

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

DANIEL ALBERNAZ DE PAIVA BRITO

**Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do
Origami: Reflexões Teóricas e Práticas**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2021

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

DANIEL ALBERNAZ DE PAIVA BRITO

**Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do
Origami: Reflexões Teóricas e Práticas**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob orientação do Prof. Dr. Celso Ribeiro de Campos.

São Paulo

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA DESDE QUE CITADA A FONTE.

Assinatura:



Data: 21 / 07 / 2021

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

B862

Brito, Daniel Albernaz de Paiva
Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso
do Origami: Reflexões Teóricas e Práticas . / Daniel
Albernaz de Paiva Brito. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
165p. il. ; 15 cm.

Orientador: Celso Ribeiro de Campos.
Dissertação (Mestrado)-- Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós
Graduados em Educação matemática.

1. Artes Visuais. 2. Matemática. 3. Origami. 4.
BNCC do Ensino Médio. I. Campos, Celso Ribeiro de.
II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação
matemática. III. Título.

CDD

DANIEL ALBERNAZ DE PAIVA BRITO

**Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do
Origami: Reflexões Teóricas e Práticas**

Área de Concentração: Educação Matemática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob orientação do Prof. Dr. Celso Ribeiro de Campos.

Aprovado em ____ de ____ de 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Celso Ribeiro de Campos

Profa. Dra. Celina Aparecia Almeida Pereira Abar

Profa. Dra. Andréa Pavan Perin

**AGRADECIMENTO AO ÓRGÃO FINANCIADOR:
CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E
TECNOLÓGICO (CNPQ)**

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de
Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)
Processo nº 134126/2019-0

**ACKNOWLEDGMENTS TO THE FUNDING BODY:
THE BRAZILIAN NATIONAL COUNCIL FOR SCIENTIFIC AND
TECHNOLOGICAL DEVELOPMENT (CNPQ)**

This study was financed by the Brazilian National Council for
Scientific and Technological Development (CNPq)
Process nº 134126/2019-0

DEDICATÓRIA

*Á minha família,
professores e amigos,
pelo ensino
da busca e do compartilhamento
do conhecimento
como uma ferramenta de
libertação e de realização
pessoal e social.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por ter concedido o financiamento para a minha pesquisa sem o qual ela teria sido impossível.

Também agradeço a todos os membros do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) por me indicarem como merecedor do financiamento que recebi.

Além disso, agradeço do fundo do coração ao meu orientador, o Prof. Dr. Celso Ribeiro de Campos, que possibilitou que eu pudesse realizar este trabalho.

Por fim, agradeço imensamente aos membros da Banca Examinadora pelas valiosas contribuições à nossa pesquisa e à minha formação como Professor Pesquisador.

BRITO, Daniel Albernaz de Paiva. Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do Origami: Reflexões Teóricas e Práticas. [Dissertação]. São Paulo. Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2021.

RESUMO

Esta pesquisa é financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e apresenta articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami à luz do que é estabelecido pela nova Base Nacional Comum Curricular brasileira (BNCC). Para isso, faz uma Revisão de Literatura na qual seleciona um conjunto de obras com propostas de uso do Origami na Educação Matemática e as analisa em termos de quais conteúdos de Matemática elas sugerem que sejam ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo. Depois, realiza um Estudo Documental para comparar as propostas analisadas com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática e apresenta as propostas do programa *Origametria* de Israel e do Sistema NODET do Irã que se mostraram mais condizentes com esse documento. Em seguida, desenvolve uma proposta didática prática para o Ensino Médio baseada na proposta do Sistema NODET e expõe um projeto piloto de Engenharia Didática que poderá aprimorar a proposta apresentada quando ela for aplicada. Por fim faz considerações finais sobre as conclusões obtidas.

PALAVRAS-CHAVE: Artes Visuais, Matemática, Origami, BNCC, Ensino Médio

BRITO, Daniel Albernaz de Paiva. Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do Origami: Reflexões Teóricas e Práticas. [Dissertação]. São Paulo. Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2021.

ABSTRACT

This research is funded by the Brazilian National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) and presents links between Visual Arts and Mathematics with Origami in light of what is established by the new Brazilian Common National Curriculum Base (BNCC). For this, it carries out a Literature Review in which it selects a set of works with proposals for the use of Origami in Mathematics Education and analyzes them in terms of which Mathematics contents they suggest that can be taught with Origami, for which students and in which ways. Afterwards, it carries out a Documentary Study to compare the analyzed proposals with what is established by the BNCC for Visual Arts and Mathematics, and presents the proposals of the Israel's *Origametria* program and of the Iran's NODET System that proved to be more consistent with this document. Then, it develops a practical didactic proposal for High School based on the proposal of the Iran's NODET System and exposes a pilot project of a Didactic Engineering that can improve the proposal presented when it is applied. Finally, it makes final considerations on the conclusions reached.

KEYWORDS: Visual Arts, Mathematics, Origami, BNCC, High School

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Imagens de padrões da arte árabe.....	104
Figura 2 - Padrões autossimilares e fractais na Natureza.....	104
Figura 3 - O <i>Triângulo de Sierpinski</i> e os padrões que o caracterizam sobrepostos a primeira imagem da arte árabe apresentada na Figura 1.....	108
Figura 4 - O <i>Floco de Neve de Koch</i> e os padrões que o caracterizam sobrepostos a segunda imagem da arte árabe apresentada na Figura 1.....	112
Figura 5 - Progressão do número dos segmentos no <i>Floco de Neve de Koch</i>	113
Figura 6 - Imagem da segunda arte árabe apresentada na Figura 1 e exploração das relações funcionais entre os seus pontos e linhas em um plano cartesiano.....	115
Figura 7 - Etapas para a realização do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com 4 níveis.....	117
Figura 8 - Análise visual do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com 5 níveis.....	120
Figura 9 - Análise visual das marcas deixada no papel quadrado pela dobradura do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com vários níveis.....	120
Figura 10 - Perfil do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com 5 níveis em um plano cartesiano.....	121
Figura 11 - Análise visual do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com 5 níveis em um plano cartesiano.....	124
Figura 12 - Rotação e diminuição dos triângulos que compõem a <i>Onda Autossimilar</i> com 5 níveis em um plano cartesiano.....	125
Figura 13 - Marcas deixada no papel quadrado pela dobradura do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com vários níveis em um plano cartesiano.....	126
Figura 14 - Análise visual das marcas deixada no papel quadrado pela dobradura do Origami <i>Onda Autossimilar</i> com vários níveis em um plano cartesiano.....	126
Figura 15 - Segunda dobra do Origami <i>Onda Autossimilar</i> e o início das repetições autossimilares dos triângulos dos quais ele é formado.....	127
Figura 16 - Segunda dobra do Origami <i>Onda Autossimilar</i> e o início das repetições autossimilares dos quadrados que sua dobradura marca no papel.....	128
Figura 17 - Segunda dobra do Origami <i>Onda Autossimilar</i> e indicação do fator de encolhimentos dos seus triângulos e quadrados como sendo $1 - y$	129

Figura 18 - Segunda dobra do Origami <i>Onda Autossimilar</i> e encontro do valor do fator de encolhimentos dos seus triângulos e quadrados indicado por meio de trigonometria.....	130
Figura 19 - Figura a ser nomeada na atividade de figura 1 com as etapas para a realização do Origami <i>Onda</i>	127
Figura 20 - Figura a ser nomeada na atividade de figura 2 com a indicação da segunda etapa do Origami <i>Onda</i> e o início das repetições dos triângulos dos quais ele é formado.....	148
Figura 21 - Figura a ser nomeada na atividade de figura 3 com a indicação da segunda etapa do Origami <i>Onda</i> e o início das repetições dos quadrados que sua dobradura marca no papel.....	149
Figura 22 - Figura a ser nomeada na atividade de imagem 4 indicando a convergência das formas do Origami para um ponto do gráfico.....	151
Figura 23 - Figura a ser nomeada na atividade de imagem 5 indicando o padrão de marcas que a realização do Origami <i>Onda</i> deixa no papel e algumas relações trigonométricas visíveis na terceira etapa da sua realização.....	152

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Simbologia, relativamente universal, que funciona como instruções para as dobraduras de Origamis.....	30
Quadro 2 - Propostas de como um professor de Artes Visuais poderia utilizar a <i>torre</i> de Origami para ajudar um professor de Matemática a relacionar a Geometria Fractal e outros conteúdos de Matemática com alguns dos TCT.....	34
Quadro 3 - Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves nos arquivos de revistas científicas consultados.....	39
Quadro 4 - Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves nos Repositórios de Dissertações e Teses consultados.....	39
Quadro 5 - Número de publicações encontradas especificamente sobre o uso do Origami no Ensino de Matemática nos arquivos de revistas científicas consultados.....	40
Quadro 6 - Número de publicações encontradas especificamente sobre o uso do Origami no Ensino de Matemática nos Repositórios de Dissertações e Teses consultados.....	41
Quadro 7 - Quais conteúdos e habilidades de Matemática os autores das publicações selecionadas propõem que sejam ensinados com o Origami.....	45
Quadro 8 - Para quais alunos os autores das publicações selecionadas propõem que o Origami seja usado no ensino de Matemática.....	48
Quadro 9 - De qual modo os autores das publicações selecionadas propõem que o Origami seja usado no ensino de Matemática.....	49
Quadro 10 - Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para o ensino de habilidades em Matemática e Geometria.....	51
Quadro 11 - Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para o ensino de diferentes objetos matemáticos e de outras disciplinas.....	53
Quadro 12 - Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami relacionadas ao ensino de vários alunos diferentes.....	54
Quadro 13 - Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para ilustrar ou revelar objetos matemáticos para os alunos.....	56
Quadro 14 - Sumário das articulações sugeridas entre Artes Visuais e Matemática com o Origami relacionadas a quais conteúdos podem ser ensinados, para quais alunos e de que modo.....	57
Quadro 15 - Congruências Gerais identificadas entre a proposta do <i>Origametria</i> e a BNC.....	66

Quadro 16 - Níveis do modelo de van Hiele e suas correspondências nas etapas do Programa <i>Origametria</i>	70
Quadro 17 - Etapas do curso de formação de professores para ministrarem o Programa <i>Origametria</i>	72
Quadro 18 - Sequência de aula a ser seguida pelo professor do <i>Origametria</i>	73
Quadro 19 - Estratégia didática das aulas do <i>Origametria</i> : princípios que os professores devem seguir em suas relações com os alunos.....	74
Quadro 20 - Sequência de realização do Origami <i>pato chinês tradicional</i> com perguntas direcionadas para alunos no nível visual ou no nível analítico do modelo de van Hiele.....	76
Quadro 21 - Congruências Gerais identificadas entre a proposta do Sistema NODET e a BNCC.....	81
Quadro 22 - Momentos de enriquecimento pessoal para os alunos do modelo <i>Schoolwide Enrichment Model</i> no uso do Origami pelo Sistema NODET.....	84
Quadro 23 - Etapas para a formação de professores na unidade sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET.....	86
Quadro 24 - Sequência das aulas da unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET.....	87
Quadro 25 - Diretrizes do <i>Schoolwide Enrichment Model</i> seguida pelas aulas da unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET.....	89
Quadro 26 - Sequência da realização do desafio de Origami <i>pirâmide fractal</i> com o <i>Sierpinski's Qube</i>	91
Quadro 27 - Congruências Específicas identificadas entre a proposta do Sistema NODET e a BNCC.....	95
Quadro 28 - Sumário da nossa proposta didática prática de contribuição que um professor de Artes Visuais pode dar para a Educação Matemática com o Origami.....	100
Quadro 29 - Momentos de interação dos quais se compõem a nossa proposta e as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas.....	102
Quadro 30 - Resultados da atividade com os triângulos equiláteros.....	109
Quadro 31 - Resultado da Atividade.....	114
Quadro 32 - Hipóteses que levantamos e abordagens que adotamos.....	142
Quadro 33 - As três fases da situação didática que intentamos proporcionar.....	143

Quadro 34 - Dados que intentamos coletar na Engenharia por meio de um questionário.....143

Quadro 35 - Quadro a ser nomeado na atividade como Quadro 1 contendo um breve texto sobre os fractais..... 144

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BNCC - Base Nacional Curricular Comum

CNE - Conselho Nacional de Educação

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

IOC - Israeli Origami Center - IOC

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação

NODET - National Organization for Development of Exceptional Talents

OSME - International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNE - Plano Nacional de Educação

TCT - Temas Contemporâneos Transversais

SUMÁRIO

1 Introdução.....	20
1.1 Relevância e justificativas.....	21
1.1.1 Relevância e Justificativas baseadas em dispositivos legais.....	21
a) Por proporcionar a Interdisciplinaridade proposta pela BNCC.....	21
b) Por proporcionar o tratamento dos Temas Contemporâneos Transversais proposto pela BNCC.....	24
1.1.2 Relevância e Justificativas de conteúdo.....	26
a) Por entendermos que a Matemática pode se beneficiar da linguagem das Artes Visuais no ensino e no aprendizado dos seus objetos.....	26
b) Por conta da aproximação do Origami com a Matemática e a Geometria.....	27
c) Pela aproximação do Origami com a Geometria nos Fractais.....	32
1.2 Etapas de pesquisa.....	35
1.3 Estrutura da pesquisa.....	36
2 Levantamento Bibliográfico.....	37
3 Revisão Bibliográfica e das articulações entre Artes Visuais e Matemática com o Origami à luz da BNCC.....	44
3.1 Revisão Bibliográfica.....	44
3.2 Articulações sugeridas pelos autores das publicações analisadas.....	50
3.2.1 Quanto aos conteúdos que podem ser ensinados com o Origami.....	50
3.2.2 Quanto à para quais alunos o Origami pode ser usado.....	53
3.2.3 Quanto aos modos pelos quais o Origami pode ser usado.....	55

3.2.4 Sumário das sugestões encontradas.....	57
3.3 Comparação das sugestões encontradas com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática.....	59
3.3.1 Comparação com o que é estabelecido para o Ensino Infantil.....	59
3.3.2 Comparação com o que é estabelecido para o Ensino Fundamental.....	60
3.3.3 Comparação com o que é estabelecido pela BNCC para o Ensino Médio.....	62
3.3.4 As propostas de Uso do Origami na Educação Matemática que foram escolhidas para serem analisadas no próximo capítulo.....	64
4 As propostas de uso do Origami na Educação Matemática que selecionamos.....	65
4.1 O Programa <i>Origametria</i> à luz do que é estabelecido pela BNCC.....	66
4.1.1 Do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhe servem de base.....	69
4.1.2 Do ponto de vista da formação dos seus professores.....	71
4.1.3 Do ponto de vista da elaboração das suas aulas.....	72
4.1.4 Do ponto de vista da sua estratégia didática.....	74
4.1.5 Do ponto de vista do exemplo de uma das atividades realizadas com os alunos.....	76
4.2 A Proposta de uso do Origami na Educação Matemática do Sistema NODET à luz do que é estabelecido pela BNCC.....	80
4.2.1 Do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhe servem de base.....	84
4.2.2 Do ponto de vista da formação dos seus professores.....	86
4.2.3 Do ponto de vista da elaboração das suas aulas.....	87
4.2.4 Do ponto de vista da sua estratégia didática.....	89
4.2.5 Do ponto de vista do exemplo de uma das atividades realizadas com os alunos.....	90
4.3 Conclusões sobre qual proposta escolhemos.....	99

5 Proposta Didática.....	100
5.1 Momento I: Introdução aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por meio da linguagem das Artes Visuais e da Matemática integrada ao trabalho com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas.....	102
5.1.1 Professor de Artes Visuais.....	102
5.1.2 Professor de Matemática.....	105
a) <i>Atividade com o Fractal Triângulo de Sierpinski.....</i>	<i>107</i>
b) <i>Atividades com o Fractal Curva de Koch elaborado na forma do Floco de Neve de Koch.....</i>	<i>110</i>
c) <i>Atividade envolvendo Funções Polinomiais.....</i>	<i>115</i>
5.2.1 Momento II: Etapa 1: Desafio de Origami relacionado aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais integrado ao trabalho com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas.....	116
5.2.1.1 Professor de Artes Visuais.....	116
5.2.1.2 Professor de Matemática.....	118
5.2.2 Momento II: Etapa 2: Análise Visual e Matemática do Origami realizado integradas ao trabalho com os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas.....	119
5.2.2.1 Professor de Artes Visuais.....	119
5.2.2.2 Professor de Matemática.....	121
a) <i>Abordagem com funções polinomiais.....</i>	<i>122</i>
b) <i>Abordagem com transformações afins.....</i>	<i>123</i>
6 Projeto Piloto de Engenharia Didática.....	133
6.1 Introdução.....	134
6.2 Análises Preliminares.....	135
a) <i>Análise Epistemológica.....</i>	<i>135</i>
b) <i>Inserção nos Currículos.....</i>	<i>137</i>
c) <i>Análise Didática: eleição do problema didático que será trabalhado..</i>	<i>139</i>

d) Hipóteses levantadas.....	140
6.3 Design e Análise a Priori.....	142
a) Fase de Ação: tempo proposto: 20 minutos.....	144
b) Fase de Comunicação: tempo proposto: 20 minutos.....	153
c) Fase de validação: tempo proposto: 40 minutos.....	153
7 Considerações Finais.....	155
Referências Bibliográficas.....	157

Interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do Origami: Reflexões Teóricas e Práticas.

Daniel Albernaz de Paiva Brito

1 Introdução

A nossa pesquisa tece reflexões teóricas e práticas a respeito da interface entre Artes Visuais e Matemática no uso do Origami.

Eu sou licenciado em Artes Visuais e, durante a minha preparação para ser professor, percebi que a arte do Origami poderia ser de grande utilidade para a Educação Matemática, mas constatei que havia poucos estudos a respeito do tema.

Com base nessa constatação, apoiado por uma bolsa de estudos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) para realizar esta pesquisa de Mestrado sobre o uso do Origami na Educação Matemática.

Junto com o meu orientador, o Prof. Dr. Celso Ribeiro de Campos, determinamos que o tema da nossa pesquisa são as articulações possíveis entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami à luz do que é estabelecido pela nova Base Nacional Comum Curricular brasileira (BNCC) e trabalhamos com o problema de pesquisa, a questão de pesquisa, o objetivo geral de pesquisa e a metodologia descritos a seguir.

Como problema de pesquisa e questão de pesquisa, investigamos que articulações são possíveis entre Artes Visuais e Matemática com o Origami à luz do que é estabelecido pela BNCC para essas disciplinas

Como objetivo geral de pesquisa, vamos averiguar quais articulações são essas e as utilizamos como base para propor uma abordagem didática prática com base no que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática no Ensino Médio.

Por fim, no que diz respeito aos procedimentos metodológicos do nosso trabalho, realizamos uma pesquisa qualitativa de cunho teórico com Análise Bibliográfica e Documental junto com um esboço de uma Engenharia Didática que expomos como um projeto piloto para aprimorar a proposta que apresentamos quando pudermos ter a oportunidade de aplicá-la.

Nos itens a seguir, apresentamos a relevância e as justificativas dessas nossas decisões e as etapas e os capítulos nos quais realizamos e dividimos este relatório.

1.1 Relevância e Justificativas

1.1.1 Relevância e Justificativas baseadas em dispositivos legais

a) Por proporcionar a Interdisciplinaridade proposta pela BNCC

Em primeiro lugar, consideramos relevante e decidimos pesquisar articulações entre as Artes Visuais e a Matemática, devido à BNCC tornar obrigatório o tratamento interdisciplinar dos componentes curriculares com base na Constituição Federal e em diversas Leis nacionais e por entendermos ser importante buscar cumprir essas determinações legais.

A obrigatoriedade do tratamento interdisciplinar dos componentes curriculares estabelecida pela BNCC se fundamenta na Constituição Federal Brasileira de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases para a Educação (LDB) de 1996, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) publicados entre 1997 e 1999, e no Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014.

De acordo com a Constituição, a educação é um direito social, o seu objetivo deve ser o pleno desenvolvimento da pessoa para o exercício da cidadania e para a atuação profissional e somente o Congresso Nacional pode legislar sobre as diretrizes e bases da educação. (Brasil 1988 Art. 6 caput e Art. 22 inciso XXIV)

Com base nessas determinações constitucionais, o Congresso Nacional promulgou a LDB de 1996 que fortalece a idéia de que o objetivo da educação deve ser o pleno desenvolvimento da pessoa, estabelece conteúdos curriculares mínimos e abre a possibilidade para que o Ministério da Educação realize a expedição de diretrizes e normas a respeito do seu cumprimento. (Brasil 1996 Art. 1º caput e §2º e Art. 26 caput e §1º, §2º, §3º e §4º)

Tendo em vista cumprir as determinações da Constituição e da LDB, o Ministério da Educação expediu os PCN (Brasil, 1997) como orientações a serem seguidas por todas as escolas do país, as quais favorecem a interdisciplinaridade, e, mais tarde, com base no PNE (Brasil, 2014, anexo 3.1) e na resolução normativa do Conselho Nacional de Educação nº2 de 2017 (Brasil, 2017a)¹, a BNCC (Brasil, 2017b)², que orienta, entre outras coisas, o tratamento interdisciplinar dos componentes curriculares.³

¹ É importante apontar que é essa resolução normativa que dá força de lei para a BNCC.

² Cumpre observar que, embora as partes da BNCC referentes ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio tenham sido publicadas separadas, entre 2017 e 2018, nesta pesquisa, elas são referenciadas como um único documento da forma como são apresentadas no portal do MEC <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>> acesso em 04/06/2021.

³ Para uma breve história sobre o processo de elaboração da BNCC, vide <<http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>> acesso em 04/06/2021.

Sendo assim, como apontam Mittitier e Lourençon (2017), a interdisciplinaridade, que foi favorecida pelos PCN, foi alçada a um princípio metodológico pela BNCC, e se tornou obrigatória na elaboração dos currículos e propostas pedagógicas em âmbito nacional.

Como aponta Garcia (2008), nos PCN, o tratamento interdisciplinar dos componentes curriculares é favorecido por meio de diversas propostas difusas apresentadas com nomes cujo significado remete ao que é reconhecido na academia por interdisciplinaridade como, por exemplo, modo de articular conteúdos, forma de contribuição entre as disciplinas, forma de organizar as disciplinas em projetos, perspectiva de reorganização curricular, instrumento para articular conhecimentos e processo de integração das disciplinas.

Sendo assim, como aponta o mesmo autor (Garcia, 2008), os PCN apresentam uma grande diversidade de possíveis tratamentos teóricos para a interdisciplinaridade e tornam possível que ela seja interpretada de forma bastante restrita, como a necessidade das disciplinas escolares estabelecerem algum tipo de contato entre elas, ou de forma bastante ampla, como a necessidade de uma revisão da segmentação dos currículos em disciplinas separadas.

Já com a BNCC, como apontam Mittitier e Lourençon (2017), a interdisciplinaridade é para ser claramente interpretada de forma ampla e se torna um princípio articulador do processo de ensino e de aprendizagem com o objetivo de que seja superada a fragmentação dos conteúdos e de que as disciplinas se apresentem em constante processo de inter-relacionamento e mútua contribuição.

Dessa forma, a BNCC obriga que os componentes curriculares nela reconhecidos se apresentem em amplo e constante processo de inter-relação e deixa para as escolas a necessidade de refletirem sobre como eles serão tratados e sobre como estabelecerão essas constantes inter-relações.

Em relação aos componentes curriculares reconhecidos pela BNCC, cumpre ressaltar que eles são os mesmos conteúdos curriculares mínimos estabelecidos pela LDB, mas arranjos em áreas do conhecimento com o objetivo de induzir e facilitar que as escolas reflitam sobre suas possíveis articulações e inter-relações.

Na LDB (Brasil, 1997, §1º, §2º, §3º e §4º do Art. 26), são reconhecidos os seguintes componentes curriculares mínimos sem que sejam sugeridos arranjos entre eles: língua portuguesa; matemática; conhecimento do mundo físico e natural; conhecimento da realidade social e política, principalmente do Brasil; artes, composta das seguintes quatro linguagens, principalmente em suas expressões regionais: artes visuais, dança, música e teatro; educação física e história do Brasil.

Já na BNCC, exceto em relação ao Ensino Infantil no qual eles são arranjados em cinco campos de experiência (BNCC, 2017b), os componentes curriculares são arranjados em áreas do conhecimento que possibilitam que as escolas os trabalhem como disciplinas separadas, mas que as induz a refletir sobre suas possíveis inter-relações.

Por exemplo, para o Ensino Fundamental, a BNCC (2017b) arranja os componentes curriculares em cinco áreas do conhecimento que sugerem a reflexão sobre suas possíveis inter-relações, ao menos entre os que são compreendidos por cada área: 1) Linguagens, que compreende a Língua Portuguesa, as Artes, e a Educação Física; 2) Matemática; 3) Ciências da Natureza; 4) Ciências Humanas, que compreende Geografia e História; e 5) Ensino Religioso.

Já para o Ensino Médio, a BNCC (2017b) arranja os componentes curriculares em somente quatro áreas do conhecimento denominadas de itinerários formativos, o que sugere que as suas inter-relações estabelecidas no Ensino Fundamental devem progredir e se aprofundar no Ensino Médio: 1) Linguagens e suas Tecnologias; 2) Matemática e suas Tecnologias; 3) Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e 4) Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Sendo assim, a BNCC apresenta para as escolas o desafio de implementarem relações entre todos os componentes curriculares, sejam eles compreendidos ou não por uma mesma área do conhecimento, e de fazerem com que os seus currículos e propostas pedagógicas compreendam inter-relações entre componentes como as Artes e a Matemática que sejam ricas em experiências de ensino e de aprendizado para os alunos.

Dessa forma, concordamos com Garcia (2008) quando assevera que a investigação acadêmica é fundamental diante do desafio de se implementar a interdisciplinaridade na Educação Básica, como proposta pela BNCC, e que são necessárias pesquisas que ajudem a torná-la exequível.

Com base em todo o exposto, consideramos relevante e decidimos pesquisar sobre as articulações entre as Artes Visuais e a Matemática por acreditarmos nas propostas dessas determinações constitucionais e legais e por entendermos ser importante contribuir para que elas sejam cumpridas.

b) Por proporcionar o tratamento dos Temas Contemporâneos Transversais proposto pela BNCC

Em segundo lugar, consideramos relevante e decidimos pesquisar articulações entre as Artes Visuais e a Matemática devido à BNCC tornar obrigatório o tratamento intra, inter e trans-disciplinar dos chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCT) e por entendermos que as Artes Visuais e a Matemática podem se unir para cumprir essas determinações.

A obrigatoriedade do tratamento intra, inter e trans-disciplinar dos TCT pelos componentes curriculares estabelecida pela BNCC também se fundamenta na Constituição Federal Brasileira de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1996, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) publicados entre 1997 e 1999, e no Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014.

Tendo em vista cumprir as determinações da Constituição e da LDB, o Ministério da Educação expediu os PCN (Brasil, 1997), o parecer do Conselho Nacional de Educação (CNE) nº7 (Brasil, 2010), e, mais tarde, com base no PNE (Brasil, 2014, Art. 1º incisos III, V e VII e Art. 6º §4º) e na resolução normativa do Conselho Nacional de Educação nº2 (Brasil, 2017a), a BNCC (Brasil, 2017b), que favorecem e tornam obrigatório que todos os componentes curriculares tratem de forma intra, inter e trans-disciplinar de temas considerados socialmente relevantes e transversais a todos eles denominados de TCT.

Como aponta o guia que foi publicado pelo MEC para orientar a implementação da BNCC e que trata do contexto histórico e dos fundamentos pedagógicos dos TCT (Brasil, 2019), o conceito de transversalidade foi primeiro tratado pelas orientações do parecer nº 7 do CNE (Brasil 2010) que foram recepcionadas pelos PCN.

De acordo com este Parecer (Brasil, 2010, Art. 16, caput e p.º2), os componentes curriculares devem articular aos seus conteúdos a abordagem de temas abrangentes e contemporâneos que afetem a vida humana em escala global, regional, local e individual, e conceituá-los como transversais constitui uma forma de propor essa articulação.⁴

Com base nessas orientações, os PCN (Brasil, 1997, Vol 8) reconhecem os seguintes seis temas como transversais a todos os componentes curriculares: 1) saúde; 2) ética; 3) orientação sexual; 4) pluralidade cultural; 5) meio ambiente; e 6) trabalho e consumo.

Além disso, como aponta o mesmo guia supracitado (Brasil, 2019b) de implementação da BNCC, os PCN orientam que o tratamento desses temas deve ser intra, inter e trans-disciplinar, o que significa que eles devem ser tratados pelos componentes curriculares de forma integrada aos seus conteúdos com as suas metodologias próprias, em interações entre os

⁴ Para as resoluções do CNE que tratam de cada um desses temas, vide Brasil (2019 p. 10).

componentes e em interações entre os componentes que levem em conta a dinâmica social e cotidiana dos contextos das escolas e dos alunos.

Com base nisso e no PNE, a BNCC (Brasil, 2017) reconhece que os conhecimentos científicos devem ser trabalhados de maneira alinhada à vida social e cidadã dos estudantes e estabelece que todos os componentes curriculares devem tratar de forma intra, inter e trans-disciplinar de quinze temas contemporâneos transversais agrupados nas seguintes seis macro temáticas: 1) Meio Ambiente: educação ambiental e educação para o consumo; 2) Economia: trabalho, educação financeira e educação fiscal; 3) Saúde: educação alimentar e nutricional; 4) Cidadania e Civismo: vida familiar e social, educação para o trânsito, educação em direitos humanos, direito das crianças e do adolescente, processo de envelhecimento e respeito e valorização do idoso; 5) Multiculturalismo: diversidade cultural, educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras; e 6) Ciências e Tecnologia.⁵

Dessa forma, de acordo com a BNCC, todos esses temas devem ser tratados intra-disciplinarmente, em cada um dos componentes curriculares; inter-disciplinarmente, em inter-relações entre componentes curriculares de uma mesma área e de áreas diferentes; e trans-disciplinarmente, em inter-relações entre os componentes de todas as áreas que levem em conta as dinâmicas sociais das escolas e dos alunos envolvidos.

Sendo assim, a BNCC apresenta para as escolas o desafio de implementarem o tratamento intra, inter e trans-disciplinar dos TCT entre todos os componentes curriculares como as Artes e a Matemática de modo a proporcionar aos alunos que eles se envolvam com questões socialmente relevantes em relações de ensino e de aprendizagem que levem em conta as suas realidades sociais.

Com base nisso, entendemos que as Artes Visuais e a Matemática podem se unir nessa tarefa, particularmente por meio do Origami, como defenderemos no item 1.3, quando justificamos nossa escolha por utilizarmos essa arte em específico e apresentamos alguns exemplos de como ela pode ser utilizada para abordar os TCT.

⁵É importante destacar que diversos desses quinze temas agrupados nessas seis temáticas foram tratados em leis específicas que, inclusive, apontam para a necessidade de sua integração nos currículos escolares. Entre esses temas, destacam-se: direitos da criança e do adolescente (Lei nº 8.069/1990); educação para o trânsito (Lei nº 9.503/1997); educação ambiental (Lei nº 9.795/1999, Parecer CNE/CP nº 14/2012 e Resolução CNE/CP nº 2/2012); educação alimentar e nutricional (Lei nº 11.947/2009); processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso (Lei nº 10.741/2003); educação em direitos humanos (Decreto nº 7.037/2009, Parecer CNE/CP nº 8/2012 e Resolução CNE/CP nº 1/2012); educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena (Leis nº 10.639/2003 e 11.645/2008, Parecer CNE/CP nº 3/2004 e Resolução CNE/CP nº 1/2004); bem como saúde, vida familiar e social, educação para o consumo, educação financeira e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural (Parecer CNE/CEB nº 11/2010 e Resolução CNE/CEB nº 7/2010).

1. 1. 2 Relevância e Justificativas de conteúdo

a) Por entendermos que a Matemática pode se beneficiar da linguagem das Artes Visuais no ensino e no aprendizado dos seus objetos

Em terceiro lugar, consideramos relevante e decidimos pesquisar articulações entre as Artes Visuais e a Matemática por entendermos que a Matemática pode se beneficiar da linguagem das Artes Visuais para encontrar expressões⁶ para os seus objetos que tornem o seu ensino e o seu aprendizado mais acessível e significativo para os alunos.

De acordo com Huntley (1970) e Bradshaw (2004), a Matemática é uma linguagem cujos objetos derivam das dinâmicas do mundo real, mas na qual eles ganham uma vida própria que pode torná-los distantes da realidade e difíceis de serem apreendidos se eles não forem reaproximados das experiências de quem os está estudando.⁷

Sendo assim, esses mesmos autores indicam que o aprendizado de Matemática depende de os professores reaproximarem os objetos matemáticos das experiências dos alunos e sugerem que isso seja feito por meio do encontro de suas possíveis expressões na linguagem das Artes Visuais.

Dessa forma, esses autores concordam com Donis (2007) e Vassoughiam (2011) sobre a linguagem das Artes Visuais ser uma linguagem intuitiva com a qual podem ser encontradas expressões para os objetos das ciências que facilitem o seu aprendizado.

De acordo com Donis (2007), a linguagem das Artes Visuais é de grande efetividade no ensino e na aprendizagem por ser a linguagem a partir da qual as outras têm o seu ponto de partida e por permitir uma máxima aproximação entre os sujeitos que estão aprendendo e os objetos que estão sendo ensinados.

Confirmando Donis, como apresenta Vassaughian (2011), ao desenvolver uma linguagem universal, o estudioso da linguagem dos símbolos, Otto Neurath, averiguou que o

⁶ É importante ressaltar que entendemos que os objetos matemáticos são entidades independentes que podem apresentar diferentes representações na linguagem matemática e que utilizamos a palavra expressões para nos referirmos as suas possíveis manifestações na linguagem das Artes Visuais. Como aponta Duval (2009 p. 14), consideramos que é essencial jamais confundir os objetos matemáticos (como os números, as funções e as retas) com as suas representações na linguagem matemática (como as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos e os traçados de figuras) e muito menos com o que estamos denominando de expressões de objetos matemáticos na linguagem das Artes Visuais.

⁷ Exemplo de autores que buscam aproximar os objetos da Matemática das experiências dos alunos por meio do encontro de suas possível expressões na linguagem das Artes e em diversas outras linguagens e experiências cotidianas são Kasner e Newman (2001).

ensino e o aprendizado dos objetos das ciências se torna mais acessível e significativo quando são exploradas as possíveis expressões desses objetos na linguagem das Artes Visuais.

Além disso, de acordo com Barbosa (1998), a linguagem das Artes Visuais pode aprofundar a compreensão dos objetos das ciências por transmitir significados que não podem ser transmitidos por suas linguagem específicas ou por qualquer outro tipo de linguagem, tais como as linguagens discursiva ou a da Matemática.

Em consonância com essas afirmações de Barbosa (op. cit.), Zamboni (2012) assevera que a linguagem das Artes Visuais possibilita o entendimento de certos aspectos da realidade que não são apreendidos pelas linguagens das ciências e que a linguagem das Artes Visuais e as linguagens das ciências devem ser associadas para que seja possível um entendimento mais completo e mais profundo dos objetos das ciências e de suas realidades.

Com base em todos esses argumentos, consideramos que um professor de Artes Visuais pode contribuir para a Educação Matemática por entendermos que a Matemática pode se beneficiar da linguagem das Artes Visuais para tornar o ensino e o aprendizado dos seus objetos mais acessível e significativo para os alunos.

b) Por conta da aproximação do Origami com a Matemática e a Geometria

Já em relação à nossa escolha pela arte do Origami em específico, consideramos relevante e decidimos pesquisar articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami por entendermos que ele é uma arte que, embora tenha definição e origens controversas, tem sido cada vez mais utilizada para o ensino de ciências e de Matemática devido à grande afinidade entre as suas dinâmicas e as dos objetos dessas áreas do saber e de como eles são tratados por suas respectivas linguagens.

Como aponta Monteiro (2008), o Origami⁸ é tradicionalmente conhecido como a arte da criação de formas por meio da dobradura de um papel quadrado sem o uso de recortes ou colas, mas não há consenso sobre sua definição nem sobre quais são os critérios que uma dobradura deve obedecer para ser considerada um Origami.

Já um exemplo do quão controversa é a origem e a história do Origami é o artigo de Hatori (2016) no qual ele expressa sua indignação por terem escrito que o Origami é de origem

⁸ De acordo com Monteiro (2008) a palavra *Origami* tem origem japonesa (折り紙) e provém das palavras *Oru*, que significa dobrar, e *Kami*, que significa papel.

chinesa, aponta que o Origami nunca foi uma arte japonesa e defende que o Origami se originou na Europa.

A despeito disso, embora diversas artes apresentem expressões dos objetos da Matemática na linguagem das Artes Visuais que podem ser exploradas para facilitar o seu ensino e o seu aprendizado, como a Pintura, a Escultura, a Arquitetura e a Fotografia, o Origami é uma das artes mais ricas nessas expressões e tem sido bastante usada para explorá-las.⁹

Como aponta Nedrenco (2018), as dinâmicas da arte do Origami são profícuas em expressões de objetos da Matemática na linguagem das Artes Visuais e são uma excelente ferramenta para aproximá-los dos alunos e facilitar o seu ensino e o seu aprendizado.

Prova disso é dada por Monteiro (2008) e por Haga (2002) que indicam que as dinâmicas do Origami já foram axiomatizadas em uma Geometria que se provou mais precisa e mais ampla em demonstrações matemáticas e geométricas do que qualquer outra Geometria a ponto de ter sido sugerido o nome *Origamics* para a arte do Origami quando ela é usada para a descoberta em Matemática (*Mathematics*) ou para o seu ensino e o seu aprendizado.

Conforme aponta Monteiro (op. cit.), a axiomatização do Origami que deu origem à sua Geometria foi realizada a partir dos anos 1970 pelos matemáticos Jacques Justin, Humiaki Husita e Koshiro Hatori e é baseada em reflexões em uma folha de papel que podem ter as suas implicações espaciais estendidas para um plano abstrato.¹⁰

Como demonstra a mesma autora (Monteiro, 2008), a Geometria do Origami só se compara com a Geometria da Régua Marcada; permite efetuar mais construções que qualquer outra Geometria, como a Geometria Euclidiana, a Geometria dos Fósforos, a Geometria do Compasso, a Geometria da Régua, a Geometria do Compasso Enferrujado, e a Geometria da Régua e do Compasso Enferrujado; e possibilita a resolução de qualquer equação de grau igual ou inferior a três, além da construção do número irracional π e da resolução do Teorema da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Haga.

Tendo em vista essas amplas possibilidades de uso da arte do Origami para a descoberta matemática e geométrica, para o ensino e o aprendizado de Matemática e de Geometria e para

⁹ Exemplos de autores que apresentam expressões de objetos da Matemática na linguagem das Artes Visuais em artes como a Pintura, a Escultura, a Arquitetura e a Fotografia são Ghyka (1977), Colman (2003) e Falk et al. (1987).





