PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

DAYSI JULISSA GARCÍA-CUÉLLAR

UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA A DISTÂNCIA EM UMA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2021

DAYSI JULISSA GARCÍA-CUÉLLAR

UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA A DISTÂNCIA EM UMA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática sob a orientação da professora doutora Maria José Ferreira da Silva e coorientação da professora doutora Jesús Victoria Flores Salazar.

SÃO PAULO

2021

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

García-Cuéllar, Daysi Julissa
Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros / DaysiJulissa García Cuéllar. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
202p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, (Mestrado Profissional) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Teoria Antropológica do Didático.. 2. Quadriláteros.. 3. Percurso de Estudo e Pesquisa a distância.. 4. Formação continuada de professores.. I. Silva, Maria José Ferreira da. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

Daysi Julissa García-Cuéllar

UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA A DISTÂNCIA EM UMA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: 01/06/2021.

BANCA EXAMINADORA

____

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

____

Dra. Jesús Victoria Flores Salazar (Coorientadora) – PUCP

____

Dra. Avenilde Romo Vazquéz – CICATA-Legaria

____

Dr. Gilson Bispo de Jesus – UFBA

____

Dr. Gerson Pastre de Oliveira – PUC-SP

____

Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

DEDICATÓRIA

A minha avó María, meu avô José, minha irmã Sumiko e meu irmão Akira (*in memoriam*) pelo passado.

A minha família e amigos, pelo presente.

A minha filha, Sumi Anjalí, pelo futuro.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior –**CAPES** pela bolsa cedida – Código de Financiamento 001 – que foi de extrema importância para a realização desta pesquisa.

Esta tese se adere ao projeto internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos*, aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP – 2013/23228-7 e desenvolvido concomitantemente pelos grupos de pesquisa PEA-MAT da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil e DIMAT da Pontificia Universidad Católica del Perú

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus que permitiu a confecção deste doutorado, provando a todo momento seu infinito amor por mim. Obrigada por renovar a minha fé e me sustentar em cada passo desta trajetória.

Agradeço à professora Dra. Maria José Ferreira da Silva por suas orientações, contribuições, críticas e apoio que foram fundamentais para a finalização da tese.

Ao professor Dr. Saddo Ag Almouloud pelo percurso dos primeiros três anos de desenvolvimento da tese, pelas orientações.

À professora Dra. Jesús Victoria Flores Salazar pelas orientações e contribuições para esta tese e para minha vida pessoal e acadêmica. Obrigada por me motivar a iniciar o doutorado e me impulsar sempre.

Aos componentes da Banca Examinadora. À professora Dra. Avenilde Romo por suas recomendações, contribuições e pelo pequeno estágio de pesquisa no CICATA-IPN no México. Aos professores Dr. Gerson Pastre de Oliveira, Dr. Gabriel Loureiro de Lima e Dr. Gilson Bispo de Jesus, meus agradecimentos por suas valiosas contribuições para a melhoria desta pesquisa.

A todos professores do programa de doutorado em Educação Matemática da PUC-SP, especialmente aos professores Dr. Fumikazu Saito, Dra. Barbara Lutaif Bianchini, Dra Celina Abar, Dra. Ana Lúcia Manrique, Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho pelos dias de discussões e ensinamentos na sala de aula e fora dela.

Aos colegas dessa trajetória, Nilo, Joice, Janine, Rieuse, Alessandro, Galvina, Laison, Ana Karine, Renata, Ronaldo, Renne e tantos outros que fizeram parte desse percurso, muito obrigada pela ajuda e o suporte. Vocês foram essenciais nessa etapa.

Agradeço a minha querida família, minhas duas mães Carmen e Soledad, a meu pai Jesús, a meus irmãos Henry, Jacky, Pamela, Akira, Arisa pelo carinho e suporte de sempre.

A meu parceiro de vida, Mihály Martínez por me motivar, por ser meu apoio neste percurso. Obrigada por seu companheirismo e por dividir comigo cada pequena vitória da vida pessoal e acadêmica, assim como os momentos difíceis que nos tocaram viver.

A minhas amigas do pensionato especialmente a Stefane Kikuchi, Ângela dos Santos e às irmãs Cecilia, Celia e Agida pelo carinho e apoio, foram como minha família em São Paulo.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação, meus sinceros agradecimentos a todos.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal e Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos, que permitiu financiamento para o desenvolvimento dessa pesquisa.

“O questionamento constante e frequente é a primeira chave para a sabedoria... Através do duvidar que somos levados a inquirir, e pelo inquérito nós percebemos a verdade”.

