trazendo uma diferenciação entre esses termos, o que é de grande importância para a compreensão de processos cognitivos, bem como para a valorização de diferentes representações para o entendimento de determinados conceitos.

Para Tall e Vinner, a Imagem Conceitual

> [...] é a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, a qual inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associadas. Ela é construída ao longo dos anos por meio de todo tipo de experiência, mudando assim que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL e VINNER, 1981, p. 152)

Enquanto a Definição Conceitual

> [...] é uma forma como as palavras são usadas para especificar aquele conceito. Ela pode ser aprendida por um processo mecânico ou aprendida mais significativamente e estar relacionada com um maior ou menor grau ao conceito por inteiro. Também pode ser uma reconstrução pessoal do aluno. (TALL e VINNER, 1981, P.152)

Partindo desses conceitos, é importante afirmarmos que o presente trabalho se preocupa em fomentar a construção da Imagem Conceitual relativa às representações geométricas de funções de uma variável para o estudo de limite e da Definição Conceitual relacionando à representação imagética projetada pelos *applets* os conceitos apreendidos. É importante ressaltarmos que esse tipo de representação, mostra as gráficas de forma dinâmica, diferente da trabalhada usualmente, por meio de representações estáticas.

Em um artigo sobre o papel da visualização em cálculo, Tall (1991b) observa que

> Ideias visuais frequentemente consideradas intuitivas por um matemático experiente não são, necessariamente, intuitivas para um estudante inexperiente, ainda assim, aparentemente, ideias mais complicadas podem conduzir a poderosas intuições para o rigor de provas matemáticas posteriores. (TALL, 1991b, p.105)

Essa observação demonstra que, muitas vezes, a visualização não é óbvia e que é necessária a preocupação docente frente à dificuldade dos alunos em visualizar corretamente a representação gráfica do que está sendo trabalhado.

Embora Tall e Vinner (1981) concordem quanto ao que definiram como Imagem Conceitual e Definição Conceitual, há uma subjetividade entre os dois no entendimento dessas noções. Vinner (2002) usa imagens de células separadas para buscar entender as relações entre as noções, quando se refere à aquisição de um conceito, em contextos que ele chamou de "técnicos". Tall (2002) não vê os conceitos, ainda que distintos, mas, sim, que a Definição Conceitual deve ser concebida como uma parcela da Imagem Conceitual global que existe na nossa mente/cérebro.

De acordo com Vinner (2002), os termos Imagem Conceitual e Definição Conceitual têm peso considerável para explicação do processo cognitivo da formação dos conceitos. O surgimento desses termos se deu quando Vinner fez uma visita à Universidade Warwick, em 1980, ano em que Tall havia recolhido uma grande quantidade de dados, junto aos alunos universitários, e procurava fazer uma análise que fosse além do ponto de vista matemático. A partir desses dados, Tall e Vinner, em 1981, publicaram um texto (TALL, VINNER, 1981) no qual definiram os termos Imagem Conceitual e Definição Conceitual.

Como já foi dito anteriormente, há uma subjetividade dos dois autores no entendimento em torno dos conceitos abordados. Conforme Tall (2002), a visão de Vinner (2002) para Imagem Conceitual é definida de maneira mais filosófica. É uma experiência mental do investigador ao procurar analisar o que acontece quando os alunos se focam, de formas diferentes, nas imagens e definições, podendo induzir que a mente está separada do cérebro. É assim que é definida a existência de células diferentes na estrutura cognitiva as quais servem de base ao seu modelo de formação dos conceitos.

Diferentemente de Vinner (2002), para Tall (2002), a mente é pensada como a forma de o cérebro trabalhar, uma vez que é uma parte indivisível da estrutura do cérebro. Diante da proposta apresentada por Vinner (2002), da separação entre Definição Conceitual e Imagem

Conceitual, Tall considera que a Definição Conceitual não é mais do que uma parcela da Imagem Conceitual total que existe na nossa mente.

Segundo os autores, a Definição Conceitual pode ser aprendida por um indivíduo de forma mecânica ou mais provida de significados relacionados com maior ou menor grau. Então, é subjetivo e não está necessariamente de acordo com a comunidade matemática, podendo variar ao longo do tempo.

Tall e Vinner (2002) afirmam que uma Definição Conceitual pode ser uma reconstrução pessoal feita pelo indivíduo ou dada a ele, ou a forma de palavras que o indivíduo usa para sua própria explicação sobre sua Imagem Conceitual evocada. Esse é um termo usado pelos autores para descrever a parte da memória evocada num dado contexto.

Desse modo, para cada indivíduo, Imagem Conceitual gera sua própria Definição Conceitual, o que para Tall e Vinner (1981) possibilita falar de "Imagem da Definição Conceitual", podendo, assim, ser considerada uma parte da Imagem Conceitual. Para alguns indivíduos, pode estar vazia ou inexistente. Já em outros pode ou não estar relacionada coerentemente a outras partes da Imagem Conceitual. Para exemplificar o que foi anteriormente descrito, Tall e Vinner (1981) usam a Definição Formal de função que pode ser considerada como "uma relação entre dois conjuntos A e B, em que cada elemento de A está relacionado precisamente com um elemento em B".

Como destacada Tall e Vinner (1981), é possível que os alunos que estudaram funções possam ou não se lembrar da definição, e a Imagem Conceitual incluir muitos outros aspectos, com a ideia de que uma função é dada por uma regra ou uma fórmula, ou talvez que várias fórmulas diferentes possam ser usadas em diferentes partes do domínio de A.

A função também pode ser vista como forma dinâmica, em que se aplica o elemento a em f e relaciona-se a um elemento de B, e que possa ser representada por gráficos ou tabelas. Todos esses aspectos, imagens conceituais geradas a partir da Definição Conceitual, ou nenhum, podem estar na Imagem Conceitual do aluno.

Mas o professor pode dar a noção formal, trabalhar com ela por um tempo e, depois, enfocar exemplos que são sempre dados por fórmulas. Nesse caso, a Imagem Conceitual desenvolvida pelo sujeito pode constituir-se de uma noção mais restrita, apenas envolvendo fórmulas, enquanto a Definição Formal permanece inativa na mente do sujeito. Este até pode operar, de forma satisfatória, com essa noção restrita e até mesmo dar respostas usando a Definição Formal correta, enquanto sua Imagem Conceitual permanece inapropriada, correndo o risco de se deparar mais tarde com o assunto em questão, em contextos mais amplos, e ter desenvolvido habilidades mínimas suficientes para lidar com tal situação.

Esses autores chamam a atenção para a possibilidade de encontrar-se partes da Imagem Conceitual que entram em conflito com outras partes da própria Imagem Conceitual ou com a Definição Conceitual. Como por exemplo, quando as concepções do sujeito são evocadas da Imagem Conceitual de forma desconexa com a Definição Conceitual (TALL, 2002) revelando, por exemplo, incompreensão do uso dos δ e ε ou de sua ordem na Definição Formal de limites.

Diante do que foi exposto, entendemos que não é tarefa simples superar um fator de conflito potencial relacionado a um conceito; mesmo porque os objetos matemáticos não são, a começar pelos números, por exemplo, perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, o que dificulta ainda mais. O acesso aos objetos matemáticos é obtido por meio de representações. Então, pode-se criar atividades que, entre outras coisas, mobilizem pelos menos duas representações simultaneamente- que é uma característica de uma atividade matemática original, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Segundo Duval (2003), essa aprendizagem ocorre quando o aluno consegue reconhecer o mesmo objeto por pelo menos duas representações distintas.

1.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Nesta seção apresentamos os principais aspectos da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS), com ênfase nos trabalhos de Raymond Duval, devido à importância dessa teoria para a nossa pesquisa.

De acordo com essa teoria, em matemática, os objetos de estudo não são diretamente acessíveis à percepção e sua comunicação se estabelece por meio de diferentes representações. Para sua apreensão, é necessário o uso de diferentes representações.

Duval (2003) toma como referência: a) Peirce Brendan Brosnan, para analisar o papel das representações centrando uma forte teorização geral sobre os signos; b) Ferdinand Saussure, para o qual o signo é uma entidade linguística de duas faces (uma acústica e a outra conceitual); c) Friedrich Ludwig Gottlob Frege, para o qual o discurso tem forte amparo na logicidade da linguagem e, para a matemática, acirra-se a necessidade de certo progresso rigoroso nas formas em que o matemático se organiza para a produção de sentidos.

Na perspectiva de Duval (2003), uma análise do conhecimento matemático da sala de aula é, essencialmente, uma análise do sistema de produção dos Registros de Representação Semiótica referentes a esse conhecimento. Para ele, interessa estudar o que a semiótica permite dizer acerca da representação do pensamento, com especificidade no pensamento matemático. Assim, o autor preocupa-se com a maneira de produção de sentidos por meio de uma relação entre a imagem acústica e possíveis representações permitidas para os objetos matemáticos e como os signos exercem papéis essenciais para a estabilização de certos sentidos matemáticos.

Nos trabalhos de Raymond Duval (2003) sobre os Registros de Representação Semiótica são apresentados alguns questionamentos importantes:

- Como compreender as dificuldades, muitas vezes insuperáveis, que muitos alunos têm na compreensão da matemática?

- Qual a natureza dessas dificuldades?

- Onde elas se encontram?

Essas questões passaram a ter uma amplitude e uma importância particular com a recente exigência de uma maior formação matemática inicial para todos os alunos, a fim de prepará-los para enfrentarem um ambiente informático da atual sociedade tecnológica, assim denominada.

Na visão de Duval (2003), para responder a essas questões, não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. Para ele, é necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde- e, sim, contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e visualização.

Para o autor, a originalidade da abordagem cognitiva está em procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Nesse sentido, é importante destacarmos que na matemática a atividade cognitiva requerida é diferente em relação às áreas do conhecimento em que é possível produzir experiências nas quais exemplos imagéticos de objetos podem ser visualizados no campo perceptivo ou observáveis com a ajuda de instrumentos. Isso ocorre porque a matemática lida com uma produção de sentidos em que os objetos estão para uma ordem de domínios abstratos.

Nessa direção, Duval (2003, p.13) esclarece que

> a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos – pois não há domínio de conhecimento que não desenvolva um contingente de conceitos mais ou menos complexos – mas nas duas características seguintes:
>
> A importância primordial das representações semióticas: a história do desenvolvimento da matemática foi um fator marcante para o desenvolvimento das representações semióticas sendo uma condição

> essencial para a evolução do pensamento matemático. O fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não serem diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos, o acesso aos números está ligado à utilização de representação que os permite designar. A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática – além dos sistemas de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, mesmo se ela é utilizada de outra maneira que não a de linguagem corrente. (DUVAL, 2003, p.13)

Para Duval (2003), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois Registros de Representação Semiótica ao mesmo tempo, ou na possibilidade de troca, a todo momento, de registros de representação.

A comunicação em matemática se estabelece com base em representações, que são referidas como fundamentais na construção de conceitos matemáticos pelos alunos, existindo evidêncsias de uma relação entre o seu desempenho e as representações por eles usadas. Como destaca Duval (2003), uso de diversas representações ajuda os alunos a obterem uma ideia mais completa de um conceito matemático e, por aprendê-lo, requer uma abordagem que contemple essa diversidade. A capacidade de reconhecer e representar o limite, por exemplo, nas suas diferentes representações, é considerada um requisito para sua compreensão, sendo as representações verbais numéricas, algébricas e geométricas as mais consideradas no ensino (DOMINGOS, 2003).

A representação verbal do limite consiste na sua descrição utilizando a linguagem coloquial ou natural, sendo muito comum o uso de termos como "se aproxima", "tende a" e "tão pequeno quanto se queira", para expressar ideias sobre o limite.

Em relação às representações numéricas, de acordo com Domingos (2003), essas estão presentes quando se usam sequências de números para descrever as aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. Por outro lado, as representações algébricas são aquelas que dizem respeito às expressões matemáticas que recorrem às simbologias da álgebra. E, por último, as representações geométricas que recorrem à representação gráfica de uma função, apoiada num sistema de coordenadas cartesianas, contendo registros indicativos das variáveis do limite, como: $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ por meio de setas, intervalos abertos ou de vizinhanças.

Na definição formal de limites se encontram as diversas representações do limite, o que pode contribuir para a compreensão dessa definição, desenvolvendo nos alunos a capacidade de pensar abstratamente e de construir significados adequados sobre o limite (DOMINGOS, 2003). Segundo Domingos (2003), um estudante que é capaz de operar com diversas representações e estabelecer conexões entre os seus registros- explicando o significado das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, em termos de vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, reconhecendo os papéis dos δ e ε nesses registros e, também, o limite como resultado da implicação $(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L))$- evidencia ter uma concepção adequada da definição formal, necessária à compreensão de limite.

Segundo Duval (2003), as transformações podem ocorrer de duas formas distintas: por meio do tratamento e da conversão. Os tratamentos são transformações realizadas dentro do mesmo registro de representação, enquanto as conversões são realizadas entre diferentes representações, conservando o mesmo objeto. Para o autor, é importante que os alunos sejam capazes de trabalhar dentro e entre os diferentes registros, a fim de alcançarem compreensão na aprendizagem.

Corroboramos a ideia de Duval no sentido de que, ao resolvermos um problema ou desenvolvermos determinada tarefa matemática, torna-se necessária a mobilização sucessiva de distintos registros de representação, bem como a realização de tratamentos dentro do próprio registro.

Ressaltamos que, na nossa pesquisa, usaremos os seguintes códigos para nos referirmos a determinadas representações: RG (Representação Gráfica); RLN (Representação da Língua Natural); RA (Representação Algébrica); RN (Representação Numérica); RS (Representação Simbolica).

Sobre a mudança de registros e representação, Duval (2003, p. 15) tece a seguinte conjectura: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Ou seja, para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão existem dois tipos diferentes de transformações de representação semiótica: os tratamentos e as conversões. Nessa perspectiva, a aprendizagem do conceito matemático é obtida, na referida teoria, a partir da transição entre pelo menos dois registros de representação semiótica distintos. As operações de tratamento e de conversão entre registros de representação semiótica estão sintetizadas no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2 - Tratamento e Conversão de Registros de Representação Semiótica

<table>
<tr><td colspan="4">Transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica</td></tr>
<tr><td></td><td>Permanecendo no mesmo sistema:
Tratamento</td><td rowspan="2"></td><td>Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos:
Conversão</td></tr>
<tr><td></td><td>Quase sempre é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação.
De um ponto de vista "pedagógico", tentam algumas vezes procurar o melhor</td><td>Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto por meio de duas representações diferentes.</td></tr>
</table>

	registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.		A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam conforme os tipos de registros entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: Adaptado de Duval (2003, p.15)

O tratamento, como afirma Duval (2003), é o tipo de transformação que mais chama a atenção porque passa por um processo de justificativa. Podemos ilustrar, como exemplo, os teoremas que são enunciados por meio de hipótese, que é um conjunto de afirmações necessárias para ter em conta para iniciar uma demonstração, e da tese, que é aquilo que deverá ser provado. Do ponto de vista pedagógico, conforme Duval (2003), os professores procuram, sempre que possível, lançar mão de estratégias para escolher os melhores registros de representação a serem utilizados para possibilitar a compreensão dos alunos.

No que se refere às conversões, essas são entendidas como transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos denotados. Por exemplo, o limite de uma função, $\lim_{x \to x_0} f\ (x) = L$ pode ser representado por meio de tabelas, por meio de uma representação gráfica, usando lápis e papel ou utilizando *software,* como o GeoGebra ou um *applet*.

Em nossa pesquisa, o objeto matemático versa sobre o conteúdo de limites de uma função real de uma variável real, que será desenvolvida por Sequências de Atividades que perpassam, ao longo do seu desenvolvimento, por diferentes representações. Para tanto, serão utilizados *applets* construídos com o GeoGebra, pois possibilitam a percepção das transformações algébrica/gráfica e gráfica/algébrica.

A conversão é analisada sob dois pontos de vista: o matemático e o cognitivo. Do ponto de vista matemático, a conversão, segundo Duval, não faz parte dos processos matemáticos de justificação ou de prova, o que faz com que a conversão passe despercebida, como se tratasse de uma atividade lateral evidente e previa à “verdadeira” atividade matemática (entendida como atividades que envolvem demonstrações com tratamentos algébricos, levantamento de hipóteses e teses, etc.). Já do ponto de vista cognitivo, a conversão aparece como uma atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Duval (2003) explica que, geralmente, considera-se a conversão de registro de representação como uma operação simples e local, ou seja, seria reduzida a uma “codificação”. Por exemplo, passar de uma equação a uma representação gráfica consistiria em aplicar uma regra, por meio da qual um ponto está associado a um par de números num plano quadriculado por dois eixos graduados (plano cartesiano). Podemos considerar, ainda, que a passagem de uma expressão escrita em língua natural – como, por exemplo, “o limite da função $f(x) = 2x + 1$, quando x tende a 2, é igual a 5”, para a escrita simbólica, $\lim_{x \to 2}(2x + 1) = 5$, corresponderia a uma codificação.

O autor reporta a esses exemplos para inferir que a visão de que uma conversão consiste em “uma operação simples e local é enganadora e superficial não somente nos fatos concernentes à aprendizagem, como também de um ponto de vista teórico” (DUVAL, 2003), uma vez que a codificação permite somente uma leitura pontual das representações gráficas. Segundo ele, para que haja uma apreensão global e qualitativa, é necessário ir além para que se possa extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle, ou de exploração, relacionados aos tratamentos algébricos. Considera, também, que a conversão entre gráficos e equações requer que se leve em conta as variáveis visuais do gráfico com os valores escalares das equações.

O referido teórico ainda evidencia a dificuldade dos alunos ao passarem do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Para Duval (2003), a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro, pois passar de um registro de representação a outro não é somente mudar o modo de tratamento, mas também saber explicar propriedades de um mesmo objeto. E isso está intimamente ligado ao fato de dispor ao menos de dois registros diferentes.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) tem servido de base para várias pesquisas, como exemplo podemos citar o artigo intitulado “Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software*” , de Maple Almouloud e Henriques (2016); a tese “Aplicação dos Registros de Representação Semiótica no Ensino-Aprendizagem da Matemática”, de Neres (2010); a dissertação “Estudo dos Registros de Representação Semiótica Mediados por um Objeto de Aprendizagem”, de autoria de Felix (2014), entre outros.

Concernentes à aquisição do conhecimento matemático e à organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos, em nossa pesquisa, a TRRS será utilizada com o PMA na organização e análise das atividades que constituirão as Sequências de Atividades relacionadas ao conceito de limite de função de uma variável.

1.4 Engenharia Didática

A pesquisa desenvolvida em Educação Matemática contempla distintas metodologias, entre elas, a Engenharia Didática, que é classificada por sua mentora, Michelle Artigue *et al.* (1995), como metodologia de investigação a qual

> [...] caracteriza-se por um esquema experimental baseado nas realizações didáticos na aula, isto é, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequência de ensino" (ARTIGUE *et al*., 1995, p. 36).

Posto isso, as práticas educativas desenvolvidas a partir de princípios da Engenharia Didática devem ser compreendidas como práticas de investigação. À medida que os conteúdos são trabalhados, estes devem ser colocados em dúvida e discutidos para que os alunos tenham a noção da complexidade dos objetos estudados.

A metodologia da Engenharia Didática está dividida em quatro fases, a saber:

I) Análises prévias;

II) Concepção e análise *a priori*;

III) Experimentação;

IV) Análise *a posteriori* e validação.

Análises prévias

Esta fase é estruturada com o objetivo de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades, bem como os obstáculos que marcam a evolução das concepções. Já a tradição é vista como um estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema dinâmico, que tem falhas. A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório.

Concepção e análise *a priori*

Nesta segunda fase (concepção e análise a *priori*) é que o investigador decide o modo de agir sobre uma determinada quantidade de variáveis do sistema de comando, que supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado, conforme explica Artigue *et al*. (1995). A autora ainda indica a distinção de dois tipos de variáveis de comando, sendo elas: as variáveis macrodidáticas ou globais, são aquelas que dizem respeito à organização global da engenharia; e as variáveis microdidáticas ou locais, são aquelas que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado (ARTIGUE, 1988, p.202).

1) As variáveis macrodidáticas ou globais, aqui em relação ao nosso objeto de pesquisa limite de uma função, que dizem respeito à organização geral da engenharia, podem ser:

1- deixar explícita a mudança de noção intuitiva por meio de tabelas para a noção intuitiva por meio de representação gráfica, enfatizando a ideia de movimento;

2- utilizar computadores e *softwares* de geometria dinâmica, no caso construção de *applets* GeoGebra, por ser livre e de fácil manuseio;

3- definir cada ponto de estudo da função e analisar os limites pela ação dos movimentos provocados pelos *applets* do *software* GeoGebra, interpretar e entender a existência, ou não, do limite de uma função em ponto.

4- trabalhar em sala de aula, conectar- sempre que possível-, usar o computador e o papel, propor questões e ter como referência definições formais.

2) As variáveis locais, que dizem respeito a uma sessão ou fase da engenharia.

Após as escolhas globais, partimos para um plano de ações em que intervêm as escolhas locais. O plano é composto por uma sequência de ações, que foi organizada tendo como ponto de partida questões de controle, as quais ajudam a prever os comportamentos dos alunos, mostrando de que forma a análise efetuada permite controlar as relações entre o sentido das suas realizações e as situações didáticas propostas.

Experimentação

Esta fase de experimentação, inicialmente, é constituída pelo período de aplicação e experimentação das atividades anteriormente planejadas, colhendo dados sobre a investigação. Em um segundo momento, refere-se à análise dos resultados que serão obtidos na investigação. Essa fase baseia-se na análise do conjunto dos dados obtidos na experimentação durante as sessões de ensino, assim como nas produções dentro ou fora de sala.

Análise a *posteriori* e validação

Nesta última fase, análise *a posteriori* e validação, consideram-se todas as informações obtidas na investigação por meio dos questionários, dos testes, das anotações do diário de campo, das filmagens, das produções dos estudantes ou outros instrumentos que forem pertinentes.

Na Engenharia Didática, a validação é essencialmente interna, fundamentada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, o que, de acordo com Artigue (1996), caracteriza como uma das originalidades da teoria considerada.

No próximo capítulo serão feitas as análises preliminares segundo o aporte teórico da Engenharia Didática.

CAPÍTULO 2: ANÁLISES PRELIMINARES

Neste Capítulo deseja-se apresentar estudos que estão diretamente relacionados ao ensino e à aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Uma vez definido o título da pesquisa, "Compreensão do conceito de limite por alunos de curso de Ciências Exatas", fundamentados nos processos de representações do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), fomos em busca de pesquisas relacionadas com o tema que pudessem nos subsidiar na elaboração de uma Sequência de Atividades, na análise da produção dos alunos e que nos permitisse analisar a compreensão do limite de funções por alunos de cursos de Ciências Exatas.

Atendendo aos pressupostos da Engenharia Didática, as fontes de pesquisas foram sites ligados à educação matemática e as bibliotecas digitais de algumas universidades brasileiras. Buscamos diversas fontes de pesquisa na internet (por exemplo, CAPES e *Google* Acadêmico), como: teses de doutorado, dissertações de mestrado, artigos, capítulos de livros, artigos de revistas e anais de congressos.

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem sido um dos focos de constantes investigações em Educação Matemática, assim como em física, matemática, cálculo e engenharia, tanto no Brasil quanto no exterior. Aqui, apresentaremos o conceito de limite de acordo com o Pensamento Matemático Avançado (PMA), os argumentos e resultados de teses, dissertações, artigos, que nos forneceram um norte para delimitar o tema da nossa pesquisa. As investigações de Tall e Vinner (1981), de Cornu (2002), que são textos clássicos abordados em pesquisas relacionadas ao ensino de limite, a dissertação de Rocha (2010), o artigo de Abreu e Reis (2010), a dissertação de Fallas (2016), a tese de Rocha (2016), o artigo de Messias e Brandemberg (2015), o artigo de Soares e Cury (2017) e o artigo de Fonseca e Henriques (2018), cujos objetivos foram superar dificuldades no ensino de Cálculo, serviram-nos de apoio para o desenvolvimento da nossa pesquisa e nos trouxeram questionamentos, reflexões, bem como sugestões de atividades. Faremos, a seguir, uma breve descrição de tais pesquisas.

2.1. Pesquisas de Tall e Vinner sobre Limites

O conceito de limite de função, de acordo com constructos teóricos desenvolvidos pelo Pensamento Matemático Avançado (PMA), vem sendo utilizado no estudo de várias noções matemáticas e, particularmente, no estudo de limites de função real de uma variável real, foco da nossa pesquisa. Algumas dessas noções são sutis e podem nem ser notadas conscientemente pelo indivíduo, o que pode vir a causar confusão ao lidar com a matemática formal.

Tall e Vinner (1981), ao discutirem sobre alguns tópicos do currículo de matemática nas escolas inglesas, afirmam que existem vários problemas de currículo nessas escolas, denominando-os de "problemas práticos", e se limitaram a explicitar três noções, a saber: limite de uma sequência $\lim_{x\to\infty} S_n$, limite de uma função $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e continuidade de uma função f: D → ℝ.

Devido ao interesse de nossa pesquisa, entre as noções explicitadas pelos autores relativas aos "problemas práticos", centraremos a atenção nas discussões referentes à noção de limite de uma função $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

O estudo realizado por Tall e Vinner (1981) inicia apresentando como é abordado o conteúdo de limite. O que nós poderíamos chamar de primeiro estágio: o limite é apresentado de maneira intuitiva, com uma explicação informal. Em algumas literaturas, como por exemplo, o livro do Thomas e Stewart, a abordagem inicial é feita por meio de tabelas e aproximações, explorando o cálculo aritmético. Em nossa pesquisa, abordamos como atividade inicial os limites por meio de tabelas e com a interpretação dos dados determinando os limites por estimativas.

Retomando aos estudos de Tall e Vinner (1981), em um segundo estágio, é apresentada outra definição. Segundo os autores, o processo de limite primeiramente é introduzido a partir da diferenciação com a notação $\lim_{\delta\to 0} \frac{f(x+\delta_x)-f(x)}{\delta_x}$ ou em qualquer outra notação. Os autores inferem que, quando são deduzidas as técnicas de derivação, não se usa mais o limite. Mas quando o limite é abordado, leva os alunos a formarem uma imagem conceitual restrita, considerando o aspecto dinâmico "$f(x) \to$ c quando $x \to a$" ou "$f(x)$ se aproxima de c quando x se aproxima de a." Esse tipo de raciocínio pode levar os alunos a considerarem $f(x) \neq c$ como outra porção da sua imagem conceitual. Nessas circunstâncias, um conflito potencial pode ser gerado ao implementarmos os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de limite de uma função.

Tall e Vinner (1981) apresentam uma ilustração de como uma definição de conceito formal pode ser dada de forma imprecisa a partir do seguinte exemplo: sendo $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ em que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não está definida para $x = 1$. A implicação é de que não se considera o caso $x = 1$, então se deduz que, para cada número positivo h, há um número k, tal que $|x - 1| < k \Longrightarrow |f(x) - 2| < h$, a partir disso, é apresentada a definição formal:

Se para cada número positivo h existe um número $k > 0$, tal que $|x - 1| < k \Longrightarrow |f(x) - 2| < h$ ou de outra maneira quando $x \to a$, $f(x) \to c \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = c$.

Diante de tal situação, Tall e Vinner (1981) afirmam que, para a definição formal de limite de uma função, deve ser especificado que $x \neq a$, que é uma restrição feita ao elemento do domínio da função, de modo que se possa ler: dado $h > 0$ existe $k > 0$ tal que se $|x - 1| < k \Longrightarrow |f(x) - 2| < h$. Para os referidos autores, isso pode ser parte da imagem conceitual.

Tall e Vinner (1981) também relatam que a abordagem intuitiva é muitas vezes tão forte que o sentimento dos alunos é de que o limite seja sempre dado na forma dinâmica: quando x se aproxima de a, então $f(x)$ se aproxima de c com uma forte sensação de movimento bem definido.

Os referidos autores aplicaram um questionário composto por duas questões a alunos do 1º ano do ensino superior. Na primeira questão, foi solicitado aos alunos que explicassem o que significava $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$. A segunda questão era para que eles escrevessem a definição de $\lim_{x \to a} f(x) = c$, se conhecessem alguma.

Os referidos autores afirmaram que os alunos responderam à segunda questão de duas maneiras: utilizando o conceito de definição dinâmica e definição formal. Para a definição formal, dos 18 alunos que tentaram, apenas 4 deram resposta correta. Para a abordagem dinâmica, dos 31 que a abordaram, tiveram apenas 4 respostas incorretas. Dos 14 alunos que usaram a definição formal incorreta, 7 misturaram a definição com outras noções de limites, tais como: "se $x \to a$, $c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon$ para todo o $n > n_0$ " ou "$|f(n) - f(n+1)| < \varepsilon$ para todo n maior que n_0". Os outros 7 deram respostas incompletas ou imprecisas como, por exemplo, "$|f(x) - c| < \varepsilon$" para todos os valores positivos de ε com x suficientemente próximo de a. Dos 27 alunos que usaram a definição de forma dinâmica correta, incluíram essencialmente resposta como "o valor de que $f(x)$ se aproxima enquanto os valores de x tendem para a, o valor de $f(x)$ tende para c."

Tall e Vinner (1981) avaliaram, a partir da questão proposta, $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$, que foi possível perceber que os alunos mostraram empenho, respondendo à questão, mesmo quando não conseguiam obter qualquer resposta à segunda parte que se referia à definição formal. Assim, dos que não conseguiram apresentar um conceito definição, 12 usaram da ideia dinâmica, tendo apenas 1 dado uma resposta incorreta, e 9 usaram outro tipo de justificativa, sendo que 3 destes responderam de forma incorreta. Os que usaram da ideia dinâmica disseram essencialmente que $\frac{x^3-1}{x-1}$ se aproxima de 3 enquanto x se aproxima de 1; outros optaram pela divisão, calculando em seguida o limite da expressão resultante.

Também tiveram os alunos que usaram ideias relacionadas com a continuidade ou recorreram à regra de L`Hospital para obter o valor do limite pedido. Os autores observaram que, dos 4 alunos que tinham, na situação anterior, recorrido à definição formal, 3 deles continuaram a usá-la, e um utilizou um método dinâmico. Para os 14 que usaram a definição formal de maneira incorreta, 10 recorreram a um método dinâmico, sendo que destes apenas dois responderam incorretamente, e 4 usaram a definição de forma incorreta. Dos 70 alunos que responderam às questões, 54 usaram um método dinâmico com diferentes níveis de precisão. Para Tall e Vinner (1981), com base nos que usaram esse método a partir de palavras como "aproximar", "estar perto de", "tender para", pode-se considerar a hipótese de que $f(x) \neq c$ seja um fator de conflito potencial.

Passados dois anos, os autores deram continuidade ao questionário, e 22 alunos foram abordados de forma espontânea na aula para dizerem se o teorema seguinte era verdadeiro ou falso: supondo que $x \rightarrow a$ então $f(x) \rightarrow b$ e que se $y \rightarrow b$ então $g(y) \rightarrow c$ então, temos que se $x \rightarrow a$ então $g(f(x)) \rightarrow c$.

A maioria dos alunos consultados considerou que o teorema era verdadeiro, e um o considerou como falso. Mesmo depois de questionados sobre a veracidade das respostas, os alunos continuaram a admitir que o teorema era verdadeiro.

De acordo com Tall e Vinner (1981), tal certeza deve-se ao fato do conceito imagem de $y = f(x)$ se aproximar de b e $g(f(x)) = g(y)$ se aproximar de c ser bastante poderoso. Concluindo, os referidos autores afirmaram que o teorema de fato é falso. Ele será verdadeiro se $f(x) \neq b$ para x próximo de a. Mas, na definição formal que os alunos utilizaram ao longo dos dois anos, foi sempre considerado que $\lim_{x \to a} f(x) = c$ significava que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$. Tall e Vinner (1981) destacaram que os alunos evocaram o conceito de imagem de limite e não o conceito de definição formal que manipularam ao longo dos dois anos.

Corroboramos a inferência dos autores de que a aprendizagem de um conceito, como o de limite de função, não é uma tarefa fácil, pois os alunos, mesmo antes desse conceito ter sido ensinado, têm ideias, intuições e imagens que trazem em sua "bagagem" adquirida ao longo da vida cotidiana, as quais não condizem com a definição de limite aceita pela comunidade matemática.

2.2. Pesquisas de Cornu sobre limites (2002)

Podemos constatar que as conclusões de Tall e Vinner (1981), sintetizadas anteriormente, estão em consonância com Cornu (2002) no que se refere à afirmação de que as concepções anteriores ao ensino formal podem designar-se por concepções espontâneas, que não desaparecem mesmo pelo fato de, num dado momento, ter sido ensinado um novo conhecimento. De acordo com

Cornu (2002), essas ideias espontâneas, misturadas com o novo conhecimento adquirido, modificam-se e adaptam-se para formar as concepções pessoais dos alunos. Portanto, nessas circunstâncias, durante a resolução de um problema pode não ser evocada teoria científica alguma, mas um raciocínio natural e espontâneo.

Ainda segundo Cornu (2002), no caso do conceito de limite, é possível observar que as palavras “tende para” e “limite” têm um significado para os alunos antes de o conceito em si começar a ser ensinado- o que os faz continuar confiando nesses significados, mesmo após terem contato com a definição formal. Isso reforça o que Tall e Vinner (1981) afirmaram anteriormente sobre o poder que o conceito dinâmico a respeito de limite tem sobre o aluno.

Cornu (2002) verificou que a palavra “limite” apresentava significados diferentes para alunos em momentos diferentes. Na maior parte das vezes, o limite era considerado como um ponto do qual nos aproximamos sem o atingir, um ponto do qual nos aproximamos e que atingimos, um limite superior ou inferior, um máximo ou mínimo, um intervalo, aquele que vem “imediatamente depois”, que pode ser alcançado, um constrangimento, uma proibição, uma regra, o fim ou a chegada.

Para Cornu (2002), foi verificado que o significado das palavras variava de um para outro aluno e que podia ter vários significados para um mesmo aluno, dependendo das situações. A partir do cenário descrito, as ideias espontâneas podem permanecer na mente dos alunos até estados bastante avançados da aprendizagem. Devido à grande variedade de noções espontâneas e a uma conscientização crescente do formalismo que o indivíduo pode facilmente criar na sua mente, os alunos tendem a apresentar ideias contraditórias que os levem a uma Imagem Conceitual que contenha fatores de conflito potenciais, conforme foi referido por Tall e Vinner (1981).

Cornu (2002) considera que o ensino inicial tende a enfatizar o processo de aproximação do limite em vez do conceito em si mesmo. O conceito imagem de limite associado com esse processo contém fatores que entram em conflito com a definição formal (“aproxima-se, mas não pode atingir”, “não pode passar”, “tende para”), pois a definição formal vai corrigir a subjetividade que existe na noção intuitiva de limite (dinâmico). Consequentemente, os alunos desenvolvem Imagens Conceituais de limite e de infinito que dizem respeito às concepções próprias relacionadas ao processo de “estar próximo”, “crescer muito” ou “continuar sempre.”

No capítulo 10 - Limits, do livro *Advanced Matematical Thinking* (TALL, 2002), Cornu discorre de forma sintética sobre sua tese e acerca de outras pesquisas relacionadas ao conceito de limites. Cornu (2002) afirma que o conceito de limite é uma noção particularmente difícil típica do Pensamento Matemático Avançado. Esse conceito ocupa uma posição central que permeia toda a análise matemática – com base na teoria da aproximação, da continuidade e do cálculo diferencial e integral.

Uma das maiores dificuldades do ensino e aprendizagem do conceito de limites perpassa não apenas pela sua riqueza e complexidade, mas também pelos aspectos cognitivos não gerados puramente a partir da definição matemática. Ressaltamos que é didaticamente importante a distinção entre a definição e o conceito. Uma coisa é lembrar a definição, e a outra é adquirir a concepção fundamental. Uma das facetas é a ideia de aproximação, geralmente encontrada por meio de uma noção dinâmica de limites, de maneira de como é colocado o limite para ajudar a resolver problemas reais que não dependam da definição, mas de diversas propriedades do conceito intuitivo.

Partindo desse ponto de vista, muitos alunos acreditam que eles "entendem" a definição de um limite sem realmente adquirir todas as implicações do conceito formal. Os alunos frequentemente conseguem resolver exercícios que lhes são propostos sem entender o formalismo da definição. Diante do exposto, os quantificadores "para todo", "existe", que ocorrem em definições de ε-δ, têm seus significados na linguagem do dia a dia diferentes dos sentidos (daquelas encontradas na definição de limites). Assim, surgem obstáculos que são problemas recorrentes, não só na definição de limite como também na Lógica e que podem causar dificuldades.

O autor aponta que, no ensino de matemática, alguns aspectos do conceito de limite são dados com maior ênfase e que são revelados por uma revisão do currículo, dos livros didáticos, dos exercícios e dos exames. Porém, na primeira metade do século XX, os textos matemáticos franceses utilizavam a noção de limites de forma intuitiva sem uma definição formal para introduzir a definição de derivadas. Posteriormente, no mesmo texto, em uma nota de rodapé, era dada uma explicação. Mas, somente em 1966, a noção de limite foi devidamente introduzida. Os livros geralmente destinavam um capítulo ao conceito geral de limites, incluindo uma definição formal, uma declaração de sua singularidade e teoremas sobre operações aritméticas aplicadas a limite.

O referido autor também relata que os exercícios não se concentraram no conceito de limites, mas nas inequações modulares, na noção de valor absoluto, na ideia de uma condição suficiente e, acima de tudo, sobre as operações de limite de uma soma, de um produto, e assim sucessivamente. São exercícios que estão mais relacionados com a álgebra do que com a análise. Para Cornu (2002), esses exercícios assumem uma importância tão significativa que ele indica a existência de um livro com trinta e um teoremas diferentes em operações com limites.

Cornu (2002) aponta que diferentes investigações deixaram bem claro que a maioria dos alunos não domina a ideia de limites, mesmo em estágios de estudo mais avançados de aprendizagem. O que não os impede de resolver exercícios, resolver problemas e serem bem-sucedidos em suas avaliações.

Cornu (2002), na sequência, apresenta alguns aspectos didáticos de limites, a saber: conceitos que estão ligados à noção de limites, os obstáculos que surgem e impedem a aprendizagem dos alunos e a discussão de estratégias para o ensino do conceito de limite.

É apontado que a maioria dos conceitos matemáticos, para o ensino, não começa em território virgem. No caso de limites, o aluno, antes de qualquer ensino sobre o assunto, já traz consigo certo número de ideias, intuições, imagens e de conhecimentos adquiridos no seu dia a dia, como o sentido coloquial do significado dos termos que estão sendo utilizados, como por exemplo, "tende a" e "limite". Corno (2002) descreve as concepções de uma ideia que ocorre antes do ensino formal como concepções espontâneas, as quais não desaparecem quando um aluno participa de uma aula de matemática. Mas, sim, misturam-se com o conhecimento recém-adquirido, de modo que são modificadas e se adaptam para formar as concepções pessoais dos alunos.

Como afirma Cornu (2002), esse fenômeno, na década de trinta, já era bem conhecido no desenvolvimento de conceitos teóricos e empíricos por Bachelard, mas apenas na última década é que foi percebido que as mesmas forças operam na lógica matemática.

Investigações revelaram diferentes atribuições e significados à expressão "tendendo em direção", eis algumas delas: Se aproximar (eventualmente ficar longe dele); se aproximar ...... sem alcançá-lo; se aproximar ...... apenas alcançando; assemelhar-se (sem qualquer variação, como ocorre em "este azul tende a violeta").

No caso da palavra limite, por si só, ela pode ter diferentes significados em momentos diferentes para cada indivíduo. Na maioria das vezes, é considerada como "intransponível", mas também pode ser: um limite instransponível que é alcançável; um limite intransponível impossível de alcançar; um ponto que se aproxima, sem alcançá-lo; um ponto que se aproxima e alcança; um limite maior (menor); um máximo ou mínimo; um intervalo; o que vem "imediatamente após" o que pode ser alcançado; uma restrição, uma proibição, uma regra; o fim, o acabamento (CORNU, 2002).

Portanto, de um aluno para outro, o sentido atribuído à palavra varia, sendo que vários sentidos podem ser criados de acordo com cada contexto e situação. Investigações mostram que as ideias espontâneas podem permanecer com os alunos, mesmo em estágio mais avançado de aprendizagem, e podem durar um longo tempo.

Em relação aos obstáculos, Cornu (2002) destaca que os obstáculos cognitivos ajudam a identificar dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem e, também, servem para determinar estratégias de ensino. Segundo o autor supracitado, é possível distinguir vários obstáculos: genéticos e psicológicos. Os obstáculos que ocorrem com o desenvolvimento do aluno. Os obstáculos didáticos que ocorrem devido à natureza do ensino e do professor. E, por último, os obstáculos epistemológicos que ocorrem devido à natureza do conceito matemático em si.

Ao tratar dos obstáculos epistemológicos do desenvolvimento histórico, Cornu (2002) relata que é útil a história do conceito para localizar período de lento desenvolvimento, bem como as dificuldades surgidas que podem indicar a presença de obstáculos epistemológicos.

Em se tratando da história do conceito de limites, essa noção foi introduzida para resolver três tipos principais de dificuldade:

- problemas geométricos (cálculos de área, considerando a natureza geométrica dos comprimentos, "exaustão");

- o problema da soma e taxa de convergência de uma série;

-os problemas de diferenciação (que vêm da relação entre duas quantidades que, simultaneamente, tendem a zero).

Cornu (2002) discute quatro principais obstáculos na história do conceito de limite, são eles:

1) O fracasso em associar geometria com números: uma das grandes dificuldades da história da noção de limite foi libertar-se do contexto geométrico e cinemático para se trabalhar não com grandezas, mas com números.
2) A noção do infinitamente pequeno e infinitamente grande: a noção da existência de quantidades infinitamente pequenas foi, e ainda é, um obstáculo relativo à de limite. Durante o século XVIII se debateu muito sobre essa noção.
3) O aspecto metafísico da noção de limite: o infinito e a noção de limite aparecem como sendo mais relevantes na metafísica ou filosofia do que na matemática.
4) O limite é atingido ou não? Cornu (2002) destaca que, até a época de Cauchy, entende-se que o limite não poderia ser atingido e, desse modo, uma sequência constante, por exemplo, escapa ao conceito de limite.

Cornu (2002) levanta, também, discussão sobre os obstáculos epistemológicos da matemática moderna. Para isso, é necessário e importante olhar para a história e perceber as dificuldades que deram origem às ideias modernas. A introdução da análise de Weierstrass, dependendo somente da definição lógica de conceitos numéricos, falhou ao eliminar os conceitos infinitesimais, que eram uma parte essencial da cultura matemática.

Ainda que seja possível formular definições de limites e continuidade nos termos ε-δ, há ocasiões de usar a linguagem dinâmica de “variáveis tendendo a zero” de maneira análoga à de Cauchy, resultando em imagens mentais ligadas ao “arbitrariamente pequeno”.

Para Cornu (2002), apesar das tentativas de banir os infinitesimais da análise moderna, continuam vivos nas mentes e na comunicação dos profissionais da matemática, mesmo que fossem eliminados das provas formais. Entretanto, Robson (1996, *apud* CORNU, 2002), com seus trabalhos formulados na base da lógica, reabre os debates sobre os infinitesimais.

O conceito de limite de sequências é, extremamente, de difícil compreensão pela forma que ele é apresentado em termos de um processo “não encapsulado”: “dê-me um $\varepsilon > 0$ e encontrarei um N assim...”, ao invés de um conceito, na forma “existe uma função $f(\varepsilon)$ tal que ...”. Isso significa que a prova do primeiro teorema sobre a álgebra de limites (que as soma, produto, etc., do limite de duas sequências é a soma, produto, etc. dos limites) é enquadrado em temos de processo, como a coordenação de dois processos, e não como a combinação de dois conceitos.

Em relação à transmissão didática de obstáculos epistemológicos, Cornu (2002) afirma que, dadas as complexidades da matemática moderna e as diferentes colorações culturais de sentidos, não é surpresa que tais interações complexas afetem os alunos em sua aprendizagem. Embora alguns sentidos sejam evitados em textos escritos, eles podem ser transmitidos de geração em geração, quando o professor tenta “simplificar” algo complexo com o intuito de ajudar os alunos.

Quanto às estratégias pedagógicas para o ensino de limites, devido à diversidade de concepções, riqueza e complexidade das noções, os conceitos e os obstáculos cognitivos tornam o ensino do conceito de limites extremamente difícil, conforme aponta Cornu (2002). E, apesar de numerosas tentativas terem sido feitas, o problema permanece insolúvel. Diante do que foi posto, Cornu (2002) considera que é possível focar em alguns pontos fundamentais e emitir questões essenciais.

Em primeiro lugar, para muitos professores, há a consideração de que é suficiente apresentar uma clara exposição do conceito de limite para capacitar o aluno a compreendê-lo. No entanto, é muito importante que os estudantes sejam conscientizados da complexidade dessa noção e reflitam acerca das ideias, bem como dos obstáculos epistemológicos que sobre ela recaem.

Pesquisas têm mostrado, claramente, que as próprias concepções dos alunos são muito variadas, que cometem erros fundamentais e que eles não superam, necessariamente, os obstáculos epistemológicos relacionados a essa discussão. Para Cornu (2002), é necessariamente importante que os alunos sejam conscientizados das dificuldades dos problemas envolvidos e igualmente importante para se tornarem cientes das dificuldades essenciais que envolvem a definição desse conceito.

O referido autor relata experimentos que foram realizados antes de iniciar uma sessão sobre a noção de limites. Os alunos receberam atividades apropriadas para ajudá-los a refletir sobre ideias espontâneas, imagens, intuições, experiências que eles possuíam e o que eles deveriam resgatar durante o processo de aprendizagem. Foram particularmente conscientizados sobre os diferentes significados das palavras que usariam. Isso provou ser uma técnica valiosa que permitiu aos alunos construírem seu próprio conhecimento e compreensão (ROBERT, 1982a, *apud* CORNU, 2002).

Outro problema apontado por Cornu (2002) é o contexto em que a aprendizagem ocorre. Segundo ele, um efetivo aprendizado precisa ocorrer em um contexto de solução de problemas. Desse modo, a noção de limite tem que ser usada para resolver problemas específicos, sendo importante apresentar situações em que o aluno possa ver que o limite é uma ferramenta útil. Outra estratégia são as tecnologias para o estudo de limites. Nesse contexto, pode ser importante o uso de um *software* projetado dentro de uma estratégia de ensino com base no cuidado do conceito a ser adquirido.

Cornu (2002) enfatiza que é importante considerar a ordem na qual os conceitos de limites são apresentados. Ainda destaca que não é puramente uma forma matemática lógica, mas é preciso considerar a apropriação cognitiva da sequência do currículo e dos problemas a serem resolvidos. Atualmente é estabelecido que uma transição ao Pensamento Matemático Avançado com uma sequência puramente lógica parece insuficiente. E conclui dizendo que concepções espontâneas, imagens conceituais, abstração reflexiva e decomposição genética são ferramentas conceituais que podem auxiliar no desenvolvimento de estratégias pedagógicas.

2.3. Dissertação de Rocha (2010)

A seguir, discorreremos sobre a dissertação de Rocha (2010) cuja pesquisa abordou sobre tecnologia e atividades articuladas entre a visualização e a experimentação.

Por sua vez, a dissertação de Rocha (2010) teve como objeto de estudo "Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e experimentação", com as seguintes tarefas:

> 1. Observar o comportamento e o desempenho dos alunos ao longo de uma sequência de atividades que envolvem o uso do *software* GeoGebra, na sondagem dos conceitos de limites, derivadas e integrais da disciplina Cálculo Diferencial e Integral da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).
> 2. Analisar os registros produzidos pelos alunos ao longo da sequência de atividades, buscando possíveis implicações da visualização e experimentação proporcionadas pelo *software* na compreensão dos conceitos em estudo.
> 3. Avaliar e discutir como esse processo de inserção de um ambiente informatizado pode ser implantado em uma turma de Cálculo. (ROCHA, 2010, p.58)

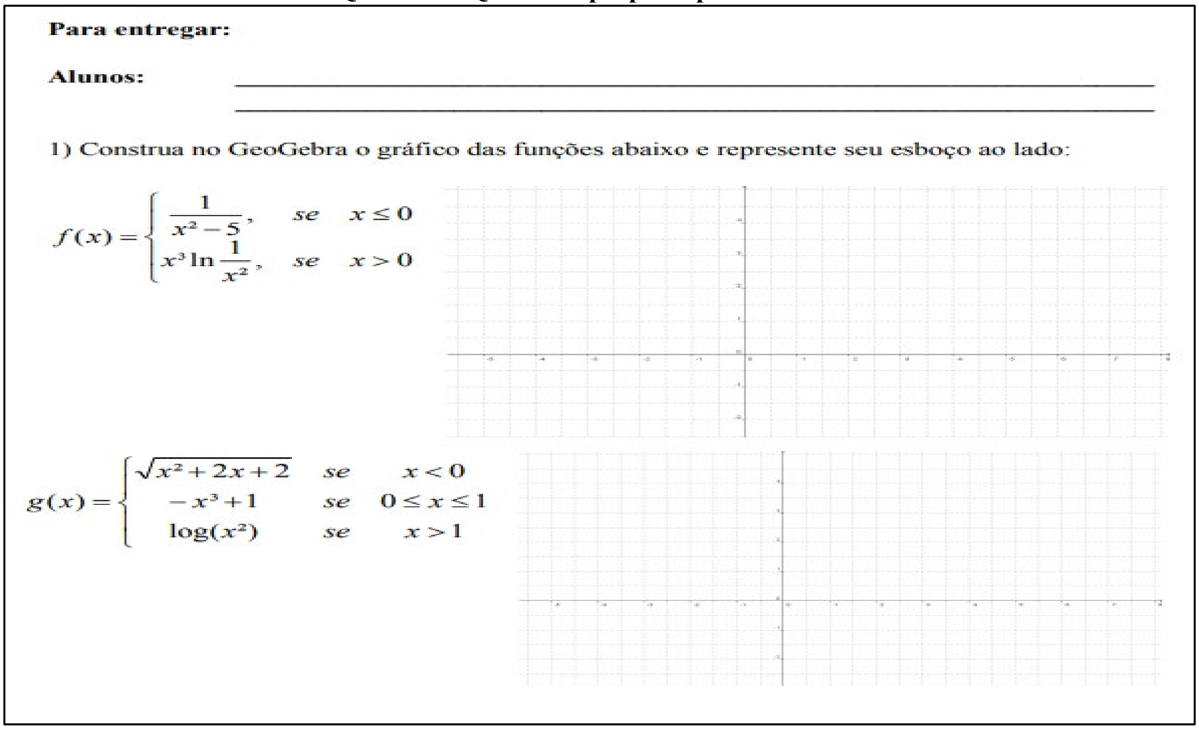
A pesquisa foi realizada com um grupo de alunos de uma turma de dependência de Cálculo I, no segundo semestre de 2009, dos cursos de Licenciatura em Química, Engenharia de Minas e Engenharia Geológica. As Sequências de Atividades foram desenvolvidas em duplas, no laboratório da UFOP, foram elaboradas e fundamentadas na teoria "noção de seres-humanos-com-mídia". O referencial teórico, segundo Rocha (2010), aborda o papel da visualização e das múltiplas representações na compreensão dos conceitos, assim como as possibilidades de utilizar ambientes informatizados nas aulas. Para essa investigação, foi proposta a seguinte questão de pesquisa:

> Que contribuições uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação proporcionada pelo ambiente informatizado pode trazer para a compreensão do conceito de limite, derivada e integral em uma disciplina de cálculo? (ROCHA, 2010, p. 19)

Rocha (2010) comenta que, entre outras contribuições, as atividades buscavam desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos. Foram elaboradas 8 (oito) atividades, entre elas, citaremos como exemplo a segunda e quarta questão. Iremos trabalhar com o *software* GeoGebra e é possível que os alunos da nossa pesquisa possam cometer equívocos ao digitar a sintaxe de uma função, ou não analisar de forma crítica a representação gráfica de uma função e tomar como verdade absoluta o que for apresentado na Janela de Visualização. Pois os *softwares* ainda apresentam uma certa limitação e não apresentam de forma clara os pontos em que uma função não está definida, ou seja, apresentam traços contínuos para todas as funções. Dito isso, vamos ver as questões propostas por Rocha (2010) e seus comentários.

Foi solicitado aos alunos que construíssem os gráficos das funções no GeoGebra e, em seguida, transcritos em uma folha que seria recolhida após o término da atividade. Para isso, foi entregue uma folha com as instruções, conforme Quadro 3.

Quadro 3 - Questão 3 proposta por Rocha 2010



Para entregar:

Alunos: ______________________________

1) Construa no GeoGebra o gráfico das funções abaixo e represente seu esboço ao lado:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-5}, & se \quad x\leq 0\\ x^3\ln\dfrac{1}{x^2}, & se \quad x>0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+2} & se \quad x<0\\ -x^3+1 & se \quad 0\leq x\leq 1\\ \log(x^2) & se \quad x>1\end{cases}$$

Fonte: Dados da pesquisa de Rocha 2010

O autor relata que existe uma diferença entre os gráficos entregues pelos alunos e o gráfico gerado pelo GeoGebra, o que poderia ser explicado pelo erro na digitação dos comandos.

De acordo com Rocha (2010), essas atividades acabaram não oportunizando uma maior discussão sobre as questões, como as transformações ocorridas nos gráficos (deslocamentos, translações, simetrias, etc.). Mas permitiram verificar que alguns alunos não racionam sobre a expressão analítica, quando utilizam o computador. A resposta apresentada na tela parece para eles uma verdade absoluta. Ainda discorre que, no primeiro gráfico que eles deveriam esboçar, a maioria (em torno de 30 alunos) inicialmente havia digitado o comando incorretamente e não analisou a questão do domínio da primeira parte da função $f\,(x)=\frac{1}{x^2}-5, se\ x\leq 0.$

Entendemos que o autor, ao analisar a questão, quis dizer que- ao digitarem as funções no campo de entrada do GeoGebra- houve um erro de escrita da lei de formação da função ou da expressão analítica, como ele se refere. E que faltou aos alunos o cuidado de conferir a lei de formação apresentada na Janela de Álgebra com a questão proposta na atividade.

A quarta questão é apresentada, abaixo, no Quadro 4.

Quadro 4 - Questão proposta da quarta atividade parte 1 proposta por Rocha 2010

1ª Parte: *Plote* o gráfico da função $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ (Lembre-se que no GeoGebra sen=*sin*). Dê um *zoom* nas proximidades do ponto de abscissa zero. Há algo errado com este gráfico? Comente.

Fonte: Dados da pesquisa de Rocha 2010

Nessa parte da atividade, Rocha (2010, p.110) tinha a expectativa de que: "os alunos percebessem que o software não mostra a descontinuidade, já que a função não está definida para x = 0." Entendemos que o *software* não mostra graficamente o ponto onde a função não está definida, pois a referida função é contínua. Uma vez que ela (a função) não definida para $x = 0$, não podemos falar em continuidade ou descontinuidade.

Agora, apresentamos a análise de Rocha (2010) sobre a atividade desenvolvida pela aluna Sheila. Segundo o autor, ela não respondeu à questão, mas comentou o comportamento da função. Para ele, talvez Sheila não tenha entendido o objetivo do procedimento "... *dar um zoom nas proximidades do ponto de abscissa zero*". Então, respondeu à questão como se tivesse olhado "*para longe*" do zero, que "*à medida que x aumenta em módulo, f (x) se aproxima de zero*".

Rocha (2010) infere que as respostas dos alunos apresentam indícios de uma mobilização de saberes e maior apropriação da ferramenta informática no processo de visualização e trabalho mais efetivo com as múltiplas representações. Também ressalta que a ideia de limite de uma função por aproximação e sua interpretação geométrica parecem ter sido compreendidas pelos alunos, principalmente, a partir da discussão sobre as respostas dadas na quarta atividade.

Com relação ao GeoGebra, ele relata que o ambiente de aprendizado criado permite que os alunos se tornem mais autônomos e investigativos, inserindo-se num coletivo em que a informática se torna uma mídia potencializadora e, assim, contribui para a compreensão dos conceitos do Cálculo.

Entendemos que as tecnologias podem contribuir para professores e alunos no complexo processo de ensino-aprendizagem. Na realidade, a inserção das tecnologias nas escolas tem como finalidade trazer para as salas de aulas diversificadas formas de aprender e ensinar.

Porém, para que isso ocorra de forma harmoniosa e eficiente, é necessário domínio de conteúdo, entender e transitar entre diferentes representações proporcionadas pelos *software*s em relação aos objetos explicando-as, assim como reconhecer propriedades dos objetos em estudo. Mediante o que foi citado, entendemos que, assim, as tecnologias- no caso o *software* do GeoGebra- podem se tornar uma mídia potencializadora e contribuir para a compreensão dos conceitos ensinados.

A pesquisa desenvolvida por Rocha enfoca a elaboração de suas atividades relacionadas ao conceito de limite derivadas e integral utilizando o *software* GeoGebra. Como iremos desenvolver nossa pesquisa com enfoque no conteúdo de limite com a utilização de *applets* do GeoGebra, essas atividades poderão nos servir como base para que possamos, inspirados nelas, elaborar as nossas atividades, como também os processos de construção e abordagens delas utilizando o GeoGebra.

2.4. Artigo de Abreu e Reis (2011)

Neste tópico discorremos sobre o artigo de Abreu e Reis (2011) intitulado "A discussão sobre o papel das definições formais no ensino de limites e continuidade em Cálculo I no processo de ensino e aprendizagem".

Abreu e Reis (2011), no referido trabalho, fazem uma explanação sobre o número de reprovações na disciplina de Cálculo e comentam que isso tem despertado o interesse de diversos pesquisadores. Os autores Frescki e Pigatto (2009 *apud* ABREU e REIS, 2011) citam diversos autores que se concentraram nas dificuldades envolvendo ensino e aprendizagem do Cálculo. Eles apontam problemas que acumulam desde o conteúdo do ensino básico até culminarem no Ensino Superior: *"Estes problemas [...] resultam da forma como os conteúdos de Matemática são estudados nos ensinos fundamental e médio, com muitos "macetes" e fórmulas decoradas, sem compreensão dos conceitos básicos."* (FRESCKI; PIGATTO, 2009, p. 911, grifo dos autores, *apud* ABREU e REIS, 2011).

Com relação ao ensino e aprendizagem do Cálculo, Abreu e Reis (2011) comentam sobre as dificuldades, o alto índice de desistência e que, de acordo com Cury (2009),

> As dificuldades encontradas por professores e alunos de Cálculo Diferencial e Integral estão entre as principais causas apontadas para a excessiva desistência e evasão encontradas em cursos superiores da área de Ciências Exatas. Pesquisas sobre o ensino de Cálculo vêm sendo apresentadas em comunicações, dissertações e teses ao longo das últimas décadas, mas seriam necessários mais estudos sobre o tema para que pudéssemos vislumbrar mudanças nos cursos. (CURY, 2009, p. 223, *apud* ABREU e REIS,2011)

Para dar suporte ao trabalho por eles desenvolvido, Abreu e Reis (2011) usam as ideias de Tall e Vinner (1981) sobre Imagem Conceitual e Definição Conceitual. Para os autores, em função de como foi processada a Imagem Conceitual, a Definição Conceitual pode diferir da definição apresentada formalmente. Nesse sentido, o aluno (re)constrói sua Definição Conceitual permeando-a com suas Imagens Conceituais previamente estabelecidas.

A pesquisa foi desenvolvida com 56 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática (36 alunos dos 2º e 3º períodos) e de Bacharelado em Estatística (20 alunos dos 2º e 3º períodos) da Universidade Federal de Ouro Preto.

De acordo com Abreu e Reis (2011), como as noções de rigor e intuição permearam a análise dos resultados para que pudessem estabelecer, se possível, uma relação entre os conceitos (Imagem e Definição) e os tratamentos (intuitivo e rigoroso) desprendidos pelos alunos, a proposta das atividades envolveu habilidades em que poderiam avaliar tais noções.

Nessas atividades, os autores partiram de aspectos que envolvem / evocam a intuição dos alunos para aspectos que descrevem / demonstram o rigor dos alunos na formalização do conceito de limite e continuidades. Abreu e Reis (2011) ressaltam que isso pode ser notado quando é explorado, no final de cada atividade, a capacidade dos alunos de não mais "descrever" os conceitos envolvidos, mas de "defini-los" formalmente.

Foram formuladas 4 questões para o desenvolvimento da pesquisa, entre as quais daremos enfoque, por estarem mais alinhadas com a nossa pesquisa, à questão 1 item a), à questão 2 itens a), b) e c) e à questão 4 item a).

Agora, apresentaremos as questões. Segue a atividade 1, questão 1, conforme Figura 2.

Figura 2 - Atividade 1 questão 1 item a)

A Atividade 1 (Limites) iniciou-se com a Questão 1: "Escrevendo com suas palavras..."

Explique com suas próprias palavras, sem utilizar números nem simbologia matemática, o que você entende por:

a) uma função tem limite quando a variável independente tende a um certo valor;

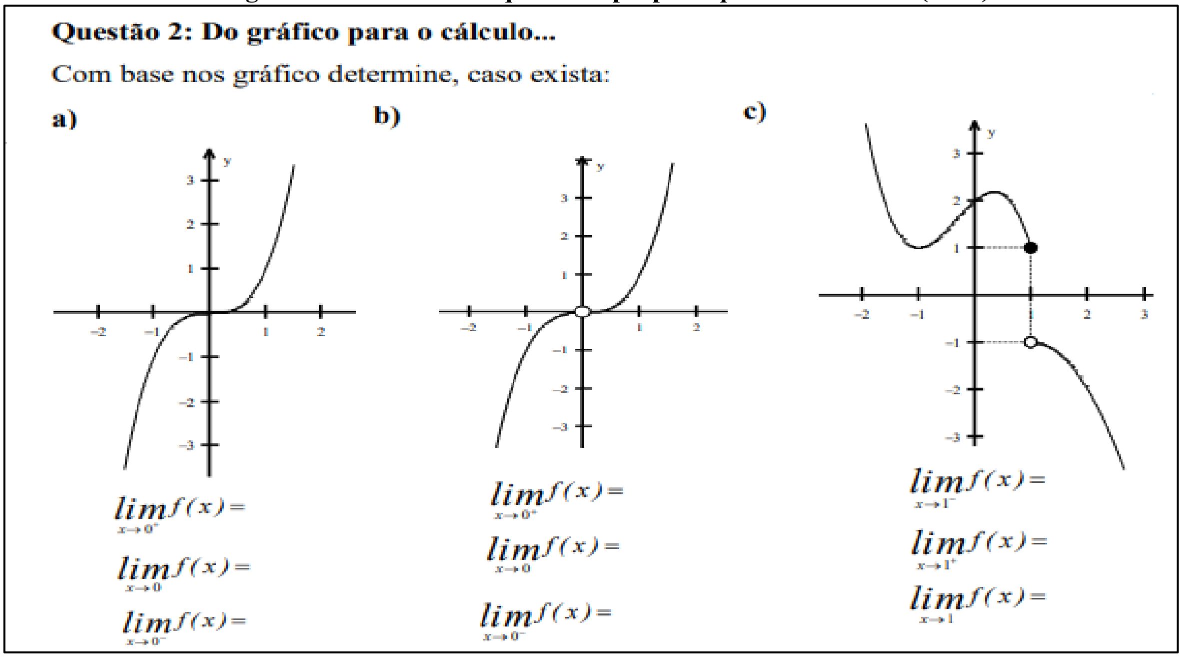
Fonte: Dados da pesquisa Abreu e Reis (2011)

A partir da análise a Atividade 1, Abreu e Reis (2011) inferiram que as principais Imagens Conceituais relacionadas à existência do limite em um ponto evocaram as aproximações laterais da função a um valor, enfatizando os limites laterais e, também, a aproximação da função a um valor, sem enfatizar os limites laterais. Os referidos autores relatam que essa dificuldade em interpretar fidedignamente uma Imagem Conceitual já havia sido ressaltada por Meyer (2003, *apud* ABREU e REIS, 2011).

Abreu e Reis (2011) concluíram essa primeira análise salientando que: como a atividade permitiu que o aluno descrevesse em palavras os conceitos acima mencionados, podem considerar (os autores), segundo Tall e Vinner (1981), que as definições conceituais remetem a imagens conceituais conflitantes, como no caso da imagem de que “ter limite é assumir um valor.”

Em seguida, apresenta-se a questão 2: “Do gráfico para o cálculo...”, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Descritiva da questão 2 proposta por Abreu e Reis (2011)



Fonte: Dados da pesquisa de Abreu e Reis (2011)

Nessa questão era solicitado que se verificasse a existência de limites de acordo com a representação, com o intuito de destacar elementos da intuição gráfica / algébrica dos alunos. O objetivo da questão era avaliar como o aluno interpretava geometricamente a existência do limite de uma função. Segundo os autores, foram construídos gráficos com limites em um ponto, com limites infinitos e com limites no infinito, e que alguns gráficos apresentavam, propositalmente, descontinuidade em pontos onde o limite existia. Abreu e Reis (2011) ressaltam que aspectos relacionados à continuidade seriam tratados na atividade 3.

No item a), analisando a existência dos limites laterais e de $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, os autores relatam que 44 alunos responderam corretamente. Enquanto para o item b), apenas 22 responderam corretamente $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Neste item a função é descontínua em $x = 0$. Para o item c), os autores apresentaram um gráfico com descontinuidade tipo salto. Ainda destacaram que no ponto de descontinuidade em $x = 1$, o $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ houve um acerto por parte de 37 alunos.

No mesmo ponto do domínio, o $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$ houve um acerto por parte de 19 alunos, um índice de acerto bem mais baixo do que o acerto do limite anterior.

Abreu e Reis (2011) dizem ter motivos para acreditar que essa disparidade nas respostas para dois limites semelhantes tenha ocorrido porque os alunos associaram a existência dos limites à imagem da função, resultado semelhante ao encontrado no item a).
E, por fim, a questão 4 item a) conforme Figura 4.

Figura 4 - Questão 4 proposta por Abreu e Reis

Questão 4: "Tentando escrever rigorosamente..."

De acordo com as definições precisas de limites, o que significam as afirmações:

a) para todo $\varepsilon > 0$ real dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in D(f)$ e $0 < |x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$;

Fonte: Dados da pesquisa de Abreu e Reis (2011)

Abreu e Reis (2011) relatam que, diferentemente das outras questões que tratavam basicamente de identificar/explorar as imagens conceituais dos alunos, essa questão busca identificar definições precisas de limites. Nesse item, os autores descrevem, de maneira rigorosa, com a notação $\varepsilon - \delta$.

Ao analisar as produções dos alunos, os autores inferem que houve uma enorme quantidade de respostas em branco. Para este item, não apareceu qualquer resultado com a notação de limites. Os autores relatam que os alunos se limitaram "a escrever ou reescrever a questão" e citam, como exemplo, o aluno A5: "para dado um número real existe outro número real que havendo um x do domínio de f e $0 < |x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$."

Na análise das atividades, os autores fizeram relação entre a intuição e o rigor em limites e aferiram que os alunos parecem interpretar limites a partir da intuição gráfica–geométrica (REIS, 2001), além disso têm dificuldades de transitar entre as representações gráficas e algébricas. Na Relação entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual em continuidade, ele entende que os alunos não associam a continuidade à existência dos limites laterais, apenas à função no ponto. Ao associar a continuidade de uma função no ponto apenas à existência de um valor da função neste ponto, os alunos recorrem a uma Imagem Conceitual bastante intuitiva, mas sem consultar sua definição formal.

Nas considerações, Abreu e Reis (2011) fazem algumas ressalvas, entre elas:

- Valorize a realização de atividades que abordem também a transição algébrico-gráfica como forma de valorizar as diversas vertentes intuitivas presentes na abordagem.

- Não exagere nas definições e demonstrações rigorosas, principalmente, se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob um aspecto totalmente procedimental.

Podemos observar, nas literaturas referentes ao estudo de limites, analisadas até o presente momento, que sempre é enfatizada a dificuldade dos alunos quando se trata da definição formal de limites. O artigo escrito por Abreu e Reis (2011) também tem seu enfoque nesse tipo de estudo. Esse artigo contribuirá para o desenvolvimento de nossa pesquisa, pois aponta as dificuldades dos alunos no referido conteúdo.

2.5 Dissertação de Fallas (2016)

Abordaremos a dissertação de mestrado de Fallas (2016) intitulada "A compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função: com alunos do 12º ano". A pesquisa teve como público-alvo alunos do 11º e 12º ano, num total de 28 alunos, e como objetivo analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função.

De acordo com Fallas (2016), a investigação desenvolvida é centrada em quatro aspectos que têm lugar durante o processo de aprendizagem que leva à compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função, a saber: os significados das representações, a visualização matemática e as dificuldades de aprendizagem.

Diante disso, elaborou como objetivo geral: analisar que compreensão evidenciam os alunos do 12º ano sobre os conceitos de limite e continuidade de uma função. Ainda, procurou responder às seguintes perguntas:

1- Quais os significados que os alunos desenvolvem destes conceitos?
2- Como os alunos utilizam as diferentes representações e a visualização destes conceitos para obter significados e resolver tarefas que os envolvem?
3- Quais os principais erros e dificuldades que os alunos manifestam na compreensão destes conceitos e na resolução de tarefas que os envolvem?

Fallas (2016) argumenta que, a partir da revisão de literatura sobres os conceitos de limites e continuidade de uma função, identifica-se duas perspectivas para abordá-los: a partir da definição informal ou concepção dinâmica, que se desenvolve de maneira intuitiva; ou a definição formal ou concepção métrica, que é o resultado de um processo dedutivo.

Na visão de Fallas (2016), a definição informal se refere aos usos de conceitos que são apresentados mediante explicações informais, como: o limite de uma forma dinâmica por um processo de aproximação. Nessa perspectiva, concepção dinâmica do limite pode ser caracterizada pela seguinte ideia: “se x se aproxima de a, suas imagens $f(x)$ se aproximam de L” e poderia ser expresso por $\lim_{x \to a} f(x) = L$ em que f é uma função, a um número real e L o limite da função.

Segundo Fallas (2016), a definição formal dos conceitos é o resultado de um processo dedutivo. Nessa direção, o limite é considerado como objeto e não como processo, e é definido a partir da concepção métrica representada simbolicamente da seguinte forma (FALLAS, 2016, p.8):

$$\lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Comungamos com Fallas (2016) quando ele diz que a natureza dos conceitos muda conforme os alunos vão avançando na sua aprendizagem. Por exemplo, o limite inicialmente pode ser um processo intuitivo de aproximação e, a seguir, concebe-se este como definição formal ε-δ.

De acordo com Fallas (2016), a ideia de considerar duas formas de compreensão, uma mais superficial ou desarticulada de outra mais profunda ou integrada, relaciona-se com a posição de Gray e Tall (1991, 1994, *apud* FALLAS, 2016) sobre os tipos de pensamento que levam um indivíduo a compreender determinado conceito matemático. Para esses autores, a representação simbólica que é atribuída a um determinado conceito tem dois significados: por um lado, o simbolismo leva a pensar num processo (algorítmico, operacional, analítico, entre outros); por outro, representa o objeto matemático em si mesmo (definição).

Desse modo, definem proceito como “a combinação de processo e conceito, em que processo e produto estão representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo de um *procept* pode evocar um processo ou um conceito” (GRAY e TALL,1991 *apud* FALLAS, 2016, p.73). Por exemplo, a notação $\lim_{x \to a} f(x)$ representa o processo de tender para um limite e o conceito do valor limite.

Nesse sentido, os autores afirmam que os indivíduos mais capazes, isto é, os que têm maior compreensão do conceito, são aqueles que interpretam a representação simbólica de forma flexível considerando a sua ambiguidade, ou seja, os indivíduos têm uma compreensão mais completa e profunda quando combinam o pensamento processual e o pensamento conceitual sobre o objeto matemático. Os autores Gray e Tall (1994) definem essa combinação como pensamento proceptual: “Nós caracterizamos o pensamento perceptual como a capacidade de manipular de forma flexível o simbolismo como processo ou conceito, intercambiando livremente entre diferentes simbolismos para o mesmo objeto” (GRAY e TALL, 1994, p.121, tradução nossa).

As representações, segundo Biza *et al*. (2007, *apud* FALLAS, 2016) têm tido destaque nas investigações na Educação Matemática como um aspecto fundamental da aprendizagem dos alunos, quer para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, quer para desenvolver a capacidade de resolução de problemas. Nessa perspectiva, Fallas (2016) cita a NTCM para esclarecer que

> À medida que os alunos se tornam matematicamente mais competentes vão desenvolvendo um repertório cada vez maior de representações matemáticas e de como as usar de forma produtiva. Este conhecimento inclui a seleção de representações específicas com o propósito de extrair informações específicas ou de alcançar determinados fins (NTCM, 2007, p. 422, *apud* FALLAS, 2016, p. 19).

As representações que serão utilizadas no trabalho de Fallas (2016) são: as representações verbais usadas para exprimir ideias, geralmente em discussões coletivas dentro da sala de aula ou através do uso da linguagem natural nas justificações escritas durante a resolução de tarefas; as representações simbólicas, que incluem o uso de expressões numéricas ou algébricas; e as representações geométricas, como os gráficos de funções. De acordo com Tall (1992, *apud* FALLAS, 2016), na matemática, habitualmente utiliza-se três representações – gráfica, numérica e simbólica – e, sempre que possível, os conceitos devem ser ensinados recorrendo-se a elas.

Pons *et. al.* (2011, *apud* FALLAS, 2016) indicam que o conceito de limite tem sido desenvolvido iniciando com ideias intuitivas, exprimidas verbalmente, seguidas de aproximações numéricas, para depois utilizar estratégias algébricas e finalmente exemplificar mediante representações gráficas. Pois é mediante essa combinação de diversas representações que os alunos não ficam limitados pelas potencialidades ou fragilidades de uma representação particular.

Outro ponto destacado por Fallas (2016) é a visualização matemática na compreensão dos conceitos de limites e continuidade de uma função. O autor descreve a visualização na Educação Matemática, seus usos e limitações, bem como a visualização na compreensão dos conceitos do cálculo infinitesimal. Aborda também os obstáculos, dificuldades e erros associados à compreensão dos conceitos de limites.

A coleta dos dados se deu por observação, recolhimento de documentos sobre produções escritas dos alunos durante a realização das tarefas e entrevista. Para a análise dos resultados, ele faz uso de dados de episódios da sala de aula, fragmentos das entrevistas e extratos das resoluções das tarefas como propósito de evidenciar a interpretação dos dados e justificar os resultados obtidos.

Em relação à análise da compreensão do conceito de limite, o pesquisador elaborou questões que remetessem a quais eram os significados atribuídos pelos alunos ao conceito de limite. Os dados a seguir apresentam os significados que formam parte do conceito imagem que os alunos têm sobre esse ente matemático.

Na tarefa 1.2, Fallas explica o que entendes por limite de uma função num ponto. De acordo esse pesquisador, 70% dos alunos atribuem ao conceito de limites o significado de um valor, o qual é referido nas suas respostas por meio de expressões, como: “o valor de y”; “o valor de $f(x)$”; “o valor de contradomínio da função”; “o valor que a função toma”. Ou seja, para esses alunos, o limite é um valor correspondente ao eixo y, observado na Figura 5.

Figura 5 - Protocolo de entrevista do aluno Tiago

Samuel: *À medida que nos aproximamos desse ponto ao longo de x (de esquerda ou direita) a que **valores** y ele se aproxima.*
Sara: *É o **valor** máximo para que tende o ponto uma determinada parte da função.*
Tiago: *É o **valor** de y para o qual a função tende nesse ponto.*
(Extrato de respostas, T1_ Q1.2_FD)

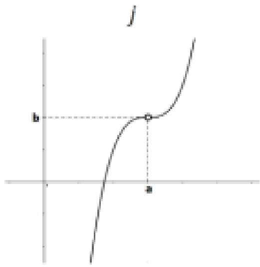
Fonte: Fallas (2016, p.66)

Nas respostas apresentadas pelos alunos, quando explicam o que entendem por limite de uma função num ponto, o termo “tende” é usado por 68% dos alunos e o termo “aproxima” é usado em 29% das respostas. Desse modo, os dados (Figura 6) revelam que os temos usados no ensino desse conceito influenciam o conceito imagem dos alunos ao ponto de estar implícita a concepção dos limites como um processo dinâmico de aproximação- sendo essa uma das intuições mais comuns.

Figura 6 - Fragmento de entrevista do aluno Tiago

Os dados da entrevista realizada ao Tiago evidencia que esta dificuldade se manteve nalguns alunos, após o final da unidade de ensino.

Investigador: Que condições são necessárias para garantir a existência de limite de uma função num ponto?
Tiago: *O ponto tem que pertencer ao domínio.*
Investigador: Quais das seguintes funções tem limite no ponto a? Em caso de existir indica o valor do limite e em caso de não existir indica porque não existe.



Tiago: *Nesta,* (na função *j*) *não há limite.*
Investigador: Porque não há limite no ponto a?
Tiago: *Porque a função não é contínua nesse ponto.*

(Extrato de episódio da Entrevista ao Tiago)

Fonte: Fallas (2016. p.73)

Fallas (2016) relata que a concepção do limite como processo de aproximação lateral levou os alunos a ter dificuldade em reconhecer a unicidade do limite de uma função num ponto, já que em vários casos, quando foi solicitado o valor do limite num ponto dado, quando os limites laterais eram diferentes, muitos dos alunos inclinaram-se por responder os dois comportamentos da função correspondentes aos limites laterais, pela esquerda e pela direita, do objeto em questão.