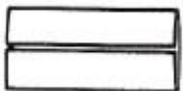

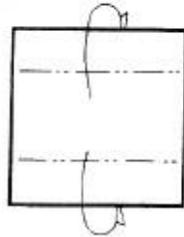
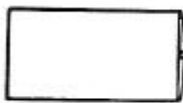

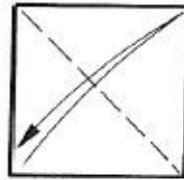

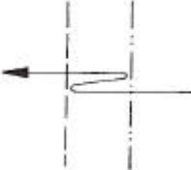
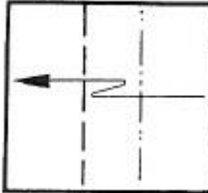

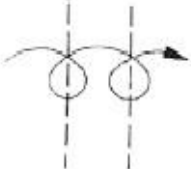
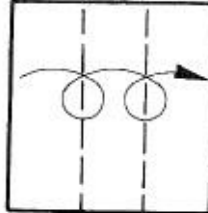

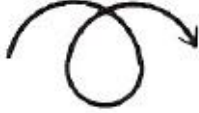
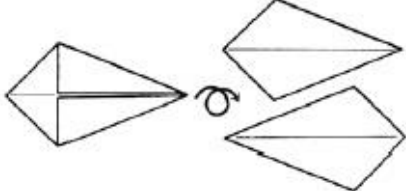
¹⁰ O conjunto dos sete axiomas que compõem a Geometria do Origami recebeu o nome dos principais matemáticos que o desenvolveram e é conhecido como axiomas de Husita-Hatori. Uma boa fonte de informações a respeito da axiomatização do Origami é o site sobre Origami mantido pelo matemático Robert Lang: <<https://langorigami.com>> acesso em 04/06/2021.


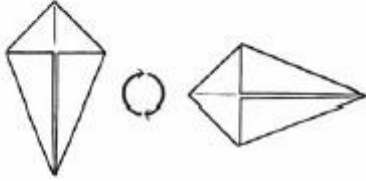
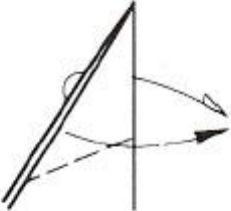

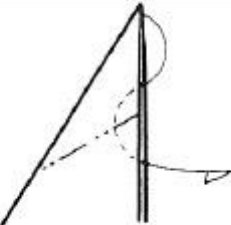




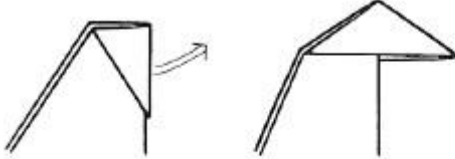

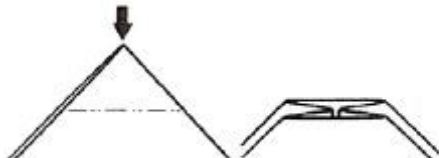
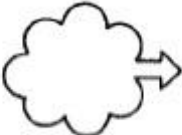
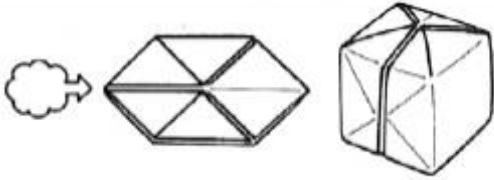
a exploração de diversas ciências, Haga (2002) sugeriu que ela recebesse o nome de *Origamics* quando empregada para essas finalidades.¹¹

Ainda a respeito do Origami, assim como aponta Moteiro (2008, p. 1) entendemos importante indicar que foi desenvolvido um conjunto de sinais que é adotado internacionalmente que pode ser entendido como "uma simbologia, relativamente universal, que funciona como instruções" para guiar a realização das dobraduras como apresentamos no Quadro 1.

Quadro 1 -
Simbologia, relativamente universal, que funciona como instruções" para as
dobraduras de Origamis.

¹¹ Exemplos de usos do Origami em outras ciências, como nas engenharias, na Química e até na Biologia podem ser encontrados nas publicações que resultam das várias edições do evento internacional "Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação" (*International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education - OSME*) nas quais realizamos grande parte da nossa pesquisa.

<i>Símbolo</i>	<i>Significado</i>	<i>Exemplo</i>
	dobrar e vincar	
	voltar ao passo anterior	
	dobrar em vale	 
	dobrar em montanha	 
	dobrar e desdobrar	 
	dobrar em escada	 
	Dobar e voltar a dobrar	 
	virar o modelo ao contrário	

<i>Símbolo</i>	<i>Significado</i>	<i>Exemplo</i>
	mudar de direcção	
	dobrar para fora	
	dobrar para dentro	
	desenho aumentado	
	puxar	
	empurrar	
	soprar	

Fonte: Monteiro, 2008, p. 2 e 3.

Com base nesses fatos, utilizamos o Origami por entendermos que ele é uma arte que particularmente favorece a interdisciplinaridade entre Artes Visuais e Matemática que a BNCC torna obrigatória entre todos os componentes curriculares.

c) Pela aproximação do Origami com a Geometria nos Fractais.

Decidimos pesquisar articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami por entendermos que as dinâmicas dessa arte podem ser associadas a diversos objetos da Matemática de forma que os torne mais significativos de serem discutidos com os alunos,

Por exemplo, a Geometria dos Fractais permite que um professor de Matemática aborde vários conteúdos de Matemática e do cotidiano relacionados com os TCT, mas ele poderá fazer isso de forma mais significativa para os alunos se contar com o auxílio de um professor de Artes Visuais e com uma atividade de Origami cujas dinâmicas possam ser descritas por essa Geometria.

Como aponta Barbosa (2002), as propriedades dos fractais¹² se relacionam com muitos conteúdos tradicionais do currículo de Matemática da Educação Básica e permitem que um professor de Matemática utilize a Geometria dos Fractais para abordar de forma conjunta vários conteúdos da Matemática como as sequências numéricas, a Geometria Euclidiana e as funções.

Além disso, como sugerem Assis et al. (2008), Mesquita e Mota (1991) e Bahamani et al. (2015), as propriedades do fractais se relacionam com as características de diversos entes naturais e artefatos tecnológicos e permitem que um professor de Matemática utilize a Geometria dos Fractais para abordar temas importantes do cotidiano como a propagação de um vírus em uma população, a aplicação de juros compostos pelo mercado financeiro e a programação dos computadores de carros autônomos para estimarem a velocidade e o tamanho de objetos distantes.

¹²Como aponta Barbosa (2002) a Geometria dos Fractais estuda os fractais que são objetos cujas propriedades são a *Autossimilaridade*, que indica que a totalidade de um fractal pode ser apreciada a partir de qualquer uma de suas partes; a *Estrutura Fina*, que indica que a apreciação da propriedade da Autossimilaridade de um fractal será possível independentemente da escala na qual ele esteja sendo analisado; e a *Lei de Construção Iterativa*, que indica que um fractal pode ser gerado pela aplicação sucessiva de uma mesma lei de geração. Tendo em vista que a lei de geração de um fractal pode ser bastante simples, o ensino e o aprendizado da Geometria dos Fractais podem ser adaptados para alunos de diferentes níveis, como, por exemplo, para alunos de graduação em ciências, caso seja abordada da forma complexa como sugerem Hull (2013 p. 255-264) e Ikegami (2009), ou para alunos do Ensino Fundamental ou Médio, caso seja abordada da forma simples como uma equação de somas e multiplicações repetida sucessivamente. Um exemplo de uma equação de somas e multiplicações que poderia ser repetida sucessivamente para ser a lei de geração de um fractal seria a seguinte: $A \times A + A = B$; $B \times B + B = C$; $C \times C + C = D$.

Sendo assim, um professor de Matemática pode usar a Geometria dos Fractais para tratar de diversos conteúdos de Matemática e de temas do cotidiano relacionados aos TCT, mas poderá fazer isso de forma mais favorável e significativa para os alunos se contar com o auxílio de um professor de Artes Visuais e com uma atividade de Origami como a *torre deflores de Chris Palmer*¹³ cuja sequência de dobras pode ser descrita por essa Geometria.

O quadro 2 apresenta algumas sugestões de como um professor de Artes Visuais e um professor de Matemática poderiam utilizar esse Origami para proporcionar aos alunos a experiência concreta com a dinâmica dos fractais e a discussão de diversos conteúdos de Matemática conjuntamente com alguns dos TCT.

Quadro 2 -

Propostas de como um professor de Artes Visuais poderia utilizar a *torre* de Origami para ajudar um professor de Matemática a relacionar a Geometria Fractal e outros conteúdos de Matemática com alguns dos TCT

¹³ Um tutorial sobre como essa *torre* pode ser realizada apresentado pelo próprio Chris Palmer está disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=0FVH157LdME>> acesso em 04/06/2021.

Temas Contemporâneos Transversais		Proposta de contribuição do professor de Artes Visuais e do Origami para a abordagem	Proposta de contribuição do professor de Matemática para a abordagem
Meio Ambiente	Educação Ambiental	Tratar da reciclagem do papel com o qual será realizado o Origami	Tratar do crescimento de uma floresta com a Geometria Fractal ¹⁴
	Educação para o Consumo	Tratar da possibilidade de reutilização do papel do Origami	Tratar da redução no valor gasto com papel por meio da sua reutilização
Saúde	Saúde	Tratar das relações entre a progressão da <i>torre</i> de Origami e das ramificações dos alvéolos de um pulmão	Tratar da diminuição das ramificações dos alvéolos de um pulmão danificados pelo fumo ao longo do tempo
	Educação Alimentar e Nutricional	Tratar da relação entre a progressão da <i>torre</i> de Origami e das ramificações de um Brócolis	Tratar da relação entre a progressão das ramificações dos Brócolis e de outros alimentos nutritivos
Cidadania	Vida Familiar e Social	Tratar da passagem dos conhecimentos sobre Origami entre as famílias no Japão	Tratar do aumento do conhecimento por sua passagem entre as gerações
	Educação para o Trânsito	Tratar da relação entre a progressão da <i>torre</i> de Origami e o aumento do trânsito com o aumento do número de carros	Tratar da expressão matemática da progressão da <i>torre</i> na Geometria dos Fractais e do seu uso na programação dos carros autônomos.
Ciência e tecnologia	Ciência e tecnologia	Tratar da relação entre a progressão da <i>torre</i> de Origami e das expressões matemáticas utilizadas em aplicações tecnológicas.	Tratar do uso da Geometria dos Fractais nas estimativas utilizadas na programação dos computadores de carros autônomos.

Fonte: elaborado pelos autores.

¹⁴ Sobre a possibilidade de se abordar a distribuição e a taxa de recuperação de uma floresta por meio da Geometria dos Fractais, vide Yamaji (2001).

Com base nesses argumentos, reforçamos a nossa escolha por trabalharmos com a arte do Origami por entendermos que ela favorece que os conteúdos matemáticos sejam discutidos no âmbito da Geometria dos Fractais forma mais significativa para os alunos.

1.2 Etapas de pesquisa

Tendo em vista os nossos problema de pesquisa, questão de pesquisa, objetivo geral de pesquisa e metodologia, realizamos a nossa pesquisa nas seguintes etapas.

Na primeira etapa da nossa pesquisa, realizamos o levantamento bibliográfico, no qual selecionamos um conjunto de publicações que consideramos relevantes sobre o uso do Origami na Educação Matemática.

Na segunda etapa da nossa pesquisa, realizamos a revisão bibliográfica, na qual analisamos o conjunto de publicações que selecionamos como relevantes e verificamos quais conteúdos de Matemática¹⁵ os seus autores propõem que sejam ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo.

Na terceira etapa, com base na análise das publicações que selecionamos como relevantes, averiguamos quais articulações os seus autores sugerem entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami relacionadas a quais conteúdos podem ser ensinados, para quais alunos e de que modo.

Na quarta etapa da nossa pesquisa, comparamos essas sugestões com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática.

Na quinta etapa da nossa pesquisa, analisamos as propostas dos autores cujas sugestões consideramos as mais interessantes e condizentes com o que é estabelecido pela BNCC com o objetivo de fundamentarmos a nossa proposta didática prática.

Na sexta etapa da nossa pesquisa, desenvolvemos a nossa proposta didática prática de articulação entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami que optamos por ser voltada para o Ensino Médio.

¹⁵Neste texto utilizamos a expressão "conteúdos de Matemática" para nos referirmos a tudo o que é comumente contemplado nas grades curriculares no que diz respeito ao ensino de Matemática de forma direta ou interviniente, e a expressão "objetos matemáticos" para nos referirmos as noções fechadas e construções específicas desse campo do saber, como as noções de polígonos, quadriláteros e as construções algébricas.

Na sétima etapa da nossa pesquisa, desenvolvemos o projeto piloto de uma Engenharia Didática voltada para professores que entendemos que poderá aprimorar a proposta que apresentamos quando tivermos a oportunidade de aplicá-la.

Por fim, fazemos considerações finais nas quais avaliamos as reflexões e produtos que obtivemos com a nossa pesquisa em face dos nossos objetivos iniciais e verificamos se os nossos resultados foram condizentes com os propósitos que estabelecemos para esta investigação.

1.3 Estrutura da pesquisa

Com base nas etapas nas quais realizamos a nossa pesquisa, não contando com este capítulo introdutório, dividimos a sua apresentação neste relatório nos seguintes capítulos.

No capítulo 2, expomos a primeira etapa da nossa pesquisa, que consiste no processo de Levantamento Bibliográfico em que selecionamos o conjunto de publicações sobre o uso do Origami na Educação Matemática no qual a nossa pesquisa se baseia no que diz respeito a quais conteúdos de Matemática tem sido ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo.

No capítulo 3, expomos a segunda, a terceira e a quarta etapas da nossa pesquisa, que consideramos que podem ser apresentadas em um único capítulo.

No capítulo 4, expomos a quinta etapa da nossa pesquisa, na qual analisamos as propostas dos autores cujas sugestões consideramos as mais interessantes e condizentes com o que é estabelecido pela BNCC com o objetivo de fundamentarmos a nossa proposta didática prática.

No capítulo 5, expomos a sexta etapa da nossa pesquisa, na qual apresentamos a nossa proposta didática prática de articulação entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami voltada para o Ensino Médio.

No capítulo 6, expomos a sétima etapa da nossa pesquisa que consiste na apresentação do projeto piloto de uma Engenharia Didática voltada para professores que desenvolvemos para aprimorar a proposta que apresentamos quando tivermos a oportunidade de aplicá-la.

Por fim, no capítulo 7, apresentamos as nossas considerações finais nas quais avaliamos as reflexões e produtos que obtivemos com a nossa pesquisa em face dos nossos objetivos iniciais e verificamos se a nossa proposta foi condizente com os propósitos que estabelecemos para esta investigação.

2 Levantamento Bibliográfico

Neste capítulo fazemos um levantamento bibliográfico, no qual selecionamos um conjunto de publicações sobre o uso do Origami na Educação Matemática.

Para a seleção dessas publicações, recorreremos, primeiro, aos 16 arquivos de revistas científicas e aos 8 repositórios de dissertações e teses elencados a seguir:

- Arquivos de Revistas Científicas:
 - Revista Educação Matemática Pesquisa [ISSN: 1983-3156]: <<http://revistas.pucsp.br/emp>>
 - Revista Boletim de Educação Matemática - Bolema [ISSN: ISSN 1980-4415]: <<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>>
 - Revista Educação Matemática em Revista [ISSN online: 2317-904X]: <<http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/index>>
 - Revista de Educação Matemática - Tangram [e-ISSN: 2595-0967]: <<http://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram>>
 - Revista ZETETIKÉ [ISSN 2176-1744]: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike>>
 - Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT [e-ISSN 1981-1322]: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>
 - Revista do Instituto São Paulo GeoGebra [ISSN: 2237-9657]: <<http://revistas.pucsp.br/IGISP>>
 - Revista Ensino da Matemática em Debate [ISSN: 2358-4122]: <<http://revistas.pucsp.br/emd>>
 - Revista Circumscribere do International Journal for the History of Science [ISSN: 1980-76551]: <<http://revistas.pucsp.br/circumhc>>
 - Revista Eletrônica de Filosofia da PUC Cognition-Estudos [ISSN: 1809-8428]: <<http://revistas.pucsp.br/cognitio>>
 - Revista de Produção Discente em Educação Matemática [ISSN: 2238-8044]: <<http://revistas.pucsp.br/pdemat>>
 - Revista Delta - Documentação e Estudos em Lingüística Teórica e Aplicada [ISSN 1678-460X]: <<http://revistas.pucsp.br/delta>>
 - Revista do Programa de Pós-Graduação em Comunicação e Semiótica da PUC-SP [ISSN: 182-2553]: <<http://revistas.pucsp.br/galaxia>>
 - Revista e-Curriculum do programa de Pós Graduação em Educação da PUC [e-ISSN: 1809-3876]: <<http://revistas.pucsp.br/curriculum>>
 - Revista do Professor de Matemática: <<http://rpm.org.br/>>
 - Revista do Programa do Grupo de Estudos e Pesquisa em Interdisciplinaridade da PUC

[ISSN: 2179-0094]:
 <<http://revistas.pucsp.br/interdisciplinaridade>>

- Repositórios de Dissertações e Teses:
 - Repositório de Dissertações e Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES
 <[https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>](https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/)
 - Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Federal de Juiz de Fora
 <[https://repositorio.ufjf.br/jspui/>](https://repositorio.ufjf.br/jspui/)
 - Repositório de Dissertações e Teses da Universidade de São Paulo - USP
 <[http://www.theses.usp.br/>](http://www.theses.usp.br/)
 - Repositório de Dissertações e Teses da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
 <<https://www.pucsp.br/biblioteca>>
 - Repositório de Dissertações e Teses da Universidade de Lisboa
 <[https://repositorio.ul.pt/>](https://repositorio.ul.pt/)
 - Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Estadual Paulista
 <<https://www.athena.biblioteca.unesp.br/F?RN=551988931>>
 - Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 <<http://portal.utfpr.edu.br/biblioteca>>
 - Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Presbiteriana Mackenzie
 <[http://tede.mackenzie.br/jspui/>](http://tede.mackenzie.br/jspui/)

Nesses arquivos de revistas científicas e repositórios de dissertações e teses, buscamos por publicações nas quais constassem quaisquer das seguintes palavras ou expressões chaves "Origami", "dobradura", "*paperfolding*" combinadas com a expressão "ensino de Matemática".

Com o uso dessas palavras e expressões chaves nesses arquivos e repositórios, encontramos o número de publicações que consideramos que poderiam ser de interesse para a nossa pesquisa indicado nos quadros 3 e 4.

Quadro 3 -
 Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves nos arquivos de revistas científicas consultados

Arquivos de revistas científicas	Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves
Revista Boletim de Educação Matemática - Bolema [ISSN: ISSN 1980-4415]: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema >	10
Revista de Educação Matemática - Tangram [e-ISSN: 2595-0967]: < http://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram >	1
Revista do Professor de Matemática < http://rpm.org.br/ >	11
Revista do Programa do Grupo de Estudos e Pesquisa em Interdisciplinaridade da PUC [ISNN: 2179-0094]: < http://revistas.pucsp.br/interdisciplinaridade >	1

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 4 -
Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves nos Repositórios de Dissertações e Teses consultados

Repositórios de Dissertações e Teses	Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves
Repositório de Dissertações e Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES < https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/ >	157133*
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Federal de Juiz de Fora < https://repositorio.ufjf.br/jspui/ >	5
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade de São Paulo - USP < http://www.teses.usp.br/ >	126
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade de Lisboa < https://repositorio.ul.pt/ >	7
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Estadual Paulista < https://www.athena.biblioteca.unesp.br/F?RN=55198893 >	8

Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Tecnológica Federal do Paraná < http://portal.utfpr.edu.br/biblioteca >	1
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Presbiteriana Mackenzie < http://tede.mackenzie.br/jspui/ >	1

Fonte: elaborado pelos autores.

*Desse total de publicações, 99746 eram dissertações de Mestrado Acadêmico ou Profissional e 29358 eram teses de Doutorado nas áreas do conhecimento relacionadas à Matemática, à Educação Matemática e à Educação.

Pela leitura dos resumos das publicações dos últimos dez anos desses arquivos e repositórios, selecionamos as que tratavam especificamente do uso do Origami na Educação Matemática que eram nas quantidades indicadas nos quadros 5 e 6.

Quadro 5 -

Número de publicações encontradas especificamente sobre o uso do Origami no Ensino de Matemática nos arquivos de revistas científicas consultados

Arquivos de revistas científicas	Número de publicações encontradas com as palavras e expressões chaves	Número de publicações sobre o uso do Origami na Educação Matemática
Revista Boletim de Educação Matemática - Bolema [ISSN: ISSN 1980-4415]: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema >	10	5
Revista de Educação Matemática - Tangram [e-ISSN: 2595-0967]: < http://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram >	1	1
Revista do Professor de Matemática < http://rpm.org.br/ >	11	11
Revista do Programa do Grupo de Estudos e Pesquisa em Interdisciplinaridade da PUC [ISSN: 2179-0094]: < http://revistas.pucsp.br/interdisciplinaridade >	1	1

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 6 -
Número de publicações encontradas especificamente sobre o uso do Origami no Ensino de Matemática nos Repositórios de Dissertações e Teses consultados

Repositórios de Dissertações e Teses	Número de publicações encontradas com as palavras chave	Número de publicações sobre o uso do Origami na Educação Matemática
Repositório de Dissertações e Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES < https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/ >	157133	50
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Federal de Juiz de Fora < https://repositorio.ufjf.br/jspui/ >	5	1
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade de São Paulo - USP < http://www.teses.usp.br/ >	126	10
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade de Lisboa < https://repositorio.ul.pt/ >	7	3
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Estadual Paulista < https://www.athena.biblioteca.unesp.br/F?RN=551988 >	8	7
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Tecnológica Federal do Paraná < http://portal.utfpr.edu.br/biblioteca >	1	1
Repositório de Dissertações e Teses da Universidade Presbiteriana Mackenzie < http://tede.mackenzie.br/jspui/ >	1	1

Fonte: elaborado pelos autores

Pela leitura preliminar dessa seleção de publicações, percebemos que elas poderiam servir para elaborarmos um panorama de quais conteúdos de Matemática têm sido ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo, mas não contavam com o conteúdo e o escopo que esperávamos para serem estabelecidas como um conjunto de publicações sobre esses assuntos no qual a nossa pesquisa poderia se basear.

Embora esperássemos encontrar publicações nas quais os seus autores apresentassem reflexões teóricas e práticas sobre a interface entre o Origami e a Matemática baseadas nas suas

experiência contínuas com o uso Origami na Educação Matemática, não foi isso o que encontramos.

Logo pela leitura das partes correspondentes às "introduções" e "considerações finais" dessas publicações, constatamos que poucas delas eram baseadas em experiências contínuas de uso do Origami na Educação Matemática por seus autores e que a maioria deles só tratava desse uso do ponto de vista teórico, sem apresentar qualquer proposta de aplicação; apresentava somente uma proposta de aplicação sem que ela fosse levada a efeito; ou apresentava uma proposta de aplicação que era realizada unicamente de forma pontual.

Por exemplo, como pode ser observado no quadro 4, nos arquivos da Revista do Professor de Matemática, encontramos diversas publicações sobre o uso do Origami na Educação Matemática, mas verificamos que elas não apresentavam propostas para a sua aplicação efetiva em sala de aula e não indicavam quais tinham sido as referências bibliográficas utilizadas.

Já nos repositórios de dissertações e teses, embora tenhamos encontrado diversas publicações sobre o uso do Origami na Educação Matemática, verificamos que nenhum dos seus autores apresentava uma experiência contínua de uso do Origami na sala de aula e que a maioria deles só tratava desse tema do ponto de vista teórico, como Tripalli (2017) e Guimarães (2015), ou só apresentava propostas de aplicações pontuais, como Pimenta (2017) e Silva (2014).

Além disso, pela leitura das referências bibliográficas utilizada pelos autores dessas dissertações e teses, constatamos que a maioria deles citava uns aos outros, com os que publicaram mais recentemente citando os que publicaram nos anos anteriores, principalmente quando ambos eram da mesma instituição, e que as dissertações que identificamos como sendo as de melhor conteúdo e escopo, como a de Monteiro (2008), citavam os trabalhos sobre o uso do Origami na Educação Matemática do autor americano Thomas Hull.

Por conta disso, decidimos realizar uma pesquisa a respeito desse livro, do seu autor e do seu trabalho relacionado ao uso do Origami na Educação Matemática.

Com base nessa pesquisa, averiguamos que Thomas Hull é um dos organizadores do "Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação" (*International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education - OSME*)¹⁶, que é um evento internacional quadrienal que reúne especialistas e entusiastas do uso do Origami em diversas

¹⁶ O OSME, teve sua primeira edição em 1989 e já ocorreu na Itália, Japão, Estados Unidos, Singapura e Inglaterra.

áreas do conhecimento e que produz um compêndio¹⁷ de artigos a respeito dos principais trabalhos apresentados em cada uma das suas edições.

Tendo em vista que verificamos que uma das categorias nas quais são divididos os trabalhos apresentados nesse evento compreende o uso do Origami na Educação Matemática, procedemos à pesquisa pelos compêndios resultantes das suas várias edições e buscamos os artigos sobre esses trabalhos.¹⁸

Embora não tenhamos encontrado os compêndios resultantes da primeira e da segunda edições do evento por já estarem esgotados e não estarem disponíveis em bibliotecas virtuais, conseguimos adquirir os compêndios das suas terceira, quarta, quinta, sexta e sétima edições.

Da leitura preliminar dos artigos dessas edições do evento que correspondiam a trabalhos apresentados na categoria que compreende o uso do Origami na Educação Matemática, averiguamos que o seu conteúdo e escopo excedia substancialmente o das publicações brasileiras e que praticamente todos eles tratavam das experiências contínuas que os seus autores tiveram com o uso do Origami na Educação Matemática em diferentes países e contextos educacionais.

Com base nessa constatação, decidimos por estabelecer entre esses artigos o conjunto de publicações no qual a nossa pesquisa se baseia no que diz respeito a quais conteúdos de Matemática têm sido ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo.

Assim, dentre esses artigos que resultaram de trabalhos apresentados entre os anos de 2002 e de 2018 nos quais ocorreram as últimas 5 edições do OSME, selecionamos as trinta e duas publicações que servem de base para a nossa pesquisa e partimos para sua análise no processo de Revisão Bibliográfica que será apresentado no Capítulo 3.

¹⁷ Utilizamos a palavra compêndios para nos referirmos aos livros que resultam deste evento por eles não se comporem das apresentações dos trabalhos propriamente ditas e não se configurarem como Anais desse evento, mas sim como conjuntos de artigos que os participantes são convidados a escrever sobre as experiências científicas e educacionais que foram objeto das suas apresentações.

¹⁸As principais categorias nas quais os trabalhos apresentados costumam ser divididos são as seguintes: "estudos científicos do Origami"; "a matemática do Origami e da dobradura, incluindo a matemática computacional"; "aplicações tecnológicas de estruturas de Origami ou de dobradura"; "usos educacionais do Origami para o ensino ou instrução" (*educational uses of Origami in teaching or instruction*); e "os usos do Origami ou dos seus princípios na arte e no design". Dentre os trabalhos apresentados na categoria "usos educacionais do Origami para o ensino ou instrução", analisamos somente os artigos sobre os trabalhos que propõe o uso do Origami para a Educação Matemática.

3 Revisão Bibliográfica e das articulações entre Artes Visuais e Matemática com o Origami à luz da BNCC

Neste capítulo, expomos a segunda, a terceira e a quarta etapas da nossa pesquisa, que consideramos que podem ser apresentadas juntas em um único capítulo.

A segunda etapa consiste no processo de Revisão Bibliográfica no qual analisamos o conjunto de publicações que selecionamos e verificamos quais conteúdos de Matemática os seus autores propõem que sejam ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo.

A terceira etapa consiste no que verificamos quanto às articulações que esses autores sugerem entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami relacionadas a quais conteúdos podem ser ensinados, para quais alunos e de que modo.

A quarta etapa consiste na comparação que fizemos entre as sugestões que encontramos e o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática com o objetivo de identificarmos as propostas mais adequadas para serem analisadas no próximo capítulo e servirem de base para a proposta que apresentamos no capítulo 5.

3.1 Revisão Bibliográfica

Quanto a quais conteúdos de Matemática que os autores das publicações selecionadas propõem que sejam ensinados com o Origami, verificamos que eles são os mais variados, mas que, em sua maioria, são as habilidades que esses autores entendem serem relevantes para o entendimento e para a operacionalização da linguagem matemática e geométrica como apresentamos no quadro 7.

Quadro 7 -
Quais conteúdos e habilidades de Matemática os autores das publicações selecionadas propõem que sejam ensinados com o Origami

Conteúdos e habilidades		Número de publicações	Obras
Habilidades gerais	Habilidades gerais de aprendizado: habilidades motoras finas, coordenação olho mão, capacidade de concentração, capacidade de observação e análise, criatividade	9	Pope & Lam (2009); Golan & Jackson (2009); Pope & Lam (2011); Golan (2011); Fiol et al. (2011); Morrow & Morrow (2011); Golan & Oberman (2015); Frigerio & Spreafico (2015); Spreafico et al. (2018)
	Habilidades de raciocínio e de abstração relacionadas ao raciocínio matemático	1	Frigerio (2009)
	Habilidades de raciocínio e de abstração espaciais relacionadas ao raciocínio geométrico	10	Burczyk et al. (2002); Golan & Jackson (2009); Cagle (2009); Wilson et al. (2009); Golan (2011); Boakes (2011); Fiol et al. (2011); Golan & Oberman (2015); Frigerio & Spreafico (2015); Spreafico et al. (2018)
	Habilidades gerais de resolução de problemas	3	Pope & Lam (2009); Morrow & Morrow (2011); Hoffman et al. (2018)
Conteúdos de Matemática e objetos matemáticos específicos relacionados a Matemática	Lógica matemática (<i>mathematical logic</i>): estrutura lógica das asserções matemáticas (<i>mathematical statements</i>) e estrutura axiomática (axiomas, teoremas e provas)	3	Haga (2002); Winckler et al. (2011); Serre & Spreafico (2018); Nedrenco (2018)

	Noções matemáticas e conceitos matemáticos específicos (conceptually demanding mathematics)	1	Frigerio (2009)
	Aritmética	3	Haga (2002); Kwan (2011); Hoffman et al. (2018)
	Álgebra	4	Haga (2002); Frigerio (2009); Kwan (2011); Hoffman et al. (2018)
	Cálculo Integral e Diferencial	3	Cornelius & Tubis (2002) ; Kwan (2011); Hoffman et al. (2018)
Habilidades e Conteúdos de Matemática ou objetos matemáticos relacionados a Geometria	Habilidades indicadas como de Pré-Geometria: Habilidades com princípios e conceitos geométricos essenciais como ângulos, polígonos, simetrias, frações, provas e argumentos dedutivos que estarão presentes nos níveis mais avançados de Geometria	9	Golan & Jackson (2009); Cornelius & Tubis (2009); Golan (2011); Pope & Lam (2011); Fiol et al. (2011); Golan & Oberman (2015); Tubis (2015); Frigerio & Spreafico (2015); Spreafico et al. (2018)

	Geometria Plana	15	Cornelius & Tubis (2002); Knoll (2002); Frigerio (2002); Frigerio (2009); Golan & Jackson (2009); Cornelius & Tubis (2009); Golan (2011); Winckler et al. (2011); Kwan (2011); Fiol et al. (2011); Golan & Obernam (2015); Frigerio & Spreafico (2015); Huang & Lee (2015); Spreafico et al. (2018); Tubis (2018); Hoffman et al. (2018)
	Geometria Tridimensional	6	Knoll (2002); Morrow (2002); Cagle (2009); Kwan (2015); Burczyk et al. (2002); Hoffman et al. (2018)
	Teoria dos grafos (ramo da matemática que estuda as relações entre os elementos de um determinado conjunto)	2	Morrow (2002); Spreafico et al. (2018)
	Caminho Hamiltoniano	1	Morrow (2002)
	Autossimilaridade e Fractais	1	Bahmani et al. (2015)
	Teoria do Caos	1	Poladian (2015)
	Integração entre Arte e Matemática	1	Kwan (2015)

Fonte: elaborado pelos autores

Além disso, verificamos que praticamente todos os autores das publicações selecionadas sugerem que o Origami pode ser usado para o ensino de vários conteúdos de Matemática ao mesmo tempo e para serem estabelecidas relações entre conteúdos que podem estar agrupados em diferentes etapas de uma matriz curricular com destaque para Cagle (2009), Pope e Lam (2011), Morrow e Morrow (2011), e Kwan (2011).

Quanto a para quais alunos que os autores das publicações selecionadas propõem que o Origami seja usado no ensino de Matemática, verificamos que eles são os mais diversos e que podem ser de alunos da pré-escola até alunos universitários em formação para serem professores de Matemática ou polivalentes como apresentamos no quadro 8.

Quadro 8 -
Para quais alunos os autores das publicações selecionadas propõem que o Origami seja usado no ensino de Matemática

Nível Escolar	Número de publicações	Obras
Alunos do nível equivalente aos da pré-escola brasileira	7	Golan & Jackson (2009); Cagle (2009); Cornelius & Tubis (2009); Golan (2011); Pope & Lam (2011); Golan & Oberman (2015); Tubis (2015)
Alunos do nível equivalente aos do Ensino Fundamental brasileiro	16	Tubis (2002); Morrow (2002); Golan & Jackson (2009); Frigerio (2009); Cagle (2009); Wilson et al. (2009); Cornelius & Tubis (2009); Frigerio (2009); Golan (2011); Boakes (2011); Golan & Oberman (2015); Frigerio & Spreafico (2015); Cornelius & Tubis (2015); Huang & Lee (2015); Kwan (2015); Spreafico et al. (2018)
Alunos do nível equivalente aos do Ensino Médio brasileiro	11	Burczyk et al. (2002); Haga (2002); Pope & Lam (2009); Cagle (2009); Winckler et al. (2011); Kwan (2011); Kwan (2015); Bahmani et al. (2015); Tubis (2018); Serre & Spreafico (2018); Spreafico et al. (2018)
Alunos Universitários	6	Haga (2002); Frigerio (2009); Fiol et al. (2011); Morrow & Morrow (2011); Boakes (2011); Hoffman et al. (2018)

Alunos em nível de formação de professores Polivalentes ou de Matemática	14	Knoll (2002); Haga (2002); Golan & Jackson (2009); Frigerio (2009); Cagle (2009); Pope & Lam (2009); Cagle (2009); Pope & Lam (2009); Pope & Lam (2011); Golan (2011); Wincler et al. (2011); Kwan (2011); Golan & Obernman (2015); Spreafico et al. (2018); Serre & Spreafico (2018); Nedrenco (2018)

Fonte: elaborado pelos autores

Além disso, verificamos que muitos dos autores das publicações selecionadas se baseiam nessa diversidade de alunos cuja Educação Matemática pode se dar com o Origami para sugerirem que deveria ser desenvolvida uma forma unificada de se abordar conteúdos de Matemática com o Origami como é defendido especificamente por Carter e Ferruci (2002) e Nedrenco (2018).

Quanto aos modos pelos quais os autores das publicações selecionadas propõem que o Origami seja usado na Educação Matemática, verificamos que eles apresentam a tendência de sobrepor os objetos matemáticos ao Origami e torná-lo uma ferramenta para ilustrá-los aos alunos, como fazem Golan e Jackson (2009), Golan e Oberman (2011), Morrow e Morrow (2011) e Nedrenco (2018), ou de extrair os objetos matemáticos do Origami e torná-lo uma ferramenta para apresentá-los aos alunos, como fazem Pope e Lam (2011), Bhamani et al. (2015) e Serre e Spreafico (2018).

Em outras palavras, verificamos que eles apresentam a tendência de usar o Origami para que os objetos matemáticos sejam sobrepostos as suas dinâmicas e visualizados e experimentados pelos alunos a partir delas, ou para que os objetos matemáticos sejam extraídos de suas dinâmicas e estudados e entendidos pelos alunos como uma linguagem com a qual eles podem trabalhá-las e resolver problemas, o que fica bastante evidente quando se comparam Golan e Jackson (2009), Golan (2011), Golan e Oberman (2015) com Bahmani et. al. (2015).

O quadro 9 agrupa os autores das publicações selecionadas segundo a tendência que suas propostas apresentam de usar o Origami para ilustrar ou revelar os conteúdos de Matemática para os alunos.

Quadro 9 -
De qual modo os autores das publicações selecionadas propõem que o Origami seja usado no ensino de Matemática

Modo	Número de publicações	Obras
Ilustrando	10	Knoll (2002); Golan & Jackson (2009); Cornelius & Tubis (2009); Golan (2011); Fiol et al. (2011); Wincker et al. (2011); Golan & Oberman (2015); Tubis (2015); Huang & Lee (2015); Nedrenco (2018)
Ilustrando e Revelando	13	Cornelius & Tubis (2002); Haga (2002); Frigerio (2009); Cagle (2009); Wilson et al. (2009); Pope & Lan (2011); Morrow & Morrow (2011); Boakes (2011); Frigerio & Spreafico (2015); Tubis (2015); Huang & Lee (2015); Spreafico et al. (2018); Tubis (2018).
Revelando	9	Burczyk et al. (2002); Morrow (2002); Pope & Lam (2009); Kwan (2011); Kwan (2015); Bahmani et al. (2018); Poladian (2015); Hoffman et al. (2018); Serre & Spreafico (2018)

Fonte: elaborado pelos autores

3.2 Articulações sugeridas pelos autores das publicações analisadas

Averiguamos que os autores das publicações analisadas apresentam propostas que apontam que há importantes articulações que podem ser feitas entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami.

3.2.1 Quanto aos conteúdos que podem ser ensinados com o Origami

Averiguamos que os autores sugerem que as Artes Visuais e a Matemática podem ser articuladas por meio do Origami no ensino das habilidades supracitadas ou no estabelecimento de relações entre diferentes objetos matemáticos e entre eles e os objetos de outras disciplinas.

Como exemplos de autores que fazem a primeira dessas sugestões, são de destaque Boakes (2009), Wilson et. al. (2009), Pope e Lam (2009) e Frigério (2009).

No seu trabalho sobre o impacto do Origami na aquisição de habilidades espaciais entre alunos do nível equivalente ao Ensino Infantil brasileiro, Boakes (2009) sugere que a arte do Origami pode ser integrada ao ensino de Matemática para o desenvolvimento do raciocínio matemático e geométrico.

No seu trabalho sobre o uso do Origami para o desenvolvimento do raciocínio espacial em alunos do nível equivalente ao Ensino Fundamental brasileiro, Wilson et al. (2009) sugerem que a arte do Origami pode servir para o desenvolvimento da habilidade de resolução de problemas e de uso de procedimentos matemáticos e geométricos de forma intuitiva.

No seu trabalho sobre o uso do Origami na promoção da criatividade para a resolução de problemas matemáticos e geométricos, Pope e Lam (2009) sugerem que a arte do Origami pode ser usada para ajudar os alunos do nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro a desenvolverem as habilidades que eles consideram que lhes serão fundamentais no seu progresso no aprendizado de Matemática como, por exemplo, as habilidades motoras finas e as de articulação dos princípios geométricos de simetria, similaridade e congruência.

Por fim, no seu trabalho sobre o uso do Origami para o ensino do conceito geométrico de isometria, Frigério (2009) sugere que a arte do Origami pode ser usada para ajudar professores polivalentes em formação a desenvolverem as suas habilidades no uso do raciocínio axiomático do qual dependem as demonstrações na Matemática e na Geometria.

O quadro 10 sumariza as sugestões desses autores sobre as Artes Visuais e a Matemática poderem ser articuladas com o Origami para o ensino dessas habilidades.

Quadro 10 -
Articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para o ensino de habilidades em Matemática e Geometria

Autores	Habilidades sugeridas para serem ensinadas com a arte do Origami
Boakes (2009)	habilidades de raciocínio espacial e de raciocínio matemático e geométrico
Wilson et al. (2009)	habilidades de raciocínio espacial, de resolução de problemas e de uso de procedimentos matemáticos e geométricos de forma intuitiva

Pope & Lam (2009)	habilidades motoras finas, habilidades de resolução de problemas e de articulação dos princípios geométricos de simetria, similaridade e congruência
Frigério (2009)	habilidades com os raciocínios axiomáticos dos quais dependem as demonstrações na Matemática e na Geometria

Fonte: elaborado pelos autores

Já como exemplos de autores que sugerem que as Artes Visuais e a Matemática podem ser articuladas com o Origami para serem ensinadas ligações entre diferentes objetos da Matemática e entre eles e os objetos de outras disciplinas, são de destaque Cagle (2009), Pope e Lam (2011), Morrow e Morrow (2011) e Kwan (2011)

No seu trabalho sobre o uso do Origami no ensino da geometria dos poliedros, Cagle (2009) sugere o uso dessa arte para apresentar aos alunos as possíveis ligações entre diversos objetos matemáticos como o volume dos poliedros e as matrizes e as funções, e entre a Matemática e outras disciplinas, como as Artes Visuais que faz uso da trigonometria e a Biologia que faz uso da geometria dos poliedros para o estudo das formas biológicas dos vírus.