Pedro Abelardo

GARCÍA-CUÉLLAR, D. J. **Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021, 202p.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo elaborar, implementar e analisar um Percurso de Estudo e Pesquisa para formação continuada de professores – PEP-FP, a distância, para o ensino de quadriláteros no Peru. A pesquisa se insere no quadro teórico da Teoria Antropológica do Didático – TAD, teve como sujeitos professores que ensinam matemática no nível secundário do Peru e como metodologia qualitativa a Engenharia Didática na TAD. O PEP é um dispositivo didático que procura a transição do paradigma monumentalista de visita às obras para o paradigma de questionamento do mundo que envolve o estudo de questões, de mídias e meios etc. que implica na busca de uma resposta à uma questão geratriz por meio de outras questões e respostas. Nesse sentido o PEP-FP também tem início com uma questão geratriz, baseada em contextos relacionados à formação de professores e a um objeto de ensino do nível escolar dos professores. O desenvolvimento desse dispositivo de formação envolve cinco módulos: M_0: explicitar as razões de ser do PEP-FP; M_1: viver um PEP; M_2: analisar o PEP vivido; M_3: desenho de um PEP e M_4: gerenciar e experimentar um PEP. A metodologia de pesquisa é desenvolvida em quatro fases: na primeira, que envolve as análises preliminares, fizemos um estudo epistemológico de quadriláteros para a construção de um Modelo Epistemológico de Referência – MER, um estudo econômico e ecológico de quadriláteros para identificar o Modelo Dominante – MD no sistema educativo peruano. Na segunda fase, desenho e análise a *priori*, se planeja o dispositivo do PEP-FP a distância para o ensino de quadriláteros e se faz a análise a *priori* do que foi planejado; a terceira, experimentação ou análises in *vivo* em que se implementa e se analisa o planejado durante sua execução e na quarta fase, analises a posteriori, se confronta os resultados com a análise a *priori*. Como resultados da pesquisa inferimos que o PEP-FP a distância contribuiu na formação continuada dos professores envolvidos porque os conduziram a questionar e refletir a respeito de sua prática e a perceber a possibilidade de ensinar quadriláteros a partir da questão geratriz como se prevenir de um tsunami? No entanto, durante o terceiro módulo se mantiveram no modelo dominante apresentando PEPs que alteraram apenas o contexto do PEP vivido, mas como ponto positivo não voltaram para os livros didáticos. Os professores afirmaram que a maior dificuldade está na elaboração da pergunta geratriz e que precisavam vivenciar outros PEPs para se sentirem mais seguros em utilizá-los em sala de aula, pois os alunos seriam os protagonistas e poderiam apresentar e responder suas próprias questões.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático. Quadriláteros. Percurso de Estudo e Pesquisa a distância. Formação continuada de professores.

ABSTRACT

This research aims to elaborate, implement and analyze a Study and Research Path in-service teacher education (SRP-TE), for distance teaching of quadrilaterals in Peru. The research is inserted in the theoretical framework of the Anthropological Theory of Didactics – ATD, which had as subjects secondary mathematics teachers in Peru, and used as qualitative methodology the Didactic Engineering in ATD. SRP is a didactic device that seeks the transition from the monumental paradigm of visiting works to the paradigm of questioning the world, which involves the study of issues, media, and *milieu*, etc., all this, in turn, implies the search for an answer to a generating question through other questions and answers. In this sense, the SRP-TE also starts from a generating question, based on contexts related to teacher education and a teaching object at the school level of teachers. The development of this training device is composed of five modules: M_0: Starting from a professional question; M_1: Experiencing a study and research path; M_2: analyze the SRP experienced; M_3: designing a SRP and M_4: managing and experimenting an SRP. Research methodology is developed in four phases: in the first phase, which involves preliminary analyses, we carried out an epistemological study of quadrilaterals to build a Reference Epistemological Model – REM, and an economic and ecological study of quadrilaterals to identify the Dominant Model – DM in the Peruvian educational system. In the second phase, design and *a priori* analysis, the SRP-TE distance device for teaching quadrilaterals is planned and *a priori* analysis of what was planned is carried out; in the third phase, experimentation, or *in vivo* analysis the plan is implemented and analyzed during its execution, Finally, in the fourth phase, *a posteriori* analysis, the results are compared with the *a priori* analysis. As a result of the research, it is inferred that the distance SRP-TE contributed to the in-service teacher education because it led them to question and reflect on their practice and to realize the possibility of teaching quadrilaterals from the generating question How to prevent a tsunami? However, during the third module, they remained in the dominant model, presenting SRPs that only changed the context of the SRP experienced, but as a positive point they did not return to textbooks. Teachers stated that the greatest difficulty lies in preparing the generating question and that they needed to experience other SRPs to feel more confident secure in using them in the classroom, since students would be the protagonists and could present and answer their own questions.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics. Quadrilaterals. Distance Study and Research Path. In-service teacher education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