O pesquisador enfatiza que, dentro de uma rede complexa de processos cognitivos associados ao Pensamento Matemático Avançado, encontram-se os conceitos de limites de uma função que têm sido considerados de difícil compreensão pelos alunos, atendendo às dificuldades e obstáculos de aprendizagem que enfrentam (CORNU, 2002). Por isso, os conceitos de limites têm sido alvo de investigação em Educação Matemática com diversos fins, de que são exemplo os estudos focados em abordagens didáticas para o ensino destes conceitos ou sobre os distintos conceitos (DOMINGOS, 2003). Outros estudos têm-se focado em aspectos envolvidos na compreensão dos conceitos por alunos, como as representações (KARATAS *et al*., 2011) ou a visualização destes entes matemáticos. (NATSHEH E KARSENTY, 2014, *apud* FALLAS, 2016).

Como consequência, esses indícios de que os alunos consideram, implicitamente, o limite como conceito e como processo, levam-nos a concluir que esses significados têm evoluído até mundo Proceptual (TALL, 2004a, 2004d, *apud* FALLAS, 2016), caracterizado pelo fato de que, por meio das experiências com os processos, o conceito é concebido, além de que a comprovação da existência e do valor do limite se faz por meio da articulação do cálculo numérico, da manipulação algébrica e da análise gráfica.

2.6 Tese de Rocha (2016)

Passaremos a discorrer sobre a tese de Rocha (2016) intitulada "Releitura do processo de aprendizagem de estudantes repetentes de cálculo".

A tese de Rocha (2016) teve como objetivos:

> 1) Identificar, em estudantes repetentes de Cálculo, os seus hábitos de estudos, expectativas de aprendizagem e dificuldades com conceitos matemáticos anteriores e com conceitos específicos de Cálculo I. Ou seja, conhecer quem são esses estudantes repetentes de Cálculo I;
>
> 2) Compreender causa e consequências do insucesso de estudantes repetentes em Cálculo I, e motivos do abandono dessa disciplina quando repetente. Ou seja, compreender os motivos que os levavam a repetir essa disciplina por uma, duas ou mais vezes, pois as várias repetências na disciplina os deixavam sem acreditar que podiam aprender e, por isso, abandonavam-na (ROCHA, 2016. p.40).

Para essa investigação, foram propostas as seguintes questões de pesquisa:

> a) Quem são esses estudantes repetentes? Quais são suas expectativas de desempenho na disciplina de Cálculo I, quando repetem essa disciplina? Quais foram os principais motivos que os levaram a ficar reprovados em Cálculo I e/ou a abandoná-la nas primeiras semanas do curso? O que pensam e acreditam que podem aprender de Cálculo I como estudantes repetentes?
>
> b) Que dificuldades estudantes repetentes têm ao resolver tarefas de limite? Afinal, quais são os erros que eles cometem ao resolverem limite de funções? São erros referentes ao conteúdo da matemática básica ou erros específicos de Cálculo? (ROCHA, 2016. p.39)

A pesquisa foi desenvolvida com 38 alunos de uma turma de dependência (havia aluno que estava cursando pela terceira vez) da disciplina de Cálculo I dos cursos de Agronomia e Licenciatura em Ciências Agrárias do Instituo Federal do Espírito Santo (IFEX), *Campus* Itapina.

A partir das dificuldades apresentadas pelos alunos, foi planejada a revisão dos conteúdos do ensino básico em 3 blocos, sendo eles: 1º) bloco- álgebra elementar (potenciação, radiciação, produtos notáveis, fatoração de expressão algébricas e simplificação de frações algébricas); 2º) bloco- conjunto, números reais e funções elementares (constante, afim, quadrática, exponencial e logarítmica); e, por fim, o 3º) bloco- tópicos de Geometria Analítica (distância entre dois pontos, equações de reta e da circunferência).

Skemp (1980, *apud* ROCHA, 2016) destaca quatro fatores que ocorrem no processo de ensino os quais contribuem para a dificuldade dos professores, ao ensinarem matemática, em priorizar a compreensão relacional: 1) o efeito retroativo dos exames; 2) currículos sobrecarregados. 3) dificuldade de avaliar se o sujeito compreende relacional ou instrumentalmente; 4) a grande dificuldade psicológica para os professores de acomodação (reestruturação) dos seus esquemas existentes de longa data, mesmo para a minoria que conhece a necessidade, quer fazê-lo e ter tempo para estudar (SKEMP, 1980, *apud* ROCHA, 2016).

Para investigar os estudantes repetentes da disciplina de Cálculo I, a autora optou pelo terceiro item mencionado acima, fundamentada no objetivo de investigar e compreender qual o nível de compreensão desses alunos em relação ao conteúdo de limites de funções. Além disso, teve a oportunidade de refletir sobre a sua postura enquanto professora na tentativa de definir qual o tipo de ensino que pretendia e conseguia realizar. A sua aposta foi acreditar que o ensino de matemática com significado teria mais chances de oferecer aos alunos uma compreensão relacional dos conteúdos matemáticos abordados.

Skemp (1976, *apud* ROCHA, 2016) categoriza a aprendizagem dos conceitos matemáticos em dois níveis: nível de entendimento ou compreensão instrumental; nível de entendimento ou compreensão relacional. É importante ressaltarmos que a compreensão instrumental é realmente útil quando se tem que saber como fazer uma tarefa específica rapidamente, e não se está muito preocupado sobre como ela se encaixa em outras semelhantes. Já o entendimento relacional é útil quando se quer explorar ideias, não se preocupando com o seu desenvolvimento, e, sim, com o processo.

Em relação às atividades elaboradas, a autora utilizou os seguintes questionamentos:

a) Será que os estudantes conseguem calcular os limites de funções polinomiais (funções contínuas)? E limites de funções racionais (contínuas ou não, em um determinado ponto)?
b) Quais as estratégias de soluções os estudantes usariam quando se deparassem com limites de funções racionais em que, no momento que substituíssem os valores de x, encontrariam uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$?
c) Quais estratégias eles usariam para calcular o limite de funções a partir dos gráficos?

Os objetivos relacionados aos questionamentos eram:

1- Identificar se os estudantes compreendem a noção de limite de uma função em um determinado ponto, a partir de uma perspectiva aritmética (simplesmente substituir o valor numérico na questão 1), algébrica (na questão 2) com as funções racionais, em que o valor de x possui algumas restrições, e geométricas (questão 3), a partir do gráfico da função;

2- Identificar quais conhecimentos mínimos de função os estudantes trazem sobre domínio, contradomínio, imagem e gráfico de funções reais para determinação de limites;

3- Analisar e classificar os acertos e erros apresentados nesse instrumento diagnóstico, com o objetivo de elaborar estratégias de ensino (atividades, formulação de grupos de estudos com trabalhos individuais e/ou em grupo), para direcioná-los em seus estudos e orientá-los em suas dificuldades e corrigir erros que eles apresentassem.

Descreveremos, a seguir, algumas questões elaboradas pela autora, conforme Figura 7.

Figura 7 - Elaboração de questão

Questão 1. Calcule os limites, caso existam:

a) $Lim_{x\to\sqrt{3}} 10 =$ b) $Lim_{x\to 3}(2x-1) =$ c) $Lim_{x\to -2}(x^2+x-1) =$ d) $Lim_{x\to 3}\left(\dfrac{4x-5}{5x-1}\right) =$

Fonte: Rocha (2016, p.157)

Na elaboração dessa primeira atividade, a autora teve o cuidado de tentar mobilizar as três representações (numérica, algébrica e geométrica) de alguns limites de funções reais, pois ela considerava importante, para a compreensão de um conceito matemático, passar pelo menos por essas representações.

Rocha (2016) considera que essa questão atende às características do nível de compreensão instrumental (SKEMP, 1976), porque exigia do aluno conhecimento e regras de algoritmos para a resolução, por se tratar de funções contínuas em que o $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou seja, era necessário apenas que os estudantes substituíssem o valor de x, dado na função, para a determinação do valor do limite da função naquele ponto.

Resumidamente, para resolver os limites acima, os alunos necessitariam, basicamente, de resolução de expressões algébricas. Outros métodos alternativos, ela cita como exemplo os itens b e c. Teriam as seguintes opções de ir demonstrando o passo a passo do cálculo de limites ao usarem algumas propriedades básicas de limites de funções, ou definições de continuidade:

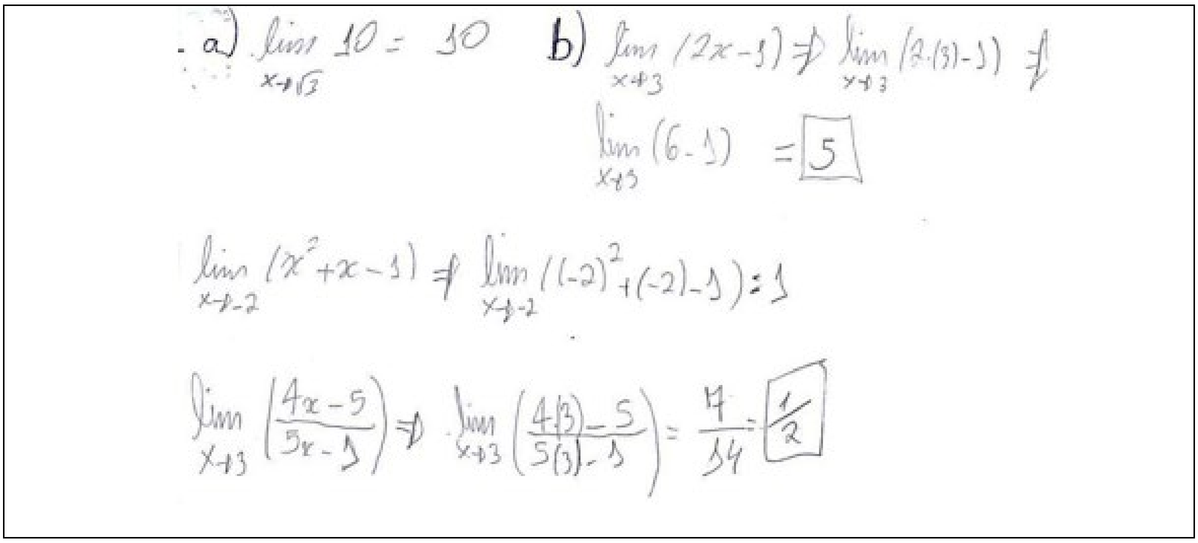
I. Usando propriedades de limites: $\lim_{x\to 3}(2\,x-1) = 2\lim_{x\to 3}(x) - \lim_{x\to 3}(1) = 5$;

II. Usando a definição de continuidade: como f é contínua, temos que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 5$;

III. Por aproximações numéricas para valores próximos de três, tanto para a esquerda quanto para a direita do número 3.

A síntese da análise da resolução da questão pelo A13 está contemplada na Figura 8, a seguir.

Figura 8 - Solução da primeira questão diagnóstica pelo estudante A13

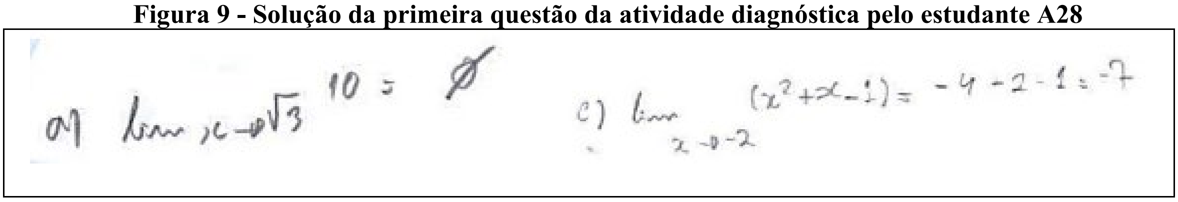


Fonte: Rocha (2016, p.159)

De acordo com Rocha (2016), é possível perceber que, mesmo apresentando os valores numéricos dos limites corretamente, verificamos que o aluno ainda não compreendeu que, quando substituímos os valores numéricos de *x*, não é mais necessário repetir o símbolo "*lim*". Esse tipo de erro foi classificado por Cury e Cassol (2004, *apud* ROCHA 2016) como lapsos de escrita. Eles ainda dizem que esse erro é muito comum entre os estudantes, quando não é exigido que eles apliquem, de maneira correta, as propriedades dos limites de funções. Mas que é preciso reforçar a importância de compreender e utilizar as propriedades corretamente.

Em relação à resolução da letra a pelo aluno A28, sintetizamos a análise da autora, conforme Figura 9.

Figura 9 - Solução da primeira questão da atividade diagnóstica pelo estudante A28



Fonte: Rocha (2016, p.161)

Segundo a pesquisadora, o estudante não percebeu, ao resolver o item (a), que se tratava de uma função constante igual a 10. Quando foi perguntado a ele por que considerava o resultado um conjunto vazio, respondeu que $\sqrt{3}$ era um número irracional e 10 um número racional. Como são conjuntos disjuntos, acreditava que a solução seria um conjunto vazio. A pesquisadora observa que o foco de atenção desse aluno estava bem distante do que era solicitado para calcular. Ele simplesmente olhou para os valores 10 e $\sqrt{3}$ e acessou em sua mente o que sabia a respeito desses números.

A partir dessa observação, ela faz algumas indagações:

a) Será que esse estudante entendeu o que envolve o cálculo de um limite?

b) Será que esse estudante entendeu que $f(x) = 10$, quer dizer que para qualquer valor de x do domínio desta função que a imagem será igual ao valor 10?

c) Será que ele sabe olhar para o gráfico desta função constante e saber entender pelo gráfico o que seria calcular o limite?

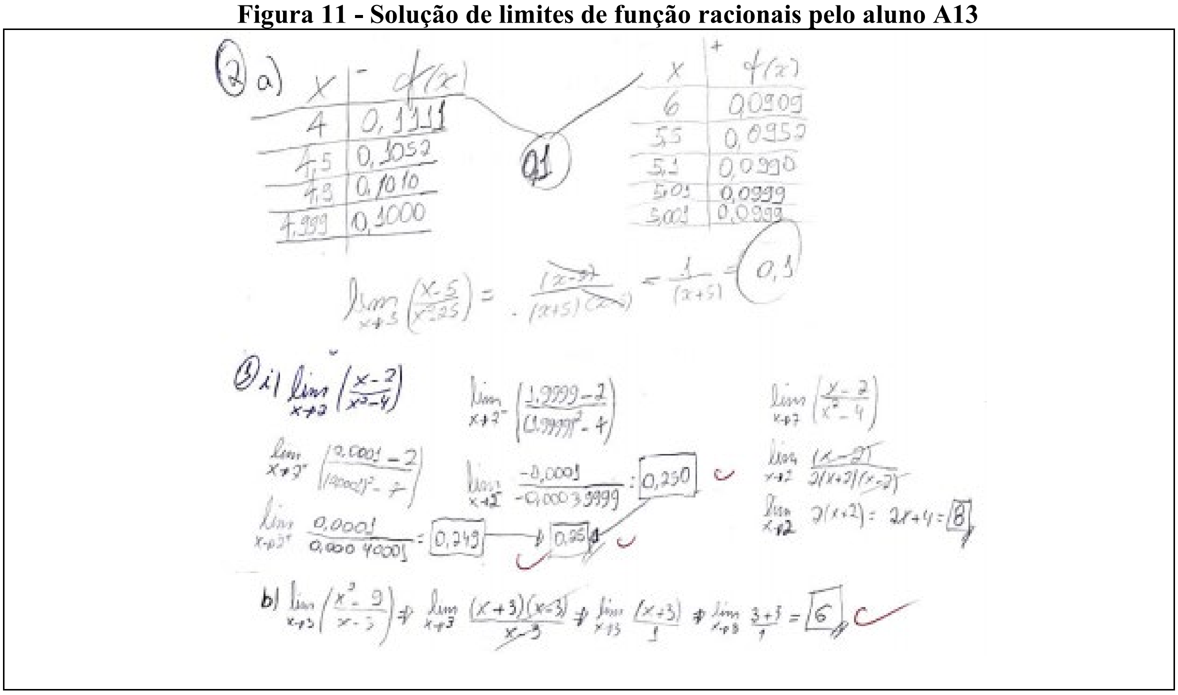
A seguir, serão analisadas questões envolvendo limite de função racionais. Para tanto, analisaremos a resolução do aluno A13, conforme Figuras 10 e 11.

Figura 10 - Resolução de função racionais pelo aluno A13

O enunciado da questão era: Para calcular o limite da função abaixo, faça o que se pede em cada item: i) Use uma calculadora para tabular, até *quatro casas decimais*, os valores de f(x) para os valores fixados de x; ii) Do que f(x) parece tender quando x se aproxima de c? iii) Encontre o $Lim_{x \to c} f(x)$. Sendo dados: $f(x) = \left(\frac{x-5}{x^2-25}\right)$ e c= 5 e x: (4; 4,5 ; 4,9 ; 4,999) e (6; 5,5 ; 5,1; 5,01; 5,001) e c = 5. Encontre $Lim_{x \to 5}\left(\frac{x-5}{x^2-25}\right)$

Fonte: Rocha (2016, p.177)

Figura 11 - Solução de limites de função racionais pelo aluno A13



Fonte: Rocha (2016, p.184)

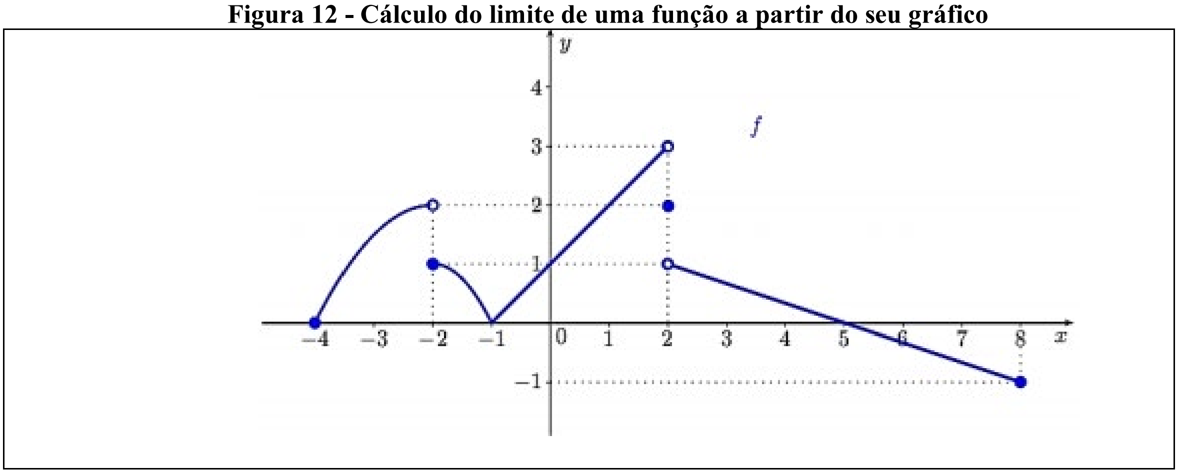
De acordo com Rocha (2016), o estudante conseguiu resolver corretamente a questão usando aproximações numéricas e concluiu corretamente o valor do limite da função para x tendendo a 2, como sendo igual a 0,25; e, assim, pareceu demonstrar que domina a definição de limite laterais. Entretanto, quando analisada a sua resolução algébrica, foram encontrados os seguintes erros: a) na fatoração do binômio $x^2 - 4$, em que indica fatoração por: $2(x+2)(x-2)$; b) na simplificação da fração algébrica, obtendo $f(x) = 2(x+2)$ onde o correto seria $f(x) = \frac{1}{x+2}$. A pesquisadora considera que esses erros são comuns e que são relacionados à álgebra do ensino fundamental.

Para o cálculo de limites a partir do seu gráfico, o enunciado era: Para a função cujo gráfico é mostrado abaixo, identifique cada limite, se existir, e determine os valores das funções em cada ponto solicitado. Faremos uma análise dos seguintes limites em torno dos seguintes valores $x = -2, x = -1, x = 2,$ ou:

i) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$; ii) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ iii) $\lim_{x \to -1} f(x) =$ e iv) $\lim_{x \to 2} f(x) =$

A pesquisadora escolheu esses três pontos do gráfico, para que os limites fossem calculados, porque poderia provocar nos estudantes alguns conflitos cognitivos em relação à definição de limite, ao valor da função num ponto e à própria ideia de continuidade ou descontinuidade de uma função (Figura 12).

Figura 12 - Cálculo do limite de uma função a partir do seu gráfico



Fonte: Rocha (2016, p.186)

Ao analisar as respostas das turmas em relação ao $\lim_{x \to -2^+} f(x)$, Rocha (2016) constatou que 14 alunos acertaram o valor do limite, mas três erraram e responderam que o valor do limite seria -1. Numa tentativa de tentar compreender o erro, para a pesquisadora, pareceu que aqueles que erraram a questão tiveram dificuldade na interpretação do símbolo $x \to -2^+$. Essa dificuldade de compreender que o sinal "+" indicava um limite lateral à direita também foi apontada na pesquisa realizada por Cury e Cassol (2004, *apud* ROCHA, 2016).

Quando Rocha (2016) analisa o cálculo do $\lim_{x \to -2^-} f(x)$, é possível verificarmos que apenas um aluno acertou e dezesseis erraram. Destes, dez indicaram que o valor do limite seria o valor 1;

dois responderam que o limite não existia; dois, que o valor era - 4, e dois, que seria -1. A pesquisadora acredita que dez responderam que o limite seria 1, porque encontraram em seus cálculos que f (-2) = 1. Isso, de acordo com ela, está em consonância com os comentários de Hitt e Murillo (2005, *apud* ROCHA, 2016), pois, segundo esses autores, o estudante considera que, graficamente, o valor do limite é sempre onde a função está definida. Já os que responderam que o limite seria -1, podemos pensar que talvez pudessem ser justificados ou compreendidos pelo argumento de Murillo (2004, *apud* ROCHA, 2016) de que, ao invés de procurarem uma vizinhança no contradomínio da função, procuraram encontrar a vizinhança no domínio.

Em se tratando da análise do $\lim_{x \to -2} f\,(x) = L$, conforme Rocha (2016), todos erraram. A princípio, ela infere que, provavelmente, eles não entenderam a definição de limites laterais, ou porque não conseguiram relacionar os limites encontrados nos itens (i) e (ii). O que chamou a atenção dela foi que 13 responderam que o valor do limite seria 1, confirmando a tese de Hitt e Murillllo (2005, *apud* ROCHA, 2016) de que o estudante considera que, graficamente, o valor do limite é sempre onde a função está definida. Dois afirmaram que o valor do limite era -2. Aqui, ela levanta novamente a hipótese feita por Murillo (2004, *apud* ROCHA, 2016) de que, ao invés de procurarem uma vizinhança no contradomínio da função, procuraram fazer essa busca em uma vizinhança do domínio. Os outros dois responderam que seria o valor 2, e acreditamos que esses alunos apenas tenham usado o limite tendendo a -2 pela esquerda como resposta.

Quanto à pesquisa de campo, foi realizada em 2014 e nos meses de julho e agosto de 2015. A pesquisadora entrevistou os alunos A1, A19 e A13, com o objetivo de verificar se conseguiram internalizar uma Imagem Conceitual (TALL, VINNER, 1981) da noção intuitiva de limite. Ela propôs, na entrevista com cada estudante, as seguintes perguntas:

a) O que é, para você, o limite de uma função?
b) O que significa a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = L$?

A pesquisadora acredita que essas duas perguntas se complementam para a construção do conceito de limite de função. E ela, fundamentada em Tall e Vinner (1981), afirma que, geralmente, nesse processo de construção do conceito é dado um símbolo ou um nome que permite que ele seja comunicado, e isso auxilia na manipulação mental. Seguem as respostas desses estudantes e as interpretações da pesquisadora.

Reposta do aluno A1: Esse limite não tem que ser exatamente um valor. Para mim, quando se aproxima de a, a função se aproxima de L.

Reposta do aluno A13: Que o limite é um valor que chegaria próximo de a, mas não seria o valor de a. Então significa que, quando x se aproxima do valor de a, o valor da função se aproxima de L.

Esses alunos, de acordo com a pesquisadora, parecem trazer uma noção intuitiva de limite dentro do ponto de vista histórico, que seria a definição de D'Alembert (REZENDE, 1994, *apud* ROCHA, 2016), na qual a variável é um conceito dinâmico que, em hipótese alguma, atinge o valor limite, "ela tende a esse valor". A pesquisadora conclui que, levando em consideração que não fizeram nenhum tipo de consulta a livros e que eles não faziam nenhuma ideia do que ela iria lhes perguntar, traziam elementos de uma definição de limite de função. E salienta, embora parecesse, ao escutar e ler o que disseram, uma definição um pouco distorcida, porém com argumentos próximos da definição que é utilizada em sala de aula.

Resposta do aluno A19 na Figura 13:

Figura 13 - Resposta do aluno A19 sobre conceito de limites

O limite de $f(x)$, quando x tende a a, significa que se substituir $x = a$ nessa função, L será encontrado. Podemos fazer o valor de x se aproximar de a cada vez mais, e as imagens desses valores de x se aproximarão de L, tanto quanto se quiser, só fazer o x se aproximar mais de a.

Fonte: Rocha (2016, p.190)

A pesquisadora destaca dois pontos, de certo modo para ela, contraditórios. O primeiro, é que a aluna começa com uma definição de limite como algo operatório e bem instrumental (SKEMP, 1976, *apud* ROCHA, 2016), ou seja, o limite de uma função é só substituir o valor de x na função e calcular. Em contrapartida, ela (a aluna) traz- na segunda parte de sua definição- um detalhe que chamou a atenção da pesquisadora, quando define que o valor de x se aproxima de a cada vez mais, e as imagens desses valores de x se aproximarão de L, tanto quanto se queira, é só fazer o x se aproximar mais de a. De acordo com a estudiosa, ela não poderia afirmar se esse *insight* (TALL, VINNER, 1981), na definição dada pela estudante, foi de maneira consciente ou inconsciente. Essa frase destacada por Rocha (2016), na definição do limite de uma função apresentada pela estudante A19, é exatamente a ideia intuitiva dos ε-δ da definição formal de limite e pode ser que ela tenha iniciado a compreensão desse conceito intuitivo de limite.

Observamos que, nessa pesquisa, não foi abordada a definição formal de limite de uma função- que foi uma escolha da pesquisadora. Ela sugere a construção de atividades com problemas na construção do conceito de limites.

Essa tese nos foi útil na elaboração de nossas atividades de pesquisa que serão fundamentadas no Pensamento Matemático Avançado. A pesquisadora não fez uso de nenhum *software*, mas podemos adaptar questões trabalhadas por ela ao GeoGebra na nossa pesquisa.

2.7 Artigo de Messias e Brandemberg (2015)

Agora discorreremos sobre o artigo de Messias e Brandemberg (2015) intitulado "Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais". Esse artigo tem como objetivo investigar as imagens conceituais desses sujeitos a cerca da relação entre limite e continuidade de uma função.

A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 3º e 4º semestres de engenharia civil de duas universidades públicas do estado do Pará. O estudo realizado foi de caráter exploratório, cujos resultados foram analisados nos pressupostos das pesquisas de Tall e Vinner (2002) que, por vez, embasaram a sustentação teórica.

O objeto do estudo foi investigar a problemática da apreensão do conceito de limite de uma função de uma variável dada a sua importância para o entendimento de outros conceitos. O estudo consistiu em dois momentos: primeiro foi aplicado um questionário para verificar as evocações dos alunos a respeito do objeto de estudo. A segunda etapa consistiu na realização de entrevista com alguns dos sujeitos investigados, a fim de descrever e analisar mais profundamente as Imagens Conceituais evocadas por eles na etapa anterior. Os autores ressaltam que o referido artigo apresenta trechos da entrevista com apenas um dos sujeitos investigados.

Um dos temas abordados durante as entrevistas diz respeito à relação entre a existência (ou não) do limite e a continuidade de funções. As análises das questões foram pautadas na relação limite x continuidade e fundamentadas nas noções de Imagem Conceitual e Definição Conceitual propostas por Tall (2002) e Vinner (2002).

Diante dos resultados e questionamentos, os pesquisadores, Messias e Brandember (2015), apresentam o quadro com as implicações das Imagens Conceituais identificadas nos referenciais teóricos adotados para a formulação de suas questões de pesquisa.

Quadro 5 - Implicações do referencial teórico para a formulação de suas questões de pesquisa

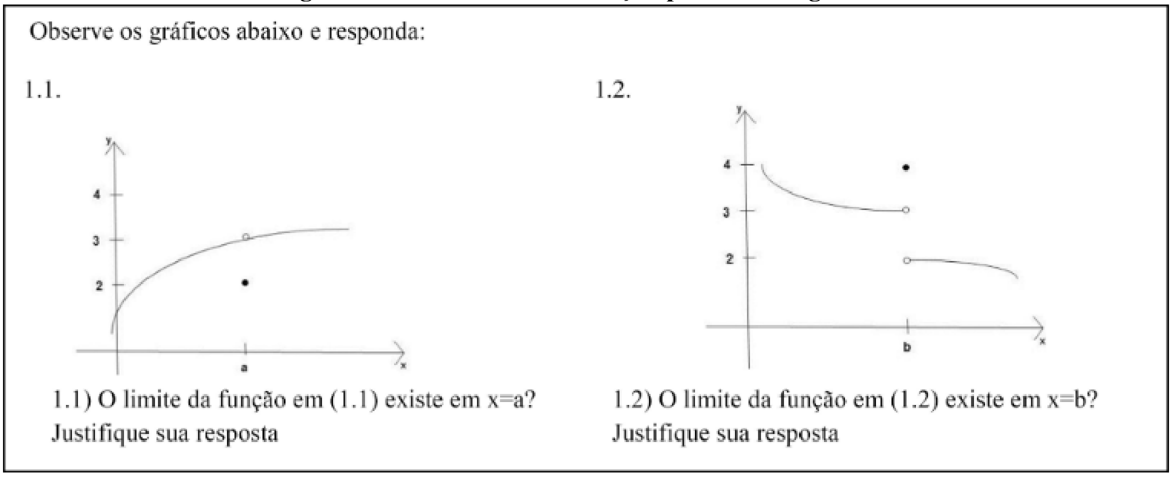
Referencial Teórico	Imagens Conceituais	Questões norteadoras nos estudos dos autores Messias e Brandemberg (2015)
Cottrill *et al* (1996)	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	1. Como os sujeitos investigados em nossa pesquisa relacionam os conceitos de limite e continuidade? 2. Os sujeitos investigados condicionam a existência do limite em determinado ponto à continuidade da função nesse ponto? 3. A definição conceitual pessoal dos sujeitos investigados acerca do conceito de limite evoca a noção de continuidade? 4. O que os sujeitos investigados em nossa pesquisa consideram como necessário para que um limite exista em torno de um determinado ponto? 5. Como os sujeitos investigados visualizam a (des)continuidade de uma função em um ponto e, também, a existência (ou não) do limite nesse ponto por meio de representações gráficas?
Barto (2004)	Verifica-se a continuidade de uma função em um ponto, por meio do cálculo dos limites laterais, à direita e à esquerda desse ponto. Uma função é contínua se não apresenta saltos ou buracos.	
Jordann (2005)	A função deve estar definida em um ponto para que a mesma apresente limite naquele ponto. Quando a função tem um limite em um ponto, então deve ser contínua naquele ponto: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	
Nair (2010)	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	

Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p.1230)

Essas questões norteadoras, segundo Messias e Brandemberg (2015), propiciaram reflexões acerca de como eles poderiam estruturar os momentos de investigação junto aos sujeitos investigados, de maneira a ser possível identificar se eles evocariam Imagens Conceituais semelhantes àquelas destacadas no quadro de referências acima.

O roteiro elaborado pelos autores foi específico para cada estudante, levando em consideração as Imagens Conceituais sobre o conceito de limites de uma função, evocado na etapa anterior. Para isso, foi solicitado aos sujeitos investigados que respondessem às seguintes questões:

Figura 14. Limites de uma função por meio de gráficos



Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p 1231)

A elaboração da questão pautou-se nas considerações da pesquisa realizada por Juter (2006, apud MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015) sobre mobilizações das Imagens Conceituais de estudantes em relação ao comportamento da função próximo e no próprio valor do limite. Com isso, objetivou-se verificar se os alunos interpretariam a (não) existência do limite em funções descontínuas.

As hipóteses, quanto aos resultados obtidos nas investigações, pautaram-se nas seguintes evocações:

- Para os sujeitos investigados $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Calcular o limite de uma função significa realizar uma investigação à direita e à esquerda de um ponto qualquer.

- Uma função que não esteja definida em um ponto não apresenta limite quando a função tende àquele ponto.

- O $\lim_{x \to a} f\ (x)$ deve ser necessariamente igual a $f(a)$. Caso contrário, o limite não existirá.

Segundo Messias e Brandemberg (2015), a investigação da aproximação à direita e à esquerda do ponto dado fez parte da resolução de 9 estudantes, que atribuíram à existência do limite o fato de seus limites laterais existirem e serem iguais, conforme Figura 15 e 16.

Figura 15 - Transcrição da resposta do sujeito S12

a) Existe, pois, conforme nos aproximamos de a, *o valor de* $f(x)$ *aproxima-se do* $\lim_{x \to a} f(x)$.

b) *Não existe, pois, quando nos aproximamos de* a *pela esquerda e pela direita, obtemos valores diferentes para* $\lim_{x \to a} f(x)$. *Logo* $\lim_{x \to a} f(x)$ *não existe.*

Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p.1232)

Figura 16: Transcrição da resposta do sujeito S14

5) a.1) Sim.

a.2) Quando calculamos os limites laterais da função, com x *tendendo a qualquer valor, eles serão iguais. Quando* x *tende à* a, *teremos (analisando o gráfico).*

b.1) existirá em todos os pontos, exceto em $x = b$.

b.2) Quando calcularmos os limites laterais da função em qualquer ponto diferente de b, *eles serão iguais (analisando o gráfico), mas quando* x *tender a* b, *os limites laterais da função serão diferentes* $(\lim_{x \to b^+} f(x) \neq \lim_{x \to b^-} f(x)$. *Logo, a função não terá limite quando tende* x *a* b.

Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p.1233)

Resultados da análise dos pesquisadores Messias e Brandemberg (2015):

- Os resultados deles não estão em conformidade com os de Barto (2004, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015), cujos sujeitos investigados consideravam somente as investigações à direita e à esquerda do ponto satisfatório para a existência do limite, descartando a unicidade. Mesmo assim, foi observada, nas respostas dos sujeitos, a mobilização de uma ideia de limite de função como sendo uma aproximação contínua em relação a um ponto sem, no entanto, atingir esse ponto (TALL; VINNER 1981).

- Foram obtidos resultados semelhantes aos estudos realizados por Cottrill *et al*., (1996, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015), Jordaan (2005, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015) e Nair (2010, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015). Os sujeitos investigados condicionaram a existência do limite de uma função à continuidade dessa função em todos os pontos do domínio, pois, para "*uma função satisfazer o conceito de limite, precisa ser contínua em todo o seu domínio*" (resposta do sujeito S15). Nesse sentido, Messias e Brandembeg (2015) observam que os sujeitos investigados apresentam mobilizações em suas imagens conceituais semelhantes às de Leibniz, no século XVII, em que a existência do limite dependia da continuidade da função no ponto e não o contrário.

Em relação à continuidade, os pesquisadores elucidaram que alguns sujeitos evocaram, em suas Imagens Conceituais, que a continuidade de uma função está condicionada à não existência de saltos no gráfico da função (TALL e VINNER 1981; BARTO 2004, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015), conforme ficou elucidado na resposta do sujeito S20, Figura 17.

Figura 17 - Transcrição da resposta do Sujeito S20

5) A função g *tem limite, pois não possui salto em* a*, porém não é contínua em* a.   *b) A função* h *não possui limite, pois apresenta salto em* b.

Fonte: Messias Brandembeg (2013, p,1233)

Diante do exposto, os pesquisadores identificaram que foram evocadas as seguintes Imagens Conceituais, no que concerne à relação limites x continuidade:

- Para o limite de uma função existir, seus limites devem ser iguais.

- O conceito de limite de função encontra-se relacionado com uma investigação nas proximidades de determinado ponto, de maneira que a função se aproxime de L sem, no entanto, alcançar esse limite. Ou seja, $f(x) \neq L$ (TALL E VINNER, 1981; JUTER, 2006, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015).

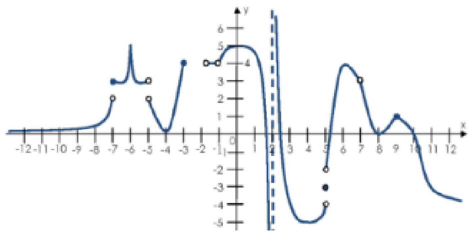
- Para que o limite de uma função exista, a função deve estar definida no ponto, ou seja, deve ser contínua nesse ponto (COTTRILL et al, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2010, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015).

- O limite de uma função existe, se não houver saltos no gráfico da função.

Para complementar os resultados obtidos no que diz respeito à relação limite x continuidade, os pesquisadores apresentam um gráfico, conforme Figura 18, abaixo, com a intenção de mobilizar as Imagens Conceituais dos sujeitos investigados para suas conclusões finais.

Figura 18: A relação limite x continuidade no questionário aplicado

Mostrar o gráfico da função abaixo:



- Observe esse gráfico e responda:
  - O $\lim_{x \to -7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 5$? Justifique.
  - O $\lim_{x \to 7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 9$? Justifique.
  - Escreva uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.
- Caso seja mobilizada a ideia de que o limite existe se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, perguntar:
  - Então, o limite da função em determinado ponto deve ser igual ao valor da função nesse ponto? (aguardar resposta). E se não for?
  - Devemos, portanto, considerar o domínio da função como um fator decisivo para evidenciarmos a (não) existência do limite?
  - Então quando o limite de uma função existe?
  - Escreva uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.
- Caso o sujeito responda corretamente o primeiro tópico, solicitar que responda:
  - Quando o limite existe?

Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p.1235)

Os pesquisadores apresentaram a atividade ao sujeito S09, o qual- na etapa anterior- evocou que a existência do limite em determinado ponto não está, necessariamente, atrelada à (des)continuidade, conforme eles elucidaram a seguir (ver Figura 19 abaixo):

Figura 19: Trecho 1 de entrevista sujeito S09

E: Então, eu vou te mostrar esse gráfico (mostra o gráfico do roteiro), e aí eu queria saber contigo se $\lim_{x \to -7} f(x)$ *existe.*

(depois de algum tempo)

S09: Não.

E: Por quê?

S09: Porque tem esse salto aí... por isso, não existe.

E: Certo. E quando $x \to 5$?

S09: Pelo mesmo motivo.

E: E quando $x \to 7$?

S09: Nesse caso o limite existe, é $f(7)$.

E: E Quando $x \to 9$?

S09: Quando $x \to 9$, *também é* $f(9)$.

Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p.1236)

Os pesquisadores evidenciaram que:

- O sujeito atrela a ideia de descontinuidade somente à existência dos saltos no gráfico de uma função. Se for esse o caso, então, para o sujeito, a existência do limite dependeria da continuidade da função (no caso de $\lim_{x \to -7} f\ (x)$, fato que aproximaria os resultados aos apresentados por Cottril *et al*. (1996, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015), Jordaan (2005, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015) e Nair (2010, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015).

- Para o sujeito, uma função é descontínua quando ela apresenta salto e buracos em um ponto p (BARTO, 2004, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015). Sendo que, nesse último caso, o limite existirá e assumirá o valor de $f(p)$ alcançando-o, ou seja, ele se aproximará tanto de $f(p)$ que se tornará esse valor (TALL; VINNER, 1981).

No decorrer da entrevista, foi observado pelos estudiosos que o sujeito menciona os intervalos na tentativa de explicar quando o limite, em determinado ponto, existe ou não, sendo que o domínio da função se configurou como um fator de conflito potencial (VINNER, 2002), para esse sujeito, conforme Figura 20 a seguir:

Figura 20 - Trecho 1 de entrevista sujeito S09

E, então, quando eu posso afirmar que o limite existe?
S09: Vamos dizer que eu quero calcular o limite de f quando $x \to a$, *para pontos cada vez mais próximos de* a *no domínio, tem que estar cada vez mais próximo de* $f(a)$.
E: Então, eu devo considerar o domínio da função como sendo fundamental para a existência ou não do limite?
S09: Eu acho que não o domínio, e sim as imagens.
E: Então o valor da função no ponto deve pertencer ao conjunto imagem para que o limite exista?
S09: É.
E: Então, quando o limite não existe?
S09: Seria (pausa) se tu determinas um intervalo próximo de a *e um intervalo próximo de* $f(a)$. *(depois de algum tempo). Certo, o limite não existe se eu tomar um intervalo próximo de* a, *contendo* a, *eu pegar algum valor desse intervalo e a imagem não pertence ao intervalo próximo de* f(a).
E: Então, o caso do intervalo em torno de a, a *tem que estar definido nesse intervalo?*
S09: Tem que estar no intervalo.

Fonte: Messias e Brandemberg (2015, p.1237)

Os pesquisadores, diante das respostas de S09, perceberam que:

- S09 considera o limite como sendo uma aproximação dinâmica em relação a x, como foi evidenciado em suas palavras: "para pontos cada vez mais próximos de ...". Entretanto, quando define o valor do limite em p, restringe-se a esse ponto, já que, no caso do salto em $x = -7$, não analisou o comportamento do gráfico nas proximidades desse ponto e, consequentemente, desconsiderou seus limites laterais. Nesse âmbito, os resultados assemelham-se com as considerações de Cottril *et al.* (1996, *apud* MESSIAS e BRANDEMBERG, 2015).

- Foi ressaltado pelos autores que S09 mostrou-se inseguro quanto ao questionamento levantado sobre a necessidade de a função estar ou não definida no ponto para que o limite exista. Em um primeiro momento, diz que o domínio da função não deve ser considerado, e, sim, a imagem. Entretanto, afirma que o ponto a deve estar definido no intervalo. Os pesquisadores acreditam, nesse aspecto, que os próprios conceitos de domínio e imagem se mostram como fatores de conflito potencial.

Messias e Brandember (2015), nas considerações finais, comentam que, com a realização da sua pesquisa, foi possível investigar os elementos que compõem a Imagem Conceitual de estudantes universitários sobre o limite de função, inferidos a partir da evocação de aspectos relacionados a esse conceito. Nesse sentido, observaram que as Imagens Conceituais dos sujeitos investigados se pautaram, sobretudo, nas duas evocações a seguir:

1-[E1]: A ideia de limite como sendo um valor a ser alcançado pela função com constantes aproximações. Assim, ele entende que o valor do limite deve coincidir com $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
2- [E2]: A existência do limite em um ponto p depende da continuidade em p.

Para os referidos autores, os resultados obtidos permitiram evidenciar que, de fato, os estudantes pesquisados relacionavam o conceito de limites de função com interpretações estáticas e/ou dinâmicas que, em alguns momentos, constituíram-se como fatores de conflito potencial, principalmente no que concerne à possiblidade do valor do limite poder ou não ser alcançado.

Ainda, segundo Messias e Brandmberg (2015), as evocações de [E1] e [E2] os permitiram mostrar que algumas das Imagens Conceituais evocadas pelos sujeitos investigados não se fizeram coerentes com a Definição Conceitual, fato que os influenciou a construir uma Definição Conceitual pessoal diferente da definição conceitual formal de limite de função.

Messias e Brandemberg (2015) consideram os resultados obtidos na investigação relevantes no sentido de que permitem verificar alguns conflitos que permeiam a construção de Imagens Conceituais dos estudantes em relação ao conceito de limite.

Esse artigo poderá contribuir com a nossa tese nas análises e elaboração das atividades que serão fundamentadas nos construtos teóricos e nos processos desenvolvidos no âmbito do Pensamento Matemático Avançado de Tall e Vinner (2002). Também nos dará suporte para desenvolver nossas questões relacionadas ao uso do *software GeoGebra*, uma vez que ela faz uso do GeoGebra no desenvolvimento.

2.8 Artigo Soares e Cury (2017)

Aqui, discorreremos sobre o artigo de Soares e Cury (2017) intitulado "O conteúdo de Limite em um curso de Licenciatura em Matemática: uma pesquisa à luz dos Três Mundos da Matemática".

O objetivo do artigo era analisar o conceito de limite de uma função apresentado por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Primeiro, os autores fizeram uma análise da introdução do conceito de limites em livros didáticos e citaram como exemplo Thomas (2002) e Anton, Bivens e Davis (2007). Para Soares e Cury (2017), a noção de limite é uma parte do Cálculo que mais gera dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. As pesquisas desenvolvidas por Artigue *et al.* (1995), Resende (2003), Zuchi e Gonçalves (2003), Cavasotto e Viali (2011), Cunha e Pinto (2014, *apud* SOARES e CURY, 2017) investigam se os problemas podem estar ligados à noção intuitiva, à definição formal, ao cálculo de limites ou à metodologia empregada pelos professores, entre outros fatores.

Por outro lado, Soares e Cury (2017) entendem que, na formação de professores de matemática, o ensino de Cálculo poderá oportunizá-los a entender conceitos, tais como: a noção de infinito, os limites de funções, as áreas de figuras planas e outros que estão relacionados com o conteúdo de matemática básica. Assim, segundo eles, a avaliação dos conhecimentos de licenciandos em matemática sobre tópicos de Cálculo, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática, pode trazer subsídios para o planejamento das atividades específicas de um curso de formação de professores de matemática.

Soares e Cury (2017) citam o termo “imagem de conceito” (citado em pesquisas anteriores) e ilustram que, à menção da palavra "limite", um aluno pode evocar uma representação gráfica, uma maneira de calcular um limite em um ponto, mas não necessariamente a definição formal. Essa é a maneira que o aluno expressa "sua" definição de limite de uma função em um ponto, mas não necessariamente a definição formal de limite. Para a definição de conceito, pode ser "uma reconstrução pessoal de uma definição, feita por um aluno. É, então, a forma verbal que o estudante usa para sua própria explicação sobre sua imagem (evocada) de conceito" (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Os autores citam os termos "já-encontrado" e "a-encontrar", os quais aparecem nos trabalhos de Tall e colaboradores. Por exemplo, Tall e Lima (2008, p. 4) definem:

> [...] “já-encontrado” como “um constructo mental que um indivíduo usa em dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente” e consideram que um “a-encontrado” pode influenciar a aprendizagem de forma positiva ou negativa. (TALL; LIMA, 2008, p. 4 *apud* SOARES e CURY, 2017)

Como exemplo, os autores citam que o conhecimento já encontrado da fatoração do polinômio $x^2 - 3x + 2$ dada por $(x-1)(x-2)$ auxilia o aluno no cálculo do $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$.

Já o termo "a-encontrar", Lima e Tall (2008, *apud* SOARES e CURY, 2017) o usam para denotar uma experiência encontrada posteriormente e que pode afetar a memória de conhecimentos prévios. Todavia, uma experiência pode ser uma influência positiva ou negativa. Lima (2007, *apud* SOARES e CURY, 2017) traz um exemplo da experiência negativa: se o aluno aprende que a equação $x^2 = a,$ com $a \neq 0$, pode ser transformada em $x = \pm\sqrt{a}$ para expressar suas duas raízes reais, então ele pode concluir que $\sqrt{b^2} = \pm b,$ excluindo o conhecimento anterior de que a extração da raiz quadrada de b^2 em $\mathbb{R}$ admite apenas o valor positivo.

Em 2004, para desenvolver essa teoria, Tall (2004, apud SOARES e CURY, 2017) revisitou discussões do grupo PME (Psicologia da Educação Matemática), passando pelas ideias de Piaget, Bruner, Skemp, Van Hiele, Dubinsk e Lakoff, que o levaram ao que chamou de "possível caracterização do crescimento cognitivo" (p.285). Esse autor buscou estabelecer uma teoria de desenvolvimento cognitivo, do recém-nascido ao adulto maduro, englobando os três mundos do pensamento matemático, distintos, mas inter-relacionados, a saber:

1- O mundo conceitual corporificado "diz respeito às percepções acerca do mundo e o pensamento a respeito das coisas que são percebidas e sentidas não apenas no mundo físico, mas em um mundo mental de significados".

2- O mundo proceitual simbólico "é o mundo dos símbolos que usamos para cálculo e manipulação em Aritmética, Álgebra, Cálculo, etc.", que começa "com ações [...] que são encapsuladas como conceitos pelo uso dos símbolos, que nos permitem mudar sem esforço dos processos de fazer matemática aos conceitos para pensá-la".

3- O mundo formal axiomático "é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são usadas com axiomas para especificar as estruturas matemáticas (tais como grupos, espaço vetorial, espaço topológico e assim por diante)" (p.285).

Lima (2013, *apud* SOARES; CURY, 2017) comenta que, conforme Tall (2013, *apud* SOARES; CURY, 2017), "esses meios de se pensar em matemática não são estanques nem hierárquicos, mas podem se desenvolver com o tempo e, concomitantemente, tornando-se mais sofisticados a partir do uso da linguagem". Tall (2013, p.67) reafirma que

> O foco na corporificação do mundo real pode fazer sentido para os aprendizes iniciantes, dando significado às operações simbólicas, mas conteúdos matemáticos mais sofisticados exigem novas maneiras de pensar. Assim, no trabalho com estudantes de cursos superiores, especialmente com licenciandos em Matemática, é esperado que essa jornada pelos três mundos seja completa, chegando às definições e demonstrações formais. (TALL, 2013, p. 66)

A pesquisa desse artigo foi dividida em três etapas, com o intuito de facilitar a coleta e análise dos dados, as quais são apresentadas a seguir:

1ª) Foi feita análise dos livros didáticos sobre a abordagem do conceito de limite de uma função, em livros de cálculo das ementas dos cursos de licenciatura envolvidos na pesquisa, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática.

2ª) Um mapeamento de artigos sobre as ideias de Tall em periódicos brasileiros, dissertações e teses.

3) Aplicação de testes sobre limites de funções a alunos de dois cursos de Engenharia civil das IES envolvidas na investigação. Em seguida, foram entrevistados dois docentes de Cálculo I das IES envolvidas.

Soares e Cury (2017) enfatizam que a pesquisa foi desenvolvida com 14 alunos da Engenharia Civil, os quais foram escolhidos por conveniência entre os que tinham cursado Cálculo I e se dispuseram a responder o teste.

Também foram analisados os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) dos cursos das IES envolvidas. A partir dessa análise, foi observado que os livros de Leithold (1994), Anton, Bivens e Davis (2007) e Guidorizzi (2010) foram as bibliografias básicas comuns recomendadas para a disciplina de Cálculo I.

No livro de Leithold (1994), os autores descrevem como desenvolver a abordagem sobre limite ao esclarecerem que

> A introdução do limite é feita por meio de um exemplo específico, mostrando sua obtenção de forma intuitiva, priorizando os aspectos visuais (gráficos e tabelas), para exemplificar a aproximação do valor da função no ponto escolhido e a inserção das letras gregas ε e δ." (SOARES; CURY, 2017, p. 69)

Eles comentam que os exercícios apresentam questões cujo objetivo é calcular o valor de δ para cada um dos limites propostos e argumentam sobre a descoberta desse valor. Segundo os autores,

> Um aluno que resolve esses exercícios pode desenvolver características do mundo proceitual simbólico e do axiomático formal, relacionando as construções com os valores de ε *e* δ e desenvolvendo aspectos mais formais do que a aplicação do algoritmo para o cálculo do limite. (SOARES; CURY, 2017, p. 69)

O livro de Anton, Bivens e Davis (2007) também introduz o conceito de limite por meio de resolução de um exemplo e traz outros elementos, como o cálculo do valor de uma função em um determinado ponto. Na análise de Soares e Cury (2017), tanto no livro de Leithold (1994) quanto no de Anton, Bivens e Davis (2007), é necessário que

> O aluno consiga relacionar o comportamento da função a partir da visualização do seu gráfico e da tabela, sendo esperado, então, que seja capaz de compreender essas duas maneiras distintas de representar a função. (SOARES e CURY, 2017, p. 70)

Quanto aos exercícios, é priorizada a construção gráfica da função e a obtenção do limite por meio de gráfico. Para Soares e Cury,

> O aluno que estuda pelo livro de Anton, Bivens e Davis (2007) pode desenvolver características dos mundos conceitual corporificado e proceitual simbólico, bem como do mundo axiomático formal. (SOARES e CURY, 2017, p. 70)

Já no livro de Guidorizzi (2010), o conceito de limites está ligado ao conceito de continuidade e é feito de maneira intuitiva, relacionando à visualização gráfica, por meio de aproximação em torno do limite da função. Os exercícios, segundo Soares e Cury (2017), exploram as definições de limite e continuidade de forma intuitiva e somente no item 3.3 é apresentada a definição formal. Como afirmam Soares e Cury, o aluno que estuda o conceito de limite por este livro pode desenvolver características dos três mundos.

Diante do exposto, os autores concluíram que

> Pôde-se notar que em alguns exercícios há a intenção de reproduzir mecanicamente o algoritmo de resolução de determinado limite e, nesse sentido, pode-se questionar a influência dessa abordagem na compreensão dos conceitos pelos futuros professores de Matemática: terão eles oportunidade de desenvolver características do mundo axiomático formal em sua apropriação do conceito de limite? Considera-se que formalização de conceitos é fundamental para que esses futuros professores tenham clareza sobre as justificativas de muitos procedimentos matemáticos que vão explicar, futuramente, em suas aulas da escola básica. (SOARES; CURY, 2017, p. 69)

Após a análise dos livros, Soares e Cury (2017) discorrem sobre o público-alvo participante da pesquisa, o qual é composto por 14 alunos do curso de Matemática Licenciatura, futuros professores, de duas IES distintas e sobre as 7 questões do teste que serão aplicadas. As duas primeiras questões envolvem justificativas sobre as definições apresentadas e sobre os exemplos que melhor introduzem a noção de limite, na opinião dos respondentes. Para as cinco questões restantes, solicitam cálculo de limite ou aplicações do conceito, tendo melhor abordagem para o ensino desses conteúdos, tanto em tópicos da educação básica quanto do ensino superior. Neste texto, é analisada a questão de nº1, cujo foco de investigação é o conceito de limite. Eis o enunciado:

> No decorrer do trabalho com as disciplinas de Cálculo, você, provavelmente, foi apresentado ao conceito de limite de uma função, seja por aspectos visuais, simbólicos, gráficos ou por definições formais. Levando em consideração a importância desse conceito para o estudo do Cálculo. Explique o que significa dizer que, dada uma função f, o limite de $f(x)$, quando x tende para um número a, é igual a L. (SOARES e CURY, p.73)

A1: *O limite de uma função é o valor ao qual essa função se aproxima, tanto pela direita quanto pela esquerda em um gráfico.*

A2: *O limite de uma função é o valor pelo qual a mesma se aproxima do limite, a depender da variável que está tendendo. Ou seja, esse valor sempre chegará próximo do limite, tanto pelo limite à direita, quanto à esquerda.*

Soares e Cury (2017) analisaram as respostas e concluíram que

> É possível perceber que esses alunos compreendem a existência do limite de uma função em um ponto por meio da existência e igualdade dos limites laterais, mas, mesmo assim, não conseguem expressar o conceito de maneira matematicamente correta. Utilizam a linguagem natural e, como as respostas são pautadas na existência dos limites laterais e da aproximação, essas apresentam características do mundo conceitual corporificado. (SOARES; CURY, 2017, p.73)

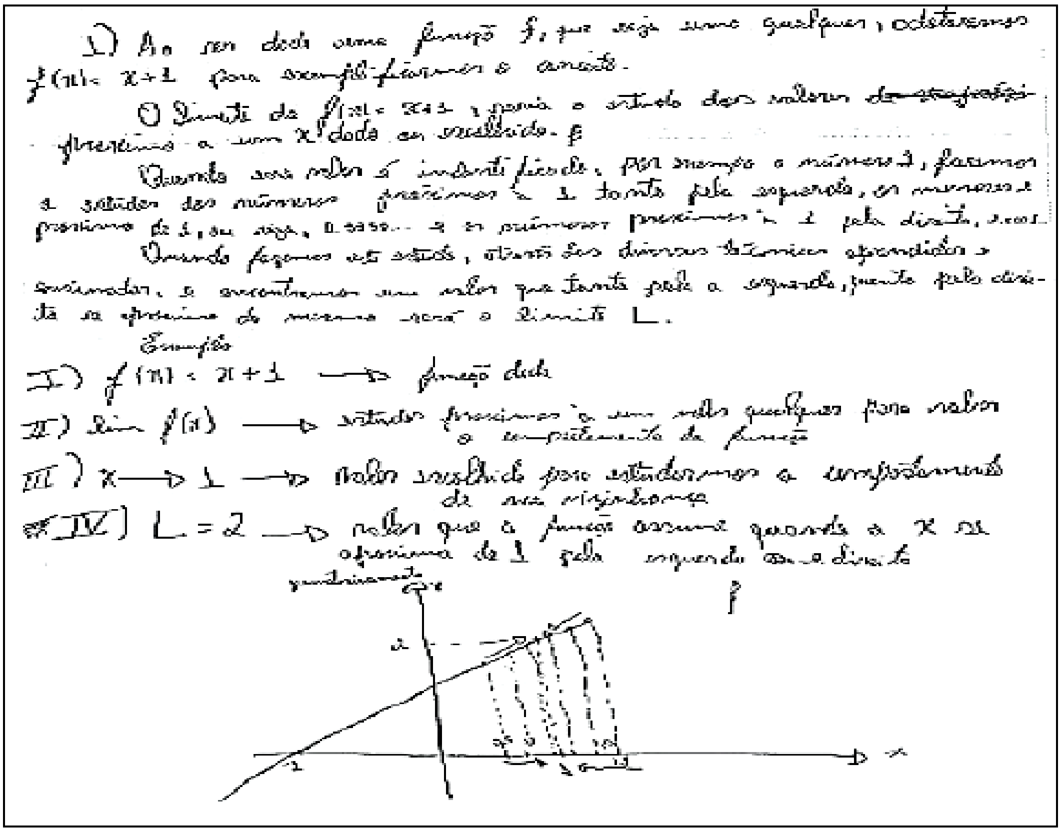
A3: *Significa dizer que, quando um número x está muito próximo do número a estes dois da reta real, a imagem f(x) estará muito próxima do número L. A cada x que fica a uma distância de a, essa distância fica menor e menor, perto de zero, enquanto a distância de f(x) a L fica também menor e menor, ficando perto do zero.*

Segue a análise da resposta desse aluno:

> Esse aluno parece compreender o conceito de limite de uma função em um ponto baseado nas distâncias entre valores da variável x e das suas imagens pela *f.* Utiliza linguagem natural para definir limite e destaca a proximidade dos valores do ponto e do limite. A construção do conceito de limite desse aluno apresenta características do mundo conceitual corporificado. (SOARES; CURY, 2017, p.73)

A4: Este tentou dar uma resposta mais rebuscada, mas não conseguiu responder totalmente ao que foi proposto na pergunta, conforme Figura 21:

Figura 21 - Resposta aluno A4



Fonte: Soares e Cury (2017, p.74)

Para Soares e Cury (2017),

> Essa resposta, ainda que traga elementos dos mundos conceitual corporificado e proceitual simbólico, mostra que o aluno precisa de um exemplo para conseguir apresentar o que entende por limite de uma função em um ponto, não atingindo, portanto, o mundo axiomático formal. (SOARES E CURY, 2017, p.74)

A6: Significa dizer que, quando os limites pela direita e pela esquerda "vão" para um mesmo valor, quando existem esses limites laterais, vai existir o limite, caso contrário, não. Portanto, limite significa verificar o "comportamento" da função f (x) tende ao ponto a.

Os autores analisaram que:

> Novamente a definição de limite de uma função em um ponto baseia-se na existência dos limites laterais. A linguagem é natural, evidenciando pouco desenvolvimento de uma linguagem matemática correta. A resposta é confusa, quando o aluno indica que "o "comportamento" da função $f(x)$ tende ao ponto a, pois aparenta ter dificuldade de perceber qual dos pontos pertence ao domínio da função e qual pertence à imagem. Sua resposta tem apenas características do mundo conceitual corporificado. (SOARES e CURY, 2017, p. 74)

A7: Se houver uma função qualquer, o limite dessa função vai ser quando o x tender para um número é igual a L.

Como podemos perceber, esse aluno não demonstra ter o conhecimento mínimo de limite. Conforme os autores,

> Nesse caso, o aluno mostra não ter a noção de limite de uma função, além de confundir a variável do domínio com a da imagem; sua resposta, em linguagem natural incorreta, não atende sequer às características mínimas do mundo corporificado. (SOARES E CURY,2017, p.75)

A10: Se uma função tem determinado limite, com x tendendo a um valor, seu limite... Infelizmente cheguei à conclusão que não consigo entender parte de limites.

Para esse aluno, a conclusão foi:

> Esse aluno tenta lembrar a definição, mas nota que não consegue expressá-la, nem em linguagem natural. Assim, justifica a falta de resposta pela incompreensão do conceito. (SOARES E CURY, 2017, p.76)

A11: Para que $limx \rightarrow ax = L$ *exista,* $lim x - x = limx + \rightarrow ax = L$ *deve ser verdade.*

A12: O limite da função f(x), quando x tende a um número real, se e somente se, os números reais de f(x) para os valores de x, que permanecem mais próximos de f(x).

De acordo com Soares e Cury (2017),

> Essas duas respostas mostram um desconhecimento do significado de limite de uma função em um ponto; A11 usa símbolos, mas não traz a definição, apenas reproduz, de forma incompleta, o que Anton, Bivens e Davis (2007, p. 107) chamam de relação entre limites laterais e bilaterais. Sua resposta tem características do mundo operacional simbólico. Já o aluno A12 tenta usar uma linguagem supostamente matemática ("se e somente se", "x tende a um número real"), mas mostra não entender o significado de limite de uma função em um ponto, porque a frase fica sem sentido. (SOARES E CURY, 2017, p.76)

Para os autores, a definição de limites pode ser apresentada em um primeiro momento na forma intuitiva, mas depois tem que ser formalizada. Inclusive citam que, em um dos livros analisados, primeiro é apresentada a definição de limite de uma maneira informal: "Se os valores de $f(x)$ puderem se tornar tão próximos quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a), então escreveremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$", expressão que também pode ser escrita como "$f(x) \to L$ quando $x \to a$" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 104). Assim, os autores exploram os limites laterais e, só depois, apresentam a definição formal:

> Seja $f(x)$ definida em todo x de algum intervalo aberto que contenha o número a, com a possível exceção de que $f(x)$ não precisa estar definida em a. Escreveremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, pudermos

> encontrar um número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ se $0 < |x - a| < \delta$. (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p.135).

Como destacam Soares e Cury (2017), ainda que, metodologicamente, seja conveniente passar pelas características corporificadas e simbólicas da definição de limite, antes da apresentação da definição formal, é esperado que essa jornada pelos três mundos seja completa, como sugere Tall (2013, *apud* SOARES E CURY, 2017).

Nas considerações finais, os autores comentam que os livros didáticos analisados e seus capítulos introdutórios fazem apelo à característica dos Três Mundos da Matemática, buscando exemplificar as afirmativas intuitivas por meio de gráficos ou tabelas de valores de uma função, usando simbologia matemática na descrição das construções, para finalmente abordar a definição formal de limite de uma função em um ponto.

No entanto, ao analisarmos as respostas dos licenciandos, é possível notarmos suas dificuldades na conceituação de limite. De alunos que já haviam concluído Cálculo I há pouco tempo e estavam cursando outras disciplinas de Cálculo que retomavam a definição formal, era esperado que apresentassem a definição de limite de uma função em um ponto com características do mundo corporificado, simbólico e formal, pois a passagem pelos três mundos favorece a compreensão dos conceitos e traz ideia para o trabalho na escola básica, em conteúdo que tem a noção de limites como pressuposto. Porém, as dificuldades, de linguagem natural ou matemática, não nos permitem considerar que o conceito de limite seja um "já-encontrado" e que possa influenciar positivamente na aprendizagem de outros conteúdos.

Os autores sugerem que tanto os licenciandos dos cursos de matemática quanto os pesquisadores interessados em tais cursos aprofundem os estudos sobre as ideias de Tall, especialmente sobres os Três Mundos da Matemática. Nessa direção, seria desejável elaborar propostas de novas abordagens para os conceitos de limite, continuidade e derivada de uma função, com apelo a características dos mundos corporificado, simbólico e formal, a fim de auxiliar os alunos no desenvolvimento de imagens de conceito que sejam compatíveis com as que são aceitas pela comunidade matemática.

Na nossa proposta de pesquisa, estamos desenvolvendo atividades para trabalhar com o conceito de limites, utilizando *applets* do GeoGebra, passando Pensamento Matemático Avançado. E esse artigo pode nos guiar nas análises das atividades que estamos desenvolvendo.

A seguir, abordaremos sobre o artigo de Fonseca e Henriques (2018).

2.9 Artigo Fonseca e Henriques (2018)

O Artigo de Fonseca e Henriques (2018) apresenta um estudo sobre a compreensão do conceito de limite de uma função.

Fonseca e Henriques (2018) relatam que a compreensão de limites de uma função tem tido lugar de destaque em extensa investigação na Educação Matemática em resposta às inúmeras dificuldades evidenciadas por estudantes de diversos níveis de ensino, na aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e de muitos outros que requerem conhecimento conceitual de limite. Eles, ainda, citam pesquisadores, como Domingos (2003), Juter (2006, *apud* FONSECA; HENRIQUES, 2018), Karatas (2011), Swinyard e Larsen (2012), que têm desenvolvido estudos nessa área.

Como salienta Fonseca e Henriques (2018), o foco desses estudos tem sido em maior parte na compreensão informal de limite, no que diz respeito às concepções errôneas mais comuns de estudantes e futuros professores, e em abordagens didáticas do conceito, havendo poucas evidências empíricas sobre como os estudantes formalizam as suas noções intuitivas e atribuem significado à definição formal de limite (SWINYARD, LARSEN, 2012).

Segundo os autores, este artigo tem como pretensão contribuir para a escassa investigação sobre a eficácia de atividades desenhadas para ajudar os estudantes a criar compreensões mais robustas da definição formal de limite. E apresenta como objetivo analisar que compreensão evidenciam os estudantes de um curso de formação inicial de professores de matemática, no Brasil, sobre a definição formal de limites de uma função num ponto, no decorrer da intervenção didática descrita.

Fonseca e Henriques (2018) formularam e procuraram responder às seguintes questões de pesquisa:

- Quais os significados que os estudantes atribuem ao limite de uma função no ponto quando atribuem ao limite de uma função no ponto quando explicam/interpretam a sua definição formal?

- Como é que os estudantes representam o limite em diferentes representações, cujos registros assentam nas simbologias da sua definição formal?

- Que conhecimentos mobilizam para resolver problemas que envolvem a definição formal?

De acordo com Domingos (2003), a compreensão é reconhecidamente um dos grandes objetivos da Educação Matemática. No que diz respeito à NTCM (1991), é enfatizada a importância de uma aprendizagem matemática com compreensão. Para Domingos (2003), os estudantes que aprendem com compreensão são capazes de explicar significados associados aos conceitos matemáticos, de justificar procedimentos, de aplicar os conhecimentos adquiridos no aprendizado de novos conceitos e de resolver problemas matemáticos.

Vários autores têm abordado a compreensão com o objetivo de explicar a construção do conhecimento. Por exemplo, Skemp (2006), como citado anteriormente, apresenta a compreensão instrumental e relacional.

Conforme Fonseca e Henriques,

> É esta estrutura conceitual que permite uma aprendizagem com compreensão e, por isso, pesquisas anteriores sobre a aprendizagem do limite têm indicado que os significados a ele atribuídos, o uso de suas representações e resolução de problemas que o envolve, constituem elementos que apoiam a investigação sobre a suas compreensões pelos estudantes (FONSECA E HENRIQUES, 2018, p.1032).

Quanto aos significados e a compreensão de limite os estudos têm se apoiado, frequentemente, na teoria de Tall e Vinner (1981) do Conceito Imagem e Conceito Definição.

Domingos (2003) afirma que os significados são usados para analisar a compreensão dos estudantes por resultarem de aspectos por eles mobilizados dos seus Conceitos-Imagem evocado e Conceito-Definição. Tais significados podem ser caracterizados por Conceitos-Imagem corretos e apropriados à situação em questão, como por exemplo, a concepção do limite como resultado da implicação baseada na noção de vizinhança $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$, que é necessária à compreensão da definição formal de limite.

Entretanto, os significados podem não existir ou, se existirem, serem conflitantes, quando as concepções dos estudantes são evocadas do Conceito-Imagem de forma desconexa com o Conceito-Definição (TALL; VINNER,1981). Ressaltamos que esses mesmos constructos teóricos serão usados na nossa tese, porém com o nome de Imagem Conceitual e Definição Conceitual- revelando, por exemplo, compreensão do uso ε e δ ou de sua ordem na definição formal. Diante desse cenário, torna-se necessário o envolvimento do aluno na construção das suas compreensões, relacionando as noções intuitiva e formal de limite de modo a dar sentido à notação algébrica presente na definição formal de limite, isto é, formalizar a sua compreensão informal de limite (SWINYARD; LARSEN, 2012).

Em relação às representações na compreensão de limites, Fonseca e Henriques (2018) consideram essencial, uma vez que a comunicação em matemática se estabelece com base em representações, que por sua vez são fundamentais na construção de conceitos matemáticos pelos estudantes, existindo evidências de uma relação entre o seu desempenho e as representações por eles usadas (DUVAL,2003, KARATAS; GUEVE; CEKMEZ, 2011, *apud* FONSECA; HENRIQUES 2018).

Para Duval (2003), o uso de diversas representações ajuda os alunos a ter uma ideia mais completa de um conceito matemático. Como ressalta o autor,

> A capacidade de reconhecer e representar o limite, nas suas diferentes representações, é considerada um requisito para a sua compreensão, sendo as representações verbais, numérica, algébrica e geométricas as mais consideradas no seu ensino (DUVAL 2006, *apud* FONSECA e HENRIQUES, 2018, p.1033).

A seguir apresentamos um quadro sintetizando alguns exemplos de representações, conforme Quadro 6.

Quadro 6 - Representações Semióticas

Representações	
Verbal	Utiliza a linguagem coloquial ou natural. "se aproxima", "tende" e "tão pequeno quanto se queira"
Numérica	Quando se usa sequência de números para descrever aproximações. $x \to x_0$ e $f(x) \to L$
Algébricas	Expressões matemáticas, como: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que se $x \in \mathrm{D}_f$ e $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ então $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
Geométricas	Representações gráficas apoiadas no sistema cartesiano, contendo registros indicativos das variáveis do limite ($(x \to x_0 \,/\, f(x) \to \mathrm{L})$ por meio de setas, intervalos abertos ou vizinhança.

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo Domingos, (2003), Tall, Smith e Piex (2008, *apud* FONSECA e HENRIQUES, 2018), o uso das diferentes representações do limite, presentes nas simbologias da sua definição formal, pode contribuir para a compreensão dessa definição, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de pensar abstratamente e de construir significados adequados sobre o limite.

Na concepção de Domingos (2003),

> Um estudante que é capaz de operar com diversas representações e estabelecer conexões entre os seus registros, explicando o significado da simbologias

> $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, reconhecendo o papel dos quantificadores δ e ε nesses registros e reconhecendo o limite como resultado da implicação $\left(x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)\right)$, evidencia ter uma concepção da definição formal, necessária à compreensão de limite. (FONSECA e HENRIQUES, 2018, p.1034)

Fonseca e Henriques (2018), fundamentados em Tall (1991), afirmam que a resolução de problemas matemáticos envolve atividades criativas de formulação de conjecturas e sequências de testar, modificar e redefinir conjecturas até ser possível produzir uma demonstração formal de um teorema ou propriedade. No entanto, é comumente aceite que os estudantes não "sabem" as definições que precisam para realizar uma tarefa matemática que requeira o uso da definição do limite, como a demonstração de um teorema, para a qual a sua memorização não é suficiente (EWARDS; WARD, 2008, *apud* FONSECA; HENRIQUES, 2018).

Desse modo, a aprendizagem com compreensão da definição formal de limite evidencia-se quando o estudante é capaz de:

> 1) Reconhecer explicações corretas das simbologias quando representado algebricamente pela sua definição formal ou geometricamente recorrendo a registros que envolvem a simbologia contida nesta definição, atribuindo-lhe significado correto e apropriado ao contexto em questão;
> 2) De apresentar explicações corretas das simbologias $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, dos quantificadores ($\forall$ e $\exists$) e ordem, na referida definição formal;
> 3) De representar geometricamente o limite a partir da conversão da sua representação algébrica, expressa pela definição formal;
> 4) De representar corretamente o limite por meio de sua definição formal;
> 5) De mobilizar conhecimentos sobre a definição formal de limites e aplicá-los corretamente na validação do limite e na análise de erros. (FONSECA e HENRIQUES, 2018, p. 1035)

Para realização das atividades, os autores contaram com público-alvo formado por 19 estudantes iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Foram desenvolvidas 4 tarefas exploratórias $(T_1, T_2, T_3$ e $T_4)$ da experiência de ensino que visa promover a aprendizagem com compreensão da definição formal de limite de uma função num ponto.

Os autores apresentam a análise dos dados relativos à compreensão que os estudantes evidenciam sobre a definição formal de limites num ponto, baseada em um referencial de três categorias: os significados, as representações e a resolução de problemas, que são consideradas no quadro teórico como componente dessa compreensão, conforme Quadro 7 a seguir.

Quadro 7 - Categoria de análise de dados e respectivos descritores

Compreensão da Definição Formal	
Significados	Aspectos do Conceito-Imagem evocado e Conceito-Definição de limite, mobilizados pelos estudantes, revelam a sua concepção sobre este conceito matemático.
Representações	Representações usadas pelos estudantes para reconhecer o limite algébrica e geometricamente, cujos registros assentam nas simbologias da definição formal, e para realizar transformações (tratamentos e conversões) entre elas.
Resolução de problemas	Conhecimentos mobilizados pelos estudantes para resolver problema envolvendo a definição formal de limite, nomeadamente, a análise de erros e a validação de conjecturas matemáticas.

Fonte: Dados da pesquisa de Fonseca e Henriques (2017, p. 1036)

Como destacam Fonseca e Henriques (2018), os significados que os estudantes atribuem ao limite foram evidenciados na questão 1 das tarefas 5 e 15, nas quais foi solicitado que explicassem o significado da expressão $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que se $x \in D$ e $|x-2| < \delta$ então $|f(x)-4| < \varepsilon$, que define formalmente o limite; e na questão 5 da tarefa 5, quando justificam a existência do $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ representado geometricamente com elementos baseados na simbologia dessa definição.

De acordo com os autores, três grupos, na questão 1da tarefas 5, e quatro grupos, na questão 1 da tarefa 15, apresentaram Conceito-Imagem associados ao significado de limite como resultado de um processo de aproximação ao objeto. Nas respostas, termos como "tende a", "se aproxima de" e "aproximando-se" são usados para traduzir as aproximações simultâneas de $|x -2| < \delta$ e $|f(x) - 4| < \varepsilon$, conforme exemplificado na resposta de Joelson e Jorge (questão 1da tarefas 5): "Para todo valor de $x \to x_0 = 2\ f(x)$ se aproxima de 4"; e de Luiz e Rui, na questão 1da tarefa 15, "Significa que quando x tende a 2, a função tende a 4. Logo $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$" (FONSECA e HENRIQUES, 2018, p. 1034).

Os estudantes foram desafiados, segundo os autores, a reconhecer o limite quando representado, simbolicamente, pela sua definição formal e geometricamente com registros baseados na simbologia dessa definição.

Como explicam os autores, oito dos nove grupos, na questão 1da tarefas 5, reconheceram que a expressão apresentada no enunciado "$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $|x - 2| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$

traduzia o limite. Eles recorreram a linguagem natural (representação verbal), dando explicações adequadas e elucidativas das simbologias $|x - 2| < \delta$ e $|f(x) - 4| < \varepsilon$ para traduzir o limite, complementando-a com simbologia $\lim_{x \to 2} f\ (x) = 4$ para expressar o seu valor, conforme exemplificado nas resposta de Adilson e Soares: "Significa que $\lim_{x \to 2} f\ (x) = 4$ onde a expressão $|x - 2| < \delta$ é a vizinhança em torno de x_0 e δ é o raio, e $|f(x) - 4| < \varepsilon$ é a vizinhança em torno de L e ε é o raio" .

E, por fim, nas questões 2 e 3- nas tarefas 5 e 15- respectivamente, em que os estudantes eram solicitados a traduzir geometricamente o limite expresso pela sua definição formal, oito grupos conseguiram representá-lo geometricamente e três grupos representaram apenas o caso em que $L = f(x_0)$. Seis grupos, na questão 3-tarefa 5- como não havia informação sobre a existência de $f(x_0)$, representaram os três possíveis casos de limites.

De acordo com o autor, esses grupos foram capazes de converter a representação algébrica para geométrica e de explicar as variáveis relacionadas aos registros convertidos.

Na questão 2, tarefa 8, os estudantes deveriam analisar a expressão algébrica apresentada em cada um de seus 4 itens e associá-la a uma das afirmações: 1) definição formal de $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$; 2) $\lim_{x \to 2} f\ (x) = -\infty$; 3) não corresponde à definição formal de nenhum dos anteriores. Segundo os autores, nove grupos acertaram a todos os itens, mobilizando conhecimento sobre a definição formal de limite, particularmente os significados dos ε - δ e da sua ordem.

Como ressaltam Fonseca e Henriques (2018), ainda que a definição de limites seja considerada de difícil aprendizagem para os estudantes dos cursos de introdução ao Cálculo, os elementos que emergiram desse estudo dão uma boa indicação de que a exploração, em sala de aula, dos significados da simbologia nela presentes, envolvendo o uso de diferentes representações do limite e sua aplicação na resolução de problemas, pode potencializar a compreensão da definição formal de limites.

Este artigo contribuirá para nossa pesquisa no entendimento sobre compreensão de limite do ponto de vista do PMA, de acordo com Domingos (2003), e será útil para as elaborações de nossas atividades.

Para concluir, na pesquisa desenvolvida por Tall e Vinner (1981), eles começam relatando, com uma explicação informal, que o limite de uma função é apresentado de maneira intuitiva. E ilustram sua afirmação apontando que, em várias literaturas, o limite é abordado inicialmente por meio de tabelas e aproximações. Em outro momento, o limite é apresentado como diferenciação e, a partir do momento em que são deduzidas as técnicas de derivação, o limite passa a não ser mais usado.