No seu trabalho sobre o uso do Origami no ensino de conceitos matemáticos e geométricos como os de fração e prova para crianças e adolescentes, Pope e Lam (2011) sugerem que essa arte pode ser usada para ajudar os alunos a perceberem a ligação entre diferentes objetos matemáticos como os ângulos, a simetria, o Teorema de Pitágoras e os conceitos de prova matemática e geométrica.

No seu trabalho sobre o uso da engenharia reversa de Origamis para o desenvolvimento integrado de habilidades como as de comunicação, de análise de dados e de resolução de problemas, Morrow e Morrow (2011) sugerem que as dinâmicas dessa arte podem ser fonte de problemas e questões matemáticas úteis para o ensino conjunto de diversos temas da Matemática e de outras disciplinas como o nome das formas; a construção geométrica de ângulos; as relações entre os vértices, as faces e as arestas dos sólidos e a elaboração e resolução de equações algébricas para o uso em Geometria ou em outras áreas do saber como as da Engenharia e da Arquitetura.

Por fim, no seu trabalho sobre o ensino do cálculo do volume dos sólidos para alunos do nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro, Kwan (2011) sugere que o Origami pode ser usado para o ensino integrado de diversos tópicos da Matemática que costumam aparecer

separados nas matrizes curriculares tradicionais como os relacionados a área e ao volume dos polígonos e poliedros e as matrizes e as funções.

O quadro 11 sumariza as sugestões desses autores de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami.

Quadro 11 -
Articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para o ensino de diferentes objetos matemáticos e de outras disciplinas

Autores	Ligações sugeridas entre objetos matemáticos e entre eles e os objetos de outras disciplinas para serem ensinadas com a arte do Origami
Cagle (2009)	ligações entre o volume dos poliedros e as matrizes e as funções e ligações entre objetos matemáticos e de outras disciplinas como a trigonometria e a perspectiva tratadas nas Artes Visuais e a geometria dos poliedros e as formas biológicas dos vírus tratadas em Biologia
Pope e Lam (2011)	ligações entre os ângulos, a simetria, o Teorema de Pitágoras e os conceitos de prova matemática e geométrica
Morrow e Morrow (2011)	ligações entre o nome das formas; a construção geométrica de ângulos; as relações entre os vértices, as faces e as arestas dos sólidos e a elaboração e resolução de equações algébricas para o uso em Geometria ou em outras áreas do saber como as da Engenharia e da Arquitetura.
Kwan (2011)	ligações entre a área e o volume dos polígonos e poliedros e as matrizes e as funções.

Fonte: elaborado pelos autores

3.2.2 Quanto à para quais alunos o Origami pode ser usado

Averiguamos que os autores utilizam o Origami com crianças da pré-escola a estudantes universitários e sugerem que pode haver articulações entre as Artes Visuais e a Matemática por meio dessa arte na pesquisa sobre formas unificadas de utilizá-la para abordar conteúdos da Matemática que pudessem servir de suporte para as aulas dos professores dessa disciplina em diferentes níveis da educação formal como fazem, por exemplo, Nedrenco (2018) e Carter e Ferruci (2002).

No seu trabalho sobre o uso do Origami no ensino da axiomatização matemática e geométrica para professores em formação, Nedrenco (2018) elenca diversos estudos que atestam os benefícios do Origami na Educação Matemática de vários tipos de estudantes e sugere que seriam importantes pesquisas sobre formas unificadas de se abordar os conteúdos de Matemática com o Origami que pudessem atender a todos eles.

Na sua análise de vários livros didáticos que apresentam o Origami como uma ferramenta de ensino de Matemática e de Geometria para crianças e adolescentes, Carter e Ferruci (2002)¹⁹ apontam para a falta de formas unificada de se abordar a Matemática com o Origami e defendem que seriam importantes pesquisas sobre a viabilidade e as implicações do seu desenvolvimento, o que é feito indiretamente por vários dos autores das publicações analisadas.

Cumpramos ressaltar que o desenvolvimento de uma forma unificada de se abordar o ensino e a aprendizagem de Matemática com o Origami teve início com o que tem sido denominado de Geometria do Origami como é apresentado em Monteiro (2008) e Haga (2002).

A esse respeito, embora entendamos que o Origami possa ser usado como recurso em todos os níveis escolares, não concordamos com a idéia de que possa existir uma forma unificada de trabalho com ele nos diversos níveis escolares.

O quadro 12 sumariza as sugestões desses autores de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para o ensino de vários alunos diferentes.

Quadro 12 -
Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami relacionadas ao ensino de vários alunos diferentes

Autores	Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e Matemática com o Origami para o ensino de vários alunos diferentes.
---------	--

¹⁹ Cumpramos observar que esse artigo não faz parte das trinta e duas publicações do OSME que foram estabelecidas como relevantes e que não foi analisado junto com os demais por só revisar livros didáticos e não apresentar qualquer proposta dos seus autores quanto ao uso do Origami para o ensino de conteúdos de Matemática.

Nedrenco (2018)	articulação para a pesquisa de formas unificadas de se ensinar conteúdos de Matemática com o Origami
Carter e Ferruci (2011)	articulação para a pesquisa sobre a viabilidade de formas unificadas de se ensinar conteúdos de Matemáticas com o Origami e sobre as suas implicações

Fonte: elaborado pelos autores

3.2.3 Quanto aos modos pelos quais o Origami pode ser usado

Averiguamos que os autores sugerem que as Artes Visuais e a Matemática podem ser articuladas por meio do Origami para sobrepor os objetos matemáticos às dobraduras e ilustrá-los aos alunos ou para extrair os objetos matemáticos delas e torná-las uma ferramenta para apresentá-los aos alunos como uma linguagem com a qual eles podem resolver problemas e desenvolver os seus próprios projetos.

Como exemplos de autores que fazem a primeira dessas sugestões, são de destaque Golan e Jackson (2009), Golan (2011), Golan e Oberman (2015), Morrow e Morrow (2011) e Nedrenco (2018).

Nos seus trabalhos sobre o uso do Origami para o ensino de Geometria pelo Programa *Origametria* de Israel, Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Oberman (2015) sugerem que as dinâmicas do Origami podem servir para proporcionar aos alunos a visualidade e a experiência concreta dos conceitos geométricos como os de ângulo, simetria e congruência.

Já Morrow e Morrow (2011) sugerem que a arte do Origami pode servir para promover a experiência concreta das idéias abstratas da Matemática e da Geometria, como as de simetria, congruência, razão e proporção.

Por fim, Nedrenco (2018) defende que seriam importantes pesquisas sobre o uso do Origami para demonstrar e tornar visíveis a axiomatização em Matemática e em Geometria.

Já como exemplos de autores que sugerem que as Artes Visuais e a Matemática podem ser articuladas por meio do Origami para apresentar os objetos matemáticos para os alunos como uma linguagem com a qual eles podem resolver problemas, são de destaque Bhamani et al. (2015), Pope e Lam (2011) e Serre e Spreafico (2018).

No seu trabalho sobre o uso do Origami para o ensino dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por uma unidade de estudos do Sistema NODET do Irã, Bhamani et al. (2015) indicam que o Origami pode proporcionar aos alunos desafios pelos quais

eles sejam apresentados aos objetos matemáticos como parte de uma linguagem com a qual eles podem resolver problemas e desenvolver os seus próprios projetos

Já Pope e Lam (2011) defendem o uso do Origami para promover um contexto de aprendizado com desafios pelos quais os alunos sejam instigados a estudar de forma contextualizada as dinâmicas de objetos matemáticos como a simetria, a similaridade, a congruência, a divisão e a razão.

Por fim, no seu trabalho sobre o uso do Origami para o ensino da lógica Matemática para alunos do nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro, Serre e Spreafico (2018) apontam que o Origami pode proporcionar aos alunos o estudo contextualizado da estrutura lógica das asserções matemáticas e de diversos objetos matemáticos como os relacionados a geometria planar.

O quadro 13 sumariza as sugestões desses autores sobre as Artes Visuais e a Matemática poderem ser articuladas com o Origami para ilustrar ou apresentar os objetos matemáticos para os alunos.

Quadro 13 -
Sugestões de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami para ilustrar ou revelar objetos matemáticos para os alunos

Modo de articular o Origami ao ensino de Matemática	Autores	Objetivo da articulação
Para Ilustrar conteúdos de Matemática	Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Oberman (2015)	proporcionar a visualidade e a experiência concreta dos conceitos geométricos ensinados
	Morrow e Morrow (2011)	proporcionar a experiência concreta das idéias abstratas da Matemática e da Geometria, como as de simetria, congruência, razão e proporção
	Nedrenco (2018)	demonstrar e tornar visíveis a axiomatização em Matemática e em Geometria

Para revelar conteúdos de Matemática	Bhamani et al. (2015)	apresentar os objetos matemáticos como parte de uma linguagem com a qual se pode resolver problemas e desenvolver projetos
	Pope e Lam (2011)	estudo contextualizado das dinâmicas de objetos matemáticos como a simetria, a similaridade, a congruência, a divisão e a razão
	Serre e Spreafico (2018)	estudo contextualizado da estrutura lógica das asserções matemáticas e de diversos objetos matemáticos como os relacionados a geometria planar

Fonte: elaborado pelos autores

3.2.4 Sumário das sugestões encontradas

Como base em tudo o que foi apresentado, o quadro 14 sumariza o que averiguamos quanto a quais articulações os autores das publicações analisadas sugerem que podem ser feitas entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami relacionadas a quais conteúdos podem ser ensinados, para quais alunos e de que modo.

Quadro 14 -

Sumário das articulações sugeridas entre Artes Visuais e Matemática com o Origami relacionadas a quais conteúdos podem ser ensinados, para quais alunos e de que modo

As Artes Visuais e a Matemática podem ser articuladas por meio do Origami...		
quanto a quais conteúdos de Matemática podem ser	para o ensino de habilidades gerais entendidas como	habilidades motoras finas.
		habilidades de raciocínio espacial.
		habilidades de resolução de problemas.

ensinados com o Origami...	essenciais para o aprendizado de Matemática e Geometria como, por exemplo...	habilidades de raciocínio matemático e geométrico como as de articulação dos princípios geométricos de simetria, similaridade e congruência.
		habilidades com os raciocínios axiomáticos dos quais dependem as demonstrações e provas em Matemática e Geometria.
	para o ensino de relações entre diferentes objetos matemáticos e entre eles e objetos de outras disciplinas como, por exemplo...	relações entre as áreas e volume dos poliedros e as matrizes e as funções;
		relações entre os ângulos, a simetria, o Teorema de Pitágoras e os conceitos de prova matemática e geométrica.
		relações entre o nome das formas, a construção geométrica de ângulos, as relações entre os vértices, as faces e as arestas dos sólidos e a elaboração e resolução de equações algébricas para o uso em Geometria ou em outras áreas do saber como as da Engenharia e da Arquitetura.
		relações entre objetos matemáticos e de outras disciplinas como a perspectiva tratada em Artes Visuais e a forma biológica dos vírus trata em Biologia.
quanto a para quais alunos os conteúdos de Matemática podem ser ensinados com o Origami...	na pesquisa sobre a viabilidade de formas unificadas de se ensinar conteúdos de Matemáticas com o Origami e sobre as suas implicações.	
quanto a de que modo os conteúdos de Matemática podem ser ensinados aos alunos com o Origami...	para ilustrar os objetos matemáticos como, por exemplo...	para proporcionar a visualidade e a experiência concreta das idéias abstratas da Matemática e da Geometria como as de simetria, congruência, razão e proporção.
		para demonstrar e tornar visíveis a axiomatização em Matemática e em Geometria.
	para apresentar os objetos matemáticos como parte de uma linguagem com a qual se pode resolver problemas e desenvolver	no estudo contextualizado da estrutura lógica das asserções matemáticas.
		no estudo das dinâmicas de objetos matemáticos como a simetria, a similaridade, a congruência, a divisão e a razão.

	projetos como, por exemplo...	nos estudos relacionados a geometria planar.
--	-------------------------------	--

Fonte: elaborado pelos autores

3.3 Comparação das sugestões encontradas com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática.

Neste item, expomos a quarta etapa da nossa pesquisa que consiste na comparação que fizemos entre as sugestões das propostas de uso do Origami na Educação Matemática que analisamos com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática com o objetivo de identificarmos as propostas que consideramos as mais adequadas aos nossos propósitos para serem esmiuçadas no próximo capítulo e servirem de base para a nossa proposta que apresentamos no capítulo 5.

3.3.1 Comparação com o que é estabelecido para o Ensino Infantil

Ao longo da Educação Básica, a BNCC (Brasil 2017b p. 8-9) estabelece que as aprendizagens que ela define como essenciais devem ocorrer para assegurar aos alunos o desenvolvimento das seguintes dez competências gerais:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa,

reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender idéias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Para o Ensino Infantil, a BNCC (2017b) estabelece que essas dez competências gerais da Educação Básica são para serem desenvolvidas tendo em vista a garantia de direitos de aprendizagem que devem ser proporcionados aos alunos por meio da sua vivência no que são denominados de cinco campos de experiência.

Os seis direitos de aprendizagem são denominados de 1) conviver, 2) brincar, 3) participar, 4) explorar, 5) expressar, e 6) conhecer-se, sendo que o direito denominado de "expressar" inclui a possibilidade de expressão em diferentes linguagens como a linguagem visual e a linguagem matemática.

Já os cinco campos de experiência são denominados de 1) o eu e o nós, 2) corpo, gestos e movimentos; 3) traços, sons, cores e formas, 4) escuta, fala, pensamento e imaginação, e 5) espaço, tempo, quantidades, relações e transformações, sendo que, para todos eles, a BNCC sugere que a convivência entre os alunos seja desenvolvida por meio da mediação das diferentes linguagens, como a linguagem visual e a linguagem matemática.

Com base nisso, consideramos que as propostas mais coerentes com a implementação do que a BNCC estabelece para o Ensino Infantil são as apresentadas em Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Oberman (2015).

Nessas propostas, a Matemática é sobreposta às dinâmicas do Origami para proporcionar aos alunos a visualidade e a experiência concreta dos objetos matemáticos e os professores podem envolver os alunos em interações nos cinco campos de experiência para desenvolver suas capacidades de se expressar e os tipos de pensamento que lhes serão essenciais na apropriação da linguagem matemática nos níveis posteriores de ensino.

3.3.2 Comparação com o que é estabelecido para o Ensino Fundamental.

Para o Ensino Fundamental, a BNCC (Brasil 2017b) estabelece que as dez competências gerais da Educação Básica são para serem desenvolvidas nas seguintes cinco áreas do conhecimento: 1) Linguagens, que engloba a Língua Portuguesa, as Artes, e a Educação Física, 2) Matemática, 3) Ciências da Natureza, 4) Ciências Humanas, que engloba a Geografia e a História, e 5) Ensino Religioso.

No contexto dessas áreas do conhecimento, cumpre observar que as Artes Visuais são uma unidade temática do componente Artes que tem o objetivo de desenvolver habilidades baseadas nas competências específicas do componente Artes, nas competências específicas da área de Linguagens e nas competências gerais da Educação Básica.

Para a área de Linguagens no Ensino Fundamental, a BNCC (Brasil 2017b, p. 65) estabelece seis competências específicas que compreendem conhecer e explorar o uso das várias linguagens em diferentes campos da atividade humana para que os alunos possam "produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos".

Já especificamente para o componente Artes, a BNCC (Brasil 2017b, p. 198) estabelece nove competências específicas que compreendem utilizar as linguagens artísticas para "problematizar questões políticas, sociais, econômicas, científicas, tecnológicas e culturais" e que são para serem desenvolvidas nas seguintes unidades temáticas: Artes Visuais, Dança, Música, Teatro e Artes Integradas.

Para cada uma dessas unidades temáticas, a BNCC (Brasil 2017b) estabelece objetos de conhecimento e habilidades, sendo que, para a unidade temática Artes Visuais, esses objetos de conhecimento e habilidades compreendem a articulação da linguagem visual com outras linguagens e o desenvolvimento de habilidades como a habilidade EF15AR01 (Brasil, 2017b, p. 201): "Identificar e apreciar formas distintas das artes visuais tradicionais e contemporâneas, cultivando a percepção, o imaginário, a capacidade de simbolizar e o repertório imagético".

Já para a área de Matemática no Ensino Fundamental, a BNCC (Brasil 2017b, p. 267) estabelece oito competências específicas que abrangem "compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento" e que são para serem desenvolvidas em cinco unidades temáticas que são as seguintes: 1) Números, 2) Álgebra, 3) Geometria, 4) Grandezas e Medidas, e 5) Probabilidade e Estatística.

Para cada uma dessas unidades temáticas, a BNCC estabelece objetos de conhecimento e habilidades específicas que compreendem a necessidade de o aluno articular a linguagem matemática com outras linguagens para o entendimento mais completo da realidade, como com a linguagem das Artes Visuais.

Além disso, cumpre observar que a BNCC (Brasil 2017b, p. 266) aponta expressamente que "o Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos" e indica como estratégia para que isso seja alcançado a organização do currículo de Matemática em projetos que envolvam a resolução de problemas e a modelagem matemática.

Com base nisso, consideramos que a proposta mais coerente com a implementação do que a BNCC estabelece para o Ensino Fundamental é a apresentada em Bahmani et al. (2015).

De acordo com essa proposta, os objetos matemáticos são estudados com base nas dinâmicas do Origami para que os alunos entendam a linguagem matemática como uma ferramenta de resolução de problemas e os professores de Artes Visuais e de Matemática podem colaborar para instigar os alunos a desenvolver a fluência e a capacidade de articular as diferentes linguagens para resolver problemas e desenvolver projetos que podem ser relacionados ao seu contexto social e aos TCT.

3.3.3 Comparação com o que é estabelecido pela BNCC para o Ensino Médio

Para o Ensino Médio, a BNCC (Brasil 2017b) estabelece que as dez competências gerais da Educação Básica são para serem desenvolvidas nas mesmas áreas do conhecimento que no Ensino Fundamental conforme indicado no artigo 35-A da LDB, mas agrupadas em diferentes itinerários formativos cujo objetivo é proporcionar o aprendizado de várias competências específicas e respectivas habilidades em currículos desenvolvidos pelas escolas com base nas

especificidades das realidades sociais dos seus alunos e tendo a integração entre as áreas e a flexibilidade como princípios organizadores.

Em relação a esses itinerários formativos, cumpre observar que, embora a Matemática esteja em um itinerário diferente do das Linguagens, os itinerários formativos que a BNCC estabelece são para serem entendidos como sugestões de arranjos dos componentes curriculares que devem estar em constante interação e mútuo fortalecimento e que são os seguintes: 1) linguagens e suas tecnologias, 2) Matemática e suas tecnologias, 3) ciências da natureza e suas tecnologias, 4) ciências humanas e sociais aplicadas, e 5) formação técnica e profissional.

No contexto desses itinerários formativos, as Artes Visuais são uma unidade temática do componente Artes que tem o objetivo de desenvolver habilidades baseadas nas competências específicas do componente Artes, nas competências específicas da área de Linguagens e nas competências gerais da Educação Básica.

Para o itinerário formativo Linguagens e suas tecnologias, a BNCC estabelece sete competências específicas que compreendem o conhecimento do funcionamento das várias linguagens e a sua mobilização em diferentes campos de atuação social para que os alunos ampliem a sua compreensão e a suas possibilidades de explicação crítica dos vários contextos com os quais entrem em contato.

Além disso, para cada uma dessas competências, a BNCC estabelece habilidades gerais cujo desenvolvimento também implica na necessidade da atuação integrada entre os componentes que compunham a área de Linguagens no Ensino Fundamental bem como sua articulação com os componentes de outras áreas como os da área de Matemática.

Já para o itinerário formativo Matemática e suas tecnologias, a BNCC estabelece cinco competências específicas que compreendem utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos e utilizar diferentes registros de representação matemáticos, como o algébrico e o geométrico, o que indica que a Matemática pode ser integrada as Artes Visuais no entendimento de dinâmicas tridimensionais como as do Origami.

Além disso, para cada uma dessas competências específicas, a BNCC estabelece habilidades gerais cujo desenvolvimento também implica na necessidade da atuação integrada entre os componentes que compunham a área de Matemática no Ensino Fundamental bem como a sua articulação com os componentes de outras áreas como os da área das Linguagens.

Em relação especificamente a essas habilidades, é importante ressaltar que a BNCC (Brasil 2017b) faz considerações sobre a organização curricular para que haja o desenvolvimento das habilidades do itinerário Matemática e sugere que ele ocorra tendo em

vista três temáticas: 1) Números e Álgebra, 2) Geometria e Medidas, e3) Probabilidade e Estatística.

Por fim, cumpre observar que a BNCC (Brasil 2017b) indica que a área da Matemática no Ensino Médio deve ter o compromisso de que os alunos possam elaborar uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos e também propõe que os currículos de Matemática sejam elaborados com projetos de resolução de problemas e modelagem matemática por meio dos quais eles sejam instigados a mobilizar os seus modos próprios de raciocinar matematicamente em diferentes circunstâncias da sua vivência social.

Com base nisso e tendo em vista a continuidade da formação no Ensino Fundamental, entre as propostas de uso do Origami na Educação Matemática que analisamos, consideramos que a mais coerente com a implementação do que a BNCC estabelece para o Ensino Médio também é a apresentada em Bahmani et al. (2015).

De acordo com essa proposta, os objetos matemáticos são estudados com base em situações problemáticas de Origami e os professores de Artes Visuais e de Matemática podem colaborar para proporcionar aos alunos interações em que eles sejam instigados a articular a linguagem visual e a linguagem matemática na resolução de problemas e no desenvolvimento dos seus próprios projetos, bem como na compreensão de suas realidades sociais que podem incluir considerações sobre os TCT.

3.3.4 As propostas de Uso do Origami na Educação Matemática que foram escolhidas para serem analisadas no próximo capítulo

Com base na comparação que fizemos entre as propostas de uso do Origami na Educação Matemática que analisamos e o que a BNCC estabelece para as Artes Visuais e a Matemática escolhemos as propostas apresentadas por Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Oberman (2015), e por Bahmani et al. (2015) para analisarmos mais detidamente no próximo capítulo e fundamentarmos a nossa proposta didática prática que apresentamos no capítulo 5.

Embora praticamente todas as propostas de uso do Origami na Educação Matemática que analisamos tenham se mostrado possíveis de serem adaptadas ao que é estabelecido pela BNCC e interessantes para fundamentarmos a nossa proposta, decidimos escolher essas que foram mencionadas por terem sido as que identificamos como as mais estruturadas e mais

possíveis de servirem de base para uma proposta de contribuição que um professor de Artes Visuais possa dar para a Educação Matemática com o Origami.

Além disso, elas também se apresentaram como mais ricas em informações que poderíamos ter acesso, inclusive por intermédio do contato direto com os seus responsáveis por email, recurso esse que utilizamos com sucesso.

Sendo assim, no próximo capítulo, analisamos as propostas de uso do Origami na Educação Matemática do Programa *Origametria*, apresentada em Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Oberman (2015), e do Sistema NODET, apresentada em Bahmani et al. (2015), com o objetivo de apresentarmos a possibilidade delas servirem para fundamentarmos a nossa proposta didática prática.

4 As propostas de uso do Origami na Educação Matemática que selecionamos

Neste capítulo, expomos a quinta etapa da nossa pesquisa, na qual analisamos as propostas de uso do Origami na Educação Matemática do Programa *Origametria* de Israel e do Sistema NODET do Irã que consideramos as mais condizentes com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática com o objetivo de averiguarmos a possibilidade de elas fundamentarem a nossa proposta didática prática.

Como será apresentado, embora ambas tenham se mostrado possíveis de serem adaptadas ao que é estabelecido pela BNCC para o Ensino Infantil, Fundamental ou Médio, escolhemos apresentar uma proposta para o Ensino Médio baseada na proposta do Sistema NODET por entendermos que isso atenderia melhor as nossas expectativas em relação aos resultados desta nossa pesquisa.

A despeito dessa escolha, decidimos manter neste relatório toda a análise que fizemos da proposta do Programa *Origametria*, pois consideramos as suas características e as observações que fizemos sobre elas extremamente ricas em reflexões que foram úteis para o nosso trabalho e que podem ser úteis para outros pesquisadores.

Sendo assim, nas seções a seguir, apresentamos a análise que fizemos dessas duas propostas do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhes servem de base; da formação dos seus professores; da elaboração de suas aulas; de suas estratégias didáticas; de exemplos de suas atividades; e fazemos considerações finais sobre nossa escolha por apresentarmos uma proposta para o Ensino Médio baseada na do Sistema NODET.

Cumpramos ressaltar que, embora não tenhamos o objetivo de apresentar uma proposta que inclua um curso preparatório para professores, decidimos analisar como se dá a formação dos professores envolvidos nessas duas propostas pelo nosso interesse nas possibilidades que elas apresentam de os professores de Artes Visuais e de Matemática colaborarem em uma atividade interdisciplinar com o Origami na qual seja levado em conta o que é estabelecido pela BNCC para os componentes Artes Visuais e Matemática.

4.1 O Programa *Origametria* à luz do que é estabelecido pela BNCC

Consideramos que a proposta de uso do Origami na Educação Matemática do programa *Origametria* pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC para o Ensino Infantil e pode ser desenvolvida para que seja uma atividade interdisciplinar entre as Artes Visuais e a Matemática na qual os professores de Artes Visuais e os de Matemática colaborem para cumprir o que é proposto pela BNCC para essa etapa de ensino.

O quadro 15 sumariza as congruências que encontramos entre a proposta do *Origametria* e o que é estabelecido pela BNCC (2017b) que apresentamos na análise que fazemos nos itens a seguir.

Quadro 15 -
Congruências Gerais identificadas entre a proposta do *Origametria* e a BNCC

Aspectos analisados	<i>Origametria</i>	BNCC
Do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhe servem de base	Baseada nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do modelo de van Hiele para que os alunos visualizem, analisem e abstraíam as propriedades geométricas das figuras ensinadas nas dobraduras realizadas.	Estabelece nos seus fundamentos pedagógicos que o compromisso da Educação Básica deve ser com a educação integral que promova as "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses

		dos estudantes" (Brasil 2017b p. 15)
Do ponto de vista da formação dos professores	Proporciona aos professores formação continuada por meio de um curso preparatório e de acompanhamento do seu trabalho nas suas respectivas escolas.	Orienta que as equipes escolares devem "construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos" e desenvolver "processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem" (Brasil 2017b p. 17)
Do ponto de vista da elaboração das aulas	Os professores que aplicam o <i>Origametria</i> e os professores de Matemática colaboram na seleção do tópico a ser ensinado e na identificação de um modelo de Origami que lhe dê visualidade e concretude.	Orienta que as escolas devem promover a "organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem" (Brasil 2017b p.16)
Do ponto de vista das estratégias didáticas utilizadas	Adota estratégia didática baseada no encorajamento, na imaginação e no aprendizado por meio da experimentação e da colaboração entre os estudantes levando em conta que eles compreendem um conteúdo somente quando estão suficientemente maduros para entendê-lo	Estabelece que os currículos devem "conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens". (Brasil 2017b. p. 16)

<p>Do ponto de vista das atividades a serem realizadas com os alunos</p>	<p>Realiza atividades apropriadas para crianças de 4 a 8 anos do Ensino Infantil ou dos primeiros anos do Ensino Fundamental de Israel fundamentadas nos níveis de desenvolvimento do modelo de van Hiele.</p>	<p>Estabelece para o Ensino Infantil que sejam desenvolvidas atividades de acordo com a idade dos alunos para lhes proporcionar a conquista dos objetivos de aprendizagem de quatro campos de experiência como, por exemplo, o objetivo para crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses) de apreender a "expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais" (EI03TS02) do campo "traços, sons, cores e formas"</p>
--	--	--

Fonte: elaborado pelos autores

O *Origametria* (<https://origametria.com>) é um Programa de ensino israelense no qual o Origami é usado no ensino do currículo de Geometria proposto pelo Ministério da Educação de Israel para crianças de 4 a 8 anos dos níveis de ensino equivalentes ao Ensino Infantil e aos primeiros anos do Ensino Fundamental brasileiros.²⁰

Os principais organizadores do *Origametria* são o "Centro Israelita de Origami" (*Israeli Origami Center - IOC*), a artista plástica e educadora israelense, Miri Golan, e o artista plástico inglês, Paul Jackson.

As principais referências que utilizamos para a nossa análise são os endereços eletrônicos do Centro e do Programa e as publicações que resultaram das apresentações de Miri Golan e de Paul Jackson na quarta, quinta e sexta edições do OSME.

²⁰ Embora as fontes utilizadas para este artigo tratem principalmente da aplicação do Programa *Origametria* para alunos de 4 a 6 anos matriculados na etapa equivalente a Educação Infantil brasileira e de 6 a 8 anos matriculados nos primeiros anos da etapa equivalente ao Ensino Fundamental brasileiro (*kindergarten and early primary school students*), as informações disponibilizadas por meio do endereço eletrônico do Programa indicam que ele pode ser aplicado para alunos até do sexto ano (*elementary school grades one through six*) e apresenta atividades condizentes com essa etapa curricular. A respeito das idades das crianças dessas etapas de ensino no Brasil, destacamos que o Supremo Tribunal Federal do Brasil (STF) decidiu no dia 1 de Agosto de 2018 que as idades limites para o ingresso na Educação Infantil e no Ensino Fundamental são de 4 e 6 anos e que identificamos que essas idades coincidem com as idades dos alunos aos quais as fontes que consultamos se referem.

O Programa teve início em 1992 quando Miri Golan e o IOC elaboraram um plano de ensino de Origami para crianças com o objetivo de desenvolver suas habilidades de aprendizado que se mostrou uma importante ferramenta para o ensino de Geometria e que foi reelaborado por diversos especialistas para ser ministrado como uma aula integrada ao currículo dessa matéria.

Como aponta Golan (2011), a partir dessa reelaboração, que foi concluída em 2002, o Programa recebeu o nome de *Origametria*; passou por um período de testes durante o qual se mostrou um sucesso; foi instituído como um Programa de treinamento de professores do nível equivalente ao Ensino Infantil brasileiro em 2005; foi aprovado pelo Ministério da Educação de Israel em 2008; foi novamente reelaborado e expandido em 2010; e, atualmente, é aplicado para mais de 10 mil alunos de escolas judaicas, árabes e cristãs, que continuam a atestar sua efetividade para o ensino de Geometria obtendo melhores notas no teste nacional de Matemática TIMMS (*Trends in International Mathematics and Science Study* ou Estudo sobre As Tendências Internacionais em Matemática e Ciências).

Por fim, cumpre ressaltar que o Programa *Origametria* está em constante processo de transformação e o que destacamos a seguir são somente as suas características atuais que julgamos importantes de serem analisadas para os propósitos da nossa pesquisa.

4.1.1 Do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhe servem de base

Segundo Golan (2011), o *Origametria* foi elaborado pela colaboração de diversos especialistas e foi implementado sem que fosse baseado em uma teoria específica, mas muitos paralelos foram percebidos entre a sua estrutura e os níveis do modelo de entendimento geométrico do casal de pesquisadores neerlandeses van Hiele (1986) e ele passou ter esse modelo como referência.

Sendo assim, embora o Programa tenha sido criado sem que fosse baseado em uma teoria específica sobre o ensino e o aprendizado de Geometria, passou a ter a sua elaboração guiada pelos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do modelo de van Hiele e suas atividades de Origami passaram a ser pensadas como uma ferramenta para que os alunos visualizem, analisem e abstraíam as propriedades geométricas conforme os três primeiros níveis de entendimento indicados por esse modelo.

De acordo com o modelo de van Hiele (1986), o raciocínio das crianças sobre os conceitos geométricos pode ser analisado em cinco níveis sucessivos e elas poderão

compreende-os conforme sua apresentação e o seu ensino respeitarem a passagem da sua capacidade de entendimento por cada um desses níveis.

O quadro 16 apresenta os níveis do modelo de van Hiele e como a metodologia do *Origametria* usa o Origami para que a experiência dos alunos com os conceitos geométricos respeite a progressão de sua capacidade de entendimento conforme indicada pelos três primeiros níveis desse modelo de acordo com informações fornecidas pelo endereço eletrônico do Programa e por Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Obernam (2015).

Quadro 16 -
Níveis do modelo de van Hiele e suas correspondências nas etapas do Programa *Origametria*

Previsões dos níveis de entendimento geométrico do modelo de van Hiele	Etapas do Programa <i>Origametria</i>
<p>Nível 0: Visualização:</p> <p>Os alunos conseguem identificar as formas geométricas, entender as diferenças entre elas e aprender os seus nomes junto com alguns termos geométricos.</p>	<p>Etapa Ensino Infantil e início do Ensino Fundamental:</p> <p>São realizados Origamis com os quais os alunos têm experiências com formas simples, como os quadrados, os triângulos e os retângulos, e com expressões visuais de conceitos básicos, como os conceitos de lado, de vértice e de diagonal.</p>
<p>Nível 1: Análise:</p> <p>Os alunos conseguem identificar e analisar as características das formas geométricas e podem apreender suas definições, que passam de intuições inconscientes para conhecimentos conscientes.</p>	<p>Etapa do 2º ano do Ensino Fundamental:</p> <p>São realizados Origamis com os quais os alunos têm experiências com diversas formas que lhes são apresentadas por meio dos seus conceitos e das suas definições geométricas precisas como as de triângulo isósceles e de simetria linear.</p>
<p>Nível 2: Abstração:</p> <p>Os alunos conseguem identificar as diferenças e relações entre os polígonos, agrupá-los em conjuntos e subconjuntos e entender a importância do uso de suas definições geométricas corretas.</p>	<p>Etapa do 3º ano do Ensino Fundamental:</p> <p>São realizados Origamis com os quais os alunos testam as características dos conceitos geométricos em diferentes contextos e são levados a separar e a definir formas geométricas parecidas, como os triângulos escalenos e isósceles ou os paralelogramos e rombos.</p>

--	--

Fonte: Golan e Jackson (2009), Golan (2011), Golan e Oberman (2015), Van Hile (1986) e Burger e Chaughnessy (1996)

Nota: Existem níveis mais avançados descritos por van Hiele, mas, para este estudo, somente os três primeiros níveis são tratados.

Com base nisso, do ponto de vista da sua fundamentação teórica, a proposta de uso do Origami na Educação Matemática do Programa *Origametria* está em acordo com os fundamentos pedagógicos da BNCC (Brasil 2017b) que determinam que o compromisso da Educação Básica deve ser com a educação integral em respeito aos estágios de desenvolvimento dos alunos e pode ser desenvolvida de forma que proporcione a eles a vivência nos diferentes campos de experiência que o documento estabelece para o Ensino Infantil.

Acrescenta-se a isso que essa proposta possibilita a persecução dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento estabelecidos pela BNCC para a Educação Infantil como, por exemplo, o direito EI03TS02 de expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais.

4.1.2 Do ponto de vista da formação dos seus professores

De acordo com as fontes consultadas, o Programa *Origametria* forma os seus professores para que eles aprendam os conceitos de Geometria que vão ensinar e os modelos de Origami pelos quais poderão representá-los e explicá-los para os alunos para que possam proporcionar-lhes a sua visualização e experiência concreta em conformidade com o currículo nacional de Israel.

Segundo Golan e Oberman (2015), o curso que forma professores para ministrar o Programa *Origametria* aceita no máximo 20 professores em cada ciclo, é dividido em 8 seções que totalizam 32 horas de aula ao longo de vários meses e é composto de 3 partes como mostra o quadro 17.

Quadro 17 -

Etapas do curso de formação de professores para ministrarem o Programa *Origametria*

--	--	--

<p>Etapa 1: (10 horas): Aulas sobre os tópicos de Geometria da Ensino Infantil e do Ensino Fundamental de acordo com o currículo de Israel com base na prática do Origami.</p>	<p>Etapa 2: (12 horas) Aulas sobre os métodos do <i>Origametria</i> nas quais os professores que já os aplicaram em suas escolas compartilham suas experiências.</p>	<p>Etapa 3: (10 horas) Aulas sobre conceitos geométricos adicionais nas quais os professores apreendem geometria tridimensional básica para sentirem segurança ao ensinar.</p>
--	--	--

Fonte: Golan e Oberman (2015)

Além disso, de acordo com Golan e Oberman (op. cit.), em todas essas etapas, junto com o conteúdo de Geometria relacionado ao Origami, os professores estudam as teorias de Piaget, de van Hiele e de Vygotsky sobre como as crianças aprendem e como elas são aplicadas no *Origametria*.

Por fim, depois que o curso é concluído, Golan e Oberman (op. cit.) apontam que ocorre uma de suas etapas mais importantes, que é o período durante o qual os professores que o ministraram visitam cada um dos professores que se formaram para observá-los em suas escolas e ajudá-los a ajustar a implementação do Programa às suas realidades específicas.

Com base nisso, do ponto de vista da formação dos seus professores, a proposta de uso do Origami na Educação Matemática do Programa *Origametria* pode ser desenvolvida para a realidade brasileira por contemplar as orientações da BNCC (Brasil 2017b) para que as equipes escolares proporcionem aos professores uma formação conjunta e contínua que melhore as suas práticas profissionais.

4.1.3 Do ponto de vista da elaboração das suas aulas

De acordo com Golan e Jackson (2009), para cada aula do Programa ser elaborada, os professores de Matemática e os de *Origametria* selecionam o tópico do currículo de Geometria que vão ensinar e um modelo de Origami em cuja sequência de dobras ele possa ser explorado de forma focada.

Uma vez tendo sido feita a seleção do tópico e do modelo com o qual ele vai ser trabalhado, os professores do *Origametria* praticam a realização do modelo, identificam exemplos do tópico selecionado em sua dobradura e programam em quais momentos de sua realização em aula ela será interrompida para que o tópico seja estudado.

Ainda segundo os mesmos autores (op. cit.), depois de terem colaborado na seleção do tópico a ser ensinado e na identificação de um modelo de Origami que lhe dê visualidade e concretude, os professores de Matemática e de *Origametria* vão trabalhá-lo em suas respectivas aulas concomitantemente, com o professor de *Origametria* seguindo uma sequência de aula²¹ que é baseada na realização das dobraduras e não no Origami pronto, como é apresentado no quadro 18.