Dessa maneira, é dado maior ênfase na noção intuitiva, levando o aluno a formar uma Imagem Conceitual restrita do limite considerando apenas o aspecto dinâmico $x \to a, f(x) \to$ c. O autor aponta que esse tipo de raciocínio pode levar os alunos a considerar $f(x) \neq c$, o que pode gerar um conflito potencial ao definirem o limite de uma função.

Tall e Vinner (1981) mostram que a Imagem Conceitual de limite formada pelos alunos é tida como sensação de movimento, que é tão forte que de um questionário aplicado para alunos do 1º ano para escreverem a definição de $\lim_{x \to a} f(x) = c$, se conhecessem alguma, de 18 alunos que tentaram escrever utilizando a definição formal apenas 4 conseguiram, mas, para a abordagem dinâmica de 31 alunos, um não conseguiu. Outro questionamento era para que explicassem o que significava $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$. Novamente prevaleceu a ideia de movimento, uma vez que a maioria usou dos termos de aproximar para explicar o significado do limite, enquanto outros usaram outros métodos como, por exemplo, a regra de L'Hospital. Nessa direção, Tall e Vinner (1981) afirmam que os alunos da pesquisa evocaram a Imagem Conceitual de limite, associada à ideia de aproximação, e não o conceito de definição formal.

Salientamos que essa pesquisa colaborou na elaboração da Sequência de Atividades 1 e para analisarmos qual a Imagem Conceitual e Definição Conceitual que a dupla apresenta sobre o conceito de limite de uma função nessa e nas demais atividades da pesquisa.

A pesquisa de Cornu (2002) dá conta de que as concepções adquiridas antes do ensino formal, as quais ele denominou de concepções espontâneas, não desaparecem mesmo pelo fato de ter ensinado um novo conhecimento. Elas podem, quando misturadas com um novo conhecimento adquirido, modificar e adaptar para formar concepções pessoais.

No caso de limite, a expressão "tende para" e a palavra "limite" já têm significado antes do conceito ser ensinado e esse significado continua mesmo depois de ser ensinado ou ter contato com a definição formal. Isso reforça o que Tall e Vinner (1981) afirmaram sobre o poder que o conceito dinâmico de limite tem sobre o aluno. Cornu (2002) verificou que a palavra limite não apresentava um significado unânime para os alunos. Essa palavra variava de significado de aluno para aluno, como por exemplo: "um ponto do qual nos aproximamos sem o atingir"; "um ponto do qual os aproximamos e o atingimos". Esse último foi apontado por Tall e Vinner (1981) como possível potencial de conflito.

Nesse sentido, Cornu (2002) infere que, devido à grande variedade de noções espontâneas e a uma conscientização crescente do formalismo, o indivíduo pode, facilmente, criar na sua mente ideias contraditórias que o levem a formar uma Imagem Conceitual que contenha fatores de conflito potencial.

Cornu (2002) aponta que os obstáculos cognitivos ajudam a identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem e servem também para determinar estratégias de ensino. Também destaca que outros obstáculos, como os genéticos e os psicológicos, ocorrem com o desenvolvimento do aluno. Os obstáculos didáticos ocorrem devido à natureza do ensino e do professor; e os obstáculos epistemológicos, devido à natureza do conceito matemático em si.

Um problema apontado por Cornu (2002) é o contexto em que a aprendizagem ocorre. Para ele, o aprendizado precisa ocorrer em um contexto de solução de problemas. A noção de limite, por exemplo, deveria ser usada para resolver problemas específicos, sendo importante apesentar situações em que o aluno possa vê-lo como uma ferramenta útil. Nesse contexto, Cornu (2002) explica que as tecnologias podem ser um bom aliado para o estudo do limite e que o uso de um *software* projetado dentro de uma estratégia de ensino pode ser importante no conceito a ser adquirido.

Como afirma Cornu (2002), é importante que se considere a ordem como os limites são apresentados e que não seja uma forma matemática lógica. Mas que leve em consideração a apropriação cognitiva da sequência do currículo e dos problemas a serem resolvidos. Ele acredita que, atualmente, uma transição ao PMA com uma sequência puramente lógica parece ser insuficiente. E conclui que concepções espontâneas, Imagens Conceituais, abstração reflexiva e composição genética são ferramentas conceituais que podem auxiliar no desenvolvimento de estratégias pedagógicas.

A pesquisa em questão nos auxiliou na elaboração das Sequências de Atividades 2, 3, 4, 5, que visaram ao desenvolvimento da definição formal do conceito de limite envolvendo *applets* do GeoGebra, pautada dentro de uma estratégia de ensino. Ainda, auxiliou-nos na elaboração da Sequência de Atividades 6 dentro de um contexto de atividades aplicadas em outras áreas, como mecânica, para analisar a compreensão de alunos de curso de Ciências Exatas sobre limites de uma função.

A pesquisa de Rocha (2010) utiliza o s*oftware* GeoGebra no estudo de limite dentro de uma estratégia de ensino, conforme apontado por Cornu (2002). As atividades desenvolvidas foram elaboradas levando-se em consideração a articulação entre a visualização e a experimentação, visando contribuir com o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda do conceito de limite de uma função.

De acordo com o autor, após análise das produções, as respostas apresentam indícios de uma mobilização de saberes e maior apropriação da ferramenta informática no processo de visualização, bem como trabalho mais efetivo com as múltiplas representações. Percebemos, no relato do autor, que a compreensão de limite de uma função pelos alunos se deu por aproximação (movimento dinâmico), o que já havia sido citado por Tall e Vinner (1981).

Na visão de Rocha (2010), o ambiente criado permite que os alunos se tornem mais autônomos e investigativos. Ainda favorece que a mídia informática se torne potencializadora e, assim, possa contribuir para a compreensão de conceito do cálculo. Não poderíamos deixar de inferir que isso só pode ser possível se os alunos tiverem domínio e conhecimento do conteúdo a ser trabalhado.

Este trabalho, assim como o de Cornu (2002), contribuiu para a elaboração das Sequências de Atividades envolvendo o uso dos *applets* do GeoGebra nas investigações do limite de uma função de uma variável num ambiente de informática que poderá contribuir para a compreensão do limite de uma função de uma varável por alunos de Curso de Ciências Exatas.

No artigo de Abreu e Reis (2011), eles relatam que as Imagens Conceituais sobre o limite de uma função, manifestadas pelos sujeitos investigados, deu-se por meio de aproximação. E que as definições remetem a Imagens Conceituais conflitantes, como por exemplo, "ter limite é assumir um valor". Isso ficou evidente na atividade proposta (atividade 3) na qual era exigida a interpretação geométrica dos limites, e a maioria dos alunos atribuíram a existência do limite à imagem da função no ponto.

Outra dificuldade apontada pelos autores foi em relação à definição precisa de limites usando os ε-δ. De acordo com eles, os sujeitos investigados não apresentaram em suas produções qualquer resultado, de modo que se limitaram apenas a escrever ou reescrever a questão proposta. Porém, como destacam os referidos autores, os investigados apresentam facilidade em interpretar os limites a partir da intuição-geométrica. Entretanto, apresentaram dificuldades de transitar entre as representações gráficas-algébricas.

Diante disso, os autores ressaltam a importância de serem valorizadas atividades que contemplem a transição algébrica-gráfica como forma de valorizar as diversas representações do limite, sem haver exagero nas definições e demonstrações rigorosas, se essas forem apresentadas de maneira mecanizada e sob aspecto totalmente procedimental.

Este artigo contribui para elaboração das seguintes Sequências de Atividades: Sequência de Atividades 4, parte 2; Sequência de Atividades 5, ao exigir definições precisas sobre limites explorando ε-δ, Sequência de Atividades 6, parte 1 item c) e parte 2 item d), que exigem uma definição precisa de limite.

O trabalho de pesquisa de Fallas (2016) é centrado em quatros aspectos durante o processo de aprendizagem que leva à compreensão dos conceitos de limite de uma função, a saber: os significados das representações, a visualização matemática e as dificuldades de aprendizagem. As representações utilizadas foram as verbais, as simbólicas e as representações geométricas. É a partir dessas três representações – gráficas, numéricas e algébricas – que, segundo Tall (1992), os conceitos devem ser ensinados, sempre que possível.

Ao analisar as produções dos alunos, o autor aponta que no Conceito Imagem dos estudantes está implícita a concepção dos limites como um processo dinâmico de aproximação. E essa concepção contribuiu para que eles tivessem dificuldades em reconhecer a unicidade do limite de uma função no ponto, quando os limites laterais eram diferentes. Assim, apoiados nessa concepção, vários alunos inclinaram-se a responder os dois comportamentos da função correspondentes aos limites laterais- pela esquerda e pela direita do objeto em estudo.

Desse modo, o autor conclui com indícios de que os alunos consideram o limite como conceito e como processo. E que a existência e o valor do limite se fazem de três maneiras: por meio da articulação do cálculo numérico, da manipulação algébrica e da análise gráfica.

Esta pesquisa colaborou, na nossa investigação, para elaboração da Sequência de Atividades 1- na articulação do cálculo numérico e manipulação algébrica- e nas Sequências de Atividades 2, 3, 4 e 5- nas análises das representações gráficas propiciadas pelos *applets* do GeoGebra.

A tese de Rocha (2016) foi desenvolvida com alunos repetentes da disciplina de Cálculo. Uma vez identificadas as dificuldades dos estudantes, foi planejada uma revisão abordando conteúdos, como por exemplo, potenciação, radiciação, produtos notáveis, conjuntos dos números reais, funções, distância entre dois pontos, equações da reta e da circunferência.

A pesquisadora teve como objetivo investigar e compreender qual o nível de compreensão desses alunos em relação ao conteúdo de limite de funções. A sua aposta foi acreditar que o ensino de matemática com significado teria mais chances de oferecer aos alunos uma compreensão relacional dos conteúdos matemáticos abordados.

Na primeira atividade elaborada, a pesquisadora teve o cuidado de mobilizar três representações numéricas, algébricas e geométricas de funções de uma variável, pois ela considerava importante para a compreensão de um conceito matemático passar, pelo menos, por essas representações.

A autora aponta que, ao analisar a produção de uma das atividades, foi verificado que os alunos apresentaram valores numéricos corretos, mas ainda não compreenderam que, ao substituir os valores numéricos de *x,* não é mais necessário repetir o símbolo "lim". Nas questões em que exigia a fatoração de binômios, apresentaram erros na fatoração. Foram apontadas, também, dificuldades dos alunos na interpretação das simbologias referentes aos limites laterais. Outro erro apresentado foi o de considerar que, graficamente, o valor do limite é sempre no ponto que a função está definida. E a definição de limite de um ponto de vista histórico em que a variável é um conceito dinâmico que, em hipótese alguma, atinge o valor do limite, "ela tende a esse valor".

Outra questão é quando é solicitado ao aluno expressar o significado do $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Na visão da autora, quando o estudante define que o valor de x se aproxima de a cada vez mais, e as imagens desses valores de x se aproximar de L, tanto quanto se queira, é só fazer o x se aproximar mais de a. Para a autora, a frase "tanto quanto se queira" é exatamente a ideia intuitiva dos ε-δ da definição formal de limite, e pode ser que o aluno tenha iniciado a compreender esse conceito intuitivo de limite.

Este trabalho colaborou para elaboração e análise das Sequências de Atividades 1, 2, 3, que contemplam questões em que os limites foram abordados de maneira intuitiva.

O artigo de Messias e Brandemberg tem como objetivo investigar Imagens Conceituais desses sujeitos a cerca da relação entre limites e continuidade. Os pesquisadores basearam suas questões de pesquisas nos trabalhos realizados por Barto (2004), Jordann (2005) e Nair (2010). O roteiro elaborado foi específico para cada aluno levando-se em consideração as Imagens Conceituais sobre o conceito de limite de uma função, evocado a partir dos trabalhos citados.

Nas análises das produções dos alunos, Messias e Brandemberg (2015) observaram que foram apresentadas mobilizações em suas Imagens Conceituais semelhantes às de Leibiniz, no século XVII, em que a existência do limite dependia da continuidade da função no ponto e não ao contrário.

Messias e Brandemberg (2015) consideram que com a pesquisa foi possível investigar os elementos que compõem a Imagem Conceitual de estudantes universitários sobre o limite de função e, nesse sentido, observaram que a Imagem Conceitual dos sujeitos investigados se pautara sobre duas evocações. Primeira: a ideia de limite como sendo um valor a ser alcançado pela função com constantes aproximações. Assim, ele entende que o valor do limite deve coincidir com $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. Segunda: para a existência do limite da função em um ponto p, essa depende da continuidade em p.

Este trabalho, assim como a pesquisa realizada por Rocha (2016), colaborou para elaboração e análise das Sequências de Atividades 1, 2 3- em questões nas quais os limites foram abordados de maneira intuitiva.

No artigo de Soares e Cury (2017), observamos que os autores analisaram as produções de 14 alunos que versavam sobre o conteúdo de limites em um curso de Licenciatura em Matemática. Para isso, foram elaboradas 7 questões de modo que as duas primeiras envolviam a justificativa sobre as definições e sobre a noção de limite. As outras 5 questões envolviam cálculos de limites ou aplicação de conceitos.

Nas respostas analisadas por Soares e Cury (2017) sobre "explique o que significa dizer que, dada uma função f, o limite de $f(x)$, quando x tende para um número a, é igual a L", os autores apontam que existem alunos que compreendem a existência do limite de uma função em um ponto por meio da igualdade dos limites laterais, mas não conseguem expressar o conceito de maneira matematicamente correta. Outros alunos apontados por esses pesquisadores não conseguiram expressar nem em língua natural. Para os autores, a ausência de respostas revela incompreensão do conceito de limites.

A partir disso, percebemos que os alunos que conseguiram responder visualizam o limite de forma dinâmica ao utilizarem o termo "aproximar", tal qual os alunos investigados por Tall e Vinner (1981).

Soares e Cury concluem argumentando que era esperado que os alunos, os quais haviam cursado Cálculo I a pouco tempo, não apresentassem dificuldades na conceituação de limite de uma função. Ainda apontam que essa foi a causa de os estudantes não conseguirem expressar na linguagem natural ou matemática o conceito de limite de maneira correta.

Este artigo contribuiu para a elaboração das Sequências de Atividades 2, 3, 4, 5 e 6, como em itens nos quais os membros da dupla pudessem expressar-se usando a língua natural, representações algébricas, representações gráficas e representação formal de limite.

O artigo de Fonseca e Henriques (2018) apresenta um estudo sobre a compreensão do conceito de limite de uma função. De acordo esses autores, foram desenvolvidas tarefas (atividades) exploratórias que visam promover a aprendizagem com compreensão da definição formal de limite de uma função num ponto.

Na análise da produção das atividades, três grupos, da questão 1 da tarefa 5, e quatro grupos- na questão 1 da tarefa 15- apresentam Conceito Imagem associado ao conceito de limite como o resultado de aproximação ao objeto (movimento dinâmico), como referido por Tall e Vinner (1981). Ao serem solicitados a reconhecer o limite, quando representado, simbolicamente, pela definição formal e geometricamente com registros baseados na simbologia dessa definição, oito dos nove grupos não apresentaram dificuldades em reconhecer e justificar de maneira clara e objetiva a existência do limite de uma função, atribuindo significado aos elementos da definição formal.

Nas questões 2 e 3 das tarefas 5 e 15, respectivamente, nas quais os alunos eram solicitados a traduzir geometricamente o limite expresso na definição formal, três grupos apresentaram apenas o caso em $L=f(x_0)$ e seis grupos representaram os três possíveis casos de existência do limite (quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, quando a função não está definida e limite existe, e quando $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$).

Conforme Fonseca e Henriques (2018), os grupos foram capazes de converter a representação algébrica para geométrica e de explicar as variáveis relacionadas aos registros convertidos.

Na questão 2 da tarefa 8, os estudantes deveriam analisar a expressão algébrica $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ apresentada e associá-la à definição formal. Ao analisarem as produções, os autores afirmam que nove grupos mobilizaram conhecimentos sobre a definição de limite, particularmente, os significados dos ε-δ.

Este artigo, assim como o de Abreu e Reis (2011), contribuiu para a formulação das seguintes Sequências de Atividades: Sequência de Atividades 4 parte 2; Sequência de Atividades 5 parte 2 e 3 envolvendo ε-δ; Sequência de Atividades 6 envolvendo diferentes representações e aplicações do limite em um caso particular da mecânica.

Para concluir: As análises preliminares nos foram importantes para que pudéssemos conhecer os trabalhos desenvolvidos por alguns pesquisadores a respeito do tema limite de uma função de uma variável real, assim como os relatos das dificuldades encontradas pelos alunos sobre o referido tema que, de uma certa maneira, é comum em alunos iniciantes no curso de Cálculo I.

As pesquisas aqui apresentadas nos serviram como norte para que pudéssemos elaborar e analisar Sequências de Atividades com questões que pudessem contribuir para a compreensão de limite de função de uma variável por alunos de cursos de Ciências Exatas com base no PMA e na TRRS.

CAPÍTULO 3: PERCURSOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentaremos os percursos metodológicos da pesquisa. Na seção 3.1 apresentaremos o desenvolvimento da nossa investigação. Na seção 3.2 abordaremos sobre o desenvolvimento das atividades e, por fim, na seção 3.3 discorreremos sobre a coleta de dados.

A metodologia é o caminho a ser percorrido pelo pesquisador no processo de produção de conhecimento em relação ao objeto a ser estudado, no nosso caso, limite de uma função, contemplando não apenas a utilização das técnicas e instrumentos de pesquisa, mas também reflexões teóricas que são de fundamental importância.

Como destaca Tozoni-Reis (2010), “a articulação entre os estudos teóricos e a aplicação prática de técnicas e instrumentos devem estar presentes durante todo o processo de investigação”. Para Minayo (2002), segundo Tozoni-Reis (2010, p.10), a organização do processo de pesquisa obedece a três principais dimensões, a saber: as escolhas teóricas, as técnicas e a criatividade do pesquisador. Em consonância com esse pensamento, Tozoni-Reis (2010) afirma que

> (...) a metodologia inclui as concepções teóricas de abordagem, o conjunto de técnicas que possibilitam a construção da realidade e o sopro divino do potencial criativo do investigador. Enquanto abrangência de concepções teóricas de abordagem, a teoria e metodologia caminham juntas intrincavelmente inseparáveis. E enquanto conjuntos de técnicas, a metodologia deve dispor de um instrumental claro, coerente, elaborado, capaz de encaminhar impasses teóricos para o desafio da prática” (TOZONI-REIS, 2010, p. 10).

A seguir, na seção 3.1 apresentaremos o público-alvo da nossa pesquisa. Já a seção 3.2 contempla o desenvolvimento das atividades; nas subseções seguintes discorremos sobre: 3.2.1 O primeiro encontro – Determinando limites por meio de valores de funções; 3.2.2 Segundo encontro- Determinando limites com auxílio dos *applets1 e* do GeoGebra; 3.2.3 Terceiro encontro- Estabelecendo a vizinhança de limite com auxílio dos *applets* 2 e 3 do GeoGebra; Quarto encontro- Estabelecendo relações entre ε-δ com auxílio do *applet* do GeoGebra 3; Quinto encontro- Compreensão da representação gráfica da definição de limite de uma função com auxílio do *applet* 4 do GeoGebra; Sexto encontro- Aplicando o que aprendeu; e na seção 3.3, discorremos sobre a coleta de dados.

3.1 Público-Alvo

A nossa pesquisa, a princípio, começou a ser desenvolvida com 5 alunos do 1º período da Engenharia Civil da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES), no estado de Minas Gerais, ingressantes no 1º semestre de 2020, oriundos de escolas públicas e privadas.

Para o desenvolvimento das atividades, os estudantes foram organizados em duas duplas e um trio. O critério escolhido para organização das duplas e do trio ficou a cargo dos participantes da pesquisa, que se organizaram por afinidade.

Na qualificação, foi sugerido pelos integrantes da banca que o número de participantes fosse também composto por alunos de outros períodos e cursos pelo fato de ter somente alunos do 1º período. Argumentaram que isso poderia ser um fator complicador para o desenvolvimento da pesquisa à medida que as atividades abrangessem uma profundidade maior no conteúdo de limites.

Diante dessa recomendação, procuramos a secretaria geral da universidade e localizamos o endereço e telefone dos alunos dos cursos de Sistema de Informação, Licenciatura em Matemática, Engenharia Civil e Engenharia de Sistema de Informação. Depois, fomos pessoalmente à residência de alguns que residiam em Montes Claros, pois estamos ainda vivendo em um período de pandemia, causada pelo vírus Sarscov-2. Por conta disso, os trabalhos estão sendo realizados de forma on-line. Dos alunos contatados, prontificaram-se a participar da pesquisa: 12 alunos do curso de Matemática Licenciatura, 1 aluno do curso de Sistema de Informação, 2 alunos do Curso de Engenharia de Sistema de Informação e 3 alunos do curso de Engenharia Civil, totalizando 18 alunos.

Após esse contato, fizemos uma reunião *on-line*, por meio do *Google Meet*, para a apresentação da nossa proposta de pesquisa e para determinar os horários de desenvolvimento das atividades, conforme disponibilidade dos participantes. No entanto, 3 alunos do curso de Matemática Licenciatura, 1 aluno do Curso de Engenharia Civil, 2 alunos do Curso de Engenharia de Sistema de Informação e o aluno do Curso de Sistema de Informação não puderam participar da pesquisa. Assim, dos 18 alunos que se prontificaram a participar da pesquisa, ficaram 9 alunos do curso de Licenciatura em Matemática e 2 da Engenharia Civil, totalizando 11 alunos.

Outra baixa registrada foi de 3 alunos, em relação aos 5 participantes do início da pesquisa, os quais alegaram dificuldades de ajuste no horário de trabalho para que pudessem continuar participando da pesquisa.

Finalmente, ficamos com um total de 13 alunos (2 do início da pesquisa e mais 11 novos integrantes) para o desenvolvimento da pesquisa, sendo: 9 do curso de Matemática Licenciatura e 4 do curso de Engenharia Civil. Dos 9 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, 4 cursavam o 4º período, 2 o 7º período, 2 o 2º período e 1 o 8º período. Dos 4 alunos da Engenharia Civil, todos cursam o 1º período. Para organização das novas duplas pelos alunos, foi utilizado o mesmo critério anterior, o de afinidade. Foram formadas 5 duplas e um aluno que preferiu desenvolver as atividades sozinho, o qual será denominado em nossa pesquisa de aluno 13. Alguns alunos, tanto do curso de Engenharia Civil como do curso de Matemática Licenciatura não participaram de todas as atividades.

De modo aleatório, utilizamos um código de identificação para resguardar o nome do participante, empregamos a letra A para nos referirmos aos alunos e um número para diferenciá-los (A1, A2, ... A13). No Quadro 8, a seguir, elencamos os alunos que participaram, mesmo parcialmente, e a respectiva nomenclatura destinada a cada um deles.

Quadro 8 - Sujeitos da pesquisa

Nomenclatura	Alunos
A	Aluno 1 (A1) – Curso de Matemática Licenciatura- 2º período
	Aluno 2 (A2) – Curso de Matemática Licenciatura- 2º período
B	Aluno 3 (A3) – Curso de Matemática Licenciatura- 6º período
	Aluno 4 (A4) – Curso de Matemática Licenciatura- 6º período
C	Aluno 5 (A5) – Curso de Matemática Licenciatura- 4º período
	Aluno 6 (A6) – Curso de Matemática Licenciatura- 4º período
D	Aluno 7 (A7) – Curso de Matemática Licenciatura-7º período
	Aluno 8 (A8) – Curso de Matemática Licenciatura-7º período
E	Aluno 9 (A9) – Engenharia Civil- 1º período
	Aluno 10 (A10) – Engenharia Civil- 1º período
F	Aluno 11 (A11) – Engenharia Civil- 1º período
	Aluno 12 (A12) – Engenharia Civil- 1º período
G	Aluno 13 (A13) – Curso de Matemática Licenciatura- 8º período

Fonte: Dados da pesquisa

Antes da realização da primeira atividade, foi enviado para cada aluno um Termo de Consentimento Livre Esclarecido- TCLE (ver anexo 1) e um termo de exploração de imagens, (ver anexo 2), os quais prestavam esclarecimento sobre a participação na pesquisa.

É importante salientarmos que o convite feito no primeiro momento, antes da qualificação, para os alunos participarem da nossa pesquisa, foi de maneira on-line para todas as turmas dos cursos de Engenharia Civil, Matemática Licenciatura, Sistema de Informação e de Engenharia de Sistemas de Informação. No entanto, os que manifestaram interesse, no primeiro momento, foram somente os 5 alunos ingressantes no 1º período do curso de Engenharia Civil.

A princípio, as nossas atividades estavam previstas para serem desenvolvidas presencialmente no laboratório da UNIMONTES. Mas, devido ao enfrentamento da pandemia de COVID-19, que ainda assola o mundo, no intuito de preservar a saúde e a vida de alunos e professores, entre outras, as aulas presencias foram suspensas. E, assim, as aulas presenciais foram substituídas pelo que foi denominado de aulas remotas via plataforma virtual, *Google Meet*, com professores e alunos utilizando as tecnologias particulares. Porém, nem todos (professores e alunos) estavam preparados para vivenciar essa nova realidade. Como a maioria não dispunha de estruturas tecnológicas adequadas, e as aulas virtuais foram instaladas em todo o país, os serviços de internet oferecidos pelas operadoras não suportavam a demanda, ocasionando constantes interrupções no sistema.

Muitos dos nossos alunos acompanhavam as aulas por meio da internet de seus celulares, pois não tinham como contratar um serviço de internet de melhor qualidade. Nesse contexto, não conseguiam acompanhar as aulas de maneira satisfatória. Esse fato vivenciamos no desenvolvimento de nossa pesquisa, com constantes interrupções e travamento da internet dos participantes, o que dificultou a participação dos alunos e o desenvolvimento das atividades.

Devido ao exposto acima, as Sequências de Atividades propostas foram remodeladas e aplicadas de maneira on-line, por meio da plataforma *Google Meet,* e utilizando, em algumas delas, *applets* do GeoGebra. Cabe destacarmos que foram construídos cinco *applets*, no âmbito do grupo de pesquisa da orientadora, com a colaboração do Professor Dr. Marcio Vieira de Almeida, que gentilmente autorizou a utilização da aplicação dos *applets* no desenvolvimento da pesquisa.

As atividades foram enviadas aos participantes via e-mail, 10 minutos antes do início de cada encontro, e desenvolvidas de forma on-line, por meio da plataforma *Google Meet*. Os recursos utilizados no desenvolvimento das referidas atividades foram: lápis, caneta, régua, folha de papel sulfite, calculadora, *applets* do GeoGebra, além de vídeos sobre limites.

3.2 Desenvolvimento das atividades

As atividades foram desenvolvidas em seis encontros (todos on-line), com tempo estimado de 120 minutos cada, pela Plataforma *Google Meet*, com os participantes nas suas respectivas residências. Essa estratégia foi a opção encontrada no momento da coleta de dados, uma vez que as aulas regulares estavam sendo ministradas de forma remota, devido às medidas restritivas e preventivas adotadas nos âmbitos nacional, estadual e municipal no período da pandemia causada pelo novo coronavírus (COVID-19).

No desenvolvimento das nossas atividades, encontramos dificuldades pelo fato de que alguns dos participantes da pesquisa não tinham computador em casa e usaram o celular para desenvolver as atividades com conexão precária à internet, o que gerava constantes interrupções. Durante a realização das atividades, os membros das duplas se comunicavam pelo *Google Meet* e discutiam os protocolos de resolução das atividades.

As sequências de Atividades abordadas nos encontros estão descritas no Quadro 9 a seguir:

Quadro 9 - Quadro descritivo das Sequências de Atividades

Sequência de Atividades 1	Determinando limites por meio de valores de funções
Sequência de Atividades 2	Determinando limites com auxílio do *applet 1* do GeoGebra
Sequência de Atividades 3	Estabelecendo a vizinhança de limite com auxílio dos *applets* 2 e 3 do GeoGebra
Sequência de Atividades 4	Estabelecendo relações entre ε *e* δ com auxílio do *applet* 3 do GeoGebra
Sequência de Atividades 5	Compreensão da representação gráfica da definição de limite de uma função com auxílio do *applet* 4 do GeoGebra
Sequência de Atividades 6	Aplicando o que aprendeu com auxílio do *applet* 5 do GeoGebra

Fonte: Dados da pesquisa

Cada Sequência de Atividades será apresentada no capítulo 4. A seguir, apresentamos detalhes sobre o desenvolvimento de cada dessas Sequências de Atividades.

1º Encontro Sequência de Atividades 1 - Determinando limites por meio de valores de funções

A Sequência de Atividades 1 foi elaborada fundamentada nas mobilizações das Imagens Conceituais por alunos em relação ao comportamento de uma função em determinados pontos e a existência ou não dos respectivos limites.

A Sequência de Atividades 1 foi desenvolvida, no dia 06-06-2020, durante 2h30min, pelos 5 alunos iniciantes, pelo trio de alunos e pela dupla. Também foi desenvolvida no dia 10-06-2020, durante 2h. Posteriormente, o trio de alunos não pôde prosseguir colaborando com a pesquisa.

Após a qualificação, foi ampliado o número de participantes da pesquisa, e esta Sequência de Atividades foi aplicada, em 10-08-2020, para os 11 novos membros, formando as duplas A, B, C, D, E, F, e para o aluno identificado como G no Quadro 8. Nesse dia, a atividade durou 2h30min.

Na realização, pela primeira vez, da Sequência de Atividades 1, observamos que os alunos estavam com dificuldades de interagir entre si. Talvez isso tenha ocorrido pelo fato de não estarem habituados a trabalhar colaborativamente de forma on-line. Coube ao pesquisador procurar fazer essa interação e, aos poucos, foi possível dar início à discussão sobre o desenvolvimento da atividade. Nessa ocasião, dois alunos tiveram problemas de conexão com a internet, com interrupções frequentes no decorrer da resolução da atividade.

Na realização, pela segunda vez, da Sequência de Atividades 1 os novos integrantes da pesquisa já se mostraram mais comunicativos ao desenvolverem a atividade proposta. Participaram 5 duplas A, B, C, D e F e o aluno (G), que preferiu fazer a atividade sozinho, com 6 salas abertas no *Google Meet*.

2º Encontro Sequência de Atividades 2 – Determinando limites com auxílio do GeoGebra

A Sequência de Atividades 2 foi desenvolvida, no dia 12-08-2021, com todos os 13 participantes utilizando o *applet*1 do GeoGebra. No início do encontro, foram destinados 10 minutos para uma atividade livre para que os participantes pudessem interagir com o *applet* 1 do GeoGebra, pois nem todos conheciam o *software* do GeoGebra. O pesquisador abriu uma sala única com todos os participantes para que fosse apresentado e explorado o *applet*. Nesse momento, houve não só uma interação dos participantes com o *applet* 1 mas também do pesquisador com os alunos ao interpelá-los sobre o entendimento e manuseio do *applet* 1. Após essa apresentação, foram abertas 7 salas pelo *Google Meet* para o desenvolvimento da Sequência de Atividades, que teve uma duração de, aproximadamente, 2h10min. Em seguida, cada dupla escolheu um de seus integrantes para realizar a transcrição da resolução das atividades, que posteriormente foi enviada via e-mail ao pesquisador.

Dessa forma, a atividade foi desenvolvida utilizando o *applet*1 nas investigações da existência, ou não, do limite, assim como nas investigações a respeito da definição, ou não, de uma função em um determinado ponto x_0 dado e na explanação do entendimento dos alunos sobre a sua compreensão dos limites. O pesquisador sempre visitava cada sala, dialogando com todos e esclarecendo possíveis dúvidas. Durante a realização dessa atividade, como citado anteriormente, alguns participantes das duplas tiveram dificuldade de desenvolvê-la com o seu parceiro devido às interrupções da internet.

Observamos, no decorrer do desenvolvimento da atividade, uma certa dificuldade dos alunos no manuseio do *applet* 1 e na interpretação da representação gráfica das funções apresentada pelo *software*, o que gerava discussões entre os participantes até chegarem a um consenso comum. A parte 6 da atividade foi bastante desafiadora para os alunos, pois eles deveriam preencher uma tabela, determinar o limite da função e conferir o resultado utilizando o *applet* 1. Ao fazerem investigações quando $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$, perceberam que $f(x)$ não convergia para o mesmo valor, tanto analisando os dados da tabela como também nas investigações utilizando o *applet* 1.

Esse fato gerou muitas discussões entre os participantes de cada dupla e algumas conjecturas, como: "*pode ser pelo fato do applet estar programado somente para duas casas decimais*" ou "*pode ser que a calculadora*". Essa questão foi proposta com o objetivo de mostrar que nem todos os limites são obtidos somente por substituição do valor da variável na função dada ou usando os computadores, no nosso caso, o *applet* e calculadoras. Em casos como esses, tem a necessidade de aplicar as propriedades dos limites e usar de artifícios algébricos para a resolução desse tipo de limite. Ao que tudo indica, o aluno A3 pode ter utilizado desse artifício algébrico para obter a resposta da referia questão.

Após o término da resolução da Sequência de atividades, estas foram enviadas via e-mail ao pesquisador.

3º Encontro Sequência de Atividades 3 - Estabelecendo a vizinhança de limite com auxílio do *applet* 2 e 3 do GeoGebra

O terceiro encontro foi realizado em 12-09-2020 e contou com a participação das duplas A, B e E. A Sequência de Atividades abrange o conceito de distância por meio de módulo e a definição de vizinhança, na parte 1 e nas demais partes, aplica a definição de vizinhança na resolução de limites. Para isso, foram desenvolvidos dois *applets*, um para ser trabalhada a definição de distância, e o outro para desenvolver as atividades sobre limites enfocando vizinhança.

Então, para iniciarmos os nossos trabalhos, destinamos 10 minutos para que pudéssemos apresentar os *applets* e para que os alunos os manuseassem em uma atividade livre. Depois, foram abertas quatro salas no *Google Meet* para o desenvolvimento das atividades. No decorrer do desenvolvimento das atividades, percebemos que alguns alunos que estavam usando o celular, às vezes, tinham dificuldades- pois o aparelho travava, dificultando assim a participação. Nas resoluções investigando os limites nas vizinhanças de um determinado ponto x_0, o dinamismo apresentado pelos *applets* 2 *e* 3, aos poucos, foi desenvolvendo a percepção dos alunos em relação aos movimentos simultâneos entre os eixos coordenados, o que os auxiliou na interpretação e compreensão da atividade proposta.

Na Sequência de Atividades 3, a parte 4 também gerou bastante discussão entre os participantes, pois tratava da investigação para verificar se um determinado intervalo representava a vizinhança de um dado x_0 e, em seguida, determinar a existência, ou não, do limite de f. O pesquisador recomendou que as duplas retornassem a parte 1 e lessem sobre a definição de vizinhança para que pudessem responder ao item d) (se o conjunto determinado pelo rastro no eixo das abscissas quando D movimenta no intervalo]1,5; 0,5[).

Nas nossas interferências, percebemos que algumas duplas apresentavam algumas dificuldades de interpretação gráfica ou mesmo com o conteúdo de limite e, dentro do possível, procuramos fazer uma releitura da atividade e esclarecimento de pontos com o objetivo de dar sustentação ao aluno para o desenvolvimento da atividade.

Uma vez encerrada a resolução da Sequência de Atividades 3, alguns alunos escanearam as resoluções e enviaram via e-mail ao pesquisador; quanto aos que não conseguiram digitalizá-las, o pesquisador prontificou-se a buscar as atividades pessoalmente.

4º Encontro Sequência de Atividades 4 - Estabelecendo relações entre ε e δ com auxílio do *applet* 3 do GeoGebra

O quarto encontro foi realizado no dia 03-10-2020, com duração de aproximadamente 1h50min, com a participação das duplas B, C, E e do aluno G (A13).

A Sequência de Atividades 4 foi composta por 2 partes, sendo que a primeira era para ser desenvolvida usando a mídia lápis e papel; e a segunda, usando o *applet* 4. A atividade consistia em estabelecer relação matemática entre ε e δ. Para desenvolver essa Sequência de Atividades, foram abertas 4 salas no *Google Meet*.

Após a leitura das questões, os integrantes da dupla B chegaram ao consenso de que fariam individualmente a resolução e, depois, discutiriam juntos o resultado. Eles ainda combinaram que, se preciso, iriam fazer os ajustes necessários. Já as duplas C e E preferiram ir discutindo e resolvendo ao mesmo tempo. Cada dupla, após terminar a atividade, trocou mensagem via *Whatssap* com as questões que cada um dos integrantes resolveu para poderem discutir. Observamos nas discussões que as duplas B e C não apresentaram dificuldades ao usarem a figura de apoio dada, para posicionar e estabelecer as vizinhanças $V\varepsilon(L)$ e $Vx_0(x)$ relacionando com uma função f qualquer, enquanto o participante A9 da dupla E apresentou dificuldades em estabelecer essas vizinhanças ao dialogar com seu parceiro.

Na parte 2 os alunos utilizaram o *applet* 4 para desenvolver a atividade, e percebemos que eles apresentaram uma maior desenvoltura na sua utilização. Esses alunos utilizaram o Controle

Deslizante ε para preenchimento da tabela, determinando as vizinhanças de $V_\varepsilon(3)$ e $V_\delta(4)$. Na discussão para estabelecerem uma relação entre ε e δ, ao analisarem os dados da tabela, concluíram por meio do raciocínio lógico que $\delta = 2\varepsilon$. A dupla E não resolveu o item h) da parte 2. O aluno A13, que preferiu desenvolver as atividades sozinho, não apresentou nenhum questionamento, desenvolvendo toda a atividade.

É importante ressaltarmos que a internet neste dia estava muito ruim, o que dificultou o desenvolvimento da atividade de uma maneira geral, principalmente para aqueles alunos que utilizavam a internet dos seus celulares. Logo após o término das atividades, algumas resoluções foram escaneadas ou fotografadas e, em seguida, enviadas via e-mail ao pesquisador; as outras, o pesquisador prontificou-se buscar pessoalmente.

5º Encontro Sequência de Atividades 5 - Compreensão da representação gráfica da definição do limite de uma função

A Sequência de Atividades 5 foi desenvolvida no dia 14-10-2020, com duração de aproximadamente 1h50min, com a participação das duplas A, B e D.
Para a realização dessa atividade, foram sugeridas duas videoaulas como suporte para o seu desenvolvimento. A parte dois da videoaula trata sobre a definição formal de limites (formação da ideia), e tem uma duração de 6 minutos; e parte 3, trata sobre a definição formal de limites, com duração de 5 minutos. Após assistirem às videoaulas, os alunos deram início à resolução da Sequência de Atividades 5 e, para tal, foram abertas 3 salas no Google Meet.

A parte 1 da atividade consistia em representar graficamente a definição de limite de uma função arbitrária utilizando os elementos da definição formal de limites. Conforme observamos, as duplas realizaram essa transição com certa facilidade, um pouco de dificuldade foi apresentado pela dupla A, cujos integrantes tiveram que recorrer ao vídeo para sanar algumas dúvidas. As discussões para explanar o seu entendimento levou cada aluno a manifestar a sua Imagem Conceitual até os dois membros da dupla chegarem a um consenso, o que verificaremos na análise a *posteriori*.

Quanto à última questão parte 4, que solicitava uma demonstração de um limite, uns preferiram recorrer ao vídeo para se embasarem melhor, outros não. De maneira geral, pelo que pudemos observar, as discussões estavam sendo bastante proveitosas, com os alunos se posicionando e tirando dúvidas, mostrando muita interatividade entre si.

Ao encerrarem as resoluções das questões, os alunos providenciaram o envio da Sequência de Atividades escaneadas ou fotografadas. Em relação àqueles que não conseguiram digitalizá-las, o pesquisador prontificou-se buscar as atividades pessoalmente.

6º Encontro Sequência de atividade 6- Aplicando o que aprendeu!

O sexto encontro foi realizado no dia 23-10-2020, com duração aproximada de 2h, e contou com a participação das duplas B, C, D, do aluno A1 da dupla A e do aluno A10 da dupla E. Nessa Sequência de Atividades 6, propomos algumas aplicações de limites em situações problemas da área de mecânica. Podemos dizer, pelas nossas observações, que o *applet* foi bem explorado, com os alunos demonstrando uma maior segurança em manuseá-lo, exceto os participantes A1 e A10 que estavam usando celular e reclamavam que os seus aparelhos travavam, dificultando um melhor desempenho desses participantes na realização das atividades.

Na parte 1 item d), durante as discussões, percebemos que houve dúvidas por parte dos alunos, pois a questão deu margem para outras interpretações. Nas partes 2 e 3, percebemos que eles conseguiram estabelecer conexões dos elementos ε e δ da definição formal de limites com as situações- problema, interpretando ε e δ como tolerância, erro permitido, variação e até quando o raio δ pode variar para atender à situação- problema proposta. Na parte 3, ao depararem com dois raios δ de valores diferentes, houve uma certa discussão sobre a escolha do melhor δ que atenderia à proposta do problema, até que chegaram a um consenso.

3.3 Reflexão sobre as atividades

Solicitamos aos alunos que fizessem uma reflexão sobre as atividades desenvolvidas durante a pesquisa, por meio de duas perguntas:

1- De que forma as atividades desenvolvidas contribuíram, ou não, para sua compreensão do conceito de limite?
2- Quais das atividades que melhor atendeu para sua compreensão?

Tínhamos como objetivo saber dos alunos em que as atividades com as abordagens usando recursos tecnológicos, no caso *applets* do GeoGebra, as abordagens dos limites utilizando o conceito de vizinhanças e as aplicações do referido conteúdo em situações- problema puderam contribuir para a aprendizagem e compreensão dos alunos ingressantes nos cursos de Engenharia Civil e Matemática Licenciatura, bem como o que essas atividades agregaram no conhecimento de alunos que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Destacamos que a nossa pesquisa tinha um total de 13 participantes, mas esse número foi oscilando nos encontros durante a realização das atividades. A dupla B foi a que participou de todas as atividades. Então, a análise a *posteriori* das atividades será feita tendo como foco a referida dupla.

3.4 Coleta de dados

Os dados foram coletados por meio da plataforma *Google Meet*. Todos os encontros foram gravados e disponibilizados nessa plataforma para acesso somente do pesquisador. Em seguida, criamos um canal na plataforma do *YouTube,* na qual os vídeos das atividades, após serem editados, foram hospedados e o acesso é, também, de exclusividade do pesquisador, conforme acordo firmado entre os participantes e o pesquisador. Tais vídeos foram transcritos para serem utilizados na análise das atividades.

Após o desenvolvimento das atividades, elas foram fotografadas ou escaneadas pelos participantes e enviadas via e-mail ao pesquisador ou pelo grupo de pesquisa criado no *WhatsApp* para comunicação entre pesquisador e participantes.

Como as fotos de algumas duplas não estavam legíveis, a solução encontrada pelo pesquisador foi, como estavam trabalhando em dupla, ir pessoalmente recolher as produções das atividades na residência dos participantes que não tinham como escanear o trabalho em casa e que morassem em Montes Claros-MG.

Neste capítulo, tratamos dos percursos metodológicos da nossa pesquisa e, no próximo capítulo, trataremos das análises a *priori* e a *posterior* das Sequência de Atividades fundamentadas nos processos do Pensamento Matemático Avançado e nos Registros de Representação Semiótica.

CAPÍTULO 4: DESCRIÇÃO, ANÁLISE *A PRIORI E A POSTERIORI* DAS SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos a análise *a priori* e *a posteriori* das produções da dupla que participou efetivamente de todas as Sequências de Atividades da pesquisa. Quando nos referimos à dupla, estamos nos referindo a cada um dos participantes. As análises a *priori* e a *posteriori* foram feitas próximas, para melhor análise, e estão distribuídas da seguinte maneira: 4.1 Análise a *priori* e a *posteriori* da Sequência de Atividades 1- Determinando limites por meio de valores de funções; 4.2 Análise a *priori* e a *posteriori* da Sequência de Atividades 2 – Determinando limites com auxílio do *applet* 1 do GeoGebra; 4.3 Análise a *priori* e a *posteriori* da Sequência de Atividades 3 – Estabelecendo vizinhança de limite com auxílio dos *applets* 2 e 3 do GeoGebra; 4.4 Análise a *priori* e *a posteriori* da Sequência de Atividades 4 – Estabelecendo relações entre ε e δ com auxílio do *applet* 5; 4.5 Análise a *priori* e *a posteriori* da Sequência de Atividades 5 – Compreensão da representação gráfica da definição do limite de uma função com o auxílio do *applet* do GeoGebra; 4.6 Análise a *priori* e *a posteriori* da Sequência de Atividades 6 - Aplicando o que aprendeu com auxílio do *applet* 6 do GeoGebra.

Nas Sequências de Atividades, procuramos criar questões que pudessem responder à nossa questão de pesquisa, a saber: *"Como o desenvolvimento e a implementação de sequências de atividades elaboradas e centradas em processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) podem contribuir para a compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas?"*

Os respectivos objetivos das Sequências de Atividades são apresentados no Quadro 10, a seguir.

Quadro 10 - Quadro descritivo das Sequências de Atividades

Sequência de Atividades 1	Determinando limites por meio de valores de funções
Sequência de Atividades 2	Determinando limites com auxílio do *applet 1* do GeoGebra
Sequência de Atividades 3	Estabelecendo a vizinhança de limite com auxílio dos *applets* 2 e 3 do GeoGebra
Sequência de Atividades 4	Estabelecendo relações entre ε-δ com auxílio do *applet* 4 do GeoGebra
Sequência de Atividades 5	Compreensão da representação gráfica da definição de limite de uma função com auxílio do *applet* 5 do GeoGebra
Sequência de Atividades 6	Aplicando o que aprendeu! com auxílio do *applet* 6 do GeoGebra

Fonte: Dados da pesquisa 2021

4.1 Sequência de Atividades 1 – Determinando limites por meio de valores de funções

A Sequência de Atividades 1 – Anexo 2, aborda o estudo das imagens de uma função para valores próximos de um dado ponto, no caso, $x_0 = 0$. A atividade é representada e explorada por tabelas para obtenção dos limites por meio de estimativas. Essas substituições poderão determinar, ou não, intuitivamente a existência do limite das funções que integram a Sequência de Atividades. Entendemos, assim como Dreyfus (2002), que as substituições numéricas para obtenção do limite como representações simbólicas possibilitam aprender e pensar matematicamente; procura-se compreender qual a Imagem Conceitual manifestada pelo aluno a respeito de limite de uma função; representação de um objeto matemático na língua natural e da conversão da representação numérica para a representação simbólica.

A Sequência de Atividades procura desenvolver elementos do conceito de limite do ponto de vista de estimativas por meio de tabela. Essas estimativas podem auxiliar a determinar, ou não, intuitivamente a existência do limite das funções que integram a Sequência de Atividades.

Destacamos que a elaboração da Sequência de Atividades foi fundamentada nas mobilizações das Imagens Conceituais manifestadas por alunos em relação ao comportamento das imagens de uma função em determinados pontos do domínio e à existência, ou não, dos respectivos limites- conforme proposto nas pesquisas de Tall e Vinner (1981), na tese de Rocha (2016) e no artigo de Messias e Brandemberg (2015).

Objetivos:

- Calcular o valor de um limite por estimativas;

- Estimativa de limites com indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

Procedimentos enviados para os participantes:

De acordo com as instruções enviadas por e-mail, os participantes iniciaram o desenvolvimento das atividades a seguir.

Sequência de Atividades 1 - parte 1 - Utilizando uma calculadora e considerando f uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$, complete a Tabela 1, a seguir, que relaciona os valores de x e de $f(x)$ para valores de x próximos de 0, tanto para valores menores que 0 (quando x se aproxima de 0 pela esquerda) quanto para valores maiores que 0 (quando x se aproxima de 0 pela direita).

Tabela 1 - Calculando limites por estimativas

Relação entre $f(x)$ x^2 +1 e x, quando x se aproxima de *0* pela esquerda		Relação entre $f(x)$ x^2 +1 e x, quando x se aproxima de *0* pela direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1		1	
-0,4			
-0,2		0,2	
		0,1	
-0,01			

Fonte: Dados da pesquisa 2021

a) Observando a tabela que indica valores de $f(x)$ para alguns valores de x, responda: para qual valor $f(x)$ se aproxima, quando os valores de x se tornam cada vez mais próximos de zero?
Resposta esperada: $f(x)$ se aproxima de 1.
b) A função está definida em $x = 1$? Em caso afirmativo, qual é a imagem de f quando $x = 1$?
Resposta esperada: A função está definida para $x = 1$. E que o valor da imagem seja 2.
c) De acordo com a tabela, qual o valor do $\lim_{x \to 0} f(x)$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esse resultado.

Análise *a priori* - parte 1

Para o item a), a nossa expectativa é verificar qual a Imagem Conceitual manifestada pela dupla ao analisar os dados da Tabela 1 para valores de x próximos de zero, porém estritamente menores que zero, e valores de x próximos de zero, porém estritamente maiores que zero, o que acontece com as imagens $f(x)$, ou seja, para $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$. Em relação ao item b), esperamos que, ao analisar o domínio da função, a Imagem Conceitual manifestada pela dupla seja pelo fato de que a função f é contínua para todo x real, logo é definida para $x = 1$ e sua imagem é 2, ou seja, $f(1) = 2$.

Os itens a) e b), segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, permitem à dupla realizar um *tratamento* ao preencher a tabela e determinar o valor da imagem de f para $x = 1$. Em relação ao Pensamento Matemático Avançado- PMA, os itens a) e b) possibilitam realizar os processos de intuição que permitem afirmações diretas e imediatas, bem como sínteses, ao trabalhar com os conceitos de função e de estimativa do valor de uma função, além do conceito de limite.

No item c), são abordados os dados da Tabela 1 para determinar o limite de uma função polinomial f. Temos como expectativa verificar qual a Imagem Conceitual, referente à condição de existência de limite, manifestada pelos alunos, isto é, para que o limite da função exista, é necessário que à medida que $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$as imagens $f(x) \to 1$. Essa parte possibilita ao aluno transitar entre a Representação Numérica (RN) e a Representação da Língua Natural (RLN), RN → RLN. Ou, ainda, da Representação Numérica (RN) para a Representação Simbólica (RS), $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$, RN → RS, realizando uma conversão.

Sequência de Atividades 1 - parte 2 - Seja $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, se\ x < 1 \\ x^2 + 2, se\ x > 1 \end{cases}$.

Complete a Tabela 2, a seguir, que relaciona os valores de x e de $g(x)$ para valores de x próximos de 1, tanto para valores menores que 1 (quando *x* se aproxima de 1 pela esquerda) quanto para valores maiores que 1 (quando *x* se aproxima de 1 pela direita).

Tabela 2 - Calculando limites por estimativas

Relação entre *g(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 1 pela esquerda		Relação entre *g(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 1 pela direita	
x	$g\,(x)$	x	$g\,(x)$
0		2	
0,5		1,5	
0,88			
0,9		1,11	
0,99		1,01	
0,9999			

Fonte: Dados da pesquisa

a) Analisando a Tabela 2, podemos conjecturar qual o valor do $\lim_{x \to 1} g(x)$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esses resultados e sobre os dados disponíveis.

Resposta esperada: Quando $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, $g(x) \to 3$. Logo $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$.

b) A função está definida em $x = 1$? Em caso afirmativo, qual é a imagem de g quando $x = 1$?

Resposta esperada: Não. A função g não está definida para $x = 1$.

c) Comparando os resultados das partes 1 e 2, respectivamente, o que o levou a afirmar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esse resultado.

Resposta esperada: À medida que x se aproxima de 0, tanto pela esquerda quanto pela direita, $f\ (x)$ se aproxima de 1. E quando x se aproxima de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, $g(x)$ se aproxima de 3, ou seja, com base no teorema dos limites laterais.

Análise *a priori* - parte 2

Para a parte 2, temos como expectativa verificar qual a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos relativa à condição de existência do limite de g, isto é, à medida que $x \to 1^-$e $x \to 1^+$, as imagens de $g(\ x) \to 3$, logo existe $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

É possível que, nesta parte, os alunos transitam entre RN → RLN ou RN → RS, $\exists \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow 3 \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$.

Sequência de Atividades 1 - parte 3 - Seja $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$h(x) = \begin{cases} x\ , se\ x < 3 \\ x + 2, se\ x \geq 3 \end{cases}$, preencha a Tabela 3.

Tabela 3 - Calculando limites por estimativas

Relação entre *h(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 3 pela esquerda		Relação entre *h(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 3 pela direita	
x	$h\ (x)$	x	$h\ (x)$
2		4	
2,9			
2,99		3,1	
2,999			
2,9999		3,001	
2,99999		3,0001	

Fonte: Dados da pesquisa

a) Analisando a Tabela 3, podemos conjecturar qual o valor do $\lim_{x\to 3} h(x)$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esses resultados e os dados disponíveis.

Resposta esperada: O $\lim_{x\to 3} h(x)$ não existe. Quando x se aproxima de 3 por valores menores que 3, sem, no entanto, assumir o valor 3, mais $h\ (x)$ se aproxima de 3, sem, no entanto, assumir o valor 3. E quanto mais x se aproxima de 3 por valores maiores que 3, sem, no entanto, assumir o valor 3, mais $h\ (x)$ se aproxima de 5 sem, no entanto, assumir o valor 5. Conclui-se que a condição necessária e suficiente para o limite de uma função existir é que os limites laterais sejam iguais (teorema dos limites laterais), o que não ocorre neste item.

b) A função está definida em $x = 3$? Em caso afirmativo, qual é a imagem de h quando $x = 3$?

Resposta esperada: Sim. A imagem de h para $x = 3$ é 5 ou h (3) = 5.

Análise *a priori* - parte 3

Para a parte 3, apresentamos uma função definida por mais de uma sentença. Nosso propósito foi enunciar uma situação para a qual a utilização de substituições numéricas produz resultados diferentes para h (x) quando x tende a um dado valor. Nesse caso, temos a expectativa de que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, quando $x \to 3^-$, as imagens $h(x) \to 3$, quando $x \to 3^+$, as imagens h (x) $\to 5$ assim como os limites laterais são diferentes, logo não existe $\lim_{x \to 3} h(x)$.

Também poderia utilizar RLN, pois, à medida que x assume valores cada vez mais próximos de 3, situados à esquerda de 3, mais as imagens h (x) se aproximam de 3 e, à medida que x se aproxima de 3, situados à direita de 3, mais as imagens de h (x) se aproximam de 5. Portanto, como os limites laterais são diferentes, o limite da função h não existe, quando $x \to 3$.

Poderia também utilizar RS para indicar a não existência do limite da função h. Desse modo, $\nexists \lim_{x \to 3} h(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 3^-} h(x) \neq \lim_{x \to 3^+} h(x)$. Assim, os alunos poderiam realizar os seguintes movimentos RN → RLN ou RN → RS.

Salientamos que, em todos os casos esperados, a questão possibilita a realização de uma conversão.

E quando investigarem o valor de h para x = 3 concluir que h está definida em x = 3 e que a imagem correspondente seja h (3) = 5.

Sequência de Atividades 1 - parte 4 - Seja $m: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ definida por $m(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, preencha a Tabela 4 para os valores dados de $x < 3$ e $x > 3$ e estime qual o valor do limite da função.

Tabela 4 - Calculando limites por estimativas

x <3	$m(x)$	x >3	m (x)
2,9		3,1	
2,98		3,02	

Fonte: Dados da pesquisa 2021

a) Observando os valores obtidos, qual é a sua estimativa para o valor do limite da função quando os valores de x se aproximam de 3?

Resposta esperada: O limite de $m(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ se aproxima cada vez mais de 6.

b) A função m está definida em $x = 3$? Em caso afirmativo, qual é o valor da imagem $de\ m$ quando $x = 3$?

Resposta esperada: A função m não está definida para $x = 3$.

Análise *a priori* - parte 4

Para a parte 4, apresentamos uma função *f(x)/g(x)*, cujo limite apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Ao anunciarmos essa situação, tínhamos como intenção mostrar que a utilização de substituições numéricas próximo de $x_0 = 3$, tanto pela esquerda $x \to 3^-$quanto pela direita $x \to 3^+$, as imagens $m(x)$ se aproximam de 6, $m(x) \to 6$, ou seja, existe o $\lim_{x\to 3} m(x) = 6$. Esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, para o limite de uma função existir, necessariamente, ela não precisa estar definida neste ponto dado.

Para realização dessa questão, os alunos transitaram entre as RN e RA, realizando, assim, uma conversão.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA), na parte 1 item a), ocorre o processo de intuição ao solicitarmos ao aluno, depois de observar os dados da Tabela 4, responder para qual valor $m(x)$ se aproxima quando x se torna cada vez mais próximo de 0. Ressaltamos que os processos de intuição e de síntese ocorrem no item b) da parte 1 e no item a) das partes 2, 3 e 4 ao ser interpelado ao aluno sobre o valor do limite ou ao estimar o limite das funções f, g, h e m ao descrever sua compreensão sobre os resultados encontrados.

O processo de mudança entre diferentes representações e tradução entre elas ocorre em todas as partes das atividades ao passar da RA de f para a RN, ao ser solicitado ao aluno o preenchimento da tabela, no item b) da parte 1 e no item a) das partes 2, 3 e 4, quando passar da representação de uma sequência numérica para uma representação algébrica ao determinar ou estimar o limite das funções f, g, h e m.

Já o processo de síntese e análise ocorre no item b) das partes 2, 3 e 4 ao solicitar para o aluno verificar se a função está definida nos pontos $x = 1$ e $x = 3$ para valores dados e, em caso afirmativo, determinar a imagem correspondente. Outro processo de síntese e análise ocorre no item c) da parte 2 ao interpelar ao aluno sobre a afirmação da existência do limite de f e g.

Análise *a posteriori* da Atividade 1 – Determinando limites por meio de valores de funções

Quando foi solicitado à dupla analisar o comportamento da função para valores de x próximo de zero, esta respondeu corretamente que a função se aproximava de 1, item a) da parte 1. Em relação à definição da função em $x = x_0$, a dupla usou o termo "restrição" em relação ao domínio da função para verificar se a função estava, ou não, definida no ponto $x = x_0$. Para as funções f, h, a dupla concluiu corretamente que estas estavam definidas para $x = 0$ e $x = 3$, respectivamente, e para as funções g e m que estas não estavam definidas para $x = 1$ e $x = 3$, respectivamente, conforme podemos verificar nos protocolos de resolução Quadro 11.

Quadro 11 - Protocolo de resolução da dupla

$f(x)$ item a) parte 1	Se aproxima de 1.
$f(x)$ item b) parte 1	(b) Como não há restrição no domínio quando $x=1$, então f está definida e ainda, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.
$g(x)$ item b) parte 2	(b) A função $g(x)$ não está definida em $x=1$, já que seu domínio é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
$h(x)$tem b) parte 3	(b) Sim, pois não há restrições no domínio $h(3) = 3+2 = 5$
$m(x)$ item b) parte 4	(b) Não, pois o domínio de m é $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Fonte: Dados da pesquisa

No decorrer do desenvolvimento da atividade, a dupla apresentou como Imagem Conceitual manifestada, ao significado de limite de uma função, o resultado de aproximação, o qual revela uma concepção intuitiva do limite. Isso pode ser verificado na resolução das questões da atividade na qual é proposto para a dupla preencher, explorar, analisar os dados das tabelas e determinar a existência, ou não, do limite das funções. Na resolução da questão 1, a dupla faz explorações de pontos $(x, f(x))$ e em aproximações simultâneas $x \to 0$ e $f(x) \to 1$ na Tabela 1, cujo objetivo é decidir sobre a existência do $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Na resposta apresentada a esta questão, observa-se que a dupla apresentou Imagem Conceitual ao significado de limites como o resultado de um processo de aproximação $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. E usou termos, como “aproxima de” e “tende a”, para indicar as aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, possibilitando-lhes explicar corretamente a existência do limite nas investigações realizadas na Tabela 1. Nas demais questões, verifica-se que as explorações das Tabelas 2, 3 e 4 permitiram aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, com o intuito da dupla analisar o comportamento das funções *g, h* e *m* em torno do ponto de abscissa $x = x_0$, possibilitando-lhes explicar corretamente a (in)existência do limite da função, o que pode ter contribuído para a compreensão do significado de limite por essa dupla. Essas conclusões podem ser confirmadas no diálogo da dupla indicado no Quadro 12.

Quadro 12 - Protocolo do diálogo entre A3 e A4

<table>
<tr><td>Parte 1 - Diálogo entre A3 e A4 sobre a análise do comportamento de f quando $x \to 0$ e do $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$</td><td>Exploração da tabela</td></tr>
<tr><td>A3: Tem que fazer os cálculos aqui. A função é $f(x) = x^2 + 1$. Para valores menores 0: -1, -0,6... [atribuindo] valores a x menores que zero, as imagens da função se aproximam de 1, não é mesmo?
A4: Tem que colocar os mesmos valores [referindo-se ao lado direito de zero].
A3: Só que positivos [após completar a tabela] para $x = -1 y = 2$ [leu os valores da tabela] as imagens se aproximam de 1.
A4: Sim, isso aí [concordando com A3].
A4: Quando está próximo de zero valores maiores.... [referindo-se ao x) os valores estão se aproximando de 1 (imagens $f(x)$]. O limite da função é 1. [...]
A3: O limite é 1.
A4: É um pela existência dos limites laterais.
A3: O que você falou?... Fez um barulho aqui.
A4: É 1 por causa da existência dos limites laterais.</td><td>Tabela1: Calculando limites por estimativas
<table>
<tr><td colspan="2">Relação entre $f(x) = x^2 + 1$ e x, quando x se aproxima de 0 pela esquerda</td><td colspan="2">Relação entre $f(x) = x^2 + 1$ e x, quando x se aproxima de 0 pela direita</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td>x</td><td>$f(x)$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>-0,6</td><td>1,36</td><td>0,6</td><td>1,36</td></tr>
<tr><td>-0,4</td><td>1,16</td><td>0,4</td><td>1,16</td></tr>
<tr><td>-0,2</td><td>1,04</td><td>0,2</td><td>1,04</td></tr>
<tr><td>-0,1</td><td>1,01</td><td>0,1</td><td>1,01</td></tr>
<tr><td>-0,01</td><td>1,0001</td><td>0,01</td><td>1,0001</td></tr>
<tr><td>-0,0001</td><td>1,00000001</td><td>0,0001</td><td>1,00000001</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Parte 2 - Diálogo entre A3 e A4 sobre o $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$</td><td>Exploração da tabela</td></tr>
</table>

A3: *Seja* $g(x) =$....... *se* $x < 1$ *e* $x > 1$, *complete a tabela a seguir. É para calcular as mesmas "coisinhas", né?*
A4: *Substitui lá na função.*
A3: *Os valores de* x *ficaram...*
A3: *O limite quando* x *tende* a 1 é 3, *né? Tá indo para 3.*
A4: 3 [referindo-se ao valor do limite].
A4: *A função não está definida para* x *=1.*
A3: *Hum, hum!*
A3: *Coloquei assim como as imagens se aproximam de 3 quando* x *se aproxima de 1* ..... *podemos concluir que* $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$.
A4: *Ok.*

Tabela 2: Calculando limites por estimativas

Relação entre *g(x)* e *x*, quando *x* se aproxima de 1 pela esquerda		Relação entre *g(x)* e *x*, quando *x* se aproxima de 1 pela direita	
x	$g(x)$	x	$g(x)$
0	4	2	6
0,5	3,75	1,5	4,25
0,88	3,2256	1,22	3,4884
0,9	3,19	1,11	3,2321
0,99	3,0199	1,01	3,0201
0,999	3,00199	1,001	3,002001
0,9999	3,00019999	1,0001	3,00020001

Parte 3 - Diálogo entre A3 e A4 sobre o $\lim_{x \to 3} h(x)$

Exploração da tabela

A3: *Preencher a tabela a mesma coisa* [...].
A3: *pela esquerda fica 2,....,2,99999, como a função é x, é uma identidade* [referindo-se à primeira sentença], *a imagem fica a mesma. E aí pela direita ficou para x: 3,1;.........;3,0001 e as imagens* $f(x)$... é 3? $[(h(x)]$
A4: *Não.*
A3: *Oi?*
A4: *Não.*
A3: *O quê?*
A4: *Não vai ser 3. Tem que somar 2.*
A3: *Ah?*
A4: [...] a *função.*
A3: *É, tem que somar.*
A4:*Ah! Você tá .... (inaudível).*
A3: *É.*
A4: *Agora entendi.*
A3: *Agora letra ...., [...] podemos conjecturar que limite tende para 3? Escreva com suas palavras.... de acordo com a tabela 3.*
A3: *Então o limite não existe, né?*
A4: *Porque os limites laterais são diferentes.*
A3: *[...] com x tendendo para [...] onde mesmo?*
A4: *Para 3.*
A3: *O limite de h(x) não existe, pois, de acordo com os valores x, tende para 3 para a esquerda, vai para 3, e para a direita vai para 5.*
A4: *Exatamente.*
A3: *[...] como os limites laterais são diferentes, então o limite não existe.*

Tabela 3: Calculando limites por estimativas

Relação entre *h(x)* e *x*, quando *x* se aproxima de 3 pela esquerda		Relação entre *h(x)* e *x*, quando *x* se aproxima de 3 pela esquerda	
x	$h(x)$	x	$h(x)$
2	2	4	6
2,5	2,5	3,5	5,5
2,9	2,9	3,2	5,2
2,99	2,99	3,1	5,1
2,999	2,999	3,01	5,01
2,9999	2,9999	3,001	5,001
2,99999	2,99999	3,0001	5,0001

Parte 4 - Diálogo entre A3 e A4 sobre o $\lim_{x \to 3} (x) = 6$

Exploração da tabela

A3: [...] estime qual o valor da função. Mãos à obra.
[...] a primeira coluna para de x menores que 3 ficou: 2,9; ....; 2,99. (rs)
A4:2,9999.
A3: Isso. É... as imagens: 5,9; .....; enfim, acrescenta o 3, né?
A3: Para x maiores que 3: 3,1; .....;3,001. Enfim, vai acrescentando zeros a última fica 3,000001. As imagens: 5,9; 5,95...
[...].
A3: Quando os valores de aproximam de 3, eles vão para 6, né?
Pesquisador: Quando você fala ele tá aproximando, o que você quer dizer? Pela direita e pela esquerda? Como é?
A3: Pela direita e pela esquerda. Valores próximos de 3 pela direita e pela esquerda.
A4: Pela direita com o mesmo valor.
Pesquisador: Qual a consequência de aproximar pela direita e pela esquerda A4?
[....]
Pesquisador: Mas quem está aproximando de 6?
A4: O f de x [m(x)].
Pesquisador: Então, quando *x* tende a 3, o que acontece?
[...]
A4: $m(x)$ *tende a 6.*
A3: *Quando as imagens aproximam de 3, a função aproxima de 6.*
A4: *Não. Quando x se aproxima de 3, as imagens se aproximam de 6.*
A3: *É isso. Exatamente.*
A3: *Então.... Escrevi em linguagem simbólica também.*

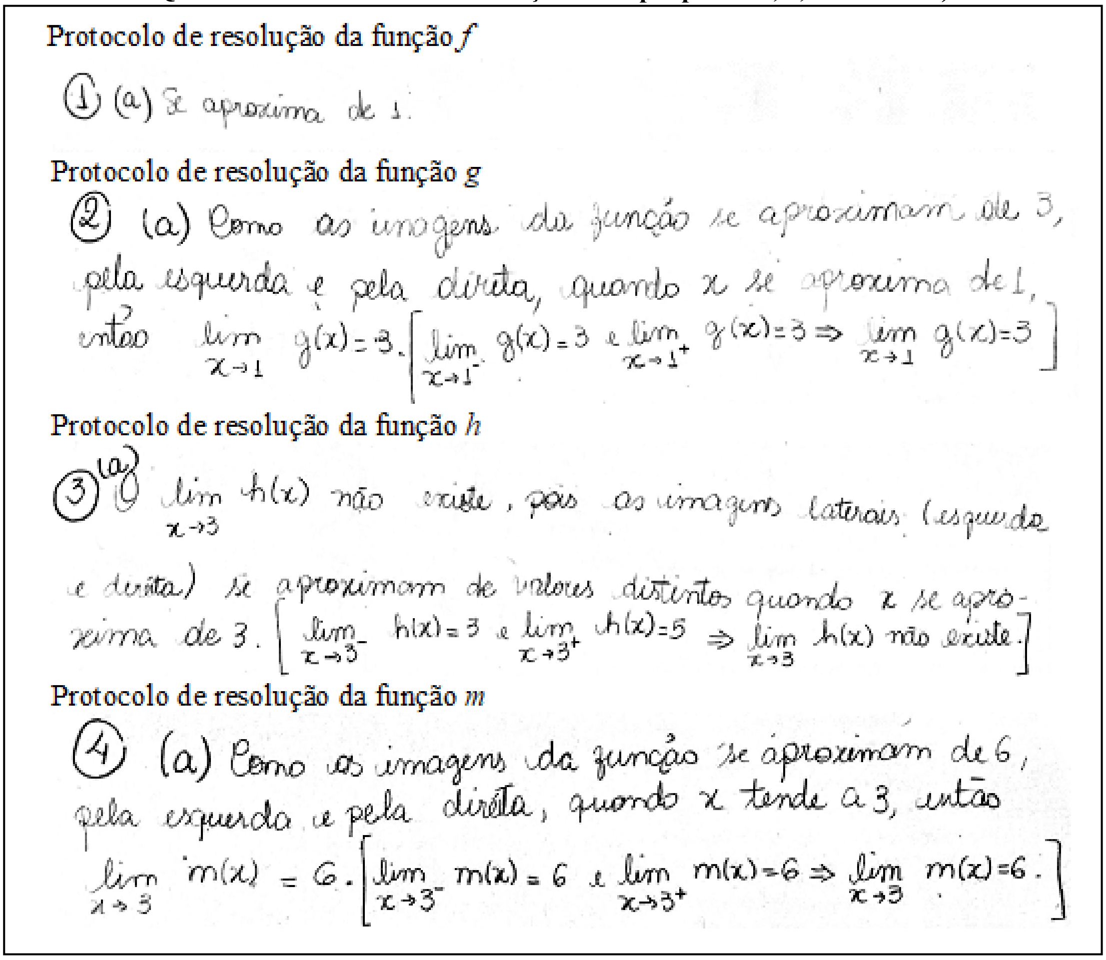
Tabela 4: Calculando limites por estimativas

$x<3$	$m(x)$	$x>3$	$m(x)$
2,9	5,9	3,1	6,1
2,95	5,95	3,01	6,01
2,98	5,98	3,001	6,001
2,99	5,99	3,0001	6,0001
2,999	5,999	3,00001	6,00001
2,9999	5,9999	3,000001	6,000001

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Apresentamos, a seguir, o Quadro 13 do protocolo de resolução da dupla.

Quadro 13 - Protocolos de resolução da dupla partes 1, 2, 3 e 4 item a)


Protocolo de resolução da função *f*

1 (a) Se aproxima de 1.

Protocolo de resolução da função *g*

2 (a) Como as imagens da função se aproximam de 3, pela esquerda e pela direita, quando x se aproxima de 1, então $\lim_{x\to 1} g(x)=3$. [$\lim_{x\to 1^-} g(x)=3$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x)=3$]

Protocolo de resolução da função *h*

3 (a) $\lim_{x\to 3} h(x)$ não existe, pois as imagens laterais (esquerda e direita) se aproximam de valores distintos quando x se aproxima de 3. [$\lim_{x\to 3^-} h(x)=3$ e $\lim_{x\to 3^+} h(x)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 3} h(x)$ não existe.]

Protocolo de resolução da função *m*

4 (a) Como as imagens da função se aproximam de 6, pela esquerda e pela direita, quando x tende a 3, então $\lim_{x\to 3} m(x)=6$. [$\lim_{x\to 3^-} m(x)=6$ e $\lim_{x\to 3^+} m(x)=6 \Rightarrow \lim_{x\to 3} m(x)=6$.]

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Como se pôde perceber no diálogo transcrito acima, A3 e A4 realizaram juntos explorações das Tabelas 1, 2, 3 e 4, das partes 1, 2, 3 e 4 item a), observando as aproximações dos dados quando $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$, com o propósito de compreender o comportamento das imagens das funções quando $x \to x_0$. Na análise de *f*, A3 relata que, quando $x \to 0^-$ por "*valores de x menores que zero as imagens da função se aproximam de* 1". Em seguida, A4 observa que quando $x \to 0^+$ "*por valores maiores... as imagens se aproximam de* 1".

Para as outras funções, na análise da função *g*, A3 observa que, quando $x \to 1^-$ e quando $x \to 1^+$, as imagens $g(x) \to 3$. Em relação à análise da função *h,* quando $x \to 3^-$, A3 verifica que as imagens $h(x) \to 3$: "*como a função x é uma identidade as imagens são as mesmas*". E quando $x \to 3^-$ "é 3"? A4 intervêm e diz que: "*Não. Tem que somar* 2." Após análise dos dados, A3 conclui que: "*pois de acordo com os valores, x tende para 3 para a esquerda* [*h(x)*] *vai para 3 e para a direita* [*h(x)*] *vai para* 5". Na análise de *m,* após explorarem os valores fornecidos pela Tabela 4, os integrantes da dupla reconhecem que $m(x) \to 6$ quando $x \to 3$.

As explorações realizadas nos dados das tabelas e a sua visualização possibilitaram à dupla analisar o comportamento das imagens das funções e concluir que:

$f(x) \to 1$ quando $x \to 0$, $g(x) \to 3$ quando $x \to 1$ e $m(x) \to 6$ quando $x \to 3$, reconhecendo a existência dos limites das funções g e m e a inexistência do limite da função $h(x)$ quando $x \to 3$.

Essa dupla justificou a existência desses limites com base nas aproximações das imagens $g\,(x)$ e $m(x)$ por meio do teorema dos limites laterais; e a não existência do limite de h, por meio da desigualdade dos limites laterais, conforme pode ser verificado nos protocolos de resolução das funções f, g, h e m pela dupla (Quadro 13).

Concluindo, a análise das resoluções da dupla nas quatro partes da Sequência de Atividades 1 nos permitiu verificar que as representações na forma de tabelas foram utilizadas para determinar os valores dos limites solicitados na parte 1 item c) e nos itens a) das partes 2, 3 e 4, assim como o tratamento foi utilizado pelos alunos para calcular o valor da função em um ponto x_0 dado.

É importante ressaltarmos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos do conceito de limite como processo dinâmico permitiu desenvolver o processo de visualização, por exemplo, quando são utilizados os termos "aproximando de" ou "tendendo a" e, ainda, o conceito sobre funções, que lhes permitiu executar com facilidade a conversão forma de tabelas para a representação gráfica das funções f, g, h e m, como pode ser observado no Quadro 14.

Quadro 14 - Conversão elaborada pela dupla

Conversão

Representação em forma de tabelas

Tabela1: Calculando limites por estimativas

Relação entre $f(x) = x^2 + 1$ e x, quando x se aproxima de 0 pela esquerda		Relação entre $f(x) = x^2 + 1$ e x, quando x se aproxima de 0 pela direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1	2	1	2
-0,6	1,36	0,6	1,36
-0,4	1,16	0,4	1,16
-0,2	1,04	0,2	1,04
-0,1	1,01	0,1	1,01
-0,01	1,0001	0,01	1,0001
-0,0001	1,00000001	0,0001	1,00000001

Representação geométrica

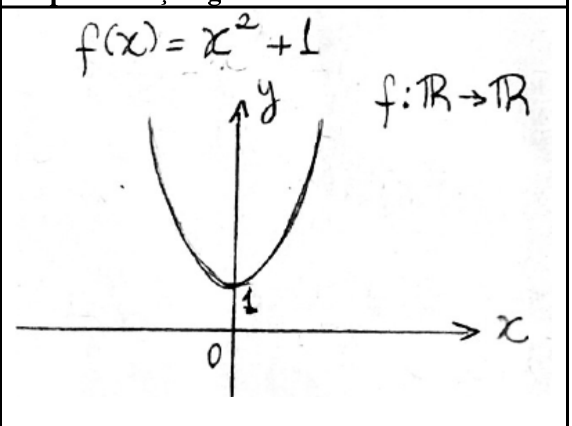


Tabela 2: Calculando limites por estimativas

Relação entre $g(x)$ e x, quando x se aproxima de 1 pela esquerda		Relação entre $g(x)$ e x, quando x se aproxima de 1 pela direita	
x	$g(x)$	x	$g(x)$
0	4	2	6
0,5	3,75	1,5	4,25
0,88	3,2256	1,22	3,4884
0,9	3,19	1,11	3,2321
0,99	3,0199	1,01	3,0201
0,999	3,00199	1,001	3,002001
0,9999	3,00019999	1,0001	3,00020001

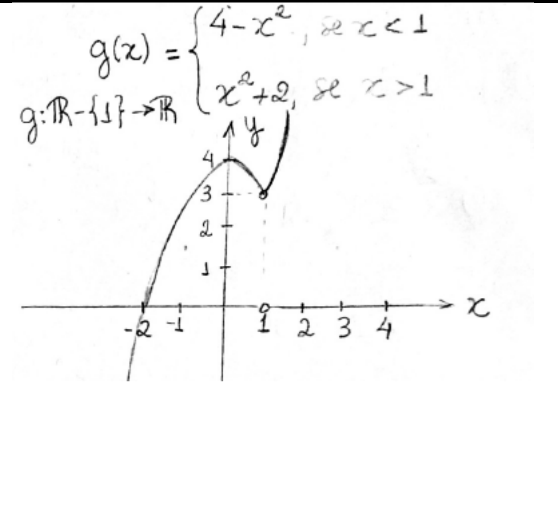


Tabela 3: Calculando limites por estimativas

Relação entre $h(x)$ e x, quando x se aproxima de 3 pela esquerda		Relação entre $h(x)$ e x, quando x se aproxima de 3 pela esquerda	
x	$h(x)$	x	$h(x)$
2	2	4	6
2,5	2,5	3,5	5,5
2,9	2,9	3,2	5,2
2,99	2,99	3,1	5,1
2,999	2,999	3,01	5,01
2,9999	2,9999	3,001	5,001
2,99999	2,99999	3,0001	5,0001

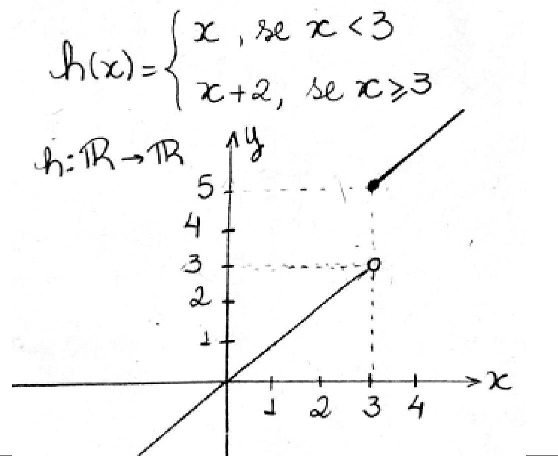
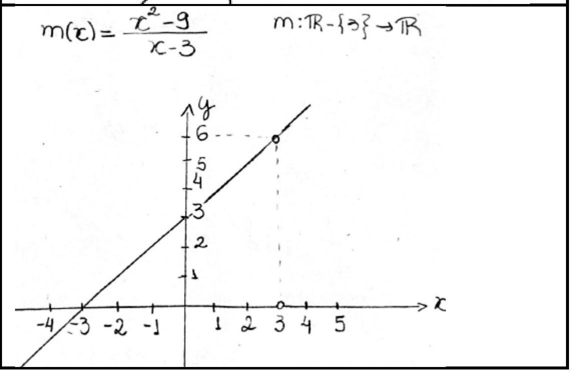


Tabela 4: Calculando limites por estimativas

x<3	$m(x)$	x>3	$m(x)$
2,9	5,9	3,1	6,1
2,95	5,95	3,01	6,01
2,98	5,98	3,001	6,001
2,99	5,99	3,0001	6,0001
2,999	5,999	3,00001	6,00001
2,9999	5,9999	3,000001	6,000001



Fonte: Dados da pesquisa 2021

Destacamos que outras conversões também ocorrem: na parte 1 item a), ao transitar da RN→RLN, quando analisa o comportamento de *f* nas proximidades de $x_0 = 0$; nas partes 2, 3, 4 item b), ao determinar se a função está, ou não, definida no x_0 dado ao transitar da RN→RLN; na parte 1 item b) e nas partes 2, 3 e 4 item a), ao determinar os limites das funções f, g, h e m transitando das RN→RLN→RA; na Parte 2 item c), ao determinar os limites das funções *f* e *g* transitando da RA→RLN.