Quadro 18 -
Sequência de aula a ser seguida pelo professor do *Origametria*

<p style="text-align: center;"><i>Insight</i> de Geometria:</p> <p style="text-align: center;">Apresentação do tópico de Geometria que será trabalhado, sem que seja dado um nome ao Origami que será realizado, para que os alunos tenham a sua atenção fixa no conteúdo ensinado e se surpreendam com o resultado final da tarefa.</p>
<p style="text-align: center;">Exploração:</p> <p style="text-align: center;">Condução das dobraduras de forma que os alunos busquem o tópico selecionado em sua sequência.</p>
<p style="text-align: center;">Propriedades e Contexto:</p> <p style="text-align: center;">Estudo do tópico de diferentes maneiras nas interrupções programadas durante a dobradura e depois dela ter sido realizada.</p>
<p style="text-align: center;">Resumo da Lição:</p> <p style="text-align: center;">Checagem do aprendizado de todos os alunos e realização de um sumário do tópico ensinado com base no Origami que eles poderão levar para casa, que raramente tem sua geometria final analisada.</p>

²¹ De acordo com Golan e Oberman (2015), tanto as sequências das aulas do curso de formação de professores para o *Origametria* quanto as sequências das aulas do *Origametria* são guiadas pelas quatro formas de desenvolver o pensamento criativo indicadas pelas pesquisas de Joy Paul Guilford, Phillip. R. Christensen e Ellis Paul Torrance: 1) pelo estímulo da fluência ou da habilidade de o aluno apresentar exemplos, casos ou situações dentro dos limites da tarefa; 2) pelo estímulo da flexibilidade ou da habilidade de o aluno mudar de um modo de pensar para o outro e de produzir exemplos e soluções que os relacionem; 3) pelo estímulo da elaboração ou da habilidade de o aluno expandir o seu conhecimento para adicionar detalhes e desenvolver esses detalhes em combinação com outras idéias; e 4) pelo estímulo da originalidade ou da habilidade de o aluno relacionar os problemas de formas diferentes e produzir situações inesperadas. Para mais detalhes sobre essa pesquisas, olhar: Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: MacGraw-Hill; Guilford, J. P. & Christensen, P. R. (1973). The One-way Relation between Creative Potential and IQ. *The Journal of Creative Behavior*. 7:4. (pp. 247-252) Disponível em <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.2162-6057.1973.tb01096.x>> acesso em 04/06/2021; e Torrance, E. P. (1980). Growing Creatively Gifted: The 22-year Longitudinal Study. *The Creative Child and Adult Quarterly*.3. (pp. 148 - 158) Disponível em <https://www.centerforgifted.org/TorranceJournal_V1.pdf> acesso em 04/06/2021.

Fonte: Golan e Jackson (2009)

Com base nisso, do ponto de vista da elaboração das suas aulas, entendemos que a proposta do *Origametria* é uma estratégia com a qual as equipes pedagógicas podem elaborar os currículos de forma dinâmica, interativa e colaborativa em concordância com o que é estabelecido pela BNCC (2017b) e engajar os professores no desenvolvimento de atividades para proporcionar aos alunos a vivência nos campos de experiência conforme ela indica para o Ensino Infantil.

4.1.4 Do ponto de vista da sua estratégia didática

Segundo Golan e Jackson (2009) e Golan e Oberman (2015), a estratégia didática do *Origametria* é baseada no encorajamento, na imaginação e no aprendizado por meio da experimentação (*discovery through experimentation*) e segue os princípios apresentados na quadro 19.

Quadro 19 -
Estratégia didática das aulas do *Origametria*: princípios que os professores devem seguir em suas relações com os alunos

<p>Princípio I: O professor deve praticar a realização do modelo selecionado para que possa explicá-la da forma mais fácil possível para os alunos.</p>
<p>Princípio II: O professor deve omitir o nome do modelo que será obtido com as dobraduras para que os alunos tenham a sua atenção dirigida ao processo de sua realização e possam se surpreender com os resultados alcançados.</p>
<p>Princípio III: O professor deve ter o seu próprio papel para mostrar aos alunos as etapas das dobraduras e jamais tocar nas dobraduras dos alunos para que eles as percebam como um trabalho próprio que eles conseguem realizar sozinhos</p>
<p>Princípio IV: (<i>positive reinforcement</i>)</p>

<p>O professor deve inspecionar as dobraduras dos alunos e encorajá-los a continuar sua realização.</p>
<p>Princípio V: (<i>positive feedback</i>)</p> <p>O professor deve elogiar as realizações dos alunos e conduzi-los pela realização das dobraduras de forma a não expô-los as noções de "erro" ou de "acerto", já que entende-se que cada um é capaz de atingir os resultados almejados conforme o seu desenvolvimento.</p>
<p>Princípio VI:</p> <p>O professor deve levar em conta que os alunos têm diferentes habilidades motoras e noções do que seja precisão e se algum aluno pedir a opinião dele sobre a acurácia do seu trabalho ele deve lhe devolver a indagação perguntando qual a opinião dele e se ele acredita que poderia fazê-lo melhor, para ajudá-lo a desenvolver sua auto crítica e evitar que fique desapontado.</p>

Fonte: Golan e Jackson (2009) e Golan e Oberman(2015)

Além disso, segundo Golan (2011), a estratégia didática do *Origametria* leva em conta que os alunos compreendem um conteúdo somente quando estão suficientemente maduros para entendê-lo e é elaborada com o objetivo de fazê-los atingir esse amadurecimento no tempo requerido pelas diretrizes de ensino do Ministério da Educação de Israel.

Segundo a mesma autora, esse objetivo é alcançado com o professor proporcionando aos alunos diversas oportunidades de eles apreenderem os conteúdos geométricos por meio de sua repetida identificação nas dobraduras e por meio de várias perguntas que eles poderão cooperar entre si para responder.

Sendo assim, de acordo com a mesma autora, a estratégia didática do *Origametria* é elaborada para que os professores proporcionem aos alunos amplas oportunidades de eles visualizarem e experimentarem expressões concretas dos conceitos ensinados e sejam incentivados a cooperar no seu aprendizado.

Com base nisso, do ponto de vista da sua estratégia didática, entendemos que a proposta de uso do Origami do *Origametria* está de acordo com o que a BNCC (2017b, p. 16) estabelece sobre os currículos deverem "conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens".

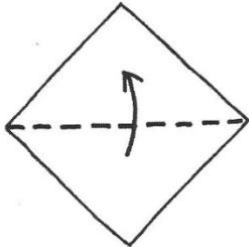
4.1.5 Do ponto de vista do exemplo de uma das atividades realizadas com os alunos

A atividade que escolhemos para ser analisada como um exemplo das interações que o *Origametria* proporciona aos alunos é a que Golan (2011) apresenta no artigo que publicou na quinta edição do OSME, que ocorreu em 2010, em Singapura, e consiste no Origami denominado de *pato chinês tradicional*²².

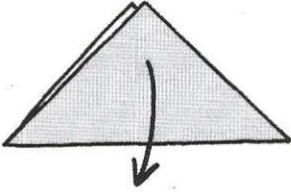
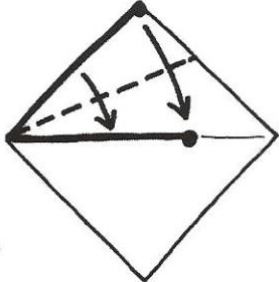
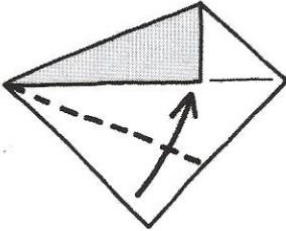
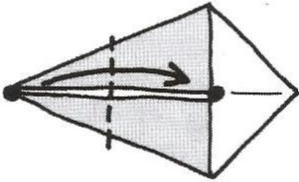
De acordo com a educadora, essa atividade é apropriada para alunos do Ensino Infantil ou dos primeiros anos do Ensino Fundamental de Israel e as etapas de sua realização podem ser acompanhadas de questões relacionadas ao nível visual (nível 0) ou ao nível analítico (nível 1) do modelo de van Hiele como é apresentado no quadro 20.

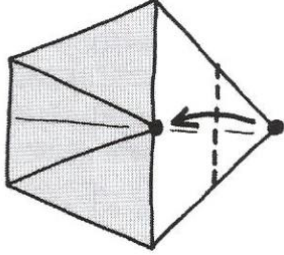
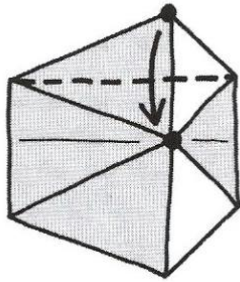
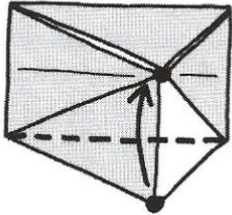
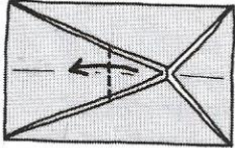
Tendo isso em vista, levando em conta o contexto educacional do Brasil, consideramos relevante destacar que essa atividade da forma como é proposta por Golan (2011) seria adequada somente para crianças do Ensino Fundamental brasileiro, já que o Ensino Infantil deste país é centrado na ludicidade e no desenvolvimento da coordenação motora de forma que o nível visual do modelo de van Hiele não é atingido por não ser necessária qualquer menção aos nomes das figuras apresentadas.

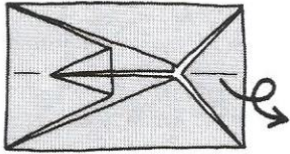
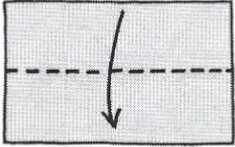
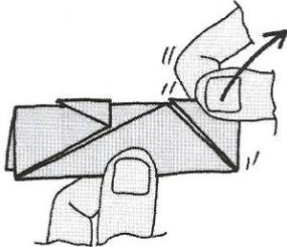
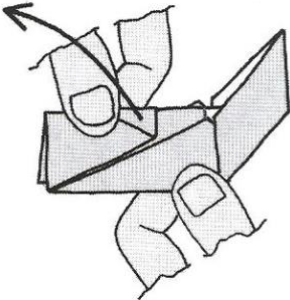
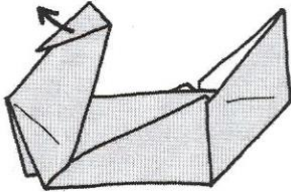
Quadro 20 -
Sequência de realização do Origami *pato chinês tradicional* com perguntas direcionadas para alunos no nível visual ou no nível analítico do modelo de van Hiele

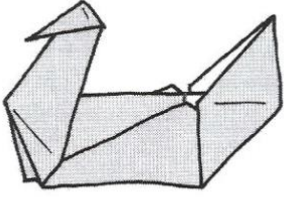
	<p>Etapa 1:</p> <p>Nível Visual: Quais polígonos vocês podem encontrar?; Quais triângulos vocês podem identificar?; Quais tipos de ângulos vocês podem encontrar no quadrado?;</p> <p>Nível Analítico: Vocês sabem qual é o resultado da soma do valor dos ângulos de um quadrado?.</p>
	<p>Etapa 2:</p> <p>Nível Visual:</p>

²² É fundamental ter em mente que embora esse modelo seja conhecido pelo nome de *traditional chinese duck* ou pato chinês tradicional, a estratégia didática do *Origametria* determina que os professores jamais devem se referir aos modelos por um nome específico.

	<p>Quais polígonos vocês podem encontrar?; Quais triângulos vocês podem identificar?; Quais são os ângulos desse triângulo?</p> <p>Nível Analítico: Vocês sabem qual o resultado da soma dos ângulos de um triângulo?.</p>
	<p>Etapa 3:</p> <p>Nesta etapa, o professor ensina aos alunos a realização da dobradura, mas não tem necessidade de analisar sua geometria, já que ela implicaria no tratamento de bissecções, e esse é um tópico de Geometria que não é requerido no currículo do Ensino Infantil ou dos primeiros anos do Ensino Fundamental de Israel.</p>
	<p>Etapa 4:</p> <p>Nível Visual: Quais polígonos vocês podem encontrar?; Quais triângulos vocês podem encontrar?; Quais os tipos de ângulos que vocês podem encontrar?</p> <p>Nível Analítico: Quais os valores dos ângulos dos quadriláteros criados depois dessa dobra ter sido realizada?</p>
	<p>Etapa 5</p> <p>Nível Visual: Quais polígonos vocês podem encontrar?; Quais triângulos vocês podem encontrar?; Quais tipos de ângulos vocês podem ver nesses polígonos?;</p> <p>Nível Analítico: Quais são os valores dos ângulos que vocês podem identificar em cada quina?</p>

	<p>Etapa 6</p> <p>Nível Visual: Quais polígonos vocês podem encontrar?; Quais triângulos vocês podem encontrar?; Quais tipos de ângulos vocês podem ver nesse pentágono?</p> <p>Nível Analítico: Vocês sabem qual o resultado da soma dos valores dos ângulos de um pentágono?</p>
	<p>Etapa 7</p>
	<p>Etapa 8</p>
	<p>Etapa 9</p> <p>Nível Visual: Quais polígonos vocês podem encontrar?; Quais triângulos vocês podem encontrar?; Quais tipos de ângulos vocês podem ver?</p> <p>Nível Analítico: Vocês podem demonstrar que o resultado da soma do valor dos ângulos de onde os quatro triângulos se encontram é 360°?</p>

	Etapa 10
	Etapa 11: Nível Visual: Quantos retângulos vocês podem encontrar?
	Etapa 12
	Etapa 13
	Etapa 14

	<p style="text-align: center;">Etapa 15:</p> <p style="text-align: center;">Nesta etapa, o modelo está concluído e o professor não deve se referir a ele por um nome específico, para que os alunos se sintam instigados a usar a sua criatividade e imaginação para nomeá-lo e brincar com ele como quiserem.</p>
---	--

Fonte: adaptado de Golan (2011)

Com base no exemplo dessa atividade, a despeito da forma como ela é apresentada em Golan (2011) torná-la adequada somente para o Ensino Fundamental brasileiro, consideramos que ela e as atividades propostas pelo *Origametria* que pudemos avaliar por meio do endereço eletrônico do programa (<https://origametria.com/>) podem ser adaptadas ao que é estabelecido pela BNCC por poderem ser desenvolvidas de forma que proporcionem aos alunos a conquista de objetivos de aprendizagem de vários dos campos de experiência que a BNCC (2017b) estabelece para o Ensino Infantil.

Um exemplo de objetivo que poderia ser proporcionado é o EI03TS02 para crianças pequenas (4 anos a 4 anos e 11 meses) do campo "traços, sons, cores e formas": objetivo de apreender a "expressar-se livremente por meio de desenho, pintura, colagem, dobradura e escultura, criando produções bidimensionais e tridimensionais." (BNCC, 2017b p. 48)

4.2 A Proposta de uso do Origami na Educação Matemática do Sistema NODET à luz do que é estabelecido pela BNCC

Neste item analisamos a possibilidade da proposta de uso do Origami na Educação Matemática da unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática e servir para fundamentarmos a nossa proposta de contribuição que um professor de Artes Visuais possa dar para a Educação Matemática com o Origami.

Como será exposto, entendemos que a proposta do Sistema NODET pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio e serve para fundamentarmos a nossa proposta por poder ser elaborada para que seja uma atividade interdisciplinar entre Artes Visuais e Matemática.

O quadro 21 sumariza as congruências que identificamos entre a proposta do Sistema NODET e o que é estabelecido pela BNCC (2017b) que apresentamos na análise que fazemos nos itens a seguir.

Quadro 21 -
Congruências Gerais identificadas entre a proposta do Sistema NODET e a BNCC

Aspectos analisados	Sistema NODET	BNCC
Do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhe servem de base	Segue uma abordagem similar à do modelo de ensino e de aprendizagem <i>Schoolwide Enrichment Model</i> que foi desenvolvido pelos pesquisadores Joseph Renzulli e Sally Reis e que propõe que os conteúdos sejam ensinados com os alunos sendo instigados a escolher, analisar e fazer uma apresentação pública do estudo de um tópico do seu interesse	Orienta que os currículos sejam desenvolvidos para "contextualizar os conteúdos curriculares identificando estratégias para apresentá-los, conectá-los e torná-los significativos" para o alunos. (Brasil 2017b p. 16)
Do ponto de vista da formação dos professores	Orienta os professores a conectar os conteúdos curriculares com as realidades e os interesses dos alunos	Estabelece nos seus fundamentos pedagógicos que o compromisso da Educação Básica deve ser com a educação integral que promova as "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes" (Brasil 2017b p. 15)
Do ponto de vista da elaboração das aulas	A sequência das aulas é seguida pelo professor de forma flexível para que os alunos compreendam os conceitos estudados e possam usá-los da sua maneira nos seus próprios projetos	Orienta que as equipes pedagógicas desenvolvam "estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação a gestão do ensino e da aprendizagem" (Brasil 2017b p. 16)

<p>Do ponto de vista das estratégias didáticas utilizadas</p>	<p>Segue as sugestões de como devem ser as relações entre os professores e os alunos do <i>Schoolwide Enrichment Model</i> com o objetivo de ajudar os alunos a compreenderem os fundamentos dos tópicos estudados, mas manterem sua própria forma de entendê-los e de utilizarem os seus conceitos</p>	<p>Orienta que os currículos devem ser elaborados de forma que os professores possam "contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas" e "motivar e engajar os alunos nas aprendizagens" (BNCC, 2017b, p. 16 e 17)</p>
<p>Do ponto de vista das atividades a serem realizadas com os alunos</p>	<p>As atividades são estruturadas para que os professores proporcionem aos alunos amplas oportunidades de eles entenderem a matemática dos tópicos estudados como uma linguagem com a qual eles podem resolver problemas e realizar os seus próprios projetos.</p>	<p>Sugere que sejam desenvolvidas atividades aplicadas a situações reais de interesse dos alunos para lhes proporcionar a aprendizagem dos objetos de conhecimento e habilidades estabelecidos como, por exemplo, a Habilidade EM13MAT105 da Competência 1 do Itinerário Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio: "utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" (Brasil 2017b, p. 533),</p>

Fonte: elaborado pelos autores

A unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais faz parte do Sistema NODET (*National Organization for Development of Exceptional Talents*)²³ que é um Sistema de escolas do Irã para alunos superdotados idades entre ao redor de 14 e 17 anos do nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro.

Os principais organizadores dessa unidade de estudos são os pesquisadores Ali Bhamani, Kiumars Sharif e Andrew Hudson, e as principais referências que utilizamos para a nossa análise são a publicação que resultou da apresentação que eles fizeram na sexta edição do OSME e a pesquisa sobre o Sistema NODET realizada por Mehdi Ghahremani (2013).

Como apontam Bhamani et al. (2015), o Sistema NODET teve início como um sistema governamental para selecionar e preparar alunos de alto desempenho acadêmico para as áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática²⁴ em 1967; foi fechado com a Revolução Iraniana em 1979; foi reformulado e restabelecido em 1987; e, atualmente, tem unidades em Teerã e em várias outras cidades do Irã, é aplicado para mais de 11 mil alunos, e conta com um quadro de egressos do qual fazem parte vários cientistas e matemáticos internacionalmente reconhecidos, como Maryam Mirzakhani, que foi a primeira mulher e a primeira iraniana a ganhar a Medalha Fields.

Como explicam Ghahremani (2013) e Bhamani et al. (2015), entre 2007 e 2009, Kiumars Sharif, que é egresso do Sistema NODET e hoje é um dos seus professores e da Universidade de Teerã, identificou que os seus alunos tinham dificuldades para entender fractais, séries infinitas e conceitos relacionados, e desenvolveu a unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais que analisamos como uma atividade extracurricular ao Sistema que faz uso do Origami para ensiná-los.

É importante ressaltar que tanto a unidade de estudos em questão quanto o Sistema NODET como um todo estão em constante processo de reelaboração e que o que destacamos a seguir são somente as suas características atuais que julgamos importantes de serem analisadas para os propósitos da nossa pesquisa.

²³<<http://www.nodet.net/>> acesso em 04/06/2021.

²⁴Nos países de língua inglesa e em âmbito internacional, as áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática são conhecidas pela sigla STEM, que é formada pelas letras iniciais dos seus nomes em Inglês: *Science, Technology, Engeneering e Mathematics*.

4.2.1 Do ponto de vista das teorias de ensino e de aprendizagem que lhe servem de base

Segundo Bhamani et al. (2015), da mesma forma que o Sistema NODET como um todo, sua unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais segue uma abordagem similar à do modelo de ensino e de aprendizagem *Schoolwide Enrichment Model* que foi desenvolvido pelos pesquisadores Joseph Renzulli e Sally Reis e que propõe que os conteúdos sejam ensinados com os alunos sendo instigados a escolher, analisar e fazer uma apresentação pública do estudo de um tópico do seu interesse.

De acordo com Renzulli e Reis (2010), os alunos têm diferentes habilidades, criatividade e capacidades de direcionar as suas características para alguma área da performance humana, e eles podem ser melhor estimulados se incentivados a pesquisar tópicos do seu interesse como propõe o modelo *Schoolwide Enrichment Model*, particularmente na configuração na qual Bhamani et al. (2015) o utilizam para estruturar o uso do Origami pela unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET.

Como apontam esses pesquisadores e Ghahremani (2013), o *Schoolwide Enrichment Model* pode servir para que os alunos direcionem suas habilidades para a pesquisa ativa em alguma área da performance humana por meio de atividades que cultivem os seus interesses e é composto de três momentos que podem ser entendidos como momentos de enriquecimento pessoal para os alunos e que serviram de base para estruturar o uso do Origami pela unidade do Sistema NODET como é apresentado na quadro 22.

Quadro 22 -
Momentos de enriquecimento pessoal para os alunos do modelo *Schoolwide Enrichment Model* no uso do Origami pelo Sistema NODET

Momentos de enriquecimento pessoal para os alunos do modelo <i>Schoolwide Enrichment</i>	O uso do Origami pela unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET
<p style="text-align: center;">Momento I: Atividades Gerais de Exploração</p> <p>Os alunos são instigados a explorarem os seus interesses e a participarem de atividades a respeito de tópicos que podem despertar sua curiosidade e que podem envolver outras pessoas, como membros do</p>	<p style="text-align: center;">Introdução do Tópico: Exploração geral sobre Autossimilaridade e Fractais:</p> <p>O professor apresenta aos alunos os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por meio da exploração das diversas circunstâncias da natureza e da vida</p>

corpo docente, os seus pais, ou membros da comunidade.	cotidiana a partir das quais eles foram desenvolvidos como um campo da linguagem matemática.
<p>Momento II: Atividades de Treinamento em Grupo:</p> <p>Com base nos seus interesses demonstrados no Momento I, os alunos são instigados a receber algum tipo de orientação do professor a respeito de como esses interesses e curiosidades podem ser abordados de forma estruturada ou partir diretamente para a sua pesquisa geral.</p>	<p>Atividades direcionadas pelo professor: Desafios de Origami a serem resolvidos por meio dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais:</p> <p>O professor propõem aos alunos desafios de Origami para serem solucionados por meio do uso dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais enquanto eles os discutem de forma mais aprofundada.</p>
<p>Momento III: Investigação Individual e em Grupo de Problemas Reais</p> <p>Os alunos selecionam um tópico específico para se comprometerem a pesquisá-lo de forma avançada tendo em vista aplicações práticas e a resolução de problemas reais.</p>	<p>Investigação de Projetos Criativos de Interesse: Desenvolvimento e apresentação de Projetos Pessoais com a ajuda do professor</p> <p>Os alunos são auxiliados pelo professor a utilizar os desafios de Origami solucionados como base para desenvolverem e apresentarem publicamente um projeto de Origami do seu interesse cuja elaboração envolva os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais.</p>

Fonte: adaptado de Renzulli e Reis (2010), Bahmani et al. (2015) e Gharemani(2013)

Com base no quadro 22, é possível apontar que a metodologia dessa unidade de estudos do NODET utiliza os momentos do *Schoolwide Enrichment Model* com algumas adaptações para que os alunos se envolvam em desafios de Origami por meio dos quais eles sejam instigados a entender os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais como um campo da linguagem Matemática com a qual os seus próprios projetos podem ser desenvolvidos.

Com base nisso, do ponto de vista da sua fundamentação teórica, a proposta de uso do Origami na Educação Matemática dessa unidade pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC por poder ser usada pelas equipes pedagógicas das escolas para "contextualizar os conteúdos curriculares identificando estratégias para apresentá-los, conectá-los e torná-los significativos" para o alunos da forma como a BNCC (Brasil 2017b p. 16) estabelece que devem ser elaborados os currículos.

Além disso, desse mesmo ponto de vista, a proposta dessa unidade também pode servir para fundamentarmos a nossa proposta por poder ser adaptada para que seja uma atividade interdisciplinar na qual os professores de Artes Visuais e de Matemática colaborem no uso do Origami para a elaboração de propostas pedagógicas que proporcionem a aprendizagem integrada das competências e habilidades das suas respectivas áreas conforme a BNCC estabelece para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

4.2.2 Do ponto de vista da formação dos seus professores

Tendo em vista que não foram encontradas informações específicas sobre a formação dos professores para essa unidade do Sistema NODET e que as publicações utilizadas para esta pesquisa indicam que Kiumars Sharif, Ali Bhamani e Andrew Hudson são os seus principais professores, é possível considerar que ela é a mesma formação que para os professores do Sistema como um todo e que é baseada nas etapas do quadro 23, como sugeridas por Ghahremani (2013), acrescidas de alguma formação sobre a arte do Origami.

Quadro 23 -
Etapas para a formação de professores na unidade sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET

Formar-se no Ensino Médio no Sistema NODET como um aluno de bom desempenho acadêmico	Formar-se no Ensino Superior em alguma área de Ciências ou Tecnologia e ter uma atuação acadêmica e profissional de destaque.	Estudar em profundidade os Origamis a partir dos quais os conceitos de Autossimilaridade e Fractais podem ser trabalhados
--	---	---

Fonte: adaptado de Ghahremani (2013)

Com base nisso, do ponto de vista da formação dos seus professores, entendemos que a proposta de uso do Origami na Educação Matemática dessa Unidade do Sistema NODET pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC e pode servir para fundamentarmos a nossa proposta didática prática que apresentamos no capítulo 5.

Temos este entendimento por considerarmos que ela instiga os professores a conectar os conteúdos curriculares com as realidades e os interesses dos alunos da mesma forma que a BNCC incentiva que as equipes escolares tenham como objetivo uma educação que proporcione

"aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes" (Brasil 2017b p. 15).

Além, disso, reforçamos esse nosso entendimento por considerarmos que essa proposta do Sistema NODET pode ser desenvolvida para que seja uma atividade interdisciplinar na qual os professores de Artes Visuais e de Matemática colaborem no uso do Origami para apresentar aos alunos uma experiência integrada das suas áreas do saber em concordância com o que estabelecem as orientações curriculares da BNCC de acordo com as quais as equipes pedagógicas devem desenvolver "estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação a gestão do ensino e da aprendizagem" (Brasil 2017b p. 16).

4.2.3 Do ponto de vista da elaboração das suas aulas

Segundo Bhamani et al. (2015), a sequência das aulas de Origami da unidade é seguida pelo professor de forma flexível para que os alunos compreendam os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e possam usá-los da sua maneira nos seus próprios projetos, como é apresentado no quadro 24.

Quadro 24 -
Sequência das aulas da unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET

<p>Exploração Geral dos conceitos de Autossimilaridades e Fractais (Baseado no Momento I do <i>Schoolwide Enrichment Model</i>):</p> <p>O professor apresenta aos alunos diversas circunstâncias da natureza e da vida cotidiana a partir das quais eles podem discutir os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, como os padrões geométricos do interior da Mesquita Sheikh Lutfollah (<i>Mosque Sheikh Lutfollah</i>) que faz parte de sua cultura e da história do Irã.</p>
<p>Apresentação de origamis relacionados aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais (Baseado no Momento II do <i>Schoolwide Enrichment Model</i>):</p> <p>Depois da exploração geral e de uma discussão preliminar sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, o professor propõem aos alunos atividades de Origami nas quais eles podem ser identificados e desenvolvidos.</p>
<p>Desafios com Origamis relacionados aos conceitos de Autossimilaridade e Fractais (Baseado no Momento II do <i>Schoolwide Enrichment Model</i>):</p>

Conforme as discussões progredirem, o professor propõe aos alunos desafios de Origami e os auxilia na abstração de suas propriedades para que eles os resolvam utilizando o que aprenderam sobre Autossimilaridades e Fractais.

Aplicação dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais em projetos de interesse dos alunos

(Baseado no Momento III do *Schoolwide Enrichment Model*):

Com o auxílio de perguntas e questionamentos, o professor conduz os alunos a graus superiores de abstração no uso dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e os incentiva a mobilizá-los para preverem o comportamento das dobraduras e preencherem tabelas que servirão de base para desenvolverem os seu projetos pessoais que deverão apresentar publicamente quando concluírem os estudos na unidade.

Fonte: adaptado de Bhamani et al. (2015)

Nota: Cumpre observar que o quadro 24 apresenta uma sequência genérica de aulas dessa unidade do Sistema NODET e que uma única das etapas nele apresentadas pode ser uma ou diversas aulas inteiras ao longo de toda a passagem dos alunos pela unidade, dependendo das circunstâncias observadas pelo professor.

Tendo isso em vista, é possível concluir que essa unidade de estudos estrutura as suas aulas para que o Origami seja um meio de apresentar aos alunos a matemática da Autossimilaridade e dos Fractais como uma linguagem com a qual eles podem fazer previsões, resolver problemas e desenvolver os seus próprios projetos.

Com base nisso, do ponto de vista da elaboração das suas aulas, entendemos que a proposta de uso do Origami na Educação Matemática dessa unidade do Sistema NODET pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC e pode servir para fundamentarmos a nossa proposta que apresentamos no capítulo 5.

Compartilhamos desse entendimento por considerarmos que essa proposta faz uso de "dinâmicas, interativas e colaborativas em relação a gestão do ensino e da aprendizagem" da mesma forma que a BNCC (Brasil 2017b p. 16) preconiza que seja realizada a elaboração dos currículos.

Além disso, compartilhamos desse entendimento por entendermos que essa proposta pode ser desenvolvida para que os professores de Artes Visuais e de Matemática colaborem no uso do Origami para proporcionar aos alunos a aprendizagem integrada dos objetos de conhecimento e das habilidades das suas respectivas áreas que a BNCC estabelece para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

4.2.4 Do ponto de vista da sua estratégia didática

Segundo Bhamani et al. (2015), a estratégia didática da unidade sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET segue as sugestões de como devem ser as relações entre os professores e os alunos do *Schoolwide Enrichment Model* e tem o objetivo de ajudar os alunos a compreenderem os fundamentos de um tópico, mas manterem sua própria forma de entendê-lo e de utilizarem os seus conceitos.

De acordo com Renzulli e Reis (2010), no *Schoolwide Enrichment Model* os professores são orientados a ajudar os alunos a melhor entenderem suas habilidades, interesses e estilos de aprendizado e a desenvolver um conjunto de diretrizes²⁵ para conduzirem as suas aulas de forma que eles tenham o melhor aproveitamento dos talentos de cada aluno, como sumarizado na quadro 25.

Quadro 25 -
Diretrizes do *Schoolwide Enrichment Model* seguida pelas aulas da unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET

<p>Diretriz I: O professor deve ter o foco de suas ações nos pontos fortes dos alunos, deve incentivá-los a demonstrar os seus talentos e interesses e coletar regularmente informações sobre eles.</p>
<p>Diretriz II: O professor deve classificar as informações obtidas em categorias gerais de habilidades, interesses e estilos de aprendizado para que possa eventualmente formar grupos de estudos com os alunos que tenham características complementares ou que possam contribuir uns com os outros.</p>
<p>Diretriz III: Com base nessas informações, o professor deve ajustar as atividade propostas para que todos os alunos se sintam incluídos, motivados e desafiados.</p>
<p>Diretriz IV:</p>

²⁵ Como é apresentado em Renzulli e Reis (2010), esse conjunto de diretrizes é denominado de *Total Talent Portfolio* ou Portfólio Total de Talentos.

O professor deve estabelecer os objetivos educacionais de forma individualizada para cada aluno e estar atento para rever as estratégias conforme esses objetivos tenham sido atingidos.
Diretriz V: O professor deve sempre revisar e analisar as informações obtidas para que possa tomar as melhores decisões sobre como proporcionar aos alunos as melhores oportunidades de enriquecimento pessoal durante as aulas.
Diretriz VI: O professor deve mobilizar essas informações atualizadas para ajudar os alunos a tomarem decisões sobre o direcionamento de suas etapas futuras de ensino e sobre os seus estudos para suas carreiras profissionais.

Fonte: Adaptado de Bhamani et al. (2015), Gharemani(2013), Renzulli e Reis (2010) e Renzulli e Reis (1997)

Com base nesse quadro, do ponto de vista da sua estratégia didática, entendemos que a proposta de uso do Origami na Educação Matemática dessa unidade pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC,

Em primeiro lugar, compartilhamos desse entendimento por considerarmos que essa proposta está de acordo com a sugestão da BNCC (Brasil 2017b p. 16) de que os currículos devem ser elaborados de forma que os professores possam "contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas".

Em segundo lugar, entendemos dessa forma por prevermos a possibilidade dessa proposta ser desenvolvida para que seja uma atividade interdisciplinar com a qual os professores de Artes Visuais e de Matemática colaborem no uso do Origami para "motivar e engajar os alunos nas aprendizagens" (BNCC, 2017b, p. 17) e no desenvolvimento dos seus próprios projetos.

4.2.5 Do ponto de vista do exemplo de uma das atividades realizadas com os alunos

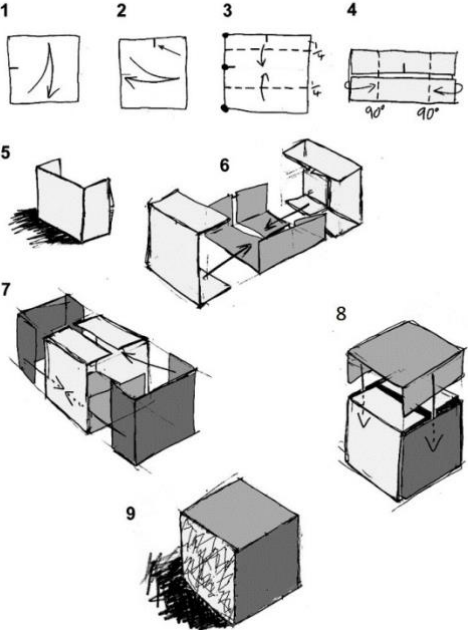
Visto que a estrutura das aulas dessa unidade é baseada nos Momentos do *Schoolwide Enrichment Model* e que os Momentos I e III correspondem a uma apresentação geral sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, a atividade que escolhemos para ser analisada

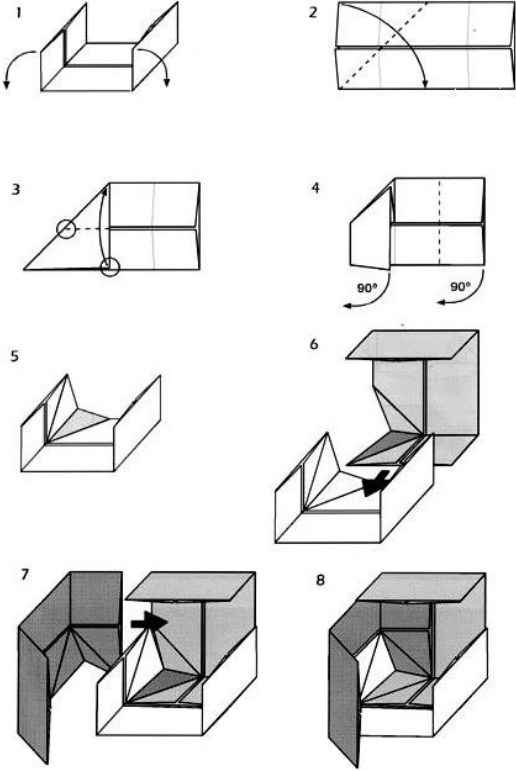
corresponde a um desafio de Origami do Momento II, e será a *pirâmide fractal* feita com o Origami denominado de *Sierpins Qube* que Bhamani et al. (2015) dão como exemplo no artigo que resultou da sua apresentação na sexta edição do OSME, que ocorreu em 2014 no Japão.

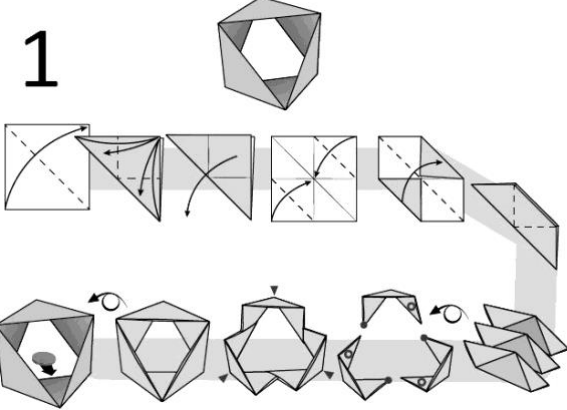
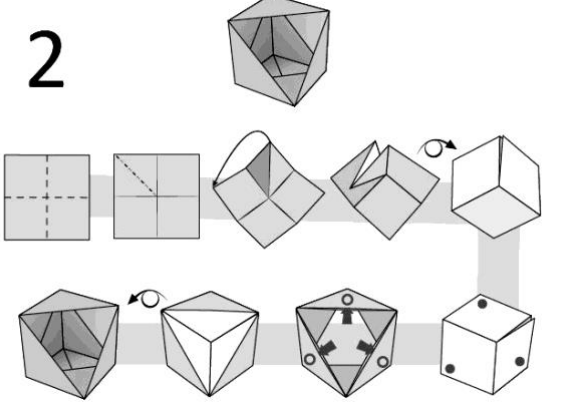
A atividade *pirâmide fractal* feita com o Origami *Sierpins Qube* foi desenvolvida por Kiumars Sharif e consiste no uso do Origami modular para a construção de cubos de diversos tamanhos de forma que se tornem blocos para a construção de uma pirâmide fractal.

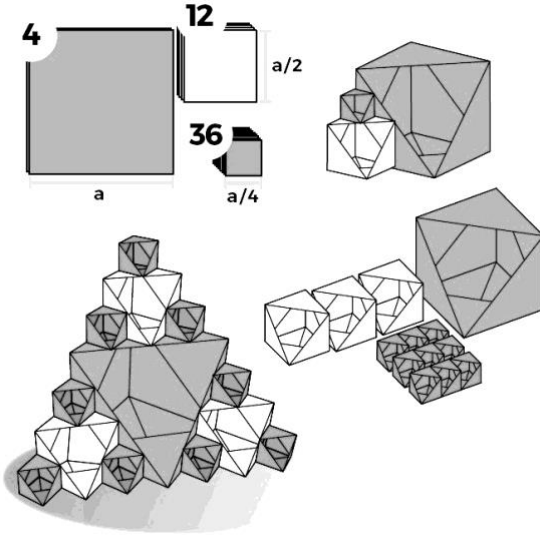
De acordo com Bhamani et al. (2015), trata-se de uma atividade que requer somente o conhecimento do cálculo do volume de um cubo e que é adequada para alunos iniciantes, mas que também pode ser utilizada para uma discussão avançada sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais ou de outros tópicos relacionados, como é apresentado no quadro 26.