Quanto aos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA), as atividades possibilitaram realizar os processos descritos a seguir.

O processo de representação simbólica, nas partes 1, 2, 3 e 4 da Sequência de Atividades, quando a dupla usa:

- Notação para se referir ao limite e indicando o ponto de abscissa em estudo ao escrever, por exemplo, $\lim_{x \to 3^-} f(x)$;
- Notação para indicar a existência do limite, quando utiliza o símbolo $=$ ao escrever, por exemplo, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$;
- Notação para se referir ao domínio de uma função, quando se escreve, por exemplo, $m: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$;
- Notação para se referir à existência do limite de uma função, quando se escreve $\Rightarrow$, levando em consideração o teorema dos limites laterais;
- Notação aritmética para se referir ao valor da função h, quando escreve "h (3) = 3 +2 = 5".

O processo de intuição ocorreu no item a) da parte 1 ao deteminar para qual valor $f(x) \to 1$ se aproxima, quando $x \to 0$. Já os processos de intuição e síntese ocorreram na parte 1 item b) e nas partes 2, 3 e 4 ao determinar a (in)existência dos limites das funções fundamentando na existência dos limites laterais. Enquanto o processo de análise ocorreu ao determinar os valores dos limites no item b) da parte 1 e no item a) das partes 2,3 e 4; assim como nos itens b) das partes 2, 3 e 4 ao calcular o possivel valor da função em um x_0 dado. E, por fim, os processos de síntese e análise ocorreram no item c) parte 2 ao comparar e descrever a afirmação dos limites das funções f e g.

Diante do exposto, podemos concluir que, nas resoluções das atividades analisadas, os alunos da dupla foram capazes de realizar com facilidade conversões entre as representações e de fazer interpretação dos resultados obtendo os limites por estimativas. Como exemplo, podemos citar as informações representadas em forma de tabelas, as quais foram interpretadas e os seus respectivos dados convertidos simbolicamente em representações algébricas para determinar a (in)existência do limite de função, como pode ser visto nos itens de todas as questões da Sequência de Atividades 1.

4.2 Sequência de Atividades 2 – Determinando limites com auxílio do *applet 1* do GeoGebra

A Sequência de Atividades 2, disponível no endereço http://www4.pucsp.br/tecmem/Ronaldo/Atividade_2.html, Anexo 3, composta por 6 partes, procura desenvolver o conceito de limite do ponto de vista por aproximação de $f(x)$ e explorando a noção intuitiva desse conceito por meio da utilização do *applet* 1 (construído no GeoGebra).

Salientamos que *applet* 1 possibilita a realização de um trabalho dinâmico, proporcionando a conversão entre os registros de representação gráfica, simbólica e algébrica, contribuindo para uma compreensão mais significativa desse conceito de limite por parte dos alunos. Como afirma Dreyfus,

> os computadores podem servir como ferramentas heurísticas para os matemáticos e estudantes de matemática [...] se a ferramenta está direcionada para fenômenos interessantes e focalizada, corretamente, ela pode mostrar um quadro inesperado, muitas vezes visual, do fenômeno sob estudo, e isso leva a novas ideias, para o reconhecimento de relação antes desconhecidas. (DREYFUS,1991, p.30, tradução nossa)

A elaboração dessa Sequência de Atividades foi fundamentada nas pesquisas desenvolvidas por Cornu (2002), Rocha (2010), Fallas (2016), na tese de Rocha (2016), no artigo de Messias e Brandemberg (2015), bem como no artigo de Soares e Cury (2017).

A Sequência de Atividades 2, Anexo 2, foi realizada de maneira on-line, de forma síncrona, pela plataforma *Google Meet*, e todos os arquivos com as orientações foram enviados compactados para os participantes, via respectivos e-mails.

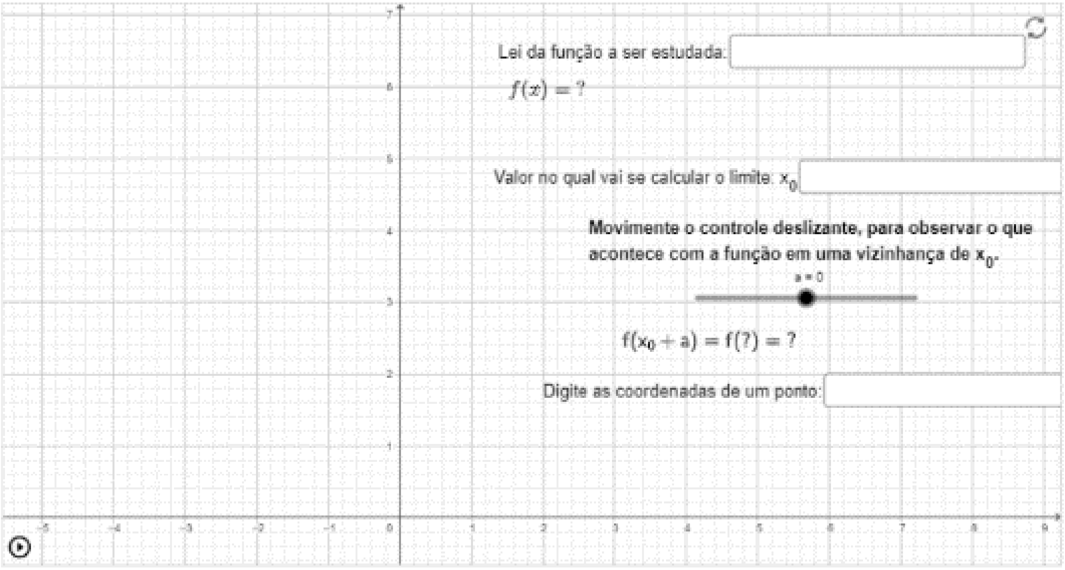
Objetivos:

- Analisar, por meio do *applet* 1 do GeoGebra, o comportamento de uma função nas vizinhanças de um ponto x_0 e no próprio x_0 do seu domínio;
- Visualizar o processo de aproximação das imagens de uma função, bem como os limites laterais manuseando o Controle Deslizante do *applet* 1;
- Estudar a existência, ou não, do limite de uma função;
- Esboçar gráficos de função definida por mais de uma sentença utilizando o comando “Se” no Campo de Entrada;
- Estabelecer a relação entre o limite de uma função no ponto $x = x_0$ e o valor da função no referido ponto.

Procedimentos enviados para os participantes:

De acordo com as instruções enviadas por e-mail, os participantes iniciaram o desenvolvimento das atividades, a seguir, utilizando o *applet* da Figura 22.

Figura 22 - Instruções para desenvolvimento das atividades



Fonte: http://www4.pucsp.br/tecmem/Ronaldo/Atividade_2.html

Sequência de Atividades 2 - parte 1 - Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$, vamos investigar o $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ quando *x* tende ao valor 2.

Abra o *applet* 1 e digite a lei da função, como segue (copie e cole no *applet*): *x^2-2x+1*.

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

a) Movimente o Controle Deslizante e responda: qual o $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? Justifique (escrever no papel).

Resposta esperada: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$**.**

Pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$, assim $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

b) Coloque o controle deslizante no valor 0 e determine o valor de *f (2)*.

Resposta esperada: Para *x* = 2 a função tem como imagem 1, seja, *f (2) = 1*.

c) Compare os dois resultados e escreva, com suas palavras, sua compreensão sobre esses resultados.

Resposta esperada: Temos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ e $f(2) = 1$, logo podemos afirmar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 1$, isto porque a função está definida em $\mathbb{R}$.

Responda em uma folha de papel, tire uma foto legível e envie para o meu e-mail.

Análise *a priori* - parte 1

A parte 1 consiste de uma função polinomial *f* e, para responder aos itens propostos, é utilizado um *applet* 1 do GeoGebra para ser determinado o limite.

Para o item a), esperamos que a dupla, ao movimentar o Controle Deslizante e investigar os valores de $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, visualize que as imagens $f(x) \to 1$ e conclua que se

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 1$. Neste item, os alunos realizam as conversões: ao passar da Representação Algébrica para a Representação Gráfica, ao digitar a lei da função no *applet* 1 do GeoGebra, ao passar da RG para RA para calcular o valor do limite. O tratamento pode ser observado ao calcular o valor do limite da função *f*. Outra conversão se dá ao passar da RN para a RLN, ao interpretar os resultados obtidos. Este item permite os seguintes movimentos: RA → RG → RA → RN → RLN.

Em relação ao item b), a nossa expectativa é que, ao posicionar o Controle Deslizante em $x_0 = 2$, a dupla visualize que a função assume o valor 1 e que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos é que isso só é possível pelo fato de *f* ser contínua em ℝ.

Para o item c), esperamos que a dupla visualize, ao movimentar o Controle Deslizante, que a função está definida para $x_0 = 2$ e que a sua imagem correspondente é igual a 1, ou seja, $f(2) = 1$ e que o $\lim_{x \to 2} f(x)$ tem o mesmo valor da função no ponto $x_0 = 2$. Nesse caso, esperamos como Imagem Conceitual manifestada pela dupla é de que, como a *f* está definida para $x_0 = 2$, pode-se afirmar que: se $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 1$, então *f* é contínua em $x_0 = 2$. Este item propicia ao aluno executar os seguintes movimentos: da RN para a RLN, quando ele tem que descrever sobre sua interpretação em relação ao item b), ou seja, RN → RLN realizando, portanto, uma conversão.

Quanto ao PMA na parte 1, itens a) e b), ocorrem os processos de visualização, intuição, síntese e análise. A visualização e a intuição ocorrem ao investigar $x \to 2^-$, $x \to 2^+$ e perceber que $f(x) \to 1$, ao posicionar o Controle Deslizante na posição 0 e determinar que $f(2) = 1$. A síntese ocorre ao combinar os valores aproximados da função com o conceito de limite; e a análise, ao realizar as investigações nas vizinhanças de 2 e concluir que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$. No item c) podem ocorrer os processos de: análise, ao combinar os valores aproximados de uma função com o conceito de limite, e síntese, ao comparar os dois resultados entre o $\lim_{x \to 2} f(x)$ e $f(2)$ e descrever a compreensão sobre os dois resultados.

Sequência de Atividades 2 - parte 2 - Dado o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, se x < 1 \\ 4 - x, se x \geq 1 \end{cases}$, vamos investigar o $\lim_{x \to 1} f(x)$ (limite da função quando x tende ao valor 1).

Abra o *applet* 1 e digite a lei da função, como segue (copie e cole no *applet*):

Se(x<1,x^2+2,4-x)

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

a) Movimente o Controle Deslizante e responda: qual o $\lim_{x \to 1} f(x)$? Justifique.

Resposta esperada: Nossa expectativa é que o aluno, ao fazer simulações nas proximidades de $x_0 = 1$, perceba que, à medida que x se aproxima de $x_0 = 1$ pela esquerda e pela direita, $f(x)$ se aproxima de 3.

b) Coloque o Controle Deslizante no valor 0 e determine o valor $f(1)$. Compare os dois resultados e escreva, com suas palavras, sua compreensão sobre esses resultados.

Resposta esperada: Esperamos que, por ser uma função definida por mais de uma sentença, ao posicionar o Controle Deslizante em $x_0 = 1$, o participante perceba que a função está definida neste ponto e o valor da sua imagem seja 3, ou seja, $f(1) = 3$.

Análise *a priori* da parte 2

Para a parte 2, é dada uma função f de duas sentenças definida em $\mathbb{R}$. Para o item a), temos como expectativa que a dupla, ao investigar os valores de $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, visualize que as imagens $f(x) \to 3$ e que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que se $\lim_{x\to 1} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$. Em relação ao item b), após seguir a instrução no referido item e ao investigar o valor da função para $x_0 = 1$, determinar que a função está definida neste ponto e sua imagem correspondente seja 3. Esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, se $f(1) = 3$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, então $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$, ou seja, que o limite da função tenha a mesma imagem de f.

Esta parte possibilita ao aluno transitar do Representação Algébrica para a Representação Gráfica (realizando uma conversão), RG → RA, ao solicitar o limite da função f (conversão), RA → RN (conversão). Ao determinar o valor do limite da função f, realiza-se um tratamento. Outra transição entre registros é realizada quando o aluno compara e descreve a sua compreensão a respeito dos resultados, nesse caso, da RN → RLN.

Quanto ao PMA, a parte 2 possibilita desenvolver os processos de visualização, intuição, análise e síntese. A visualização e a intuição ocorrem no item a) ao investigar $x \to 1^-$, $x \to 1^+$ e perceber que as imagens $f(x) \to 3$. O processo de síntese e análise, no item b), são obtidos ao comparar e descrever os resultados encontrados para $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $f(1)$.

Sequência de Atividades 2 - parte 3 - Observe a representação gráfica da função

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, se x < 1 \\ x + 1, se x > 1 \end{cases}$

Abra o *applet* e digite a lei da função, como segue (copie e cole no *applet*):

Se(x<1, x^2, Se(x>1, x+1))

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

Movimente o Controle Deslizante e responda: qual é o limite quando x tende a 1? É 1 ou 2? Dê uma interpretação do resultado encontrado.

Resposta esperada: Esperamos que o aluno, ao movimentar o Controle Deslizante, determine que o $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$. E como os limites laterais são diferentes, o limite da função não assume nem o valor 1, nem o valor 2, ou seja, não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Análise *a priori* -parte 3

Para a parte 3, é proposta uma função f definida por duas sentenças não definida em $x_0 = 1$. Nossa expectativa é que os alunos, ao fazerem simulações utilizando o Controle Deslizante nas proximidades de $x_0 = 1$, $x \to 1^-$, visualizem que $f(x) \to 1$, então $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$, e quando $x \to 1^+$, $f(x) \to 2$, logo $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ e, assim, que a Imagem Conceitual manifestada por eles seja de que, se o limite de uma função existe, é necessário que os limites laterais sejam iguais; e concluem que, como os limites laterais são diferentes, o limite da função f não existe, ou seja, $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.

Nesta parte, são realizadas as seguintes conversões: RA → RG, da RG → RN e da RN → RLN.

Sequência de Atividades 2 - parte 4 - Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, \text{para } x \neq 2 \\ 1, \text{para } x = 2 \end{cases}$, vamos investigar o valor do $\lim_{x \to 2} f(x)$ (limite da função $f(x)$ para x tendendo a 2).

Abra o *applet* e digite a lei da função, como segue (copie e cole no *applet* 1):

Se(x≠2,(x^2-4)/(x-2), 1)

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

a) Movimente o Controle Deslizante e responda: qual $\lim_{x \to 2} f(x)$? Interprete o seu resultado.

Resposta esperada: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$**.**

Como os limites laterais são iguais, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to 2} f(x) = 4$, isto é, quanto mais x se aproxima de 2 pela direita e pela esquerda, mais $f(x)$ se aproxima de 4.

b) Coloque o Controle Deslizante no valor 0 e determine o valor $f(2)$. Compare os dois resultados e escreva, com suas palavras, sua compreensão sobre os dois resultados.

Resposta esperada: Para $x = 2$, a imagem de f é 1, ou seja, $f(2) = 1$.

Como $f(2) = 1$ e $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, podemos concluir $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

Análise *a priori* - parte 4

Em relação à parte 4, a função proposta é uma função de domínio ℝ. Para o item a), esperamos que o aluno, ao investigar utilizando o Controle Deslizante nas proximidades de $x_0 = 2$, tanto pela direita quanto pela esquerda, visualize que $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 4. Nossa expectativa é que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, pelo fato de os limites laterais serem iguais, o limite da função existe e é igual a 4. Ele poderá, também, usar a notação simbólica, ao investigar os valores de $x \to 2^-$ e os valores de $x \to 2^+$, e concluir que $f(x) \to 4$. Logo, como $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Para o item b), esperamos que os alunos, ao posicionarem o Controle Deslizante sobre o ponto $x_0 = 2$, conforme instrução, visualizem que para $x_0 = 2$ a imagem de f é 1. Dessa maneira, esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, para o limite de uma função existir, necessariamente, a imagem de uma função no ponto considerado para o cálculo do limite não precisa ter igual valor do valor do limite. Nesse caso, o $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ enquanto $f(2) = 1$, logo $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, porém existe $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

Nesta parte, os alunos transitam da RA → RG ao digitarem a função dada no *applet* 1 e esboçam a representação gráfica de f, da RG → RA, ao determinarem os limites de f, da RA→RLN. Não interpretam o resultado encontrado, da RG → RN, ao determinarem o valor da imagem de f para $x_0 = 2$ e da RN → RLN ao descreverem sua compreensão sobre os resultados encontrados. Assim, os alunos fazem as seguintes conversões: RA → RG → RA → RLN → RG → RN → RLN.

Em relação ao PMA, a parte 4 propicia ao estudante o desenvolvimento dos processos de visualização, intuição, síntese e análise. No item a), ocorrem os processos de visualização e intuição ao investigar $x \to 2$ e $x \to 2^+$ e perceber que as imagens $f(x) \to 4$. A visualização, a síntese e a análise ocorrem no item b) ao posicionar o Controle Deslizante no valor 0 e determinar o valor para $f(2) = 1$. Em seguida, interpretar os resultados entre $\lim_{x\to 2} f(x)$ e $f(2)$.

Sequência de Atividades 2 - parte 5 - (THOMAS, 2010, p.74**)** Utilizando uma calculadora, seja $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$, vamos investigar o valor do $\lim_{x\to 0} f(x)$ (limite da função $f(x)$ para x tendendo a 0). Complete a Tabela 5 na coluna *f (x)* a seguir:

Tabela 5: Calculando limites por estimativas

Relação entre $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ e x, quando x se aproxima de *0* pela esquerda		Relação entre $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ e x, quando x se aproxima de *0* pela direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0,1		0,1	
-0,0001		0,0001	
-0,0000001		0,0000005	

a) Observando a tabela, à medida que tomamos valores ainda menores de *x*, qual seria o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$?

Resposta esperada: Quanto mais próximo *x* estiver de 0, mais próximo $f(x)$ está de 0,05.

Vamos investigar o limite da função usando o *applet*: abra o *applet* 1 e digite a lei da função, como segue (copie e cole no *applet* 1): *Se(x≠0,((sqrt(x^2+100)-10))/x^2)*

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

b) Qual seria o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$?

Resposta esperada: O $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = 0{,}05$ confirmando as estimativas obtidas na tabela.

Análise *a priori*- parte 5

Para a parte 5, é proposta uma função quociente não definida para $x_0 = 0$ e dada uma tabela para ser completada, determinando os limites por estimativas e depois comparando estes resultados utilizando um *applet* 1 do GeoGebra.

Para o item a), é solicitado aos alunos que completem a tabela, e a nossa expectativa é que, ao completarem a tabela e analisarem os valores para $x \to 0^-$ $x \to 0^-$e $x \to 0^+$, $f(x) \to 0{,}05$, concluam que, se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0{,}05$.

Como podemos observar, neste item o aluno realiza um tratamento ao determinar os limites de *f* e uma conversão, ao passar do valor numérico para o algébrico, ao definir o limite de *f*.

Para o item b), esperamos que o aluno, utilizando o *applet* 1, ao investigar valores de $x \to 0^-$e $x \to 0^+$, visualize que $f(x) \to 0{,}05$, conforme estimativas obtidas no item a) e, assim, confirmar que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0{,}05$.

Este item propicia a realização de uma conversão ao passar da RA digitando a função no *applet* 1 a lei de formação de *f*, obtendo a RG; e da RG para a RN, ao determinar o valor do limite desta função. Esperamos que o aluno, ao manusear o Controle Deslizante, fazendo investigações nas proximidades de *f*, conclua que o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} = 0{,}05$.

Quanto ao PMA, na parte 5 ocorrem os processos de visualização, intuição, síntese e abstração. A visualização e a intuição ocorrem ao passar da RN da tabela para a RA, ao investigar os valores de $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$, perceber que as imagens $f(x) \to 0{,}05$ e, ao usar o *applet* 1 do GeoGebra para determinar o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, perceber que o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$=0,05. A síntese e a abstração ocorrem ao determinar o limite de f e concluir que o limite encontrado na Tabela 5 por estimativas é o mesmo valor encontrado usando o *applet* 1.

Sequência de Atividades 2 - parte 6 - Seja $f: [0, +\infty) - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$, vamos investigar o valor do $\lim_{x\to 2} f(x)$ quando x tende ao valor 2.

a) Complete na Tabela 6, a seguir, a coluna *f (x)*:

Tabela 6: Calculando limites por estimativas

X	$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
1.9999	
2.0001	

b) Fundamente a resposta do item a) com o auxílio do *applet* 1do GeoGebra.

Para isso, abra o *applet* 1 e digite a lei da função, como segue (copie e cole no *applet* 1):

Se(x ≠ 2, (x - 2) / (sqrt(x) - sqrt(2)))

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

Movimente o Controle Deslizante e responda: qual $\lim_{x\to 2} f(x)$?

Resposta esperada: O $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2{,}8249$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2{,}832$, isto implica que, de acordo com as investigações, os limites laterais são diferentes, e o limite da função é $2\sqrt{2}$.

c) Compare os dois resultados e escreva, com suas palavras, sua compreensão sobre eles.

Resposta esperada: Podemos verificar que tanto os resultados em relação aos limites laterais quanto os dados da tabela e os obtidos pelo *applet* 1 são diferentes. E, utilizando outros procedimentos, propriedades e conjugados de expressões, concluímos por esta análise que o $\lim_{x\to 2} f(x)$ é igual a $2\sqrt{2}$.

Análise *a priori*- parte 6

Para a parte 6, a função f proposta não está definida em $x_0 = 2$ e, somente por estimativas, não é possível determinar o limite da função f. Esperamos que o aluno, ao investigar, quando $x \to 2^-$, perceba que $f(x) \to 2{,}8328611$ e, quando $x \to 2^+$, $f(x) \to 2{,}8248587$. Logo, as imagens $f(x)$ não convergem para o mesmo valor mediante os valores disponibilizados na tabela. A Imagem Conceitual manifestada pelo aluno pode ser de que o limite de f não exista, ou seja, se $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^=} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$. No entanto, o $\lim_{x\to 2} f(x)$ é igual a $2\sqrt{2}$.

Na investigação do item b), utilizando o Controle Deslizante do *applet* 1 do GeoGebra, quando $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, percebe-se que os valores das imagens $f(x)$ assumem valores diferentes, mas esperamos que o aluno perceba que é visível que o limite de f existe por meio da observação da Representação Gráfica, apresentada na análise *a posteriori*.

Para o item c), nossa expectativa é que o aluno compare os resultados obtidos no item a) e no item b), depois verifique que tanto os resultados em relação aos limites laterais quanto os dados da tabela e os obtidos pelo *applet* 1 são diferentes. E, utilizando outros procedimentos, propriedades e conjugados de expressões, conclua por esta análise que o $\lim_{x \to 2} f(x)$ é igual a $2\sqrt{2}$.

E, por último, a parte 6 possibilita o desenvolvimento dos seguintes processos: visualização, intuição, síntese, análise e abstração. Os processos de visualização e intuição ocorrem nos itens a) e b) ao preencher a Tabela 6, investigar os valores de $x \to 2^-$ e perceber que as imagens $f(x)$ $\to$2,8328611, e, quando $x \to 2^+$, perceber que $f(x) = 2{,}8248587$; ao usar o *applet* 1 e investigar os valores de $x \to 2^-$, perceber que $f(x) \to 2{,}8248587$ e, quando $x \to 2^+$, $f(x) = 2{,}83196$. Já a síntese e a abstração ocorrem nos itens b) e c) ao determinar o limite de f e ao descrever a compreensão sobre os resultados encontrados. O processo de análise pode ocorrer ao calcular o valor do limite da função.

Análise *a posteriori* da Sequência de Atividades 2 - Determinando limites com auxílio do *applet* 1 do GeoGebra

A Sequência de Atividades 2 é composta por 6 partes, apresentando as seguintes funções: uma função quadrática; duas funções definidas por duas sentenças; uma função contínua e outra descontínua; três funções com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Quanto aos processos do PMA, a Sequência de Atividades 2 nos permite desenvolver os processos de: visualização, mudança de representação e tradução entre elas, intuição, síntese, generalização e abstração.

O processo de visualização e mudança de representação e tradução entre elas ocorre em todas as partes da Sequência de Atividades 2 quando é feita a mudança de representação da forma algébrica e obtenção da representação gráfica com auxílio do *applet* 1 do GeoGebra.

Na parte 1, no item a), ocorrem os processos de visualização e intuição ao investigar $x \to 2^-$ $x \to 2^+$ e perceber que as imagens $f(x) \to 1$, e no item b), ao posicionar o Controle Deslizante na posição 0 que $f(2) = 1$; na parte 2, item a), ao investigar $x \to 1^-$, $x \to 1^+$ e perceber que $f(x) \to 3$, no item b), ao posicionar o controle Deslizante em $x_0 = 0$; na parte 3, ao investigar que, quando $x \to 1^-$, $f(x) \to 1$ e, quando $x \to 1^+$, $f(x) \to 2$; na parte 4, ao investigar $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, perceber que $f(x) \to 4$ e, ao posicionar o Controle Deslizante em $x_0 = 0$, comparar os dois resultados encontrados nos itens a) e b); na parte 5, ao investigar os valores $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ tanto pela tabela quanto pelo *apple*t na determinação do limite de f, e na parte 6, nos itens a) e b), ao preencher a respectiva tabela da atividade (Tabela 6). Ao investigar os valores de $x \to 2^-$, percebe-se que $f(x) \to 2{,}8328611$ e, quando $x \to 2^+$, $f(x) \to 2{,}8248587$. No entanto, ao usar o *applet* 1 e investigar os valores de $x \to 2^-$, verifica-se que $f(x) = 2{,}82485$ e, quando $x \to 2^+$, $f(x) = 2{,}83196$.

O processo de síntese ocorre na parte 1, item a), ao realizar as investigações nas vizinhanças de 2 e concluir que $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$; na parte 2, ao comparar e descrever os resultados encontrados para $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $f(1)$; na parte 3, ao interpretar o resultado encontrado; na parte, 4 item a), ao investigar $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, perceber que $f(x) \to 4$ e, no item b), comparar os resultados encontrados; na parte 5, determinar o limite de f e concluir que o limite encontrado, por estimativas, na Tabela 5 da respectiva atividade, é o mesmo valor encontrado usando o *applet* 1, e na parte 6, ao fundamentar o valor do limite encontrado pela tabela no item a) com o valor do limite determinado pelas investigações realizadas pelo *applet*, no item c), ao descrever os resultados encontrados, e no item d), ao vincular a existência do limite aos limites laterais.

O processo de análise ocorre nas partes 1, 2 e 4, itens a) e b), ao determinar o valor do limite e ao calcular o valor da função em $x = 2$, $x = 1$ e $x = 2$, respectivamente; na parte 5, ao calcular o limite por estimativa, ao utilizar o *applet* para determinar o valor do limite e comparar os resultados encontrados; na parte 6, ao descrever os resultados dos limites encontrados, e no item d), ao apresentar uma maneira para determinar o valor de um limite de uma função.

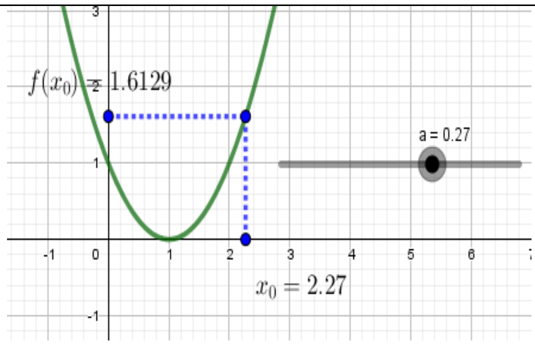
Por fim, os processos de abstração e de generalização ocorrem parte 6, item d), ao interpelar o aluno a respeito da existência do limite de uma função.

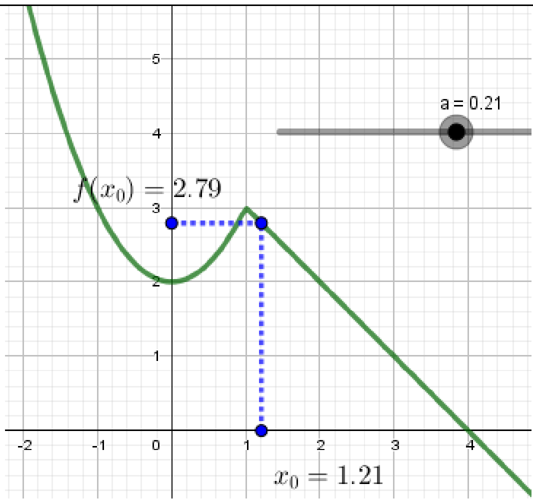
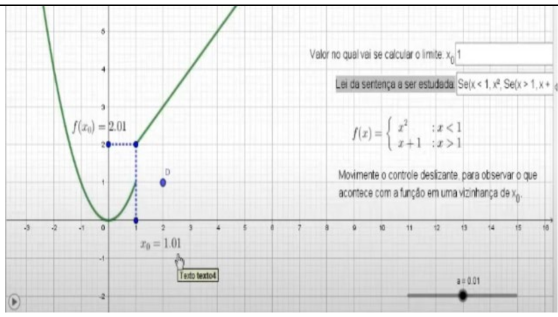
Observamos, então, que as questões propostas na Sequência de Atividades 2 têm como objetivo verificar qual a Imagem Conceitual manifestada pelo aluno associada ao significado do limite de uma função.

Nas resoluções das questões que compõem a Sequência de Atividades 2, a dupla realiza explorações dinâmicas, utilizando o Controle Deslizante do *applet* 1 do GeoGebra, de pontos $(x, f(x))$ gerados e de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$ explorando as representações gráficas das funções, apresentando como Imagem Conceitual manifestada o significado de limite como aproximação, com o objetivo de decidir e justificar a existência, ou não, do $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Na resposta referente ao item a), parte 1, a dupla apresentou como Imagem Conceitual o significado de limite como aproximação. Ainda utilizou os termos "aproximar de" e "tender a" para traduzir as aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. Essas aproximações possibilitaram à dupla explicar corretamente a existência, ou não, do limite com as investigações auxiliadas pelo *applet* 1. Também verificou, com as explorações de x e $f(x)$ das funções que contemplavam as questões da atividade, utilizando o Controle Deslizante do *applet* 1 do GeoGebra, que estas permitiram realizar simulações de pontos gerados $(x, f(x))$ por aproximações simultâneas de x, quando $x \to x_0$, e $f(x)$, quando $f(x) \to L$, provocando um movimento dinâmico de f em torno de $x = x_0$, o que nos leva a considerar que houve uma contribuição para a compreensão do significado de limite. O Quadro 15, abaixo, indica as conclusões do diálogo entre A3 e A4.

Quadro 15 - Diálogo entre A3 e A4 da dupla

Parte 1, item a), diálogo da análise do $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$	**Exploração de f no *applet* do GeoGebra**
[......] A3: *Vou copiar e colar no applet a função.* A4: *No primeiro campo, você coloca 2 segundo a função* A3: *O que?* A4: *Volta lá no applet.* A3: *Tô no applet.* A4: *Olá o valor que se vai calcular o limite. O x_0 vai ser 2.* [...] A3: *Ah, entendi. Agora vou ver o que está pedindo. Movimente o Controle Deslizante.* [...] *movimentar....* [A3 movimentou o Controle Deslizante] *e...* *Não entendi nada... Movimente o Controle Deslizante dentro de uma vizinhança ... ah, entendi o que é isso aqui* [referindo-se ao Controle Deslizante] *...uma vizinhança desse ponto 2 e alguma coisa...* *.... O que a gente tá calculando aqui é uma .... é basicamente para onde a vizinhança vai. A vizinhança tá caminhando para ... pra 1.* A4: *Pra 1 aí, tanto pela esquerda quanto para a direita.* A3**:** *Temos que* determinar o $\lim_{x\to 2} f(x)$*... esse **a** é o domínio, não é?* [O aluno está referindo-se ao Controle Deslizante.] A4: *O* a? A3: *Esse é um intervalo .... entendi. Esse **a** funciona como delta à medida que vai se aproximando de .... as imagens aproximam de 1.* [....] A4: *Como você escreveu?* A3**:** *Assim, quando **a*** [Controle Deslizante] *é positivo, **a** tá entre -1 e 1, a função $f(x_0 + a)$ é a imagem e tende a 1, mas quando **a** é negativo.... não tô conseguindo escrever.* A4: *Faz o seguinte, esquece esse **a**. Vamos descrever conforme a ferramenta* [Controle	

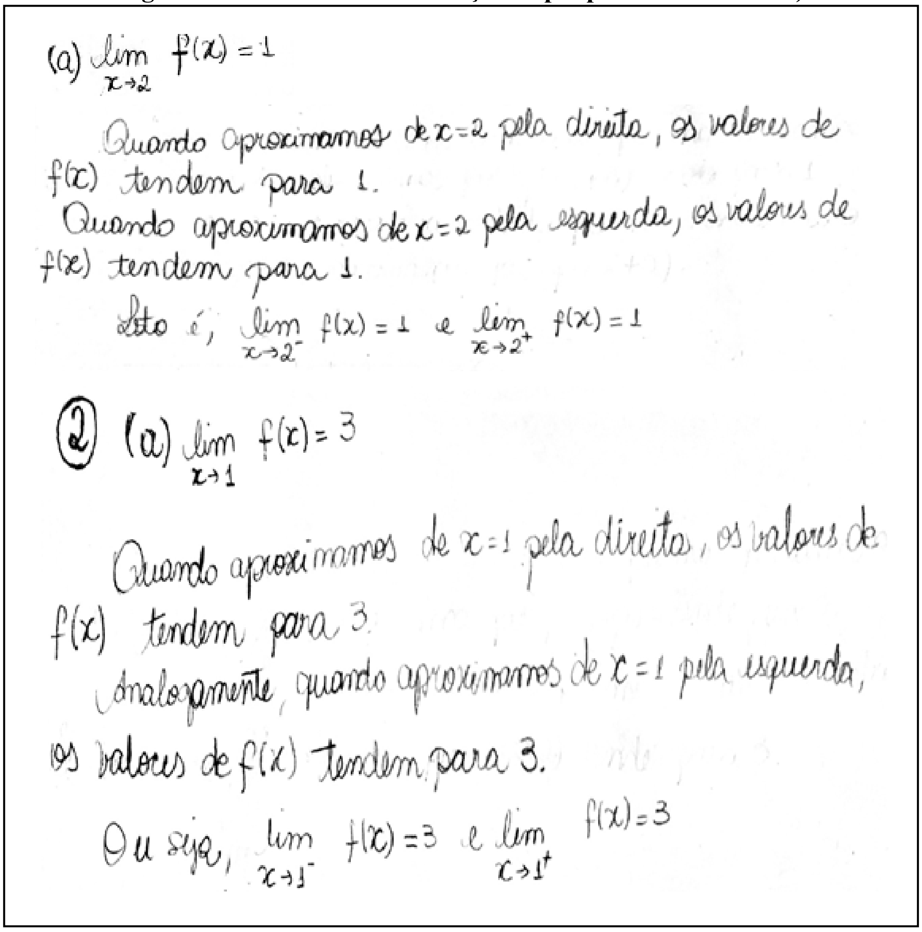
Deslizante]. *Primeiro colocamos que* $x_0 = 2$, *não foi?* A3**:** *Certo.* A4**:** *Movimente o Controle Deslizante para a esquerda e para a direita de* $x_0 = 2$. *Os valores à direita e à esquerda de* $x_0 = 2$ *vão reduzindo e* $f(x)$ *tende a 1* [indicam que o limite existe e registram que $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ pois $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$]. *Tudo certo até aí?* **A3:** *certo.*	
Parte 2, item a), diálogo da análise do $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$	**Exploração de *f* no *applet* 1 do GeoGebra**
A3:[...] *movimente o controle deslizante e determine o limite.* [Movimentou o controle deslizante para a esquerda e para direita enquanto lia a questão.] A3: *Qual o limite quando x tende para 1? Justifique.* A4: *É* 3. A3: *Seu áudio tá muito baixo.* A4: *É* 3. A3: *O limite vai ser 3, né*? [Conferindo, movimentando o Controle Deslizante para a esquerda e para a direita] *Vou tentar parafrasear a questão anterior.* A4: *Eu não sei se você colocou os limites laterais. Acho que deveria colocar somente o limite para ficar mais compacto, não?* A3: *Tá.* A4: *É porque a 3 e a 4 segue a mesma ideia, só que elas não são contínuas.* [...]	
Parte 3, item a), diálogo da análise do $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$	**Exploração de *f* no *applet* 1 do GeoGebra**
A4: *Qual o limite quando x tende a 1?* A3: *É 1 ou 2? Dê uma interpretação.... vi, rapaz!* A4: *É porque pela esquerda é 1e pela direita é 2.* A3; *Então, eu vou escrever a mesma resposta...* A4: *Só que diferente.* A3: *É. Aí eu vou escrever....* *Aí eu vou falar que quando x tende a 1.....* A4: *O limite não existe.* A3: *Vou escrever aqui e te falo.* [...] Pesquisador: Repete aí. A3: *Quando a é negativo, a função decresce* [referindo-se ao Controle Deslizante] ... *a imagem estará se aproximando de 2.* Pesquisador: O que você chamou de decrescer aí? A3: *Eu coloquei que decresce à medida que a gente movimenta o Controle Deslizante.* Pesquisador: Aí na questão não seria investigar nas vizinhanças de 1? Aproximando de 1 pela esquerda e pela direita? A3: *Sim.* A4: *Ao invés de falar decresce, falar em aproximar e....* Pesquisador: *Isso.* A3: *Entendi.*	

Pesquisador: Vocês estão investigando à direita e à esquerda de 1. Não é isso? A3: *Sim.* A4: *Ao invés de você ficar colocando o* ***a*** *aumentando e diminuindo* [referindo-se ao **a** do Controle Deslizante] *... você falar que está afastando ou aproximando do 1, pela esquerda e pela direita, é melhor falar....* A3: *Afastando ou se aproximando de 1? Qual a diferença entre aproximar e afastar* [movimentando o Controle Deslizante]*? Afastar é ir embora... Eu posso aproximar de duas maneiras: pela esquerda e pela direita.* A4: *Tá. Primeiro você escreveu o quê? De qual lado você escreveu?* A3: *Essa resposta...... quando* ***a*** *decresce...* A4: *Substitui essa parte para valores maiores que 1 se aproximando do 1...* A3: *Quando* ***a*** [referindo-se aos valores do Controle Deslizante] *é positivo e sim aproximando de 1?* *A4: Não. Não fala do* ***a*** [Controle Deslizante]**.** *Para valores do 1 aproximando pela direita*. A3: *Tá. Quando aproximamos de 1... Então....* A4: *Vai ter que tirar essa parte do* ***a*** [referindo-se ao Controle Deslizante]. A3: *Misericórdia....* [....] *Quando aproximamos de 1..* A4: *Pela direita.* A3: *Os valores de f de x tende a 2 pela direita e pela esquerda 1*. A4: *Isso na 3* [questão 3]*, né?* A3: *É.* [...] A3: *Pronto.* A4: *Não deu para achar o limite, né?* A3: *Quando movimentamos* ***a*** *para a esquerda e para a direita, o limite da função à esquerda, o limite de f de x é 1, e pela direita é 2.*	

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir apresentamos os protocolos de resolução da dupla das partes 1, 2 e 3, conforme Figuras 23 e 24.

Figura 23 - Protocolo de resolução dupla parte 1 e 2 item a)



(a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

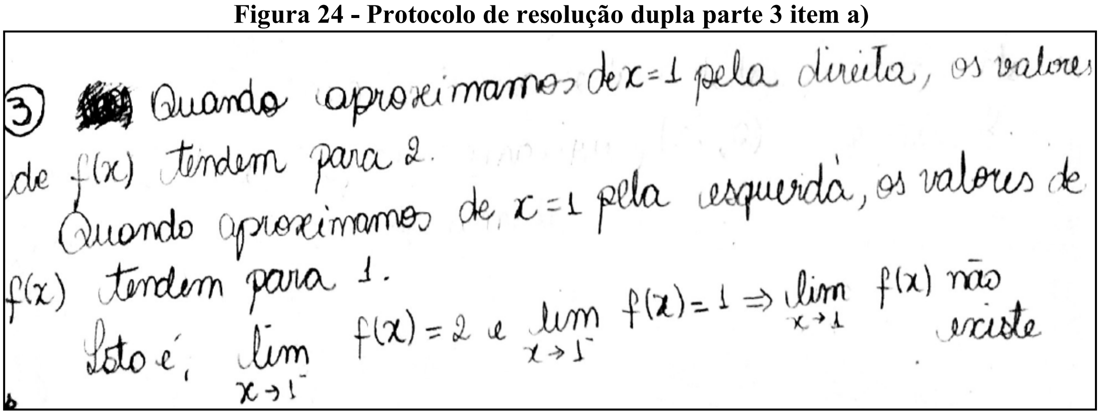
Quando aproximamos de $x=2$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 1.
Quando aproximamos de $x=2$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 1.
Isto é, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

2 (a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Quando aproximamos de $x=1$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 3.
Analogamente, quando aproximamos de $x=1$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 3.
Ou seja, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 24 - Protocolo de resolução dupla parte 3 item a)



3 Quando aproximamos de $x=1$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 2.
Quando aproximamos de $x=1$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 1.
Isto é, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo sobre o item a) das partes 1, 2 e 3**,** os participantes A3 e A4 realizam investigações nas Representações Gráficas das funções *f* com o auxílio do Controle Deslizante do *applet* 1 do GeoGebra, que continha as representações gráficas das questões, considerando $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, assim como $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, a fim de compreender o comportamento das imagens *f* (*x*), quando $x \to 2$, da parte 1, e quando $x \to 1$, das partes 2 e 3, respectivamente. Na análise de *f* da parte 1, A4 solicita a A3 que: "*Movimente o Controle Deslizante para a esquerda e para a direita de* $x_0 = 2$". Em seguida, após visualizar o comportamento das imagens *f* (*x*), conclui que: *"Os valores à direita e à esquerda de* $x_0 = 2$ *vão reduzindo e f* (*x*) *tende a 1*". Na análise da parte 2, quando A3 faz $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, visualiza que $f(x) \to 3$. Depois, na análise de f da parte 3, A3 inicia seu raciocínio: "*Quando aproximamos de 1*". É interrompido por A4, que complementa: "*pela direita*". A3 retoma o seu raciocínio e conclui: "*Os valores de f de x tende a 2 pela direita e pela esquerda 1*".

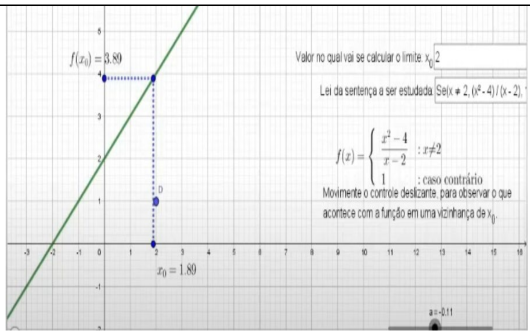
As investigações realizadas nas representações gráficas de f, das partes 1 e 2, utilizando o Controle Deslizante do *applet* 1, quando $x \to 2^-$ e $x \to 2^-$, e quando $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, promovem comportamentos dinâmicos das imagens de f, possibilitando à dupla reconhecer que $f(x) \to 1$ e $f(x) \to 3$, respectivamente. E para a parte 3, quando $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, possibilitaram à dupla reconhecer que as imagens $f(x)$ não convergem para o mesmo valor.

A visualização do comportamento das imagens de f, quando $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$, da parte 1 e da parte 2, quando $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, mostra que $f(x) \to 1$ e $f(x) \to 3$, respectivamente, o que permitiu à dupla concluir corretamente a existência do $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, justificando por meio do teorema dos limites laterais, conforme protocolo de resolução parte 1 e 2- Figura 23.

Assim, a visualização do comportamento das imagens de f, da parte 3, permitiu à dupla perceber que, quando $x \to 1^-$ e $f(x) \to 1$, o $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ e, quando $x \to 1^+$ e $f(x) \to 2$, então o $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, e concluir corretamente a inexistência do $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ conforme protocolo da Figura 24.

As investigações realizadas nas Representações Gráficas das funções das partes 4, 5 e 6, item a), revelaram que a dupla apresentou como Imagem Conceitual manifestada que, para o limite de uma função existir, ela não precisa necessariamente estar definida no ponto x_0. Isso pode ser confirmando no diálogo entre A3 e A4, transcrito no Quadro 16 abaixo.

Quadro 16 - diálogo entre A3 e A4

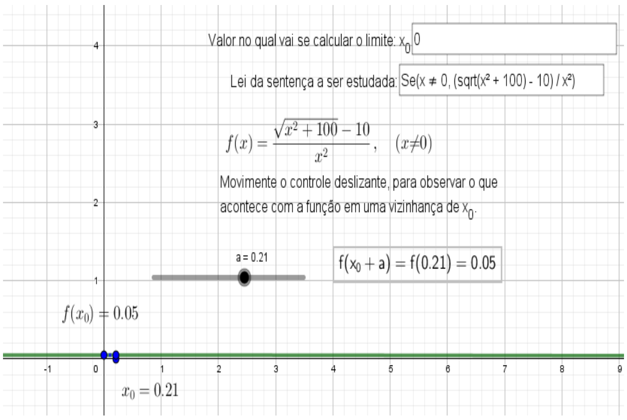
Parte 4, item a), diálogo sobre a análise do limite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$	**Exploração da função f no *applet* 1 do GeoGebra**
A3: Movimenta o Controle Deslizante ..... *A4: Aí o limite vai existir, só que não vai ser igual a imagem, né?* *A3: Deixa eu ver. Ah tá, entendi.* *[....]* *A3: Quando aproximamos x pela direita, os valores de f de x tende para 4, né?* *A4: Isso.* *A3: Quando aproximamos para a esquerda de f de x, os valores aproximam de 4 também.*	

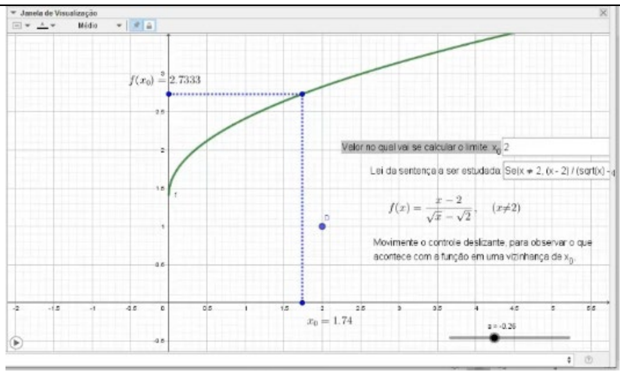
Parte 5, item a), diálogo sobre a análise do $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$	**Exploração da tabela/ representação gráfica de f no *applet* 1 do GeoGebra**

A3: É tabela? Não precisa responder isso não? A gente precisa fazer [referindo-se ao preenchimento da tabela].
A4: Vou pegar uma calculadora.
[...]
A4: A última linha deu 0,04999.
A3: O quê?
A4: 0,049999.
A3: A minha deu 0,0500000.
A4: Ela tá aproximando. Vou verificar o de cima. Deu a mesma coisa da de baixo.
A3: A mesma coisa? Você está fazendo onde? Na calculadora científica?
A4: Não, na calculadora do site. Não tô confiando mais... em qual confiar?
A4: Faz o seguinte: joga essa função lá no GeoGebra. Lá eu tenho certeza que vai arredondar. Mas é só pra gente ter uma ideia.
Pesquisador: Não. Façam a tabela primeiro e depois faz no GeoGebra.
A4: Ah, tudo bem. Esse aí não está com o resultado muito estranho, não?
A3: Onde?
A4: Na última linha. Tipo de um lado está -0,0000001 e do outro 0,0000005.
A3: Ah, deve estar errado.
A4: Mas qual é o certo?
A3: É o que acabamos de digitar.
A3: Os valores aqui vão tender para 0,05, né? Eu acho.
A3: Acho que vai ser 0,05. Acho assim que a diferença é tão pequena que a calculadora arredonda para 0,05. Mas provavelmente aconteceu alguma coisa que a gente não consegue saber. À medida que vamos aproximando, os valores ficam bem parecidos.
A4: *Confia mais na sua calculadora aí, pois calculei os dois e o resultado deu errado.*
A3: *Qual?*
A4: Para as três colunas deu o mesmo valor para f de x.
A3: Sério?
A4: Confia no seu aí.
Pesquisador: Sua calculadora não está programada para arredondar não, A4?
A4: Pode ser.
A3: Espera aí que vou fazer em outra calculadora aqui.
[...]
A3: É isso mesmo.
A3: Deu algo errado aqui (após digitar a expressão algébrica da função no applet).
A4:Coloca a função sem a condição "se".
A3: Não, tá certo. Ela é uma função contínua menos no zero.
A4: O domínio dela é fora do zero [referindo-se à exclusão do zero do domínio de *f*].

Tabela6: Calculando limites por estimativas

Relação entre $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ e x, quando x se aproxima de *0* pela esquerda		Relação entre $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ e x, quando x se aproxima de *0* pela direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0,1	0,049999875006	0,1	0,049999875006
-0,0001	0,049999999998	0,0001	0,049999999998
-0,0000001	0,049999999999	0,0000001	0,049999999999



A3: O limite é 0,05 [movimentando o Controle Deslizante], *tanto pela esquerda quanto pela direita.* *A4: Interessante, eu pensei que essa função era quadrática, os valores são todos iguais. E ela é uma função linear.* *A3: É o quê?* *A4: Uma função linear. Pensei que fosse quadrática.* *A3: Ela é uma função constante. Pois é, até engana, né?* *A3: Quando aproximamos ...... de x=0, tanto pela esquerda quando pela direita, o valor de f de x tende para 0,05.* *A4: Essa função não é constante.* *A3: É sim.* *A4: Se ela fosse constante, o resultado não mudaria. Mexe com o controle Deslizante aí para você ver.* *A3: Nossa* [movimentando o Controle Deslizante]. *A4: Eu tentei ampliar aqui e vi uma curva pequeninha. O gráfico só muda a partir de 500.*	
Parte 6, itens a) e b), diálogo sobre a análise do limite $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$	**Exploração da função *f* no *applet* 1 do GeoGebra**
A3: Seja $f : R-\{2\} \rightarrow R$ *definida por* $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ *,vamos investigar o valor do* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *quando x tende ao valor 2.*[Fez a leitura da questão 6.] [...] *A3:Aqui deu 2,828391768* [primeira linha da tabela] *e aqui deu 2,828492479* [completando a segunda linha da tabela]. A3: *Letra b. Fundamente a resposta do item (a) com o auxílio do applet do GeoGebra. Para isso, abra o applet e digite a lei da função, como segue (copie e cole no applet): Se (x ≠ 2, (x - 2) / (sqrt(x) - sqrt(2)))* *Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.* *Movimente o Controle Deslizante e responda: qual* $\lim_{x\to 2} f(x)$*?* *A3: Ele vai para .... para onde? Espera aí.... 2,7333.* *A4: Como é que é aí?* *A3: Opa, errei. Tá pedindo quando x tende para dois. Ah, bom! Então vai para...* *Deixa eu ver...* *A4: 2,85, não é não? Foi o que a gente achou no cálculo.* *A3: Foi. É por aí. Espera aí.* *A4: Porque pela definição da função não vai dar para você encontrar não. Se você colocar ela aí "enciminha", não vai dar.* *A3: Vai não. Então, ela vai aproximadamente para 2, se eu fizer a média aritmética desses dois valores? Espera aí.* *A4: Aí você foi longe, viu?* *A3: Vou resolver esse BO agora.* *A4:Coloca aí 2,828.*	

A3: Tá. Espera aí. [...] (silêncio) *É* $2\sqrt{2}$*. Deixa eu calcular aqui 2,82842712... Ah, não. Vamos colocar só os três primeiros aqui ... que coincide com o limite.* *A4: Fica bem próximo, né?* *A3: Quando aproximamos de x=2, o limite de f(x) se aproxima de 2,828, né?* *A4: Se quiser colocar 2,824, acho que fica bom também.* *A3: 4?* *A4: Porque tem 39 lá.* *A3: É verdade. Tá. É...*[inaudível], *ou seja,* $\lim_{x\to 2} f(x)$... [inaudível]. *A3: Letra c). Compare os dois resultados?? Ah, tá... e escreva com suas palavras a sua compreensão* [lendo a questão]. Como assim? *A4: Os dois resultados da alternativa ou da tabela?* *A3:É. Os dois resultados letra b e da tabela. A letra b a gente encontrou no gráfico.* *A4: Volta lá no gráfico.* *A3: Espera aí. Não sei se é isso não, viu A4?* *A4: ... mas é. A única coisa que tem que fazer aí é aumentar o gráfico. Fica mais perto.* *A3: Pois é. Fica assim:* $2\sqrt{2}$ *é um número irracional.* *A4: Não, eu sei. Estou falando assim...* *A3: Mas tem que calcular o valor do limite e a gente respondeu que isso aqui. Mas não é isso. É aproximado*. [A3 discute enquanto movimenta o Controle Deslizante analisando o comportamento do gráfico.] *A4: Mas ainda sim.* *A3: Ah... não sei não.* *A4: Ou você quer fazer a média?* *A3: Não. Não vou fazer a média não. Porque, se calcular a média, vai dar mais ou menos isso aqui.* *A4: Você quer escrever como, então?* *A3: Aí é que tá. Beleza. Mas, na letra c, o que vamos colocar para comparar os resultados? O que a gente colocaria para fazer a comparação entre os dois?* *A4: Espera aí que tem como fazer.* *A3: Letra c está pedindo para comparar os dois valores. São valores aproximados, né? É, são valores aproximados de 1,99999 e 2,0001. Os dois valores se aproximam de* $2\sqrt{2}$*. Não vou colocar* $2\sqrt{2}$*.... mas espera aí. É, as imagens encontradas na tabela se aproxima do limite. E agora? De f(x) quando x tende para dois.* *A4: Repete, por favor.* *A3: As imagens encontradas na tabela se aproximam do valor ....* *A4:Do limite da função.* *A3: É isso. Que é o mesmo que admitir que os limites laterais estão tendendo para um mesmo valor, né? Ou ainda dizer que o limite existe.* *A4: Pois é.* *A3: Ainda não entendi essa pergunta.*	

A4: Eu também. Se é tabela com gráfico... *A3: Olha, comparar a tabela com o gráfico.* *A4: Ela deu bem próxima.* *A3; É. Em um, a gente está calculando os limites laterais...* *A4:Pode colocar assim: em ambos os casos, tanto na tabela como no gráfico, os valores encontrados à esquerda e à direita da imagem lá vão se aproximar do limite. Agora só não sei se dá para falar* $2\sqrt{2}$ *direto.* *A3: É porque lá no gráfico a gente não encontrou isso, né? Como é que você tinha falado?* *A4: Tanto na tabela como no gráfico os valores encontrados da função tanto da direita quanto pela esquerda se aproxima do limite. Aí você coloca como um limite aproximado: o limite da função a quando x tende a 2. É 2? É. Aí você coloca o valor que a gente encontrou 2,8284.* *A3: 8284, né?* *A4: Isso.* *A3: Então tá. Em ambos os casos, eu coloquei entre parênteses, tabela e gráficos, os valores encontrados da função pela esquerda e pela direita se aproximam de 2,8284.* *[...]* *Terminamos.*	

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, na Figura 25, apresentamos os protocolos de resolução do item a) das partes 4,5,6 da Sequência de Atividades 2 pela dupla.

Figura 25 - Protocolos de resolução dupla partes 4, 5 e 6

4 (a) Quando aproximamos de $x = 2$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 4.

Quando aproximamos de $x = 2$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 4

Isto é. $\lim f(x) = 4$ e $\lim f(x) = 4 \Rightarrow \lim f(x) = 4$

5 Quando aproximamos de $x = 0$ pela esquerda e pela direita, os valores de $f(x)$ se aproximam de 0,05.

Ou seja

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0{,}05$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}05$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0{,}05.$

a) **Complete na Tabela 6 a seguir a coluna** *f(x)*:

x	$f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
1.9999	2,828391768
2.0001	2,828462479

Fonte; Dados da pesquisa

No diálogo acima, os participantes A3 e A4 exploram os movimentos das imagens da Representação Gráfica de *f* da parte 4, por meio do Controle Deslizante, fazendo $x \to 2$ com o intuito de compreender para qual valor as imagens de *f* se aproximam. Na análise de *f*, quando A3 faz $x \to 2^-$, percebe que: "*Quando aproximamos x pela direita, os valores de f de x tende para 4, né?*". O que é confirmado por A4, quando diz: "*Isso*". A3 visualiza e conclui sua observação: *"quando aproximamos para a esquerda de f de x, os valores aproximam de 4 também"*.

Para a parte 5, ao preencher e explorar os dados da tabela, a dupla percebe que as imagens $f(x)$ dos valores atribuídos a x nas proximidades $x_0 = 0$, tanto pela esquerda quanto pela direita, se aproximam de 0,05. Em seguida, plotam e exploram a representação gráfica de *f* no *applet* 1 e, ao fazer $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$, por meio do Controle Deslizante, percebem que as imagens $f(x) \to 0{,}05$, confirmando os resultados obtidos na Tabela 5 da respectiva atividade.

E quanto à parte 6, a dupla percebe que o mesmo não acontece ao preencher e explorar os dados da tabela. No diálogo, A3 e A4 observam que as imagens $f(x)$ não convergem para o mesmo valor, quando são atribuídos valores próximos a x situados à direita e à esquerda de $x_0 = 2$ da Tabela 6 da respectiva atividade, conforme indica o protocolo- Figura 25.

Em seguida, para o item b), a dupla plota o gráfico de f no *applet* 1 do GeoGebra e explora os movimentos dinâmicos das imagens $f(x)$ provocados pelo Controle Deslizante, quando A3 faz $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$. Na análise, os participantes A3 e A4 percebem que as imagens $f(x)$ não convergem para o mesmo valor, e A3 questiona: *"Ele vai para onde? Para 2,7333"*. A4 interpela: *"como é isso aí?"*. A3 diz: "*Opa, errei. Tá pedindo para quando x tende para dois. Ah, bom! Então vai para ... deixa eu ver ...*". A4 intervém e comenta que: *"2,85, não é não? Foi o que a gente achou no cálculo"*. A3 concorda: "*Foi. É por aí. Espera aí.*" A4 continua argumentando: *"Porque pela definição da função não vai dar para você encontrar não. Se você colocar ela aí 'enciminha', não vai dar"*.

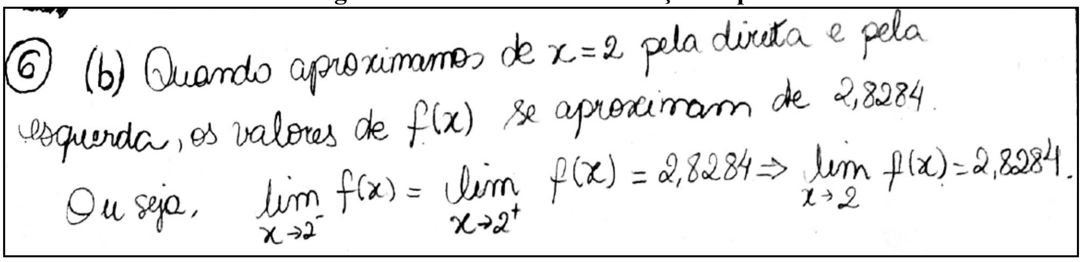
Após concordar com A4, A3 cogita a possibilidade de fazer a média aritmética entre os valores encontrados situados à esquerda e à direita de 2: "*.... seu eu fizer a média aritmética desses dois valores? Espera aí"*. A4 comenta: *"Aí você foi longe, viu?"*. Depois dessa sugestão, A3 procurou uma outra maneira de resolver o problema ao expressar: *"Vou resolver esse BO agora"*. A4 ainda sugere para A3: *"Coloca aí 2,828"*. A3 pede para que A4 espere um pouco e, depois de algum tempo, apresenta a resposta convicta: *"É* $2\sqrt{2}$*"*. Em seguida, transforma o resultado encontrado em número decimal e sugere trabalharem somente com três casas decimais: *"Deixa eu calcular aqui 2,82842712... Ah, não. Vamos colocar só os três primeiros aqui ... que coincide com o limite"*.

Depois de conjecturarem sobre qual o melhor resultado que atenderia à questão, A4 sugere: *"Se quiser colocar 2,8284, acho que fica bom também"*. Então, A3 questiona: *"4?"* [referindo-se ao último algarismo]. A4 justifica a sua sugestão: *"Porque tem 39 lá."* A4 está referindo-se ao valor encontrado, na respectiva tabela, para valores situados à esquerda de 2, no caso, quando $x \to 2^-, f(x) \to 2{,}828391768$.

Na análise do item c), os participantes A3 e A4 tecem conjecturas ao compararem os resultados do limite encontrados na tabela e na Representação Gráfica. A3 questiona: *"O que a gente colocaria para fazer a comparação entre os dois?"*. A3 continua conjecturando e procurando uma maneira de ajustar os resultados encontrados na tabela e no gráfico de f: "*Letra c está pedindo para comparar os dois valores. São valores aproximados, né? É. São valores aproximados de 1,99999 e 2,0001. Os dois valores se aproximam de* $2\sqrt{2}$*. Não vou* $2\sqrt{2}$*.... mas espera aí. É, as imagens encontradas na tabela se aproxima do limite* [$2\sqrt{2}$]. *E agora? De f(x) quando x tende para dois.* [...] *As imagens encontradas na tabela se aproximam do valor...."*. A4 interrompe e complementa: "*Do limite da função* [$2\sqrt{2}$]". Após tecerem conjectura, a dupla reconheceu que os valores encontrados, tanto na tabela quanto na Representação Gráfica da função, aproximavam-se de $2\sqrt{2}$ e deram como resposta, conforme sugestão de A4: "*Aí você coloca o valor que a gente encontrou 2,8284*".

Desse modo, as investigações propiciaram à dupla visualizar, tanto por meio dos dados da tabela quanto pelos movimentos de $f\ (x)$ promovidos pelo Controle Deslizante do *apple*t 1, que aparentemente as imagens $f\ (x)$ não convergiam para o mesmo valor quando $x \to 2$. A dupla reconheceu corretamente que o valor do $\lim_{x\to 2} f(x) = 2\sqrt{2}$. Porém, os integrantes da dupla tiveram dificuldade de afirmar que esse era o valor do limite usando o termo aproximar. Diante disso, ajustaram os valores encontrados na tabela e na representação gráfica trabalhando com 4 casas decimais, segundo a sugestão de A3: "*vamos colocar os valores que se aproximam*". Isso pode ser observado no protocolo de resolução- Figura 26.

Figura 26 - Protocolo de resolução dupla



6 (b) Quando aproximamos de $x = 2$ pela direita e pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2,8284.
Ou seja, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2{,}8284 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 2{,}8284$.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que a dupla se atentou para a unicidade do limite de uma função e procurou determinar o limite utilizando o teorema dos limites laterais, mesmo observando que os dados da tabela e os valores encontrados nas investigações realizadas utilizando o *applet* 1, não assumiam o mesmo valor. A partir do diálogo entre os representantes da dupla, ficou claro que eles reconheceram ao resolverem a questão proposta e ajustarem os valores encontrados para valores próximos de $2\sqrt{2}$. Isso pode ser observado na transcrição do diálogo, quando A3 disse, após tecer algumas conjecturas com A4: *"Vou resolver esse BO agora"*.

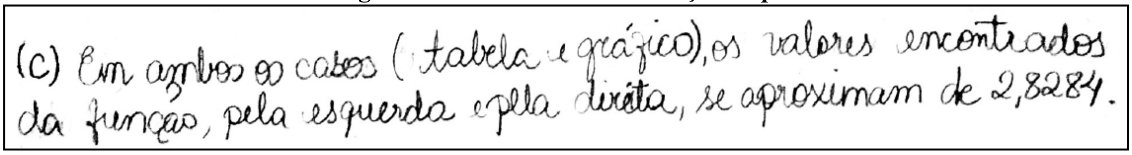
Diante disso, suspeitamos que A3 usou do conjugado de expressões para a resolução do limite, visto que o aluno já havia cursado a disciplina de Cálculo I. No entanto, como o pesquisador estava acompanhando várias duplas, não foi possível interpelar esse aluno nesse momento, mesmo porque só tomou conhecimento após a transcrição do diálogo. O que pretendíamos era que o aluno percebesse que nem todos os limites podem ser obtidos por meio de tabelas ou de *software.* De acordo com Thomas (2009),

> Os valores apresentados pela calculadora ou pelo computador são ambíguos, que só poderão ser resolvidos com o emprego de propriedades. Problemas como esses demonstram o poder do raciocínio matemático, quando desenvolvido, sobre as conclusões a que podemos chegar fazendo algumas

> observações. As duas abordagens apresentam prós e contras quando se quer descobrir as realidades da natureza. (THOMAS, 2009, p.74)

Quanto ao item c), a dupla reconheceu o valor do $\lim_{x \to 2} f(x) = 2\sqrt{2}$ e utilizou do teorema dos limites laterais para justificar que os valores encontrados na tabela e na representação gráfica, ao investigar os valores quando $x \to 2^-$ e quando $x \to 2^+$, e verificar que $f(x) \to 2{,}8284$, é um valor que aproxima de $2\sqrt{2}$, conforme indica Figura 27 de protocolo.

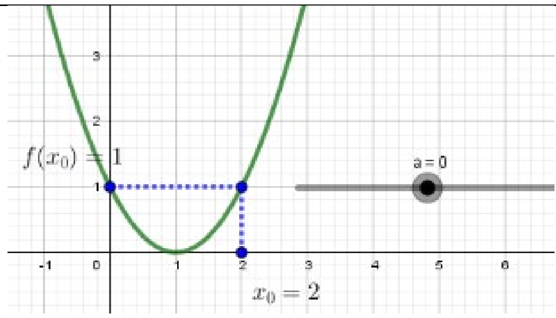
Figura 27 - Protocolo de resolução dupla

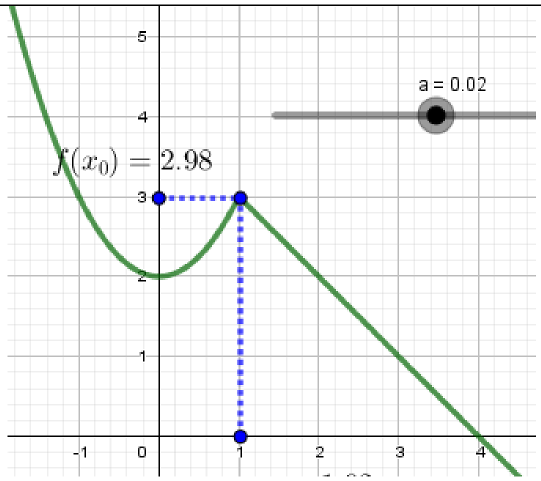
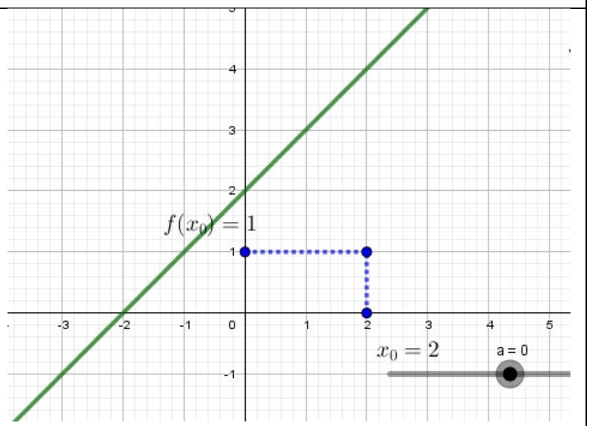

(c) Em ambos os casos (tabela e gráfico), os valores encontrados da função, pela esquerda e pela direita, se aproximam de 2,8284.

Fonte: Dados da pesquisa

O item b) das partes 1, 2 e 4 solicita determinar o valor da função nos pontos em estudos e fazer uma comparação com os resultados encontrados no item a) das referidas partes. A Imagem Conceitual manifestada pela dupla foi pela igualdade do limite da função e o valor da função no ponto, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, determinando assim a continuidade, ou não, da função em x_0. Isso ficou evidenciado no diálogo estabelecido entre A3 e A4, como consta no Quadro 17.

Quadro 17 - Diálogo entre A3 e A4

Diálogo sobre a existência da imagem da função para $x = 2$, parte 1, e comparação dos resultados	**Exploração f no *applet* 1 do GeoGebra**
A3: Coloque o Controle Deslizante em a=0 e determine o valor de f. *[...]* *A4: f de 2 é igual a 1.* *Agora é lembrar a condição que faz o limite de uma função ser igual à imagem no ponto.* *A3: Ah???* *A4: Falo, tipo assim, quando é que o limite de uma função ...vai ser igual à imagem no ponto?* *A3: Quando for contínua.* *A4: É isso mesmo?* *A3: É. A função é contínua no ponto se a imagem existe e se os limites laterais são iguais.* *É só colocar o Controle Deslizante em a=0 e ...* *A4: [*Interrompe e conclui que f(2) = 1.] *Estou recorrendo à definição de continuidade. Volta na questão 1, acho que nós colocamos coisas a mais.* *A3: Não.* *A4: Lê aí para mim a b.* *A3: Pergunta ou resposta?* *A4: Resposta.* [...] *Para ser contínua, basta que o limite seja igual à imagem.* [...] *A3: Mas foi isso que coloquei.*	

A4: Eu sei. É que você colocou os limites laterais, ao invés do fixo do da função em si. Entendeu? *A3: Você pensou que eu tinha colocado os limites laterais e depois o geral?* *A4: Sim.* *Eu não sei se você colocou os limites laterais. Acho que deveria colocar somente o limite para ficar mais compacto, não?* *A3: Tá.*	
Diálogo da análise da existência da imagem de *f* em *x*=1 da parte2	**Exploração da representação gráfica de *f***
A3: Coloque o Controle Deslizante em a=0 e determine o valor de f de 1. *Vai ser 3, né?* *A4: Hum hum...* *Aí é só colocar como o limite da função é igual à imagem da função no ponto, a função é contínua.*	
Diálogo sobre a definição da imagem de *f* no ponto $x_0 = 2$ da parte 4	**Exploração da representação de *f***
A3: Coloque o Controle Deslizante no valor a=0 e determine o valor de f de 2. O f de 2 é 1, né? *A4: É 1.* *A3: Então a gente pode falar que, quando o limite tendendo a 2 de f de x é diferente do f de 2, então f de x não é contínua...* *A4: no ponto 2.* *É só falar que o limite e a imagem são diferentes. Pois a função não é contínua.*	

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos, a seguir, protocolos de resolução do item b) das partes 1, 2 e 4 da dupla, conforme Figura 28.

Figura 28 - Protocolo de resolução do item b) das partes 1, 2 e 4

Parte 1 item b)

(b) Colocando o controle deslizante a em zero, vemos que $f(2)=1$, coincidindo com $\lim_{x \to 2} f(x)$.

A partir dos resultados, podemos afirmar que $f(x)$ é contínua em $x = 2$, isso porquê atende as condições:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad f(2) = 1.$$

Parte 2 item b)

(b) $f(1)=3$.

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ e $f(1)=3$, então $f(x)$ é contínua em $x=1$.

Parte 4 item b)

(b) $f(2)=1$.

Como o $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, então a $f(x)$ não é contínua em $x=2$.

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo, os participantes A3 e A4 discutem sobre a existência da imagem da função ou se ela está definida, ou não, no ponto de abscissa $x = x_0$. Na análise da parte 1, quando A3 faz x assumir o valor 2 utilizando o *applet 1* do GeoGebra, A4 tece o seguinte comentário: “A*gora é lembrar a condição que faz o limite de uma função ser igual à imagem no ponto*” e continua “*falo, tipo assim, quando é que o limite de uma função ...vai ser igual a imagem no ponto?*”. A3, então, responde que “*a função é contínua no ponto se a imagem existe e se os limites laterais são iguais*”. Quando A3 inicia o raciocínio “*é só colocar o controle Deslizante em a=0 e ...”*, é interrompido por A4, que conclui: *“f (2) = 1”*. Na comparação entre os resultados, A4 conclui que: “*Para ser contínua, basta que o limite seja igual à imagem”*.

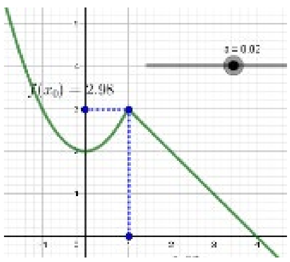
Na parte 2, quando A3 utiliza o Controle Deslizante do *applet* 1 para posicionar o valor de x em $x = 2$, A4 aplica a mesma linha de raciocínio: “*...como o limite da função é igual à imagem da função no ponto, a função é contínua*”. Ao analisar a parte 4, A3 posiciona o Controle Deslizante em $x = 2$ e verifica que a imagem é igual a 1. E faz a seguinte indagação: “*Então a gente pode falar que, quando o limite tendendo a 2 de f de x é diferente de f de 2, então f de x não é contínua...”*. A4 complementa: *“no ponto 2”*. E finaliza com a seguinte conclusão: *“É só falar que o limite e a imagem são diferentes. Pois a função não é contínua”*.

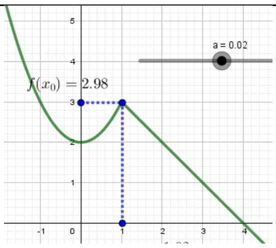
As investigações realizadas com o Controle Deslizante do *applet* 1 possibilitaram a essa dupla comparar os resultados encontrados entre os valores dos limites e os valores das funções nos pontos $x = x_0$ e concluir que, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, f é contínua em x_0. Caso contrário, se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, o limite existe e a função não será contínua em $x = x_0$.

Assim, podemos observar que a dupla, no primeiro momento, associou o significado de limite como a igualdade do valor da imagem da função no ponto. Entretanto, isso não os impediu de analisar o comportamento nas proximidades de $x = x_0$ e de determinar o limite, mesmo quando f não esteja definida em $x = x_0$, parte 4 item b), como indica no protocolo de resolução- Figura 28.

Concluindo, a atividade proposta permitiu a realização de dois tipos de transformação de representações, sendo eles: a conversão e o tratamento. A conversão ocorreu e foi propiciada pelo *applet* 1 do GeoGebra ao transitar da $RA \rightarrow RG$ ao plotar a Representação Gráfica, da $RG \rightarrow RLN$, ao interpretar e descrever a compreensão da análise da Representação Gráfica, e da $RLN \rightarrow RA$, ao calcular o limite. O tratamento foi empregado ao determinar o valor de f em um determinado ponto x_0 e ao analisar geometricamente o limite de f, conforme exemplo indicado no Quadro 18.

Quadro 18- Conversões e tratamentos

Conversões
RA $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, se\ x < 1 \\ 4 - x\ \ , se\ x \geq 1 \end{cases}$ ↓
RG  ↓
RLN

<table>
<tr><td colspan="3">Quando aproximamos de $x=2$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 4.
↓</td></tr>
<tr><td colspan="3">RA
$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tratamentos</td></tr>
<tr><td>Geométrico/Geométrico</td><td>Algébrico/Algébrico</td><td>Numérico/Numérico</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$</td><td>$f(1) = 3$</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa

No desenvolvimento da atividade, foi possível desenvolver os seguintes processos do PMA, como havíamos previsto: visualização, representação e mudança entre diferentes representações. Esses processos ocorreram em todas as Partes das atividades quando a dupla plotou e obteve a representação gráfica das funções *f* no *applet* 1.

Já a intuição foi desenvolvida no item a) das partes 1, 2, 4 ao investigar os valores para um dado x_0 pela esquerda e pela direita e determinar o valor dos limites, conforme Figura 29.

Figura 29 - Ilustrativo do processo de intuição partes 1, 2 e 4 PMA

Parte 1 item a)

(1) (a) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

Quando aproximamos de $x=2$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 1.
Quando aproximamos de $x=2$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 1.
Isto é, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

Parte 2 item a)

(2) (a) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

Quando aproximamos de $x=1$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 3.
Analogamente, quando aproximamos de $x=1$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 3.
Ou seja, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

Parte 4 item a)

(4) (a) Quando aproximamos de $x=2$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 4.
Quando aproximamos de $x=2$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 4
Isto é, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 4$

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Nas partes 3, 5 e 6, itens a) e b), quando a dupla verificou que quanto mais $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$ mais $f(x) \to L$, como ilustrado na Figura 30.

Figura 30 - Ilustrativo do processo de intuição partes 3, 5 e 6 PMA

Parte 1 item b)

(b) Colocando o controle deslizante a em zero, vemos que $f(2)=1$, coincidindo com $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Parte 2 item b)

(b) $f(1)=3$.

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ e $f(1)=3$, então $f(x)$ é contínua em $x=1$.

Parte 4 item b)

(b) $f(2)=1$.

Como o $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, então a $f(x)$ não é contínua em $x=2$.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

O processo de síntese foi desenvolvido nas partes 1, 2 e 4, item b), ao trabalhar com conceitos distintos a condição de existência de um limite, por meio da igualdade dos limites laterais, e a noção de igualdade, ou não, entre o limite e a função. Ainda, nas partes 3, 5 e 6, itens a) e b), ao abordar os valores aproximados da função *f* com o conceito de limites.

Por fim, os processos de análise e abstração ocorreram nas partes 3, 5 e 6, itens a) e b), ao calcular os limites solicitados; e abstração, ao perceber se os limites laterais convergem para o mesmo valor, então, o limite de uma função existe, conforme Figura 31.

Figura 31 - Processo ilustrativo dos processos de análise e abstração

Parte 3

3 Quando aproximamos de $x=1$ pela direita, os valores de $f(x)$ tendem para 2.
Quando aproximamos de $x=1$ pela esquerda, os valores de $f(x)$ tendem para 1.
Isto é, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ não existe

Parte 5

5 Quando aproximamos de $x=0$ pela esquerda e pela direita, os valores de $f(x)$ se aproximam de 0,05.
Ou seja
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0{,}05$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0{,}05$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0{,}05.$

Parte 6 item 6 a)

a) Complete na tabela a seguir a coluna *f(x)*:

x	$f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
1.9999	2,828391768
2.0001	2,828462479

Parte 6 Item b)

6 (b) Quando aproximamos de $x=2$ pela direita e pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2,8284
Ou seja, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2{,}8284 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 2{,}8284.$

Fonte: Dados da pesquisa 2021

A partir das análises realizadas, observamos que o processo de Representação simbólica ocorre nas resoluções das atividades, como exposto a seguir:

- $\lim\limits_{x \to x_0}$ que indica limite quando $x \to x_0$;

- $x \to {x_0}^-$ ou $x \to {x_0}^+$ para indicar a aproximação de um determinado valor pela esquerda ou pela direita;

- Sinal de = para indicar a igualdade entre dois limites;

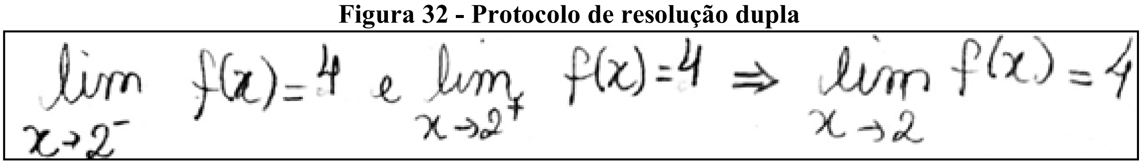
- Sinal de ⇒ para relacionar o resultado entre os limites laterais com o limite no ponto;

- Sinal de ≠ para indicar a diferença entre o valor do limite da função no ponto.

Com base nas análises das resoluções realizadas pela dupla, faremos, a seguir, algumas observações.

A Imagem Conceitual manifestada pela dupla foi utilizada na determinação do limite, por meio de aproximação, e pela existência do limite, por meio do Teorema dos limites laterais. Isso está de acordo com a definição informal (TALL e VINNER, 1981, *apud* FALLAS, 2016, p.8), que se refere ao uso dos conceitos a partir de exemplos específicos e apresentados mediante explicações informais, de modo que limite é considerado como um processo dinâmico de aproximação. Ainda, observamos que a dupla entende a existência do limite de uma função, por meio dos limites laterais, e a usa para fazer a justificativa, mas apresenta dificuldade de usar a simbologia que deveria ser utilizada, uma equivalência. Isso ocorreu explicitamente nas questões 3 e 4, item a, conforme grifo do exemplo da questão 3 no protocolo de resolução-Figura 32.

Figura 32 - Protocolo de resolução dupla



Fonte: Dados da pesquisa

Observamos também que A3 reconhece quando uma função *f* é contínua em x_0 , de acordo com trecho extraído do diálogo entre A4 e A3, quando A3 responde a uma indagação de A4 sobre uma função ser contínua em um ponto do seu domínio: "*A função é contínua no ponto se a imagem existe e se os limites laterais são iguais*".

Em relação à questão 5, por limitação do *software* do GeoGebra, a representação gráfica de *f* (x) = $\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ é representada como se fosse uma reta. O que, de certa forma, induziu a dupla a visualizar a representação também como uma reta. No diálogo, a dupla tece conjectura sobre qual seria o tipo de função quando A4 diz: *"Interessante, eu pensei que essa função era* *quadrática, os valores são todos iguais. E ela é uma função linear"*. O que é contestado por A3: *"Ela é uma função constante. Pois é, até engana, né?"*. Agora foi a vez de A4 contestar A3: "*Essa função não é constante"*. Mas o participante A3 continua convicto na sua afirmação: "*É sim"*. A4 mostra seu conhecimento a respeito de função constante ao argumentar que: "*Se ela fosse constante, o resultado não mudaria. Mexe com o Controle Deslizante aí para você ver."* Por fim, A3 é convencido ao movimentar o Controle Deslizante e exclamar: "*Nossa!"*.

A discussão entre os participantes e a exploração do *applet* 1 possibilitou à dupla visualizar a representação gráfica não como uma reta, e sim como uma curva. Isso fica evidente quando A4 conclui a sua investigação: *"Eu tentei ampliar aqui e vi uma curva pequenininha. O gráfico só muda a partir de 500"*.

Apesar do *software* apresentar certas limitações, se ele for melhor explorado, pode ajudar muito no entendimento de certas funções quando sua lei de formação e a representação gráfica se apresenta de maneira mais complexa, conforme observamos no diálogo dos participantes na mudança da opinião sobre a representação gráfica da função.

Também foi possível observarmos que A3 reconhece quando uma função f é contínua em x_0 , como consta no trecho extraído do diálogo entre A4 e A3, quando A3 responde a uma indagação de A4 sobre uma função ser contínua em um ponto do seu domínio: "*A função é contínua no ponto se a imagem existe e se os limites laterais são iguais"*. Porém, o conceito imagem manifestado por A3 não está coerente com às literaturas e, como afirmam Soares e Cury (2017), a linguagem é natural, o que evidencia pouco desenvolvimento de uma linguagem matemática correta.

4.3 Sequência de Atividades 3 - Estabelecendo a vizinhança de limite com auxílio do applet 2 e 3 do GeoGebra

A Sequência de Atividades 3, Anexo 4, está dividida em 5 partes. A primeira parte trata do conceito de distância entre dois números reais a e b na reta real utilizando o conceito de módulo. Na parte 2, é explorada a distância entre dois números x e x_0 com auxílio do *applet 2* do GeoGebra e, também, é definido o conceito de vizinhança de um número. Nas partes 3, 4 e 5 da Sequência de Atividades 3, é explorado o conceito de vizinhança com auxílio do *applet* 3. A referida Sequência de Atividades apresenta, além de explorar distância entre dois números utilizando o *applet* 2, a preparação para os elementos da definição formal de limite utilizando o *applet* 3 do GeoGebra.

Esta atividade propicia explorar o conceito de vizinhança aplicado ao estudo do limite de uma função, com o intuito de preparar o caminho para a definição formal de limite de uma função, e está fundamentada em Cornu (2002), Rocha (2010), Fallas (2016), Rocha (2016), Messias e Brandemberg (2015) e em Soares e Cury (2017).

Objetivo:

-Realizar a transição de noções intuitivas do conceito de limite com vistas a propiciar o desenvolvimento do conceito formal.

- O primeiro ponto que procuramos abordar é com relação ao que Domingos (2003) e Swinyard e Larssen (2012) sugerem: explicar a simbologia que é utilizada na definição formal de limite em termos de vizinhança $V_\delta(x_0)$ e $V\varepsilon(L)$.

Sequência de Atividades 3 – parte 1

Para medir distâncias entre números reais, utilizamos o conceito de módulo (ou valor absoluto): Lembrando que

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se x} < 0 \end{cases}$$

Sejam a e b dois números reais, indicaremos a distância entre a e b, pela seguinte relação:

$$\text{dist(a, b)} = |a - b|$$

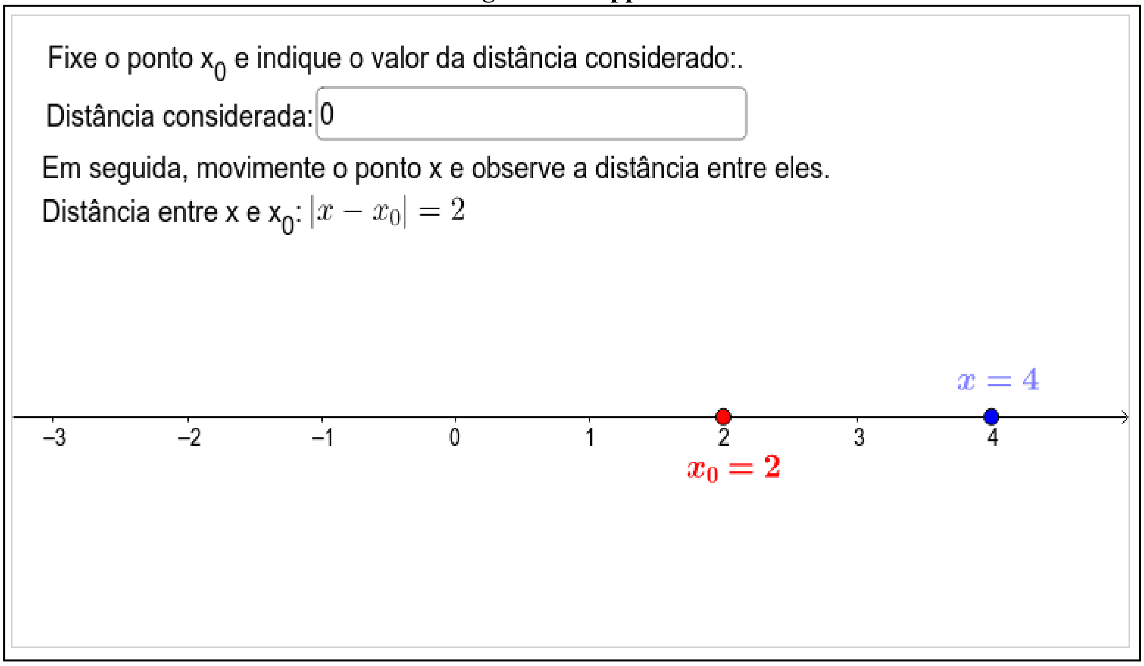
Seguem alguns exemplos:

dist(2, 3) $= |2 - 3|$	dist(-4, 1) $= |-4 - 1|$
dist(2, 3) $= |-1|$	dist(-4, 1) $= |-5|$
dist(2, 3) $= 1$	dist(-4, 1) $= 5$

Sequência de Atividades 3 – parte 2

Com auxílio dos *applets* do GeoGebra, indicados nos *links* https://www.geogebra.org/m/k6zwt9tm e https://www.geogebra.org/m/kx2jygsd, procure responder às questões abaixo, conforme Figura 33.

Figura 33 - Applet 2



Fonte: Dados da pesquisa 2021

a) Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e $x_0 = 2$ é menor ou igual a 3?

Simbolicamente, para quais valores de x, $|x - 2| \leq 3$?

Procure descrever esse conjunto de valores.

Resposta esperada: $-1 \leq x \leq 5$ ou $[-1, 5]$

b) Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e $x_0 = 3$ seja menor do que 1?

Simbolicamente, para quais valores de x, $|x - 3| < 1$?

Procure descrever esse conjunto de valores.

Resposta esperada: $2 < x < 4$ ou $]2, 4[$

c) Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e $x_0 = -1$ seja menor do que 0,5?

Simbolicamente, para quais valores de x, $|x + 1| < 0{,}5$?

Procure descrever esse conjunto de valores.

Resposta esperada: $-1{,}5 < x < -0{,}5$ ou $]-1{,}5; -0{,}5[$

d) Quando x se aproxima de x_0, o que acontece com o valor da distância entre esses dois valores?

Resposta esperada: Essa distância se aproxima de zero.

Análise a *priori* da parte 2

Na Sequência de Atividades 3 – parte 2, nossa expectativa era que os alunos investigassem e transitassem sobre as representações RS→RG, apresentadas pelo *applet* 2 do GeoGebra, e manifestassem como Imagem Conceitual de que o intervalo aberto represente uma vizinhança de um número x_0. Para o item a), esperamos que os alunos reconheçam que x é um número real cuja distância do número 2 é 3 e o conjunto que representa esses valores seja escrito na forma simbólica utilizando a linguagem de conjuntos $S = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 5\}$, na forma de intervalo]3,5[ou como desigualdade $3 \leq x \leq 5$.

Em relação ao item b), esperamos que os alunos reconheçam que a solução da inequação são todos os x cujas distâncias do número 3 são menores que 1 ou como o intervalo aberto que representa a vizinhança de $x_0 = 3$ e apresentem a solução como: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$,]2,4[ou $2 < x < 4$.

Para o item c), esperamos que os alunos reconheçam que a solução da inequação são todos os x cuja distância de $x_0 = -1$ são menores que 0,5 ou como um intervalo aberto que representa a vizinhança de $x_0 = -1$ e apresentem a solução como $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1{,}5 < x < -0{,}5\}$,]-1,5; -0,5[ou na forma da desigualdade $-1{,}5 < x < -0{,}5$.

Para o item d), esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos participantes desta pesquisa seja de que quanto mais x se aproximar de x_0 mais a distância entre eles se aproxima de zero.

As atividades propostas nos itens b) e c) dizem respeito à vizinhança de um determinado x_0 dado e que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja que esses intervalos representem uma vizinhança de um ponto x_0. E manifestem, como Definição Conceitual, que uma vizinhança de um número x_0 é todo intervalo aberto I com x_0 pertencente a este intervalo.

A parte 2 da atividade nos possibilita transitar entre as Representações RG→RS quando é solicitado representar a distância entre dois números geometricamente e representar a solução em forma de conjunto, realizando assim uma conversão. Ao movimentar o ponto x do *applet* 2, este possibilita a visualização da solução da inequação geométrica e simbolicamente.

Em relação ao Pensamento Matemático Avançado (PMA), a parte 2 da atividade possibilita o desenvolvimento dos seguintes processos: visualização; representação e mudança entre diferentes representações; definição; síntese; generalização.

A mudança de representação e tradução entre elas é desenvolvida ao fazer a passagem da RG → RS em todos os itens da parte 2 da atividade. O processo de síntese pode ser desenvolvido ao abordar conceitos distintos de intervalos numéricos e de inequações modulares, para obter o conceito de vizinhança de um número.

No item d), primeiro é preciso visualizar o que acontece com a distância entre x e x_0, ao fazer x se aproximar cada vez mais de x_0, e depois generalizar, já que, quando dois números quaisquer se aproximam, mais a distância entre eles diminui.

O conjunto, obtido nos itens b) e c), é chamado de vizinhança dos números 3 e -1. Desse modo, dado um ponto x_0 pertencente ao conjunto dos números reais, definimos uma vizinhança desse ponto representada por $V(x_0)$ um intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$. Nesse sentido, podemos definir uma vizinhança ε, denotada por $V\varepsilon(x_0)$, como o intervalo aberto: $V_\epsilon(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

No exemplo do item b), temos $V_1(3) =]2{,}4[$ e, no item c), temos que $V_{0,5}(-1) =]-1{,}5; -0{,}5[$. Assim, utilizaremos a noção de vizinhança para formalização da ideia de aproximação relacionada ao conceito de limite vista nas Sequências de Atividades 1 e 2. Isso é indicado por pesquisadores como em Tall *et al.* (2008).

Em Tall *et al.* (2008) e em Swinyard e Larsen (2012) é sugerido que o ensino do conceito de limite deve relacionar noções informais com a simbologia algébrica da definição formal. Diante disso, compreendemos que uma das maneiras de se fazer isso seria por meio de explorações das aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, em termos das vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$ representadas por intervalos e desigualdades, bem como a partir do significado dessas simbologias e do seu papel na expressão da definição formal, promovendo um sentido mais completo dos conceitos envolvidos e facilitando o entendimento de simbologias algébricas.

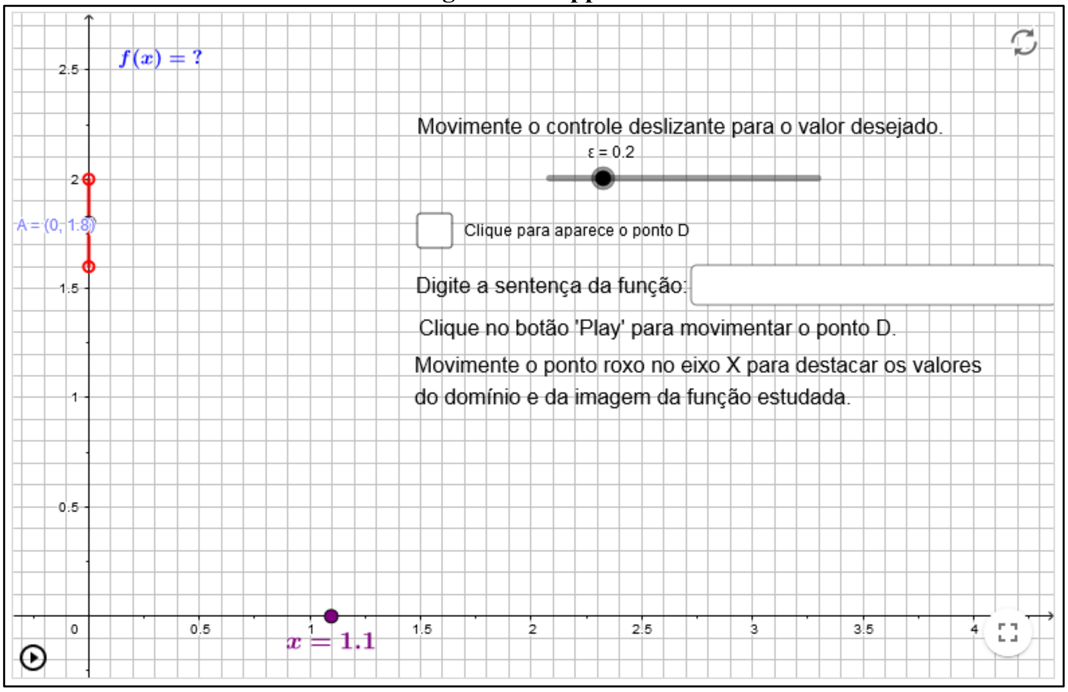
Na próxima atividade, trabalharemos com uma vizinhança no contradomínio de *f* para indicar o que acontece no domínio de *f*.

Sequência de Atividade 3 – parte 3

Nesta atividade, serão abordadas ideias relativas ao seguinte conceito de limite: quando o limite de uma função *f existe* é possível estabelecer para uma dada vizinhança $V_\varepsilon(L)$, uma vizinhança $V_\delta(x_0)$ apropriada.

Com auxílio do *applet* 3, indicado no link (https://www.geogebra.org/m/p98b73tj), faça o que se pede no roteiro e responda às questões propostas (Figura 34).

Figura 34 - Applet 3



Fonte: Dados da pesquisa 2021

1. Movimente o ponto A (azul) em y = 2.
2. Posicione o Controle Deslizante épsilon em 0,5.
3. Observe que foi construída uma vizinhança de $y = 2$ no eixo Y, ou seja, $V_{0.5}(2) =]1{,}5; 2{,}5[$.
4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de $y = 2$.
5. Digite, no campo indicado, a lei de formação da sentença: *x^2 + 1*.
6. Movimente o ponto D na vizinhança de $y = 2$.
7. Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
8. Para atualizar a tela, clique em .

Para responder às questões propostas, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X.

a) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando $y = 2$?

Resposta esperada: $x = 1$.

b) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando $y = 1{,}5$?

Resposta esperada: $x = 0{,}707$.

c) Responda: qual é o conjunto que foi obtido no eixo X?

Resposta esperada:$\{x \in \mathbb{R} \mid 0{,}7 < x < 1{,}22\}$ ou $0{,}7 < x < 1{,}22$

d) Você diria que ele é uma vizinhança de $x = 1$?

Resposta esperada: Sim, pois $1 \in]0{,}7; 1{,}22[$.

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Resposta esperada: Sim, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Análise a priori – Parte 3

Em relação aos itens a) e b), esperamos que os alunos investiguem, utilizando o ponto roxo do *applet* 3 situado no eixo das abscissas, e verifiquem que as abscissas correspondentes para $y = 1$ e $y = 0{,}5$ sejam, respectivamente, $x = 1$ e $x = 0{,}7$.

Em relação ao item c), esperamos que os alunos determinem que o conjunto de pontos determinado por D, ao percorrer a vizinhança de $y = 2$, determine o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0{,}7 < x < 1{,}22\}$. Este item possibilita aos alunos transitarem entre RG→ RN, caracterizando assim uma conversão.

Para o item d), nossa expectativa é que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que o ponto deve pertencer à sua respectiva vizinhança.

Quanto ao item e), esperamos que a Definição Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, quando o limite existe, V(1) é uma vizinhança que depende de $V_{(\varepsilon)}(2)$ e, para qualquer x pertencente a V(1), implica que f (x) pertence a $V_{(\varepsilon)}(2)$. Outra resposta esperada: que seja aplicado o teorema dos limites laterais e esperamos que a Definição Conceitual manifestada pelo aluno seja de que: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Os itens a) e b) possibilitam a realização de um tratamento ao determinar os valores correspondentes das abscissas de y = 1 e y = 0,5.

Já o item c) possibilita a realização de uma conversão ao transitar da RG → RN. Outras duas conversões são realizadas no roteiro 2 da Sequência de Atividade 3, como será descrito a seguir. No item 2), são realizadas ao transitar da RN→RG, ao posicionar o Controle Deslizante épsilon em 0,5 e determinar uma vizinhança em torno de y = 2 e RA→RG; e no item 5), ao digitar a lei de formação e obter a representação gráfica de *f*.

Em relação ao PMA, possibilita desenvolver os seguintes processos: representação e mudança entre diferentes representações; visualização; análise; síntese.

Os processos de mudança de representação e tradução entre elas e o de visualização podem ser desenvolvidos no roteiro da atividade, no item 2), ao posicionar o ε em 0,5 e determinar uma vizinhança em torno de y = 2 (muda da representação numérica para a gráfica); e no item 5), quando obter a representação gráfica de *f* ao digitar a lei de formação da função no *applet* 3 do GeoGebra.

Os processos de síntese e análise podem ser desenvolvidos nos itens d) e e). O processo de síntese pode ser desenvolvido no momento em que abordar conceitos distintos de intervalos de números reais e de inequações modulares para obter a vizinhança de um número; e, também, ao combinar os valores aproximados de uma função com o conceito de limite, para determinar o limite de uma função, o pode ser verificado quando é solicitado ao aluno dizer se o conjunto é uma vizinhança de $x = 1$ e ao indicar o possível limite da função *f*. Enquanto o processo de análise pode ser desenvolvido nos casos a partir do momento em que é solicitado ao aluno que verifique se o conjunto de valores representa, ou não, uma vizinhança de $x_0 = 1$ e se seria possível indicar qual o $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Sequência de Atividade 3 – parte 4

Com auxílio do *applet* 3, indicado no link (https://www.geogebra.org/m/p98b73tj), faça o que se pede no roteiro e responda às questões propostas:

1. Movimente o ponto A (azul) em $y = 1$.
2. Posicione o Controle Deslizante épsilon em 0,5.
3. Observe que existe uma vizinhança de $y = 1$ no eixo Y, ou seja, $V_{0,5}(1) =]0,5; 1,5[$.
4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de $y = 1$.
5. Digite, no campo indicado, a lei de formação da sentença:
   Se(x < 1, x, x - 1) .
6. Movimente o ponto D na vizinhança de $y = 1$.
7. Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
8. Para atualizar a tela, clique em .

Para responder às questões propostas, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X:

a) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 1?

Resposta esperada: $x \cong 1$.

b) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando $y = 0,5$?

Resposta esperada: $x = 0,5$ ou $x = 1,5$.

c) Responda: Descreva qual é o conjunto que foi obtido no eixo X.

Resposta esperada: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0,5 < x \leq 1 \cup 1,5 < x < 2,5\}$

d) Você diria que ele é uma vizinhança de $x = 1$?

Resposta esperada: Não.

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Resposta esperada: $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$, pois, $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$

Análise a priori – Parte 4

Na atividade 3, Parte 4, a proposta, além de determinar os valores das abscissas correspondentes a $y = 1$ e $y = 0,5$, solicita que os alunos investiguem os elementos do conjunto formado no eixo das abscissas, quando fizer D percorrer a vizinhança]0,5; 1,5[, no eixo das ordenadas, e verificar se esse conjunto formado determina, ou não, uma vizinhança em $x_0 = 1$

Para os itens a) e b), esperamos que os alunos investiguem e determinem que as abscissas correspondentes para y = 1 seja $x \cong 1$ e, para y = 0,5, sejam $x \cong 0,5$ e $x \cong 1,5$. Para o item c), esperamos que os alunos, ao fazerem o ponto D percorrer $V_{0,5}(1)$ =]0,5; 1,5[, visualizem e determinem que o conjunto de valores determinado por D corresponde ao $\{x \in R |\ 0,5 < x \leq 1 \cup 1,5 < x < 2,5\}$ no eixo X . Em relação ao item d), nossa expectativa é que, quando os alunos fizerem o ponto D percorrer o]0,5; 1,5[, verifiquem que este não determina uma vizinhança de $x_0 = 1$. Pois existem elementos no domínio entre]0,5;1[e]1,5;2[que não possuem imagem nas vizinhanças de]0,5;1,5[em torno de $y = 1$.

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Em relação ao item e), esperamos que os alunos investiguem os valores de $x \to 1^-$ e visualizem que $f(x) \to 1$ e, também, que, quando $x \to 1^+$, $f(x) \to 0$. E que a Imagem Conceitual manifestada seja de que, para o limite de uma função existir, os limites laterais têm que ser iguais e como $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.

Outra resposta, como o]0,5;1[∪]1,5;2[não é uma vizinhança de $x_0 = 1$, então não $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.

Nesta parte da atividade, podem ser realizadas as seguintes conversões no roteiro da parte 4: no item 5), ao digitar a lei de formação e determinar a representação gráfica de *f,* uma vez que é necessário fazer a mudança de representação, transitando assim da RA→RG; e no item 2), ao posicionar o valor do ε = 0,5 e determinar uma vizinhança em torno de y = 1, transitando entre RN→RG.

Quanto ao PMA, possibilita desenvolver os seguintes processos: mudança de representação e tradução entre elas, visualização, síntese e análise.

Os processos de visualização e mudança de representação e tradução entre elas podem ser desenvolvidos no roteiro da parte 4, nos itens: 1), ao posicionar o valor de ε = 0,5 utilizando o Controle Deslizante, em que este determina uma vizinhança em torno de $y = 2$, e 5, ao digitar a lei de formação no *applet* 3 e obter a RG de *f* (muda da representação numérica para a gráfica).

Os processos de síntese e análise são desenvolvidos nos itens b) e c). O processo de síntese é desenvolvido ao abordar os conceitos de intervalos reais e inequações modulares para obter o conceito de vizinhança e os valores aproximados de uma função com o conceito de limites para obter o limite de uma função. E o processo de análise, ao considerar o conjunto formado, representa uma vizinhança em $x_0 = 1$ e a possibilidade de determinar a existência do $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Sequência de Atividade 3 – parte 5

Com auxílio do *applet* 3, indicado no link (https://www.geogebra.org/m/p98b73tj), faça o que se pede no roteiro e responda às questões propostas:

1. Movimente o ponto A (azul) em y = 1.
2. Posicione o controle deslizante em ε = 0,5.
3. Observe que existe uma vizinhança de y = 1 no eixo Y, ou seja, $V_{0.5}(1) =]0{,}5; 1{,}5[$.
4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y = 1.
5. Digite, no campo indicado, a lei de formação da sentença:
   Se(x < 1, x, (x - 1)² + 1).
6. Movimente o ponto D na vizinhança de y = 1.
7. Clique na seta, no canto inferior esquerdo abaixo ,e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
8. Para atualizar a tela, clique em .

Para responder às propostas questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X.

a) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 1?

Resposta esperada: $x = 1$.

b) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 0,5?

Resposta esperada: $x = 0{,}5$.

c) Qual o conjunto de valores obtido no eixo X, quando movimentamos o ponto D na vizinhança de y = 1?

Resposta esperada: $\{x \in \mathbb{R} | 0{,}5 < x < 1{,}7\}$

d) Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de $x = 1$?

Resposta esperada: Sim. Pois $1 \in]0{,}5; 0{,}71[$.

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Resposta esperada: Sim, $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

Os resultados das atividades mostram que, quando o limite de uma função *f existe,* é possível estabelecer para uma dada vizinhança $V_\varepsilon(L)$ uma vizinhança $V(x_0)$ apropriada.

f) Nas atividades em que o limite existiu, como descreveria o conjunto obtido no valor em que o limite foi calculado? E no caso em que o limite não existiu?
Resposta esperada: No caso em que o limite existiu, o conjunto formado é uma vizinhança de x_0. E no caso em que o limite não existiu, o conjunto formado não é uma vizinhança de x_0.

Análise a *priori* – Atividade 3 -Parte 5

Esta parte da atividade tem como propósito que, após investigar $V_\varepsilon(L)$, os alunos possam reconhecer que o conjunto formado por esses elementos em correspondência com x possibilita determinar uma vizinhança $V(x_0)$.

Para os itens a) e b), esperamos que os alunos investiguem os valores correspondentes do ponto D quando y = 1 e y = 0,5, respectivamente, e determinem que as abscissas são $x = 1$ e $x = 0{,}5$, respectivamente.

Para o item c), nossa expectativa é que os alunos investiguem na vizinhança $V_{0,5}(1)$ utilizando o ponto roxo do *applet* 3 situado no eixo das abscissas e determinem o conjunto que pode ser representado por $\{x \in \mathbb{R} \,/ 0{,}5 < x < 1{,}71\}$.

Para o item d), esperamos que os alunos, ao fazerem o ponto D percorrer a $V_{0,5}(1)$, seja de que, como $x = 1$ pertence a este intervalo, então esse conjunto representa uma vizinhança de $x = 1$.

c) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Temos como expectativa para o item c) que os alunos respondam que sim, pois, se $x \in V(1) \Rightarrow f(x) \in V_{0,5}(1)$, logo o $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ ou, então, usando o teorema dos limites laterais: $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Os resultados das atividades mostram que, quando o limite de uma função f *existe,* é possível estabelecer para uma dada vizinhança $V_\varepsilon(L)$ uma vizinhança $V(x_0)$.
f) Nas atividades em que o limite existiu, como descreveria o conjunto obtido no valor em que o limite foi calculado? E no caso em que o limite não existiu?

Esperamos como resposta que:

No caso em que o limite existiu, esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que este conjunto represente uma vizinhança de x_0; e no caso em que o limite não existiu, que a Imagem Conceitual manifestada seja de que o conjunto não represente uma vizinhança de x_0.

A atividade possibilita realizar as seguintes conversões: do roteiro, 5 item 2), ao posicionar o Controle Deslizante em $\varepsilon = 0,5$ e determinar uma vizinhança em torno de $y = 1$, transitando da RN→RG; no item 5), ao plotar e obter a Representação Gráfica da função *f*; no item c), ao transcrever da representação gráfica o conjunto de valores determinado pelo ponto D no eixo das abscissas, transitando da RG→RN. Já o tratamento pode ser realizado no item a) e b) ao determinar os valores das abscissas de $y = 1$ e $y = 0,5$, transitando somente na RN.

Em relação ao PMA, propicia-nos desenvolver os seguintes processos: mudança de representação e tradução entre elas, visualização, análise e síntese.

A mudança de representação e tradução entre elas e a visualização podem ser desenvolvidas no roteiro da atividade parte 5, no item 2), ao posicionar o Controle Deslizante em $\varepsilon = 0,5$ e fazê-lo criar uma vizinhança em torno de $y = 1$; e no item 5), ao plotar e obter a representação gráfica da função *f*.

Os processos de síntese e análise poderão ser desenvolvidos nos itens d) e e). O processo de síntese pode ocorrer ao utilizar o conceito de intervalos de números reais e de inequação modular para obter o conceito de vizinhança e os valores aproximados de uma função com o limite para determinar o limite de uma função. O processo de análise pode ocorrer quando for necessário decidir se o intervalo dado representa ou não uma vizinhança e ao determinar se existe ou não o limite da função *f*.

Os processos de análise e síntese também poderão ser desenvolvidos no item f) ao ser solicitado ao aluno descrever sobre o conjunto obtido em que o limite existiu e sobre o conjunto em o limite não existiu.

Análise a *posteriori* Atividade 3 - Estabelecendo a vizinhança de limite

Na Atividade 3, parte 2, a dupla determinou de forma satisfatória para os itens a), b) e c), com o auxílio do *applet* 2 do GeoGebra, o conjunto de valores que representavam a solução das inequações, que são elementos da definição formal de limites, e concluiu de forma satisfatória, conforme diálogo da dupla, Quadro 19.

Quadro 19 - Diálogo entre A3 e A4

Diálogo entre A3 e A4 parte 2
A3: Começar a parte 2. *A4: Isso.* *A3: A distância entre x e xo é menor ou igual a 3.* *Simbolicamente, para quais valores de x,* $\mid x-2 \mid \leq 3$? *Descreva esse conjunto de valores.* *A3: Vou usar o applet, vai de -1 a 5, né?*

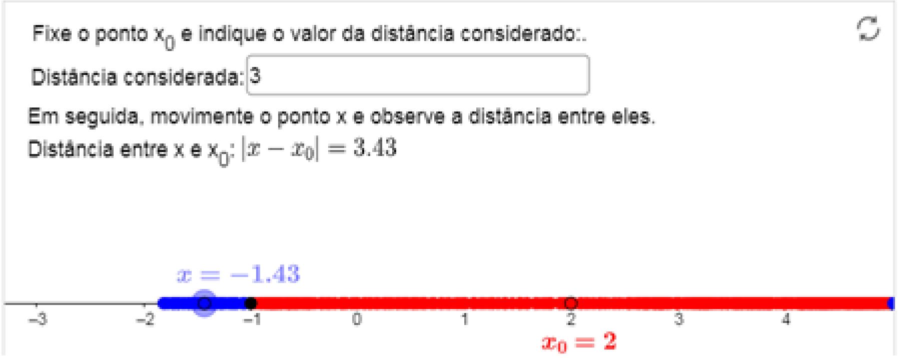
A4: A 5? *A3: De -1 a 5. Isso mesmo, A4.* *A4: Deu certo aqui de -1 a 5.* *A3: Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e xo = 3 é menor do que 1?* x_0 *é o quê?* *A4:* x_0 *é 3. Vai de 2 a 4.* *A3: É de 2 a 4. Intervalo aberto.* *A4: Escreve em módulo.* *A3:Não. É só menor que 1, na primeira situação era menor ou igual.* *A4: Então os extremos entram.* *A3: Você está falando de qual?* *A4:Da letra a. Se está falando que a distância é menor ou igual a 3, então -1 e o 5 vão entrar* [-1 e 5 fazem parte do intervalo]. *A3:Sim, estou falando da 2.* *A4: Ah, tá. Fica aberto.* *A3: Letra c varia de -1,5 até -0,5. Concorda?* *A4: Varia de -0,5 até -1,5. Isso mesmo.* *A3: De modo geral, quando x se aproxima de* x_0*, o que acontece com o valor da distância entre esses dois valores? O quê?* *A4: A distância entre eles diminui. É a ideia de aproximação pela direita e pela esquerda.* *A3: É.* *[....]*

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo entre os participantes A3 e A4, eles exploram juntos o *applet* 2 do GeoGebra, que continha a representação geométrica das inequações, com a intenção de compreender quais são os valores de *x* que são soluções das inequações. Na análise da parte 2, item a), ao posicionar o valor de $x_0 = 2$, fixar a distância 3 e movimentar o ponto *x* sobre a reta r, A3 verificou que a solução era determinada pelo rastro de cor vermelha exibida pelo *applet* 2. E fez a seguinte indagação: "*Vai de -1 a 5, né?*". E concluiu: *"De -1 a 5. Isso mesmo, A4"*. Ao analisar o item b), A3 questiona: "x_0 *é o quê?"*. A4 responde e complementa: *"*x_0 *é 3. Vai de 2 a 4"*. A3 conclui: *"É de 2 a 4. Intervalo aberto"*. Na análise do item c), A3 analisa e questiona: "*Letra c varia de -1,5 até -0,5. Concorda?"*. A4 confirma: *"Varia de -0,5 até -1,5. Isso mesmo"*. As investigações realizadas sobre a distância entre dois pontos quaisquer *x* e x_0 sobre uma reta utilizando o *applet 2* propiciaram à dupla reconhecer essa distância, ao fazer o ponto *x* percorrer a reta e determinar a solução, por meio de um intervalo indicado por um rastro de cor vermelha. A visualização do comportamento do ponto *x* ao percorrer a reta possibilitou à dupla determinar as soluções das inequações de maneira correta, conforme protocolo de resolução, Quadro 20.

Quadro 20 -Protocolo de resolução dupla

Item a) parte 2
Representação algébrica $\lvert x-3\rvert \leq 3$ ↓ Representação Geométrica



↓

Resposta Representação numérica

(a) $-1 \leq x \leq 5$

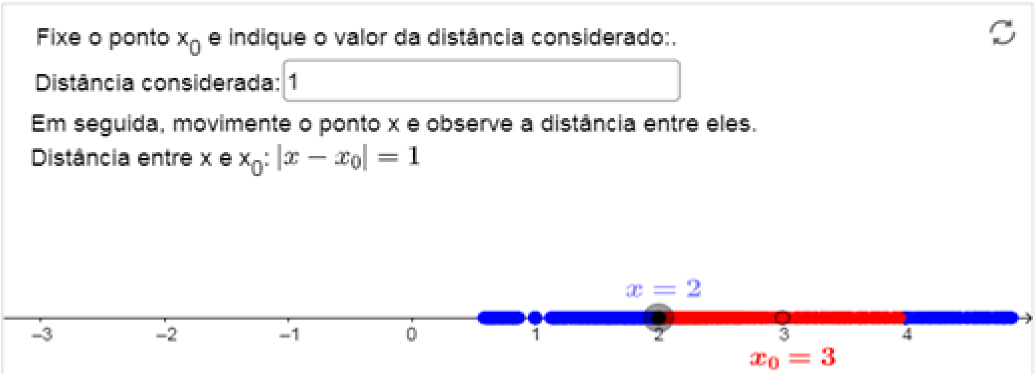
Item b) Parte 2

Representação algébrica

$|x-3| < 1$

↓

Representação geométrica



↓

Resposta Representação numérica

(b) $2 < x < 4$

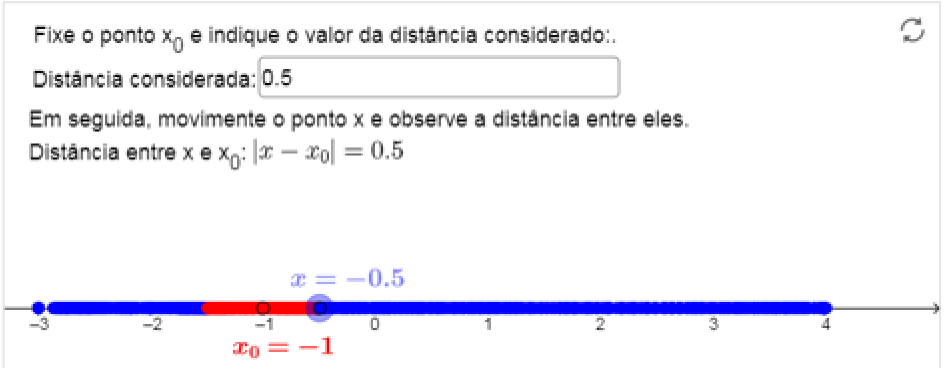
Item c) Parte 3

Representação algébrica

$| x + 1 | < 0.5$

↓

Representação geométrica



↓

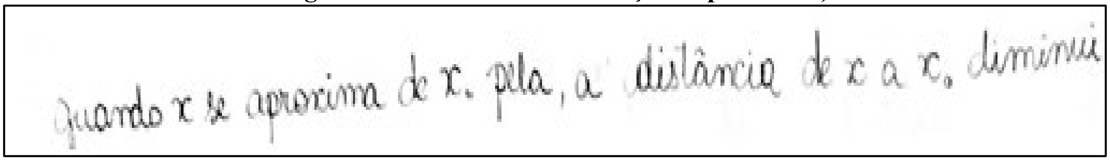
Resposta Representação numérica

(c) $-1,5 < x < -0.5$

Fonte: Dados da pesquisa

Quanto ao item d), ao analisar a distância entre dois números quaisquer x e x_0, a dupla concluiu que, quanto mais x se aproxima de x_0, a distância entre eles diminui, o que pode ser observado no protocolo- Figura 35.

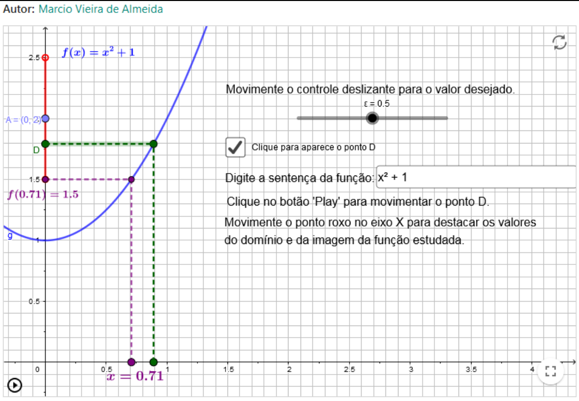
Figura 35 - Protocolo de resolução dupla item d)



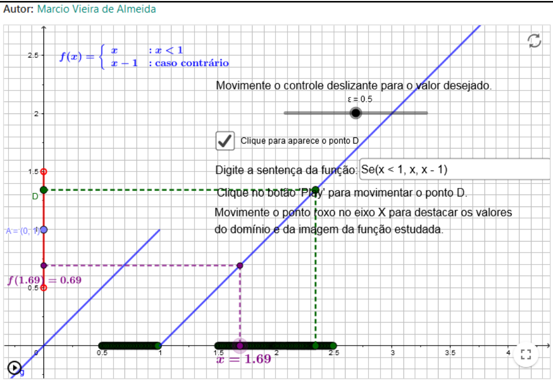
Fonte: Dados da pesquisa 2021

Para as partes 3, 4 e 5, item d), a dupla manifestou a Imagem Conceitual de vizinhança como um intervalo aberto em que x_0 pertence a esse intervalo. Ainda, usou do termo "pertencer" para traduzir que uma vizinhança é um intervalo aberto em que existe um determinado número x_0 pertencente a esse intervalo, o que os possibilitou explicar de maneira satisfatória o conceito de vizinhança de um número. Essa dupla, também, usou dos termos "prende" e "prenda" para traduzir uma possível limitação nos intervalos. Assim, entendemos que a dupla manifesta como Definição Conceitual de um intervalo limitado, como um "intervalo que prende", como indica o diálogo da dupla transcrito no Quadro 21.

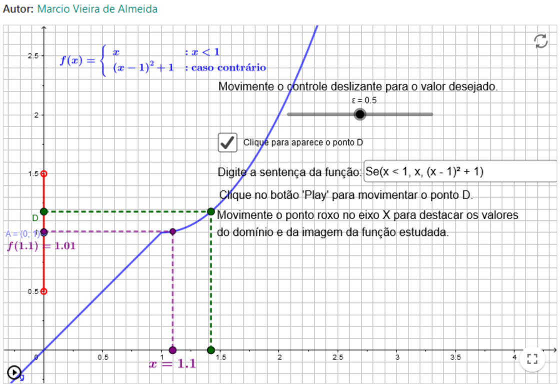
Quadro 21- Diálogo dupla A3 e A4

<table>
<tr><td>Diálogo parte 3)</td><td>Exploração geométrica</td></tr>
<tr><td>
A3:Próxima é a parte 3. Pode prosseguir, A4?
A4: Sim.
Pesquisador: A3 faz a leitura da questão e segue as instruções do roteiro.
A3: Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 2?Quando y = 2...
A4: Vai para 1.Tá querendo saber quando D está no ponto (0,2) para onde é que vai o x?
A3:Não, é o y que está no ponto 2. O y é 2, né?
A4: Pois é.
A3: Não entendi, A4.
A4: Quando o ponto D está no y= 2, entendeu? (0,2).
A3: Tá. Quando o y está no ponto (0,2), o D está tendendo para 1. No caso, a abscissa do ponto D é 1. Mas qual é abscissa aproximada? O que nós vamos colocar?
A4: Coloca 1.É 1 mesmo.
Pesquisador: Nesse caso, vocês estão seguindo o roteiro e movimentando o ponto roxo?
A4: Movimentando o ponto roxo?
Pesquisador: É. Vocês já estão respondendo às perguntas?
A3: ... É.
Pesquisador: Para responder às questões, movimentar o ponto roxo localizado no eixo x.
A4: Ah tá...
Pesquisador: Movimente o ponto roxo aí sobre o rastro. Todas as questões vocês utilizarão o ponto roxo para responder.
A3: Letra b: qual a abscissa aproximada quando y = 1,5?
A4: 0.71. Achou aí?
A3: 0,69?
A4: Não, 0,71.
A3: É mesmo. Beleza. É isso mesmo.
Qual o conjunto de valores obtidos no eixo x quando movimentamos o ponto D nas vizinhanças de y = 2?
A4: ... [áudio inaudível]
A3: Vai de 0,71 até 1,22, certo?
A4: Sim.
A3:Qual o conjunto de valores obtidos no eixo X, quando movimentamos o ponto D na vizinhança de y = 2?
Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de x = 1? [A3 faz a leitura do item b.]
É. Não, “pera” aí. Sim, pois ele pertence ao intervalo aberto.
A4: Na b você colocou intervalo aberto também de 0,71 até ...
A3: Até 1,22.
Letra e. Observando o gráfico seria possível indicar qual o valor do limite de f de x quando x tende a 1?
A4: 2.
A3: O valor dá.... 2.
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Diálogo parte 4</td><td>Exploração geométrica</td></tr>
</table>

A3: Usando o mesmo applet? Pesquisador: É. *A3:Movimente o ponto A ...* [A3 lê e segue o que o roteiro orienta.] A4: Aí está funcionando? [Está referindo-se ao *applet.*] A3; Sim. *A4: ....* [inaudível] *A3: Você está falando da função? Dá enter.* *A4: ....* [inaudível] *A3: Oi?* *A4: Dá para você compartilhar a tela? Aqui não deu certo.* *A3: Movimente o ponto D ... clique na seta abaixo e observe o rastro deixado no eixo x. Ah, faz sentido.* *Letra a ... Não sei.* *A4: Vai para zero.* *A3: Quando vai para a esquerda, ele vai para 1 pela esquerda, ele vai para zero. Então, a gente tem que especificar? Vou colocar isso.* *Coloquei assim: quando x tende para valores à direita, y tende para zero.* *A4: Ok.* *A3:Letra b. Qual a abscissa quando y = 0,5?* Pesquisador: O que você respondeu anteriormente, A3? Foi o item a? *A3: Espera aí. Quando y tende a valores próximos de 1... esperaí, aí. Quando y tende a valores próximos de 1, ah, espera aí, A4. Eu estava respondendo errado aqui. Quando o y está aproximando de 1, o x está aproximando de 1 também. Não tem essa de direita e esquerda, a gente tá olhando o y primeiro e a parte dele na abscissa. Então, a abscissa é 1.* *A letra b já está respondida. Quando x se aproxima de 0,5, o x se aproxima de 0,5.* *Letra c. Qual o conjunto de valores obtido no eixo X, quando movimentamos o pondo de D na vizinhança de y = 1? Aí vai de ... vai de ... não entendi.* *A4: Faz o seguinte: clica na setinha lá embaixo. Vai ser um conjunto aberto, não disjunto.* *A3: Ah, então ele vai de 0,5 até 1 e de 1,5 até 2,5. Tudo isso aberto.* *A4: Isso.* *A3:Não. No primeiro conjunto, o 1 é fechado porque vai ser ... quer ver ...* *A4:É de fato. O 1 vai fazer parte da função. Do domínio.* *A3: Espera aí. Pior que não. Pelo ... da função aqui vai ser x se x <1 e vai ser x - 1... não tá certo.* *A4: Tá certo. Vai entrar o* 1 [o número 1 faz parte do domínio]. *A3: Então são intervalos... espera aí. Não tem como ser fechado, porque a gente tá pegando ... O que a gente prende aqui no contradomínio prende aqui também* [referindo-se ao domínio da função]. *Aqui a imagem de 0,5 não entra. É aberto em 0,5 e no 1 também.* *A4: Mas o 1 faz parte do outro lado.* *A3: Ah, é. Vai tá certo.*	

A4: Vai ser aberto no 0,5, fechado no 1, aberto no 1,5 e aberto em 2,5. *A3: Por que aberto no 1,5?* *A4: Do outro conjunto.* *A3: Mas por quê? Se a imagem dele está dentro desse intervalo do contradomínio?* *A4: Como? Movimenta o ponto roxo até 1,5.* *A3: 0 1,5 não entra. Então é aberto no 0,5. Fechado no 1. Aberto no 1,5 e no 2,5. então ficou assim]0,5,1]∪]1,5;2.5].* *A4: Certo. Daí não será vizinhança, né?* *A3; Tem não. A próxima pergunta: Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de 1?* *A3: Não. Tem quer um intervalo aberto, né?* *A4: Ele é disjunto e tem uma parte que é fechado. Daí não será vizinhança.* *A3: Tem não. Não Será uma vizinhança.* *[...]* Pesquisador: Qual o domínio da função? A3: O quê? *A4:É x se x<1 e x-1, caso contrário.* Pesquisador: Qual o domínio dela? *A3: Real.* *A4: É real mesmo. Mas o fato de ser vizinhança não influi no domínio.* *A3: De quê?* *A4: Pelo fato de ser vizinhança não depende totalmente do domínio.* Pesquisador: O que você acha, A4? *A3: O único problema que ela teria ... seria no x =1. Só que está definida no x = 1, mas ela está definida em 1, f(1) = 0.* Pesquisador: O que seria caso contrário? *A4 e A3: Seria maior ou igual a 1.* *A3:Então a gente colocou que o conjunto não é uma vizinhança, pois é um conjunto disjunto.* *A4: É só colocar que a vizinhança de x não está definida.* *A3: Letra e. Observando o gráfico, seria possível indicar qual é o limite de f (x) quando x tende a 1? Aí não. Porque aí, quando x tende para 1... agora é aquela resposta que a gente tinha colocado.* *A4: Agora faz sentido.* *A3: Letra a que a gente tinha colocado?* *A4: Para a esquerda vai para 1 e direita vai para 0.* Pesquisador: Em termos de vizinhança, como vocês analisariam? A3: Em termos de limite? Pesquisador: É. *A3: Não existe uma distância no eixo x que prenda* [limita] *lá no domínio. Não se o termo não existe, seria apropriado. Fala A4.* *A4: Não existe o intervalo que prende* [limita] *o ... Que o intervalo no eixo não está definido. A vizinhança no x não está definida.* *[...]* *É só colocar que a vizinhança de x não está definida.*	
Diálogo parte 5	Exploração geométrica

A3: São as mesmas coisas [referindo-se às instruções do roteiro]. Posicione o A em 1. A4: E o controle em 0,5. [...] A3: Letra a. *Qual a abscissa aproximada de* $y = 1$*? Será 1.* *Qual a abscissa aproximada de y = 0,5? É igual a 0,5.* *Qual o conjunto de valores obtidos no eixo X, quando movimentamos o ponto D na vizinhança de y = 1? Aí a vizinhança será de 0,5 até 2.* *Você diria que que esse conjunto é uma vizinhança de x = 1? Sim.* *A4: Atende à propriedade: é aberta nos extremos e contínuo.* *A3: Observando o gráfico, seria possível indicar o limite de f de x quando x tende a 1?* *É 1.* *A4: Sim. Por causa da existência dos limites lateais.* *[...]* *A3: Nas atividades em que o limite existiu, como descreveria o conjunto obtido no valor em que o limite foi calculado? E no caso em que o limite não existiu? O quê?* Pesquisador: Nas atividades em que o limite existiu, como descreveria o conjunto obtido no valor em que o limite foi calculado? Veja: Os resultados das atividades mostram que, quando o limite de uma função f existe, é possível estabelecer para uma dada vizinhança $V_\varepsilon(L)$, uma vizinhança $V_\delta(x_0)$. A4: *[...]Para o limite de uma função existir, o conjunto necessariamente tem que ser uma vizinhança.* *A3: Quando um limite existe, o valor que está tendendo este limite tem que estar dentro de uma vizinhança. Acho que é isso. Tem que existir uma vizinhança para ele. Como a gente usa a ideia que para todo* $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$. *Então, tem que existir uma distância para ele.* *Como descreveria o conjunto??* *A4: Foi como eu falei: tem que existir uma vizinhança e, no caso em que o limite não existiu, não tinha uma vizinhança para o limite.* *A3: Então, para que o limite exista em um ponto* x_0*, é necessário que exista uma vizinhança para ele. Da mesma forma, quando um limite não existe, não há uma vizinhança para* x_0.	

Fonte: Dados da pesquisa 2021

No diálogo, os participantes A3 e A4 exploram juntos a representação gráfica observando os pontos de abscissas de um dado y_0 e o deslocamento do ponto D dentro de uma vizinhança $]c, d[$ estabelecida por um determinado ε dado no eixo das ordenadas, com o intuito de compreender quais os valores obtidos no eixo x correspondentes ao]a,b[que estão em correspondência com $]c, d[$. A dupla determinou, de maneira satisfatória, os valores correspondentes às abscissas de y_0 das partes 3 e 5 dos itens a) e b); para a parte 4, item a), respondeu, também, de maneira satisfatória; e para o item b), parcialmente- uma vez que as abscissas correspondentes eram $x = 0,5$ e $x = 1,5$ e não somente $x = 0,5$.

Na análise da parte 3 da Atividade 3, item c), quando o ponto D percorre o intervalo]1,5;2,5[, A3 relata que o intervalo]0,71;1,22[, determinado por D no eixo das abscissas, é uma vizinhança de $x_0 = 1$ e justifica: *"Sim, pois ele* [o número 1] *pertence ao intervalo aberto".* Quanto à análise da parte 4 da Atividade 3, item c), a dupla, ao observar o ponto D percorrer o intervalo]0,5;1,5[verifica que o intervalo]0,5;1] ∪]1,5;2,5[não corresponde a uma vizinhança de $x_0 = 1$. Na análise da parte 5, item d), quando o ponto D percorre o]0,5;1,5[, A3 registra de maneira incorreta o intervalo que este determina no eixo x como]0,5;2[, ao invés de]0,5;1,7[.

As investigações realizadas no intervalo]c,d[da parte 3 da Atividade 3 utilizando o ponto roxo do *applet* 3 no eixo das abscissas, quando o movimenta e fazendo-o percorrer os intervalos]1,5; 2,5[, aponta que o ponto roxo descreve uma vizinhança no eixo das abscissas]0,71;1,22[. Isso possibilitou à dupla reconhecer que esse intervalo representa uma vizinhança de $x_0 = 1$. Ao analisar a parte 5, item c), a dupla analisou de maneira não satisfatória o intervalo descrito por D no eixo das abscissas]0,5;2[, ao invés de]0,5;1,71[. Diante disso, a dupla não reconheceu que neste intervalo existem elementos que não têm imagem na vizinhança de]0,5;1,5[do eixo das ordenadas. Isso contribui para a resolução dos itens c) e d). Por outro lado, a dupla, na parte 4 item c), reconheceu que o intervalo]0,5;1]∪[1,5;2,5[não representa uma vizinhança de $x_0 = 1$ quando o ponto roxo percorre o intervalo]0,5; 1,5[no eixo das ordenadas.

A visualização do comportamento do ponto roxo do *applet* 3, ao percorrer os intervalos]c,d[, no eixo das ordenadas, e]a,b[, no eixo das abscissas, permitiu à dupla concluir que o intervalo da parte 3, item d), é uma vizinhança de $x_0 = 1$ e que o intervalo parte 4, item d),]0,5;1]∪[1,5;2,5[, não representa uma vizinhança de $x_0 = 1$. O que pode ser verificado nos protocolos de resolução- Quadro 22.

Quadro 22- Protocolo de resolução dupla

Parte 3 item d)	(d) Sim, pois 1 ∈]0.71, 1.22[
Parte 4 item d)	(b) Não, pois o conjunto]0.5,1] ∪]1.5,2.5[é disjunto.

Fonte: Dados da pesquisa

O item e) da Atividade 3, partes 3, 4 e 5, interpela a dupla sobre a existência, ou não, do limite de uma função. Depois de explorar a representação gráfica das funções, A4 verifica, na parte 4, que o limite de f: "*Para a esquerda vai para 1 e direita vai para 0*". Isto é: quando $x \to 1^-$, $f(x) \to 1$ e, quando $x \to 1^+$, $f(x) \to 0$. Na parte 5, quando $x \to 1^-$ e quando $x \to 1^+$, $f(x) \to 1$. As investigações realizadas nas vizinhanças de $x = 1$ permitiram à dupla verificar e visualizar, na parte 3, que, quando $x \to 1$, $f(x)$ não converge para o mesmo valor; e na parte 5, quando $x \to 1$, $f(x) \to 1$. Assim, a dupla concluiu que, na parte 4, $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$ pelo fato dos limites laterais serem diferentes; e na parte 5, que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ devido à igualdade dos limites laterais serem iguais.

Quando interpelados pelo pesquisador sobre a existência do limite por meio de vizinhança, os alunos apresentaram justificativas confusas. Para A3, *"Não existe uma distância no eixo x que prenda* [limita] *lá no domínio"*. Já A4 afirma que "*Não existe o intervalo que prende* [limita] o ...". E, possivelmente, apresentam que o conceito de limite está associado a uma barreira.

Na parte 3 item e) a dupla somente determinou o valor do limite e tentou justificar a sua existência utilizando o conceito de vizinhança, mas de forma incorreta tanto na parte 3 quanto na parte 5, como indica o protocolo a seguir- Figura 36.

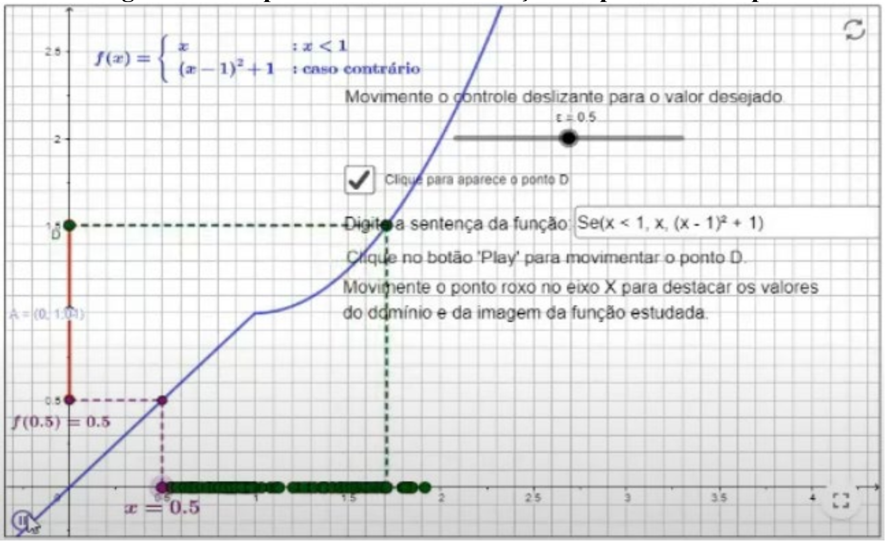
Figura 36 - Protocolo de resolução dupla

Parte 4 Item e) (e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe, pois quando x tende a valores próximos de 1 pela esquerda, y tende para 1, e quando x tende para valores próximos de 1 pela direita, y tende para 0. De outro modo, a $V_\varepsilon(1)$ não está definida.
Parte 5 item e) (e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, pois $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$. $V_\varepsilon(1) =]0.5, 2[$
Parte 3 Item e) (e) Sim, $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. $V_\varepsilon(2)$ está definida e é $]0.71, 1.22[$

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Para o item c) da parte 5, a dupla não definiu de maneira correta o intervalo determinado no eixo das abscissas quando D percorre a vizinhança $V_{0,5}(1) =]0,5; 1,5[$, determinando uma vizinhança no eixo das abscissas que seria V(1) =]0,5; 1,7[. Revisitando o vídeo da atividade, percebemos que a dupla não seguiu corretamente as instruções do roteiro da atividade, o que veio a contribuir para a determinação de forma incorreta tanto do intervalo no eixo das abscissas quanto da vizinhança em torno de $x_0 = 1$, do item d). Também verificamos que a dupla não associou a vizinhança $V_{0,5}(1)$ =]0,5; 1,5[, no eixo das ordenadas, com a vizinhança, nesse caso, representado por um rastro no eixo das abscissas por]0,5; 1,7[, como mostra o protocolo de resolução- Figura 37.

Figura 37 - Captura de tela da resolução da parte 5 da dupla

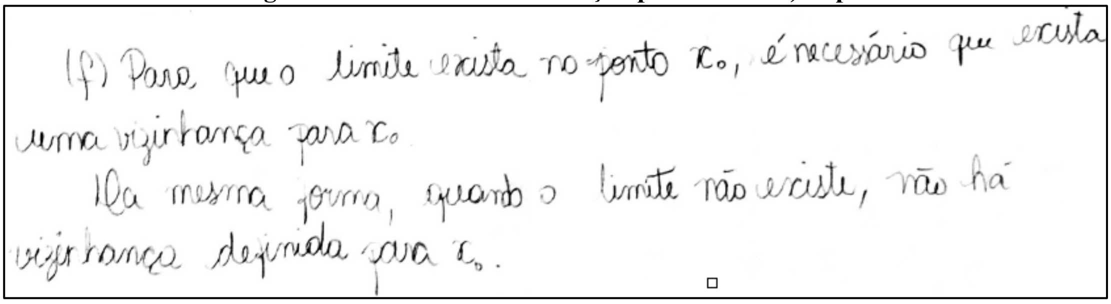


Fonte: Dados da Pesquisa 2021

Percebemos que faltou interpretação da dupla ao resultado, tanto ao observar o movimento do ponto D na vizinhança de y = 1 e verificar o intervalo determinado no eixo *x* quanto ao movimentar o ponto roxo na vizinhança referida. A dupla descreveu, de maneira incorreta, o intervalo determinado no eixo das abscissas como V(1) =]0,5; 2[, ao invés de]0,5; 1,7[, o que os fez acreditar, segundo Rocha (2016), como verdade absoluta a representação exibida pela tela.

O item f) da parte 5 (atividade 3) questionava a dupla como descreveria o conjunto obtido no valor em que o limite foi calculado. A dupla reconheceu que, no caso em que o limite existiu, o conjunto obtido determina uma vizinhança de x_0, e no caso em que o limite não existiu, o conjunto obtido não determina uma vizinhança. O reconhecimento de um conjunto como uma vizinhança fica evidente em um trecho do diálogo entre A3 e A4, quando A3 lê o item da questão e responde: "*Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de x=1? Sim*". A4 argumenta: *"Foi como eu falei: tem que existir uma vizinhança e, no caso em que o limite não existiu, não tinha uma vizinhança para o limite"*. A3 conclui: *"Então, para que o limite exista em um ponto x_0, é necessário que exista uma vizinhança para ele. Da mesma forma, quando um limite não existe, não há uma vizinhança para x_0"*, como indica a Figura 38 do protocolo resolução.

Figura 38 - Protocolo de resolução parte 3 item f) dupla


(f) Para que o limite exista no ponto x_0, é necessário que exista uma vizinhança para x_0.
Da mesma forma, quando o limite não existe, não há vizinhança definida para x_0.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Concluindo, os Registros de Representação Semiótica e o processo de visualização (PMA), na Atividade 3 Parte 2, apelam para as conversões ao calcular o conjunto de valores de *x* que representam as soluções das inequações, ao transitar da RA→RG→RN. E nos roteiros das partes 3, 4 e 5, item 2), ao posicionar o Controle Deslizante em um dado $\varepsilon = 0{,}5$ e determinar uma vizinhança em torno de y_0 dado, transitando da RN→RG; no item 5), ao transitar da RA→RG ao plotar e obter a representação da função *f;* nos itens a) e b), ao determinar os valores das abscissas dos valores y_0 dados, e ao descrever, no item c), o conjunto de valores obtidos no eixo X ao movimentar o ponto D nas vizinhanças de y_0 dado, transitando da RG→RN; e no item e), ao determinar o valor do $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, passando RG→RN. Além das conversões, faz-se também presente o processo de visualização, conforme indicação no Quadro 23.

A seguir, são apresentados exemplos de conversões.

Quadro 23 - Conversões/ visualização realizada pela dupla

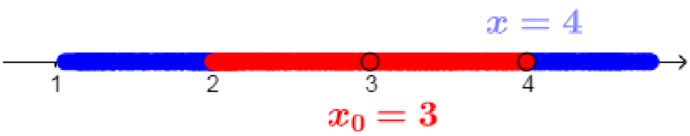
Parte 2 Item b)

RA

$|x - 3| < 1$

↓

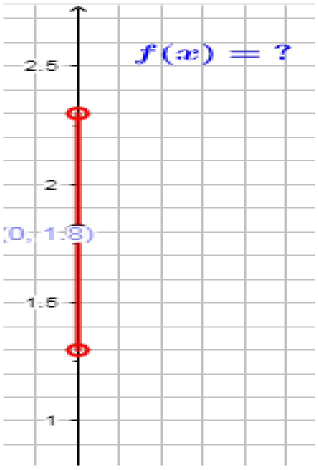
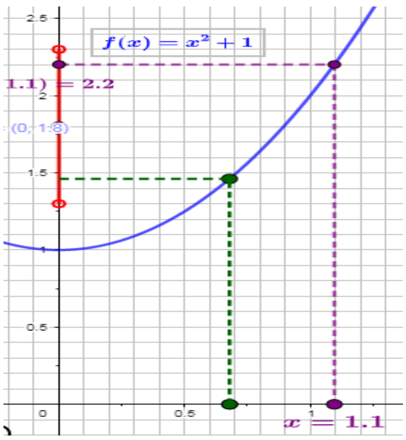
RG

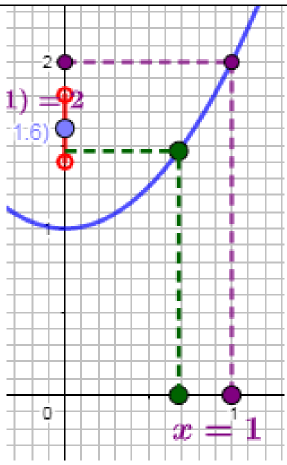


↓

RN

(b) $2 < x < 4$

Parte 3 item 2) RN ε=0.5 ↓ RG 
Parte 3 Item 5) RA $\boxed{f(x) = x^2 + 1}$ ↓ RG 
Parte 5 Item a) RG



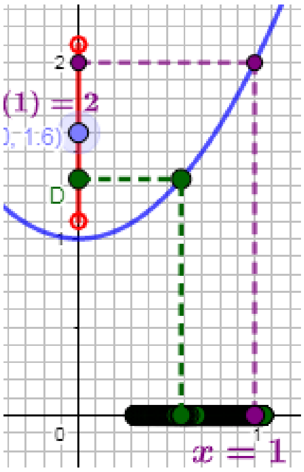
↓

RN

(a) A abscissa é $x=1$.

Parte 3 item c)

RG



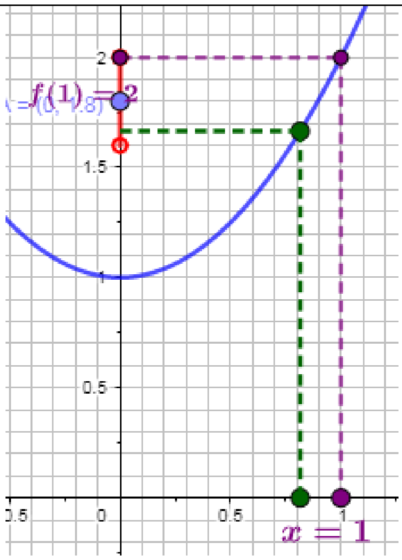
↓

RN

(c)]0.71; 1.22[

Parte 3 Item d)

RG



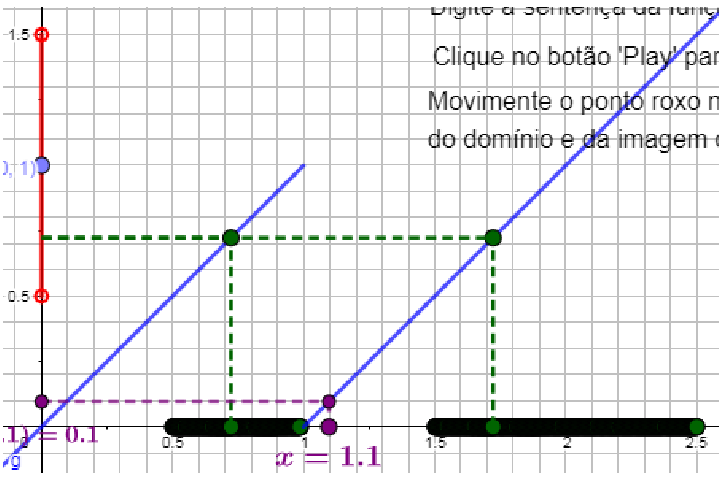
↓

RN

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Parte 4 item e)

RG



↓

RLN

(e) $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe, pois quando x tende a valores próximos de 1 pela esquerda, y tende para 1, e quando x tende para valores próximos de 1 pela direita, y tende para 0.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Em relação ao PMA, os processos de mudança de representação e tradução entre elas e o de visualização foram desenvolvidos nos itens 2) e 5) do roteiro, bem como no item c) das partes 3, 4 e 5. No item 2), esses processos foram desenvolvidos ao mudar da RN→RG; no item 5), ao plotar e obter a RG de *f*; no item c), ao descrever o conjunto obtido no eixo das abscissas ao fazer o ponto D percorrer no intervalo]1,5; 2,5[da parte 3, e no intervalo]0,5; 1,5[da parte 4.

O processo de visualização foi desenvolvido, também, no item 1) das partes 3, 4 e 5 do roteiro da Sequência de Atividades 3, ao movimentar o ponto A e posicioná-lo em um ponto y_0, determinando assim o centro da vizinhança; e nos itens 6) e 7), quando o ponto D percorreu a vizinhança de y_0 e determinou um intervalo no eixo X por meio de um rastro.
O processo de síntese ocorreu no item d), das partes 3, 4, ao abordar conceitos distintos de intervalos numéricos e de inequações modulares, para obter o conceito de vizinhança de um determinado ponto; no processo de análise do item e) das partes 3, 4 e 5, ao decidir sobre a existência ou não do $\lim_{x \to x_0} f(x)$;e no item d) das partes 3 e 4, ao definir se o conjunto encontrado determinaria, ou não, uma vizinhança de um dado x_0.

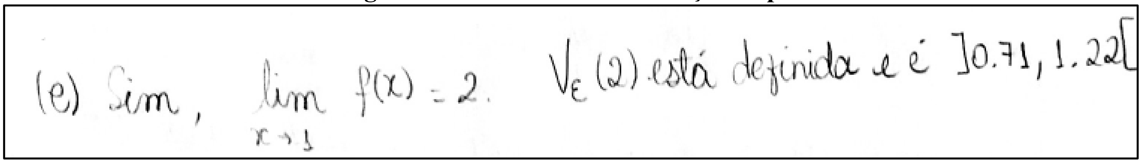
Ao desenvolver a Sequência de Atividade 3- Estabelecendo a vizinhança de limite, a dupla transitou com facilidade entre as representações e mudança entre diferentes representações, assim como entre as convenções propiciadas pela atividade com o auxílio dos *applets* 2 e 3, como pode ser verificado nos protocolos de resolução da dupla.

Na parte 1 da referida atividade, foi apresentado o conceito de distância entre dois números quaisquer x e x_0 que é dada por $|\ x - x_0\ |$. Na parte 2 da atividade, aplica-se o conceito de distância na resolução de inequações modulares utilizando um *applet* 2 do GeoGebra. E, ao final dessa primeira parte, é apresentada a definição de vizinhança de um número.

Nas duas atividades anteriores foram trabalhadas questões utilizando a noção intuitiva de limite. Mas, à medida que os estudos vão se aprofundando, o conteúdo precisa ser tratado de forma mais refinada. Para Stewart (2011), a noção intuitiva de limite é inadequada para alguns propósitos, pois, segundo ele, frases como “x está próximo de 2” e “$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L” são vagas. E, para corrigir essas “frases vagas”, estas são substituídas por condições específicas que possam ser aplicadas a qualquer limite. De acordo com o Stewart (2011), para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que $\lim_{x \to 1} x + 2 = 3$, por exemplo, devemos tornar precisa a definição de limite.

Quanto às partes 3, 4 e 5 da Sequência de Atividades 3, procuram realizar a transição de noções intuitivas do conceito de limite utilizando o conceito de vizinhança, que é elemento da definição formal. No desenvolvimento dessas partes, a dupla conseguiu desenvolver a maioria dos itens de maneira satisfatória. Ainda, reconheceu conjuntos que às vezes representavam, outras vezes não, uma vizinhança de um número. Assim como conseguiu justificar a (in)existência do limite por meio do registro da língua natural. Porém, não conseguiu justificar a existência do limite utilizando o conceito de vizinhança, por exemplo, o pode ser verificado no protocolo de resolução, parte 3 item e)- Figura 39.

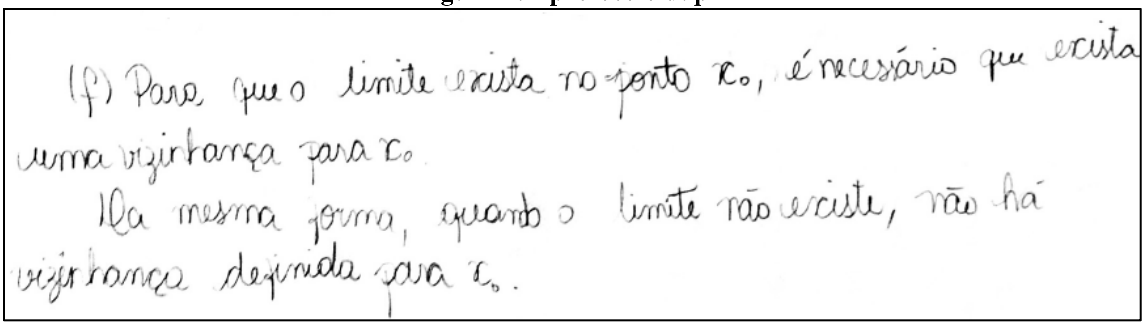
Figura 39 - Protocolo de resolução dupla


(e) Sim, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. $V_\varepsilon(2)$ está definida e é]0.71, 1.22[

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos, na nossa análise, que os alunos entendem a existência do limite por meio de vizinhança, mas não souberam registrar matematicamente. Nesse caso, a afirmação acima sobre a justificativa de limite em relação à vizinhança está incorreta, pois a $V\varepsilon(2) = V_{0,5}(2) =]1,5;2,5[$ corresponde ao eixo das ordenadas. Além disso, o intervalo]0,71; 1,22[é uma vizinhança determinada em torno de $x_0 = 1$. Por outro lado, quando usaram do registro da língua natural, conseguiram justificar de maneira adequada, conforme protocolo- Figura 40.

Figura 40 - protocolo dupla


(f) Para que o limite exista no ponto x_0, é necesário que exista uma vizinhança para x_0.
Da mesma forma, quando o limite não existe, não há vizinhança definida para x_0.

Fonte: Dados da pesquisa

4.4 Sequência de Atividades 4 - Estabelecendo relações entre ε e δ com auxílio do *applet* 3 do GeoGebra

A Sequência de Atividades apresentada, Anexo 5, propicia explorar a relação entre ε e δ, procurando estabelecer uma relação matemática entre eles. Também serão trabalhadas questões envolvendo a definição de limite utilizando $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$ (vizinhanças centradas em L e x_0) [3] que são iguais às soluções das inequações modulares $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|x - x_0| < \delta$ que constituem

[3] $V_a(b)$ que é um conjunto de números reais tal que x pertence a $\mathbb{R}$ tal que $| x - a | < b$.

a definição formal de limites, que visa levar os alunos à aprendizagem da definição formal de limite.