Quadro 26 -
Sequência da realização do desafio de Origami *pirâmide fractal* com o *SierpinsQube*

	<p>Etapa 1:</p> <p>O professor ensina aos alunos a realização do cubo de Origami modular desenvolvido por Paul Jackson como demonstra a figura ao lado.</p>
	<p>Etapa 2:</p> <p>Depois da realização do cubo de Paul Jackson, o professor pede aos alunos que construam um novo cubo com papeis quadrados cujos lados tenham a metade do comprimento dos que foram utilizados e que comparem os comprimentos dos</p>

	<p>lados, as áreas das faces e os volumes dos dois cubos realizados.</p>
	<p>Etapa 3:</p> <p>Depois de os alunos terem realizado as comparações entre os dois cubos de Paul Jackson, o professor realiza com eles o cubo de Origami modular desenvolvido por David Mitchell (<i>Columbus Cube</i>), que apresenta uma pequena variação em relação ao cubo de Paul Jackson, que consiste em uma quina afundada para baixo que implica na bissecção de três ângulos do cubo original, como demonstra a figura ao lado.</p>
	<p>Etapa 4:</p> <p>Depois da realização do cubo de David Mitchell, o professor pede aos alunos que construam um novo cubo com papeis quadrados cujos lados tenham a metade do comprimento dos que foram utilizados e que comparem os comprimentos dos lados, as áreas das faces e os volumes dos dois cubos obtidos.</p>
	<p>Etapa 5:</p> <p>Depois dos alunos terem realizado as comparações entre os dois cubos de Paul Jackson e de David Mitchell, o professor deve frisar com eles os seguintes tópicos para que possam dar início a realização do <i>Sierpinski's Cube</i>: que a redução pela metade dos lados dos papeis quadrados com os quais os cubos foram feitos implica numa redução dos seus volumes para 1:8; que essa redução pela metade dos lados dos papeis quadrados implica</p>

	<p>em uma redução pela metade dos lados das faces do cubo; e que seja lá qual for a figura geométrica tridimensional que tenha os lados de suas faces reduzidos pela metade terá também o seu volume reduzido para 1:8.</p>
<p>1</p>  <p>2</p> 	<p>Etapa 6: Com base nos conceitos trabalhados nas etapas anteriores, o professor ensina aos alunos a realização do <i>Sierpinski Qube</i>, como demonstra a figura ao lado, e os desafia a calcular qual vai ser a quantidade e quais vão ser os tamanhos em que ele terá de ser feito para que construam com ele uma <i>pirâmide fractal</i>.</p>
	<p>Etapa 7: Depois da realização dos <i>Sierpinski Qube</i>, os alunos constroem a pirâmide fractal, como demonstra a figura ao lado, e calculam os tamanhos e a quantidade de <i>Sierpinski Qube</i> que terá que ser realizada para que ela tenha a altura que eles desejam.</p>

	
	<p style="text-align: center;">Etapa 8:</p> <p style="text-align: center;">Com base nessa e em outras atividades relacionadas ao Momento II do <i>Schoolwide Enrichment Model</i>, os alunos escolhem um tópico do seu interesse e serão auxiliados pelo professor a desenvolvê-lo e apresentá-lo publicamente utilizando os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais a partir de um Origami.</p>

Fonte: adaptado de Bhamani et al. (2015)

Nota: As etapas para a realização deste Origami podem ser encontradas em <http://www.origami-artist.com/artwork/origami-diagrams/jackson-cube/> acesso em 04/06/2021. Outra fonte de informações sobre sua construção é o vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=2m_m2ZKEBLI acesso em 04/06/2021.

Nota: A figura com as etapas para a realização da *pirâmide fractal* com o *Sierpinski's Cube* que utilizamos é uma versão editada da apresentada no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> acesso em 04/06/2021.

Nota: A figura com as etapas para a realização do *Sierpinski's Cube* que utilizamos é uma versão editada da apresentada no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> acesso em 04/06/2021.

Nota: A figura com as etapas para a realização da *pirâmide fractal* com o *Sierpinski's Cube* que utilizamos é uma versão editada da apresentada no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> acesso em 04/06/2021.

Com base no exemplo dessa atividade, é possível concluir que as atividades dessa unidade do Sistema NODET são estruturadas para que os professores proporcionem aos alunos

amplas oportunidades de eles entenderem a matemática da Autossimilaridade e dos Fractais como uma linguagem com a qual podem resolver problemas e realizar os seus próprios projetos.

Com base nisso, do ponto de vista das atividades que são realizadas com os alunos, a proposta de uso do Origami na Educação Matemática do Sistema NODET pode ser adaptada ao que é estabelecido pela BNCC e pode servir para fundamentarmos a nossa por poder ser desenvolvida para que seja uma atividade na qual os professores de Artes Visuais e de Matemática colaborem no uso do Origami para proporcionar aos alunos a aprendizagem integrada de vários dos objetos de conhecimento e habilidades das suas respectivas áreas que a BNCC estabelece para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

Por exemplo, caso trabalhem com o Ensino Fundamental, os professores de Artes Visuais e de Matemática podem desenvolver a proposta do Sistema NODET para proporcionar aos alunos a aprendizagem do objeto de conhecimento materialidade e suas respectivas habilidades que a BNCC estabelece para as Artes Visuais e de vários dos objetos de conhecimento e respectivas habilidades que a BNCC estabelece para as unidades temáticas da área de Matemática como apresentamos no quadro 27

Já se trabalharem com o Ensino Médio, os professores de Artes Visuais e de Matemática podem desenvolver a proposta do Sistema NODET para proporcionar aos alunos a aprendizagem de habilidades como as relacionadas à articulação de diferentes linguagens que a BNCC (Brasil 2017b) estabelece para a competência 1 do itinerário Linguagens e Suas Tecnologias, e de habilidades como as relacionadas a mobilização de diferentes registros de representação matemáticos que a BNCC (Brasil 2017b) estabelece para as competências 1, 3 e 4 do itinerário Matemática e suas Tecnologias como também apresentamos no quadro 27

Quadro 27 -

Congruências Específicas identificadas entre a proposta do Sistema NODET e a BNCC

Ensino Fundamental
<p>Área do conhecimento: Linguagens: Componente curricular: Artes:</p>
<ul style="list-style-type: none"> • 1º ao 5º ano: Unidade Temática: Artes Visuais: Objeto de Conhecimento: "materialidades": Habilidade:

EF15AR04: "experimentar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia etc.), fazendo uso sustentável de materiais, instrumentos, recursos e técnicas convencionais e não convencionais" (Brasil, 2017b, p. 201)

- 6º ao 9º ano:
Unidade Temática: Artes Visuais:
Objeto de Conhecimento: "materialidades":
Habilidade:
EF69AR05: "experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, *performance* etc.)" (Brasil, 2017b, p. 207)

Área do conhecimento: Matemática:
componente curricular Matemática:

- 1º ano:
Unidade Temática: Grandezas e Medidas:
Objeto de Conhecimento: "medidas de comprimento, massa, capacidade: comparações e unidades de medida não convencionais":
Habilidade:
EF01MA15: "comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano" (Brasil, 2017b, p. 281)
- 2º ano:
Unidade Temática: Números:
Objeto de Conhecimento: "leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero)":
Habilidade:
EF02MA02: "fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades)" (Brasil, 2017b p. 283)

Unidade Temática: Álgebra:

Objeto de Conhecimento: "identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência":

Habilidade:

EF02MA10: "descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos" (Brasil, 2017b, p. 283)

Unidade Temática: Geometria

Objeto de conhecimento: "figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento de características"

Habilidade:

EF02MA15: "reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos" (Brasil, 2017b, p. 283)

- 3º ano:

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: "figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características":

Habilidade:

EF03MA15: "classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices" (Brasil, 2017b, p. 289)

- 4º ano:

Unidade Temática: Geometria:

Objeto de Conhecimento: "figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características":

Habilidade:

EF04MA17: "associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais" (Brasil, 2017b, p. 293)

- 5º ano:

Unidade Temática: Geometria:

Objeto de Conhecimento: "medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre unidades de medidas mais usuais":

Habilidade:

EF05MA19: "resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais" (Brasil, 2017b, p. 297)

- 6º ano:

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: "prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos: vértices, faces e arestas)":

Habilidade:

EF06MA17: "quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial" (Brasil, 2017b, p. 303)

- 7º ano:

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: "transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos de origem":

Habilidade:

EF07MA19: "realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro" (Brasil, 2017b, p. 309)

- 8º ano:

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: "transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação":

Habilidade:

EF08MA18: "reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica" (Brasil, 2017b, p. 315)

- 9º ano:

Unidade Temática: Geometria

Objeto de Conhecimento: "polígonos regulares":

Habilidade:

EF09MA15: "descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*" (Brasil, 2017b, p. 319)

Ensino Médio

Itinerário Linguagens e suas Tecnologias:

- Competência 1:

Habilidades:

EM13LGG103: "analisar o funcionamento das linguagens, para interpretar e produzir criticamente discursos em textos de diversas semioses (visuais, verbais, sonoras, gestuais)" (Brasil, 2017b, p. 491),

EM13LGG105: "analisar e experimentar diversos processos de remediação de produções multissemióticas, multimídia e transmídia, desenvolvendo diferentes modos de participação e intervenção social" (Brasil, 2017b, p. 491).

Itinerário Matemática e suas Tecnologias:

- Competência 1:

Habilidade:

EM13MAT105: "utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" (Brasil, 2017b, p. 533)

- Competência 3:

Habilidades:

EM13MAT307: "empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de

cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais" (Brasil 2017b, p. 536)

Fonte: elaborado pelos autores

4.3 Conclusões sobre qual proposta escolhemos

Com base nas análises que fizemos, embora ambas as propostas das quais tratamos tenham se mostrado ricas em reflexões sobre o uso do Origami na sala de aula e possíveis de serem adaptadas ao que é estabelecido pela BNCC para o Ensino Infantil, Fundamental ou Médio, escolhemos apresentar uma proposta para o Ensino Médio baseada no sistema NODET por entendermos que isso atenderá melhor as nossas expectativas em relação aos resultados desta nossa pesquisa.

5 Proposta Didática

Neste capítulo apresentamos a proposta que desenvolvemos com base no uso do *Schoolwide Enrichment Model* pela unidade de estudos sobre Autossimilaridade e Fractais do Sistema NODET em concordância com o que a que a BNCC (Brasil 2017b) determina sobre as Artes Visuais e a Matemática no Ensino Médio.

Nos quadros 28 e 29, resumimos a nossa proposta e consideramos deixar claro que também a desenvolvemos em concordância com os princípios pedagógicos da BNCC (2017b, p. 15) que impõem o desenvolvimento de competências e habilidades específicas e o compromisso com a educação integral que promova "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes", bem como com o que ela (2017b p. 17) estabelece sobre os currículos deverem ser elaborados pela cooperação dos professores para "conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens".

Quadro 28 -

Sumário da nossa proposta didática prática de contribuição que um professor de Artes Visuais pode dar para a Educação Matemática com o Origami

Desenvolvemos a nossa proposta para ser implementada...	
...por quem?	professores de Artes Visuais e de Matemática.
...para quem?	alunos do Ensino Médio.
	Auto Similaridade e Fractais.

...para o ensino de qual objeto matemático?			
...tendo em vista desenvolver quais competências e habilidades que a BNCC estabelece para as Artes Visuais e a Matemática para o Ensino Médio?	<p>Itinerário Linguagens e suas Tecnologias do qual faz parte as Artes Visuais:</p>	<p>Competência Específica 1:</p> <p>Compreender o funcionamento das diferentes linguagens e práticas culturais (artísticas, corporais e verbais) e mobilizar esses conhecimentos na recepção e produção de discursos nos diferentes campos de atuação social e nas diversas mídias, para ampliar as formas de participação social, o entendimento e as possibilidades de explicação e interpretação crítica da realidade e para continuar aprendendo. (Brasil 2017b, pp. 491)</p>	<p>Habilidade:</p> <p>(EM13LGG103): Analisar o funcionamento das linguagens, para interpretar e produzir criticamente discursos em textos de diversas semioses (visuais, verbais, sonoras, gestuais). (Brasil 2017b, pp. 491);</p>
	<p>Itinerário Matemática e Suas Tecnologias</p>	<p>Competência Específica 4:</p> <p>Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (Brasil 2017b p. 538 e 539)</p>	<p>Habilidade:</p> <p>(EM13AT401): Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a <i>softwares</i> ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (Brasil 2017b p. 538 e 539)</p>

...como?	Por meio de uma atividade extracurricular e interdisciplinar entre as Artes Visuais e a Matemática que dividimos em 2 Momentos de Interação que sugerimos poderem ocorrer em dois dias com uma seção de três horas cada.	Momento I
		Momento II

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 29 -
Momentos de interação e as competências e habilidades estabelecidas da BNCC que são abordadas

<p>Momento I:</p> <p>Os professores de Artes Visuais e de Matemática colaboram para incentivar os alunos a se envolverem em uma introdução aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por meio da linguagem das Artes Visuais e da Matemática integrada ao trabalho com as seguintes competências e habilidades estabelecidas pela BNCC para o Ensino Médio:</p> <p>Itinerário Linguagens e suas Tecnologias: Competência 1 - Habilidade EM13LGG103</p> <p>Itinerário Matemática e suas Tecnologias: Competência 4 - Habilidade EM13MAT401</p>
<p>Momento II:</p> <p>Etapa I:</p> <p>Os professores de Artes Visuais e de Matemática colaboram para incentivar os alunos a se envolverem em um desafio de Origami relacionado aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais integrado ao trabalho com a seguinte competências e habilidade estabelecida pela BNCC para o Ensino Médio:</p> <p>Itinerário Linguagens e suas Tecnologias: Competência 1 - Habilidade EM13LGG103</p> <p>Etapa II:</p> <p>Os professores de Artes Visuais e de Matemática colaboram para incentivar os alunos a se envolverem em uma análise visual e Matemática do Origami realizadas ao trabalho com os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e com as seguintes competências e habilidades estabelecidas pela BNCC para o Ensino Médio:</p> <p>Itinerário Linguagens e suas Tecnologias: Competência 1 - Habilidade EM13LGG103</p>

Itinerário Matemática e suas Tecnologias: Competência 4 - Habilidade EM13MAT401

Fonte: elaborado pelos autores

5.1 Momento I: Introdução aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por meio da linguagem das Artes Visuais e da Matemática integrada ao trabalho com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas

5.1.1 Professor de Artes Visuais

Neste Momento introdutório, propomos que o professor de Artes Visuais envolva os alunos em debates a respeito de problemas de comunicação e de representação de idéias e conceitos que foram resolvidos pelos artistas ao longo da história por meio do uso de padrões autossimilares e de imagens fractais nas suas composições visuais.

Para isso, consideramos que o professor de Artes Visuais pode se valer de Balta (2010) e de D'Avenne (n.d) que apresentam as questões que levaram os artistas árabes a recorrer a esses padrões e imagens para comunicar a sua ideia de divino e o seu conceito de divindade.

Como apresentam esses autores, o que levou os artistas árabes a recorrerem aos padrões autossimilares e fractais foi o entendimento da sua religião de que o divino é o desdobrar-se da divindade nela mesma na criação da realidade e o conseqüente óbice que ela impôs à possibilidade de qualquer imagem de parte da realidade representar o todo da divindade, o qual só poderia ser objeto da compreensão e da comunicação humanas por meio dos padrões pelos quais ela se manifesta na natureza.

Com base na discussão desses fatos relatados em Balta (2010) e em D'Avenne (n.d.), sugerimos que o professor de Artes Visuais apresente aos alunos imagens autossimilares e fractais da arte árabe e da natureza, como as das figuras 1 e 2, e desafie os alunos a explorar diferentes formas de expressar os padrões nelas apresentados por meio da linguagem das Artes Visuais e de outras linguagens, como a natural, a da dança e da música, de forma a deixá-los curiosos para a investigação de como eles podem ser expressos na linguagem da Matemática que indicamos que o professor de Matemática realize com eles logo em seguida.

Em relação a esse desafio, propomos que o objetivo do professor de Artes Visuais seja concluir suas interações com os alunos com um debate a respeito das questões científicas que os padrões autossimilares e fractais da natureza podem ter suscitado, para que possa servir de ponto de partida para uma investigação científico-matemática que propomos que o professor de Matemática dê início com eles logo depois.

Dessa forma, consideramos que o professor de Artes Visuais estará proporcionando aos alunos uma articulação possível do desenvolvimento do seu domínio das diferentes linguagens de que trata a habilidade EM13LGG103 da Competência 1 que a BNCC estabelece para o Itinerário Linguagens e Suas Tecnologias com o desenvolvimento das habilidades que propomos que o professor de Matemática lhes proporcione em seguida.

Figura 1 -
Imagens de padrões da arte árabe



Fonte: D'Avennes (n.d., prancha 39)

Figura 2 -
Padrões autossimilares e fractais na Natureza



Fonte: imagens com direitos de reprodução livres disponíveis em <<http://ead.hemocentro.fmrp.usp.br/joomla/index.php/programa/adote-um-cientista/79-a-geometria-fractal>> e <<https://www.pinterest.co.uk/pin/373165519100978605/>> Acesso em 11 03 2021

5.1.2 Professor de Matemática

Neste Momento, propomos que o professor de Matemática dê continuidade a discussão iniciada pelo professor de Artes Visuais e apresente aos alunos os conceitos de Autossimilaridade de Fractais na Matemática com especial ênfase para quais problemas deram ensejo ao seu desenvolvimento pela comunidade científica.

Para isso, consideramos que o professor de Matemática pode se valer de Mesquita e Mota (1991) e de Barbosa (2002) que apresentam as questões históricas que fizeram a comunidade científica elaborar esses conceitos, bem como modos interessantes de abordá-los matematicamente em sala de aula.

Além desses autores, consideramos que o professor de Matemática também poderá se valer de Ponte et al. (2003) para conduzir as suas interações com os alunos como investigações matemáticas da forma como apresentam esses autores.

Em relação a essa introdução histórica, entendemos ser importante que o professor de Matemática a realize ressaltando para os alunos as dificuldades científicas que ensejaram o desenvolvimento dos conceitos de Autossimilaridade²⁶ e de Fractais para que eles tenham uma oportunidade de refletir sobre a linguagem matemática ser uma ferramenta de modelagem de problemas reais para a qual desafios práticos de diversos tipos podem ser traduzidos e melhor abordados tendo em vista o aprimoramento da compreensão do homem sobre seu mundo, sobre a sua tecnologia, e sobre o seu bem estar social.

Para isso, indicamos que o professor de Matemática aponte para os alunos que o desenvolvimento desses conceitos possibilitou que fossem dadas respostas satisfatórias para diversas questões científicas e tecnológicas que fazem parte dos seus cotidianos como as

²⁶ Este conceito também é denominado por alguns autores de Autossemelhança, mas decidimos denominá-lo nesta pesquisa de Autossimilaridade assim como a maioria dos autores em língua portuguesa que consultamos como, por exemplo, Mesquita e Mota (1991), Barbosa (2002), Baldovinotti (2011) e Moraes (2014).

questões relacionadas ao ruído nas linhas de telecomunicação e a programação de carros autônomos apontadas por Barbosa (2002)²⁷ e Bahamani et al. (2015).

Com base na discussão desses fatos, sugerimos que o professor de Matemática leve em conta o que é indicado em Barbosa (2002) para apresentar aos alunos uma conceituação matemática da Autossimilaridade e dos Fractais para que eles possam usar como uma ferramenta de análise durante a realização do Origami *Onda Autossimilar* que propomos que o professor de Artes Visuais efetue com eles na Etapa 1 do Momento II.

Em relação a essa conceituação, propomos que o objetivo do professor de Matemática seja concluir suas discussões com os alunos lhes presenteando as propriedades da Autossimilaridade e dos Fractais e uma expressão matemática pela qual elas podem ser trabalhadas como apresentado em Barbosa (2002) e Libton (2016).

Como aponta Barbosa (2002) a *Autossimilaridade*²⁸ é uma das propriedades dos fractais que indica que a totalidade de um fractal pode ser apreciada a partir de qualquer uma de suas partes, cujas outras propriedades são a *Estrutura Fina*²⁹ que indica que a apreciação da propriedade da Autossimilaridade de um fractal será possível independentemente da escala na qual ele esteja sendo analisado e a *Lei de Construção Iterativa*, que indica que um fractal pode ser formado pela aplicação sucessiva de uma mesma lei de geração.

Com base na apresentação dessas três propriedades dos fractais, propomos que o professor de Matemática apresente aos alunos os Fractais como podendo ser descritos matematicamente por uma equação de somas e multiplicações repetida sucessivamente como a descrita por Lipton (2016), na qual, na primeira equação, o termo $A.A$ denota a propriedade da *Autossimilaridade*; o termo $+A$ denota a propriedade da *Lei de Construção Iterativa* ou a interatividade do sistema com ele mesmo e não com algo que lhe seja externo; e o termo B

²⁷Como aponta Barbosa, o problema do ruído nas linhas telefônicas foi resolvido por Benoit Mandelbrot por meio do uso da linguagem matemática desenvolvida para descrever matematicamente os padrões fractais.

²⁸Como indica Baldovinotti (2011), cumpre apontar que os fractais podem apresentar os seguintes três tipos de autossimilaridade: 1) Fractais com autossimilaridade exata: são os fractais que são idênticos em qualquer nível no qual estejam sendo analisados, como costuma ocorrer com fractais gerados por processos recursivos; 2) Fractais com quase autossimilaridade: são os fractais cujos níveis são compostos por distorções ou degenerações do nível inicial, como costuma ocorrer com fractais gerados por relações de recorrência; 3) Fractais com autossimilaridade estatística: são os fractais cujos níveis preservam medidas numéricas ou estatísticas, como quando ocorre quando são gerados por processos aleatórios.

²⁹ A Estrutura Fina também é denominada de Dimensão Fractal por implicar em um tipo de dimensão fractal que é diferente das dimensões do espaço Euclidiano e que podem não ser representadas por números inteiros. Como aponta Baldovinotti (2011), as dimensões de um fractal se referem à sua ocupação do espaço e não ao espaço no qual ele está contido. Sendo assim, devido a Estrutura Fina indicar que um fractal irá apresentar todas as suas características em qualquer dimensão fractal no qual ele esteja sendo analisado, em relação aos fractais existe a possibilidade de se trabalhar com dimensões representadas por números não inteiros.

denota a propriedade da *Estrutura Fina* ou a manutenção da possibilidade de geração de um novo nível a partir de qualquer nível pela aplicação da mesma lei de geração:

$$A. A + A = B$$

$$B. B + B = C$$

$$C. C + C = D$$

Com base na apresentação dessas equações, para que o professor de Matemática engaje os alunos na compreensão das propriedades dos fractais e das suas expressões matemáticas de forma convenientemente ligada às interações realizadas pelo professor de Artes Visuais e proporcione a eles o desenvolvimento da habilidade EM13MAT401 da Competência 4 que a BNCC estabelece para o Itinerário Matemática e suas Tecnologias, indicamos que ele apresente para os alunos atividades envolvendo fractais e funções polinomiais como as que descrevemos a seguir.

a) Atividade com o Fractal *Triângulo de Sierpinski*

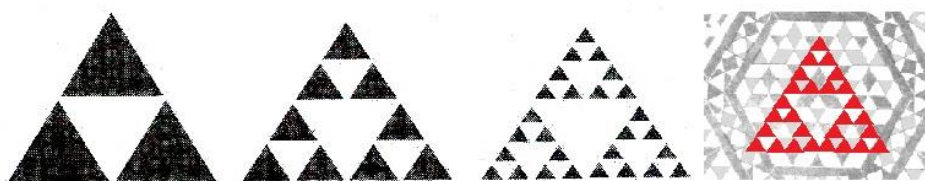
Como apresenta Barbosa (2002), o *Triângulo de Sierpinski* é um fractal que é formado com base em uma curva desenvolvida pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) e que pode ser usado pelo professor de Matemática para apresentar aos alunos uma introdução sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e realizar com eles um exercício com o qual eles estudem os objetos matemáticos potência e perímetro seguindo as instruções para a sua realização que são as seguintes:

- 1) desenhar um triângulo equilátero;
- 2) dividir esse triângulo equilátero em 4 triângulos equiláteros;
- 3) desconsiderando o triângulo central, dividir cada um dos triângulos equiláteros formados em 4 novos triângulos equiláteros;
- 4) repetir as instruções indefinidamente.

Como pode ser observado na figura 3, a aplicação sucessiva dessas instruções aos triângulos gerados cria uma forma que se configura como um fractal por apresentar a propriedade da *Autossimilaridade* e poder ter a sua totalidade apreciada a partir de qualquer

uma de suas partes; por apresentar a propriedade da *Estrutura Fina* e exibir a Autossimilaridade independentemente da escala na qual esteja sendo analisada; e por apresentar a propriedade da *Lei de Construção Iterativa* e poder ser descrita pela aplicação sucessiva de uma mesma lei de geração relacionada ao número dos triângulos ou ao seu perímetro como propomos que o professor de Matemática explore com os alunos a seguir.

Figura 3 -
O Triângulo de Sierpinski e os padrões que o caracterizam sobrepostos a primeira imagem da arte árabe apresentada na Figura 1



Fonte: elaborada pelo autor

Para que o professor de Matemática explore com os alunos as relações numéricas entre os triângulos formados conforme as instruções são sucessivamente aplicadas, indicamos que ele proceda da seguinte forma:

- 1) considere a divisão do primeiro triângulo equilátero em 4 triângulos equiláteros menores e a desconsideração do triângulo central como sendo o nível 1 do fractal;
- 2) considere que, dessa forma, no nível 1 do fractal, haverá apenas 3 triângulos equiláteros;
- 3) considere que, no nível 2 do fractal, cada um dos 3 triângulos equiláteros do nível 1 será dividido em quatro triângulos equiláteros e terá o seu triângulo central desconsiderado gerando ao todo 9 novos triângulos equiláteros ou 3^2 ;
- 4) considere que, no nível 3 do fractal, quando as instruções forem repetidas, serão gerados 27 novos triângulos equiláteros ou 3^3 ;
- 5) por fim, considere que segue por indução que no nível n serão gerados 3^n novos triângulos equiláteros e que essa pode ser a lei de geração do fractal se for tomado o número de triângulos dos quais os seus sucessivos níveis são formados.

Uma vez que esse exercício tenha sido realizado com os alunos, consideramos fundamental que o professor de Matemática os faça refletir que o número de triângulos que podem ser gerados a partir do primeiro tende ao infinito e que essa também é uma importante característica dos fractais que denota a manutenção da *Autossimilaridade* e da formação de suas partes por meio de uma mesma *Lei de Geração Iterativa* independentemente da escala na qual se pretenda analisá-lo como apontam Kasner e Newman (2001) e Tegmark (2014).

Já para que o professor de Matemática explore com os alunos o aumento do perímetro da figura formada, indicamos que ele proceda da seguinte forma:

- 1) considere que c é o comprimento de cada um dos lados do triângulo equilátero inicial;
- 2) considere que cada um dos lados de cada um dos triângulos do nível 1 do fractal valerá $\frac{c}{2}$;
- 3) considere que cada um dos lados de cada um dos triângulos equiláteros do nível 2 do fractal valerá $\frac{c}{2^2}$;
- 4) considere que cada um dos lados de cada um dos triângulos equiláteros do nível 3 do fractal valerá $\frac{c}{2^3}$;
- 5) considere que cada um dos lados de cada um dos triângulos equiláteros do nível n do fractal valerá $\frac{c}{2^n}$;
- 6) por fim, considere que segue por indução que o perímetro de cada um dos triângulos do nível n do fractal valerá $3 \cdot \frac{c}{2^n}$ e que essa pode ser a lei de geração do fractal se for tomado o perímetro dos triângulos dos quais os seus sucessivos níveis são formados.

Com base nisso, indicamos que o professor de Matemática instigue os alunos a construir uma tabela com os resultados encontrados como apresentamos no quadro 30.

Quadro 30 -
Resultados da atividade com os triângulos equiláteros

Nível	0	1	2	3	n
Número de triângulos equiláteros	1	3	3^2	3^3	
Perímetro de cada triângulo equilátero	$3 \cdot c$	$3 \cdot \frac{c}{2}$	$3 \cdot \frac{c}{2^2}$	$3 \cdot \frac{c}{2^3}$	$3 \cdot \frac{c}{2^n}$

Perímetro total	$3 \cdot c$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot c$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot c$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot c$	$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot c$
-----------------	-------------	--	--	--	--

Fonte: elaborada pelos autores

Uma vez que esse exercício tenha sido realizado com os alunos, consideramos fundamental que o professor de Matemática os faça refletir que o perímetro dos triângulos que podem ser gerados a partir do primeiro tende ao infinito e que essa também é uma importante característica dos fractais que denota a manutenção da *Autossimilaridade* e da formação de suas partes por meio de uma mesma *Lei de Geração Iterativa* independentemente da escala na qual se pretenda analisá-lo como apontam Kasner e Newman (2001) e Tegmark (2014).

Além disso, consideramos importante destacar que essa atividade apresenta uma importante oportunidade para que o professor de Matemática realize com os alunos um estudo ou uma revisão dos objetos matemáticos potência e perímetro cuja compreensão lhes será importante para que participem dos demais momentos da nossa proposta.

b) Atividades com o Fractal *Curva de Koch* elaborado na forma do *Floco de Neve de Koch*

Como apresenta Barbosa (2002), a *Curva de Koch* é uma curva que foi desenvolvida pelo matemático polonês Hegel Von Koch (1870 - 1924) e que também pode ser utilizada pelo professor de Matemática para introduzir para os alunos os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e realizar com eles um exercício com o qual eles estudem os objetos matemáticos potência e perímetro seguindo as instruções para a sua realização que são as seguintes:

- 1) considerar um segmento de reta;
- 2) dividir o segmento em 3 segmentos iguais.³⁰

³⁰ Para que um segmento AB seja dividido em três partes iguais ou em qualquer número de partes iguais é necessário seguir o seguinte procedimento fazendo uso de uma régua, um compasso e um esquadro:

1) Em primeiro lugar, é necessário traçar o segmento AB com a régua com o comprimento que for desejado. 2) Em segundo lugar, a partir do ponto A ou do ponto B do segmento AB é necessário traçar um outro segmento de qualquer comprimento (AC ou BC) que tenha início no ponto A ou no ponto B e forme um ângulo agudo com o segmento AB. Para este exemplo, será feita a suposição de que este novo segmento foi traçado a partir do ponto A recebendo o nome de AC. 3) Em terceiro lugar, é necessário fixar a ponta seca do compasso no ponto A de forma que a sua abertura seja tal que possibilite dividir o segmento AC no número de vezes que se deseja dividir o segmento AB. 4) Depois disso, com a ponta seca do compasso ainda em A e com o compasso na abertura indicada no item 3), é necessário marcar um primeiro ponto no segmento AC. 5) Em seguida, é necessário retirar a ponta seca do compasso de A e colocá-la com o compasso na mesma abertura neste novo ponto marcado em AC e repetir o procedimento para marcar mais um ponto. 6) A repetição deste procedimento a partir do ponto A no segmento AC com o compasso sendo mantido com uma abertura constante deve prosseguir até que sejam marcados em AC um número de pontos que o divida no número de segmentos que se deseja dividir o segmento

- 3) utilizar o segmento central como base para a construção de um triângulo equilátero com todos os seus lados do mesmo comprimento do segmento central e dos outros segmentos.³¹
- 4) apagar a base desse triângulo, mantendo-o conectado aos outros segmentos.
- 5) repetir as etapas de 1 até 4 nos outros segmentos e nos que forem produzidos indefinidamente.

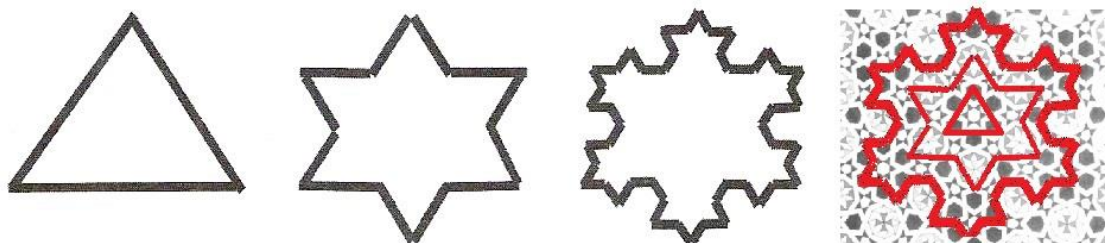
Com base nessas instruções, o professor de Matemática pode propor aos alunos que as aplique aos segmentos que formam os lados de um triângulo equilátero para que seja construído o que Barbosa (op. cit.) denomina de *Floco de Neve de Koch* e para que haja uma ligação entre as representações gráficas que serão trabalhadas e as imagens tratadas nas interações proporcionadas pelo professor de Artes Visuais.

Como pode ser observado na figura 4, a aplicação sucessiva dessas instruções aos segmentos que formam os lados de um triângulo equilátero cria uma forma que se configura como um fractal por apresentar a propriedade da *Autossimilaridade* e poder ter a sua totalidade apreciada a partir de qualquer uma de suas partes; por apresentar a propriedade da *Estrutura Fina* e exibir a Autossimilaridade independentemente da escala na qual ela esteja sendo analisada; e por apresentar a propriedade da *Lei de Construção Iterativa* e poder ser descrita pela aplicação sucessiva de uma mesma lei de geração relacionada ao número de triângulos ou ao seu perímetro como propomos que o professor de Matemática explore com os alunos a seguir.

AB. 7) Quando o segmento AC estiver dividido no mesmo número de vezes que se deseja dividir o segmento AB, o último ponto de tal divisão (que neste exemplo manterá o nome de ponto C) deve ser ligado ao ponto B do segmento AB por uma reta traçada com a régua. 8) Traçada esta reta que liga o ponto C do segmento AC com o ponto B do segmento AB é necessário utilizar o esquadro para traçar retas paralelas a esta reta passando por todos os pontos que dividiram o segmento AC no número de vezes que se deseja dividir o segmento AB. 9) Essas retas paralelas vão intersectar o segmento AB em pontos que vão dividi-lo em segmentos de comprimentos iguais no mesmo número de vezes que o segmento AC tiver sido dividido.

³¹ Esse triângulo equilátero pode ser construído com régua e compasso da seguinte forma: 1) abre-se o compasso de modo que as suas duas pontas coincidam com as extremidades do segmento; 2) coloca-se a ponta seca do compasso em uma das extremidades do segmento e risca-se com ele um arco para o lado para o qual se quer que seja voltada a ponta do triângulo; 3) repete-se a operação com a ponta seca do compasso na outra extremidade do segmento produzindo um outro arco que corte o já realizado; 4) une-se o ponto onde os dois arcos se intersectam-se com as extremidades do segmento inicial.

Figura 4 -
O *Floco de Neve de Koch* e os padrões que o caracterizam sobrepostos a segunda imagem da arte árabe apresentada na Figura 1



Fonte: elaborada pelo autor

Para que o professor de Matemática explore com os alunos as relações numéricas entre os segmentos do *Floco*, indicamos que ele proceda da seguinte forma:

- 1) considere que as instruções já foram repetidas duas vezes aos segmentos que formam os lados de um triângulo equilátero e que o *Floco* compõe-se de 48 segmentos e que, se elas forem repetidas uma terceira vez, cada um dos segmentos dará origem a 4 novos segmentos e a figura ficará com $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ segmentos ou $3 \cdot 4^3$ segmentos totalizando 192 segmentos;
- 2) considere que, pela observação desses resultados, é possível concluir que a relação entre o nível do fractal e o número de segmentos é a seguinte, como indicado na figura 5:

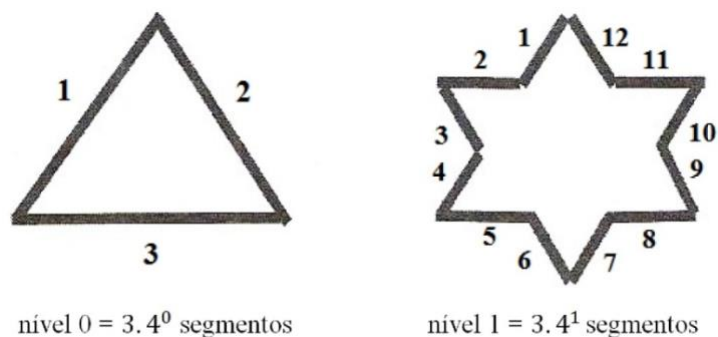
nível 0 = $3 \cdot 4^0$ segmentos (equivalente ao triângulo equilátero inicial);

nível 1 = $3 \cdot 4^1$ segmentos;

nível 2 = $3 \cdot 4^2$ segmentos;

nível 3 = $3 \cdot 4^3$ segmentos...

Figura 5 -
Progressão do número dos segmentos no *Floco de Neve de Koch*



Fonte: elaborada pelo autor

- 3) considere que, a partir disso, é possível inferir que, no nível n do fractal, ele será composto de $3 \cdot 4^n$ segmentos e que essa pode ser a sua lei de geração se for considerado o número de segmentos dos quais ele é formado.

Uma vez que esse exercício tenha sido realizado com os alunos consideramos fundamental que o professor de Matemática os faça refletir que o número de segmentos que podem ser gerados a partir dos segmentos que formam os lados do primeiro triângulo tende ao infinito e que essa também é uma importante característica dos fractais que denota a manutenção da *Autossimilaridade* e da formação de suas partes por meio de uma mesma lei de geração independentemente da escala na qual se pretenda analisá-lo como apontam Kasner e Newman (2001) e Tegmark (2014).

Já para que o professor de Matemática explore com os alunos o aumento do perímetro da figura formada, indicamos que ele proceda da seguinte forma:

- 1) indique que c é o comprimento de cada um dos lados de um triângulo equilátero inicial;
- 2) aplique o procedimento para a criação do *Floco de Neve Koch* uma vez para que cada lado de comprimento c do triângulo equilátero inicial seja dividido em 3 e cada novo segmento valha $c \cdot \frac{1}{3}$;
- 3) aplique o procedimento uma segunda vez, de forma que cada um dos segmentos gerados valha $\frac{1}{3}$ do inicial ou $(c \cdot \frac{1}{3})^2$;

- 4) aplique o procedimento uma terceira vez, de forma que cada um dos segmentos gerados valha $\frac{1}{3}$ do inicial ou $(c \cdot \frac{1}{3})^3$;
- 5) considere que, por indução, no nível n do Fractal, cada segmento terá o comprimento de $c \cdot (\frac{1}{3})^n$;
- 6) por fim, considere que segue por indução que o perímetro do fractal no Nível n valerá $3 \cdot (\frac{4}{3})^n \cdot c$ e que essa pode ser a lei de geração do fractal se for tomado o perímetro dos seus sucessivos níveis,

A partir disso, indicamos que o professor de Matemática instigue os alunos a construir uma tabela com os resultados encontrados como apresentamos no quadro 31.

Quadro 31 -
Resultado da Atividade

Nível	Multiplicação dos termos	Comprimentos	Perímetros
0	3	c	3.c
1	3.4	$c \cdot (\frac{1}{3})$	$3 \cdot (\frac{4}{3}) \cdot c$
2	3.4 ²	$c \cdot (\frac{1}{3})^2$	$3 \cdot (\frac{4}{3})^2 \cdot c$
3	3.4 ³	$c \cdot (\frac{1}{3})^3$	$3 \cdot (\frac{4}{3})^3 \cdot c$
n	3.4 ⁿ	$c \cdot (\frac{1}{3})^n$	$3 \cdot (\frac{4}{3})^n \cdot c$

Fonte: elaborado pelos autores

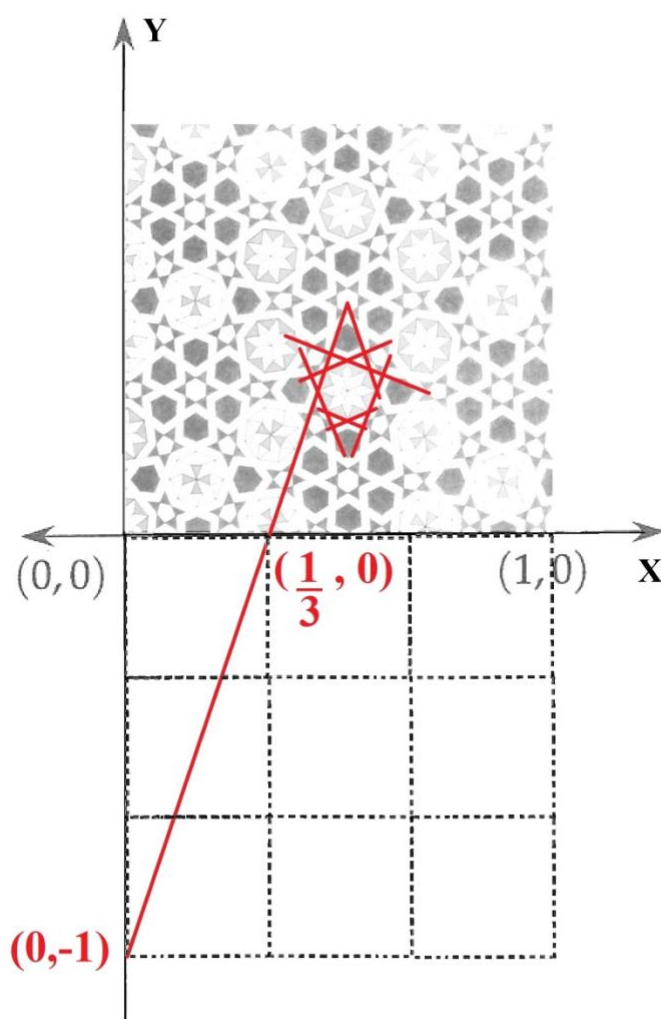
Uma vez que esse exercício tenha sido realizado com os alunos consideramos fundamental que o professor de Matemática os faça refletir que o perímetro da figura tende ao infinito e que essa também é uma importante característica dos fractais que denota a manutenção da *Autossimilaridade* e da formação de suas partes por meio de uma mesma lei de geração independentemente da escala na qual se pretenda analisá-lo como apontam Kasner e Newman (2001) e Tegmark (2014).