Esta Sequência de Atividades foi elaborada e fundamentada em Cornu (2002), Rocha (2010), Abreu e Reis (2011) e Fonseca e Henriques (2018). É importante destacarmos que a elaboração da atividade 4, parte 2, da referida atividade foi fundamentada em Fallas (2016) e em Soares e Cury (2017).

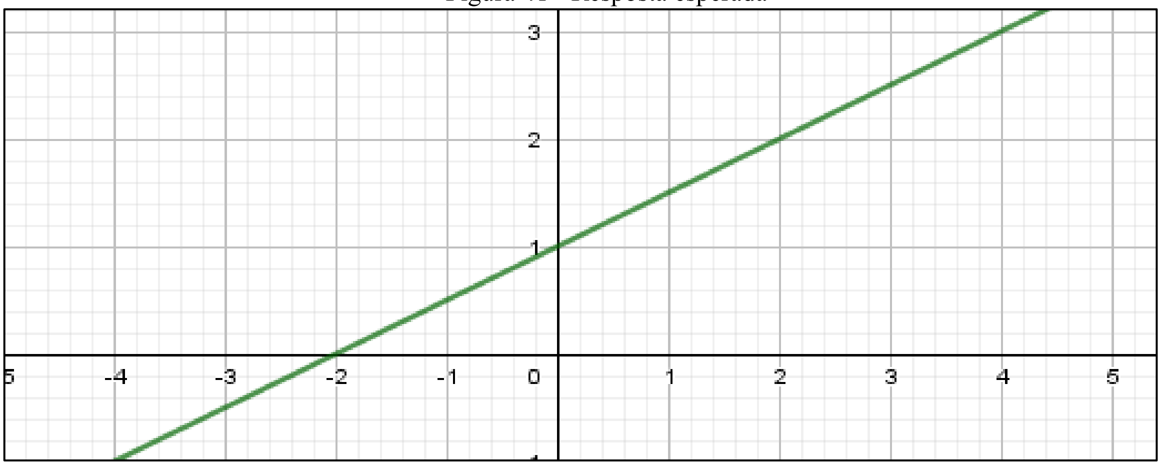
Objetivos:

- Determinar intervalos de vizinhança;
- Estabelecer uma relação entre ε e δ. ;
- Preparar o caminho para a definição formal de limite.

Sequência de Atividades 4 – parte 1

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0{,}5x + 1$, esboçar no papel a representação gráfica de f. Essa representação gráfica, que servirá de apoio para as questões a seguir, é evidenciada, abaixo, na Figura 41.

Figura 41 - Resposta esperada



Fonte: Dados da pesquisa

a) Seja um número real positivo $\varepsilon = 0{,}9$, considere no eixo Y o valor L=3.

b) Represente graficamente a vizinhança $V_\varepsilon(L)$ e escreva o intervalo numérico correspondente.

Resposta esperada: Intervalo]2,1; 3,9[

Observe que os valores de $f(x)$ que pertencem a $V_\varepsilon(L)$ são imagens de pontos x contidos num intervalo do domínio da função f.

c) Qual o valor x_0 no qual $f(x) = 3$?

Resposta esperada: $x_0 = 4$.

d) Considerando as imagens que correspondem aos extremos da vizinhança$V_{\varepsilon}(3)$, quais os valores dos extremos da vizinhança de $x_0 = 4$? Qual é o intervalo determinado pela vizinhança de $x_0 = 4$?

Resposta esperada: $x = 2{,}2$ e $x = 5{,}8$.

e) Qual a distância entre o extremo à direita e o valor $x_0 = 4$?

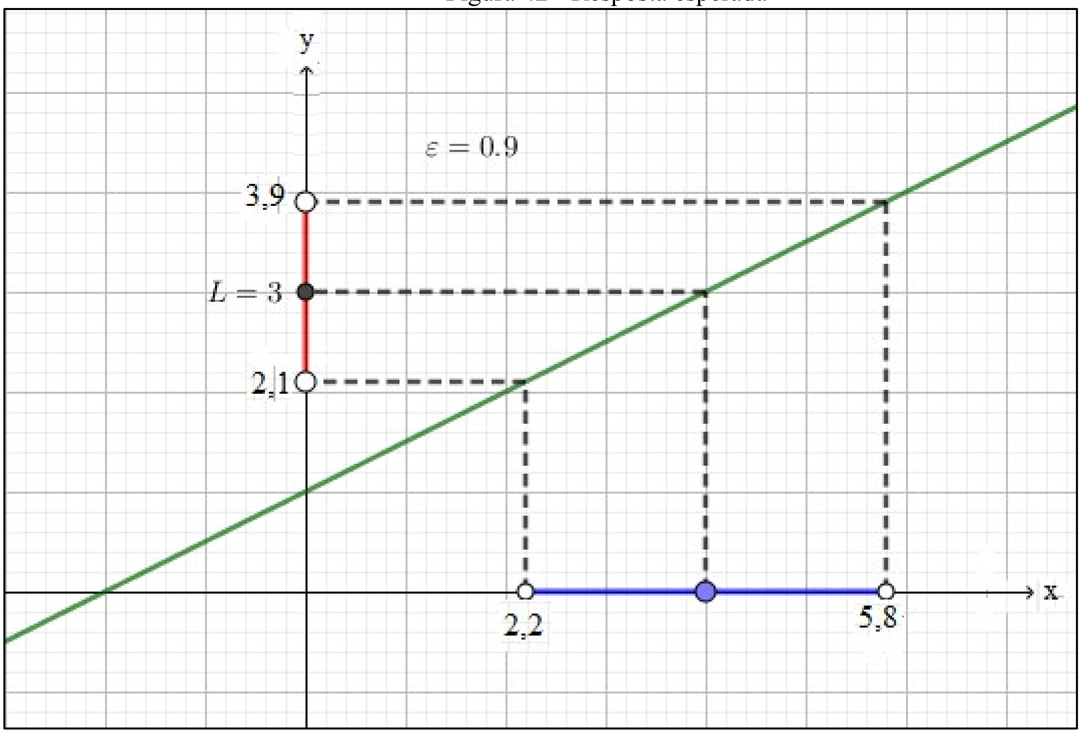
Qual a distância entre o extremo à esquerda e o valor $x_0 = 4$?
Reposta esperada: Ambas as distâncias são iguais a 1,8.
Essa distância será representada por δ.

f) As imagens dos valores do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ estão contidas no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$?
Resposta esperada: Sim. Todos os elementos do]2,2; 5,8[do domínio têm imagens no]2,1; 3,9[do contradomínio de f, pois:

$2{,}2 < x < 5{,}8 \iff 0{,}5\,(2{,}2) < 0{,}5\,x < 0{,}5\,(5{,}8)$
$= 1{,}1 < 0{,}5x < 2{,}9$
$= 1 + 1{,}1 < 0{,}5x + 1 < 2{,}9 + 1$
$= 2{,}1 < 0{,}5x + 1 < 3{,}9.$

Como apresentado na Figura 42.

Figura 42 - Resposta esperada



Fonte: Dados da pesquisa

Análise *a priori* da Sequência de Atividades 4 – parte 1- Estabelecendo relações entre ε e δ com auxílio do *applet* 3 do GeoGebra

A Sequência de Atividades 4 está dividida em 2 partes: a primeira para ser explorada utilizando a mídia lápis e papel; e a segunda, utilizando o *app* do GeoGebra. Na primeira parte, os alunos realizam explorações da representação geométrica do limite, cujo gráfico será esboçado por eles representando elementos da definição formal de limite.

Para o desenvolvimento desta atividade, é dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0{,}5x + 1$ que servirá de apoio para o desenvolvimento da atividade proposta.

Esta atividade nos permite aplicar, em seu desenvolvimento, a transformação das representações dos Registros de Representação Semiótica (RRS): o tratamento e a conversão. Ao procurar atender à solicitação da questão em esboçar a representação gráfica de *f*, o aluno transita da RN→RG, representado por uma tabela, e a Representação Gráfica utilizando o plano cartesiano, caracterizando assim uma conversão. Nossa expectativa é que, após o aluno realizar essas transições, ele consiga realizar a representação gráfica de *f* utilizando o plano cartesiano, como apresentado na Figura 41.

No item b) a conversão é realizada ao representar a vizinhança de L = 3, determinada por ε no gráfico de *f* e, em seguida, representá-la como um intervalo numérico, transitando entre as representações: RN→RG→RN. A nossa expectativa é que, após os alunos realizarem esses movimentos entre os registros e representarem a vizinhança, a Imagem Conceitual manifestada por eles seja de que uma vizinhança de um número qualquer, no caso em particular $x_0 = 4$, é um intervalo aberto e que a represente, conforme exposto na Figura 42. Quanto ao intervalo numérico correspondente, o aluno poderá representá-lo das seguintes maneiras:]2,2; 5,8[ou $\{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}2 < x < 5{,}8\}$, como representado na Figura 42.

De maneira geral, a atividade possibilita executar os seguintes movimentos:
da RN→RG, vizinhança criada pelo número ε = 0,9 dado em torno de L= 3; da RG→RN, ao descrever o conjunto numérico determinado por ε. Ficando assim: RG→RN→RG ou RN→RG→RG.

Para o item c), esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelo aluno seja de que ele utilizará elementos do contradomínio de *f* para obter valores correspondentes no domínio de *f*. Nesse caso, realizando uma transição entre RA→RN, ou seja, uma conversão.

Para o item d), esperamos que os alunos utilizem a lei de formação de *f* para obter os valores dos extremos da vizinhança de $x_0 = 4$, transitando somente na Representação Algébrica, o que caracteriza um tratamento.

$f(x) = 0,5x + 1$ $\quad$ $f(x) = 0,5x + 1$

$f(x) = 3,9$ $\quad$ $f(x) = 2,1$

$0,5x + 1 = 3,9$ $\quad$ $0,5x + 1 = 2,1$

$x = 5,8$ $\quad$ $x = 2,2$

Logo, os extremos correspondentes das abscissas são: 2,2 e 5,8. O intervalo determinado pela vizinhança de $x_0 = 4$ é dado pelo intervalo aberto]2,2;5,8[, o pode ser observado na Figura 42.

Para a realização desta atividade, o aluno transitou nas seguintes representações: RN→RA→RN→RLN→RG.

Para o item e), esperamos que os alunos, ao determinarem a distância entre os extremos direito e esquerdo, atentem-se aos valores obtidos, que são os mesmos, assim eles representam a distância δ entre $x_0 = 4$ e os extremos. Esses cálculos podem ser realizados conforme visto na Sequência de Atividades 3, parte 2, utilizando o módulo ou valor absoluto para calcular a distância entre $x_0 = 4$ e o valor do extremo.

Distância extremo esquerdo $\quad$ Distância extremo direito

$d\,(4;2,2) = |4 - 2,2|$ $\quad$ $d\,(4;5,8) = |4 - 5,8|$

$d\,(4;2,2) = 1,8$ $\quad$ $d\,(4;5,8) = 1,8$

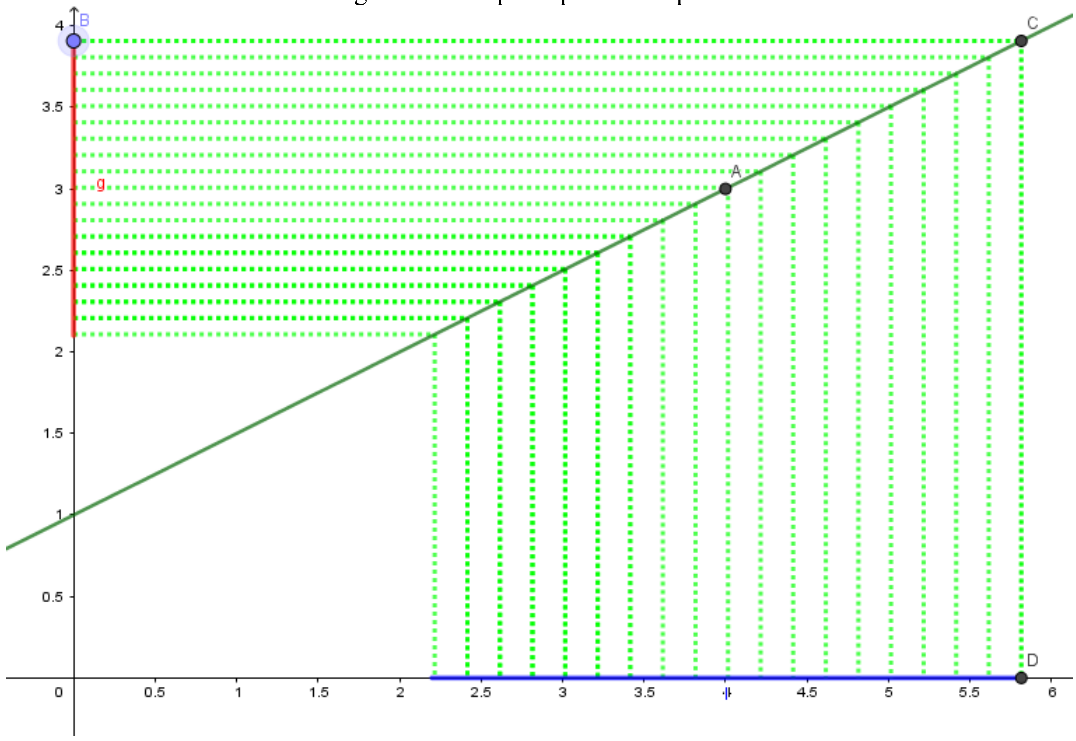
Ou ainda que:

Para o extremo esquerdo, realizem a seguinte operação: 4 - 2,2 = 1,8. E para o extremo direito: 5,8 – 4=1,8.

Em relação ao item f), como a vizinhança obtida no domínio da função foi gerada a partir dos extremos da vizinhança do contradomínio de *f*, esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelo aluno seja de que todos os elementos do intervalo, ou da vizinhança de $x_0 = 4$ do domínio, tenham imagens correspondentes no intervalo ou na vizinhança de $L = 3$, do contradomínio de *f*. Que ele visualize e conclua que as imagens de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ estão contidas no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Neste item, o aluno transitou na RN ao determinar a vizinhança gerada a partir do contradomínio de *f*, caracterizando, assim, um tratamento. Então, poderá transitar da RG→RN, como mostra a Figura 43.

Figura 43 - Resposta possível esperada



Sequência de Atividades 4 – parte 2

Abra o *applet* https://www.geogebra.org/m/skpjgngt e digite $f(x)$=0,5x + 1, e posicione o ponto A em y = 3. De acordo com os valores da tabela abaixo, movimente o Controle Deslizante ε, indicado na primeira coluna, e complete a tabela com o comportamento das vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$.

Tabela 4 - Resposta esperada

Valor de ε	Vizinhança $V_\varepsilon(3)$	Vizinhança $V_\delta(4)$	Valor de δ
0,5	]2,5; 3,5[	]3, 5[	1
0,2	]2,8; 3,2[	]3,6; 4,4[	0,4
0,1	]2,9; 3,1[	]3,8; 4,2[	0,2
0,01	]2,99; 3,01[	]3,98; 4,02[	0,02

g) É possível estabelecer uma relação matemática entre ε (o raio de $V_\varepsilon(L)$) e δ (raio de $V_\delta(x_0)$). Caso seja possível, qual seria essa relação?

Resposta esperada: Sim. δ = 2ε

h) A partir das ideias trabalhadas, apresente uma definição do $\lim_{x\to 4} 0{,}5x + 1$ tomando como base as ideias de vizinhanças $V_\varepsilon(3)$ e $V_\delta(4)$.

Resposta esperada: significa que $\lim_{x\to 4} 0{,}5x + 1 = 3$, em que a expressão $|x - 4| < \delta$ é a vizinhança de $x_0 = 4$ e δ é o raio, e $|f(x) - 3| < \varepsilon$ representa uma vizinhança em torno de L = 3 e ε é o raio. Sendo assim, se $x \in V_\delta(4) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(3)$, então $\lim_{x\to 4} 0{,}5x + 1 = 3$.

Análise *a priori* da Sequência de Atividades 4 – parte 2- Estabelecendo relações entre ε e δ com auxílio do *applet* 3 do GeoGebra

Nesta parte da atividade, os alunos realizam explorações da representação geométrica do limite, representada num *applet* do GeoGebra, cujos elementos na sua expressão algébrica se apoiam na definição formal.

Nosso propósito com o item g) é despertar no aluno a existência de uma relação entre os valores de ε e δ. Sendo, portanto, possível estabelecer essa relação por comparação utilizando a noção de distância entre dois números, com raciocínio semelhante ao que foi usado na Sequência de Atividades 3 - parte 2, usando elementos da definição formal de limite. Esperamos que o aluno estabeleça essa relação algebricamente, como segue. Se:

(I)
$$| x - x_0 | < \delta$$
$$| x - 4 | < \delta$$

(II)
$$| f(x) - L | < \varepsilon$$
$$| 0{,}5x + 1 - 3 | < \varepsilon$$
$$| 0{,}5x - 2 |$$
$$0{,}5 \; | x - 4 |$$
$$| x - 4 | < \frac{\varepsilon}{0{,}5}$$
$$| x - 4 | < 2\varepsilon$$

Por comparação entre (I) e (II), temos que:

δ = 2ε, o que significa que o valor de δ é o dobro ε.

Neste item, o aluno transita somente no registro algébrico, caracterizando assim um tratamento. Em relação ao PMA, podem ser desenvolvidos os seguintes processos: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, análise e síntese.

Na parte 1 da atividade ocorre a mudança entre diferentes representações quando é solicitado ao aluno fazer o esboço do gráfico da função *f* utilizando a mídia lápis e papel. É possível que ele faça os possíveis movimentos: RA→RN, e do RN→RG.

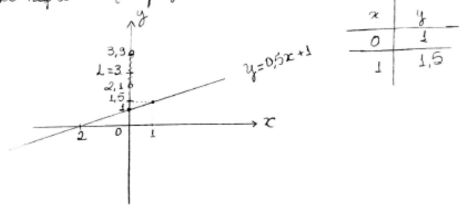
Na parte 2 da atividade desenvolve-se a visualização e mudança de representação ao utilizar o *applet* 4 para determinar a representação gráfica da função *f* e ao descrever as vizinhanças determinadas pelos valores de ε dados na primeira coluna da tabela. No item b), esse processo desenvolve-se ao passar da RG→RN a vizinhança de $V_\varepsilon(L)$ e ao determinar a vizinhança correspondente no eixo X; no item d), ao determinar os valores dos extremos de $x_0 = 4$; e no item e), ao determinar a distância δ e ao verificar se as imagens do intervalo (x_0 – δ, x_0 + δ) estão contidas no (L – ε, L + ε). Ainda, ao movimentar o Controle Deslizante ε, atribuindo-lhe valores de acordo com a primeira coluna da tabela, para que fossem determinadas as vizinhanças $V_\varepsilon(3)$ da segunda coluna, $V_\delta(4)$ da terceira coluna e o valor de δ da quarta coluna.

Já os processos de síntese e análise são desenvolvidos no item g), quando é solicitado ao aluno desenvolver uma relação matemática entre ε e δ; e no item h), quando é solicitado ao aluno determinar uma definição para o limite de *f*.

Análise *a posteriori* –Sequência de Atividades 4 – Estabelecendo relações entre ε e δ com auxílio do *applet* 3 do GeoGebra

O esboço da representação gráfica da função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0{,}5x + 1$, servirá de apoio para o desenvolvimento e registro dos itens que compõem a parte 1 da atividade, os quais são compostos pelos elementos da definição formal, como exemplificado pelo diálogo entre os participantes A3 e A4, exposto no Quadro 24.

Quadro 24 - Diálogo entre A3 e A4

Diálogo entre A3 e A4	*Exploração representação gráfica*
A3:Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por f (x) = 0,5x +1, esboçar no papel a representação gráfica de f. Essa representação gráfica servirá de apoio para as questões a seguir: *A3: Vou esboçar o gráfico aqui.* *Oh, Pesquisador!* Pesquisador: Oi! Pode Falar. *A3: Eu acho que aqui ficou um pouco cortado o meu documento do Word, é melhor você colocar a apresentação aí e a gente acompanha.* Pesquisador: Ok! Retomar a apresentação. Foi? *A3: Só aproxima um pouco, dá um zoom aí.* Pesquisador: E aí? Mais? *A3: Aí está bom.* *A4: Está ok!* *A3: Não, está ótimo!* *A função vai cortar o eixo do X no -2 e no Y no 1.* *A4: Exatamente!* *A3: Então pronto aqui. Continuando a letra a.* *Seja um número real positivo ε = 0,9, considere no eixo Y o valor L=3.* *A3: Pronto! Feito.* *Represente graficamente a vizinhança $V_\varepsilon(L)$, e escreva o intervalo numérico correspondente.* *A4: Está abeto de 2,1 a 3,9.* *A3: Então fica o intervalo de ...* *A4: O intervalo de 2,1 a 3,9.* *A3: Isso!* *A4: Aberto.* *A3: Pronto!* *Observe que os valores de f (x) que pertencem a $V_\varepsilon(L)$ são imagens de pontos x contidos num intervalo do domínio da função f.* *A3: Letra C.* *Qual o valor x_0 no qual f (x) = 3?* *Fica...* *A4: 2,2 e ... 5,8?*	Esboço da representação gráfica de $f(x) = 0{,}5x + 1$  Como $L=3$ e $\varepsilon = 0{,}9$, então $V_\varepsilon(L) = (2{,}1;3{,}9)$.

A3: x= 4. *É isto mesmo.* *Porque aí fica 0,5 x 4 que 2 + 1 é 3.* *A4: Ah, tá, é que f (x)=3. Eu estava vezes ε.* *Está certo.* *A3: Vou fazer uma conta aqui para ficar melhor.* *Letra D: Considerando as imagens que correspondem aos extremos da vizinhança $V_{\varepsilon}(3)$, quais os valores dos extremos da vizinhança de x_0 = 4? Qual é o intervalo determinado pela vizinhança de x_0 = 4?* *Vizinhança de de...... a vizinhança do tipo 3,409. Quais são os valores de x que do tipo...* *A4: Nessa vai ser os x pra qual a imagem vai dar os extremos da vizinhança, aí sim vai ser 2,2 e 5,8.* *A3:Espera aí.* *Considerando a imagem... Quais os valores dos extremos?* *A4: Está perguntando assim: Quais são os valores de x cuja a imagem leva nos extremos da ...[vizinhança]?* *A3: Ah, tá. Entendi.* *Qual o valor de x para o qual o f (x) é 1,5?* *1.5 não, é 2,1 a 3,9.* *A4: Isso.* *A3: Espera aí, vou fazer a conta aqui.* *Aí o f (x)= 2,2, né?* *A4: Isso.* *A3: Aí dá 5,8?* *A4: Exatamente!* Pesquisador: Qual o procedimento que vocês usaram para determinar estes valores aí? *A3: Não entendi, Pesquisador?* *Repete por favor!* Pesquisador: Qual procedimento que vocês estão usando pra determinar estes extremos aí? *A4: Algébrico mesmo.* Pesquisador: Algébrico, né? *A3: É, eu coloquei f (x_0) = 2,1, então 0,5x +1 tem que ser igual a 2,1. Aí encontra o x_0, né?* Pesquisador: Beleza! *A4: Apesar ... eu calculei de cabeça, mas pode deixar registrado.* *A3:Escrevi, seria bom pra ele, entendeu? Na hora de discursar, sei lá.* *A3:Letra e, né?* *A4: É.* *A3: Ou d?* *Qual a distância entre o extremo à direita e o valor x_0 = 4?* *A4: 0...1,8.* *1,8.* *A3: Espera aí.* *Não entendi. Por quê?* *A4:A entre achou três valores no f (x) que foi ... que foi 2,2, 4 e o 5,7.* *A3: Ah, não. Está certo. Está certo, é isso mesmo. Não é 1,8, né?* *A4: É.* *A distância é a mesma, tanto pela esquerda quanto pela direita vai dar o mesmo valor.* *A3: É verdade.*	

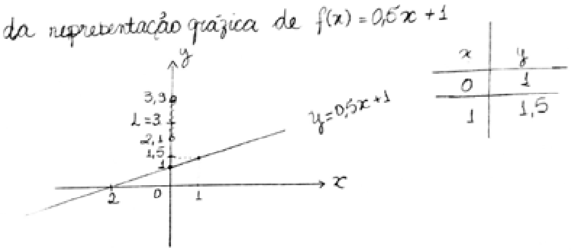
Qual a distância entre o extremo à esquerda e o valor $x_0 = 4$? *É 1,8 também. Essa distância será representada por* δ. *Letra f. As imagens dos valores do intervalo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *estão contidas no intervalo* (L – ε, L + ε)*?* *A4: A função é contínua, né? Então contínua neste intervalo.* *A3: Sim, né?* *A4:Sim.* *A3: Sim. E o que mais?* *A4: Pode justificar porque a função é contínua neste domínio, neste intervalo.* *A3:Beleza!* *Então a atividade parte a parte 2, né?*	

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo entre os participantes A3 e A4, eles atribuem valores a *x* para esboçar a representação gráfica de *f*. Ao atribuírem os valores, A3 escolhe os interceptos do gráfico: *"A função* [o traço do gráfico] *vai cortar o eixo X no -2 e o eixo Y no 1*. O que é confirmado por A4: *"Exatamente"*. Em seguida, no item b), eles representam a vizinhança de centro em L = 3 e raio ε = 0,9. Ao resolver o item c), a dupla usou como estratégia substituir o valor da imagem na lei de formação e determinar o valor da abscissa correspondente, desenvolvendo os cálculos algebricamente. A mesma estratégia foi utilizada pela dupla para resolver o item d) para obter os extremos centrado em $x_0 = 4$. Isso fica evidenciado quando o pesquisador os interpela: "Q*ual o procedimento que vocês estão usando para responder os itens c) e d)?*". A4 responde: "A*lgébrico mesmo*". Na sequência do item d), a dupla não descreveu o conjunto de valores determinado pela vizinhança de $x_0 = 4$. Ao determinar a distância entre o extremo, no item e), à esquerda e à direita, A4 reconheceu que os valores distam igualmente dos extremos até o centro em $x_0 = 4$, quando ele fala para A3: *"A distância é a mesma, tanto pela esquerda quanto pela direita vai dar o mesmo valor"*.

As estratégias mobilizadas para resolver os itens da parte 1 utilizando o cálculo algébrico, possibilitou à dupla reconhecer e esboçar a Representação Gráfica da função *f* de forma satisfatória, assim como representar a vizinhança de centro em L = 3, determinando os seus extemos e indicando-os como (2,1; 3,9), mas os demais itens da parte 1 da atividade não foram representados. A mesma estratégia utilizada possibilitou à dupla: determinar no item c) que o valor correspondente para $f(x_0) = 3$ e tinha como correspondente no eixo das abscissas $x_0 = 4$; e no item d), determinar os extremos do intervalo centrado em $x_0 = 4$ como 2,2 e 5,8. Para o item e), a dupla determinou de maneira satisfatória o valor da distância, obtendo como resultado 1,8, conforme indicado no protocolo de resolução- Quadro 25.

Quadro 25 - Protocolo de resolução parte 1 dupla

Representação gráfica, item a) e b)	Esboço da representação gráfica de $f(x) = 0{,}5x + 1$  Como $L = 3$ e $\varepsilon = 0{,}9$, então $V_\varepsilon(L) = (2{,}1; 3{,}9)$.
Item c)	(c) $f(x_0) = 3 \Leftrightarrow 0{,}5x_0 + 1 = 3 \Leftrightarrow 0{,}5x_0 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = 4}$
Item d)	(d) $f(x_0) = 2{,}1 \Leftrightarrow 0{,}5x_0 + 1 = 2{,}1 \Leftrightarrow 0{,}5x_0 = 1{,}1 \Leftrightarrow x_0 = 2{,}2$. $f(x_0) = 3{,}9 \Leftrightarrow 0{,}5x_0 + 1 = 3{,}9 \Leftrightarrow 0{,}5x_0 = 2{,}9 \Leftrightarrow x_0 = 5{,}8$.
Item e)	(e) $\lvert 5{,}8 - 4 \rvert = 1{,}8$ $\lvert 2{,}2 - 4 \rvert = 1{,}8$

Fonte: Dados da pesquisa

Quanto ao item f), a dupla apresentou incompreensão ao justificar a relação de inclusão entre os elementos do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e do intervalo $(f(x) - L, f(x) + L)$. A dupla reconheceu a relação de inclusão, porém justificou de forma incoerente essa relação de inclusão pelo fato da função ser contínua, como apresentado na Figura 44.

Figura 44 - Protocolo de resolução dupla

(f) Sim, pois a função é contínua em todo domínio.

Fonte: Dados da pesquisa

O que tínhamos como expectativa na análise *a priori* é que o aluno reconhecesse, no caso a dupla, que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, pois essa relação é primordial para inserir o aluno na aprendizagem da definição formal de limite.

Inferimos que a dupla apresentou como Definição Conceitual de continuidade que, se a função f está definida em todo o domínio, logo é contínua. Entendemos, de acordo com a nossa análise, que eles estavam referindo-se aos elementos do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ em relação ao intervalo

(L - ε, L + ε) e procuraram justificar utilizando o conceito de continuidade. Segundo Guidorizze (2018),

> intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta "salto" em p. Considerando duas funções f e g dadas por $f(x) = x \; e \; g(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \leq 1 \\ 2 \; se \; x > 1 \end{cases}$. Intuitivamente f é contínua em todo p do seu domínio. Por sua vez, g não é contínua em $p = 1$, mas é contínua em todo $p \neq 1$.
>
> [...] é razoável esperar que se f estiver definida em p e for contínua em p, então, $\lim_{x \to P} f\,(x) = f\,(p)$, e reciprocamente. [...] isto é, se f estiver definida em p
>
> f é continua em p $\Leftrightarrow \lim_{x \to P} f\,(x) = f\,(p)$.
>
> $\lim_{x \to P} f\,(x) = L$, f está definida em p, mas L$\neq f(p)$. L é o valor que f deveria ter em p, para ser contínua em p. (GUIDORIZZE, Hamilton, pp.55,56 e 57)

A partir do protocolo apresentado pela dupla, julgamos pertinente descrever um pouco sobre continuidade de uma função. Retomamos a nossa análise em seguida.

Nesta parte da atividade, os alunos realizam explorações da representação geométrica do limite, representada no *apple*t 4 do GeoGebra, cujos registros se apoiam na expressão algébrica da definição formal. Acreditamos que as explorações e simulações realizadas nas vizinhanças $V_\delta(x_0)$ e $V_\varepsilon(L)$, a partir de modificações dos valores de seus raios (δ e ε) e de pontos $(x, f\,(x))$ com $x \in V_\delta(x_0)$ e $f\,(x) \in V_\varepsilon(L)$, tenham favorecido à dupla determinar a relação matemática entre δ e ε por meio do raciocínio lógico. No entanto, a dupla não desenvolveu a Imagem Conceitual de limite em termos das noções de vizinhanças, como podemos observar no Quadro 26 de protocolos, que mostra o diálogo entre os participantes A3 e A4.

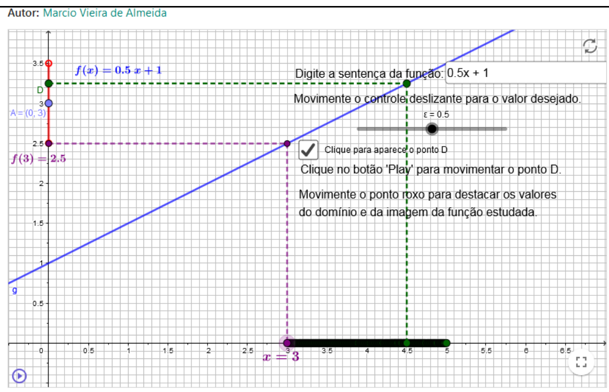
Quadro 26 -Diálogo entre A3 e A4 dupla

<table>
<tr><th>Diálogo</th><th>Exploração representação gráfica</th></tr>
<tr><td>A3: Abra o applet e digite f(x)=0.5x+1, e posicione o ponto A em y=3. De acordo com os valores da tabela abaixo, movimente o Controle Deslizante ε, indicado na primeira coluna, e complete a tabela com o comportamento das vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$. Deixe eu abrir aqui que tenho que completar.

A4; Se você quiser, eu te mando um link [da tabela].

A3: Não, eu tô falando assim, eu vou abrir o..... você fica com o applet aberto e eu fico com o documento no word.

A4: Pode ser.

A3: Essa tabela você vai querer digitada, Pesquisador?
Pesquisador: Faça da maneira que ficar melhor para vocês.</td><td>
</td></tr>
</table>

A3: Vou escrever porque o documento está desconfigurado. *A4; Posso escrever na tabela.* *A3: Pode ser.* *A4: Se bem que ela está em pdf. O problema maior vai ser encontrar o épsilon aqui. O controle fica pulando* [Controle Deslizante]. *A3: Oi? Eu consegui aqui, A4.* *A4: É porque o controle aqui está pulando as etapas, vou tentar baixar aqui ...* *A3: Vou fazer a tabela aqui.* *A4: Tá aparecendo direitinho aí?* [Compartilhando a tabela da atividade.] *A3: Oi?* *A4: Tá aparecendo?* *Agora tem que completar com as vizinhanças...* y = *3, né*? [Movimentando o Controle Deslizante.] *A3: Então a vizinhança é de 2,5 a 3,5.* *A4: Isso. 2,5 a 3,5 no eixo y?* *A3: É um intervalo.* *Agora com épsilon igual a 0,2.* *A4: Coloca o... da vizinhança do delta também. Vai de ... 3 a... 5* [movimenta o Controle Deslizante]. *A3: Beleza.* *Não, pera aí. O que você está fazendo?* *A4: Não é para completar a tabela? Vizinhança...* *A3: Parou. A apresentação parou.* *A4: Deve ser a internet.* *A3: Voltou, voltou.* *A4: Estou completando a tabela. A vizinhança de 3 com épsilon igual a 0,5 vai ser 2,5 a 3,5 no eixo y.* *A3:Isso, exatamente. Agora é a imagem dele. Desse intervalo. A imagem não. No caso desse intervalo quais são os x...* *A4: Abscissas.* *A3: Isso.* *A4: Complete a vizinhança de delta vai de 3 a 5.* *A3: Agora o valor de delta vai ser ... é...* *A4: 2... ou 1...?* [Movimentando o ponto roxo.] *Vai ser 1.* *A3: Não.* *A4:É. x é 4. 4-3...* *A3:Entendi, 1.* *A4: É.* *A3: Não. Entendi. Agora é com 0,2* [épsilon]. [Posicionando o controle deslizante em ε = 0,2.] *É 2,8.* *A4: É de 2,8 a 3,2.* *A3: Aí a vizinhança de 4 é de 3,6 a 4,4.* *E agora o valor de delta é 0,4.* *A4: 0,4.* *A3: Isso. Agora é com 0,1.* [Movimentando o ponto roxo.] *A4: Deu certo?* *A3: Deu. 2,9 a 3,1, né?* *A4; Isso.* *A3: Agora a vizinhança de delta vai de 3,8 a 4,2.* *A4: Isso. Apesar do GeoGebra ter arredondado.*	

A3: A distância... o delta é de 0,2. *A4: Isso.* *A3: Agora com épsilon igual a 0,01.* *Você está completando a tabela aí?* *Tô. Estou fazendo a lápis.* *A4: Não tem problema não. O épsilon é de quanto?* *A3: 0,01.* *A4: Deu certo, né? Deu. Vai de 2,99 a 3,01.* *A3: Isso. E o delta?* [vizinhança] *A4: 3,98 até 4,02?* *A3: Pesquisador, projeta novamente a atividade?* Pesquisador: Sim. *A3: Letra g. É possível estabelecer uma relação matemática entre ε (o raio de* $V_\varepsilon(L)$*) e δ (raio de*$V_\delta(x_0)$*). Caso seja possível, qual seria essa relação?* *A4: Tem que comparar os ... Como ficaram os deltas aí? Foi 0,02. Não foi?* *A3:0,4; 0,2 e 0,02. É isso mesmo.* *A4: Está dobrando, né, o épsilon.* *A3: Isso.* Pesquisador: E para 0,5, qual foi o delta? *A4 e A3* [juntos]: *Foi 1.* *A4: Então, nesse caso, o delta é o dobro do épsilon.* *A3: É, exatamente. Pode passar para a próxima?* *A4: Pode sim.* *A3: A partir das ideias trabalhadas, apresente uma definição do* $\lim_{x \to 4} 0{,}5x + 1$ *tomando como base as ideias de vizinhanças* $V_\varepsilon(3)$ *e* $V_\delta(4)$*. Bom, a distância de 3 a 4 é menor que épsilon. Estou tentando escrever um negócio aqui* [definição]. *Como você escreveria, A4?* *A4: Eu estava pensando nos limites laterais. A gente viu aí pela tabela ... como é? Quanto mais restringe o épsilon, restringe o delta. Daí a imagem quando o ... o x está aproximando de 4, a imagem da função está indo para próximo de 3 tanto pela esquerda quanto pela direita.* *A3: Então a definição de limite é a definição de vizinhança. Tipo uma depende da outra, como na letra g, delta depende do épislon.* Pesquisador: Dê uma revisada na atividade aí atrás. [....] Só pensar no que vocês fizeram. *A3: É definição de limite mesmo a .... a vizinhança do 3 depende da vizinhança do 4. Aliás, a vizinhança do 4 depende da vizinhança do 3. Então, quando você trava* [limita] *com raio lá no contradomínio, você vai ter uma correspondência no domínio. Nesse caso não, o delta depende do épsilon. Delta em particular é 2 épsilon.*	

A4: A3, pode ficar assim: para todo épsilon menor ou igual a meio, vai existir um delta menor ou igual a 1. Vai existir um delta que é o dobro de épsilon para o qual a distância entre a imagem e o L é menor que o épsilon e a distância entre o ponto x e o ... *A3:É melhor olhar pelo lado da positividade. Os dois têm que ser positivo. Então, para todo épsilon positivo, existe um delta igual a 2 épsilon. Pode ser?* *A4: Pode.* *A3: Acho que fica melhor. Tal que a distância de x até a ... 4, né?* *A4: A um ponto.* *A3: A 4. Como ele está falando dessa função...* *A4: Sim. Tá certo. Entendi agora. A distância de x a 4 é menor que delta.* *A3: Vou colocar no caso 2 épsilon implica que f (x) a 3 é menor do que épsilon. Então é isso. É que a gente tem que exibir quem é esse delta. A gente já conseguiu, ele que é 2 épsilon.* *A4: Hum hum. Acho que é isso então.*	

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo apresentado acima, os participantes A3 e A4 exploram juntos o *applet* 4, que contém a RG de *f* , com o intuito de interpretar e compreender qual o comportamento das vizinhanças de $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$, assim como a relação matemática entre ε e δ; e, também, de dar uma definição de limite em termos de vizinhança.

Na análise da $V_{0,5}(3)$, ao posicionar o Controle Deslizante em ε = 0,5, A3 reconhece que: *“A vizinhança de 3 com ε = 0,5 vai de 2,5 até 3,5 no eixo y”* e, ao fazer o ponto D percorrer toda essa vizinhança, visualiza um intervalo descrito por D no eixo X por meio de um rastro. Quando A3 movimenta o ponto roxo situado no eixo das abscissas, fazendo-o percorrer sobre o rastro proveniente do movimento do ponto D, este destaca os valores do domínio e as imagens de *f* neste intervalo. Ao posicionar o ponto roxo sobre as extremidades da $V_{0,5}(3)$, a dupla reconhece que o rastro determina uma vizinhança de raio δ quando A4 solicita ao participante A3 que complete a coluna que contém $V_\delta(x_0)$: “*Coloca o ... da vizinhança do delta também. Vai de ... 3 a ...5* [movimenta o ponto roxo]*”*. A coluna que comporta o valor de δ é preenchida quando A3 questiona: *“Agora o valor de δ vai ser ... é...”*. A4 continua a movimentar o ponto roxo e conjectura: *“2... ou 1...?”*. E confirma em seguida: *“Vai ser 1”*.

Na análise para ε = 0,2, quando A3 posiciona o Controle Deslizante em ε = 0,2 e movimenta o ponto roxo, A4 interrompe e descreve que $V_{0,5}(3)$ *“é de 2,8 a 3,2”,* e A3 complementa com a vizinhança $V_{0,4}(4)$ ao afirmar *“Aí a vizinhança de 4 é de 3,6 a 4,4”.* A3 ainda determina o valor de δ ao dizer: *“E agora o valor de δ é 0,4”,* o que é confirmado por A4. O mesmo procedimento foi utilizado para obter as vizinhanças de $V_{0,1}(3)$, $V_{0,01}(3)$, contidas no contradomínio, e $V_2(4)$ e $V_{0,02}(4)$, contidas no domínio com seus respectivos valores para δ. Para o item g), a dupla reconheceu, por meio do raciocínio lógico, que a relação matemática existente entre o ε e δ é que o δ é o dobro de ε, quando A4 conjectura: "*Tem que comparar os ..... Como ficaram os δ aí?"*. A3 então responde: "*1; 0,4; 0,2 e 0,02. É isso mesmo"*. A4 continua sua linha de raciocínio: *"Está dobrando, né? O ε"*. E conclui que: "*Então, nesse caso, o δ é o dobro do ε"*.

A visualização dinâmica proporcionada pelo *applet* 4, ao movimentar o ponto roxo, propiciou à dupla determinar de maneira satisfatória as vizinhanças $V_\varepsilon(3)$ para os valores de ε dados, as vizinhanças de $V_\delta(4)$ e os valores de δ, conforme indicam os protocolos presentes na Figura 45.

Figura 45 - Protocolo resolução dupla

Tabela parte 2	Valor de ε	Vizinhança $V_\varepsilon(3)$	Vizinhança $V_\delta(4)$	Valor de δ
	0,5	(2,5; 3,5)	(3;5)	1
	0,2	(2,8;3,2)	(3,6;4,4)	0,4
	0,1	(2,9;3,1)	(3,8;4,2)	0,2
	0,01	(2,99;3,01)	(3,98;4,02)	0,02
Item g)	$\delta = 2\varepsilon$			

Fonte: Dados da pesquisa

Na discussão que prosseguiu entre os participantes ao analisarem a existência do limite em termos de vizinhança, verificamos que a dupla apresenta indícios de compreensão dos elementos que fazem parte da definição formal de limite, como verificado em alguns trechos do diálogo entre A3 e A4. Como diz A4: *"Quanto mais restringe o ε, restringe o δ. Daí a imagem quando o ... o x está aproximando de 4, a imagem da função está indo para próximo de 3 tanto pela esquerda quanto pela direita"*. A4 manifesta Imagem Conceitual a respeito da ordem entre os parâmetros ε e δ.

Por outro lado, A3 manifesta que: *"Então a <u>definição de limite</u> é a <u>definição de vizinhança</u>. Tipo uma depende da outra, como na letra g, δ depende do ε"*. E ilustra a sua fala da seguinte maneira: "*É definição de limite mesmo, a ... a vizinhança do 3 depende da vizinhança do 4. Aliás, a <u>vizinhança do 4</u> <u>depende da vizinhança do 3</u>. Então, quando você trava* [limita] *com raio lá no contradomínio, você vai ter uma correspondência no domínio"*. Depois parece mostrar ter propriedade da ordem de relação entre os parâmetros ε e δ, mas entra em contradição quando exemplifica com a relação encontrada no item g) que: *"Nesse caso não, o δ depende do ε. δ em particular é 2 ε"*. Observamos, nesse sentido, que A3 apresenta um conflito da Definição Conceitual da relação entre os parâmetros ε e δ.

Quanto à interpretação de $| x - 4 | < \delta$, A4 interpreta essa expressão como uma distância quando afirma: *"A distância de x a 4 é menor que delta"*. A3 também interpreta de maneira idêntica a A4 sobre a expressão $| f(x) - 3 | < \varepsilon$: "*... f (x) a 3* [distância entre] *é menor do que ε"*. Porém, a dupla revela incompreensão ao associar esses elementos da definição formal como vizinhança em torno de L = 3 e $x_0 = 4$ para responder o que era solicitado no item h) da atividade, conforme indicado no Figura 46 de protocolo de resolução.

Figura 46 - Protocolo resolução dupla item h)

Fonte: Dados da pesquisa

Diante do exposto, a dupla não conseguiu associar as investigações realizadas nas $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$, bem como apresentar uma definição para o limite em termos de vizinhança, conforme havíamos previsto na análise a *priori*. Ou seja, que $\lim_{x \to 4}(0{,}5x + 1) = 3$, onde a expressão $|x$ - $4| < \delta$ é a vizinhança de x_0 e δ é o raio, e $|f(x)$ - $3| < \varepsilon$ representa uma vizinhança em torno de L e ε um raio. Sendo assim, se $x \in V_\delta(4) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(3)$, então $\lim_{x \to 4}(0{,}5x + 1) = 3$.

Concluindo, a resolução da Sequência de Atividades permitiu à dupla realizar com facilidade conversões, como: transitar da RN→RA→RG ao esboçar o gráfico de *f* utilizando a mídia lápis e papel. Para realização dessa conversão, a dupla atribuiu valores aleatórios a *x*, criando uma tabela, depois transcreveu esses pares ordenados da tabela para o plano cartesiano, esboçando a representação gráfica de *f* (Figura 41 – Resposta esperada). No item b), os alunos realizaram a conversão ao transitarem da RN→RG→RN, ao descreverem a vizinhança como uma Representação Gráfica de L = 3 e da RG→RN e ao representarem o intervalo de L = 3 de raio ε = 0,9. Na parte 2 da RA→RG, ao plotarem a representação gráfica de *f* no *applet* do GeoGebra; e da RG→RN, ao determinar as $V_\varepsilon(L)$ $V_\varepsilon(\mathrm{L})$ e $V_\delta(x_0)$ ao completar a tabela.

Em relação ao tratamento, foi realizado: no item c), ao determinar a abscissa correspondente para $f(x_0) = 3$; no item d), ao determinar os valores dos extremos do intervalo; e no item e), ao determinar o raio do intervalo. Já no item g), a estratégia utilizada pela dupla para determinar a relação matemática entre ε e δ foi o raciocínio lógico e não, como esperávamos que seria, utilizando elementos da definição formal para estabelecer essa relação matemática.

A atividade também possibilitou o desenvolvimento de processos do PMA, como pode ser visto na introdução da parte 1, na qual ocorreu o processo de representação e a mudança de diferentes representações quando a questão solicitou esboçar o gráfico de *f*. A dupla partiu da RA para a RN e desta para a RG. Esses processos também foram desenvolvidos na introdução da parte 2 ao passar da RA → RG utilizando o *applet* 4 do GeoGebra e ao preencher a tabela transitando da Representação Geométrica para a Representação Numérica.

Os processos de síntese e análise não foram desenvolvidos como esperado no item g). A dupla estabeleceu a relação matemática entre ε e δ, por meio da intuição, e observou que os valores de δ, após realizarem as investigações, eram sempre o dobro de ε. Para o item h), a dupla não conseguiu desenvolver o processo de síntese ao combinar os conceitos de vizinhança e valores aproximados de uma função para determinação do limite e, consequentemente, o processo de análise para que pudesse ser apresentada uma definição para o $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$ em termos de vizinhança. Nossa expectativa era que fosse apresentada uma definição fundamentada explicitamente no conceito de vizinhança.

Já o processo de visualização foi desenvolvido na introdução da parte 1, quando a dupla visualiza a função como um conjunto de pares ordenados e faz a Representação Gráfica de *f* no plano cartesiano. A visualização também ocorre quando a dupla explora a vizinhança centrada em L = 3 de raio ε = 0,9. Nos itens d) e e), a visualização ocorre ao visualizar que as distâncias entre os extremos de $x_0 = 4$ são as mesmas. Para o item f), a dupla visualizou a relação entre ε e δ como δ sendo o dobro de ε. E na parte 2, ao visualizar e extrair os dados da Representação Gráfica de *f* para preenchimentos dos dados da tabela utilizando o ponto roxo do *applet* 4 como suporte.

No item h) ocorreram os processos de visualização, síntese e análise ao apresentar uma definição para o limite utilizando elementos da definição formal e não como previsto na análise a *priori* - que era para ser abordado utilizando o conceito de vizinhança.

4.5 Sequência de Atividades 5 – Compreensão da representação gráfica da definição do limite de uma função

Esta atividade, Anexo 6, tem por finalidade apresentar uma interpretação geométrica dos elementos da definição formal de limites, como também apresentar uma demonstração formal do limite de uma função f. E como suporte são sugeridas videoaulas que tratam da representação e da definição formal de limites, respectivamente, indicadas na parte 1 e na parte 3 das atividades.

Esta Sequência de Atividades está fundamentada nos trabalhos de Cornu (2002), Rocha (2010), Abreu e Reis (2011), Fallas (2016) e em Soares e Cury (2017).

Objetivos

- Explanar a compreensão sobre a representação gráfica da definição de limite de uma função por meio da utilização da definição formal desse objeto matemático;
- Explanar o entendimento do limite de uma função;
- Demonstrar o limite de uma função dada.

Sequência de Atividades 5 – parte 1

Assista às partes 2 e 3 do vídeo no link:https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home/limits-and-continuity-calc/formal-definition-of-limits-calc/v/limit-intuition-review

A parte 2 do vídeo trata da formação de ideia da definição formal de limite de uma função. Nessa parte ocorreu a transformação de conversão ao transitar da RG→RA e da RA→RLN e ao interpretar o significado do $\lim_{x \to c} f(x)$. Isso para o que o autor do vídeo denominou de diagrama (para nós uma representação gráfica de uma função *f* qualquer). Para o segundo gráfico, ocorreu o tratamento ao transitar sobre a RN para obter o valor do limite L.
Em relação ao PMA, esta atividade desenvolve o processo de intuição, na primeira e segunda representação gráfica, ao procurar determinar o valor do limite de *f* de *x*. O processo de mudança de representação e tradução entre elas ocorre ao passar da RG→RA e da RA → RLN. O processo de generalização, ao procurar determinar que para qualquer distância em torno de *L* ser capaz de determinar um raio em torno de c para manter $f(x)$ dentro de um intervalo nas proximidades de L. E O processo de visualização, ao transitar sobre as RA → RG.

A parte 3 do vídeo trata da definição formal de limite de uma função *f*. Nessa parte, foram desenvolvidos os processos de conversão ao transitar da RA→RG, ao apresentar o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 2x, x \neq 5 \\ x \ \ , x = 5 \end{cases}$ e da RG → RA, ao aplicar a definição para obter a relação matemática entre ε e δ para garantir que o $\lim_{x \to 5} f(x) = 10$ e RG→RA e ao estabelecer o limite de uma função qualquer aplicando a definição formal de limite.

Quanto ao PMA, foram desenvolvidos os processos de visualização, mudança de representação e tradução entre elas ao transitar da RA → RG e da RG →RA, para determinação do limite de *f*.

A síntese ocorreu ao mobilizar conceitos distintos de limites laterais, limite de uma função e inequações modulares; e a generalização, ao definir o $\lim_{x \to c} f(x)$em termos de grandezas infinitesimais ε e δ quaisquer para provar que $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

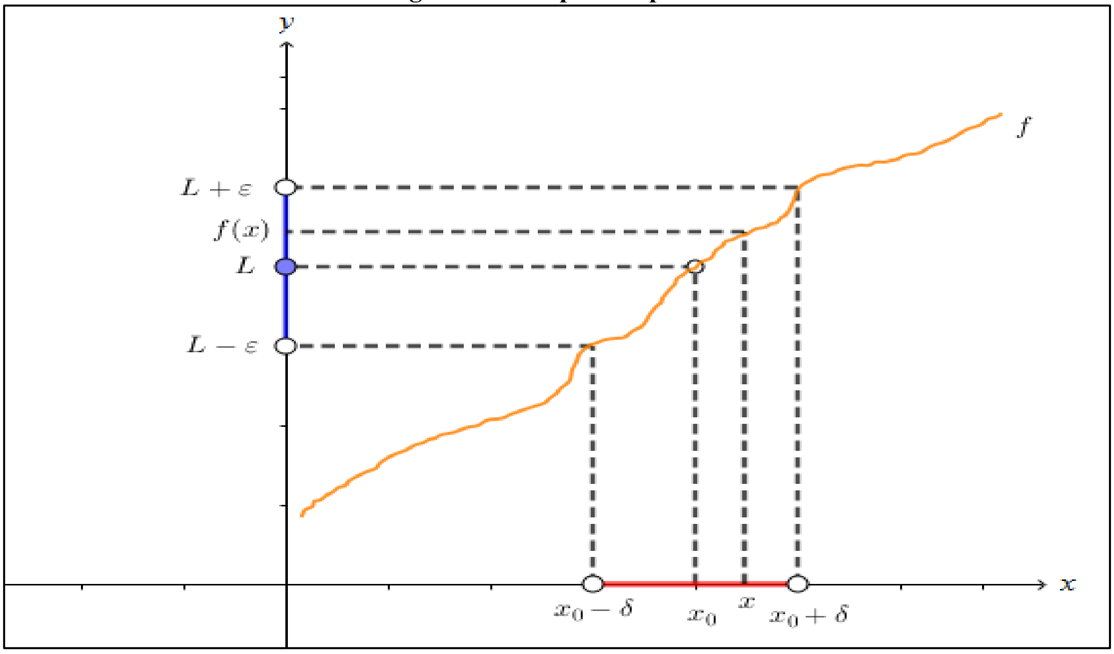
O processo de representação simbólica, é realizado por exemplo:

f (x) ≠ c para indicar que a função não está definida para *x = c;*
notação algébrica para se referir ao limite de uma função $\lim_{x \to c} f(x)$;
notação aritmética para indicar que os números ε e δ são positivos;
f (*x*) para se referir à lei e à formação da função na definição formal;
L para indicar o limite da função *f*;
(*c* - δ, *c* +δ) para indicar o intervalo de centro em *c;*
(*L* - ε, *L* +ε) para indicar o intervalo de centro em *L.*

Sequência de Atividades 5 – parte 2

Represente graficamente, em uma folha de papel, a definição de limite de uma função arbitrária, conforme a expressão $\forall\, \varepsilon > 0$, existe δ> 0 tal que se 0 <|x – x_0|< δ então |f (x) – L|< ε logo $\lim_{x \to x_0} f\ (x) = L$.

Figura 47 - Resposta esperada



Fonte: Dados da pesquisa 2021

Análise *a priori*- parte 2

Para a parte 2, esperamos que os alunos mobilizem a Definição Conceitual para representar graficamente os elementos da definição formal de limite, reconhecendo as vizinhanças em torno de x_0, determinada por $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, com a distância entre x e x_0 menor que o raio δ de $V_\delta(x_0)$, dada por $0 < |\ x - x_0\ | < \delta$ e, em torno de L, determinada por $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, com a distância entre $f(x)$ e L ser menor que o raio ε de $V_\varepsilon(x_0)$ dada por $|\ f(x) - L\ | < \varepsilon$, reconhecendo, também, a importância do significado da ordem dos quantificadores universal ∀ e existencial ∃, concluindo que:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

O desenvolvimento desta atividade possibilita realizar uma conversão ao transitar entre RA→ RG, para obter a representação gráfica de *f*. Em relação ao PMA, na parte 2 da Sequência de Atividades 5, podem ser desenvolvidos os processos de: visualização, mudança de representação e tradução entre elas, síntese e o processo simbólico.

O processo de visualização ocorre quando os alunos apresentarem o esboço gráfico do limite de uma função *f* com os elementos da definição formal. O processo de representação e mudança entre diferentes representações ocorre ao passarem da RA→RG.

O processo de síntese é evidenciado quando são mobilizados conceitos, como vizinhança de um ponto, inequações modulares, plano cartesiano e ε e δ, para representação dos elementos que compõem a definição limite da função *f*. E o processo simbólico quando há o uso de símbolos pelos participantes, pois o uso de símbolos pode evidenciar o grau de desenvolvimento do aluno, por exemplo, para indicar: uma função qualquer simbolizada por *f* ; centro da vizinhança no eixo das ordenadas por L; centro da vizinhança no eixo das abscissas por x_0; vizinhança de raio ε e centro em L por $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ou Vε(L) e, finalmente, vizinhança de raio δ e centro em x_0 por $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ou $V_\delta(x_0)$.

Sequência de Atividades 5 – parte 3

Após desenvolver as partes 1 e 2 desta atividade, explanar o que você entende por $\lim_{x \to a} f\ (x) = L$.

Resposta esperada: $\lim_{x \to a} f\ (x) = L$ se $0 < |x - a| < \delta$ representa uma vizinhança em torno de a e δ é o raio, e $|f(x) - L| < \varepsilon$ representa uma vizinhança em torno de L e ε é o raio.

Outra resposta: Para uma vizinhança em torno de a de raio δ, $f(x)$ varia em torno de uma vizinhança L de raio ε. Logo, existe o $\lim_{x \to a} f\ (x) = L$.

Análise *a priori* -parte 3

Esperamos que o aluno reconheça que, para o $\lim_{x \to a} f\ (x) = L$, é necessário que exista uma vizinhança em torno de a, para $x \neq a$, de raio δ, de maneira que $f\,(x)$ varie em torno de uma vizinhança centrada em L de raio ε.

Nesta questão é realizada a conversão entre a Representação Algébrico e a Representação da língua natural, ou seja, RA→RLN.

Em relação ao PMA, propicia desenvolver o processo de síntese quando se tem que mobilizar outros conceitos, como vizinhança $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ou $|f\ (x) - L| < \varepsilon$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ou $0 < |x - x_0| < \delta$, variação dos valores de uma função, ε, δ, e relacionar essas informações para explanar o seu entendimento sobre $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Sequência de Atividades 5 – parte 4

Demonstre que $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$

Se tiver dificuldades nesta atividade, veja o exemplo no vídeo do link, abaixo, e indique se foi necessário acessar o vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=JFahdyAbUzQ

R**esposta esperada**:

$\forall \varepsilon > 0$ é possível obter $\delta > 0$ tal que se $0 < |\ x - 3\ | < \delta$ então $|2x - 1 - 5| < \varepsilon$ então:

Procurando δ

Se $0 < |\ x - 3\ | < \delta$ (I) $\Rightarrow$ $|2x - 6| < \varepsilon$ (II)

$\Rightarrow$ $|2(x - 3)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $2|(x - 3)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $|(x - 3)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Por comparação entre (I) e (II), temos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração

Para $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0$ é possível obter $\delta > 0$ tal que se $0 < |\ x - 3\ | < \frac{\delta}{2}$ então $|2x - 1 - 5| < \varepsilon$ então:

$|2x - 1 - 5| = |2x - 6| = |2||x - 3| = 2|x - 3| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ então temos:

Como $2x - 1$ é igual a $f\,(x)$ e 5 é igual a L, logo:

$|\,f(x) - L\,| < \varepsilon$ então $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$.

Análise *a priori*- parte 4

Esperamos que os alunos manifestem como Imagem Conceitual que as desigualdades $0 < | \; x - x_0 \; | < \delta$, $| f(x) - L \; | < \varepsilon$ e para todo ε $>$ 0 e δ $>$ 0 é possível demonstrar que existe o $\lim_{x \to a} f(x) = L$ de uma função *f* qualquer.
Como Definição Conceitual que: existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para todo ε > 0, existe δ > 0 tal que se $0 <| \; x - a \; | < \delta$ então $| f(x) - \mathrm{L} \; | < \varepsilon$, ou se $x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Ou ainda: existe o $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para uma vizinhança de x em torno de a de raio δ, $f(x)$ varia em torno de uma vizinhança de L de raio ε.

Esperamos que os alunos desenvolvam a parte 4 conforme o que está exposto na Resposta esperada.
Esta questão propicia desenvolver o tratamento ao transitar na Representação Algébrica. Quanto ao PMA, este possibilita desenvolver os seguintes processos: abstração, síntese e generalização. A síntese ocorre quando o aluno utiliza os conceitos de inequação com intervalo e vizinhança de um número, que são elementos que compõem a definição formal do limite de uma função; a generalização e a abstração, ao demonstrar que o $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$, identificando características comuns entre os elementos da definição, em particular, com os elementos da definição geral para validar e expandir.

Análise *a posteriori* da Sequência de Atividades 5 – Interpretação da definição do limite de uma função

A Sequência de Atividades é composta por 4 partes. Na primeira parte é sugerido aos alunos assistirem duas videoaulas sobre limites de uma função. Na parte 2, a dupla reconhece, visualiza e apresenta o esboço do limite de uma função *f* na forma gráfica. Na parte 3, reconhece o limite como resultado de alguns processos realizados anteriormente na parte 4 e explora os elementos da definição formal para demonstrar o limite de uma função *f*. Isso pode ser observado no Quadro 27, a seguir, no qual é apresentado o diálogo entre os participantes A3 e A4.

Quadro 27 - Diálogo A3, A4 e o Pesquisador parte 2

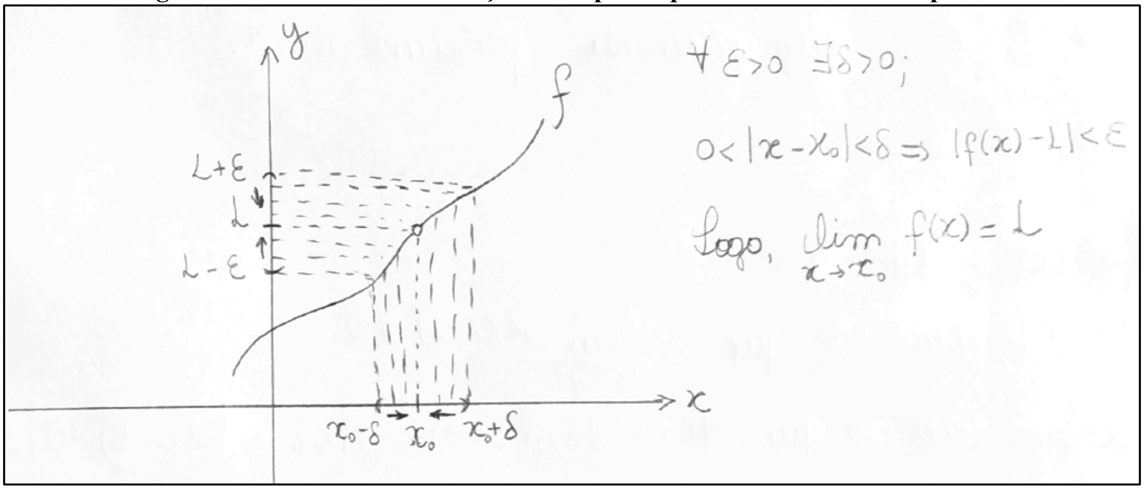
A3: Pesquisador, pode abrir o vídeo aí? Eu acho que fica melhor. Pesquisador: Sim. Melhor? Se precisarem voltar ao vídeo, é só me pedirem, tá? *A3:Tá.* *[....]* *Represente graficamente, em uma folha de papel, a definição de limite de uma função arbitrária conforme a expressão* [referindo-se à parte 2 da atividade]. *Vou desenhar aqui.* *A4: Quando terminar, você me manda a foto e a gente compara.* [....] *Silêncio* Pesquisador: E aí, os meninos, como estão? A3? *A3: Oi!*

Pesquisador: Como estão aí? *Vocês hoje estão calados. A3 conversa com A4 para ver se resolveu o problema do microfone?* *A3: Oi!* *Estamos fazendo os gráficos, depois vamos comparar os resultados.* *[...] silêncio* Pesquisador: Acho melhor vocês discutirem. *A4: Já terminou?* *A3: Terminei.* *A4: Manda no zap.* *A3: Já mandei.* *E aí? O que você acha?* *A4: Só que eu coloquei tipo uma chave para determinar o tamanho do ε.* *A3: Ah! Mais isso aí é um "parentesinho" tipo não sei, se você quiser colocar uma chave no lugar, mais beleza, eu acho que é a mesma coisa mesmo.* *A gente escolheu um ε qualquer, fez um intervalo tanto no x no domínio e contradomínio, um basicamente depende do outro, né?* *A4: Sim.* *A3: Quando ela trava* [limita]*no domínio, ela trava* [limita] *no contradomínio também.* *Então é isso.* *A4: É ......*[inaudível] [internet desconectou] *A3: Posso ir para a próxima?* *A4: Sim.*

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos, a seguir, protocolo de resolução, conforme Figura 49.

Figura 48 - Protocolo de resolução da dupla Sequência de Atividade 5 parte 2



Fonte: Dados da pesquisa 2021

No diálogo entre os participantes, A3 e A4 exploraram juntos o plano cartesiano para que possam esboçar a representação gráfica do limite da função *f* apoiados nos elementos da definição formal, observando que ε > 0, δ > 0, $0 < | x - x_0 | < \delta$ e que $|f(x) - L| < \varepsilon$ são características desses elementos. Na análise da atividade parte 2, cada participante procura, usando a mídia lápis e papel, esboçar individualmente a representação gráfica e depois compartilhar para discutir com o seu parceiro de dupla. Isso pode ser verificado quando A3 expressa: *"Vou desenhar aqui"*. E A4 diz: *"Quando terminar, você me manda a foto e a gente compara."*. A 3 relata a escolha de um ε qualquer para determinar a vizinhança em torno de *L* e tece algumas conjecturas: *"A gente já sabe que os limites laterais são iguais. E a gente sabe também que é .... válido para todo ε positivo que existe δ da forma que mostrava no intervalo* *no domínio isso vai ser travado* [limitado] *no contradomínio também a partir desse intervalo que a gente pegou, né?"*. Como podemos observar, as conjeturas de A3 mostram algumas articulações entre os elementos ε e δ da definição formal. Inferimos que a dupla utilizou o termo "*travado*" de maneira recorrente referindo-se aos intervalos limitados nos eixos das ordenadas e abscissas.

As explorações realizadas dos elementos da definição formal e a sua visualização possibilitaram à dupla apresentar de forma correta o esboço de uma representação gráfica do limite de uma função *f* no plano cartesiano, analisar o comportamento desses elementos situados sobre esse plano, apresentar as representações das simbologias $|f(x) – L| < \varepsilon$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, por meio de intervalos abertos $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, respectivamente, centrados em L e x_0, apresentar a ordem entre os parâmetros ε e δ e apresentar, por meio de setas, o comportamento de pontos $(x, f(x))$ de f nas vizinhanças de x_0 e L. Diante do exposto, a dupla apresentou de forma correta a Representação Gráfica do $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, conforme pode ser observado no Quadro 28, no qual consta o diálogo entre A3, A4 e o pesquisador.

Quadro 28 - Diálogo entre A3, A4 e o Pesquisador parte 3

A3: Parte 3. Após desenvolver as partes 1 e 2 dessa atividade, explanar o que você entende por $\lim_{x \to a} f(x) = L$.   *Está certo.*   Pesquisador: Neste caso, o a pode ser o mesmo x_0, A3.   *A3:Sim. Entendi.*   *A gente já sabe que os limites laterais são iguais e a gente sabe também que é .... válido para todo ε positivo que existe δ da forma que mostrava no intervalo no domínio isso vai ser travado* [limitado] *no contradomínio também a partir desse intervalo que a gente pegou, né?*   *A4: É. Estou pensando na forma de escrever.*   Pesquisador: Aí, A4, é o seguinte: vocês têm que pensar que tudo que foi feito está relacionado com essa parte aí. Vocês representaram graficamente o limite na primeira parte? Parte 2. Primeira parte foi o vídeo? Parte2 vocês expressaram os elementos da definição formal do limite de uma função. Certo? Então, baseando neste desenho aí que vocês fizeram, é que vocês irão trabalhar com esta parte 3 expressando o seu entendimento.   Quando A3 está falando... Aí você, A3, falou alguma coisa: a gente já sabe que os limites laterais são iguais. Depois você falou alguma coisa aí que não entendi bem, foi sobre o quê? Sobre intervalo? Domínio?   *A3: Foi sobre intervalo. Isto significa que é o intervalo lá no domínio, é aí vai ser, tipo assim, um vai travar* [limitar]*o outro. Significa que, como vou falar?*   *A4: Um depende do outro.*   *A3: Exatamente. Um depende do outro.*   Pesquisador: Este intervalo que você está falando aí tem um nome mais específico para limite. Como é o nome dele?   *A4: Vizinhança?*   Pesquisador: Vizinhança, isso.   *A3: Ah, tá.*   Pesquisador: Trabalhem em cima disso aí. Como é que existe isso?   *A3: Uma vizinhança depende da outra.*   Pesquisador: Se vocês tiverem necessidade, também podem abrir a atividade anterior. Se vocês quiserem que eu abro a atividade anterior para dar uma verificada na questão, pra criar um intervalo, ε, δ se quiserem posso abrir para vocês.   *A3: Entendi.*

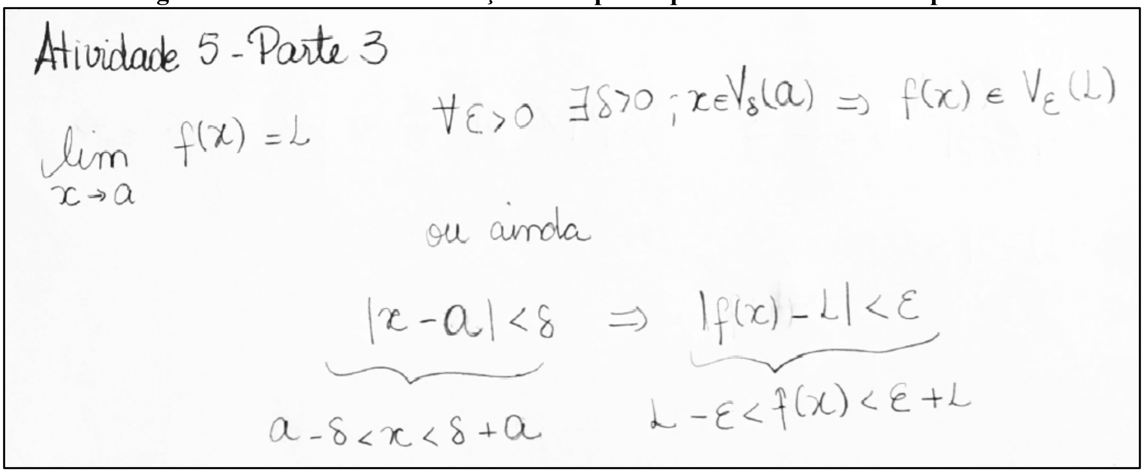
Sobre o intervalo, está ok sim. É porque igual o ... o que fizemos na parte 2, é o que é literalmente o que fizemos na parte 2.
Pesquisador: Sim.
A3: Pois é.
Eu acho ... não sei. Não tem nenhuma mudança pra a gente fazer.
Pesquisador: Tem o quê?
A3: Não tem nem uma mudança que a gente possa fazer.
Pesquisador: Não.
A3: Dizer que o limite é um determinado limite de f (x) onde x tende a é L é a mesma dizer que para todo ε positivo existe um δ positivo, também da forma que a distância de x até a é menor que δ e que este x tem que ser diferente de a, então isto implica que a distância de f (x) a L é menor que este ε.
Pesquisador: Agora o que você entende por $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$?
A3: São as vizinhanças.
Pesquisador: É sobre isso que você tem que explanar. *O que você entende.*
A3: Entendi.
Pesquisador: Se precisar abrir outra atividade para vocês darem uma lida, tranquilo, eu posso abrir para vocês aqui.
A3: A vizinhança de .... a vizinhança é δ de x_0....ela... É isso, A4?
É para qualquer ε positivo vai existir um δ de tal forma que a vizinhança de x_0... a vizinhança δ de x_0 implica na vizinhança L de ε ou ε de L. Que é a mesma coisa dizer... o quê?
A4: Espera aí, estou tentando escrever, formalizar um negócio aqui.
A3: Quando x_0 é a.
A4: Quando você terminar me fala, que aí a gente debate.
A3: Pronto. Espera aí.
Eu coloquei a coisa das vizinhanças. O que você colocou?
A4: Lê aí o que você colocou?
A3: Eu coloquei assim: limite de ..., não.
Coloquei assim: para todo ε positivo existe δ positivo tal que a vizinhança δ de a implica na vizinhança ε de L ou ainda é ... como fala módulo de $|x – a| < \delta$ implica módulo de $|f(x) - L| < \varepsilon$, ou ainda eu coloquei tipo os intervalos mesmos. É isso. O que você colocou?
A4: Eu tentei escrever por extenso. Eu coloquei assim: Por meio desta expressão, podemos analisar que, para um dado ε, existe uma vizinhança no contradomínio de tal forma que ela trava [limita], *uma vizinhança no domínio da função limitado por um δ que depende deste ε, vizinhança essa do domínio.*
A3:vamos colocar as duas formas, então ele pode escolher a que achar melhor.
A4: Pode ser.
A3: Dita essa aí que vou escrever.
A4: Vou mandar no zap. Pronto.
A ideia foi a mesma, só que escrevemos de forma diferentes.
A3:É. Mas tá bom.
Em outras palavras ....
Por meio desta expressão, podemos analisar que, para um ε positivo, existe uma vizinhança no contradomínio de tal forma que ela trava [limita], *uma vizinhança no domínio da função limitada por um δ que depende deste ε, vizinhança está do domínio que contém um ponto.*
A4: Que contém um ponto?
Faltou o quê, aí?
A3: Aí ficou assim.
Em outras palavras, fizemos aquela interpretação. Podemos analisar que um dado ε positivo existe uma vizinhança no contradomínio de tal forma que ela trava [limita], *uma vizinhança no domínio da função limitada por um δ, que δ depende de ε. Vizinhança está do domínio que contém um ponto a e valores que se aproximam de a tanto pela esquerda como pela direita. Eu acho que é isso. A4?*
A4: Faltou falar .... do tipo aproxima tanto para a direita e para esquerda de a fazem a imagem aproximar do valor de L.
A3: É verdade.
A4: Senão vai ficar incompleto.
A3: Espera aí.
Vizinhança esta do domínio que contém o ponto a pela esquerda e pela direita fazem o valor da imagem se aproximar de L com valores próximo a ele [L] *pela direita e pela esquerda.*
A4: Fazem o valor da imagem se aproximar.
A3: Bom, agora foi.
E aí, vai mudar alguma coisa?
A4: Agora foi.
Pesquisador: Oh, A3!
Vídeo 2, parte2, querem dar uma olhada? Só quatro minutos.

A3: Pode ser.
Pesquisador: Não tem problema não vocês voltarem quantas vezes que quiserem no vídeo, viu?
A3: Eu consertei algumas coisas aqui.
A3: Vou terminar de escrever algumas coisas aqui.
Então, A4, pode ir para a próxima?
[...] inaudível.
Pesquisador: Como ficou aí, A3? Pode prosseguir, depois eu volto.
A3: Espera aí, vou ler tudo que escrevi.
Primeiramente a parte simbólica, para todo ε positivo, existe δ positivo tal que x pertença a vizinhança δ de a implica que f (x) pertence à vizinhança ε de L, ou ainda, escrevi em forma de intervalo. Em outras palavras, podemos analisar dado ε positivo existe uma vizinhança do contradomínio de tal forma que ela trava [limita] *a vizinhança no domínio da função limitada por δ que depende de a e ε. Vizinhança essa do domínio que contém o ponto a e valores que se aproximam de a pela direita e pela esquerda. Faz a imagem aproximar de L por valores próximo a L pela direita e pela esquerda, dessa forma, podemos encontrar uma vizinhança f (x) tão próximo de L quando desejamos ao determinarmos uma vizinhança onde o x é suficiente próximo de a.*
Ok! Seu microfone está falhando. Vamos para a parte 4. Manda no chat aí.
A4: Melhorou?
A3: Sim.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Apresentamos, a seguir, a Figura 50 e a Figura 51, nas quais constam os protocolos de resolução das atividades pela dupla.

Figura 49 - Protocolo de resolução da dupla Sequência de Atividade 5 parte 3


Atividade 5 - Parte 3

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \,;\, x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$

ou ainda

$\underbrace{|x - a| < \delta}_{a - \delta < x < \delta + a} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{L - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + L}$

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Figura 50 - Protocolo de resolução da dupla Sequência de Atividade 5 parte 3

Em outras palavras, podemos analisar que dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança no contradomínio de tal forma que ela "trava" uma vizinhança no domínio da função limitada por $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.

Vizinhança essa do domínio que contenha o ponto "a" e valores que se aproximam de "a" pela direita e pela esquerda fazem a imagem se aproximar de "L" por valores próximos a ele pela direita e pela esquerda.

Dessa forma podemos encontrar uma vizinhança com $f(x)$ tão próxima de L quanto desejarmos, ao determinar uma vizinhança onde o "x" é suficientemente próximo de "a".

Fonte: Dados da pesquisa 2021

No diálogo entre A3 e A4, observamos que são exploras as partes 1 e 2 pela dupla, com o intuito de poder expressar o seu entendimento sobre o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Na análise da parte 3, A3 tece algumas conjecturas, atribuindo ao significado de limite por processo de aproximação: *"a gente já sabe que os limites laterais são iguais..."*. Em seguida, faz menção em relação à dependência entre as vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$: "*A gente já sabe que os limites laterais são iguais e a gente sabe também que é .... válido para todo ε positivo que existe δ da forma que mostrava no intervalo no domínio isso vai ser travado* [limitado] *no contradomínio também a partir desse intervalo que a gente pegou, né?*".

Ao ser questionado por A3, A4 afirma positivamente, mas, pondera que ainda está procurando uma maneira para poder expressar o seu entendimento: *"É. Estou pensando na forma de escrever"*. O pesquisador interfere: "A4, vocês têm que pensar que tudo que foi feito está relacionado com essa parte aí. Vocês representaram graficamente o limite... Na parte 2 vocês expressaram os elementos da definição formal do limite de uma função. Então, baseando neste desenho aí que vocês fizeram, é que vocês irão trabalhar com esta parte 3 expressando o seu entendimento". Neste momento, o pesquisador questiona A3 sobre o que ele havia se referido quando estava tecendo as suas conjeturas além dos limites laterais e os ε e δ. A3 afirma que: "*Foi sobre intervalo"*. E procura justificar a sua fala estabelecendo uma relação de dependência entre os intervalos do domínio e do contradomínio: "*Isto significa que é o intervalo lá no domínio, é aí vai ser, tipo assim, um vai travar* [limitar]*o outro. Significa que, como vou falar?"* A4 complementa: *"Um depende do outro"*. Após algumas discussões, expressa o seu entendimento, conforme protocolo da Figura 50.