Em relação a essa atividade, consideramos importante destacar que ela também se apresenta como um oportunidade para que o professor de Matemática estude com os alunos os objetos matemáticos potência e perímetro.

c) Atividade envolvendo Funções Polinomiais

Depois das atividades com os fractais *Triângulo de Sierpinski* e *Curva de Koch*, sugerimos que o professor de Matemática desafie os alunos a averiguar as propriedades fractais das imagens que eles discutiram com o professor de Artes Visuais posicionando-as em um plano cartesiano e descrevendo as relações funcionais e de proporção entre as variáveis x e y que puderem encontrar entre os seus diferentes pontos utilizando, por exemplo, as imagens impressas em papel, uma régua e uma caneta vermelha, como apresentamos na figura 6

Figura 6 -
Imagem da segunda arte árabe apresentada na Figura 1 e exploração das relações funcionais entre os seus pontos e linhas em um plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor

Por exemplo, se os alunos colocarem uma régua sobre esses padrões da arte árabe, poderão encontrar a relação entre pontos indicados na figura e o professor de Matemática poderá ajudá-los a escrever a função para representá-la, que seria $y = f(x) = 3x - 1$, tal que, para $x = 0$, $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$, e, para $y = 0$, $0 = 3x - 1 \rightarrow x = 1/3$.

A partir disso, sugerimos que o professor de Matemática os incentive a identificar e escrever funções para outras relações entre os pontos no gráfico e a refletir se um eventual comportamento proporcional que eles encontrem entre as variáveis x e y pode lhes demonstrar as propriedades fractais dos padrões da arte árabe apresentados.

Em relação a essa atividade, cumpre destacar que, embora ela possa ser uma interessante oportunidade de os alunos treinarem suas habilidades com funções polinomiais e refletiram sobre as propriedades dos fractais com as quais entraram em contato, eles não poderão averiguar as propriedades fractais dos padrões da arte árabe dessa forma, a não ser que usem transformações afins, como sugerimos que eles poderão explorar com o professor de Matemática no próximo Momento.

A despeito disso, seguindo esta abordagem, consideramos que o professor de Matemática estará proporcionando aos alunos uma oportunidade para que eles desenvolvam a habilidade EM13MAT401 da Competência 4 que a BNCC estabelece para o Itinerário Matemáticas e suas Tecnologias que versa sobre a uso de diferentes registros de representação no tratamento de funções polinomiais em articulação com as interações que eles tiveram com o professor de Artes Visuais a partir das quais terá início o Momento II da nossa proposta.

5.2.1 Momento II: Etapa 1: Desafio de Origami relacionado aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais integrado ao trabalho com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas

5.2.1.1 Professor de Artes Visuais

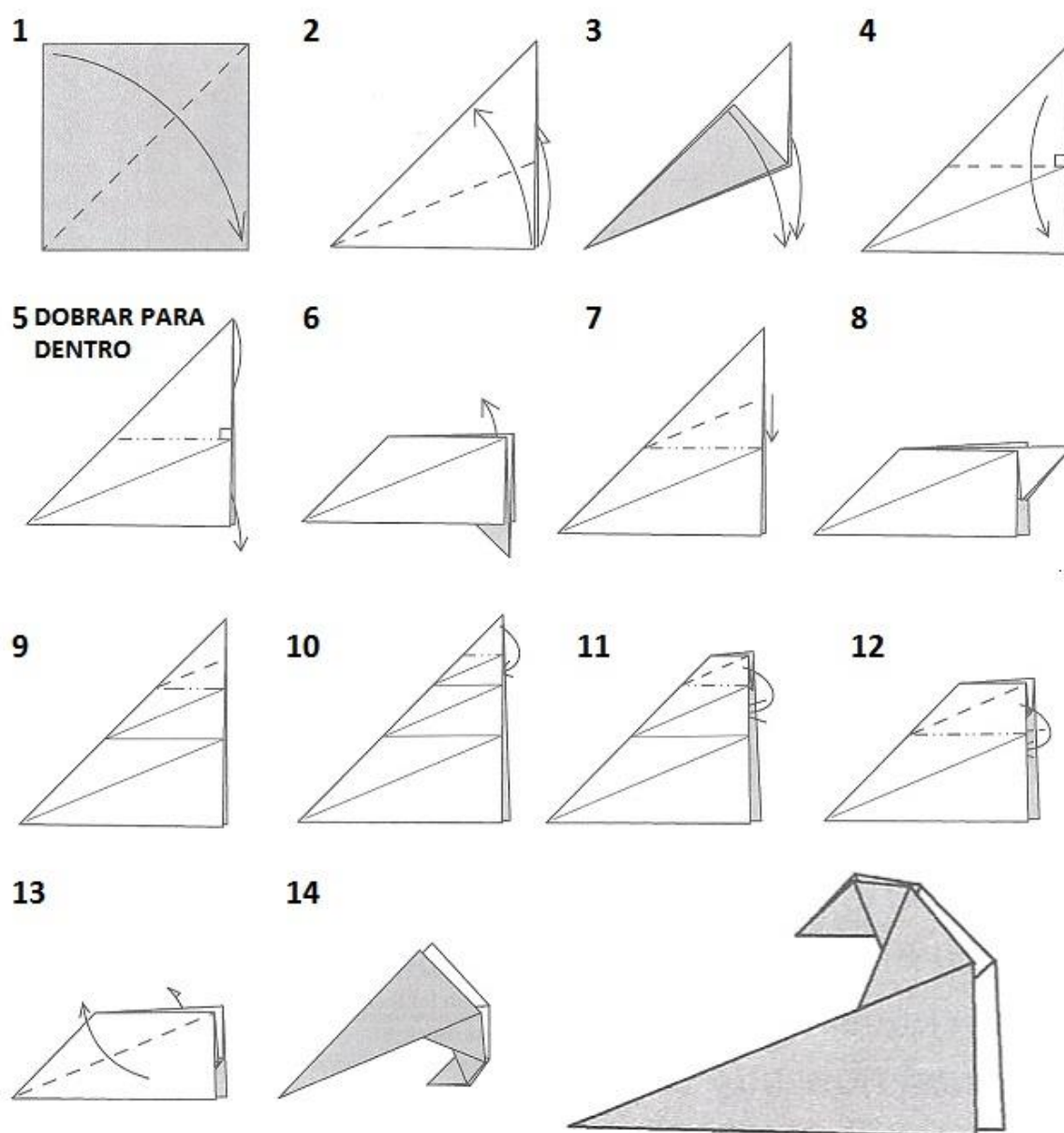
Na Etapa 1 deste Momento, propomos que o professor de Artes Visuais envolva os alunos em uma discussão sobre a arte do Origami e apresente para eles o Origami *Onda Autossimilar* como relacionado às discussões que eles tiveram com o professor de Matemática a respeito dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais.

Em relação a essa apresentação do Origami *Onda Autossimilar*, propomos que o objetivo do professor de Artes Visuais seja instruir os alunos na realização da dobradura, mas ser ambíguo ou deixá-los na dúvida a respeito de se ela apresenta ou não as propriedades de um

fractal para que eles se sintam motivados a discuti-las com o professor de Matemática na interação que sugerimos que ocorra logo em seguida.

A figura 7 apresenta as etapas da realização do Origami *Onda Autossimilar* e consideramos relevante indicar que o professor de Artes Visuais conduza os alunos somente até mais uma ou duas repetições para além das que mostra essa figura, produzindo uma onda com cinco ou seis níveis, para que eles não se alonguem demais na sua realização.

Figura 7 -
Etapas para a realização do Origami *Onda Autossimilar* com 4 níveis



Uma vez que os alunos tenham terminado o Origami, sugerimos que o professor de Artes Visuais os desafie a explorar diferentes formas de expressar os seus padrões por meio da linguagem das Artes Visuais e de outras linguagens para que eles fiquem curiosos para investigar as suas expressões na linguagem da Matemática como indicamos que ocorra com o professor de Matemática logo em seguida.

Em relação a esse desafio, sugerimos que o objetivo do professor de Artes Visuais seja concluir suas interações com os alunos deixando-os familiarizados com a realização e com as formas da *Onda Autossimilar*, pois o entendimento de como o padrão de dobras as origina lhes será de fundamental importância para a sua análise matemática que indicamos que seja realizada com eles pelo professor de Matemática na Etapa 2 deste Momento.

Dessa forma, consideramos que o professor de Artes Visuais proporcionará aos alunos uma possível articulação entre o desenvolvimento da habilidade EM13LGG103 da Competência 1 que a BNCC estabelece para o Itinerário Linguagens e Suas Tecnologias e o desenvolvimento da habilidade EM13MAT401 da Competência 4 que a BNCC estabelece para o Itinerário Matemáticas e suas Tecnologias que propomos que o professor de Matemática lhes proporcione em seguida.

Como é proposto na habilidade EM13LGG103 do Itinerários Linguagens e Suas Tecnologias, entendemos que os alunos poderão analisar o funcionamento de diferentes linguagens para elaborar discursos críticos sobre o Origami e despertar a sua curiosidade sobre como os seus padrões serão abordados pela linguagem da Matemática, por exemplo, investigando possíveis traduções de suas formas para gestos de pintura ou desenho e discutindo como expressá-las em passos de dança, sons, ou na dinâmica da argumentação de um texto ou de um contexto de símbolos.

5.2.1.2 Professor de Matemática

Na Etapa 1 deste Momento, propomos que o professor de Matemática intervenha na observação do Origami iniciada pelo professor de Artes Visuais, mas ainda não dê início a sua modelagem matemática e instigue os alunos a realizarem com o professor de Artes Visuais uma análise visual mais aprofundada do Origami para ver se conseguem determinar a sua natureza fractal a partir dos conceitos matemáticos que desenvolveram com ele no Momento I.

Propomos que o professor de Matemática ainda não dê início a qualquer modelagem matemática do modelo, pois consideramos que os alunos se manterão em dúvida a respeito da sua natureza fractal devido a ele ser especialmente duvidoso em relação a isso como é apontado em Hull (2013) e que será uma oportunidade para que o professor de Artes Visuais lhes instigue a utilizar os elementos básicos da Linguagem Visual em articulação com o que aprenderam com o Professor de Matemática para realizar uma análise visual do modelo como apresentamos na Etapa 2 deste Momento.

Dessa forma, consideramos que os professor de Matemática indicará para os alunos a importância deles observarem atentamente uma problemática antes de modelá-la matematicamente e de imaginarem possíveis articulações entre a linguagem da Matemática e a das outras disciplinas para aprimorarem as representações das dinâmicas que pretendam investigar em respeito ao que a BNCC (2017b) estabelece sobre a necessidade dos professores colaborarem para promover a interdisciplinaridade entre os componentes curriculares.

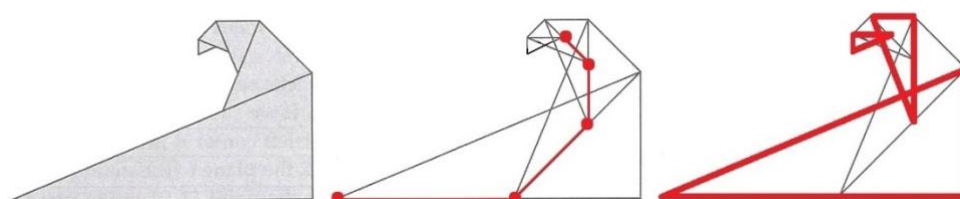
5.2.2 Momento II: Etapa 2: Análise Visual e Matemática do Origami realizado integradas ao trabalho com os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC que são abordadas

5.2.2.1 Professor de Artes Visuais

Na Etapa 2 deste Momento, propomos que o professor de Artes Visuais envolva os alunos em uma análise visual do modelo na qual eles articulem os elementos básicos da linguagem visual com o que aprenderam com o professor de Matemática sobre Auto Similaridade e Fractais e busquem responder se o modelo é ou não um fractal por meio da percepção dos seus pontos, linhas e formas, bem como das suas relações e quais impressões de movimentos elas podem induzi-los a imaginar.

Em relação a essa Análise Visual, propomos que o objetivo do professor de Artes Visuais seja induzir os alunos a observar no perfil da dobradura o percurso do seu ponto de origem e o encolhimento dos vários triângulos dos quais ela se compõem como indicados na figura 8 para apurar o seu olhar para esses fatos que serão importantes na análise matemática do modelo que sugerimos que o professor de Matemática realize com eles logo em seguida.

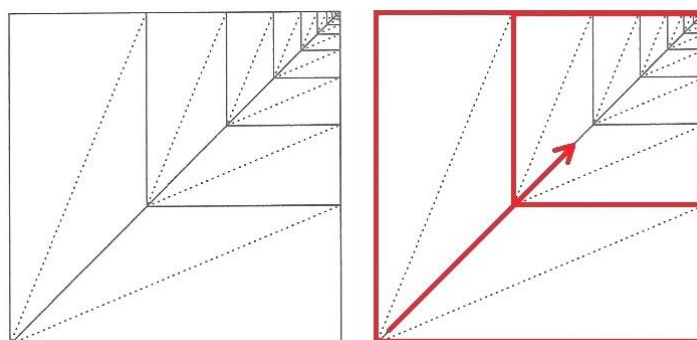
Figura 8 -
Análise visual do Origami *Onda Autossimilar* com 5 níveis



Fonte: elaborada pelo autor

Além disso, consideramos que o professor de Artes Visuais deve indicar para os alunos que desfaçam a dobradura e reflitam sobre se ela é ou não um fractal com base no padrão de dobras que ela deixa no papel cujo encolhimento do quadrado apresentado na figura 9 também será importante na análise matemática que sugerimos que o professor de Matemática lhes apresente logo em seguida.

Figura 9 -
Análise visual das marcas deixada no papel quadrado pela dobradura do Origami *Onda Autossimilar* com vários níveis



Fonte: elaborada pelo autor

No contexto dessa análise visual, consideramos relevante que o professor de Artes Visuais finalize as suas interações com os alunos lhes fazendo refletir que tanto o modelo pronto quanto as marcas que a sua dobradura deixa no papel são compostas de partes cada vez menores que são semelhantes entre si ou autossimilares e que tendem para um ponto determinado que estará convergindo para dentro do modelo, no caso do modelo pronto, ou localizado no canto superior esquerdo do papel, no caso do padrão de dobras.

Como é apresentado nas figuras 8 e 9, quando terminarem o Origami, os alunos poderão observar que ele é composto de vários triângulos com ângulos congruentes e áreas sucessivamente menores, e, quando o desdobrarem, poderão observar que o padrão de dobras

que ele deixa no papel é composto de vários quadrados e triângulos que também são similares entre si, mas têm áreas sucessivamente menores.

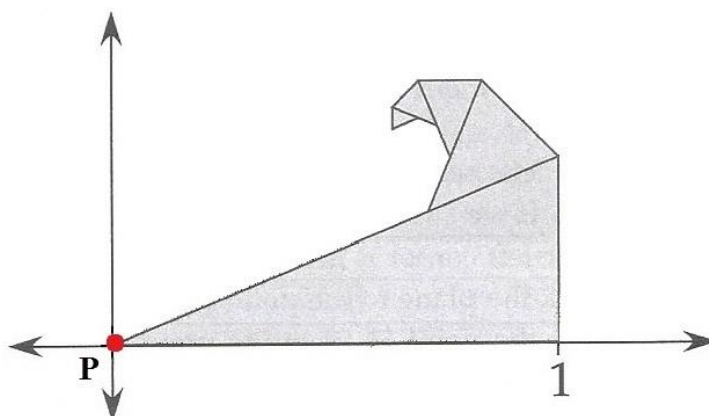
Dessa forma, consideramos que o professor de Artes Visuais estará indicando para os alunos a importância de eles imaginarem as possíveis articulações entre a Linguagem Visual e a Linguagem da Matemática para aprimorarem o entendimento das questões com as quais pretendam trabalhar atendendo ao que a BNCC estabelece sobre a necessidade de os professores colaborarem para promover a interdisciplinaridade entre os componentes curriculares.

5.2.2.2 Professor de Matemática

Na Etapa 2 deste Momento, propomos que o professor de Matemática dê continuidade à análise visual iniciada pelo professor de Artes Visuais e tome as interações entre os elementos básicos da Linguagem Visual observadas pelos alunos para dar início à modelagem matemática da dobradura como uma forma de eles averiguarem as suas propriedades fractais.

Para isso, sugerimos que o professor de Matemática indique aos alunos que pensem na apresentação das formas do modelo em um plano cartesiano e os instigue a converter as interações dos elementos básicos da linguagem visual que observaram para o gráfico de forma que seja atribuído o valor 1 para o comprimento da base do modelo e a indicação P para o seu ponto de origem como apresentamos na figura 10.

Figura10 -
Perfil do Origami *Onda Autossimilar* com 5 níveis em um plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, consideramos que o professor de Matemática poderá proporcionar aos alunos uma importante oportunidade de eles articularem a Linguagem Visual e a linguagem da Matemática e de efetuarem um primeiro tratamento de uma representação matemática dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais no registro de representação gráfico como a BNCC propõem para a competência 4 do Itinerário Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio.

Com base nessa conversão para o registro gráfico das formas do modelo, sugerimos que o professor de Matemática dê continuidade a sua modelagem matemática por meio de uma abordagem pela qual os alunos poderão refletir sobre as propriedades fractais do modelo e treinar as suas habilidades com funções polinomiais de acordo com as suas possibilidades e interesses conforme propõe a habilidade EM13MAT401 da competência 4 do Itinerário Matemática e Suas Tecnologias e em respeito ao que a BNCC (Brasil 2017b) estabelece para a organização dos currículos.

a) Abordagem com funções polinomiais

Para esta abordagem que consideramos que poderá ser aplicada no primeiro ano do Ensino Médio, assim como indicamos que fosse feito com as imagens que foram discutidas com o professor de Artes Visuais no Momento I, sugerimos que o professor de Matemática desafie os alunos a averiguar as propriedades fractais do modelo descrevendo as relações funcionais e proporcionais que puderem encontrar entre os seus diferentes pontos no gráfico escrevendo funções polinomiais.

A despeito de os alunos provavelmente desconfiarem ou já saberem que não poderão averiguar as propriedades fractais do modelo por meio desse procedimento devido às experiências que tiveram anteriormente, entendemos que tal abordagem é válida, pois pode proporcionar a eles a oportunidade de refletirem a respeito dos conteúdos com os quais entraram em contato e ensinar que o professor de Matemática lhes apresente uma abordagem utilizando transformações afins como sugerimos que ele poderá fazer em seguida.

Dessa forma, consideramos que o professor de Matemática dará aos alunos amplas oportunidades de eles desenvolverem a habilidade EM13MAT401 da Competência 4 que a BNCC estabelece para o Itinerário Matemáticas e suas Tecnologias além de possibilitar que eles entrem em contato com as transformações afins ou treinem a sua realização, caso já as tenham aprendido.

A habilidade EM13MAT401 diz respeito a "converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" e consideramos que ela poderá ser convenientemente trabalhada pelo professor de Matemática com os alunos por meio da conversão para o registro gráfico das formas do Origami.

Embora essa habilidade diga respeito a converter as funções polinomiais em representações geométricas no plano cartesiano, consideramos que o movimento contrário também seja válido para que essa habilidade seja adequadamente trabalhada conforme indicada pela BNCC e em concordância com o que propõe Duval (2009) sobre a conversão recíproca entre diferentes registros de representação matemáticos poder aprofundar o aprendizado dos objetos matemáticos estudados.

b) Abordagem com transformações afins

Para esta abordagem mais complexa com transformações afins que consideramos que poderá ser trabalhada com alunos que demonstram maior propensão para seguirem os estudos em exatas, indicamos que o professor de Matemática os desafie a investigar as propriedades fractais do modelo determinando quais seriam as coordenadas do ponto para o qual o ponto P de origem de suas sucessivas etapas apresentado nas figura 10 e 11 convergiria se eles pudessem repetir o seu padrão de dobras infinitamente.

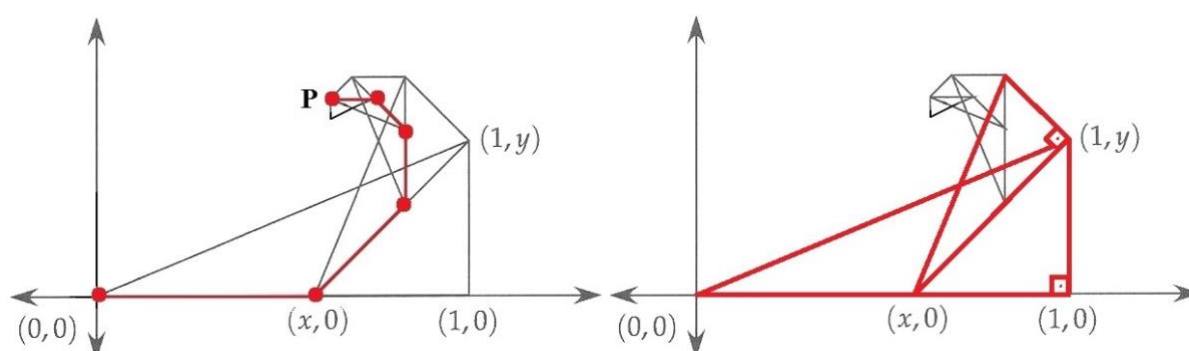
Com base nas interações que os alunos tiveram com os professores de Artes Visuais e de Matemática, consideramos que eles entenderão ser desnecessário encontrar essas coordenadas para tratar das propriedades fractais do modelo, pois poderão apontar que a *Onda Autossimilar* apresenta a *Autossimilaridade*, mas não é um fractal por ter a sua primeira etapa diferente das demais e por não seguir uma mesma lei de geração como seria necessário para que apresentasse as propriedades da *Estrutura fina* e da *Lei de construção Iterativa*.

Além disso, consideramos que os alunos também poderão indicar que a *Onda Autossimilar* não é um fractal por já terem apreendido que os fractais tendem ao infinito como resultado das propriedades que os caracterizam e por já terem observado que tanto o ponto P de origem do modelo quanto o seu padrão de dobras deixados no papel convergem para pontos determinados e que isso indica que as suas repetições autossimilares serão finitas.

Em todo o caso, se os alunos se mantiverem na dúvida sobre a natureza fractal do modelo e considerarem que o encontro das coordenadas para as quais o ponto P converge pode lhes auxiliar a determiná-la, indicamos que o professor de Matemática proceda da seguinte forma para que eles refletiam sobre o que apreenderam e exercitem as suas capacidades matemáticas utilizando diferentes registros de representação matemáticos.

Consideramos que os alunos ficarão em dúvida a respeito de qual procedimento utilizar para encontrar essas coordenadas e que o professor de Matemática pode orientá-los a identificar qual abordagem lhes pode útil a partir da realização da mesma análise visual do modelo que eles fizeram com o professor de Artes Visuais, mas com o modelo representado no plano cartesiano como apresentamos na figura 11.

Figura 11 -
Análise visual do Origami *Onda Autossimilar* com 5 níveis em um plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor

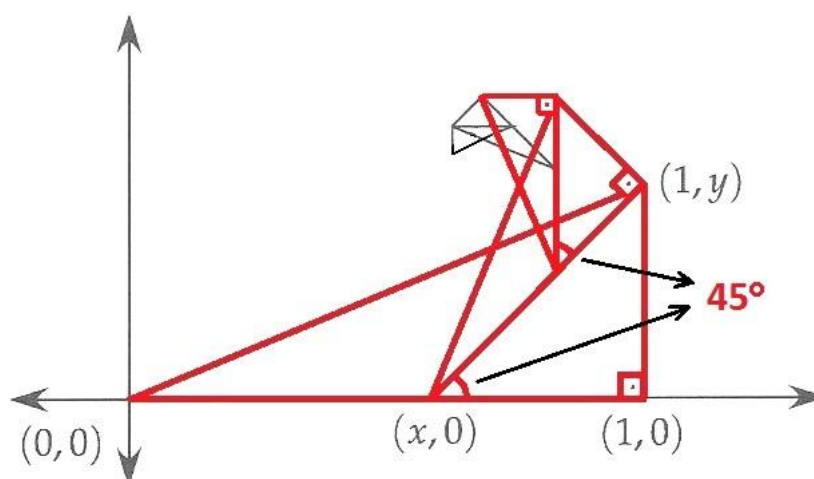
Com base nessa análise visual, propomos que o professor de Matemática indique aos alunos que as coordenadas para as quais o ponto P converge dependerão da rotação e do encolhimento dos triângulos dos quais o modelo é formado e lhes apresente as transformações afins para determiná-la.

Como apresenta Gonçalves (2013) as Transformações Afins ou Mapas Afins são um tipo de função aplicada na Geometria e muito utilizada em Computação Gráfica na qual uma figura geométrica plana mantém todas as suas propriedades, mas tem a mudança de sua área ligada à sua rotação no plano cartesiano de forma que pode ser estabelecida uma relação funcional entre a sua área e os graus da sua rotação entre os eixos x e y.

Por exemplo, como pode ser observado na figura 12, os sucessivos triângulos dos quais se compõem a dobradura e que estão destacados em vermelho têm seus ângulos congruentes e

suas área reduzida em função de sua rotação no plano cartesiano, de forma que pode ser escrita uma função que relacione essas duas variáveis.

Figura 12 -
Rotação e diminuição dos triângulos que compõem a *Onda Autosimilar* com 5 níveis em um plano cartesiano



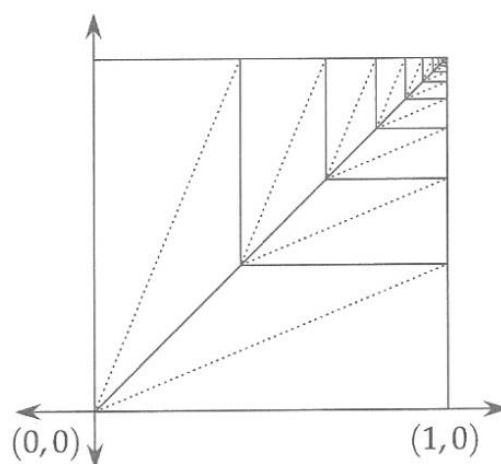
Fonte: elaborada pelo autor

Sendo assim, os alunos serão induzidos a converter os dados do gráfico para o registro de representação algébrico e a treinar a coordenação entre os dois registros de representação no tratamento das variáveis para o encontro das coordenadas do ponto P, além de poderem entrar em contato com as transformações afins ou rever a sua operacionalização caso elas já lhes tenham sido ensinadas.

Para o encontro do fator de rotação dos triângulos que será necessário para que os alunos elaborem uma transformação afim, indicamos que o professor de Matemática utilize a figura 12 para fazê-los perceber que a base do triângulo maior que tem início no ponto $(0,0)$ tem 45° em relação à base do triângulo menor que tem início em $(x,0)$ e que 45° é a rotação que todas os triângulos que compõem o modelo têm entre si.

Já para que os alunos possam encontrar o fator de encolhimento dos triângulos, indicamos que o professor de Matemática peça para eles que desfaçam a dobradura e convertam os padrões das dobras deixadas no papel para o registro de representação gráfico como apresentamos na figura 13.

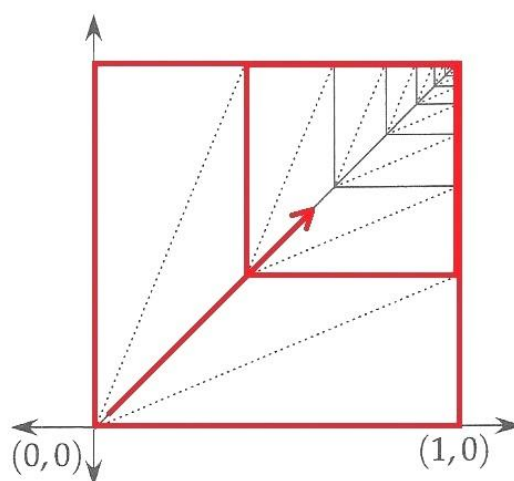
Figura 13 -
Marcas deixada no papel quadrado pela dobradura do Origami *Onda Autossimilar* com vários níveis em um plano cartesiano



Fonte: elaborada pelo autor

A partir dessa representação gráfica inicial, indicamos que o professor de Matemática instigue os alunos a lembrar da análise visual dos padrões de dobras que eles realizaram com o professor de Artes Visuais e os faça identificar e converter para o gráfico o encolhimento progressivo dos quadrados marcados no papel como apresentamos na figura 14.

Figura 14 -
Análise visual das marcas deixada no papel quadrado pela dobradura do Origami *Onda Autossimilar* com vários níveis em um plano cartesiano



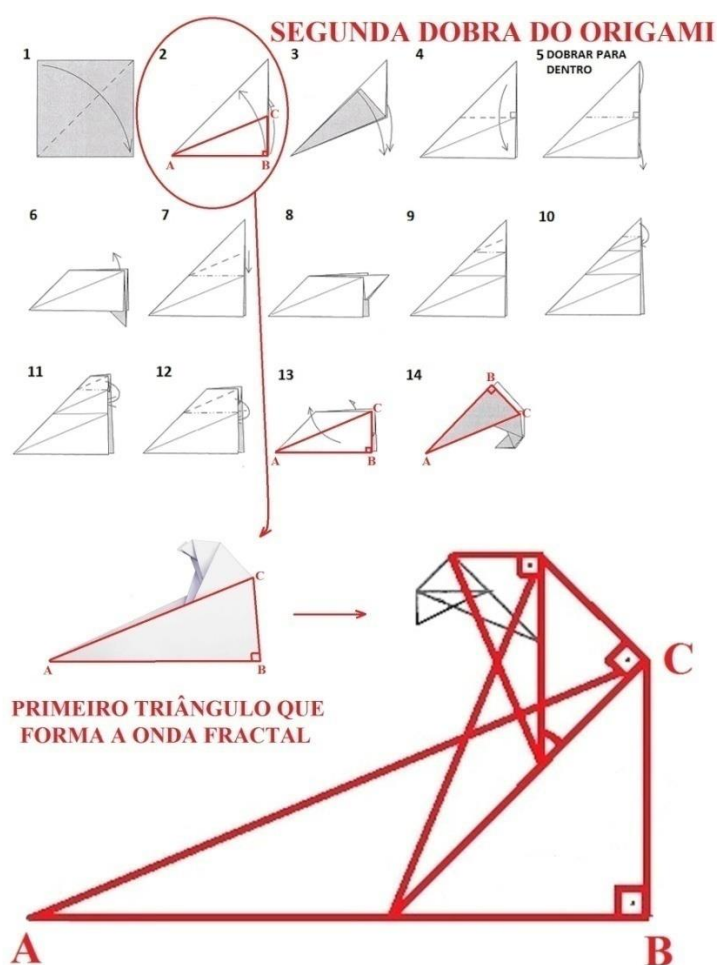
Fonte: elaborada pelo autor

Com base na identificação do encolhimento desses quadrados, propomos que o professor de Matemática indique para os alunos que o seu fator de encolhimento vale para o modelo como um todo, inclusive para os triângulos que o compõem quando ele está dobrado, e que eles podem encontrar quanto ele vale a partir deles para compor a sua transformação afim da forma como apresentamos a seguir.

Para que fique claro para os alunos que o fator de encolhimento desses quadrados vale para o modelo como um todo e para que eles entendam melhor como ele pode ser obtido a partir deles indicamos que o professor de Matemática lhes apresente as figuras 15, 16 e 17.

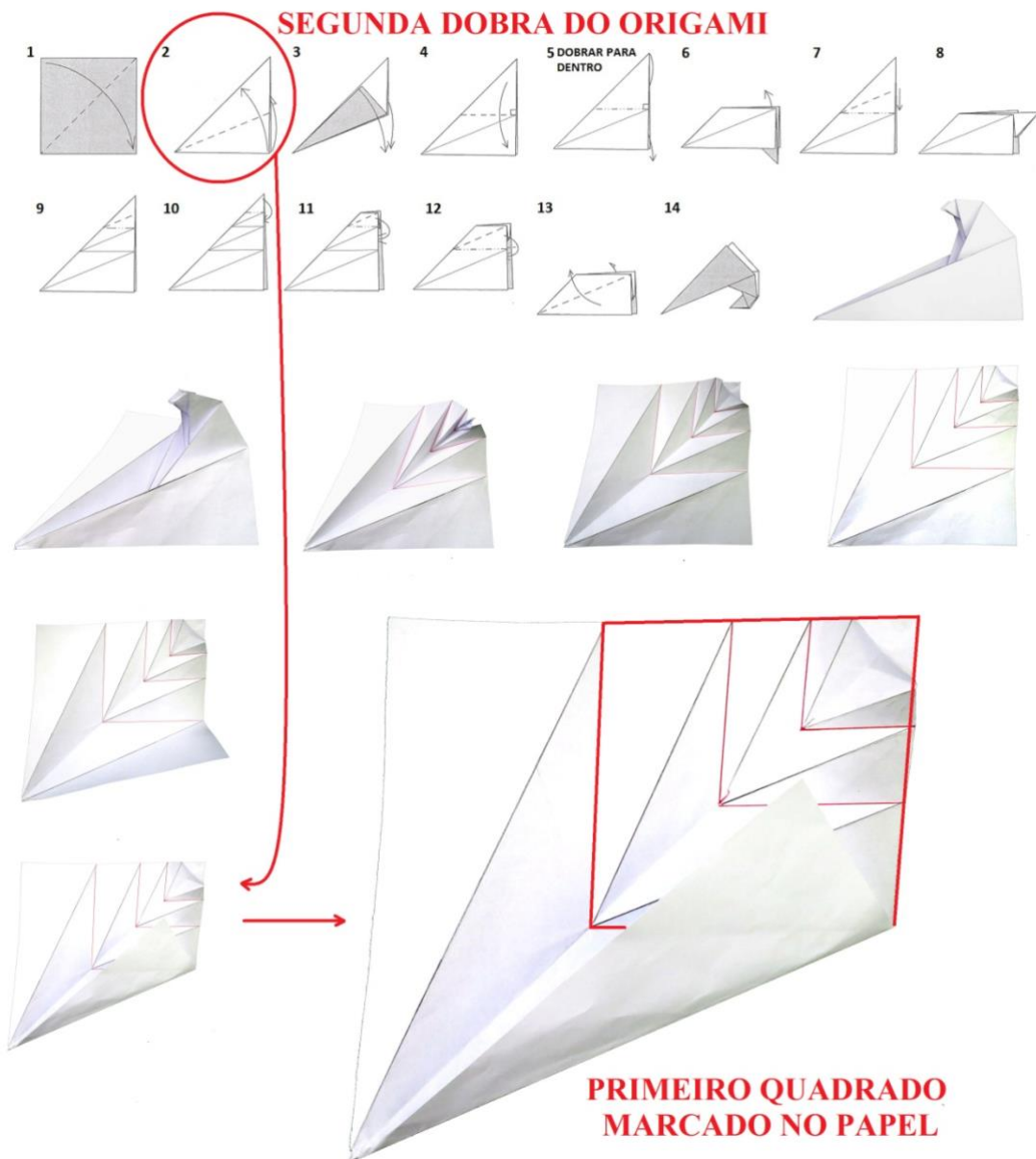
Como pode ser observado na figura 15, a segunda dobra do Origami é a que dá início às suas repetições autossimilares e ao encolhimento dos sucessivos triângulos retângulos dos quais ele é formado.

Figura 15 -
Segunda dobra do Origami *Onda Autossimilar* e o início das repetições autossimilares dos triângulos dos quais ele é formado



Além disso, como pode ser observado na figura 16, a segunda dobra do Origami também é a que determina o lado do primeiro dos quadrados que a dobradura marca no papel e a que dá início à repetição desse quadrado em tamanhos cada vez menores.

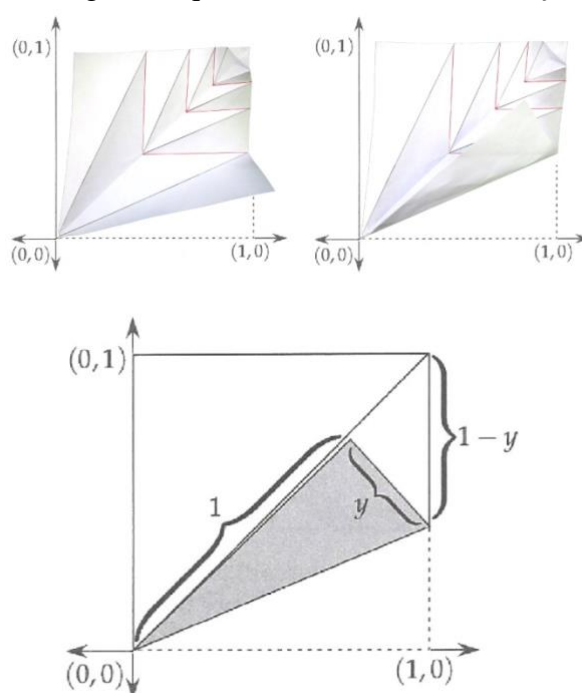
Figura 16 -
Segunda dobra do Origami *Onda Autossimilar* e o início das repetições autossimilares dos quadrados que sua dobradura marca no papel



Fonte: elaborada pelo autor

Com base na apresentação das figuras 15 e 16, consideramos que os alunos poderão perceber que é a segunda dobra do Origami que dá início aos triângulos dos quais ele é formado e aos quadrados que a sua dobradura marca no papel e que isso faz com que as suas repetições autossimilares obedeçam a um mesmo fator de encolhimento que propomos que o professor de Matemática os auxilie a encontrar com base em Hull (2013) e na figura 17.

Figura 17 - Segunda dobra do Origami *Onda Autossimilar* e indicação do fator de encolhimentos dos seus triângulos e quadrados como sendo $1 - y$



Fonte: elaborada pelo autor

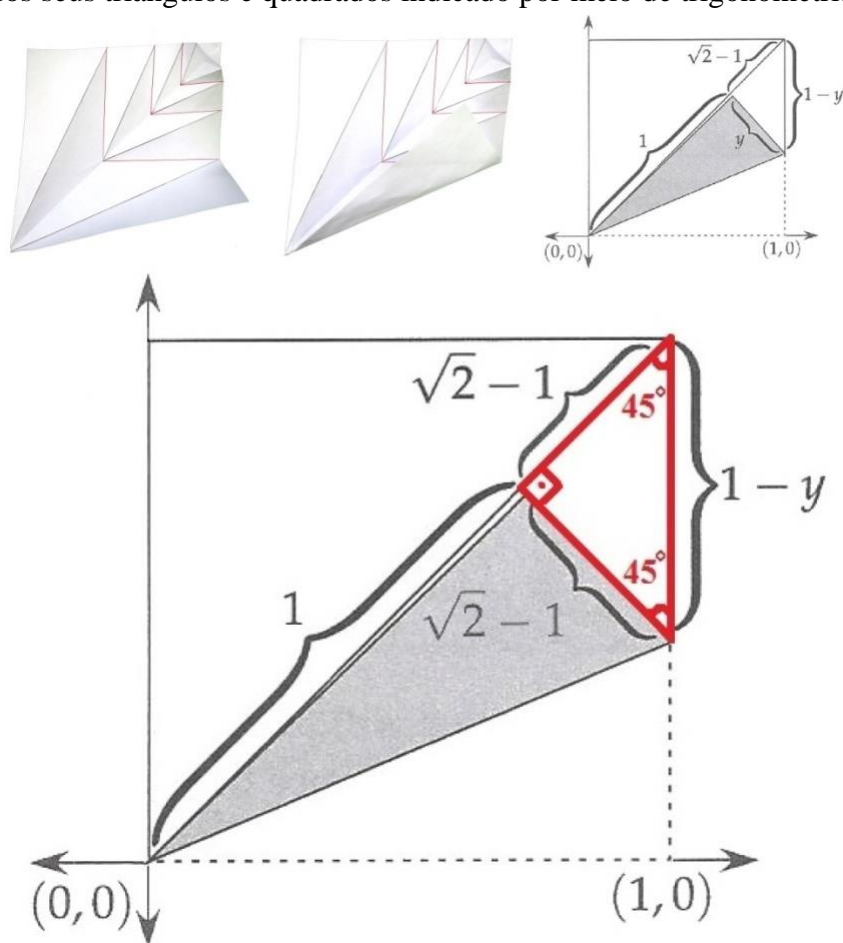
Como pode ser observado na Figura 17, se for atribuído o valor 1 para o comprimento do lado do papel com o qual o Origami é realizado, o lado do primeiro dos quadrados que sua dobradura deixa no papel valerá 1 menos o quanto ela o faz menor que o lado do papel ou 1 menos uma incógnita que pode ser estabelecida como sendo y .

Sendo assim, como aponta Hull (2013), o fator do encolhimento dos sucessivos triângulos que compõem o modelo e dos sucessivos quadrados que a sua dobradura marca no papel poderá ser estabelecido como sendo $1 - y$:

$$\text{fator de encolhimento do modelo} = 1 - y$$

Além disso, como aponta Hull (2013) e como também pode ser observado na Figura 17, a segunda dobra do Origami formará com um dos lados do primeiro quadrado que a sua dobradura marca no papel e com a diagonal do papel um triângulo retângulo cujos outros ângulos têm ambos 45° e cuja hipotenusa será $1 - y$ de forma que será possível indicar o valor de y por meio de trigonometria como mostra a figura 18.

Figura 18 - Segunda dobra do Origami *Onda Autosimilar* e encontro do valor do fator de encolhimentos dos seus triângulos e quadrados indicado por meio de trigonometria



Fonte: elaborada pelo autor

Como pode ser observado na figura 18, a segunda dobra do Origami faz com que o lado do papel cujo comprimento foi estabelecido como sendo 1 encoste na diagonal do quadrado que vale $\sqrt{2}$ de forma que o triângulo retângulo que ela fecha com o lado do primeiro quadrado marcado no papel e com o restante da diagonal do papel tenha os seus catetos valendo $\sqrt{2} - 1$ e que o valor de y também valha $\sqrt{2} - 1$.

A partir disso, o professor de Matemática poderá ajudar os alunos a determinarem que $y = \sqrt{2} - 1$ e que o fator pelo qual o padrão de dobras repetido sucessivamente faz o modelo como um todo encolher valerá $1 - y = 2 - \sqrt{2}$.

Com base na determinação desses valores, o professor de Matemática poderá ajudar os alunos na elaboração e na resolução da transformação afim para que eles encontrem as coordenadas para os quais o ponto P converge como é apresentado em Hull (2013).

Como apresenta esse autor, a função ou transformação afim poderá ser escrita da seguinte forma: $f(x, y) = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$; na qual a matriz $\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ é um encolhimento e uma rotação, e o vetor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ é um vetor de translação.

No caso do modelo que está sendo trabalhado, o encolhimento será $2 - \sqrt{2}$ e será possível utilizar uma matriz padrão para rotação de 45° de forma que a matriz para a solução seria a seguinte:

$$\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} = (2 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} \cos. 45^\circ & - \text{sen. } 45^\circ \\ \text{sen } 45^\circ & \text{cons } 45^\circ \end{pmatrix} = (2 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Para diminuir os custos de tratamento para os alunos e não prejudicar o andamento da atividade, assim como sugere Hull (2013), indicamos que seja feita a aproximação para 1 dos resultados das divisões de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ para que a matriz seja apresentada da seguinte forma:

$$(2 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com base na determinação dessa matriz, é possível escrever a transformação afim para o encontro das coordenadas para as quais o ponto P converge de forma que ela possa ser resolvida somente pelo uso de álgebra como é apresentado a seguir:

$$f(x, y) = (\sqrt{2} - 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

A despeito disso, tendo em vista os custos de tratamento que o professor de Matemática poderá discutir com os alunos nessa situação, assim como sugere Hull (2013), propomos que ele resolva o sistema $f(x, y) = (x, y)$ utilizando matrizes como apresentamos a seguir.

Se for levada em conta uma equação de matrizes para o vetor $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{x}$ é possível escrever para o caso em questão a seguinte equação $A\vec{x} - \vec{x} = -\vec{b} \Rightarrow (A - 1)\vec{x} = -\vec{b}$ que indicará as coordenadas para as quais o ponto P converge como apresentado a seguir:

$$\vec{x} = (A - 1)^{-1}(-\vec{b})$$

$$A - 1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \text{ e } (A - 1)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{coordenadas de } P = (A - 1)^{-1}(-\vec{b}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}$$

A partir da determinação desse resultado, consideramos que o professor de Matemática deve indicar para os alunos que o modelo apresenta a característica da *Autossimilaridade*, mas não é um fractal por convergir para um ponto determinado no gráfico e instigá-los a pensar sobre circunstâncias de suas vidas que podem apresentar as propriedades dos fractais de forma que possam vir a desenvolver projetos do seu interesse a partir destas reflexões em futuras oportunidades.

Em relação a essa abordagem com Transformações Afins, consideramos importante lembrar que a propomos para alunos mais avançados ou que demonstram propensão para seguirem os seus estudos na área de exatas ou de Computação Gráfica, já que os conteúdos trabalhados têm como base os indicados pela BNCC para o Ensino Médio, mas os transcendem grandemente em dificuldade e profundidade.

Neste capítulo apresentamos o projeto piloto da Engenharia Didática que desenvolvemos nos moldes de Machado (2000) e Barqueiro e Bosch tendo em vista aprimorar a proposta que apresentamos no capítulo 5 quando tivermos a oportunidade de aplicá-la.

Devido ao tempo do qual dispúnhamos e do cenário de pandemia no Brasil, não conseguimos desenvolver a proposta que apresentamos no capítulo 5 para que ela fosse aplicada como gostaríamos, mas conseguimos elaborar o projeto piloto desta Engenharia Didática.

Na nossa pesquisa, nós investigamos que articulações são possíveis entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami à luz do que é estabelecido pela BNCC e a proposta que apresentamos no capítulo 5 indica a possibilidade de uma articulação para o ensino de Auto Similaridade e Fractais tendo em vista desenvolver as seguintes competências e habilidades que a BNCC estabelece para as Artes Visuais e a Matemática para o Ensino Médio: Itinerário Linguagens e suas Tecnologias do qual faz parte as Artes Visuais: Competência Específica 1: Habilidade EM13LGG103; Itinerário Matemática e suas Tecnologias: Competência Específica 4: Habilidade EM13MAT401 relativa a funções polinomiais.

Neste projeto piloto de Engenharia Didática que desenvolvemos, o nosso objetivo é saber qual a opinião de professores de Matemática sobre as potencialidades do uso do Origami *Onda Auto Similar* para o ensino dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e para o desenvolvimento das competências e habilidades mencionadas

Em outras palavras, visto que o autor desta pesquisa é um professor de Artes Visuais, pretendemos saber a opinião de professores de Matemática sobre a nossa atividade com a arte do Origami poder colaborar para o estudo da Autossimilaridade e dos Fractais e das habilidades citadas.

Nos itens a seguir apresentamos este projeto piloto de Engenharia que propomos e tratamos das potencialidades que entendemos que ele terá para enriquecer a nossa pesquisa e a proposta que apresentamos no capítulo 5.

6.1 Introdução

Em concordância com Machado (2000) e Barqueiro e Bosch (2018), entendemos que este projeto piloto de Engenharia Didática poderá ser desenvolvido em quatro fases, quais sejam: 1) Análises Preliminares, 2) Design e Análise a Priori, 3) Aplicação e 4) Análise a Posteriori.

Visto que intentamos aplicá-lo em uma futura oportunidade, só apresentamos neste relatório as 1) Análises Preliminares e o 2) Design e Análise a Priori e fazemos considerações sobre as contribuições que entendemos que ele proporciona para a nossa pesquisa e para uma futura aplicação da proposta que apresentamos no capítulo 5.

Nas nossas Análises Preliminares cujo conteúdo necessário segundo Barqueiro e Bosch (2018) consideramos que já foi em parte contemplado no item c) da seção 1.2.2, nós tratamos do conteúdo a ser ensinado e apreendido e de qual problema didático relacionado a ele nós identificamos e elegemos para ser trabalhado.

De acordo com os autores que usamos como referência, as Análises Preliminares são uma análise epistemológica do conteúdo a ser ensinado e do seu ensino atual nas escolas junto com considerações sobre as possíveis dificuldades dos alunos em apreendê-lo.

Como desenvolvemos este projeto de Engenharia Didática para ser aplicado com professores de Matemática, analisamos os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais nos quais a nossa atividade de Origami se centra em termos da sua inserção na formação de professores de Matemática e de suas possíveis relações com outros objetos matemáticos com os quais esses professores em formação podem entrar em contato e considerar que seriam possíveis de serem associados e trabalhados através deles.

Com base nessas análises, elaboramos algumas considerações acerca da inserção da Autossimilaridade e dos Fractais no currículo dos cursos de formação de professores de Matemática e algumas hipóteses sobre quais as dificuldades que eles poderiam apresentar para esses professores quando associados ao Origami.

No nosso Design e Análise a Priori, também seguindo as orientações de Machado (2000) e Barqueiro e Bosch (2018), expomos como tratamos das possíveis questões problemáticas que identificamos nas nossas Análises Preliminares e apresentamos como elaboramos a situação didática que intentamos proporcionar por meio da atividade que desenvolvemos em todas as três fases que caracterizam tal situação: fase 1: fase de ação: resolução de um problema por meio da interação empírica com o *milieu* experimental; fase 2: fase de comunicação: explicitação da resposta para que outra pessoa possa seguir e até reproduzir a solução; fase 3: fase de validação: justificação da solução sem se referir às contingências do *milieu*.

Além disso, no nosso Design e Análise a Priori, indicamos quais dados decidimos coletar durante uma futura aplicação deste nosso projeto de Engenharia para apresentá-los em uma eventual Análise a Posteriori depois que ele for aplicado, levando em conta que pretendemos que ele seja aplicado para professores de Matemática.

Cumpramos ressaltar que os elementos que articulamos nas nossas Análises Preliminares e nos nossos Design e Análise a Priori contribuíram bastante para fazermos considerações finais sobre os resultados desta nossa pesquisa.

6.2 Análises Preliminares

Para desenvolvermos o nosso projeto piloto de Engenharia Didática, seguindo as orientações de Machado (2000) e Barqueiro e Bosch (2018), fizemos uma análise epistemológica e didática dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e elaboramos algumas considerações sobre sua inserção atual nos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática e da Educação Básica e sobre possíveis dificuldades no seu ensino e no seu aprendizado.

Como sugerem Mesquita e Mota (1991), Barbosa (2002), Baldovinotti (2011) e Moraes (2014), a análise epistemológica dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais indica a pertinência da sua presença nos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática e das escolas da Educação Básica e os desafios didáticos que podem surgir no seu ensino e no seu aprendizado.

a) Análise Epistemológica

A Autossimilaridade e os Fractais foram primeiro articulados em um trabalho publicado em 1975 por Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) que apresentou soluções para diversos problemas de modelagem matemática que se mantinham sem um tratamento adequado na comunidade acadêmica e a história do desenvolvimento desses conceitos revela as suas potencialidades para o ensino de diversos temas da Matemática.

Como apresentam Hankins (2002) e Moraes (2014), entre os séculos XVIII e o início do XIX, com o aprimoramento dos métodos científicos da síntese e da análise³² associados ao cálculo e à álgebra, foram feitas muitas descobertas principalmente na área da mecânica que sedimentaram a ideia de que a Matemática já contava com todos os recursos para resolver problemas e modelar os fenômenos físicos com precisão.

A despeito disso, como apontam Mesquita e Mota (1991), Barbosa (2002) e Baldovinotti (2011), entre o final do século XIX e começo do XX, começaram a ser propostos vários entes matemáticos que ensejaram o desenvolvimento de uma nova Geometria que seria a Geometria Fractal por apresentarem características semelhantes que desafiavam a Geometria Euclidiana e as noções que se tinha de infinito como a Autossimilaridade e a formação por processos iterativos.

Como exemplos desses entes matemáticos, são de destaque o conjunto de Cantor, apresentado pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918); a curva de Peano, apresentada pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932); a curva de Hilbert, apresentada pelo matemático alemão David Hilbert (1862 - 1943); a curva de Koch, apresentada pelo matemático sueco Helge von Koch (1870-1924); o triângulo de Sierpinski, apresentada pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969); e os conjuntos de Julia, apresentados por pelos matemáticos franceses Pierre Fatou (1878 - 1929) e Gaston Julia (1893 - 1978).

No contexto da proposição desses entes e do desenvolvimento da Geometria Fractal para modelá-los, como apontam Mesquita e Mota (1991), foram de fundamental importância os trabalhos sobre a modelagem de fenômenos naturais que também apresentaram as características da autossimilaridade e da geração por processos iterativos e que deram origem a chamada Teoria do Caos.

³²De acordo com Hawkins (2002), a distinção entre análise e síntese foi proposta por Aristóteles (384 - 322 a.c) no contexto da filosofia natural e desenvolvida por Isaac Barrow (1630-1677) e seu aluno, Issac Newton (1643 - 1727), no contexto das ciências e da Matemática para propor um método científico segundo o qual a modelagem de fenômenos complexos se daria por meio da sua análise ou divisão nos seus componentes mais simples utilizando equações algébricas e da sua posterior reconstituição ou recomposição em uma síntese que demonstrasse e provasse a veracidade das equações propostas. Ainda de acordo com o mesmo autor, com base nesse método, ao longo dos séculos XVIII e XIX, foram resolvidos vários problemas matemáticos e mecânicos e apresentados vários trabalhos de grande importância para as ciências como, por exemplo, os trabalhos sobre o regresso do cometa Halley de Alexis Clairaut (1713 - 1765), Joseph Lalande (1732 - 1807) e Nicole-Reine Lepaute (1723 - 1788); os trabalhos sobre a nutação e a correção das previsões astronômicas de James Bradley (1693 - 1762); os trabalhos que melhoraram a apresentação das tabelas lunares e a determinação da longitude no mar de Johann Tobias Mayer (1723 - 1762); os trabalhos sobre as paralaxes solares e lunares de Nicolau-Louis de Lacaille (1713 - 1762) e de Jean Baptiste Delambre (1749 - 1822); e o trabalho que apresentou a descoberta do planeta Urano de William Herschel (1738 - 1822). Com base em todas essas descobertas, como aponta Moraes (2014), foi sendo firmada a ideia de que a Matemática já possibilitava a modelagem de qualquer fenômeno natural e que só seria abalada por desenvolvimentos posteriores como os que resultaram na proposição dos entes geométricos fractais.

Como apresentam Mesquita e Mota (1991), entre 1975 e 1982, com base no estudo desses entes matemáticos e dos trabalhos relacionados à Teoria do Caos, o matemático franco-polonês Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) publicou uma série de trabalhos nos quais articulou os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e formalizou uma nova Geometria que ficou conhecida como Geometria Fractal, com o objetivo de minimizar as lacunas da Geometria Euclidiana no tratamento das suas características que já foram apresentadas nesta pesquisa no item 5.1.2.

A respeito dessas características, como sugerem Mesquita e Mota (1991), interessa apontar que a sua combinação nos entes que as apresentam pode ser considerada a principal responsável por eles terem sido denominados por Madelbrot de Fractais, por elas implicarem que eles são formados por infinitas repetições deles próprios em processos iterativos e suas representações visuais comumente os apresentarem como compostos por vários estilhaços ou partes quebradas de si mesmos como indica o adjetivo latino *fractus*.

Com base nesses trabalhos de Madelbrot, como expõe Baldovinotti (2011), a Geometria Fractal foi adotada no âmbito da Teoria do Caos e passou a ser a linguagem matemática utilizada para a modelagem dos entes matemáticos e dos padrões naturais que vinham desafiando a comunidade acadêmica, sendo atualmente empregada em várias áreas das ciências.

Com base nisso, a Geometria Fractal e os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais que as compõem podem ser considerados como capazes de modelar dinâmicas relacionadas a várias ciências e de serem um potencial elo entre diferentes disciplinas e a Matemática de forma que seria pertinente que o seu estudo constasse dos currículos dos cursos de formação de professores e da Educação Básica, embora possa haver grandes desafios didáticos no seu ensino e no seu aprendizado como indicamos na seção c).

b) Inserção nos Currículos

A despeito da sua atualidade e de poderem proporcionar a ligação entre a Matemática e várias outras ciências, ao menos no Brasil, como bem demonstra Baldovinotti (2011), nem a Geometria Fractal nem os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais vêm sendo contemplados nos currículos da formação de professores de Matemática ou da Educação Básica, embora todos os autores que consultamos e que apresentamos a seguir defendam que eles deveriam ser, assim como nós consideramos que seria importante que fossem, por exemplo,

para enriquecerem a formação dos professores e para ajudarem na implementação da interdisciplinaridade proposta pela BNCC.

Em relação a esse tema, consideramos importante esclarecer que, embora somente Baldovinotti (2011) defenda expressamente que esses conceitos devam estar presentes nos currículos dos cursos de formação de professores, todos os demais autores que consultamos defendem essa presença implicitamente, ao advogarem que ela ocorra nos currículos da Educação Básica e ao indicarem que os professores devem ser preparados para articular temas da Matemática por meio deles.

Por exemplo, já na época da publicação do seu trabalho há 30 anos, Mesquita e Mota (1991) apontavam que a importância dos fractais como ferramenta científica era cada vez maior e sugeriam que o seu entendimento deveria fazer parte da formação de professores dada a sua certeza de que a Geometria Fractal logo seria reconhecida como importante de ser contemplada pelos currículos da Educação Básica.

Já Barbosa (2002) indica que a exploração dos fractais particularmente no Ensino Médio pode ser uma excelente ferramenta para que os alunos aprofundem a aprendizagem e a fixação de vários temas matemáticos que são tratados nessa etapa de ensino, como os relacionados às equações algébricas, as áreas e aos volumes das figuras e sólidos geométricos, e sugere que os professores devem ser preparados para conhecê-los e tirar proveito das suas potencialidades didáticas.

Corroborando com as afirmações de Barbosa, Moraes (2014) defende que os Fractais devem constar do currículo do Ensino Básico por serem uma excelente ferramenta para explorar com os alunos diversos conteúdos matemáticos como, por exemplo, a escrita de fórmulas e algoritmos, o cálculo de áreas e perímetros e os conceitos de limite e de progressão geométrica, e sugere que os professores de Matemática precisam estar preparados para utilizá-los em sala de aula.

Já Baldovinotti (2011) defende expressamente que a Geometria Fractal da qual fazem parte os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais deve fazer parte do currículo dos cursos de formação de professores de Matemática e da Educação Básica para que os docentes estejam preparados para utilizar o seu potencial em, por exemplo, proporcionar a interdisciplinaridade entre a Matemática e outras disciplinas.

Tendo tudo isso em vista, entendemos que os conceitos de Autossimilaridade e dos Fractais que fazem parte da Geometria Fractal deveriam constar dos currículos dos cursos de formação de professores e das escolas da Educação Básica por poderem proporcionar o tratamento integrado de diversos objetos matemáticos e a interdisciplinaridade entre a

Matemática e outras disciplinas como sugerimos que ocorra na nossa proposta com o uso da arte do Origami.

c) Análise Didática: eleição do problema didático que será trabalhado

Com base na análise epistemológica que fizemos dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, entendemos que a sua complexidade, novidade e interdisciplinaridade podem impor grandes desafios ao seu ensino e ao seu aprendizado, mas consideramos que é pertinente e importante a sua presença nos currículos tanto da Educação Básica quanto dos cursos de formação de professores de Matemática.

Sobre esses desafios, embora nenhum dos autores que consultamos tratem especificamente de obstáculos epistemológicos ou didáticos relacionados aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, entendemos que uma das principais dificuldades que eles sugerem que podem ser enfrentadas no seu ensino e no seu aprendizado seja elaborar representações visuais de suas dinâmicas que possam dar suporte à compreensão das suas representações matemáticas.

Por exemplo, Mesquita e Mota (1991) apontam que as representações visuais dos fractais são essenciais para o entendimento das especificidades das suas dinâmicas que são modeladas pela linguagem da Matemática e sugerem que é fundamental que elas sejam conhecidas e bem elaboradas por quem pretende explorar os fractais, principalmente se for para o ensino.

Já Barbosa (2002) indica que as representações visuais dos fractais são fundamentais para que possam ser realizadas explorações matemáticas das suas características como, por exemplo, por meio do estudo das relações numéricas entre as suas áreas e os seus volumes ao longo da sua formação por iterações sucessivas, e defende que é essencial que essas representações sejam bem elaboradas para, inclusive, captar a atenção dos alunos com a estética que as suas formas podem apresentar.

Na mesma linha de Barbosa, Moraes (2014) aponta que as representações visuais dos fractais são um suporte necessário para a exploração matemática das suas características e sugere que os professores devem estar preparados para apresentá-las aos alunos, seja por meio de imagens estáticas ou por meio do uso de softwares como o Geogebra.

Já Baldovinotti (2011) defende que as representações visuais dos fractais são essenciais para a exploração matemática das suas dinâmicas e que os professores devem estar preparados

para elaborá-las, pois elas representam um importante meio para que proporcionem aos alunos a visualização de aplicações da Matemática que podem estar relacionada a fenômenos da natureza como a formação dos flocos de neve pelo congelamento da água.

Tendo isso em vista e levando em conta que a nossa pesquisa trata de articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami, elegemos o problema didático da representação visual dos conceitos da Autossimilaridade e dos Fractais para abordarmos neste nosso projeto piloto de Engenharia Didática.

Para abordarmos esse problema, elegemos o Origami por consideramos que ele é uma Arte particularmente propícia para a exploração matemática desses conceitos como defendemos nas seções b) e c) do item 1.2.2 e propomos desafiar os professores para os quais o nosso projeto de Engenharia será aplicado a proporem uma modelagem matemática que possa relacioná-los com as dinâmicas do Origami *Onda Autossimilar* como apresentamos nas nossas Análises Preliminares.

Em relação a esse desafio que propomos, cumpre observar que nós decidimos por renomear o Origami *Onda Autossimilar* para somente *Onda* para que essa sua única característica fractal não fique evidente e para que nós possamos averiguar se os professores conseguem identificá-la e apontar para a ausência das demais características que o indicam como um fractal.

d) Hipóteses levantadas

Com base nessas análises que realizamos, levantamos as seguintes hipóteses sobre as possíveis reações dos professores de Matemática para os quais esse projeto de Engenharia poderá ser aplicado frente aos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, ao Origami e ao desafio de propor uma modelagem matemática para relacioná-los.

Como averiguamos que a Geometria Fractal e os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais não têm lugar garantido nos currículos dos cursos de formação de professores, entendemos que alguns deles podem não conhecê-los e não saber como aplicar os seus conhecimentos matemáticos para trabalhá-los.

Sendo assim, levantamos a hipótese de os professores precisarem de mais explicações sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais para além das que apresentamos na nossa atividade para poderem associá-los às dinâmicas do Origami e proporem uma modelagem que possa relacioná-los.

Para contornarmos essa possível dificuldade, sugerimos que quem for aplicar este projeto de Engenharia se mantenha preparado com textos e imagens sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais para disponibilizar para os professores para auxiliá-los a se engajarem na atividade e no desafio proposto caso seja necessário.

Já em relação ao Origami que propomos, levantamos a hipótese de os professores não terem qualquer familiaridade com dobraduras e terem dificuldade de entender e seguir as orientações para a realização da *Onda Autossimilar*, mesmo sendo adultos e contando com plenas capacidades motoras.

Para contornarmos essa dificuldade que pode ser apresentada, sugerimos que quem for aplicar este projeto de Engenharia se mantenha munido de um Origami pronto e de um Origami em cada uma das etapas da sua realização para mostrá-la e explicá-la para os professores caso seja necessário.

Por fim, em relação ao desafio de propor uma modelagem matemática para relacionar os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais com o Origami *Onda Autossimilar*, levantamos as hipóteses de o nome do Origami deixar evidente que a sua única característica fractal é a Autossimilaridade e de isso tirar o interesse dos professores para a atividade, e de eles terem dificuldades de apresentar uma modelagem matemática que relacione a dobradura com os conceitos apresentados.

Para contornarmos a primeira dessas dificuldades que podem surgir, nós decidimos apresentar o Origami *Onda Autossimilar* com o nome de Origami Onda de modo a não deixar evidente que a sua única característica fractal é a autossimilaridade.

Já para contornarmos a segunda dificuldade, sugerimos que quem for aplicar este projeto de Engenharia Didática se mantenha preparado para apresentar aos professores as Transformações Afins como uma forma de relacionar os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais com o Origami e de provar matematicamente que a sua única característica fractal é a Autossimilaridade da forma como apresentamos no item b) da seção 5.2.2.2

O quadro 32 sumariza as hipóteses que levantamos nas nossas Análises Preliminares e as abordagens que sugerimos serem adotadas com base nelas.

Quadro 32 -
Hipóteses que levantamos e abordagens que adotamos

Hipóteses	Abordagem

O conteúdo sobre Autossimilaridade e Fractais apresentado na atividade será insuficiente para o seu entendimento.	Sugerimos a preparação de material extra com textos e imagens para ser apresentado caso seja necessário
Os professores podem ter dificuldades na compreensão das etapas para a realização das dobraduras do Origami.	Sugerimos a preparação de um Origami pronto e de um Origami em cada uma das etapas da sua dobradura para explicá-las caso seja necessário.
Os professores podem identificar pelo nome do Origami que a sua única característica fractal é a autossimilaridade e se sentir desmotivados com a atividade.	O origami <i>Onda Autossimilar</i> é apresentado na atividade somente com o nome de Origami <i>Onda</i> .
Os professores podem ter dificuldades em propor alguma modelagem matemática que possa relacionar os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais com o Origami	Sugerimos a preparação de uma apresentação sobre as Transformações Afins poderem ser utilizadas para provar que a única característica Fractal do Origami é a Autossimilaridade.

Fonte: elaborado pelos autores

Por fim, não consideramos a hipótese de os professores não saberem opinar sobre quais competências e habilidades da BNCC podem ser trabalhadas por meio do Origami devido a esperarmos que todos eles já estejam familiarizados com esse documento legal quando este projeto de Engenharia puder ser aplicado.

6.3 Design e Análise a Priori

Para lidarmos com as possíveis questões problemáticas que identificamos nas nossas Análises Preliminares, desenvolvemos a nossa atividade para proporcionar aos professores uma situação adidática nas três fases que caracterizam tal situação de acordo com a Teoria das Situações Didática como apresentamos no quadro 33

Quadro 33 -
As três fases da situação adidática que intentamos proporcionar

Fase de Ação	
--------------	--

	Os professores recebem um breve texto a respeito dos conceitos de Autossimilaridades e de Fractais junto com as etapas para realização do Origami <i>Onda</i> sem que eles sejam expressamente relacionados e são incentivados a responder questões acompanhadas de apontamentos norteadores que os desafiam a relacioná-los matematicamente.
Fase de Comunicação	Os professores são convidados a se reunir em grupos para discutirem as respostas que elaboraram para as questões.
Fase de Validação	Os professores conversam com quem estiver aplicando a proposta sobre as experiências que tiveram e ele lhes apresenta o que era esperado deles com a atividade.

Fonte: elaborado pelos autores

Já para averiguarmos as opiniões dos professores sobre a nossa atividade com o Origami poder servir para tratar dos conceitos de Autossimilaridade e Fractais, elaboramos um questionário para ser aplicado no final da atividade por meio do qual intentamos coletar os dados que apresentamos quadro 34.

Quadro 34 -
Dados que intentamos coletar na Engenharia por meio de um questionário.

Os professores conseguiram entender os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por meio do texto que lhes foi fornecido?
Os professores conseguiram ver relações entre o Origami realizado e os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais, mesmo que só por meio da observação das etapas da sua dobradura sem que tenham conseguido realizá-la no papel?
Os professores conseguiram propor alguma forma matemática de relacionar os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais que lhes foi apresentado com o Origami?

Os professores consideraram que essa atividade com o Origami pode servir para trabalhar os conceitos tratados e desenvolver alguma competência ou habilidade matemática estabelecida pela BNCC para o Ensino Médio?

Fonte: elaborado pelo autor

A respeito desses dados que apresentamos, justificamos a escolha por coletá-los por entendermos que eles podem colaborar com os propósitos desta nossa pesquisa por poderem servir de parâmetro para aprimorarmos a proposta que apresentamos no capítulo 5 para o Ensino Médio quando tivermos oportunidade de aplicá-la.

Por exemplo, entendemos que se os professores de Matemática não conseguirem compreender os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais por meio do texto que lhes foi fornecido, teremos que aprofundar a apresentação desses conceitos na proposta que apresentamos para alunos do Ensino Médio.

Da mesma forma, entendemos que se os professores não conseguirem ver relações entre os conceitos tratados e o Origami, essas relações terão de ser melhor explicitadas na proposta que desenvolvemos para alunos do Ensino Médio.

Finalmente, entendemos que se os professores não conseguirem propor uma abordagem matemática para relacionar os conceitos tratados com o Origami ou indicar possíveis competências e habilidades da BNCC para o Ensino Médio que poderiam ser desenvolvidas por meio dessa atividade, então teremos que rever as relações que estabelecemos entre o Origami e os conteúdos Matemáticos da BNCC ou desenvolver uma nova abordagem.

A seguir, expomos o design do nosso projeto piloto de Engenharia que desenvolvemos para durar 1 hora e 20 minutos junto com o questionário que elaboramos para coletar os dados que julgamos importantes de serem obtidos.

a) Fase de Ação: tempo proposto: 20 minutos

Para a fase de ação da situação adidática que intentamos proporcionar com a nossa atividade, pretendemos pedir aos professores participantes que estejam munidos de uma folha de papel quadrada e apresentar para eles um breve texto sobre os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais e as instruções para a realização do Origami, sem fazer quaisquer considerações sobre as possíveis relações entre eles como apresentamos no quadro 35 e nas figuras 21, 22 e 23.

Além disso, pretendemos apresentar para eles três questões acompanhadas de apontamentos norteadores que os desafiam a relacioná-los matematicamente como expomos a seguir junto com as respostas e procedimentos que esperamos que eles explorem e nos reportem oralmente.

A respeito do texto do quadro 35, considerando relevante apontar que alteramos as seguintes palavras relativas as descrições das características dos fractais como indicadas por Barbosa (2002) para evitar confundir os participantes durante a realização da atividade:

- a palavra "partes" foi substituída pela expressão "etapas da sua realização": Barbosa (2002) define a *autossimilaridade* como sendo uma das propriedades dos fractais que indica que a totalidade de um fractal pode ser apreciada a partir de qualquer uma de suas partes, mas decidimos trocar a palavra "partes" pela expressão "etapas da sua realização" para que haja congruência entre o texto do quadro e a imagem explicativa do Origami e para que os participantes associem cada etapa da realização do Origami como uma possível etapa da realização de um fractal.
- a expressão "lei de geração iterativa" foi substituída pela expressão "lei de realização iterativa": Barbosa (2002) define a *lei de geração iterativa* como sendo uma das propriedades dos fractais que indica que um fractal é formado pela aplicação sucessiva de uma mesma lei de geração, mas decidimos trocar a expressão "lei de geração iterativa" pela expressão "lei de realização iterativa" para que haja congruência entre o texto do quadro e a imagem explicativa do Origami e os participantes associem cada etapa da realização do Origami como uma possível etapa de realização de uma estrutura fractal.

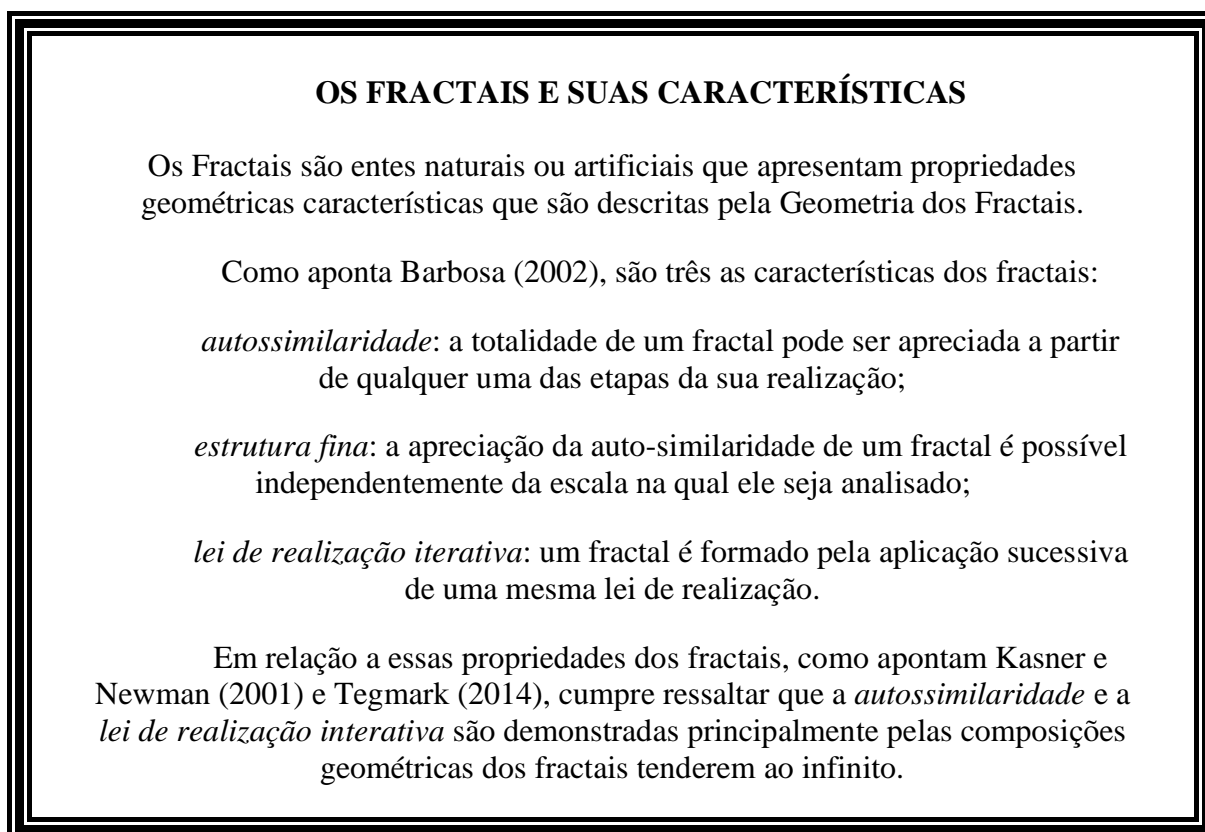
Além disso, consideramos importante apontar que não fizemos qualquer menção no texto do quadro 35 sobre os fractais serem entendidos como constituídos de níveis de repetições autossimilares, pois entendemos que o uso da palavra "níveis" junto da palavra "etapas" que utilizamos para nos referir as dobraduras do Origami poderá confundir e atrapalhar o desempenho dos participantes ao longo da atividade.

Por fim, ainda a respeito do texto do quadro 35, cumpre observar que pretendemos nomeá-lo na atividade como "Quadro 1" e precedê-lo das seguintes orientações escritas acima dele fazendo referência às instruções para a realização do Origami das figuras 19, 20 e 21 que

serão nomeadas na atividade como "imagens 1, 2 e 3": "Após a leitura do texto apresentado no quadro 1, realize o Origami explicado nas imagens 1, 2 e 3 e responda as questões propostas."