A princípio parece ser uma resposta memorizada da definição formal. Mas, no decorrer do diálogo entre o pesquisador e os participantes durante a resolução da atividade, observa-se que os alunos compreenderam a simbologia da definição formal, atribuindo-lhe significado como o resultado de uma relação entre as vizinhanças $x \in V_{\delta}(a) \Rightarrow f\ (x) \in V_{\varepsilon}(L)$. E, ainda, há reconhecimento das simbologias, $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, como intervalos abertos.

A dupla reconhece, visualiza e explana o seu entendimento sobre $\lim_{x \to a} f\ (x) = L$, conforme pode ser verificado na conjectura de A3: *"Dizer que o limite é um determinado limite de f (x)onde x tende a é L, é a mesma dizer que para todo ε positivo existe um δ positivo, também da forma que a distância de x até a é menor que δ e que este x tem que ser diferente de a, então isto implica que a distância de f (x) a L é menor que este ε".* Porém, verifica-se que, no protocolo de resolução, houve um equívoco ao se referirem ao contradomínio da função, ao escreverem os termos pela "direita" e pela "esquerda" de L, quando seria prudente que fosse escrito: se aproximam por valores maiores e menores que L. O que pode ser observado na Figura 51, na qual consta o protocolo de resolução. No Quadro 29, abaixo, apresentamos o diálogo entre os participantes da dupla e o pesquisador.

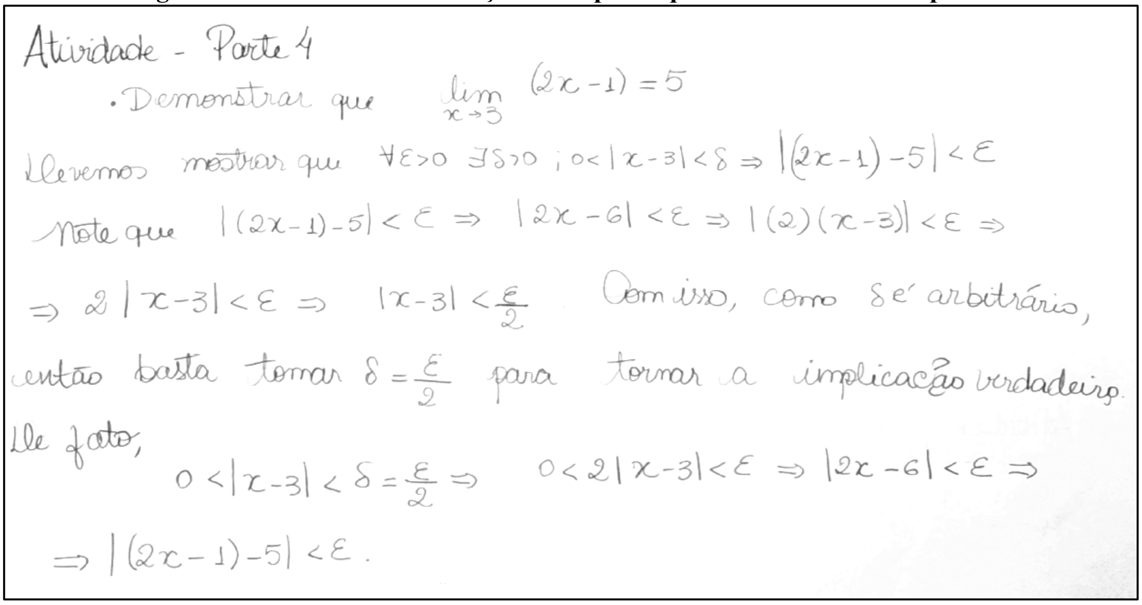
Quadro 29 - Diálogo entre A3, A4 e Pesquisador parte 4

A3: Parte 4 pede para que demonstre o $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$. *Devemos mostrar que, para ε positivo, existe δ positivo tal que* $0 < \mid x - 3 \mid < \delta$. *Isso implica que* $\mid 2x - 1 - 5 \mid < \varepsilon$ *. Eu comecei pelo final, logo o* $\mid 2x - 1 - 5 \mid < \varepsilon$. *Aí fiz continha, somei -1 e -5, aí ficou* $\mid 2x - 6 \mid < \varepsilon$, *colocando o 2 em evidência, ficou* $\mid 2 \mid \mid x-3 \mid < \varepsilon$, *portanto isso vai ser* $\mid x-3 \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ *, ou seja, basta tomar* $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ *. Aí só fiz, tipo assim, provei que de fato isso era verdade, coloquei o δ sendo* $\frac{\varepsilon}{2}$ *e cheguei naquela mesma coisa do contradomínio.* *A4: É isso mesmo. Tomou δ como* $\frac{\varepsilon}{2}$*, né?* *A3: Isso.* *A4: Isso mesmo.* Pesquisador: E aí, os meninos? E aí? *A4: Nós já terminamos.* Pesquisador: Demonstraram já? *A3: Demonstramos.* Pesquisador: É aquela anterior ficou como. Essa aqui? *A3: Espera aí.* *A gente colocou linguagem símbolo e escrevemos também.* *Coloquei para todo ε positivo exista um δ positivo tal que x pertence à vizinhança δ de a isso implica que f (x) pertence à vizinhança de L. Aí destrinchei um pouco os intervalos, depois a gente escreveu em outras palavras. Podemos analisar que, dado ε positivo, existe uma vizinhança no contradomínio de tal forma que ela trava* [limita] *a vizinhança do domínio limitada por δ que depende de ε, vizinhança esta do domínio que contém o ponto a e valores que se aproximam de a pela direita e pela esquerda. Desta forma, podemos encontrar vizinhança de f(x) tão próximo de L quando desejarmos ao determinarmos uma vizinhança onde x é suficientemente próximo de a.* Pesquisador: Beleza! E a outra aí? Como vocês fizeram a parte 4? *A3: A parte 4 foi fazendo as continhas mesmo, determinei que δ seria* $\frac{\varepsilon}{2}$*, aí provei de que fato seria isso.* Pesquisador: Investigou melhor o δ e depois provou? *A3: Isso.* *Pesquisador: OK!*

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos, a seguir, o protocolo de resolução- Figura 52.

Figura 51 - Protocolo de resolução da dupla Sequência de Atividade 5 parte 4



Atividade - Parte 4

• Demonstrar que $\lim_{x \to 3} (2x-1) = 5$

Devemos mostrar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 ; 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$

Note que $|(2x-1)-5| < \varepsilon \Rightarrow |2x-6| < \varepsilon \Rightarrow |(2)(x-3)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$ Com isso, como δ é arbitrário,

então basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para tornar a implicação verdadeira.

De fato,

$0 < |x-3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 < 2|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |2x-6| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Na parte 4, é solicitada a demonstração do $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$. Para realizá-la, a dupla percebeu que era necessário determinar δ em função de ε, de maneira que a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ se tornasse verdadeira, conforme pode ser verificado no argumento de A3: "(...) *Aí fiz "continha" (...) portanto isso vai ser |x-3| <* $\frac{\varepsilon}{2}$ *, ou seja, basta tomar δ =* $\frac{\varepsilon}{2}$*. Aí só fiz, tipo assim, provei que de fato isso era verdade, coloquei o δ sendo* $\frac{\varepsilon}{2}$*"*.

Inferimos que a dupla usou o termo "de fato" para traduzir a demonstração do limite de uma função *f* e tomou o delta não só em função do épsilon como também em função do ponto *a*, $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, mostrando, assim, que reconhece que o δ é dependente tanto do ε quanto do ponto. Faremos aqui uma observação referente $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, uma vez que este conceito é abordado para continuidade uniforme. Pode ser que a dupla tenha abordado esse conceito pelo fato de estar em um período adiantado do curso de Licenciatura em Matemática, conforme indica o protocolo da Figura 51.

No desenvolver da atividade, verificamos que a dupla manifesta como Imagem Conceitual do significado do conceito de limite como um processo de aproximação ao utilizar termos como "*se aproximam de*", revelando uma noção intuitiva (subjetiva), como apontam Fonseca e Henriques (2018), mas também reconhece o limite como o resultado de uma relação entre as vizinhanças de V_ε (L) e V_δ (x_0). Isso fica evidente na seguinte fala: "*encontrar uma vizinhança*". Percebemos, de acordo com o protocolo de resolução acima, que a dupla reconhece o conceito de limite tanto por uma noção intuitiva quanto por meio de uma relação entre vizinhanças. Na última linha do protocolo, faltou finalizar com a retomada dos termos para a definição formal ao identificar que se $|(2x-1)-5|< \varepsilon$ corresponde a $|f(x)-L|< \varepsilon$ da definição formal.

Concluindo, verificamos no desenvolvimento da atividade, parte 2, que a dupla realizou, como previsto na análise *a priori*, de forma satisfatória a realização de conversões, como: ao transitar da RA→ RG para esboçar a representação gráfica da função. Na parte 3, realizou conversões ao transitar da RA→RLN e ao usar a língua natural para expressar o seu entendimento sobre $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Já na parte 4, realizou um tratamento ao transitar somente sobre os registros algébricos e ao demonstrar a existência do limite.

A resolução da atividade ainda permitiu realizar os processos do PMA: visualização, mudança de representação e tradução entre elas, síntese, abstração e generalização.

Os processos de visualização e mudança de representação e tradução entre elas ocorreram nas partes 2, 3 e 4. Na parte 2 ocorreram quando a dupla apresenta a Representação Gráfica do limite transitando entre a RA → RG. Na parte 3, ao justificar o seu entendimento sobre o limite da função *f ;* e na parte 4, ao demonstrar o limite.

Os processos de síntese e análise ocorreram nas partes 2, 3. O processo síntese, na parte 2 e 3 ao mobilizar: plano cartesiano dos intervalos (L - ε, L+ ε) e (x - x_0, x + x_0), as condições de ε e δ como números positivos e a existência do limite de *f*. Na parte 3, ao mobilizar vizinhança, inequações modulares, relação entre as vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$. Na parte 4, ao mobilizar inequações e utilizar os quantificadores na ordem correta para demonstrar o limite de *f*.

Na parte 2, o processo de análise exigiu uma análise dos elementos que compõem o limite para que fosse possível obter a representação gráfica do limite de *f;* na parte 3, para explanar sobre o entendimento do limite de *f*. Na parte 4, para associar os elementos da definição formal com o intuito de determinar o melhor $\delta_{(\varepsilon)}$ para realizar a demonstração do limite de *f.*

Na parte 4 ocorreram os processos de síntese, análise e generalização. A síntese ocorreu ao combinar os conceitos de variação de uma função e vizinhança para determinar o limite e dar sustentação à demonstração; e o processo de generalização, ao determinar que, para qualquer ε, o melhor $\delta_{(\varepsilon)}$ seria $\delta_{(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2}$ para que o $\lim_{x \to 3}(2x-1) = 5$.

Já o processo de Representação Simbólica ocorreu, por exemplo, nas partes 2, 3 e 4 ao apresentar lim para se referir ao limite, ⟶ para se referir a uma aproximação, L para se referir à notação aritmética do valor do limite, L - ε e L + ε e assim como x - δ e x + δ para se referir à notação aritmética ao valor dos extremos de um intervalo, *f* para indicar uma função qualquer,

$\forall$ se referindo ao quantificador universal, $\exists$ se referindo ao quantificador existência; $>$ estabelecendo uma relação de desigualdade de condições para ε e δ; $=$ estabelecendo uma relação de igualdade considerando que $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$ e ⇒ para indicar uma implicação.

4.6 Sequência de Atividades 6 - Aplicando o que aprendeu.

A proposta desta atividade, Anexo 7, é aplicar o conceito de limite em diferentes situações procurando interpretar os elementos da definição de limites de forma prática, por exemplo, em uma aplicação da área de mecânica.

A Sequência de Atividades foi fundamentada nos trabalhos realizados por Cornu (2002), Rocha (2010), Abreu e Reis (2011), especificamente a parte 1 item c) e a parte 2 item d), e nas pesquisas realizadas por Soares e Cury (2017) e Fonseca e Henriques (2018).

Objetivo: Aplicar a definição de limite em diferentes situações.

Sequência de Atividade 6 - parte 1- Situação-problema: Quão próximo de $x_0 = 3$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor que 0,4 unidades de $y_0 = 5$?

Com auxílio do *applet* indicado no link (https://www.geogebra.org/m/y7ccvcnz), faça o que se pede no roteiro e responda às questões indicadas:

1. Movimente o ponto A (azul) em $y = 5$.
2. Posicione o controle deslizante ε em 0,4.
3. Observe que foi construída uma vizinhança de $y = 5$ no eixo Y, ou seja, $V_{(0,4)}(5) =]4{,}6\,;\ 5{,}4[$.
4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de $y = 5$.
5. Digite no campo indicado a lei de formação $2x$-1.
6. Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produz no eixo X.
7. Para atualizar a tela clique em .

Para responder às questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X.

a) Para $y = 5$, qual é o valor de x_0? Justifique algebricamente.

Resposta esperada: $x_0 = 3$.

$y = 2x - 1$ como y = 5, temos:

$5 = 2x - 1$

$x = 3$

b) Em relação ao intervalo (rastro) no eixo X, determinado pela movimentação do ponto D nas vizinhanças de $y = 5$, você diria que esse intervalo é a solução do problema proposto? Se sim, determine os valores de x.

Resposta esperada: Sim. Os valores de x devem estar compreendidos entre $2{,}8 < x < 3{,}2$.

c) x_0 é o ponto médio desse intervalo? Se sim, qual seria o raio δ desse ponto médio?

Resposta esperada: Sim. Raio 0,2.

d) Apresentar uma definição para $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$.

Resposta esperada:

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $0 < |\ x - 3\ | < \delta$ então $|(2x\text{-}1)\text{-}5| < \varepsilon$

Análise a *priori* parte 1

Na Sequência de Atividades 6 - parte 1, ao atender às instruções do roteiro para utilização do *applet,* pode ocorrer o processo de visualização no item 1) ao movimentar o ponto A e posicioná-lo em $y = 5$. Os processos de visualização, mudança de representação e tradução entre elas podem ocorrer nos itens 2), 5) e 6). No item 2), pode ocorrer ao posicionar o controle deslizante denominado em $\varepsilon = 0{,}4$, e obter a representação geométrica da vizinhança em torno de $y = 5$, transitando entre a RN → RG. No item 5), quando o aluno digitar a lei de formação de f no *applet*, obter a representação gráfica e transitar da RA → RG. No item 6), ao fazer D percorrer a vizinhança em torno de $y = 5$ e obter a vizinhança $V_3(3) =]2{,}8\ ;\ 3{,}2[$ por meio de um rastro no eixo das abscissas.

Elementos como a conversão, no âmbito da Teoria do Registro de Representação Semiótica, podem ocorrer: no item 2), ao transitar RN→RG e determinar a vizinhança em torno y = 5; no item 5), ao transitar da RA→RG, obter a representação gráfica da função f e ao digitar a lei de formação no *applet*.

Enquanto o tratamento pode ocorrer no item 6), ao transitar no registro geométrico, ao fazer D percorrer o intervalo em torno de $y = 5$ e determinar um intervalo por meio de um rastro no eixo das abscissas.

Para o item a), esperamos que os alunos, após simulações em torno das vizinhanças e no próprio valor de $y_0 = 5$, possam reconhecer que o valor correspondente no domínio da função para $y_0 = 5$ seja $x_0 = 3$. Como justificativa, temos expectativa de que:

Se $y = 2x - 1$ e $y_0 = 5$, então:

$2x - 1 = 5$

$2x = 6$

$x = 3$

Logo, o valor correspondente para $y = 5$ é $x_0 = 3$.

Neste item, para determinação de $x_0 = 3$, os alunos transitam sobre a RN realizando um tratamento.

Quanto ao item b), esperamos que os alunos reconheçam, ao fazerem o ponto D percorrer o intervalo em torno de y = 5, que o intervalo determinado por meio de um rastro no eixo das abscissas represente a solução do problema proposto. E que os possíveis valores para x variem entre $2{,}8 < x < 3{,}2$.

Em relação ao item c), esperamos que os alunos, ao investigarem se x_0 é o ponto médio do intervalo, mobilizem Definição Conceitual de ponto médio dada por $Pm = \frac{(x_0 - \delta) + (x_0 + \delta)}{2}$, ou seja, a média aritmética entre os extremos do intervalo, $Pm = \frac{2{,}8+3{,}2}{2} = 3$.

Ou utilizando a desigualdade:

$|2x\text{-}1\text{-}5| < 0{,}4$

$-0{,}4 < 2x - 6 < 0{,}4$

$-0{,}4 + 6 < 2x < 0{,}4 + 6$

$\frac{5{,}6}{2} < x < \frac{6{,}4}{2}$

$2{,}8 < x < 3{,}2$

E possam afirmar que $x_0 = 3$ seja o ponto médio do intervalo definido pelo ponto D no eixo das abscissas, sendo o valor do raio dado por $\delta = 0{,}2$, pois:

$\delta = |3 - 2{,}8| = |3 - 3{,}2| \Rightarrow \delta = 0{,}2$

Neste item, os alunos realizam um tratamento ao determinarem o valor do raio δ transitando na RN.

Para o item d), nossa expectativa é que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que, ao estabelecer a vizinhança em torno de $L = 5$, estabelecida por $\varepsilon = 0{,}4$ e, ao movimentar o ponto roxo, dentro da vizinhança determinada por ε no eixo das abscissas, em torno de $x_0 = 3$ e possa concluir que, se $x \in V_{(\delta)}(3) \Longrightarrow f(x) \in V_{(\varepsilon)}(5)$, então $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$. Além disso, que a relação entre as vizinhanças $x \in V_{(\delta)}(3) \Longrightarrow f(x) \in V_{(\varepsilon)}(5)$ faça parte da Definição Conceitual do aluno.

O desenvolvimento desta questão permite que o aluno transite sobre a RA caracterizando, assim, um tratamento.

Em relação ao PMA, no item a) podem ocorrer os processos de mudança de representação e tradução entre elas, visualização e análise. O processo de mudança de representação e tradução entre elas e de visualização ocorrem ao movimentar o ponto roxo no intervalo]4,6;5,4[posicioná-lo em $y = 5$ e determinar a abscissa $x_0 = 3$; e o de análise, ao justificar algebricamente o valor da abscissa ser $x_0 = 3$.

No item b) podem ocorrer os processos de visualização, síntese e análise. O processo de visualização ocorre ao fazer o ponto roxo percorrer a vizinhança no eixo *x,* determinada pelo ponto D, por meio de um rastro. E os processos de síntese e análise ocorrem ao investigar e determinar essa vizinhança no eixo das abscissas, por meio de um rastro, estabelecendo que esses valores de x correspondem à solução do problema proposto.
Para o item c), podem ocorrer os processos de síntese e análise ao verificar se x_0 é ponto médio do intervalo]2,8; 3,2[e ao determinar o raio desse ponto médio.

O item d) pode possibilitar desenvolver os processos de: visualização, síntese, análise e generalização. O processo de visualização é desenvolvido ao organizar a ordem dos elementos da definição formal; o processo de síntese, ao aplicar os conceitos de inequação, vizinhança e variação de uma função para determinar o limite de f; o processo de análise, ao estabelecer as condições para ε e δ para que a definição seja estabelecida; e a generalização, ao determinar que para $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$ para que o $\lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5$.

Sequência de Atividades 6 – parte 2

Situação- problema: Foi solicitado a um torneiro mecânico que fabricasse um cilindro de metal de 10 cm de diâmetro. E foi permitido, para a fabricação desse cilindro, uma tolerância de erro de $\varepsilon = \pm 0{,}5$cm no diâmetro. Considerando x o raio do cilindro, descreva uma função f de x que represente o diâmetro do cilindro.
Resposta esperada: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$

Com auxílio do *applet* indicado no link https://www.geogebra.org/m/zxvyxj5x, faça o que se pede no roteiro a seguir e responda às questões indicadas:

1. Movimente o ponto A (azul) em $y = 10$ (diâmetro do cilindro).
2. Posicione o Controle Deslizante ε em 0,5.
3. Observe que foi construída uma vizinhança de $y = 10$ no eixo Y (tolerância de erro permitido), ou seja, $V_{(0,5)}(10) =]9{,}5\,;10{,}5[$.

4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de $y = 10$.

5. Digite, no campo indicado, a lei de formação f obtida acima.

6. Clique na seta esquerda, abaixo, e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.

Para responder às questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo x.

a) Clique sobre o ponto roxo e faça-o pertencer à vizinhança de $x_0 = 5$. Qual é o raio δ da vizinhança de $x_0 = 5$? Justifique algebricamente sua resposta.

Resposta esperada: raio δ = 0,25.

$\delta_1 = |4{,}75 - 5|$ $\quad\quad$ $\delta_2 = |5 - 5{,}25|$

$\delta_1 = |-0{,}25|$ $\quad\quad$ $\delta_2 = |0{,}25|$

$\delta_1 = 0{,}25$ $\quad\quad$ $\delta_2 = 0{,}25$

Como $\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \delta = 0{,}25$

b) Em termos da situação- problema, qual o significado da vizinhança estabelecida por ε em torno de L=10?

Resposta esperada: Representa o erro tolerável.

c) Em termos da situação- problema, o que significa a vizinhança estabelecida por δ em torno de $x_0 = 5$?

Resposta esperada: Representa uma variação no raio.

d) De acordo com a situação- problema, é possível estabelecer uma relação entre ε e δ? E, se sim, qual seria?

Resposta esperada: Sim. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

e) O limite de f existe? Se sim, qual seria? Justifique?

Resposta esperada: Sim. $\lim_{x \to 5} 2x = 10$.

Justificativa por meio do teorema dos limites laterais (limite por meio de um processo de aproximação) ou pela definição formal.

Análise a *priori* parte 2

Na Sequência de Atividade - parte 2, procuramos explorar uma aplicação da área de mecânica envolvendo a fabricação de um cilindro. Solicitamos aos alunos que considerassem o raio do cilindro como x e descrevessem uma função f de x que representasse o diâmetro desse cilindro. Esperamos que os alunos manifestem como Imagem Conceitual que o diâmetro do cilindro em função de x seja dado por $f(x) = 2x$.

Para determinar a lei de formação que represente o diâmetro da função, o aluno transita na Representação Algébrica, caracterizando assim um tratamento.

No roteiro de instrução para utilização do *applet*, ao ser solicitado posicionar o Controle Deslizante ε sobre o valor 0,5, este determina uma vizinhança em torno de $y = 10$, realizando uma conversão ao transitar da RN→RG. Um tratamento pode ser realizado ao movimentar o ponto D nas vizinhanças de $y = 10$ e este determinar uma vizinhança no eixo das abscissas em torno de $x_0 = 5$. Nesse caso, o aluno transita na RG. Outra conversão pode ser realizada ao digitar e obter a RG de $f(x) = 2x$ no *applet.*

Em relação ao item a), esperamos que os alunos, ao investigarem utilizando o ponto roxo situado no eixo das abscissas, nas vizinhanças de $x_0 = 5$, concluam que a vizinhança determinada por D tem raio δ = 0,25.

Para o item b), esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que o intervalo determinado por ε represente uma margem de erro tolerável (ou uma variação) para fabricação da peça.

Quanto ao item c), nossa expectativa é que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que este intervalo represente a variação que o raio possa atingir para que o erro admitido no diâmetro do cilindro fique em torno de 10 cm, com um erro de $\pm$ 0,5 cm ou uma variação de $\pm$ 0,5 cm).

Para o item d), nossa expectativa é que os alunos respondam que seria possível esta relação e que a Imagem Conceitual manifestada fosse por meio do desenvolvimento de inequações modulares, para estabelecer a relação existente entre ε e δ. E como Definição Conceitual que: dado ε > 0, é possível encontrar um δ > 0 tal que se $0 < |x - 5| < \delta$ então $|2x - 10| < \varepsilon$.

Diante disso, temos:

(I) Se $0 < |x - 5| < \delta \Longrightarrow |2x - 10| < \varepsilon$ (II). Se (I) implica (II), temos:

$$|2(x-5)| < \varepsilon$$

$$2|x - 5| < \varepsilon$$

$$|x - 5| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De (I) e (II), por comparação, temos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, que é a relação existente entre ε e δ. Neste item o aluno transitar na Representação Numérica, possibilitando a realização de um tratamento.

Para o item e), esperamos que os alunos reconheçam que existe o $\lim_{x\to 5} 2x = 10$. E justifiquem por meio de uma destas alternativas:

-Por meio do teorema dos limites laterais (por um processo de aproximação);

-Como $\lim_{x\to 5^-} 2x = \lim_{x\to 5^+} 2x = 10$ logo $\exists \lim_{x\to 5} 2x = 10$.

Ou por meio de vizinhanças:

Pois, se for dado ε > 0, existe δ > 0 tal que, se $x \in V_{(2,5)}(5)$ e $f(x) \in V_{(0,5)}(10)$, existe o $\lim_{x\to 5} 2x = 10$.

Pela definição formal:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $0 < |x - 5| < \delta$ então $|f(x) - 10| < \varepsilon$

Determinando δ

(I) $0 < | x - 5 | < \delta \Rightarrow |2x - 10| < \varepsilon$

(II) $| 2(x-5)| < \varepsilon$

$2| x-5 | < \varepsilon$

$| x-5 | < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Por comparação de (I) e (II), temos: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Demonstração:

$\forall \varepsilon > 0$ vamos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja $0 < | x - 5 | < \delta$. Então temos

$|f(x) - 10| = |2x - 10| = 2|x - 5| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ isto é $| f(x) - 10 | < \varepsilon$

Assim, fica provado que $\lim_{x\to 5} 2x = 10$.

Nesta parte 2 da atividade, poderão desenvolver os seguintes processos do PMA: visualização, mudança de representação e tradução entre elas, análise e síntese.

O processo de visualização pode ocorrer nos seguintes itens: item 1), ao posicionar o ponto *A* em $y = 10$; no item 2), ao posicionar o Controle Deslizante em ε = 0,5 é possível visualizarem a determinação de uma vizinhança em torno de $y = 10$; no item 6), quando o ponto D determinar uma vizinhança em torno de $x_0 = 5$ ao percorrer a vizinhança em torno de $y = 10$; No item d), quando se tem que estabelecer uma relação entre ε e δ; e no item e), quando se tem que determinar se o limite de *f* existe.

Já o processo de mudança de representação e tradução entre elas ocorre no item 2), ao posicionar o épsilon em 0,5, este determina uma vizinhança em torno de $y = 10$ e passa da RN → RG ao determinar uma vizinhança em torno de $y = 10$. Também ocorre nos seguintes itens: no item 5), ao digitar a lei de formação e obter a Representação Gráfica de f no *applet*, transitando da RA → RG; no item a), ao passar da RG → RA e justificar se δ é o raio da vizinhança de $x_0 = 5$; nos itens b) e c), quando passa da representação gráfica para a linguagem natural ao expressar o significado das vizinhanças em torno de $L=10$ e $x_0 = 5$ em termos da situação-problema; no item d), ao passar da RG → RA para estabelecer uma relação entre ε e δ; e no item e), ao passar da RG → RA ao determinar a existência do limite de f.

O processo de análise pode ocorrer: no item a), quando os alunos fazem simulações para $x \to 5^-$ e $x \to 5^+$ para determinar o raio da vizinhança de $x_0 = 5$; nos itens b) e c), ao analisarem o significado das vizinhanças em torno de ε e δ; no item d), ao analisarem a relação entre ε e δ; e no item e), ao analisarem a existência do limite de f.

Enquanto o processo de síntese ocorre nos seguintes itens: no item a), ao trabalharem com diferentes conceitos (ponto médio, raio e vizinhança); no item b), ao relacionarem a vizinhança de épsilon com tolerância ou erro; e no item d), ao estabelecerem a relação entre épsilon e delta ao determinarem a existência do limite.

Sequência de Atividades 6 - parte 3 - Situação-problema (adaptado do livro Thomas, 2010, p.94): Para a fabricação de cilindros para um determinado tipo de motor, com área da seção transversal, paralela à base, de 63,8 cm^2, é necessário saber qual é a margem de erro (δ) que se pode aceitar em relação ao raio ideal x_0 do cilindro, que é $x_0 = 4{,}51$ cm. Além disso, a área da seção transversal pode diferir de no máximo 0,4 cm^2 dos 63,8 cm^2.
(Obs.: A área da seção transversal de um cilindro é dada por $A=\pi r^2$ considerando $\pi = 3{,}141$.)

a) Considerando genericamente como x o raio do cilindro, descreva uma função f de x que represente a área da seção transversal em função do raio do cilindro.
Resposta esperada: $f(x) = \pi x^2$
b) Utilizando 3 casas decimais, considere a função f anterior e determine o intervalo de variação do raio para o qual x satisfaz a desigualdade $| f(x) - 63{,}8 | < 0{,}4$. Nesse intervalo, o valor menor deve ser arredondado para cima e o valor maior deve ser arredondado para baixo.
Resposta esperada: $4{,}493 < x < 4{,}5204$.
c) Você diria que $x_0 = 4{,}51$ é ponto médio desse intervalo? Justifique.
Resposta esperada: Não. Pois as distâncias dos extremos até $x_0 = 4{,}51$ são diferentes.

d) Calcule a diferença entre o extremo menor do intervalo e o valor 4,51. Faça o mesmo para o extremo maior do intervalo e o valor 4,51.

Resposta esperada: $|4{,}51 - 4{,}493| = 0{,}017$

$|4{,}51 - 4{,}520| = 0{,}01$

e) Qual dos valores do item anterior você escolheria como δ para atender à situação do problema? Justifique.

Resposta esperada: δ = 0,01. Pois todo os elementos da $V_{(0{,}01)}(4{,}51)$ possuem imagens no $V_{(0{,}4)}(63{,}8)$ e, para uma $V_{(0{,}017)}(4{,}51)$, existem elementos que não possuem imagem na $V_{(0{,}4)}(63{,}8)$. Daí a escolha do menor δ.

Análise a *priori* Sequência de Atividades 6 – parte 3

Nesta parte da atividade, também, aplicamos a definição de limite em uma aplicação da área de mecânica: a fabricação de cilindros para motores.

Para o item a), esperamos que a Imagem Conceitual manifestada pelos alunos seja de que a área do círculo seja dada por $A = \pi r^2$. Esperamos que eles representem a área da seção transversal em função do raio x por uma função quadrática $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \pi x^2$.

Em relação ao item b), temos como expectativa que os alunos resolvam a inequação modular aplicando suas propriedades para determinar o intervalo de variação do raio δ . Esperamos que os alunos procedam da seguinte maneira:

$|f(x) - 63{,}8| < 0{,}4$

$|\pi x^2 - 63{,}8| < 0{,}4$

$-0{,}4 < \pi x^2 - 63{,}8 < 0{,}4$

$$\frac{-0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141} < x^2 < \frac{0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141}$$

$$\sqrt{\frac{-0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141}} < x < \sqrt{\frac{0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141}}$$

$4{,}493 < x < 4{,}520$

Então, o intervalo que x pode variar é $]4{,}493;4{,}520[$ ou $4{,}493 < x < 4{,}520$.

Este item propicia aplicar o tratamento para descobrir qual o intervalo de variação para x que possa melhor atender à margem de erro estabelecida para a área de 63,8 cm^2, com variação de $\pm 0{,}4\ cm^2$.

Para o item c), esperamos que os alunos investiguem o intervalo (vizinhança) em torno de $x_0 = 4{,}51$, determinada pela vizinhança em torno de L = 63,8 de raio ε = 0,4 do eixo *y*, e verifiquem que $x_0 = 4{,}51$ não é ponto médio do intervalo considerado. Pois tem dois raios diferentes: um situado à esquerda com centro em $x_0 = 4{,}51$ raio $\delta_1 = 0{,}017$, ou seja, $\delta_1 = |\, 4{,}51 - 4{,}493 \,| \Leftrightarrow \delta_1 = 0{,}017$; o outro situado no extremo direito com centro em $x_0 = 4{,}51$ raio $\delta_2 = 0{,}01$, ou seja, $\delta_2 = |\, 4{,}51 - 4{,}520 \,| \Leftrightarrow \delta_2 = 0{,}01$.
Para resolução desse item, o aluno transita somente no registro numérico, realizando um tratamento.

Em relação ao item d), esperamos que os alunos analisem os dois raios e escolham o raio $\delta_2 = 0{,}01$. Além disso, que percebam que é a margem de erro de 0,01 que corresponde à variação máxima no eixo que atende à confecção da peça de acordo com a área considerada. Os elementos desta vizinhança $V_{(0{,}01)}(4{,}51)$ estariam todos contidos na vizinhança$V_{(0{,}4)}(63{,}8)$. Assim, os alunos escolheriam o menor δ do conjunto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Para este item, o aluno transita entre a RN→RLN.

Em relação ao PMA, na Sequência de Atividade 6 - parte 1, é possível desenvolver os seguintes processos: visualização, mudança de representação e tradução entre elas. A visualização pode ocorrer no item 1) ao movimentar o ponto A e posicioná-lo em $y = 5$. Os processos de visualização, mudança de representação e tradução entre elas ocorrem: no item 2), ao posicionar o Controle Deslizante denominado por épsilon em 0,4 e obter a representação geométrica da vizinhança em torno de $y = 5$; no item 6), ao fazer o ponto D percorrer a vizinhança de y = 5 e obter uma vizinhança por meio de um rastro no eixo das abscissas; e no item 5), quando o aluno digita a lei de formação no *applet* e obtém a representação gráfica de *f*. Também ocorrem: no item a), ao movimentar o ponto roxo para determinar a abscissa correspondente de $y = 5$; no item b), ao investigar nas vizinhanças de $x_0 = 3$ para determinar se este é ponto médio do intervalo; e no item c), ao determinar uma definição para o limite de *f*.

Na parte 3 da Sequência de Atividades, ocorrem os seguintes processos do PMA: mudança de representação e tradução entre elas, análise e síntese. No item a), a representação e mudança entre diferentes representações ocorrem ao solicitar que seja descrita uma função de$x$para representar a área da seção transversal do cilindro. O processo de análise ocorre no item b), ao determinar o valor de$x$que satisfaça a desigualdade dada; e no item c), ao solicitar aos alunos determinar e justificar se $x_0 = 4{,}51$ é ponto do intervalo.

No item e) ocorrem os processos de análise e síntese ao solicitar ao aluno escolher o melhor δ referente ao item d) que melhor atende à situação- problema proposta.

Análise *a posteriori* Sequência de Atividades 6 - Aplicando o que aprendeu

A Sequência de Atividades 6 é composta por 3 situações- problema envolvendo a aplicação de limites de uma função utilizando os elementos da definição formal de limites. Todas as situações trabalhadas possibilitaram à dupla reconhecer o emprego dos elementos da definição formal de limite de uma função, conforme se verifica no diálogo entre os participantes A3, A4 e o Pesquisador, Quadro 30.

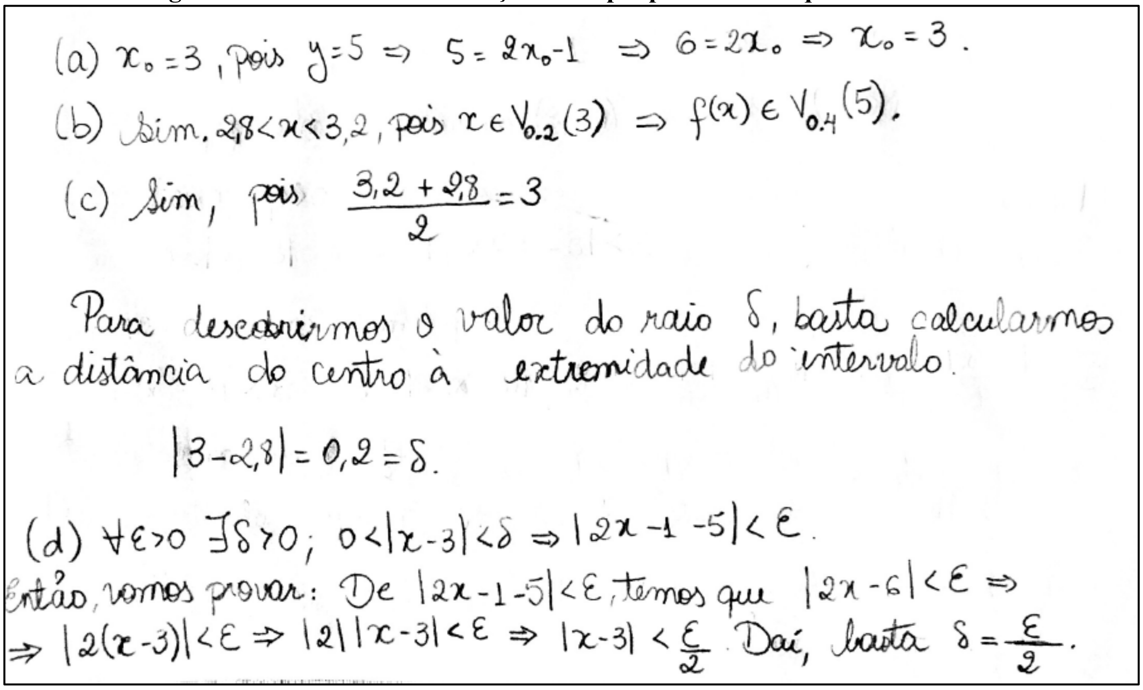
Quadro 30 - Diálogo entre o pesquisador, A3 e A4 durante o desenvolvimento da Sequência de Atividades 6 parte 1

A3: Vou ler a parte 1, A4.
Quão próximo de $x_0 = 3$ devemos manter x para termos certeza de que y = *2x - 1 fique a uma distância menor que 0,4 unidades de $y_0 = 5$?*
Ah, tá. Eu acho que entendi. Vou tentar escrever, depois eu te falo.
A4: Vou tentar também.
Pesquisador: Está compartilhada a tela minha aqui*?*
A3: Está sim.
Pesquisador: Continua compartilhada? Vou colocar num ponto para melhor vocês lerem. Isso.
A4: Conseguiu aí, A3?
A3: Consegui escrever sim, mas eu estou tentando resolver agora. Mas é basicamente é a gente tem que descobrir um valor de δ de tal forma que a implicação seja verdadeira.
Vou abrir o applet aqui. Conseguiu, A4?
A4: Sim.
A3: Para y = 5, qual é o valor de x_0? Justifique algebricamente.
Ah, beleza.
Espera aí, A4. Vou arrumar uma folhinha aqui.
Parte... 2, né?
Com auxílio do applet indicado no link (https://www.geogebra.org/m/y7ccvcnz), faça o que pede no roteiro e responda às questões indicadas.
Já conseguiu colocar, A4?
A4: Consegui sim.
A3: Posicione o Controle Deslizante épsilon em 0 ,4.
A4: Pronto! O três aí.
A3: Observe que foi construída uma vizinhança de y = 5 no eixo Y, ou seja, vizinhança ... de quê?
Assim, $V_{(0,4)}(5) =]4,6; 5,4[$.
A4: 4,6 e 5,4.
A3: Isso. É.
Digite no campo indicado a lei de formação 2x - 1 e antes tem clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y = 5.
Clique na seta esquerda abaixo  *e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo* X.
Para atualizar a tela, clique em  .
Para responder às questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X.
Para y = 5, qual é o valor de x_0?
É zero, né? Não, espera aí.
A4: Repete, por favor!
A3: Não. Não é isso não. É para y = 5, qual o valor de x_0? Vai ser 3.
A4: Isso.
A3: Espera aí que vou anotar. $x_0 = 3$.
A3: Letra b.

Em relação ao intervalo (rastro) no eixo X determinado pela movimentação do D nas vizinhanças de y = 5, você diria que x_0 é o ponto médio desse intervalo? Sim, né?
A4 Sim. O raio 0,2 isso.
A3: 0,2, né?
A4: Isso.
A3: Letra c. Estabeleça uma definição para $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$.
Estabeleça uma definição? Mas seria no caso estabelecer para ε e δ específico, ou eu posso falar que ... pode ... eu posso falar que vale para todo δ ou todo ε e δ? Mas neste caso de estabelecer uma definição seria para este ε e δ específico?
A4: Como é 1, eu acho que é para o específico.
A3: Então pode ser essa?
A4: A distância de 2x – 1 a 5 é menor que ε=0,4 se somente se.
A3: Se somente se não.
A4: Se acontece.
A3: Espera aí, x até 5.
Pesquisador: É limite?
A3: Sim.
Pesquisador: É aquilo que falei com vocês. Seria uma definição formal? Então vocês deem uma geral. Depois, vocês veem com esta parte que está sendo especificada aí.
Para todo $\varepsilon > 0$ ... aí vocês especificam de acordo com os dados.
A3: O quê? Eu não entendi.
A4: Eu acho que é para mostrar como é a definição e depois mostra deduzindo o limite pela...
A3: Ah, entendi.
A4: Aí acha a relação inversa entre ε e δ e...
A3: Ah, isso então era para fazer na parte 1?
A4: Eu acho que na parte 1 era mais manual que da definição.
Tem outro jeito de resolver. Eu mesmo resolvi de maneira diferente.
A3: Como assim? Como você resolveu?
A4: Está falando lá, tipo, qual o próximo de x_0 =3 devemos manter x para ter certeza que y = 2x – 1 ficaria a distância menor que 0,4 de y = 5. Aí coloquei y = 5 +0,4 e y = 5– 0,4 e calculei as imagens para encontrar x.
A3: Então, depois de colocar a definição formal, a gente coloca para um ε particular, é isso que vocês estão falando?
A4: Você, tipo, pode achar o ε ..... 2x – 1 – 5, f(x) – L daí acha o δ ou ε.
A3:Como?
A4: Coloca lá 2*x* – 1 ou -1 -5 é a mesma coisa de 2*x* – 6.
Pesquisador: Podem revisitar aquele vídeo (vídeo de suporte do conteúdo) se vocês quiserem.
A4: Eu acho que não precisa não.
A3: Então, A4, você estava falando assim: que a gente acharia o ε. Na verdade a a gente acha o δ. O δ depende do ε.
A4:Pois é, a gente compara com o δ, o δ a gente não precisa de achar o tipo |x-3|< δ. A gente desenvolve a desigualdade do ε para chegar no δ o valor.
A3: A minha pergunta é: a gente coloca é porque tem que colocar um valor particular para o ε para encontrar o δ?
A4: Pois é, coloca ele...
A3: É 0,4. Entendi.
A4: Ou não dar para fazer mais genérico ainda, né?
A3: Dá.
A3: Depois especifica, depois tipo para ε=0,4, qual será seu δ? É, dá pra fazer. Verdade. Melhor. Melhor mesmo.
Beleza! Então o δ tem que ser $\frac{\varepsilon}{2}$ ali no particular.
A4: Isso. Para o ε = 0,4 o δ tem que ser...
A3: Então. Eu basicamente encontrei o valor genérico pra δ e depois usei um caso particular que a gente estava calculando na questão.
Deixa eu ver. É isso.
Era isso mesmo, né?
A4: Daí você escreveu tipo... ah, não precisa não.
Vamos para próxima.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Figura 52 - Protocolo de resolução da dupla parte 1 da Sequência de Atividades 6



(a) $x_0 = 3$, pois $y = 5 \Rightarrow 5 = 2x_0 - 1 \Rightarrow 6 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = 3$.

(b) Sim. $2,8 < x < 3,2$, pois $x \in V_{0.2}(3) \Rightarrow f(x) \in V_{0.4}(5)$.

(c) Sim, pois $\frac{3,2 + 2,8}{2} = 3$

Para descobrirmos o valor do raio δ, basta calcularmos a distância do centro à extremidade do intervalo.

$|3 - 2,8| = 0,2 = \delta$.

(d) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0;\ 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - 5| < \varepsilon$.

Então, vamos provar: De $|2x-1-5| < \varepsilon$, temos que $|2x-6| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |2(x-3)| < \varepsilon \Rightarrow |2||x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí, basta $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Fonte Dados da pesquisa 2021

No diálogo transcrito acima, os participantes A3 e A4 realizam juntos investigações na representação gráfica da função *f*, da parte 1, com o auxílio do Controle Deslizante do *applet* do GeoGebra que continha a representação gráfica de *f*, determinando o ponto de abscissa x_0 correspondente a um determinado *y*, a verificação se um determinado x_0 é ponto médio de uma vizinhança]a,b[estabelecida pelo deslocamento do ponto D dentro de uma vizinhança]c,d[no eixo das ordenadas e as investigações para quando $x \to 3^-$ e $x \to 3^+$ verificar $f(x) \to 5$, para que possa estabelecer uma definição para o $\lim_{x \to 3}(2x-1) = 5$.

Na análise da parte 1, item a), ao movimentar o ponto roxo, situado no eixo das abscissas, A3 determina que o valor correspondente para $y = 5$ no eixo das abscissas é $x_0 = 3$, depois de tecer algumas conjecturas: "*É zero, né? Não, espera aí*". A4 interrompeu e pediu para A3: "*Repete, por favor*". A3 reconheceu que cometeu um equívoco e procurou corrigir: "*Não. Não é isso não. É para y = 5, qual o valor de x_0? Vai ser 3. $x_0 = 3$*". Ao analisar o item b), a dupla reconhece os valores de *x,* ao fazer o ponto roxo percorrer o intervalo]2,8;3,2[, como a solução do problema.

Na análise do item c), a dupla reconhece $x_0 = 5$ como ponto médio da vizinhança]2,8;3,2[, quando A4 afirma que: "*O raio é 0,2*". Por outro lado, ao analisar o item d), a dupla utilizou dos elementos da definição formal e estabeleceu que, para o limite da função existir, $\lim_{x \to 3}(2x-1)$, e ser igual a 5, o valor da relação entre ε e δ seja dado por $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. A análise desse item pela dupla causou dificuldade e dúvida para resolvê-lo. Ao revistarmos a solicitação do referido item, sentimos a necessidade de fazer uma reformulação, inserindo dados que pudessem atender ao que era solicitado, para que assim não causasse dúvidas para o aluno. Porém, dentro do que ficou entendido e o caminho seguido pela dupla, pôde ser constatado que ela apresentou uma desenvoltura no desenvolvimento do item.

Após análise do diálogo entre A3 e A4, em relação ao item d), percebemos que este necessitaria de uma reformulação, incluindo dados para que pudesse atender ao que o item solicitava. Julgamos que a falta de informação foi o que gerou as dificuldades da dupla na interpretação e, consequentemente, desenvolvimento do referido item. Diante desse fato, propusemos a seguinte reformulação para o item d): De acordo com as ideias trabalhadas anteriormente, estabeleça uma definição para $\lim_{x\to 3}(2x-1)=5$ em termos das $V_{(\varepsilon)}(3)$ e $V_{(\delta)}(5)$.

Destacamos que a visualização do comportamento do ponto roxo do *applet,* ao percorrer o intervalo]2,8;3,2[, permitiu à dupla determinar e justificar algebricamente que $x_0 = 3$ é a abscissa correspondente a $y = 5$, tanto no item a) como no item b), ao determinar que os valores de x que pertencem ao intervalo]2,8;3,2[garantem uma distância menor que 0,4 unidades de $y = 5$, que representa a solução do problema.

Em relação ao item c), a dupla determina e justifica $x_0 = 3$ como ponto médio do intervalo ou vizinhança do]2,8;3,2[e, por fim, estabelece a definição formal para o limite da função *f*, determinando que a existência e igualdade do limite são garantidas por meio da relação matemática entre ε e δ dada por $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, conforme Figura 53 do protocolo de resoluções dos itens.

Quadro 31 - Diálogo entre o pesquisador, A3 e A4 durante o desenvolvimento da Sequência de Atividades 6 parte 2

A3: Parte 2, né? [*Leitura situação-problema*] *Foi solicitado a um torneiro mecânico que fabricasse um cilindro de metal de10 cm de diâmetro. E foi permitida para a fabricação desse cilindro uma tolerância de erro de* $\varepsilon = \pm 0,5$ *cm no diâmetro. Considerando x o raio do cilindro, descreva uma função f de x que represente o diâmetro do cilindro.* A3: *Então, aí fica 2(x).10 mais ou menos 0,5. Certo? Você falou alguma coisa? Falhou.* *A4: Sim, é isso mesmo.* *A3: Então é 20x mais ou menos 5. Fica estranho.* *A4: Também tem o 0,5, né?* *A3: Ah, é ... 0,5.* *Com o auxílio do applet. Deixa eu abrir ele aqui* *Não sei, é o mesmo. Mas eu acho que não. Era o mesmo, tá?* *Com o auxílio do applet faça o que se pede no roteiro a seguir responda às questões indicadas.* *Movimente o ponto A em y = 10.* Silêncio [...] *A4: Eu acho que não precisa do 0,5 na função não.* *A3: O quê?* *A4: Eu acho que não precisa do 0,5 na função não.* *A3: Espera aí. Eu acho que sim.* *A4: Porque o raio do cilindro descreva f (x) ... e represente o diâmetro do cilindro. O diâmetro seria 2x.* *A3:Sim. Mas tem margem de erro de 0,5.*

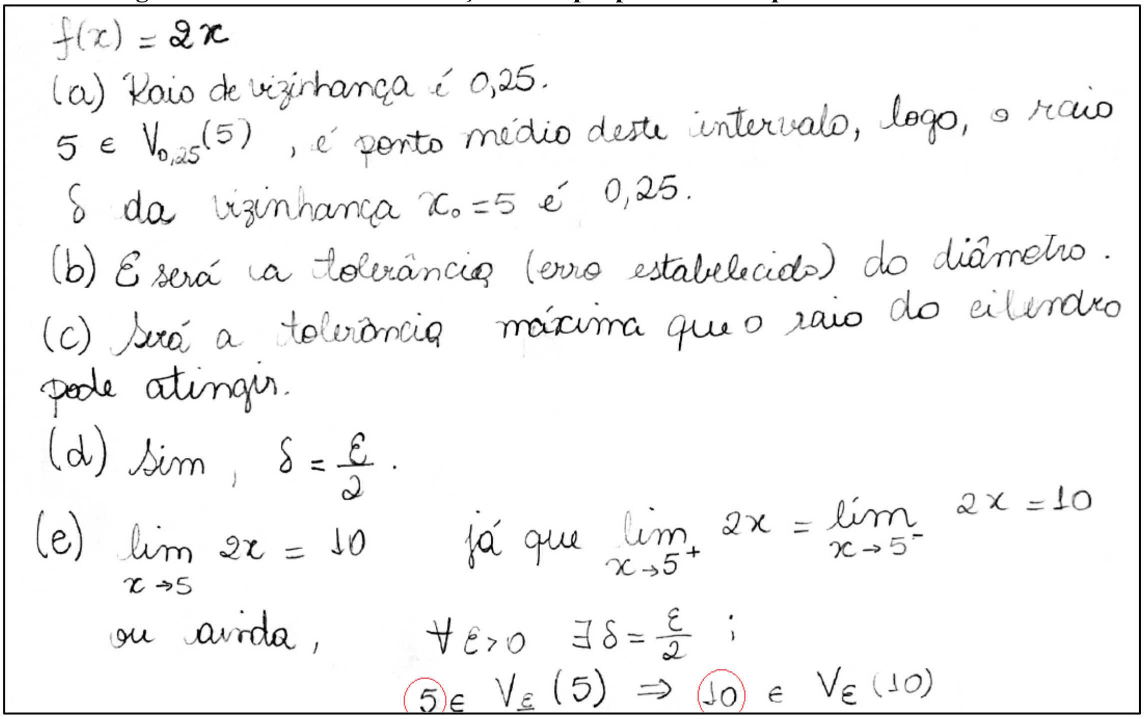
A4: Mas aí essa margem de erro a gente vai calcular no ... no ... na vizinhança. Não na própria função, entendeu?
A3: Eu entendi, mas deveria entrar. Eu acho que deveria entrar.
A4: Eu acho que vai dar diferença.
A3: Não. Eu sei que vai dar diferença, mas, assim pelo enunciado, deveria entrar, por exemplo ... ah, não sei. Tá bom. Vou tirar.
A4: Até por que senão a gente nem precisaria olhar para o ε, entendeu?
A3: Sim, entendi. É ... continuando.
Observe que foi construída uma vizinhança de y=10 no eixo Y (tolerância de erro permitido), ou seja, $V_{(0,5)}(10) =]9,5; 10,5[$.
Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y=10. Digite no campo indicado a lei de formação da f. 2x, né?
A4: Sim.
A3: Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
Letra a [Para y=5, qual é o valor de x_0? Justifique sua resposta.]
Clique sobre o ponto roxo e faça-o pertencer à vizinhança de x = 5. Qual é o raio δ da vizinhança de x_0 = 5? Justifique algebricamente sua resposta.
Clique sobre o ponto roxo, faça ele pertencer... ah, tá. A vizinhança de x=5 vai de ... vai de ... 1,75 até ...
A4: Hum?
A3: 1,75 não. Foi mal. É de 4,75 até ...
A4: 5,25
A3: 5,25. Então, perguntou o quê? Qual é o raio de vizinhança? Ah, é 0,25.
A4: Isso.
A3: E pediu pra justificar algebricamente a resposta... Espera aí.
A vizinhança de 5 vai de ... 4,75 até 5,25 e o x ... ele é o... o 5 é o ponto médio deste intervalo então...
A4: É isso mesmo.
A3: Letra b. [leitura]
Em termos da situação- problema, qual o significado da vizinhança estabelecida por ε em torno de L=10?
A4: Vai ser exatamente a tolerância do diâmetro.
O erro do diâmetro.
A3: Letra c). [leitura]Em termos da situação- problema, o que significa a vizinhança de x_0 = 5?
A4: Vai ser a mesma tolerância, mas só que desta vez "pro" raio, né?
A3: É, exatamente.
A4: O raio pode atingir para ficar ainda dentro da tolerância.
A3: Certo.
Letra d. [leitura] De acordo com a situação- problema, é possível estabelecer uma relação entre ε e δ? E, se sim, qual seria?
Bom, δ é a metade de ε.
A4:Sim. Até porque está relacionando o diâmetro. É a relação do diâmetro e o raio.
A3: Sim.
Letra e. [leitura].
O limite de f existe? Se sim, qual seria? Justifique? O limite de quê? Quando x tende a 5? De 2x quando x tende a 5?
A4: Sim.
A3: Existe. É o limite de uma função afim.
A4: E é 10.
Pode ser tanto por justificativa, pode ser por vizinhança, pode ser ... por limites laterais também.
A3: Sim. O limite com x tendendo a 5 de 2x=10.
Vou colocar as duas respostas.
Para a questão de vizinhança, a gente coloca que ... o 5 pertence à vizinhança de 5, no caso, a vizinhança ε dividido por 2 e isso implica que 10 pertence à vizinhança de ε de 10 no caso.
A4: Repete, por favor?
A3: Espera aí.
No caso de vizinhança, a gente fala que o 5 pertence à vizinhança de ε dividido por 2 de 5, no caso, né? Implica que 10 pertence à vizinhança de ε, né? Com o centro em 10.
A4: Pode ser.
Mais eu acho, pra neste caso, o limite existe. Aí a gente não poderia colocar o ε e o δ específico?
Como assim?
Do jeito que você falou a vizinhança do 5, como é?
Como a vizinhança do 5 existe e é δ=0,25, né?

A3: Não, não foi isso que eu coloquei. Eu coloquei...
A4: Colocou genérico, né?
A3: Sim.
Eu coloquei que 5 pertence à vizinhança 5 é de $\frac{\varepsilon}{2}$.
A4: Ah, tá. Então está certo.
Se fosse específico mesmo, né?
A3: Então é a parte 3, né?
A4: Sim.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

A seguir, apresentamos a Figura 54 do protocolo de resolução referente à parte 2.

Figura 53 - Protocolo de resolução da dupla parte 2 da Sequência de Atividades 6



$f(x) = 2x$

(a) Raio de vizinhança é 0,25.
$5 \in V_{0,25}(5)$, é ponto médio deste intervalo, logo, o raio δ da vizinhança $x_0 = 5$ é 0,25.

(b) ε será a tolerância (erro estabelecido) do diâmetro.

(c) Será a tolerância máxima que o raio do cilindro pode atingir.

(d) Sim, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

(e) $\lim_{x \to 5} 2x = 10$ já que $\lim_{x \to 5^+} 2x = \lim_{x \to 5^-} 2x = 10$

ou ainda, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}$;
$5 \in V_\varepsilon(5) \Rightarrow 10 \in V_\varepsilon(10)$

Fonte: Dados da pesquisa

Na parte 2, A3 e A4 obtêm a representação gráfica de *f,* no *applet* do GeoGebra, que representa o diâmetro do cilindro de metal a ser fabricado e exploram o movimento dinâmico do ponto roxo situado no eixo das abscissas. Na análise para determinar a representação do diâmetro do cilindro de raio *x,* A3 a princípio conjectura que: *"Então aí fica 2(x) * 10 mais ou menos 0,5. Certo? Você falou alguma coisa? Falhou"*. A4 confirma que: "*Sim, é isso mesmo*". A3 considerou de maneira incorreta o valor do diâmetro, 10, como parte integrante da lei de formação da função que representa o diâmetro em função de *x*. No entanto, ao analisar o resultado, A3 levanta uma certa suspeita: *"Então é 20*x mais ou menos 5* [0,5]. *Fica estranho"*. A4 acha que a tolerância de 0,5 cm, também, faz parte da lei de formação da função ao expressar: "*Também tem o 0,5, né?"*.

Mas ao seguir as instruções do roteiro para manusear o *applet*, quando A3 movimenta o ponto A e o posiciona em $y = 10$, A4 percebe que que a tolerância 0,5 não pertence à lei de formação da função. A4 argumenta: "*Eu acho que não precisa do 0,5 na função não*". E justifica: *"Porque o raio do cilindro descreva f (x)... e represente ... o diâmetro do cilindro. O diâmetro seria* 2*x*." A3 concorda e, ao mesmo tempo, questiona: "*Sim. Mas tem margem de erro de 0,5."* A4 explica: "*Mas aí essa margem de erro a gente vai calcular no... no ... na vizinhança. Não na própria função, entendeu*?". A4 entende que essa margem de erro ou tolerância corresponde à quantidade que o diâmetro pode variar.

Na análise do item a), A3 clica sobre o ponto roxo, fazendo-o percorrer a vizinhança em torno de $x_0 = 5$ e procura determinar essa vizinhança: "*A vizinhança de x=5 vai de ... vai de ... 1,75 até ...*". A4 indaga A3: "*Hum* [o quê]*?"*. A3 corrige a sua linha de raciocínio: "*1,75 não. Foi mal. É de 4,75 até ....".* A4 complementa: "*5,25".* Em seguida, A3 questiona: *"Então perguntou o quê? Qual é o raio da vizinhança? Ah, é 0,25.* O que é confirmado por A4: "*Isso".* A3 movimenta o ponto roxo dentro da vizinhança]4,75; 5,25[e conclui o seu raciocínio reconhecendo que: "*A vizinhança de 5 vai de ... 4,75 até 5,25 e o x ... é o ... o 5 é o ponto médio deste intervalo então...".* A4 interrompe o raciocínio de A3, confirmando que: "*É isso mesmo."*

Na análise do item b), quando é solicitado, na situação- problema, estabelecer um significado da vizinhança em torno de $L = 10$, A4 reconhece a vizinhança como uma tolerância ao expressar: "*Vai ser exatamente a tolerância do diâmetro".* O que é complementado por A3 de maneira coerente à fala de A4: *"O erro do diâmetro".* Nesse momento, ele está referindo-se ao possível erro admitido para fabricação da peça. Para a análise do item c), a dupla reconhece a vizinhança em torno de $x_0 = 5$ como a variação máxima que o raio pode alcançar para que o diâmetro fique dentro do padrão estabelecido de fabricação, como uma tolerância, só que desta vez para o raio, conforme afirmação de A4: "*Vai ser a mesma tolerância, mas só que para o raio, né?".* E conclui seu raciocínio: "*O raio pode atingir para ficar ainda dentro da tolerância".*

Na análise do item d), A3 estabelece a relação entre o ε e δ, como $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, por meio do raciocínio lógico: '*Bom,* δ é *a metade de* ε". A4 concorda com A3 e fundamenta seus argumentos na fórmula do diâmetro: "*Sim. Até porque está relacionando o diâmetro. É a relação do diâmetro e o raio".* Ao analisar o item e), A3 entende que, quando $x \to 5$, existe o limite da função *f*. Enquanto A4 reconhece que o valor do limite é igual a 10. A3 justifica estabelecendo uma vizinhança para 5: "*No caso de vizinhança, a gente fala que o 5 pertence à* vizinhança *de* $\frac{\varepsilon}{2}$ *de 5,* no caso, né? *Implica que 10 pertence à vizinhança* de ε, né? *Com o centro em 10.*" A dupla continua tecendo conjecturas. A4 acha que, pelo fato deles conhecerem os valores específicos para o ε e o δ, a definição deveria girar em torno desses valores: "*Mais eu acho, pra neste caso, o limite existe. Aí a gente não poderia colocar o ε e o δ específico?*" Mas A3 não escolhe esses valores específicos, expressa sua posição e procura generalizar a existência do limite para qualquer valor dado a épsilon por meio da relação $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Isso fica evidente quando afirma: "*Eu coloquei que 5* [*x*] *pertence à vizinhança 5 é de* $\frac{\varepsilon}{2}$*".*

A visualização e o dinamismo do *applet* possibilitaram à dupla determinar e reconhecer que a lei de formação da função que representa o diâmetro em função de x é dada por $f(x) = 2x$ em que x representa o raio. As investigações realizadas utilizando o ponto roxo permitiram à dupla reconhecer e determinar o raio da vizinhança de $x_0 = 5$, bem como para os itens b) e c), que as vizinhanças em torno de $L= 10$ e $x_0 = 5$ representam tolerâncias para a fabricação da peça. Assim como no item d), no qual a dupla estabeleceu, por meio do raciocínio lógico, a relação matemática entre ε e δ dada por $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$; e no item e), no qual a dupla conseguiu determinar e justificar a existência do limite de f pelo resultado de um processo de aproximação e, também, tentou justificar por meio de uma relação entre vizinhanças. Entretanto, ao justificar a existência do limite, como descrito acima, a dupla cometeu um equívoco ao expressar que $5 \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(5)$, ao invés de enunciar que $x \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}(5)$ e que $10 \in V_{\varepsilon}(10)$, ao invés de $f(x) \in V_{\varepsilon}(10)$ (conforme destacado no item e)), como pode ser visto no protocolo de resolução, Figura 54.

Quadro 32 - Diálogo entre o pesquisador, A3 e A4 durante o desenvolvimento da Sequência de Atividades 6 parte 3

A3: Leitura da atividade 6, parte 3. *A3: Situação-problema* ***3****: Para a fabricação de cilindros para um determinado tipo de motor, com área da seção transversal, paralela à base, de 63,8 cm²*, *é necessário saber qual é a margem de erro (δ) que se pode aceitar em relação ao raio ideal* x_0 *do cilindro, que é* $x_0 = 4{,}51$ *cm. Além disso, a área da seção transversal pode diferir de no máximo 0,4 cm² dos 63,8 cm² (Obs.: A área da seção transversal de um cilindro é dada por* πr^2 *considerando π=3,141).* *A3: Ah, tá. Da seção transversal eu achei que era lateral. Considerando deve ser π=3,141.* *Leitura da questão* [item] *a). Considerando genericamente como x o raio do cilindro, descreva uma função* f *de x que represente a área da seção transversal em função do raio do cilindro.* *Deixa eu ler de novo que eu me perdi.* *A4: A função vai ser justamente a área, né?* πr^2*?* *A3: No caso, seria:* πx^2*?* *A4: Sim.* *A3: É isso mesmo?* *Leitura da letra b.* *Considerando 3 casas decimais, considere a função f anterior e determine o intervalo de variação do raio para o qual x satisfaz a desigualdade* $\|f(x)-63{,}8\| < 0{,}4$*. Nesse intervalo o valor menor deve ser arredondado para cima e o valor maior deve ser arredondado para baixo.* *A4: É só substituir f (x)...* *A3: Ah, tá. Vou fazer.* *A4: Em x².* *A3: Em x².* $\|f(x) - 63{,}4\| < 0{,}4 \rightarrow \|\pi x^2 - 63{,}4\| < 0{,}4$*, isso implica que ...* *A3: Espera aí. Tá quase.*

A4: Ok!
A3: Só não entendi uma coisa: neste intervalo o valor maior deve ser... Ah, tá. Agora entendi. O valor maior deve ser arredondado para cima, então 4,47. Quantas casas decimais neste intervalo?
A três casas decimais, então, 4,466 e o outro deve ser arredondado para baixo, não faz sentido 4,494. Pronto. Agora foi.
A4: Ficou como aí?
A3: Ficou o intervalo de 4,466 até 4,494. Pode seguir?
A4; Pode.
A3: Leitura da letra C.
Você diria que $x_0 = 4,51$ é ponto médio desse intervalo?
Mais ou menos.
A4: Aproximadamente sim. Justifique.
A3: Vou fazer a soma dos dois e dividir por dois.
A4: "Diferencinha" pouca.
A4: Isso pode ser arredondamento da calculadora também.
A3: E deu o quê?
A3: Aproximadamente.
A3: Leitura da letra d).
Calcule a diferença entre o extremo menor do intervalo e o valor 4,51. Faça o mesmo para o extremo maior do intervalo e o valor 4,51.
A3: É, tem um dele aí que a diferença vai dar negativo. Não é para fazer módulo não, né?
Uns deles, não todos os dois, vai dar a diferença negativa.
A4: Não, eu acho que pode considerar em módulo sim.
A diferença no caso que está querendo praticamente é a distância. Tipo como se fosse para achar o δ.
A3: 4,5 – 4,4 deu 0,034 e no segundo caso 4,5 – 4,9 deu 0,006.
A4: Como você fez aquela?
A3: A do intervalo, né?
A4: É, do intervalo.
$/\pi x^2 - 63,8/ < 0,4$
A3: Ou seja, $/\pi . x^2 - 63,4/ < 0,4$. Aí passei ... fica $-0,4 < \pi x x^2 - 63,4 < 0$, depois somei 63,4 em todos os membros. Então o primeiro fica – 0,4 + 63,4, no meio fica πx^2 e por último 0,4 + 63,4 e aí...
A4: 63,4?
A3: É 63,8. Aí está o erro. Oh, Jesus!
A4:É tanto ponto 4...Tanto ponto 4 que confunde.
A3: Tá, continuando... Eu dividi todo mundo por 3,141 que seria o π que pediu para considerar isso.
A4: Que foi dado não?
A3: Isso. Depois fiz as contas, mais eu acho que só foi este oito aí que eu errei. Deixa eu ver.
A3: Agora ficou melhor. Isso, agora foi. Ficou entre 4,493 e 4,520.
Aí as extremidades, deixe-me ver... voltando à C aqui pra eu fazer.
A4: 4,493, e?
A3: Espera aí.
A3: 4,493 e 4,520.
A4: Ah, tá.
A3: Isso, agora foi. É 4,493 e depois 4,520.
4,520 – 4,493 deu 0,007 [0,017] *e outro 4,520.*
E ainda sim deu diferente A4.
A4: Estou refazendo para comparar.
A3: Não encontrei o erro não. .... Ah, é para dar diferente mesmo. Porque na letra E está assim: Qual dos valores do item anterior você escolheria como δ para atender à situação do problema?
Então, é isso mesmo.
A3: Ah, é o erro máximo ... deixa eu ver aqui.
Hem, A4, você está aí?
A4: Estou.
A3: Na letra C ele está pedindo para escolher uns dos δ for igual, é porque deu 0,017 e outro deu 0,01
A4: Cai fora.
A3: Exatamente. Vai ficar $(0,01)^2 x\pi$ bem que cai dentro.
Caiu dentro, mais, enfim.
Mais, enfim, temos que escolher o menor raio. Devemos escolher o menor raio que é 0,017 para não ultrapassar a tolerância permitida.
A4: Exatamente.
A4: Com certeza.

A3: Já usa muito, né, A4? As experiências que a gente teve até então em estágio, também em questão de dar aula a gente procura encaixar estas coisas e, em particular, no caso de limite e vizinhanças ajudou demais, as respostas são imediatas do que ficar pensando na algébrica, enfim.
A4: Até também porque é mais interessante a gente fazer o aluno pensar e chegar no resultado do que a gente chegar no quadro e resolver.
Pesquisador: Sim. Os *applets* ajudam a desenvolver as imagens mentais. Mas tem que tomar cuidado para não ficar dependente da tecnologia. Ela é um recurso a mais.
A4: É justamente usar a ideia de você ter mais de uma maneira de visualizar o mesmo problema.
Pesquisador: Sim.

A4: Porque se ele ficar preso somente no geométrico ou no algébrico, mas se ele saber transitar de um para o outro já ajuda muito.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Figura 54 - Protocolo de resolução da dupla parte 3 da Sequência de Atividades 6

Parte 3

(a) $f(x) = \pi x^2$

(b) $|f(x) - 63{,}8| < 0{,}4 \Rightarrow |\pi x^2 - 63{,}8| < 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}4 < |\pi x^2 - 63{,}8| < 0{,}4 \Rightarrow -0{,}4 + 63{,}8 < \pi x^2 < 0{,}4 + 63{,}8$

$\Rightarrow \frac{-0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141} < x^2 < \frac{0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141} \Rightarrow \sqrt{\frac{-0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141}} < x < \sqrt{\frac{0{,}4 + 63{,}8}{3{,}141}}$

$\Rightarrow 4{,}493 < x < 4{,}520$

(c) Não é,
Pois

$\frac{4{,}493 + 4{,}520}{2} = 4{,}5065$

(d) $|4{,}51 - 4{,}493| = 0{,}017.$

$|4.51 - 4{,}520| = 0{,}01$

(e) Devemos escolher o menor, $\delta = (0{,}01)$, para não ultrapassar a tolerância permitida de 0,4.

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação à parte 3, na análise do item a), A3 procura captar a essência do que está sendo solicitado quando expressa: "*Considerando genericamente como x o raio do cilindro, descreva uma função f de x que represente a área da seção transversal em função do raio do cilindro. Deixa eu ler de novo que eu me perdi"*. A4 reconhece a área da seção transversal e expressa: *"A função vai ser justamente a área, né? πr^2?"*. Então, A3 complementa com uma indagação: "*No caso seria πx^2?"*. O que é confirmado por A4*: "Sim"*.

Na análise do item b), A4 fala para A3: *"É só substituir $f(x)$...*[referindo-se à mudança de notação em relação à variável A para $f(x)$]". A3 concorda enquanto A4 continua expressando o seu raciocínio: "*Em x^2* [referindo-se à mudança da variável r^2 para x^2*"*. Diante da mudança que foi exigida no item a), A3 passa a desenvolver a desigualdade para obter os valores de *x*: "*: / f(x) – 63,4 / < 0,4⇒ | πx^2 - 63,4| < 0,4, isso implica que ...*"

Ao desenvolver as operações, A3 questiona: *"Só não entendi uma coisa: neste intervalo o valor maior deve ser.... Ah, tá. Agora entendi. O valor maior deve ser arredondado para cima então 4,47".* Após a realização da operação, A3 expressa para A4 a sua conclusão sobre o valor do intervalo encontrado: "*Ficou o intervalo de 4,466 até 4,494".* Só que A3 cometeu um equívoco ao transcrever o valor do diâmetro que é de 63,8 para 63,4. Em um dado momento do diálogo, A4 pergunta para A3 como foi resolvido o item b) [isso depois de terem desenvolvido alguns itens] e A3 explana: "*Ou seja,* $/\pi x x^2 - 63{,}4/ < 0{,}4$*. Aí passei ... fica* $-04 < \pi x x^2 - 63{,}4 < 0{,}4$ *, depois somei 63,4 em todos os membros. Então o primeiro fica – 0,4 + 63,4, no meio fica* πx^2 *e por último 0,4 + 63,4 e aí....".* A4 questiona: "*63,4?".* Nesse momento, A3 reconheceu o seu erro: "*É 63,8. Aí está o erro".* A3 ajusta os cálculos e conclui a sua explanação: "*Tá, continuando... Eu dividi todo mundo por 3,141 que seria o π que pediu para considerar isso".* A4 interrompe A3 e expressa: "*Que foi dado não?".* A3 concorda e continua: " *Isso. Depois fiz as contas, mais eu acho que só foi este oito aí que eu errei. [...] foi ficou entre 4,493 e 4,520".*

Na análise do item c), a dupla não foi concisa em afirmar que o valor x_0 = 4,51 não era ponto médio do intervalo encontrado no item b), quando A3 expressou: "*Mais ou menos".* E A4 complementa*: "Aproximadamente sim".* E, mesmo ao justificar e verificar que o valor encontrado não correspondia a um ponto médio, eles apelavam para um possível arredondamento da calculadora, o que pode ser visto na fala de A4: *"Diferencinha pouca. Isso pode ser arredondamento da calculadora também".*

Quanto à análise do item d), a dupla discute a respeito do uso do módulo para determinar os valores correspondentes à distância dos extremos. Até que A4 conclui de maneira coerente: "*Não, eu acho que pode considerar em módulo sim. A diferença no caso que está querendo praticamente é a distância. Tipo como se fosse para achar o* δ". A3 procura resolver o item proposto: "*4,51 – 4,4 deu 0,034 e no segundo caso 4,51 – 4,9 deu 0,006".* Mas, como esse cálculo havia sido feito anteriormente, A3 fez a correção: "*Aí as extremidades, deixe-me ver... voltando à C aqui pra eu fazer".* A4 expressa em relação a um dos intervalos: "*4,493, e?".* Em seguida, A3 reconhece que os extremos do intervalo são: "*4,493 e 4,520*". A3 retoma ao item c), relacionado com ponto médio, e de posse desses novos resultados comenta: "*4,520 – 4,493 deu 0,007* [0,017] ...... *E ainda sim deu diferente, A4".* A4 refaz os cálculos para confirmação dos resultados: "*Estou refazendo para comparar".*

Ao ler o item e), A3 percebe que $x_0 = 4{,}51$ não é ponto médio: "*Não encontrei o erro não... Ah, é para dar diferente mesmo. Porque na letra E está assim: Qual dos valores do item anterior você escolheria como δ para atender a situação do problema? Então é isso mesmo*". Desse modo, A3 reconhece que é necessária a escolha de um dos valores e argumenta: *Ah, é o erro máximo ... deixa eu ver aqui*". Na análise do item e), A4 reconhece que, na escolha entre os δ, o melhor a ser escolhido é o de menor valor, pois este garante o erro permitido para fabricação da peça; enquanto o outro não atende e justifica: *"Cai fora"*. Referindo-se que, ao somar 0,017 ao raio $x = 4{,}51$, o diâmetro extrapola o valor tolerável. A3, então, reconhece que: "*Mais, enfim, temos que escolher o menor raio. Devemos escolher o menor raio que é 0,01 para não ultrapassar a tolerância permitida*".

As explorações realizadas dos dados do problema e sua visualização permitiram à dupla analisar e concluir que a área da seção transversal do cilindro dada por $A = \pi r^2$ pudesse ser representada por $f(x) = \pi x^2$, assim como o desenvolvimento da inequação modular para obtenção dos possíveis valores de x para a solução do problema proposto. Nas investigações realizadas, a dupla reconheceu que $x_0 = 4{,}51$ não é ponto médio do intervalo]4,493;4,520[. Por outro lado, dentre os valores encontrados para δ={0,017;0,01, a dupla reconheceu que o melhor δ para a solução do problema seria o de menor valor do conjunto obtido, conforme Figura 55, que apresenta o protocolo de resolução.

Concluindo, nas análises do desenvolvimento da Sequência de Atividades 6, observamos que foi possível realizar as seguintes conversões: RN→RG nas partes 1 e 2 do roteiro de atividades, nos itens 2) e 5), ao posicionar o controle deslizante em ε = 0,4 e em ε = 0,5, ao determinar uma vizinhança em torno de $y = 2$ e $y = 5$ e ao obter as representações gráficas de f ao digitar a lei de formação $f(x) = 2x - 1$ e $f(x) = 2x$. No item a), parte 1, ao transitar da RN→RA para determinar o valor correspondente em x para $y = 5$ e ao justificar algebricamente. No item b), parte 1, transitando da RG→RN ao determinar os valores para x que é a solução do problema. Da RN→RLN, no item c) parte 1, para determinar o valor do ponto médio encontrado e justificar. Na parte 3, item e), ao determinar qual o melhor delta que serviria como resposta para o problema ao justificar tal escolha. Na parte 2, ao transitar da RLN→RA ao descrever $f(x) = 2x$ como a função que representa o diâmetro do cilindro. E, por fim, no item e), parte 2, ao transitar da RA→RN ao estabelecer uma definição para o $\lim_{x\to 5} 2x = 10$.

Quanto ao tratamento, foi propiciado no item d), parte 1, ao transitar na RA ao estabelecer uma definição para o $\lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5$; na parte 3, ao determinar a lei de formação f de x que representa a área da seção transversal do cilindro; no item b), ao determinar os valores da solução da inequação que representa o valor do intervalo de variação do raio; no item c), quando verificou que $x_0 = 4{,}51$ não é o ponto médio do intervalo]4,493;4,520[; e no item d), quando calculou a diferença entre os extremos.

Em relação ao PMA, foram desenvolvidos os seguintes processos: visualização, mudança de representação e tradução entre elas, síntese, análise e generalização.

O processo de visualização foi desenvolvido nas partes 1 e 2 dos itens do roteiro: ao movimentar o ponto A em $y = y_0$; ao fazer o ponto D movimentar dentro do intervalo]c, d[no eixo das ordenadas; e observar a vizinhança]a, b[determinada no eixo das abscissas.