Quadro 35 -

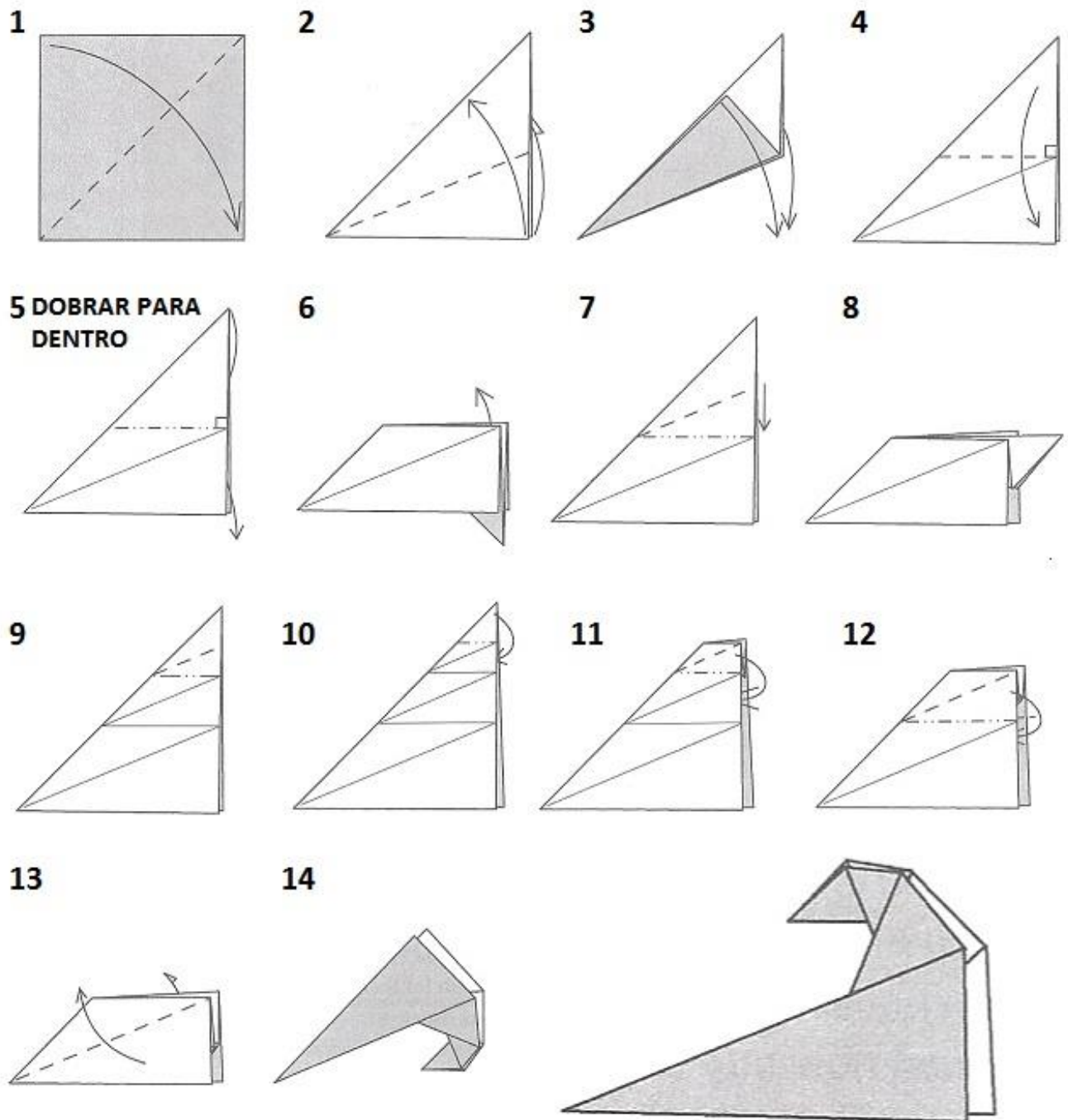
Quadro a ser nomeado na atividade como Quadro 1 contendo um breve texto sobre os fractais



Fonte: elaborado pelo autor

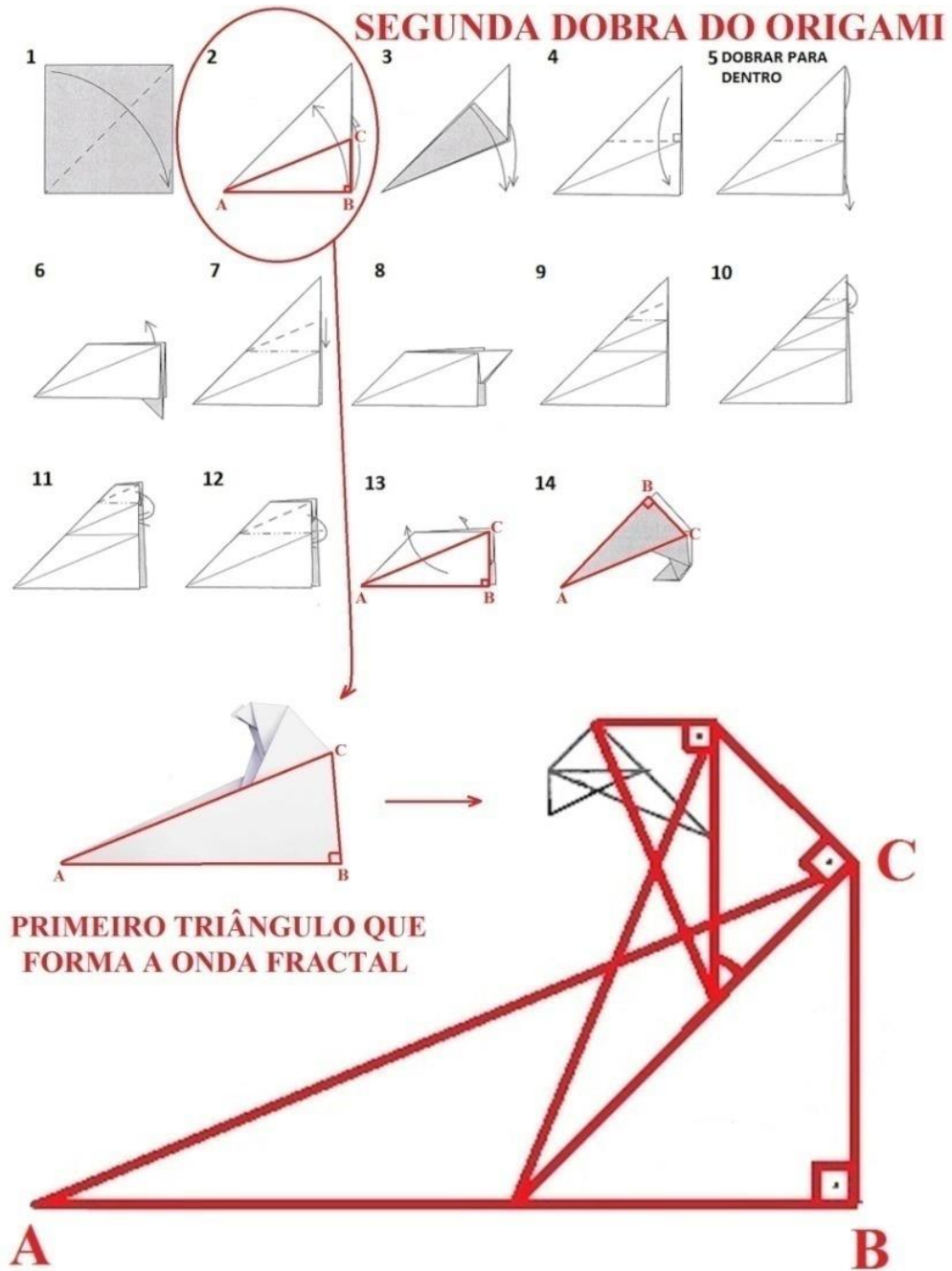
Figura 19 -

Figura a ser nomeada na atividade de figura 1 com as etapas para a realização do Origami *Onda*



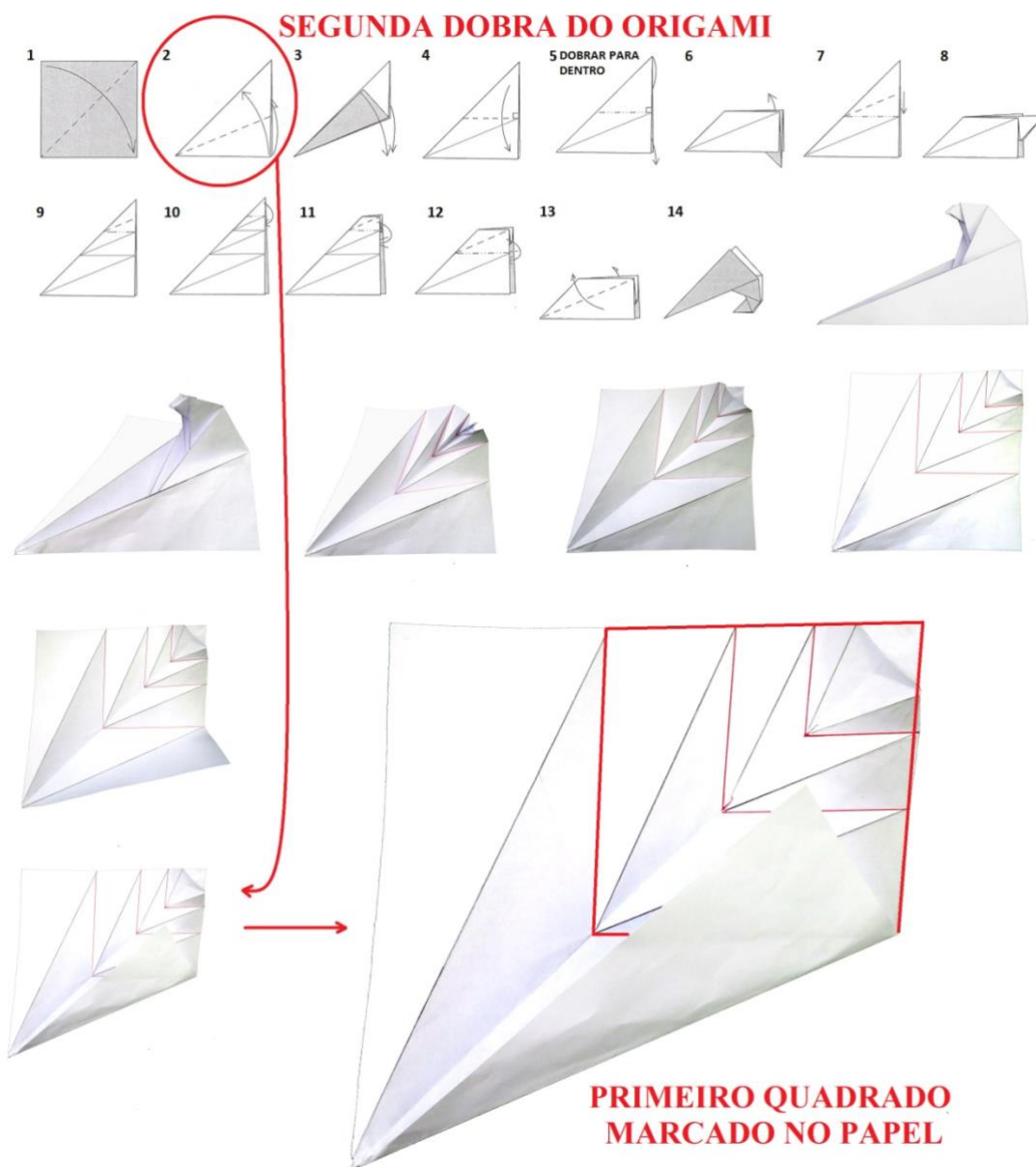
Fonte: adaptado de Hull (2013)

Figura 20 -
 Figura a ser nomeada na atividade de figura 2 com a indicação da segunda etapa do Origami *Onda* e o início das repetições dos triângulos dos quais ele é formado



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 21 -
 Figura a ser nomeada na atividade de figura 3 com a indicação da segunda etapa do Origami *Onda* e o início das repetições dos quadrados que sua dobradura marca no papel



Fonte: elaborada pelo autor

Depois da apresentação do quadro 35 e das figuras 19, 20 e 21 a serem nomeados na atividade de quadro 1 e de imagens 1, 2 e 3, respectivamente, pretendemos apresentar as figuras

22 e 23 (mais adiante) a serem nomeadas na atividade de imagens 4 e 5 acompanhadas das questões 1, 2 e 3 cujas respostas que esperamos expomos a seguir.

QUESTÕES

"1) O Origami *Onda* apresenta as características dos Fractais? Quais e por quais razões?

- Apontamento norteador: observe na imagem 2 que o Origami *Onda* é formado por sucessivos triângulos retângulos semelhantes cada vez menores cujas repetições têm início na segunda etapa da sua realização."

Com essa questão e este apontamento norteador, esperamos que a leitura do texto sobre Autossimilaridades e Fractais faça com que os professores possam apontar que o Origami *Onda* apresenta a *autossimilaridade*, mas não é um fractal por ter a sua primeira etapa diferente das demais e por não seguir uma mesma lei de geração ou "lei de realização" da forma como foi nomeada no quadro 35 como seria necessário para que apresentasse as propriedades da *estrutura fina* e da *lei de construção iterativa* ou "*lei de realização iterativa*" da forma como foi nomeada também no quadro 35.

A despeito disso, também esperamos que os professores ainda mantenham certa dúvida a respeito da natureza fractal desse Origami e que as reflexões propostas pela questão 2 podem auxiliá-los na sua determinação.

"2) Se as formas do Origami *Onda* forem convertidas para um gráfico, será possível apresentar no registro de representação gráfico que as sucessivas etapas da sua realização fazem com que o seu ponto de origem P se movimente como é apresentado na imagem 4.

Se a dobradura desse Origami continuasse indefinidamente, o seu ponto P convergiria para um ponto determinado do gráfico.

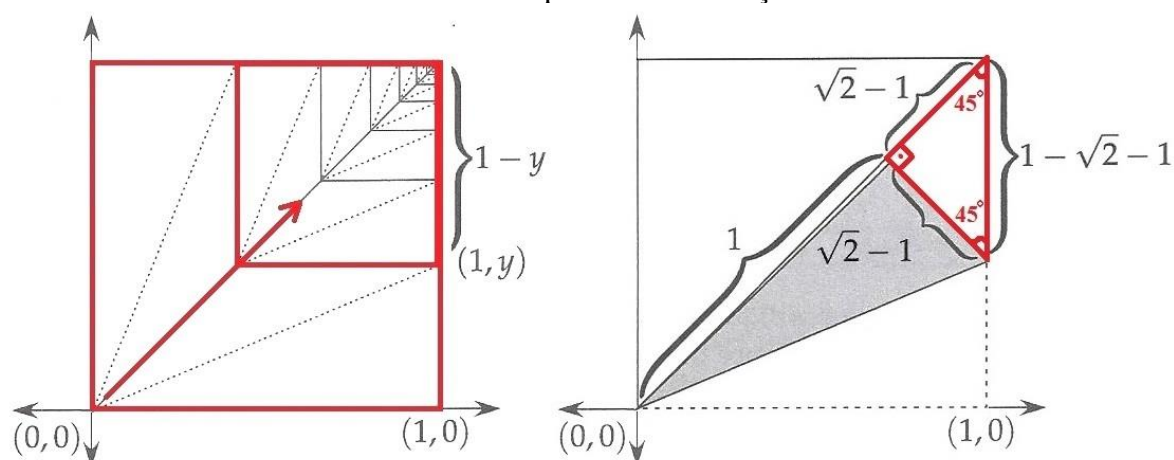
De qual modo a determinação das coordenadas desse ponto para o qual o ponto P convergiria poderia apresentar as possíveis propriedades fractais desse Origami?

Figura 22 -

Figura a ser nomeada na atividade de imagem 4 indicando a convergência das formas do Origami para um ponto do gráfico

Figura 23 -

Figura a ser nomeada na atividade de imagem 5 indicando o padrão de marcas que a realização do Origami *Onda* deixa no papel e algumas relações trigonométricas visíveis na terceira etapa da sua realização



Fonte: elaborada pelo autor

- Apontamento norteador: observe nas imagens 3 e 5 que os sucessivos quadrados que a realização do Origami *Onda* marca no papel tendem para um ponto determinado do papel."

Com a questão 3 e o apontamento norteador que a acompanha, esperamos que a observação das figuras faça com que os professores possam propor uma prova matemática para a natureza não fractal do Origami demonstrando que o seu ponto P de origem converge para um ponto específico no gráfico utilizando, por exemplo, as transformações afins.

Para a construção de uma transformação afim relacionada a essa demonstração, consideramos que os professores podem montar uma matriz composta de um fator de rotação e de um fator de encolhimento para os sucessivos triângulos dos quais o Origami se compõem que seriam, respectivamente, 45° e $1 - y = 2 - \sqrt{2}$.

A despeito disso, também esperamos que os professores possam não propor as transformações afins ou qualquer outra alternativa matemática para fazer a prova da natureza não fractal do Origami e sugerimos que o aplicador da Engenharia se mantenha preparado para apresentar para eles as transformações afins como uma alternativa para essa finalidade.

Especificamente nessa questão, tendo em vista a proposta que apresentamos no capítulo 5 trabalha com uma habilidade matemática relacionada às funções de primeiro grau, ressaltamos que esperamos observar se os professores propõem alguma forma de fazer a prova da natureza não fractal do Origami que explore a representação gráfica das relações funcionais entre a rotação e o encolhimento dos sucessivos triângulos dos quais ele é formado e que possa

servir para trabalharmos alguma competência ou habilidade matemática da BNCC para o Ensino Médio por meio dessa arte.

b) Fase de Comunicação: tempo proposto: 20 minutos

Para a fase de comunicação da nossa atividade, esperamos que os professores se reúnam em grupos para observarmos as suas discussões sobre as suas experiências com o Origami e as respostas que eles elaboraram para as questões.

Além disso, esperamos que o aplicador da Engenharia observe as discussões dos professores enquanto eles lidam com a atividade e que anote os pontos que julgar interessantes para enriquecer a nossa pesquisa ou que peça o consentimento dos professores para gravar as suas conversas tendo em vista uma futura análise das suas interações.

c) Fase de validação: tempo proposto: 40 minutos

Para a fase de validação da situação adidática que intentamos proporcionar, esperamos que todos os professores conversem com o aplicador da atividade e exponham para ele as experiências que tiveram com os desafios propostos.

Dependendo do interesse que a atividade despertar nos professores participantes, consideramos que o seu aplicador poderá conversar com eles sobre outras possíveis abordagens matemáticas do Origami para a sala de aula apresentadas em obras de referência sobre o tema, como, por exemplo, a de Rego et al. (2004).

Além disso, nessa fase também esperamos aplicar oralmente o seguinte questionário pelo qual pretendemos obter os dados que objetivamos conseguir sobre a nossa atividade com o Origami poder servir para tratar dos conceitos de Autossimilaridade e Fractais e para desenvolver competências e habilidades matemáticas da BNCC para o Ensino Médio.

QUESTIONÁRIO
(para ser aplicado oralmente)

- 1) Vocês consideram que o texto que lhes foi fornecido é claro a respeito dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais?
- 2) Quais relações vocês consideram existir entre o Origami proposto e os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais?
- 3) Vocês poderiam propor alguma forma matemática de relacionar os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais com esse Origami?
- 4) Vocês consideram que essa atividade é propícia para trabalhar alguma competência ou habilidade matemática estabelecida pela BNCC para o Ensino Médio?
- 5) Quais dificuldades vocês tiveram na realização da atividade?

7 Considerações Finais

Neste capítulo, apresentamos as nossas considerações finais nas quais avaliamos as reflexões e produtos que obtivemos com a nossa pesquisa em face dos nossos objetivos iniciais e verificamos se a nossa proposta foi condizente com os propósitos que estabelecemos para esta investigação.

Além disso, também fazemos considerações a respeito de futuros desdobramentos para este trabalho e sugestões de pesquisas relacionadas ao tema que investigamos que poderão ser realizadas por nós em futuras oportunidades ou por outros pesquisadores interessados.

Com base em tudo o que apresentamos, consideramos que tivemos sucesso no trabalho com os nossos problema de pesquisa e questão de pesquisa e que conseguimos atingir satisfatoriamente o nosso objetivo de investigar possíveis articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami e utilizá-las para propor uma abordagem didática prática com base no que é estabelecido pela BNCC para essas disciplinas que optamos por ser voltada para o Ensino Médio.

No nosso levantamento bibliográfico, conseguimos selecionar um conjunto de publicações internacionais relevantes a respeito do uso do Origami na Educação Matemática e, na nossa revisão bibliográfica, conseguimos analisar tais publicações e verificar quais conteúdos de Matemática os seus autores propõem que sejam ensinados com o Origami, para quais alunos e de que modo.

Além disso, na nossa revisão bibliográfica também averiguamos quais articulações os autores dessas publicações propõem entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami e comparamos tais propostas com o que é estabelecido pela BNCC para as Artes Visuais e a Matemática.

Com base nessa revisão bibliográfica que realizamos, fizemos a análise das propostas que consideramos as mais interessantes e condizentes com o que é estabelecido pela BNCC e pudemos apresentar os fundamentos teóricos e metodológicos que utilizamos como base para apresentarmos a nossa proposta didática prática que decidimos ser voltada para o Ensino Médio.

A respeito dessa proposta didática, consideramos que ela cumpriu o nosso objetivo de apresentar possíveis articulações entre as Artes Visuais e a Matemática com o Origami à luz do que é estabelecido pela BNCC e entendemos que ela fornece importantes contribuições para futuras pesquisas tanto na área das Artes Visuais quanto na área da Matemática.

Dentre essas contribuições, consideramos que uma das mais relevantes seja a possibilidade do uso do modelo teórico *Schoolwide Enrichment Model* que é pouco conhecido e utilizado no Brasil para trabalhar com a interdisciplinaridade e o tratamento dos Temas Contemporâneos Transversais proposto pela BNCC.

Ainda em relação à proposta didática prática que apresentamos, embora não tenhamos tido a oportunidade de aplicá-la, pudemos torná-la base para desenvolvermos um projeto piloto de Engenharia Didática voltada para professores que entendemos que poderá aprimorar a sua aplicação quando tivermos oportunidade de implementá-la.

Sobre esse projeto piloto, a despeito de ele não ter sido aplicado, entendemos que ele apresenta contribuições relevantes que se somam às que pudemos oferecer com a nossa proposta didática prática por desenvolver a análise epistemológica e da inserção nos currículos dos cursos de formação de professores e da Educação Básica dos conceitos de Autossimilaridade e de Fractais com os quais trabalhamos para articular as Artes Visuais e a Matemática com o Origami.

Já sobre futuros desdobramentos para este trabalho e sugestões de pesquisas relacionadas ao tema que investigamos, indicamos que será importante realizarmos em uma futura oportunidade a aplicação do nosso projeto piloto de Engenharia Didática e da nossa proposta didática prática e analisarmos as questões relacionadas à sua transposição didática.

Soma-se a isso a possibilidade da nossa proposta didática prática ser desenvolvida para o tratamento de outros conteúdos de Artes Visuais e de Matemática apontados pela BNCC e para alcançar a interdisciplinaridade e o tratamento dos TCT para outros níveis da Educação Básica para além do Ensino Médio.

Terminamos então as nossas considerações finais avaliando positivamente as reflexões e produtos que obtivemos com a nossa pesquisa em face dos nossos objetivos iniciais e indicando que a nossa proposta foi condizente com os propósitos que estabelecemos para esta investigação fazendo jus ao financiamento que obtivemos e que tanto queremos voltar a agradecer do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências Bibliográficas

- Arrighi, G. (2010). *The Long Twentieth Century: Money, Power and the Origins of our Times*. New York: Verso.
- Assis, T. A.; Miranda, J. G. V.; Mota, F. B.; Andrade, R. F. S. & Castilho, C. M. C. (2008). Geometria fractal: propriedades e características ideais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 30(2), 2304. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/302304.pdf>> acesso em 04/06/2021.
- Bahmani, A., Sharif, K. & Hudson, A. (2015). Using Origami to Enrich Mathematical Understanding of Self Similarity and Fractals. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, P. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 723-733). American Mathematical Society.
- Baier, T., Sedrez, M. R. & Krindges, E. E. (2012). Árvores Fractais no Ensino Fundamental e na Arquitetura. *IV Jornada Nacional de Educação Matemática - XVII Jornada Regional de Educação Matemática*. Universidade de Passo Fundo. Disponível em: <<http://anaisjem.upf.br/download/sp-44-krindges.pdf>> acesso em 04/06/2021.
- Baldovinotti, N. J. (2011) *Um estudo dos Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática*. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/55-2-A-gt1_baldovinotti_ta.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Balta, P. (2010). *Islã*. (Lagos, W. trad.). Porto Alegre: L&PM.
- Barbosa, A. M. (1998). *Tópicos Utópicos*. (2a ed.) Belo Horizonte: Companhia Artes. Disponível em: <http://repep.fflch.usp.br/sites/repep.fflch.usp.br/files/Topicos%20Utopicos%20BARBOSA_A.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Barbosa, R. M. (2002). *Descobrimo a geometria fractal - para a sala de aula*. (3a ed.). Belo Horizonte: Autêntica.
- Barquero, B. & Bosch, M. (2018). Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa: de situações fundamentais a percursos de estudos e pesquisas. In: Almouloud, S. A., Farias, L. M. S. & Henriques, A. (Orgs.). *A Teoria Antropológica do Didático: Princípios e Fundamentos* (pp. 275-304). Curitiba: CRV.
- Boakes, N. (2009). The Impact of Origami-Mathematics Lessons on Achievement and Spatial Ability of Middle-School Students. In: Lang, R. J. (Ed.). *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 471-481). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Boakes, N. (2011). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fith International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 173-187). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.

- Bradshaw, L. E. (2004). *Mathematics as Art: An Aesthetic Approach to the Learning of Mathematics in an Alternative Education Environment*. Dissertação apresentada faculdade de Educação da Queen's University de Ontário, Canadá, para a obtenção do grau de Mestre em Educação. Ontário. Disponível em: <https://ocul-qu.primo.exlibrisgroup.com/discovery/fulldisplay?docid=alma9921206243405158&context=L&vid=01OCUL_QU:QU_DEFAULT&lang=en&search_scope=MyInst_and_CI&adaptor=L&local%20Search%20Engine&tab=Everything&query=any,contains,lorayne%20&mode=Basic> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil: Promulgada em 5 de outubro de 1988*. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (1996). *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Brasília: MEC/SEF. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12640:parametros-curriculares-nacionais-1o-a-4o-series>> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (2010). Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. *Resolução nº 7, de 14 de dezembro de 2010*. Fixa Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de dezembro de 2010, Seção 1, p. 34. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb007_10.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (2014). *Lei nº 13.005, de 25 de Junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, 25 de Junho de 2014. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/113005.htm> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (2017a). Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Resolução CNE/CP Nº2, de 22 de Dezembro de 2017*. Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular, a ser respeitada obrigatoriamente ao longo das etapas e respectivas modalidades no âmbito da Educação Básica. Diário Oficial da União de 21 de dezembro de 2017, Seção 1, pág. 146, e. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/RESOLUCAOCNE_CP222DEDEZEMBRO2017.pdf> acesso em 27/02/2021.
- Brasil (2017b). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular Ensino Fundamental e Ensino Médio*. MEC, 2017. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Brasil (2019a). Ministério da Educação. *Guia de Implementação da Base Nacional Comum Curricular: Temas Contemporâneos Transversais: Histórico e Fundamentos Pedagógicos*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf> acesso em 04/06/2021.

- Brasil (2019b). Ministério da Educação. *Guia de Implementação da Base Nacional Comum Curricular: Temas Contemporâneos Transversais: Proposta de Prática de Implementação*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Burczyk, K. & Burczyk, W. (2002). Exploring the Possibilities of a Module. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 257-267). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Burger, W. F. & Shaughnessy, M. (1996). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 31-48). 17. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.584.2471&rep=rep1&type=pdf>> acesso em: 27/02/2021.
- Cagle, M. (2009). Modular Origami in the Secondary Geometry Classroom. In: Lang, R. J. (Ed.) *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 497-505). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Carter, J. A. & Ferruci, B. J. (2002). Instances of Origami within Mathematics Content Texts of Preservice Elementary School Teachers. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 337-344). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Colman, S. (2003). *Harmonic Proportion and Form: in Nature, Art and Architecture*. New York: Dover Publications.
- Cornelius, V. & Tubis, A. (2009). On the Effective Use of Origami in the Mathematics Classroom. In: Lang, R. J. (Ed.). *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 507-515). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Cornelius, V. & Tubis, A. (2002). Using Triangular Boxes from Rectangular Paper to Enrich Trigonometry and Calculus. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 299-305). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Coutinho, C. Q. S. & Campos, C. R. (2018). Perspectiva em Didática e Educação Estatística e Financeira: reflexões sobre convergências entre letramento matemático, matemática, letramento estatístico e letramento financeiro. In: Oliveira, G. P. (Org.). *Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia*. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- D'Avignes, Émile Prisse. (n.d.). *ArabArt: The complete plates from L'Art arabe and the Oriental Album*. Cologne, Germany: Taschen.
- Donis, A. D. (2007). *Sintaxe da Linguagem Visual*. (2a. ed.) São Paulo: Martins Fontes.
- Duval, R. (2009). *Semiosis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: livraria da Física.

- Educação do Futuro (2018). *Resumo dos PCN de Artes - anos iniciais: Parâmetros Curriculares Nacionais Volume 6 - Arte - Anos iniciais do ensino fundamental*. Disponível em: <<https://educacaofuturo.wordpress.com/2018/09/20/resumo-dos-pcn-de-arte-anos-iniciais/>> acesso em 04/06/2021.
- Falk, D.; Brill, D. & Stork, D. (1986). *Seeing the Light: Optics in Nature Photography, Color, Vision and Holography*. New York: Harper & Row Publishers.
- Fiol, M., Dasquens, N. & Prat, M. (2011). Student Teachers Introduce Origami in Kindergarten and Primary Schools: Froebel Revisited. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 151-164). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Frigerio, E & Spreafico, M. L. (2015). Area and Optimization Problems. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, p. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 679-687). American Mathematical Society.
- Frigerio, E. (2002). In Praise of the Papercup: Mathematics and Origami at the University. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 291-298). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Frigerio, E. (2009). Origami, Isometries, and Multilayer Tangram. In: Lang, R. J. (Ed.) *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 533-544). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Fuys, D; Dorothy, G. & Tischler, R. (1984). *English Translation of Selected Writing of Diana van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Technical report, U.S. Department of Education, Whashington, DC. Disponível em: <www.eric.ed.gov/ERICwebPortal/detail?accno=ED287697> acesso em: 27/02/2021.
- Garcia, Joe. (2008). A interdisciplinaridade Segundo os Pcms. *Revista da Educação Pública*. 17(n. 35), p. 363-378. Cuiabá. Disponível em: <<http://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/article/view/494/422>> acesso em 04/06/2021.
- Gharemani, Mehi (2013). *Considering Science Teacher's Conceptions of Critical Thinking Pedagogy in Several of Iran's Special Gifted Schools: A multi-Phased Study*. Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Artes no College of Graduate Studies da University of British Columbia. Okanagan. Disponível em: <<https://news.ok.ubc.ca/education/2012/03/14/the-iranian-gifted-schools/>> acesso em 04/06/2021.
- Ghyka, M. (1977). *The Geometry of Art and Life*. New York: Dover Publications
- Giannetti, E. (2005). *O valor do Amanhã: Ensaio sobre a natureza dos juro*s. São Paulo: Companhia das Letras.
- Golan, M. & Jackson, P. (2009). Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami. In: Lang, R. J. (Ed.) *ORIGAMI4. Fourth*

International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education (pp. 459-469). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.

- Golan, M. & Oberman, J. (2015). The Kindergarten Origametry Program. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, P. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 669-678). American Mathematical Society.
- Golan, M. (2011). Origametry and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 151-164). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Gonçalves, H. S. (2013) *A importância das Matrizes e Transformações Lineares na Computação Gráfica*. Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás. Goiânia. Disponível em:
<<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/2949/5/A%20import%C3%A2ncia%20das%20matrizes%20e%20transforma%C3%A7%C3%B5es%20lineares%20na%20computa%C3%A7%C3%A3o%20gr%C3%A1fica.pdf>> acesso em 04/06/2021
- Guimarães, V. G. (2015). *Ensinando a Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental por Meio de Recursos Manipuláveis*. Dissertação apresentada no Programa de Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Viçosa para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Viçosa. Disponível em:
<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3593703> acesso em 04/06/2021.
- Haga, K. (2002). Fold Paper and Enjoy Math: Origamics. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 307-328). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Hankins, T. L. (2002). *Ciência e Iluminismo*. Porto: Porto Editora.
- Hatori, K. (2016). History of Origami in the East and the West before Interfusion. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 3-11). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Hoffman, S., Buffart, H., Paris, J., Merz, J., Siebracht, J., Weigel, C., Corvers, B. & Trautz, M. (2018). Educational Concepts for Developing and Designing Origami-Based Structures. In: Lang, R. J., Bolitho, M., Yout, Z., Boakes, N., Budd, C., Chen, Y., Frecker, Y., Mitani, J., Pardo, J., Paulino, C., Shcenk, M., Tachi, T., Uehara, R. & Wang-Iverson, P. (Eds.) *The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science* (pp. 241-256). Holywell Hill, Irlanda: Tarquin.
- Huang, Y. & Lee, P. (2015). Using Paper Folding to Solve Problems in School Geometry. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, P. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 713-721). American Mathematical Society.

- Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. (2a ed.). Florida: Taylor & Francis Press.
- Huntley, H. E. (1970). *The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty*. New York: Dover Publications.
- Ikegami, U. (2009). Fractal Crease Patterns. In: Lang, R. J. (Ed.) *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 31-40). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Kasner, E. & Newman, J. (2001). *Mathematics and the Imagination*. New York: Dover Publications.
- Knoll, Eva. (2002). Circular Origami: A Survey of Recent Results. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 283-290). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Kwan, S. (2011). My Favorite Origamics Lessons on the Volume of Solids. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 233-249). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Kwan, S. (2015). Mathematics and Art through the cuboctahedron. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, P. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 689-698). American Mathematical Society.
- Lang, R. J. (2003). *Origami and geometric constructions*. Disponível em: <http://www.wiskundemeisjes.nl/wp-content/uploads/2008/02/origami_constructions.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Lipton, B. H. (2016). *The Biology of Belief: Unleashing the Power of Consciousness, Matter and Miracles*. London: Mountain of Love Productions.
- Machado, S. D. A. (2000). Engenharia Didática. In: Franchi, A., Silva, B. A., Freitas, J. L. M., Pais, L. C., Maranhão, M. C. S. A., Damm, R. F., Iglioni, S. B. C., Machado, S. D. A. (pp.197-208). *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: Educ.
- Mesquita, A. & Mota, M. G. (1991). Fractais - A Linguagem do Caos. *Anais do Clube Militar Naval*. ed. Jul-Set. Disponível em: <<http://www.albertomesquita.net/am/fractais/capa.asp>> acesso em 04/06/2021.
- Mittitier, J. G. & Lourençon, B. N. (2017) Interdisciplinaridade na BNCC: Quais Perspectivas. In: VI SEMATED - Semana de Matemática e Educação: Tendências em Educação Matemática. Araraquara, São Paulo: Comunicação Científica. Disponível em: <https://arq.ifsp.edu.br/eventos/files/pdfs/SEMATED_2017_T6.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Monteiro, L. C. N. (2008). *Origami: história de uma geometria axiomática*. Dissertação apresentada na Universidade de Lisboa para a obtenção do grau de Mestre em Matemática para o Ensino. Lisboa. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/>> acesso em 04/06/2021.

- Morais, L. (2014). *Equações de Diferenças, Caos e Fractais*. Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Florianópolis. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/123200/326928.pdf?sequence=1&isAllowed=y>> acesso em 04/06/2021.
- Morrow, C. (2002). Using Graphs to Color Origami Polyhedra. In: Hull, T. (Ed.). *ORIGAMI3. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education Sponsored by OrigamiUSA* (pp. 269-282). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Morrow, J. & Morrow, C. (2011). Close Observation and Reverse Engineering of Origami Models. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 189-203). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Nedrenco, D. (2018). Learning how to Axiomatise through Paperfolding. In: Lang, R. J., Bolitho, M., Yout, Z., Boakes, N., Budd, C., Chen, Y., Frecker, Y., Mitani, J., Pardo, J., Paulino, C., Shcenk, M., Tachi, T., Uehara, R. & Wang-Iverson, P. (Eds.) *The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science* (pp. 257-271). Holywell Hill, Irlanda: Tarquin.
- Pimenta, A. L. (2017). *CONSTRUINDO POLIEDROS PLATÔNICOS COM ORIGAMI: UMA PERSPECTIVA AXIOMÁTICA*. Dissertação apresentada ao Programa de Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática. Minas Gerais. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5509996> acesso em 04/06/2021.
- Poladian, L. (2015). Using the Fujimoto Approximation Technique to Teach Chaos Theory to High School Students. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, p. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 735-744). American Mathematical Society.
- Ponte, J. P.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. (2a ed.). São Paulo: Autêntica.
- Pope, S. & Lam, T. K. (2009). Using Origami To Promote Problem Solving, Creativity, and Communication in Mathematics Education. In: Lang, R. J. (Ed.) *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 517-524). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Pope, S. & Lam, T. K. (2011). Origami and Learning Mathematics. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 205-217). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Portal Educação (2015). *Ensino de Artes e História da Arte na Educação*. Disponível em: <<https://siteantigo.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/pedagogia/ensino-de-artes-e-a-historia-da-arte-na-educacao/67348>> acesso em 04/06/2021.
- Rego, R. G.; Rego, R. M. & Gaudencio Junior, S. (2004). *A Geometria do Origami: Atividades de ensino através de dobraduras*. João Pessoa: UFPB,

- Renzulli, S. J. & Reis, S. (1997). *The Schoolwide Enrichment Model: a How-To Guide for Educational Excellence*. (2a ed.). Waco, Texas: Prufrock Press.
- Rezulli, S. J. & Reis, S. (2010). The Schoolwide Enrichment Model: A Focus on Student Strengths and Interests. *Gifted Education International Journal*. 26(2-3), May 2010, Cap. 13. Disponível em:
<https://www.researchgate.net/publication/254095331_The_Schoolwide_Enrichment_Model_A_Focus_on_Student_Strengths_and_Interests>Acesso em: 27/02/2021.
- Serre, S. & Spreafico, M. L. (2018). An Origami Project for Exploring the Learning of Mathematical Logic. In: Lang, R. J., Bolitho, M., Yout, Z., Boakes, N., Budd, C., Chen, Y., Frecker, Y., Mitani, J., Pardo, J., Paulino, C., Shcenk, M., Tachi, T., Uehara, R. & Wang-Iverson, P. (Eds.) *The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science* (pp. 225-240). Holywell Hill, Irlanda: Tarquin.
- Silva, M. S. (2014). *A Influência do Origami no Processo Ensino-Aprendizagem da Geometria do 9º ano – Ensino Fundamental*. Dissertação apresentada ao Programa de Matemática em Rede Nacional da Universidade de Brasília para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática. Brasília. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2226179> acesso em 04/06/2021
- Spreafico, M. L, Tramus, E. & Truffa, M. (2018). An Origami Interactive Poster: from Folds to Axioms. In: Lang, R. J., Bolitho, M., Yout, Z., Boakes, N., Budd, C., Chen, Y., Frecker, Y., Mitani, J., Pardo, J., Paulino, C., Shcenk, M., Tachi, T., Uehara, R. & Wang-Iverson, P. (Eds.) *The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science* (pp. 209-224). Holywell Hill, Irlanda: Tarquin.
- Tegmark, M. (2014). *Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. New York: Alvrred A. Knopf.
- Tripalli, Pelison (2017). *Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando Origami modular*. Dissertação apresentada no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo para a obtenção do grau de Mestrado Profissional em Matemática. São Carlos. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-12042017-153833/pt-br.php>> acesso em 04/06/2021.
- Tubis, A. (2015). Origami-Inspired Deductive Threads in Pre-geometry. In: Miura, K., Kawasaki, T. & Iverson-Wang, p. (Eds.). *Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 699-711). American Mathematical Society.
- Tubis, A. (2018). Origami Demonstration of Area Formulae for General Triangles Parallelograms and Trapezoids. In: In: Lang, R. J., Bolitho, M., Yout, Z., Boakes, N., Budd, C., Chen, Y., Frecker, Y., Mitani, J., Pardo, J., Paulino, C., Shcenk, M., Tachi, T., Uehara, R. & Wang-Iverson, P. (Eds.) *The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science* (pp. 197-208). Holywell Hill, Irlanda: Tarquin.

- Van Hiele, P. (1986). *Structure Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press, 1986.
- Vassoughian, N. (2011). *Otto Neurath: The Language of The Global Polis*. New York: NAIpublishers.
- Vieira, M. S. (2006). Um olhar sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais de Arte: visões, expectativas e diálogos. *Revista Educação em Questão*.26(n.12), p. 185-197. Disponível em: <<https://periodicos.ufrn.br/educacaoemquestao/article/view/8060>> acesso em 04/06/2021.
- Webster, M. H. (2018). Base Nacional Comum Curricular - BNCC: Componente Curricular: Artes: Leitura Crítica. *Relatórios Analíticos da Base Nacional Comum Curricular encomendados pelo Ministério da Educação*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/Parecer_4_AR_Maria_Helena_Webster.pdf> acesso em 04/06/2021.
- Wilson, M., Flanagan, R. (2009). Understanding the Effect of Origami Practice, Cognition, and Language on Spatial Reasoning. In: Lang, R. J. (Ed.) *ORIGAMI4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education* (pp. 483-495). Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Winckler, M. J., Wolf, K. D. & Bock, H. G. (2011). Hands-On Geometry with Origami. In: Iverson-Wang, P., Lang, R. J. & Yim, Mark (Eds.). *ORIGAMI5. Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (pp. 219-231) Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Yamaji, F. M. (2001). *Análise Fractal de uma Floresta Ombrófila Mista Através de Imagens de Satélite*. Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Florestal, Setor de Ciências Agrárias, da Universidade Federal do Paraná para a obtenção do grau de Mestre em Ciências Florestais. Curitiba. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/26692/D%20-%20YAMAJI,%20FABIO%20MINORU.pdf;jsessionid=B646B900043AF5F43FE88CC155707AE3?sequence=1>> acesso em 04/06/2021.
- Zamboni, S. (2012). *A pesquisa em Arte: um paralelo entre a arte e a ciência*. (2a ed.). Campinas: Autores Associados.