O processo de mudança de representação e tradução entre elas foi desenvolvido nas partes 1 e 2, nos itens 2) e 5), ao transitar da RN→RG para determinar uma vizinhança em torno de y_0 e ao obter a representação gráfica de *f*; no item a), ao determinar a abscissa correspondente para $y = 5$ e ao transitar da RG → RN, ao determinar o valor do raio $\delta = 0{,}25$ e da RN → RLN para justificar $x_0 = 5$ como sendo o ponto médio dessa vizinhança; na parte 2, nos itens b) e c), ao passar da RN → RLN, ao dar significado para as vizinhanças em torno de L= 10 determinada por épsilon e para as vizinhanças em torno de $x_0 = 5$; no item d), ao passar da RLN → RN, para determinar a relação matemática entre ε e δ; no item e), ao transitar da RG→RA, ao justificar a existência do limite; na parte 3, ao compreender o problema e traduzir a área da seção transversal $A = \pi r^2$ por meio da função $f\,(x) = \pi x^2$, mudando da RLN → RA.

O processo de síntese ocorreu na parte 1, nos seguintes itens: item a), ao determinar por meio do *applet* o valor correspondente para a abscissa de $x_0 = 3$ e ao fazer a justificativa apresentando o valor da abscissa por meio da representação algébrica; item b), ao reconhecer e determinar que os valores de x , compreendidos entre $2{,}8 < x < 3{,}2$, representam a solução do problema, e ao relacionar os valores encontrados entre as vizinhanças situadas no eixos das abscissas e das ordenadas; no item c), ao determinar o valor do ponto médio por meio do cálculo aritmético, ao apresentar o valor e justificar por meio do cálculo aritmético como determinar o raio desse intervalo; item d), ao atribuir condição para ε e δ e ao apresentar o cálculo algébrico para determinar a relação matemática entre ε e δ.

A visualização ainda ocorre na parte 2 ao apresentar $f\,(x) = 2x$ como sendo a representação do diâmetro do cilindro, nos itens a seguir: item a), ao determinar por meio do *applet* o valor do raio δ da vizinhança de $x_0 = 5$ e ao apresentar a justificativa utilizando argumentos relacionados à vizinhança e ponto médio; nos itens b) e c), ao apresentar a tolerância ou erro permitido para fabricação da peça; no item d), ao apresentar um valor algébrico para determinação do valor do δ; no item e), ao justificar a existência do limite por meio do teorema dos limites laterais e, também, utilizando elementos da definição formal.

O processo de visualização ocorre também na parte 3, quando a dupla apresenta: no item b), o cálculo dos valores de x para a solução do problema, desenvolvimento da inequação modular e aplicação de propriedade; no item c), quando apresenta cálculo para verificação do ponto médio do intervalo; no item d), quando apresenta o cálculo entre o ponto $x_0 = 4.51$ e os extremos como a distância entre eles; e no item e), quando interpreta, apresenta e justifica a melhor escolha do melhor delta para a solução do problema como $\delta = 0{,}01$.

O processo de generalização é evidenciado na parte1, item d), ao estabelecer uma relação matemática entre δ e ε para justificar a existência do limite de $f(x) = 2x$.

Na parte 3 ocorreu o processo de mudança de representação e tradução entre elas ao compreender o problema e expressar a área da seção transversal $A = \pi r^2$ por meio da função $f(x) = \pi x^2$, mudando da RLN → RA.

O processo de análise foi desenvolvido na parte1 ao determinar maneiras para: item a), calcular o valor correspondente para uma determinada abscissa; item b), calcular os valores de x; item c), calcular o ponto médio e determinar o raio δ; item d), ao estabelecer a relação entre ε e δ; na parte 2, item a), calcular o raio da vizinhança em torno de $x_0 = 5$; item d), calcular o valor de δ; item e), calcular o valor do limite de f; na parte 3, item b), calcular os valores para x; item b), calcular e verificar se 4,51 é ponto médio; item d), calcular as distâncias entre os extremos.

4.7 Reflexão dos Participantes A3 e A4 sobre as Sequências de Atividades da Pesquisa

Foi solicitado aos participantes A3 e A4 que apresentassem uma reflexão sobre as atividades desenvolvidas na pesquisa, com base em dois questionamentos:

3- De que forma as atividades desenvolvidas contribuíram, ou não, para sua compreensão do conceito de limite?

4- Quais das atividades que melhor atendeu para sua compreensão?

A discussão entre os participantes a respeito dos questionamentos apresentados acima, assim como suas reflexões, pode ser verificada no Quadro 33, a seguir.

Quadro 33 - Reflexão de A3 e A4 sobre as Sequências de Atividades desenvolvidas durante a pesquisa

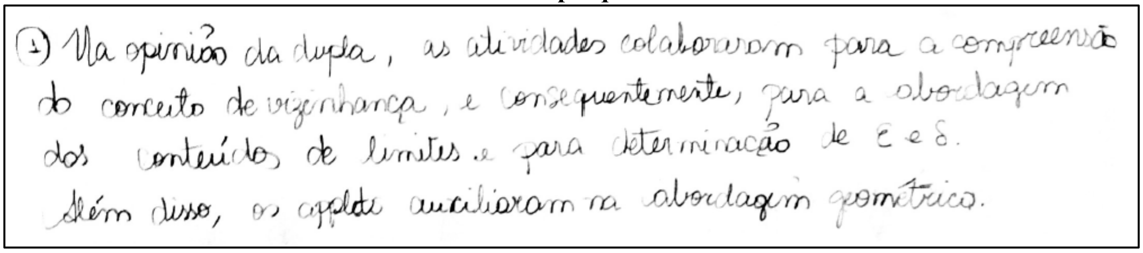
A3: Reflexão sobre as atividades. De que forma as atividades resolvidas contribuíram, ou não, para sua compreensão no conceito de limite? *Ah, principalmente na parte de vizinhanças, eu nem conhecia.* *A4: Exatamente. Também é uma abordagem diferente pra entender épsilon e delta como vizinhança.*

Eu acho que as duas primeiras foram as mais úteis pra esta compreensão também.
A3: Coloca o nome da dupla?
Ok. Na opinião da dupla, as atividades colaboraram para a compreensão do conceito de vizinhança e, consequentemente, para abordagem dos conteúdos de limites.
Eu acho que é isso. Assim nunca tinha visto vizinhança.
A4: Ah, tá. Completa aí.
A3: Sim, pode falar.
A4: E para determinação dos ε e δ.
Pesquisador: Fala sobre um pouco da tecnologia também.
Fala sobre um pouco sobre os *applets,* se ajudou.
A4: O que facilitou na visualização também.
Pesquisador: Isso.
Pesquisador: Porque vocês só viram na ... algebricamente, não foi? Que vocês trabalharam.
A4: No curso anteriormente sim.
Pesquisador: Faz uma comparação e faz para gente, também, por favor. Se vocês julgarem necessário.
A4:Vai sim.
A3: Sim, eu estava esquecendo isso.
Os applets nos auxiliaram na abordagem geométrica.
Mais alguma coisa acrescentar, A4?
A4: Como ficou aí?
A3: Além disso, os applets nos auxiliaram na abordagem geométrica.
A4: Sim, ficou bom.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Na Figura 56, abaixo, pode ser observado o protocolo dos participantes sobre a reflexão da primeira pergunta.

Figura 55 - Protocolo reflexão de A3 e A4 sobre as Sequências de Atividades desenvolvidas durante a pesquisa


1) Na opinião da dupla, as atividades colaboraram para a compreensão do conceito de vizinhança, e consequentemente, para a abordagem dos conteúdos de limites e para determinação de ε e δ.
Além disso, os applets auxiliaram na abordagem geométrica.

Fonte: Dados da pesquisa 2021

Na reflexão externada pela dupla, a respeito da primeira pergunta, A3 revela que as Sequências de Atividades contribuíram para a compreensão de vizinhanças, pois, segundo esse participante, foi a primeira vez que teve contato com esse conteúdo: "*Ah, principalmente na parte de vizinhanças, eu nem conhecia".* A4 concorda com as palavras expressas por A3: "*Exatamente*". E continua argumentando que se trata de uma outra maneira de abordar e determinar os valores para os épsilons e deltas, que é parte integrante da definição formal de limite: *"Também é uma abordagem diferente pra entender épsilon e delta como vizinhança".*

De acordo com os argumentos apresentados pela dupla, ficou evidenciado, para a primeira pergunta, que as atividades tiveram uma contribuição para compreensão do conceito de vizinhança de um número e, também, para a determinação dos épsilons, deltas e abordagens do conteúdo de limites, conforme pode ser visto, a seguir, na Figura 56.

Para a segunda pergunta: Quais das atividades que melhor atendeu para sua compreensão?

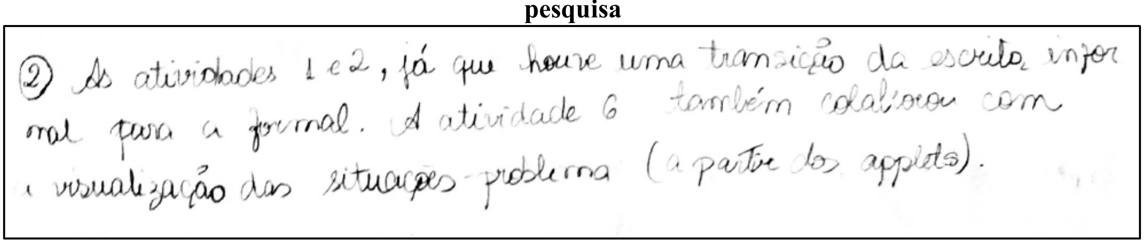
Quadro 34 - Reflexão de A3 e A4 sobre as Sequências de Atividades desenvolvidas durante a pesquisa

A4: E quais das atividades ajudou mais você?
A3: Ah, eu gostei mais da 1 e da 2 [3].
A4: É, foi justamente nelas que ficou definida o uso da vizinhança [vizinhança foi desenvolvida na atividade 3].
A3: Foi de onde fez a transição, de onde saímos da linguagem informal, descobriu, digamos assim...
A4: Eu acho também essas duas primeiras partes dessa atividade 6, elas auxiliaram a parte visual. É fácil definir a vizinhança... [inaudível]*... mas fácil ainda é ser visualizada.*
A3: Então, porque as atividades 1 e 2 [3]*, já que houve uma transição de escrita informal para a formal, foi aquela coisa tipo a gente saiu limites laterais são iguais pra vizinhanças. A atividade 6 colaborou com a visualização das situações- problemas (a partir dos applets). Eu acho que é isso.*
Pesquisador: Fala um pouco sobre os *applets.*
Desta contribuição da visualização nos estudo da ...do cálculo.
Vocês aconselhariam e usariam isso em suas aulas e recomendariam isso para outros professores utilizarem?
A4: Com certeza.
A3: Já usamos muito, né, A4? As experiências que a gente teve até então em estágio, também em questão de dar aula, a gente procura encaixar estas coisas e, em particular no caso de limite e vizinhanças, ajudou demais, as respostas são imediatas. Melhor do que ficar pensando na resolução algébrica, enfim.
A4: Até também porque é mais interessante a gente fazer o aluno pensar e chegar no resultado do que a gente chegar no quadro e resolver.
Pesquisador: Sim. Os *applets* oferecem imagens dinâmicas que, quando bem explorados, podem auxiliar na compreensão do conteúdo em que está sendo abordado e ajudam a desenvolver a formação de imagens mentais. Mas este recurso deve ser utilizado como um material de apoio e deve-se tomar o cuidado para que não fique dependente dele.
A4: É justamente usar a ideia de você ter mais de uma maneira de visualizar o mesmo problema.
Pesquisador: Sim.
A4: Porque ele [aluno] não deve ficar preso somente no geométrico ou no algébrico, mas, se ele saber transitar de um para o outro, já ajuda muito.

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 57, segue protocolo dos participantes sobre a reflexão da segunda pergunta.

Figura 56 - Protocolo reflexão de A3 e A4 sobre as Sequências de Atividades desenvolvidas durante a pesquisa


② As atividades 1 e 2, já que houve uma transição da escrita infor
mal para a formal. A atividade 6 também colaborou com
a visualização das situações-problema (a partir dos applets).

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla selecionou as seguintes Sequências de Atividades: 1, 2 [3] e 6. A Sequência de Atividades 1- Determinando limites por meio de valores das funções trata da determinação de limites por meio de estimativas utilizando tabelas, a Sequência de Atividades 3 - Estabelecendo a vizinhança de limite com auxílio do *applet* 2 e 3 do GeoGebra e a Sequência de Atividade 6-Aplicando o que aprendeu. Ao refletir sobre as atividades, A3 expressa que: *"Ah, eu gostei mais da 1 e da 2* [3]". Percebemos que o integrante da dupla está referindo-se, de maneira equivocada, à Sequência de Atividade 2 como sendo a que aborda o conteúdo de vizinhança, entretanto esse conteúdo é abordado na Sequência de Atividade 3.

A4 relata que foi justamente na Sequência de Atividade 3 que foi abordado sobre o uso do conceito de vizinhança: "*É, foi justamente nela* [a vizinhança foi desenvolvida na atividade 3] *que ficou definida o uso da vizinhança"*. Para A3 foi a partir dessa atividade que o limite passa de um tratamento subjetivo para um tratamento formal: "*Foi de onde fez a transição. Saímos da linguagem informal, digamos assim..."*. Sobre a escolha da Sequência de Atividade 6, A4 relata que as duas primeiras partes contribuíram para a visualização na determinação das vizinhanças: "*Eu acho também essas duas primeiras partes dessa atividade 6, elas auxiliaram a parte visual"*. E continua: "*É fácil definir a vizinhança ...* [inaudível] *... mas fácil ainda é ser visualizada"*.

Inferimos, a partir do diálogo entre os integrantes da dupla, que A4 quis dizer que nas situações-problema, com o uso do *applet*, ficou mais visível o papel que as vizinhanças de ε e δ exercem em uma aplicação de uma situação- problema. De acordo com os argumentos apresentados pelos alunos, as atividades 1 e 3 os possibilitaram transitarem de uma escrita informal para a escrita formal, conforme indica a Figura 57.

No decorrer da reflexão, sempre que possível, o pesquisador procurou motivar a dupla a falar sobre o uso dos *applets* no desenvolvimento das Sequências de Atividades. Os integrantes da dupla se manifestaram de maneira suscinta ao explanarem que os *applets* os auxiliaram nas abordagens geométricas, além de colaborar com as visualizações das situações- problema. Ao serem questionados pelo pesquisador se eles utilizariam essas atividades em suas salas de aula ou se aconselhariam o uso delas a outros professores, A4 foi enfático ao responder "*com certeza"*.

Com base na fala de A3, percebe-se que os participantes já fazem uso de algum *software* de matemática na realização dos estágios (são alunos da graduação de Licenciatura em Matemática), pois: "*Já usamos muito, né, A4? As experiências que a gente teve até então em estágio, também em questão de dar aula, a gente procura encaixar estas coisas ...* [uso *software* de matemática de acordo com o conteúdo ministrado]*"*.

Quanto ao uso no conteúdo de limites e vizinhanças, o *software* dispensa o uso do desenvolvimento da parte algébrica, como relata A3: "*e, em particular no caso de limite e vizinhanças, ajudou demais, as respostas são imediatas. Melhor do que ficar pensando na resolução algébrica"*. Mas, para A4, é mais importante que o aluno pense e chegue às suas próprias conclusões: "... *é mais interessante a gente fazer o aluno pensar e chegar no resultado do que a gente chegar no quadro e resolver".*

O pesquisador ressalta a importância do uso de *softwares*, pois oferecem imagens dinâmicas. Quando bem explorados, podem auxiliar na compreensão do conteúdo em que está sendo abordado e ajudam, também, a desenvolver a formação de imagens mentais. Porém, ressalta que esse recurso deve ser utilizado como um material de apoio e que se deve tomar cuidado para que não ficar dependente dele. Para A4, o uso de um *software* de matemática tem o intuito de: *"justamente usar a ideia de você ter mais de uma maneira de visualizar o mesmo problema".* A4 considera, também, que o aluno não deva ficar preso somente na representação geométrica ou na algébrica, mas que possa transitar entre as duas. Porque: *"se ele saber transitar de um para o outro, já ajuda muito*".

4.8 Análises Finais das Sequências de Atividades

Faremos aqui uma análise geral de todas as atividades trabalhadas.

A análise da Sequência de Atividades 1 nos mostra que a dupla expressou como Imagem Conceitual de limite como um processo de aproximação. Esse limite foi apresentado aos alunos de maneira intuitiva, por meio de exploração de tabelas, conforme Tall (1981), explorando o cálculo aritmético para obtenção desse limite. Essa noção por meio de aproximação leva os alunos a formar uma ideia conceitual restrita considerando apenas o aspecto dinâmico $f(x) \rightarrow \mathrm{L}$ quando $x \rightarrow x_0$.

Por outro lado, foi utilizado o registro da língua natural para dar significado aos dados da tabela como limite de uma função *f,* assim como foram exibidas representações gráficas das funções dadas caracterizando uma conversão. Ainda, emergiram processos do PMA, como: tradução e mudança entre diferentes representações, visualização, o uso de símbolos na resolução e síntese.

Como afirma Duval (2003), quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo. Já para Dreyfus (2002), não basta ter várias representações de um conceito, é necessário mudar e interpretar essas representações, pois elas precisam estar articuladas corretamente. Nessa atividade percebemos que os alunos foram capazes de explorar os Registros de Representação Semiótica, assim como os processos do Pensamento Matemático Avançado, na resolução da Sequência, de acordo com Duval (2003), Dreyfus (2002) e Tall (200).

Discorremos agora sobre os resultados a atividade 2.

A análise da Sequência de Atividades 2 mostra que a dupla atribuiu ao significado do conceito de limite como o resultado de um processo de aproximação de $f(x)$ a um determinado ponto (TALL; VINNER, 1981, *apud* FALLAS 2016, p. 8), ou como imagem do ponto por meio da função que traduz uma concepção limitada do limite no ponto, fundamentada na igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, que é só válida apenas para as funções contínuas em $x = x_0$ (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2015, FALLAS; HENRIQUES, 2017). Esses significados descrevem as concepções informais ou espontâneas (CORNU, 1991) que ocorrem antes da aprendizagem formal desse conceito e são resultados dos conhecimentos da noção intuitiva de aproximações simultâneas $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. O significado de limite por aproximação foi proporcionado pelo *applet* 1 do GeoGebra, que foi usado como estratégia de ensino (CORNU, 2002) com base na aquisição do conceito de limite.

O resultado do desenvolvimento da Sequência de Atividades 3 nos propiciou verificar que a dupla manifestou como Imagem Conceitual, por exemplo, a concepção de um intervalo aberto, como a vizinhança de um determinado ponto, e ao reconhecer a existência de um limite tanto por aproximação, por meio do teorema dos limites laterais, quanto pelo conceito de vizinhança que foi expresso por meio da língua natural. Já a Definição Conceitual manifestada pela dupla de vizinhança é que: "para que o limite exista no ponto x_0, é necessário que exista uma vizinhança para x_0". Ficou evidenciado, segundo Soares e Cury (2017), que a dupla desenvolveu pouca linguagem matemática correta, nesse momento, ao justificarem a existência do limite por meio de uma vizinhança. A resposta, por exemplo, "$V_\varepsilon(2)$ está definida e é]0,71; 1,22[", está fundamentada de maneira incorreta.

Na análise da resolução da atividade da dupla, suspeitamos que a dupla pretendia expressar: que existia uma vizinhança definida centrada em $y_0 = 2$ de raio ε e está definida na vizinhança de]0,71; 1,22[no eixo das abscissas. Por outro lado, a atividade possibilitou envolver a dupla na construção da sua compreensão, relacionando as noções intuitiva e formal de limite, de modo a dar sentido à notação algébrica presente na definição formal de limite, isto é, a formalizar a sua compreensão informal (SWINYARD; LARSEN, 2012).

A Sequência de Atividade 4 possibilita desenvolver a capacidade de transformar o conceito de função e vizinhança em diferentes representações (numérica e gráfica). Essa capacidade foi analisada na parte 1, usando lápis e papel, em que os alunos deveriam representar graficamente uma função f e as vizinhanças em torno de L dado um ε e em torno de x_0 para um determinado δ. Essas transformações levaram em conta a realização das conversões e tratamentos entre os registros de uma função e das vizinhanças em torno de um ponto dado. Percebemos que os alunos conseguiram realizar as conversões ao obterem os gráficos da função f e das vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$ no plano cartesiano.

Na parte 2, a dupla realizou explorações e simulações dinâmicas, utilizando o *applet*, nas proximidades de L e x_0 , a fim investigar o comportamento das $V_\varepsilon(L)$ $V_\delta(x_0)$. Há evidências, com base em Fonseca (2019), de que o movimento do Controle Deslizante ε nas vizinhanças de L e a visualização dos efeitos no *applet,* quando $x \to x_0$ $f(x) \to L$, possam ter favorecido o reconhecimento dessa dupla sobre o comportamento de $f(x)$ nas vizinhanças de L quando $x \to x_0$. Em relação a aplicar a definição para $\lim_{x \to 4}(0{,}5x + 1) = 3$, essa dupla parece compreender a definição de limites com base nas vizinhanças, mas, mesmo assim, conforme a pesquisa de Soares e Cury (2017), não conseguem expressar a definição de maneira matematicamente correta. Nesse item, a dupla não conseguiu, de acordo com PMA, realizar de maneira correta o processo mudança de representações e tradução entre elas.

Quanto à Sequência de Atividades 5, na parte 1, foram sugeridas videoaulas (como material de apoio) que tratavam sobre a definição formal de limites. Na parte 2, a dupla atendeu à proposta, que era representar geometricamente no plano cartesiano o limite de uma função f utilizando as mídias lápis e papel, por meio da seguinte expressão $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 <|\ x - x_0\ |< \delta$ então $|f(x) - L|< \varepsilon$ logo $\lim_{x \to x_0} f\ (x) = L$, reconhecendo o posicionamento de todos os elementos. Por outro lado, na parte 3, a dupla reconheceu o limite de uma função f como o processo de aproximação e por uma relação entre vizinhança, apesar de apresentar uma Definição Conceitual distinta ao se referir à aproximação de $f(x)$ a L pela direita e pela esquerda. Na parte 4, os integrantes da dupla demonstraram o $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$ utilizando todos os elementos da definição formal de limite.

Ainda que a definição de limite seja considerada de difícil aprendizagem para os alunos de Cálculo, de acordo com Fonseca e Henriques (2018), os elementos que emergiram de todas as atividades desenvolvidas anteriormente indicam que diferentes representações podem potencializar a compreensão da definição formal de limites.

Por outro lado, na Sequência de Atividades 6, na parte 2, de acordo com a conversão e a mudança de diferentes representações, a dupla atendeu à proposta que era representar geometricamente no plano cartesiano o limite de uma função f utilizando as mídias lápis e papel, por meio da seguinte expressão $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 <| x - x_0 |< \delta$ então $|f(x) - L|< \varepsilon$ logo $\lim_{x \to x_0} f\ (x) = L$, reconhecendo o posicionamento de todos os elementos. Por outro lado, na parte 3, a dupla reconheceu o limite de uma função *f* como o processo de aproximação e por uma relação entre vizinhança, apesar de apresentar uma Definição Conceitual distinta, ao se referir à aproximação de $f\ (x)$ a L pela direita e pela esquerda. Na parte 4, os alunos demonstraram o $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$ utilizando todos os elementos da definição formal de limite.

A análise da Sequência de Atividades 6 mostra que a dupla utilizou o conceito de limites em diferentes situações-problema, atribuindo ao significado como resultado da relação entre as vizinhanças de $V_{(\varepsilon)}(L)$ e a $V_{(\delta)}(x_0)$ em que se $x \in V_{(\varepsilon)}(x_0) \Longrightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$ e, também, pelo processo da definição formal em que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Para Domingos (2003), Tall, Smith e Piex (2008), o uso das diferentes representações do limite presentes nas simbologias da sua definição formal pode contribuir para a compreensão dessa definição, desenvolvendo nos estudantes a capacidade de pensar arbitrariamente e de desenvolver significados adequados sobre limite.

Segundo Fonseca e Henriques (2018), fundamentados em Tall (1991), a resolução de problemas matemáticos envolve atividades criativas de formação de conjecturas e sequências, bem como modificar e testar conjecturas até ser possível produzir uma demonstração formal. Assim, para Fonseca e Henriques (2018), a aprendizagem com compreensão da definição formal de limite é evidenciada quando o aluno é capaz de mobilizar conhecimentos sobre a definição de limites e aplicá-los, por exemplos, na resolução de problemas.

A seguir, apresentaremos as considerações finais da nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa tem como meta contribuir com o processo de aprendizagem de limite de uma função de uma variável real. Para isso, foram elaboradas, implementadas e analisadas Sequências de Atividades com o uso de *applets* do GeoGebra. A aplicação das Sequências de Atividades estava prevista para ser realizada presencialmente no laboratório de Informática da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES), com alunos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil, mas, devido à Pandemia da COVID- 19, as atividades presenciais foram suspensas e substituídas por atividades remotas on-line.

Diante desse cenário, as Sequências de Atividades foram remodeladas e aplicadas por meio da Plataforma virtual *Google Meet*. Os dados coletados, referentes a uma dupla que participou efetivamente de todas as atividades, foram analisados com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e em processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA). A metodologia utilizada em nosso trabalho consiste em aspectos da Engenharia Didática, conforme proposto por Artigue *et al* (1995), segundo a qual foram organizadas as seis Sequências de Atividades sobre limite de uma função de uma variável real.

Consideramos dois aspectos fundamentais e relevantes para a elaboração das Sequências de Atividades. Primeiro, procuramos apresentar um trabalho que contribuísse com a abordagem do conceito de limite tratada nos livros didáticos para o desenvolvimento deste tema. Para isso, desenvolvemos Sequências de Atividades abordando o conceito de limite e levando em consideração problemas aplicados em situações de outras áreas de conhecimento, como mecânica. O segundo aspecto se refere ao crescente desenvolvimento dos ambientes computacionais, que possibilitam associar o estudo de limite de funções de uma variável real a *softwares* de geometria dinâmica, aqui representado por *applets* do GeoGebra, bem como dar uma outra roupagem ao tratamento tradicional relacionado às representações algébricas e gráficas do limite.

No desenvolvimento das atividades relacionadas com limites, a primeira consistia em usar lápis, papel, calculadora, régua e interpretação de dados da tabela. A partir da segunda, propomos realizar o estudo utilizando *applets* do GeoGebra, que possibilita trabalhar com duas representações distintas, simultaneamente, uma algébrica e outra gráfica, o que propicia ver o mesmo objeto de duas maneiras distintas ao mesmo tempo. Dessa maneira, o *applet* do GeoGebra permite realizar conversão entre as referidas representações, que é uma das transformações da TRRS.

Quanto ao PMA, podem ser desenvolvidos os processos de representação e tradução entre diferentes representações, os quais consistem em passar de uma representação algébrica para uma gráfica e fazer a interpretação dos dados, assim como traduzir a linguagem natural de problemas para a linguagem algébrica ou gráfica. O PMA ainda permite realizar o processo de visualização, ao movimentar o Controle Deslizante do GeoGebra e investigar de maneira dinâmica os valores de $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$, e visualizar o comportamento $f(x) \to L$ e o processo da língua natural, ao expressar a interpretação dos resultados das investigações realizadas. As sequências também propiciam emergir outros processos, como: análise, sintetização, abstração, intuição, demonstração e generalização. Assim, podemos afirmar que as Sequências de Atividades propiciaram à dupla participante transitar por uma vasta gama de processos.

Para Duval (2003), para a resolução de um problema é necessário haver uma sucessiva troca de registros, pois, como explica o autor, a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, ou seja, para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão, existem dois tipos diferentes de transformações de representação semióticas, a saber: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são caracterizados por permanecerem no mesmo sistema de escrita, enquanto as conversões mudam de sistema, mas conservam a referência aos mesmos objetos.

Como afirma Duval (2003), há uma pluralidade de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição necessária para a compreensão em matemática.

No que tange à metodologia Engenharia Didática, de acordo com Artigue *et al.* (1995), os princípios da referida metodologia devem ser compreendidos como práticas de investigação e, à medida que os conteúdos são trabalhados, estes devem ser colocados em dúvida para que os alunos tenham a noção da complexidade dos objetos estudados. Segundo Artigue *et al.* (1995), a metodologia Engenharia Didática se divide em quatro fases: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. No desenvolvimento do nosso trabalho, ficaram evidenciadas essas quatro fases da metodologia. Como destaca Artigue *et al*. (1995), na Engenharia Didática a validação é essencialmente interna, fundamentada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, o que, para ela, caracteriza como uma das originalidades da teoria considerada.

A nossa questão de pesquisa foi anunciada da seguinte maneira: *Como o desenvolvimento e a implementação de Sequências de Atividades elaboradas e centradas em processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e na Teoria dos Registros de Representação*

Semiótica (TRRS) podem contribuir para a compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas?

Para responder a essa pergunta, elaboramos quatro objetivos:

Primeiro: Identificar as representações do objeto matemático limite de função, a partir de estudos preliminares, e utilizá-las para a elaboração e análises das produções dos alunos a partir dessas atividades.

Nos estudos realizados, identificamos representações do objeto de limite, como: representação algébrica, gráfica, língua natural (verbal), numérica e simbólica.

As representações algébricas, simbólicas e linguagem natural podem ser constatadas no trabalho de Tall e Vinner (1981). As linguagens natural, gráfica e algébrica foram identificadas nos artigos de Messias e Brandemberg (2010), de Abreu e Reis (2011). Por outro lado, foram contempladas, na dissertação de Rocha (2010), as representações: gráfica, algébrica e língua natural. As representações da língua natural, algébrica, gráfica e simbólica foram constatadas no artigo de Soares e Cury (2017) e, finalmente, no artigo de Fonseca e Henriques (2018) encontramos as representações algébricas, língua natural e simbólicas.

Destacamos que esses estudos preliminares permitiram um norte para a elaboração das Sequências de Atividades pautadas nas diversas representações do limite de uma função de uma variável, como pode ser constatado na Sequência de Atividades 1, que contempla a obtenção do limite por meio de uma representação numérica (por tabelas), conforme pesquisa de Rocha (2010), e justificado por meio de linguagem natural. Nas Sequências de Atividades 2, 3, 4, 5 e 6 podem ser encontradas as representações simbólica, algébrica, numéricas, língua natural, gráfica e simbólica, que se identificam com atividades dos demais autores dos estudos preliminares.

A elaboração das Sequências de Atividades também foi contemplada com a utilização de *applets* do GeoGebra. A transição entre a representação algébrica-gráfica se deu por meio dos *applets* do GeoGeobra, assim como ao determinar as vizinhanças em torno de um ponto utilizando o Controle Deslizante ε (transitando de um valor numérico para uma representação de intervalos) e também usando lápis e papel. Para Rocha (2010), o uso de um *software*, como o GeoGebra, com seus recursos dinâmicos no coletivo pensante, podem favorecer a formulação, análise e conjecturas por meio de manipulação e experimentação, propiciando assim formas de produzir conhecimento pelos alunos. E aqui inferimos que essa produção de conhecimentos só será possível se os alunos forem capazes de apresentar interpretações e explicações claras sobre o conceito abordado.

Concluímos que este objetivo foi alcançado ao serem elaboradas as Sequências de Atividades fundamentadas nas diversas representações do limite e ao analisarmos as produções da dupla.

Segundo objetivo: Analisar o desenvolvimento de processos, intuição, abstração, visualização, sintetização, análise, simbólico, mudança de representação e tradução entre elas, generalização, assim como os construtos teóricos Imagem Conceitual e Definição Conceitual, do PMA, que emergem dos relatos dos alunos de cursos de Ciências Exatas, ao resolverem as Sequências de Atividades elaboradas com a utilização de tecnologias e de *applets* do *software* GeoGebra, bem como as transformações de representações semióticas, a conversão e o tratamento.

As Sequências de Atividades foram elaboradas fundamentadas nas diversas representações do limite e, também, de maneira que propiciasse emergir processos do PMA e as transformações da TRRS.

Sobre o processo de intuição, no início e durante as atividades, a dupla atribuiu ao conceito de limite como um processo de aproximação ao analisar dados de tabelas, na Sequência de Atividades 1, Sequência de Atividades 2, parte 5 e 6, e ao resultado da investigação, quando $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$, fundamentado na igualdade dos limites laterais. Esses resultados descrevem as concepções informais ou espontâneas do conceito de limites, conforme Cornu (2002), que ocorrem antes da definição formal desse conceito. São conhecimentos que a dupla tem relativamente da noção intuitiva de limite.

Ressaltamos que essa dupla, diferentemente dos sujeitos investigados por Messias e Brandemberg (2015), não concebe o limite como a igualdade $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Concluímos, então, que esse processo intuitivo que é apresentado no início do conceito de limites pode ser refinado, quando apresentada a definição formal de limite, corrigindo assim as lacunas deixadas por esse processo que, de certa forma, é subjetivo.

O processo de visualização, de acordo com Dreyfus (2002), é um processo pelo qual as imagens ou representações mentais ganham existência.

A visualização nesta pesquisa foi proporcionada pela análise de dados disponibilizados em tabelas, na construção gráfica apresentada pela dupla e realizada na Sequência de Atividades 1 e, por meio do *applets* do GeoGebra, nas cinco outras Sequências de Atividades. O estímulo por meio da visualização pressupunha que houvesse uma modificação nas imagens de conceito sobre limites. Desse modo, a visualização proporcionada pela utilização dos *applets* nas Sequências de Atividades teve como objetivo inicial estimular o aspecto visual, contudo parece ter contribuído para ativar outras partes da imagem do conceito de limites, como a determinação do limite de uma função utilizando o conceito de vizinhança. Foram identificados alguns vestígios que sugeriam uma ampliação do conceito de limite (maior abstração) sem ater-se exclusivamente à interpretação gráfica.

Assim, o processo de visualização proporcionado pelo uso dos *applets* apontam modificações nas Imagens Conceituais registradas durante a análise e obtidas por movimentos dinâmicos que, quando $x \to x_{0,}\ f(x) \to L$, resultaram na existência do limite pelo teorema dos limites laterais. Por outro lado, a representação gráfica do limite utilizando os elementos da definição formal pode ser observada na Sequência de Atividades 5, parte 2. Podemos afirmar que a criação de imagens mentais possibilitou à dupla organizar ideias lógicas (ou uma sequência lógica) para apresentar a demonstração do limite, como pode ser conferido na Sequência de Atividades 5, parte 4.

Com isso, acredita-se ser possível promover a compreensão do conceito de limite de uma função, como pode ser observado na produção da dupla no desenvolvimento da Sequência de Atividades 6, que envolvia situações em outros contextos. Diante disso, concluímos que a visualização promoveu a compreensão do conceito de limite proporcionada pelas Sequências de Atividades, contribuindo assim para seu enriquecimento.

As produções analisadas da dupla apresentaram características do processo de representação e mudança entre diferentes representações. Isso quer dizer que conseguiu transitar por mais de uma representação para o mesmo objeto matemático em questão- limite de uma função de uma variável. Salientamos que a dupla transitou entre as notações, da numérica para algébrica, que compõem a Sequência de Atividade 1 e ainda conseguiu traduzir os dados da tabela em representação gráfica, os dados dos gráficos em notação algébrica, ao determinar os limites das funções das notações algébricas-gráficas apresentadas pelos *applet*s da Sequência de Atividades 2, 3, 4 e 5 que compõem a nossa pesquisa.

Na atividade envolvendo problemas de situação em outro contexto, a dupla transitou com certa facilidade sobre esse processo ao traduzir os problemas da língua natural para a linguagem matemática, interpretando-os e resolvendo-os. Para Dreyfus (2002), a utilização de mais de uma representação está ligada ao processo de aprendizagem, de maneira que há uma necessidade cognitiva, ou seja, o pensamento. Como afirma o referido autor, esse processo

> [...] é reforçado quando os estudantes de matemática são capazes de colocar-se mentalmente em uma representação particular, por exemplo, uma visual. É ainda mais aumentada, quando eles são capazes de utilizar várias representações em paralelo. (DREYFUS,2002, p. 39, tradução nossa)

Concluímos que, diante das produções apresentadas e analisadas pela dupla, esse processo possa ter contribuído para a compreensão do conceito de limite.

O processo de síntese tem como objetivo juntar partes para formar um inteiro. No tocante ao conceito de limite, durante as atividades realizadas, esse processo emergiu e foi desenvolvido ao ser interpelado pela dupla, por exemplo, sobre a existência do limite de uma função ou sobre a vizinhança de um número, ou ao fazer a representação gráfica utilizando os elementos da definição formal de limite, ou ainda nas atividades em que fora solicitada a demonstração do limite. Verificamos que a dupla conseguiu reunir as ideias outrora mostradas sobre o conteúdo para que fossem respondidas a contento as solicitações das questões das Sequências de Atividades. Nesse sentido, concluímos que os participantes conseguiram organizar as ideias desde a fase inicial até formar um todo, como pode ser verificado nas produções da dupla.

O processo de análise da atividade da consciência é mais lógico. Esse processo organiza novas ideias dentro de uma forma lógica, refinando e dando precisão às deduções. Nesse caso, a ordem lógica da dupla perpassou desde os conceitos de limites laterais sobre a existência e unicidade de limites até a definição formal, o que foi observado durante a produção apresentada na Sequência de Atividades 5, parte 3 e 4, em que a dupla apresenta uma sequência lógica de ideias para apresentar a organização dos elementos da definição formal de limites (parte 3) e para uma demonstração de limite (parte 4). O que não aconteceu com os sujeitos investigados por Abreu e Reis (2011), uma vez que na atividade trabalhada era necessário identificar definições precisas de limites. E ao analisar as produções dos alunos, inferiram uma grande quantidade de respostas em branco e outras em que eles se limitaram a escrever ou reescrever a questão. Por outro lado, a dupla participante demonstrou a existência do limite por meio da definição formal e apresentou explicações elucidativas dos elementos que a compõem. Assim, concluímos que a dupla apresentou indícios que atendem ao processo de análise.

Quanto ao Processo simbólico apresentado nas produções dos alunos, percebemos que eles, ao se depararem com o objeto matemático limite de uma função, buscaram em suas mentes representações relacionadas desse objeto para que pudessem manipular suas representações no desenvolvimento das Sequências de Atividades da pesquisa. Dessa forma, a dupla apresentou símbolos que foram úteis para a resolução das atividades, como $x \to x_0^-$, estabelecendo o seu significado com uma aproximação indicada pela seta de um número por valores menores que o número dado. O símbolo *lim* é usado para representar a palavra limite. Com isso, analisamos que a dupla apresentou e atribuiu significados corretos aos símbolos durante o desenvolvimento das questões e conseguiu explicitar o conhecimento sobre o que foi abordado sobre limite em termos de símbolos.

No processo de generalização e nas produções que foram apresentadas e analisadas, verificamos que a dupla apresentou indícios desse processo ao apresentar, por exemplo, a condição de existência do limite de uma função por meio dos limites laterais, concluindo que, se os valores dos limites laterais de uma função são iguais, então o limite da função existe e é igual ao valor dos limites laterais. Ou ainda, ao estabelecer a relação entre ε e δ na determinação de existência de um limite por meio da definição formal. Na visão de Dreyfus (2002), generalizar é derivar ou induzir de particularidades, identificar semelhanças e expandir para os domínios de validade. Diante do exposto, concluímos que a dupla, dentro do que foi proposto pelas Sequências de Atividades, conseguiu atingir esse processo.

Já o processo de Abstração está relacionado com os processos de sintetização (síntese) e generalização. Percebemos que, de acordo com as abordagens das Sequências de Atividades, foi possível observar que a dupla criou estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, como a interpretação do limite de uma função de maneira intuitiva, por meio de vizinhança e por meio da definição formal, da interpretação gráfica esboçada pela dupla, quanto pelos gráficos apresentados pelos *applets* de maneira dinâmica. Dessa maneira, as Sequências de Atividades propiciaram que esse processo fosse desenvolvido.

Diante do exposto, concluímos que, de maneira geral, as Sequências de Atividades possibilitaram à dupla desenvolver os processos do PMA nas produções apresentadas.

Quanto à Imagem Conceitual, as produções analisadas da dupla proporcionaram verificar, no que concerne ao limite de uma função, que estes resultados emergiram como: a ideia de limite como sendo um valor obtido por sucessivas aproximações ou pela relação das vizinhanças $V_{(\varepsilon)}$ e $V_{(\delta)}$. Assim, nas produções analisadas e nos diálogos, foi verificado que, para a obtenção do limite de uma função, não era necessário que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nessa direção, podemos afirmar que os resultados nos permitiram evidenciar que a dupla tanto interpretou o conceito de limite de maneira estática quanto de maneira dinâmica, sem que isso causasse nenhum conflito, principalmente no ponto em que a função não estava definida, como pode ser visto no Quadro 17 do diálogo entre os participantes, na Sequência de atividades 2, parte 4, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Diferente dos sujeitos investigados por Messias e Brandemberg (2015), os quais manifestam como Imagem Conceitual o limite sendo alcançado pela função por constantes aproximações, considerando assim que o seu valor deve coincidir com o valor da função ou, por outro lado, que a existência do limite depende da continuidade da função em p.

Quanto à Definição Conceitual, observamos que não houve incoerência no desenvolvimento das atividades, por exemplo, ao analisarmos as mobilizações da produção da dupla sobre o conceito de limite de uma função, pois as respostas traziam argumentos bem próximos da definição formal de limite.

Concluímos, então, que os resultados apresentados pela dupla a respeito do conceito de limite de uma função são relevantes para a construção de Imagem Conceitual e Definição Conceitual.

As transformações, conversões e tratamentos da TRRS de Duval (2003), que também é parte integrante do objetivo desta tese, propiciou-nos analisar as produções fundamentadas nessas transformações durante o desenvolvimento das Sequências de Atividades. Também foi possível observarmos que a dupla conseguiu realizar as conversões de representação, como pode ser visto na Sequência de Atividades 1, da representação numérica para a representação algébrica e para a representação gráfica usando lápis e papel, além da representação da língua natural usada.

Nas Sequências de Atividades 2, 3 e 4, a transformação das representações foi propiciada pelo uso dos *applets* do GeoGebra. Nas Sequências 5 e 6, as conversões foram realizadas, a exemplo da primeira, usando lápis e papel. Ao analisarmos as produções dos membros da dupla, constatamos que compreenderam o que foi proposto, conseguindo transitar por distintos registros de representação interpretando e resolvendo questões que foram propostas ao longo das Sequências de Atividades. A outra transformação apontada por Duval (2003) são os tratamentos, os quais se fizeram presentes principalmente na demonstração apresentada, como na Sequência de Atividades 5, parte 4.

Concluímos que, nas análises das produções apresentadas, fica evidente a mudança das múltiplas representações, permitindo à dupla dialogar entre as representações do mesmo objeto.

Terceiro objetivo: Contribuir com a construção e desenvolvimento da compreensão sobre limites a partir da utilização de *applets* educacionais disponibilizados no site do GeoGebra.

As atividades foram construídas, com exceção da primeira, para serem exploradas usando *applets* do GeoGebra. O uso das tecnologias, como recurso facilitador, pode oportunizar o levantamento de conjecturas, como pode ser observado nos quadros de diálogos estabelecidos pela dupla, e a elaboração de conclusões a partir de um espírito participativo e colaborativo. É importante salientarmos que o uso das tecnologias para o ensino e aprendizagem de conceitos, como no estudo de limites de uma variável, propicia a compreensão e apreensão desses conceitos matemáticos em um processo que permite que o aluno interaja com o objeto em estudo.

Quarto objetivo: Analisar como os conhecimentos mobilizados pela dupla sobre esboço de gráficos, interpretação gráfica e manipulação algébrica durante a implementação das Sequências de Atividades poderão contribuir para a compreensão do conceito de limite de funções de uma variável na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior e das Tecnologias Digitais.

As produções apresentadas apontam que a dupla conseguiu interpretar dados de tabelas, dando significados aos números, conforme pode ser visto na Sequência de Atividades 1, como também associar os pares ordenados para fazer a representação gráfica utilizando o plano cartesiano. As demais atividades foram trabalhadas usando o *applet*, com exceção da Sequência de Atividade 4, na qual, por meio do Controle Deslizante do GeoGebra, a dupla realizou investigações nas vizinhanças de pontos do domínio, compreendendo que se $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$ as imagens $f(x) \to L$. Essa investigação possibilitou à dupla visualizar e compreender que, quando $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, o limite da função existe, caso contrário, o limite não existe. Determinando e reconhecendo um intervalo aberto como vizinhança, a dupla representou graficamente o limite na sua definição formal, além de apresentar uma demonstração do limite e explicar a relação dos elementos da definição formal.

Diante do exposto, podemos responder à nossa questão de pesquisa, que foi assim enunciada: *Como o desenvolvimento e a implementação de Sequências de Atividades elaboradas e centradas em processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) podem contribuir para a compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas?*

A busca de respostas para essa questão nos leva a considerar que a visualização proporcionada pelos *applets* do GeoGebra, *software* de Geometria Dinâmica, teve uma contribuição significativa para a dupla na realização das atividades propostas. Para Dreyfus (2002), a visualização cria imagens mentais que poderão ser utilizadas mais tarde em outras atividades, e isso foi percebido ao longo do desenvolvimento das Sequências de Atividades. Também apontamos que os processos do PMA, entre eles a mudança de representação e tradução entre elas, possibilitaram a interpretação de representações do objeto limite pela dupla.

Como destaca Duval (2003), o uso de diversas representações permite que os alunos obtenham uma ideia mais completa de um conceito matemático e, por aprendê-lo, requer uma abordagem que contemple essa diversidade. A originalidade da atividade matemática, para esse autor, está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registros de representação. Por outro lado, também entendemos que essas mudanças de registros de representações devem acontecer de forma articulada. Nessa perspectiva, Domingos (2003) afirma que a capacidade de reconhecer e representar o limite nas suas diferentes representações é considerada um requisito para sua compreensão, sendo as representações verbais, numéricas, algébricas e geométricas as mais consideradas no ensino.

Acreditamos que a nossa questão de pesquisa foi respondida, pois as Sequências de Atividades que foram desenvolvidas pelos alunos contemplaram sucessivas mudanças, ora proporcionadas por lápis e papel, ora por *applets,* de representação, o que, segundo Duval (2003), contribui para que haja a compreensão, no nosso caso, de limites de função por alunos de curso de Ciências Exatas. Porém, é importante lembrarmos que essas representações devem ser articuladas e explicadas.

Finalmente, pensamos que pesquisas similares à desenvolvida neste trabalho poderão ser estendidas aos cursos de Ciências Exatas de outras universidades, no que diz respeito ao Cálculo Diferencial e Integral, no conteúdo de limites de uma função de uma variável.

Esperamos que este trabalho possa contribuir com o avanço das pesquisas realizadas em Educação Matemática no Ensino Superior, particularmente, no que se refere à compreensão de limites de uma função de uma variável.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. de, REIS, F. S. Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, p. 439-459, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7098/5999 Acesso em: 10-04-2021.

ALMEIDA, M. V. de.: IGLIORI, S. C. B. Educação Matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino: aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p.718-734, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17617 Acesso em 30-04-2021.

ALMOULOUD, S.; HENRIQUES, A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. **Ciências Educação**, Bauru, V. 22, p. 465 – 487, 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf Acesso em: 29-04-2021

ANTON, H.; BIENS, L.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, França, vol 9, no 3, p. 281-308, 1988. Disponível em: http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/RDM9.3M.ArtigueIngenierieDidactique.pdf

ARTIGUE, M., DOUADY, R. MORENO, L. Ingeniería Didática em Educación Matematica. Un esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. **Grupo Editorial Iberoamérica**. Bogotá, 1995.Disponível em:https://www.researchgate.net/publication/277733635_Ingenieria_didactica_en_educacion_matematica. Acesso em: 29-04-2021.

CORNU, B. Limits. In TALL, D. (ed) **Advanced Mathematical Thinking**. Boston / Londres: Kluwer Academic Publications, p. 153 – 168, 2002.

CUNHA, S. R. e P., PINTO, F. M. M. O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de uma análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ. Revista Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 16, n.1. p.259-278, 2014.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino superior**, 387 f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) - Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003. Disponível em: http://hdl.handle.net/10362/78 Acesso 25-04-2021.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (org.). **Advanced mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25 – 41.

DUVAL, R. Registros de Representações Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003 (Coleção Papirus Educação).

DUVAL, R. The cognitive analysis of problems of comprehension. In the learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, 61, 2006, p. 103-131. Disponível em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf Acesso em: 28-04-2021

FALLAS, L. F. G. A. **Compreensão dos conceitos de limites e continuidade de uma função: um estudo com alunos do 12º ano**.156 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Instituto de Educação Universidade de Lisboa. Lisboa, 2016. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/26581 Data de acesso: 14-04-2021

FELIX, A. C. M. **Estudos dos Registros de Representação Semiótica Mediados por um Objeto de Aprendizagem**.150 f. Dissertação de mestrado: Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2014. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000191248. Acesso em 29-04-2021.

FERREIRA, R. D. **Contribuições do GeoGebra para o estudo de Funções afim e quadrática em um Curso de Licenciatura em Matemática.** 215 f. Dissertação (Mestre Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica – PUC-SP. 2013. Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10973

FONSECA, V. G.; HENRIQUES, A. Compreensão da Definição Formal: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 32, n.62, p, 1030-1049, dez. 2018. Disponível em DOI:10.1590/1980-4415v32n62a14 Data de acesso 14-04-2021

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, n.1-3, p. 111 – 133, dez. 1999.

GRAY, E.; TALL, D. Duality, ambiguity: a peoceptualview of simple arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25 (2), 115 -141, março 1994 Disponivel em: https://www.researchgate.net/publication/238663171_Duality_Ambiguity_and_Flexibility_A_Proceptual_View_of_Simple_Arithmetic acesso em: 25-05-2021.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo.** V.1. 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

KARATAS, I; GUVEN, B.; CEKMEZ, E. A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. **Bolema**, Rio Claro S.P. v. 24 – Nº 38 p.245 – 264, 2011. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291222086011.pdf Acesso em: 29-04-2021

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. V.1. 3ª Ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

MESSIAS, M. A. V. F.; BRANDEMBERG, J. C. Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. **Bolema** vol.29 nº 53 Rio Claro Dec. 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a21. Acesso 13-04-2021

NERES, R. L. **Aplicação dos Registros e Representação Semiótica no Ensino-Aprendizagem da Matemática: um estudo com alunos do sexto ano do ensino fundamental**. 196 f, Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Paulista (Campus de Marília). Marília-SP 2010. Disponível em: https://www.marilia.unesp.br/Home/Pos-Graduacao/Educacao/Dissertacoes/neres_rl_do_mar.pdf Acesso em: 29-04-2021.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 302 f. Tese (doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2001.

Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253451 Acesso em 05-05-2021

REIS, M. F. de C.T-. A pesquisa e a Produção de Conhecimentos. Universidade Paulista Júlio Mesquita Filho, **UNESP**, 2010. Disponível em https://acervodigital.unesp.br/bitstream/123456789/195/3/01d10a03.pdf Acesso em;06-05-2021

ROCHA, M. M. **Releitura do Processo de Aprendizagem de Estudantes Repetentes de Cálculo I**. 247 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória. 2016. Disponível em: http://repositorio.ufes.br/handle/10/8554 . Acesso em 06-05-2021.

SOARES, G. O, CURY, H. N. O conteúdo de Limite em curso de Licenciatura em Matemática: uma pesquisa à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática. **Revista Brasileira em Ciência e Educação Matemática** (ReBECEM), Cascavel, (PR), v.1, n.1, p. 64-83, dezembro de 2017. Disponível em http://erevista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/18557 Acesso em 13-04-2021.

SWINYARD, C; LARSEN, S. Coming to Understand the Formal Definition of Limit: insights gained from engaging students in reinvention. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston (Virginia), v. 43, n. 4, p. 465-493, jul. 2012. Disponível em http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.43.4.0465 . Acesso em 13-04-2021

TALL, D. Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus. In W. ZIMMERMANN e S. CUNNINGHAM (Org.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: MAA, 1991b. Cap. 8. Disponível em: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigour-maa.pdf. Acesso em 13-04-2021

TALL, D. O; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics** v.12, p.p. 151-169, 1981. Disponível em: http://wrap.warwick.ac.uk/507/1/WRAP_Tall_dot1981a-concept-image.pdf Acesso em 13-04-2021

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**. Cambridge: Cambridge University press, 2013.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 3 - 20.

TALL, D. Thinking thorough three Worlds of Mathematics. In: International Conference for The Psychology of Mathematics Education, 28, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings ..., Bergem**: PME, 2004, p. 281 -288.

THOMAS, G. B; WEIR, M. D; HASS, J.; GIORDANO. F.R. **Cálculo**, V.1 11ª edição. ABDR Editora Afiliada. São Paulo. Addison Wesley, 2009.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In TALL, D. (org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 65 -79.

ANEXOS

Anexo 1

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Resolução Nº196/96 do Conselho Nacional da Saúde

O presente termo, em atendimento à Resolução 196/96 do CNS, destina-se a esclarecer ao participante sobre a proposta da pesquisa **Compreensão do conceito de limites na perspectiva dos alunos do curso de Engenharia Civil utilizando o software GeoGebra**. O desenvolvimento da proposta está sob a responsabilidade do doutorando **Ronaldo Dias Ferreira** com a orientação da profa. **Dra. Celina Abar**, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. O objetivo principal da pesquisa é analisar a compreensão do conceito de limites de função, com utilização de *applets* do GeoGebra, pelos alunos de um curso de Ciências Exatas de uma universidade pública, a partir dos conhecimentos mobilizados sobre representação gráfica de funções, fatoração e manuseios algébricos, durante a implementação de Sequências de Atividades centradas na articulação das distintas representações desse objeto matemático.

Se é aluno(a) da UNIMONTES-Montes Claros e cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no curso de Engenharia Civil, convidamos você para participar desta pesquisa. Os registros da participação de cada um, nesse estudo, serão mantidos em sigilo e somente os pesquisadores responsáveis terão acesso a essas informações. Se alguma publicação resultar desse trabalho, a identificação do participante não será revelada e os resultados serão relatados de forma sumariada preservando o anonimato da pessoa A importância desta pesquisa reside na perspectiva de melhorar a aprendizagem sobre Limites por meio do GeoGebra.

Toda participação é voluntária e não há penalidades para aqueles que decidiram não participar deste estudo. Ninguém será penalizado se desistir de participar do estudo em qualquer época, podendo retirar-se da participação da pesquisa, sem correr riscos e sem prejuízo pessoal. O desenvolvimento desta pesquisa se dará entre os meses de junho a outubro de 2020. Depois de conhecer e entender os objetivos, bem como estar ciente da necessidade do uso de imagem e/ou depoimentos para fins científicos e de estudos, **AUTORIZO**, por meio do presente termo o pesquisador **Ronaldo Dias Ferreira** a coletar os dados que se fizerem necessários para este estudo, sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Montes Claros_____/____/2020

Nomecompleto:____

CPF:_______________________________________

Assinatura:_________________________________

Curso:____________________________________

Periodo:___________________________________

Anexo 2

Unimontes	**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES** **Projeto de Pesquisa Doutorado em Educação Matemática** **COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE NA PERSPECTIVA DOS ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA** **Elaboração: Ronaldo Dias Ferreira**

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NA PLATAFORMA *GOOGLE MEET*

Aluno(a): ________________________

Período: ________________________

Data: __________

Sequência de Atividades 1 - DETERMINANDO LIMITES POR MEIO DE VALORES DAS FUNÇÕES

Sequência de Atividade 1 - Parte1

Utilizando uma calculadora considere f uma função $f : \mathrm{R} \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Complete a Tabela 1 nas colunas do *x* e *f(x)* a seguir:

Tabela1: Calculando limites por estimativas

Relação entre $f(x) = x^2 + 1$ e *x*, quando *x* se aproxima de *0* pela esquerda		Relação entre $f(x) = x^2 + 1$ e *x*, quando *x* se aproxima de *0* pela direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1		1	
-0,4			
-0,2		0,2	
		0,1	
-0,01			

a) Observando as tabelas que indicam os valores de $f(x)$ para alguns valores de x, responda: para qual valor $f(x)$ se aproxima, quando os valores de x se tornam cada vez mais próximos de zero?

b) A função está definida em $x=1$? Em caso afirmativo, qual é a imagem de f quando $x=1$?

c) De acordo com a Tabela 1 qual o valor do $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esse resultado.

Sequência de Atividade 1 – Parte2

Seja $g: R-\{1\} \to R$ definida por $g(x) = \begin{cases} 4-x^2, se\ x<1 \\ x^2+2, se\ x>1 \end{cases}$. Complete a Tabela 2 nas colunas do *x* e *g(x)* a seguir:

Tabela 2: Calculando limites por estimativas

Relação entre *g(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 1 pela esquerda		Relação entre *g(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 1 pela direita	
x	$g\ (x)$	x	$g\ (x)$
0		2	
0,5		1,5	
0,88			
0,9		1,11	
		1,01	
0,9999			

a) Analisando as tabelas podemos conjecturar qual o valor do $\lim_{x\to 1} g(x) = ?$ Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esses resultados e sobre os dados disponíveis na Tabela 2.

b) A função está definida em $x=1$? Em caso afirmativo, qual é a imagem de g quando $x=1$?

c) Comparando os resultados das Tabelas 1 e 2 das questões 1 e 2, respectivamente, o que o levou a afirmar que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esses resultados.

Sequência de Atividade 1 – Parte3

Seja $h: R - \{3\} \to R$ definida por $h(x) = \begin{cases} x, se\ x < 3 \\ x + 2, se\ x > 3 \end{cases}$ preencha a Tabela 3 nas colunas do *x* e *h(x)* a seguir.

Tabela 3: Calculando limites por estimativas

Relação entre *h(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 3 pela esquerda		Relação entre *h(x)* e *x,* quando *x* se aproxima de 3 pela esquerda	
x	$h\ (x)$	x	$h\ (x)$
2		4	
2,9			
2,99		3,1	
2,999			
2,9999		3,001	
2,99999		3,0001	

a) Analisando a Tabela 3 podemos conjecturar qual o valor do $\lim_{x \to 3} h(x)$? Escreva com suas palavras sua compreensão sobre esse resultado e sobre os dados disponíveis na Tabela 3.

b) A função está definida em $x = 1$? Em caso afirmativo, qual o é a imagem de h quando $x = 1$?

Sequência de Atividade 1 – Parte 4

Seja $m : \mathrm{R} - \{3\} \to \mathrm{R}$ definida por $m(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ preencha a Tabela 4 para os valores dados de $x < 3$ e $x > 3$ e estime qual o valor do limite da função.

Tabela 4: Calculando limites por estimativas

x<3	$m(x)$	x>3	$m(x)$
2,9		3,1	
2,98		3,02	

a) Observando os valores obtidos na Tabela 4, qual é a sua estimativa para o valor do limite da função quando os valores de x se aproximam de 3?

b) A função está definida em $x = 3$? Em caso afirmativo, qual o é valor da imagem m quando $x = 3$?

Anexo 3

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES

Projeto de Pesquisa Doutorado em Educação Matemática – PUC-SP

COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE NA PERSPECTIVA DOS ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Elaboração: Ronaldo Dias Ferreira

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NA PLATAFORMA *GOOGLE MEET*

Aluno(a): ________________________

Período: ________________________

Data: __________

Sequência de Atividades 2 - Determinando limites com o auxílio do GeoGebra

Sequência de Atividades 2 - Parte1

) Dada a função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ vamos investigar o $\lim_{x \to 2} f(x)$ quando x tende ao valor 2.

Abra o *applet* e digite a lei da função como segue (copie e cole no *applet*): *x*^2 - 2*x*+1

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

a) Movimente o Controle Deslizante e responda: qual o $\lim_{x \to 2} f(x)$? Justifique (escrever no papel)!

b) Coloque o controle deslizante no valor 0 e determine o valor de *f (2)*?

c) Compare os dois resultados e escreva com suas palavras sua compreensão sobre esses resultados.

Responda em uma folha de papel, tire uma foto legível e envie para o meu e-mail.

Sequência de Atividades 2 – Parte 2

O gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, se\, x < 1 \\ 4 - x,\ se\ x \geq 1 \end{cases}$, vamos investigar o $\lim_{x \to 1} f(x)$ (limite da função quando x tende ao valor 1).

Abra o *applet* e digite a lei da função como segue (copie e cole no *applet*): Se(x<1,x^2+2,4-x)

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

a) Movimente o Controle Deslizante e responda: qual o $\lim_{x\to 1} f(x)$? justifique.

b) Coloque o Controle Deslizante no valor 0 e determine o valor $f(1)$? Compare os dois resultados e escreva com suas palavras sua compreensão sobre esses resultados.

Sequência de Atividades 2 – Parte 3

Observe a representação gráfica da função $f: R-\{1\} \to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2, \; se\, x<1 \\ x+1, \; se\; x>1 \end{cases}$

Abra o *applet* e digite a lei da função como segue (copie e cole no *applet*):

Se(x<1, x^2, Se(x>1, x+1))

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

Movimente o Controle Deslizante e responda: qual é o limite quando x tende a 1? É 1 ou 2? Dê uma interpretação do resultado encontrado.

Sequência de Atividades 2 – Parte 4

Seja $f: R \to R$ uma função definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ para } x \neq 2 \\ 1 \quad\quad\;\;, \text{ para } x=2 \end{cases}$ vamos investigar o valor do $\lim_{x\to 2} f(x)$ (limite da função $f(x)$ para x tendendo a 2).

Abra o *applet* e digite a lei da função como segue (copie e cole no *applet*):

Se(x≠2,(x^2-4)/(x-2), 1)

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

a) Movimente o Controle Deslizante e responda: qual $\lim_{x\to 2} f(x)$? Interprete o seu resultado.

b) Coloque o controle deslizante no valor 0 e determine o valor $f(2)$? Compare os dois resultados e escreva com suas palavras sua compreensão sobre os dois resultados.

Sequência de Atividades 2 – Parte 5

(THOMAS *et al*, 2010, p.74**)** Utilizando uma calculadora, seja $f : R - \{0\} \rightarrow R$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ vamos investigar o valor do $\lim_{x \to 0} f(x)$ (limite da função $f(x)$ para x tendendo a 0). Complete a Tabela na coluna *f(x)* a seguir:

Tabela: Calculando limites por estimativas

Relação entre $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ e x, quando *x* se aproxima de *0* pela esquerda		Relação entre $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ e *x,* quando *x* se aproxima de *0* pela direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0,1		0,1	
-0,0001		0,0001	
-0,0000001		0,0000005	

a) Observando a tabela, à medida que tomamos valores ainda menores de x, qual seria o valor do $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$?

Vamos investigar a função usando o *applet*: abra o *applet* e digite a lei da função como segue (copie e cole no *applet*): Se(x≠0,((sqrt(x^2+100)-10))/x^2)

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

b) Qual seria o $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$?

Sequência de Atividades 2 – Parte 6

Seja $f : R - \{2\} \rightarrow R$ definida por $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ vamos investigar o valor do $\lim_{x \to 2} f(x)$ quando *x* tende ao valor 2.

a) Complete na tabela a seguir a coluna *f(x)*:

x	$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
1.9999	
2.0001	

b) Fundamente a resposta do item (a) com o auxílio do *applet* do GeoGebra

Para isso, abra o *applet* e digite a lei da função como segue (copie e cole no *applet*):

Se(x ≠ 2, (x - 2) / (sqrt(x) - sqrt(2)))

Digite o valor para o qual se vai calcular o limite no espaço correspondente.

Movimente o Controle Deslizante e responda: qual $\lim_{x \to 2} f(x)$?

c) Compare os dois resultados e escreva com suas palavras sua compreensão sobre os 2 resultados.

Anexo 4

Unimontes	**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES** **Projeto de Pesquisa Doutorado em Educação Matemática – PUC-SP** **COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE NA PERSPECTIVA DE ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA** **Elaboração: Ronaldo Dias Ferreira**

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NA PLATAFORMA *GOOGLE MEET*

Aluno(a): ________________________

Período: _____________________________ **Data:** __________

Sequência de Atividades 3 – Estabelecendo a vizinhança de limite

Sequência de Atividades 3 - Parte1

Para medir distâncias entre números reais utilizamos o conceito de módulo (ou valor absoluto) lembrando que:

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se x} < 0 \end{cases}$$

Sejam a e b dois números reais, indicaremos a distância entre a e b, pela seguinte relação

$$\text{dist(a, b)} = |a - b|$$

Seguem alguns exemplos:

$\text{dist}(2, 3) = \lvert 2 - 3\rvert$	$\text{dist}(-4, 1) = \lvert -4 - 1\rvert$
$\text{dist}(2, 3) = \lvert -1\rvert$	$\text{dist}(-4, 1) = \lvert -5\rvert$
$\text{dist}(2, 3) = 1$	$\text{dist}(-4, 1) = 5$

Sequência de Atividades 3 - Parte 2

Com auxílio do app do GeoGebra dado no link, procure responder às questões abaixo: https://www.geogebra.org/m/k6zwt9tm

a) Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e $x_0 = 2$ é menor ou igual a 3?

Simbolicamente, para quais valores de x, $|x - 2| \leq 3$?

Descreva esse conjunto de valores.

b) Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e $x_0 = 3$ é menor do que 1?

Simbolicamente, para quais valores de x, $|x-3|<1$?

Descreva esse conjunto de valores.

c) Quais são os valores de x para os quais a distância entre x e $x_0 = -1$ é menor do que 0.5?

Simbolicamente, para quais valores de x, $|x+1|<0.5$?

Descreva esse conjunto de valores.

d) De modo geral, quando x se aproxima de x_0, o que acontece com o valor da distância entre esses dois valores?

OBSERVAÇÃO: O conjunto de valores obtido nos itens b e c é chamado de **vizinhança de um ponto**. Desse modo, dado um ponto x_0 pertencente ao conjunto dos números reais, definimos uma vizinhança desse ponto representada por $V(x_0)$ um intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$.

Podemos definir uma vizinhança ε, denotada por $V\varepsilon(x_0)$, como o intervalo aberto:

$$V_\varepsilon(x_0) =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$$

Exemplos:

Item 3b, o valor de ε=1 e então temos $V_1(3) =]2,4[$

Item 3c, o valor de ε=0.5 e então temos $V_{0.5}(-1) =]-1.5,-0.5[$

O conjunto obtido no item a) não é uma vizinhança do ponto 2, pois o conjunto de pontos para os quais a distância entre x e $x_0 = 2$ é menor ou igual a 3 é um intervalo fechado, a saber, [-1, 5].

Nas próximas atividades, vamos verificar como uma vizinhança no *contradomínio* de uma função *f* afeta a vizinhança no domínio de *f*.

Sequência de Atividades 3 – Parte3

Com auxílio do *applet* indicado no link (https://www.geogebra.org/m/p98b73tj), faça o que se pede no roteiro e responda às questões propostas:

1. Movimente o ponto A (azul) em y = 2;
2. Posicione o Controle Deslizante épsilon em 0.5;
3. Observe que foi construída uma vizinhança de y = 2 no eixo Y ou seja $V_{0.5}(2) =]1.5{,}2.5[$
4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y=2
5. Digite no campo indicado a lei de formação da sentença: **x^2 + 1**;
6. Movimente o ponto D na vizinhança de y=2

7) Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.

8) Para atualizar a tela clique em

Para responder às questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X:

a) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 2?

b) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 1.5?

c) Qual o conjunto de valores obtido no eixo X, quando movimentamos o ponto de D na vizinhança de y = 2?

d) Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de *x* = 1?

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Sequência de Atividades 3 – Parte 4

Com auxílio do *applet* indicado no link (https://www.geogebra.org/m/p98b73tj), faça o que se pede no roteiro e responda as questões propostas:

9. Movimente o ponto A (azul) em y = 1;
10. Posicione o controle deslizante épsilon em 0.5;
11. Observe que existe uma vizinhança de y=1 no eixo Y ou seja $V_{0.5}(1) =]0.5{,}1.5[$
12. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y = 1
13. Digite no campo indicado a lei de formação da sentença:

    Se(x < 1, x, x - 1);
14. Movimente o ponto D na vizinhança de y = 1
15. Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.

16. Para atualizar a tela clique em

Para responder as questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X:

a) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 1?

b) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 0.5?

c) Qual o conjunto de valores obtido no eixo X, quando movimentamos o ponto de D na vizinhança de y = 1?

d) Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de *x* = 1?

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Sequência de Atividades 3 – Parte 5

Com auxílio do *applet* indicado no link (https://www.geogebra.org/m/p98b73tj), faça o que se pede no roteiro e responda as questões indicadas:

9. Movimente o ponto A (azul) em y = 1;
10. Posicione o Controle Deslizante épsilon em 0.5;
11. Observe que existe uma vizinhança de y = 1 no eixo Y ou seja $V_{0.5}(1) =]0.5,1.5[$
12. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y = 1
13. Digite no campo indicado a lei de formação da sentença:
    Se(x < 1, x, (x - 1)² + 1);
14. Movimente o ponto D na vizinhança de y = 1
15. Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
16. Para atualizar a tela clique em

Para responder às questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X:

a) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 1?

b) Qual a abscissa aproximada do ponto D quando y = 0.5?

c) Qual o conjunto de valores obtido no eixo X, quando movimentamos o ponto de D na vizinhança de y = 1?

d) Você diria que esse conjunto é uma vizinhança de *x* = 1?

e) Observando o gráfico, seria possível indicar qual é $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Os resultados das atividades mostram que quando o limite de uma função *f existe* é possível estabelecer para uma dada vizinhança $V_\varepsilon(L)$ uma vizinhança $V(x_0)$ apropriada.

f) Nas atividades em que o limite existiu, como descreveria o conjunto obtido no valor em que o limite foi calculado? E no caso que o limite não existiu?

Anexo 5

Unimontes	**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES** **Projeto de Pesquisa Doutorado em Educação Matemática – PUC-SP** **COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE NA PERSPECTIVA DE ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA** **Elaboração: Ronaldo Dias Ferreira**

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NA PLATAFORMA *GOOGLE MEET*

Aluno(a): ____

Período: ______________________ **Data:** _____________

Sequência de Atividades 4 - Estabelecendo relações entre ε e δ com o auxílio do *applet* 3 do GeoGebra

Sequência de Atividades 4 – parte 1

Seja $f : R \to R$ definida por $f(x) = 0,5x+1$, esboçar no papel a representação gráfica de f. Essa representação gráfica servirá de apoio para as questões a seguir:

a) Seja um número real positivo $\varepsilon = 0{,}9$, considere no eixo Y o valor $L = 3$.

b) Represente graficamente a vizinhança $V_\varepsilon(L)$, e escreva o intervalo numérico correspondente.

Observe que os valores de $f(x)$, que pertencem a $V_\varepsilon(L)$, são imagens de pontos x contidos num intervalo do domínio da função f.

c) Qual o valor x_0 no qual $f(x_0) = 3$?

d) Considerando as imagens que correspondem aos extremos da vizinhança $V_\varepsilon(3)$ quais os valores dos extremos da vizinhança de $x_0 = 4$? Qual é o intervalo determinado pela vizinhança de $x_0 = 4$?

e) Qual a distância entre o extremo à direita e o valor $x_0 = 4$?

Qual a distância entre o extremo à esquerda e o valor $x_0 = 4$?

Essa distância será representada por δ .

f) As imagens dos valores do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ estão contidas no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$?

Sequência de Atividades 4 – parte 2

Abra o *applet* indicado no link https://www.geogebra.org/m/vx3utufb e digite *f (x) = 0.5x+1* e posicione o ponto A em y = 3. De acordo com os valores da tabela abaixo, movimente o Controle Deslizante ε, indicado na primeira coluna, e complete a tabela com o comportamento das vizinhanças $V_\varepsilon(L)$ e $V_\delta(x_0)$.

Valor de ε	Vizinhança $V_\varepsilon(3)$	Vizinhança $V_\delta(4)$	Valor de δ
0,5			
0,2			
0,1			
0,01			

g) É possível estabelecer uma relação matemática entre ε (o raio de $V_\varepsilon(L)$) e δ (raio de $V_\delta(x_0)$? Caso seja possível, qual seria essa relação?

h) A partir das ideias trabalhadas apresente uma definição do $\lim_{x \to 4} 0,5x + 1$ tomando como base as ideias de vizinhanças $V_\varepsilon(3)$ e $V_\delta(4)$.

Anexo 6

Unimontes	**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES** **Projeto de Pesquisa Doutorado em Educação Matemática – PUC-SP** **COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE NA PERSPECTIVA DE ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA** **Elaboração: Ronaldo Dias Ferreira**

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NA PLATAFORMA *GOOGLE MEET*

Aluno(a): ____

Período: __________________________ **Data:** _____________

Sequência de Atividades 5 – Compreensão da representação gráfica da definição do limite de uma função

Sequência de Atividades 5 – parte 1

Assista as partes 2 e 3 do vídeo no link

https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home/limits-and-continuity-calc/formal-definition-of-limits-calc/v/limit-intuition-review

Sequência de Atividades 5 – parte 2

Represente graficamente, em uma folha de papel, a definição de limite de uma função arbitrária conforme a expressão $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ logo o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Sequência de Atividades 5 – parte 3

Após desenvolver as partes 1 e 2 dessa atividade explanar o que você entende por $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Sequência de Atividades 5 – parte 4

Demonstre que $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$

Se tiver dificuldades nesta atividade veja o exemplo no vídeo do link abaixo e indique se foi necessário acessar esse vídeo.
https://www.youtube.com/watch?v=JFahdyAbUzQ

Anexo 7

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MONTES CLAROS – UNIMONTES

Projeto de Pesquisa Doutorado em Educação Matemática – PUC-SP

COMPREENSÃO DO CONCEITO DE LIMITE NA PERSPECTIVA DE ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Elaboração: Ronaldo Dias Ferreira

ATIVIDADE DESENVOLVIDA NA PLATAFORMA *GOOGLE MEET*

Aluno(a): ____

Período: __________________________ **Data:** _____________

Sequência de Atividades 6 -Aplicando o que aprendeu!

Atividade 6 - parte 1- Situação-problema: Quão próximo de $x_0 = 3$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor que 0,4 unidades de $y_0 = 5$? Qual a relação entre ε e δ ?

Com auxílio do *applet* indicado no link (https://www.geogebra.org/m/y7ccvcnz), faça o que se pede no roteiro e responda às questões propostas:

1. Movimente o ponto A (azul) em y = 5;
8. Posicione o Controle Deslizante épsilon em 0.4;
9. Observe que foi construída uma vizinhança de y=5 no eixo Y, ou seja, $V_{(0,4)}(5) =]4,6;5,4[$
10. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y=5
11. Digite no campo indicado a lei de formação $2x - 1$;
12. Clique na seta esquerda abaixo e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
13. Para atualizar a tela clique em

Para responder as questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo x;

a) Para $y = 5$ qual é o valor de x_0? Justifique algebricamente.

b) Em relação ao intervalo (rastro) no eixo X determinado pela movimentação do D nas vizinhanças de $y = 5$, você diria que x_0 é o ponto médio desse intervalo? Se sim qual seria o raio δ desse ponto médio?

c) Estabeleça uma definição para $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$

Sequência de Atividades 6 – parte 2

Situação problema- Foi solicitado a um torneiro mecânico que fabricasse um cilindro de metal de10cm de diâmetro. E foi permitida para a fabricação desse cilindro uma tolerância de erro de $\varepsilon = \pm 0,5$ cm no diâmetro. Considerando x o raio do cilindro, descreva uma função f de x que represente o diâmetro do cilindro.

Com auxílio do *applet* indicado no link (https://www.geogebra.org/m/zxvyxj5x), faça o que se pede no roteiro a seguir e responda às questões indicadas:

1. Movimente o ponto A (azul) em y = 10 (diâmetro do cilindro);
2. Posicione o controle deslizante épsilon em 0.5;
3. Observe que foi construída uma vizinhança de y=10 no eixo Y (tolerância de erro permitido), ou seja $V_{(0,5)}(10) =]9,5;10,5[$;
4. Clique no quadrado para obter o ponto D pertencente à vizinhança de y=10
5. Digite, no campo indicado a lei de formação f obtida acima;
6. Clique na seta esquerda, abaixo, e observe o rastro que a movimentação desse ponto produziu no eixo X.
7. Para atualizar a tela clique em

Para responder às questões, movimente o ponto roxo, localizado no eixo X;

a) Clique sobre o ponto roxo e faça-o pertencer à vizinhança de x_0 = 5. Qual é o raio δ da vizinhança de x_0 = 5? Justifique algebricamente sua resposta.

b) Em termos da situação problema, qual o significado da vizinhança estabelecida por ε em torno de L=10?

c) Em termos da situação- problema, o que significa a vizinhança de x_0 = 5?

d) De acordo com a situação- problema, é possível estabelecer uma relação entre ε e δ? E, se sim, qual seria?

e) O limite de f existe? Se sim, qual seria? Justifique?

Sequência Atividades 6 - parte 3- Situação-problema 3: Para a fabricação de cilindros para um determinado tipo de motor, com área da seção transversal, paralela à base, de $63,8\,cm^2$, é necessário saber qual é a margem de erro (δ) que se pode aceitar em relação ao raio ideal do cilindro, que é x_0 = 4,5 cm. Além disso, a área da seção transversal pode diferir de no máximo 0,4 cm^2 dos 63,8 cm^2.

(Obs.: A área da seção transversal de um cilindro é dada por A= πr^2 considerando π=3,141)

a) Considerando genericamente como x o raio do cilindro, descreva uma função f de x que represente a área da seção transversal em função do raio do cilindro.

b) Utilizando 3 casas decimais, considere a função f anterior e determine o intervalo de variação do raio para o qual x satisfaz a desigualdade $|f(x) - 63,8| < 0,4$. Nesse intervalo o valor menor deve ser arredondado para cima e o valor maior deve ser arredondado para baixo.

c) Você diria que $x_0 = 4{,}5$ é ponto médio desse intervalo? Justifique.

d) Calcule a diferença entre o extremo menor do intervalo e o valor 4,5. Faça o mesmo para o extremo maior do intervalo e o valor 4,5.

e) Qual dos valores do item anterior você escolheria como δ para atender a situação do problema? Justifique.