O	Objeto de estudo
I	Instituição
X	Aluno
Y	Professor
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MED	Modelo Epistemológico Dominante
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PEP-FP	Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores
TAD	Teoria Antropológica do didático
OM	Organização Matemática
OD	Organização Didática
OMP	Organização Matemática Pontual
OML	Organização Matemática Local
OMR	Organização Matemática Regional
OMG	Organização Matemática Global
MINEDU	Ministério da Educação do Peru
CNEB	Currículo Nacional da Educação Básica
DCN	*Diseño Curricular Nacional*
EBR	Educação Básica Regular
EBA	Educação Básica Alternativa
EBE	Educação Básica Especial
EIB	Educação Intercultural Bilíngue
IPS	Institutos Pedagógicos Superiores

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Embora o currículo peruano apresente conteúdos de Geometria, como saberes a serem ensinados no ensino básico, as avaliações nacionais de matemática reportam dificuldades na aprendizagem de tais conteúdos (PERU, 2016d). Por outro lado, alguns pesquisadores reportam que a aprendizagem de Geometria é um processo complexo quando comparado com outros domínios da matemática como é o caso de Duval quando afirma que "a atividade cognitiva que requer a geometria é mais exigente em relação a outras áreas da matemática." (DUVAL, 2004, p. 155).

Um dos conteúdos de geometria previstos para serem trabalhados na Educação Básica é o de quadriláteros que, durante minha prática como professora do nível secundário me causou inquietações porque tinha que trabalhar com livros didáticos específicos e, portanto, a ensinar quadriláteros da forma sugerida por esses livros. Além disso, em minha trajetória como estudante do nível secundário, me incomodava as aulas magistrais em que o professor apresentava os quadriláteros e suas propriedades, resolvia alguns problemas e, logo propunham exercícios para serem resolvidos.

Depois de realizar o mestrado em ensino de matemática, na Pontifícia Universidade Católica de Peru, e fazer uma pesquisa com outro objeto geométrico, reconheci as dificuldades para o ensino e a aprendizagem na Geometria. Como coordenadora de matemática fui levada a atentar para as práticas docentes e para questionar a formação continuada de professores que entendo deva proporcionar a atualização de seus saberes didáticos e matemáticos.

Posteriormente, passei a ser tutora em um programa de atualização docente em didática da matemática, proposto conjuntamente entre o Ministério da Educação do Peru e a Pontifícia Universidade Católica de Peru, que me levou a questionar e pesquisar outras formas de estudar quadriláteros.

Destacamos também, no processo de motivação pessoal para a realização desta pesquisa, o fato de ter assistido a quatro cursos avançados de TAD, na Universidade Autônoma de Barcelona, por dois meses em 2019, que permitiu aprimorar questões teóricas de Didática da Matemática e de formação de professores com o PEP-FP.

Como não encontramos, em nossa revisão bibliográfica, qualquer pesquisa que tratasse do assunto que pretendíamos estudar, elaboramos nossa questão de pesquisa: quais estratégias são elaboradas por um grupo de professores do ensino secundário a partir da elaboração de um PEP a distância de modo que possam questionar, desenhar e experimentar processos de ensino para os quadriláteros? E como objetivo geral: elaborar, implementar e analisar um percurso de estudo e pesquisa a distância para formação continuada de professores do nível secundário para o ensino de quadriláteros no Peru.

Para embasar seu desenvolvimento realizamos o estudo das dimensões do problema didático dos quadriláteros, baseados em Gascón (2011), ou seja, o estudo da dimensão epistemológica, da dimensão ecológica e da dimensão econômica que foram utilizados, à luz da TAD, para o desenho, construção e desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Pesquisa a distância [1] para a formação continuada de professores (PEP-FP) como forma de incidir nas relações do professor com quadriláteros.

Para implementar, o PEP-FP que desenvolvemos, adotamos quatro dos cinco módulos apresentados por Ruiz-Olarría (2015), que foram adaptados para serem realizados a distância por causa da pandemia de COVID 19 e que impossibilitou também a realização do quinto módulo. Nosso objetivo era de familiarizar os professores em formação continuada com o PEP, como um dispositivo didático útil para seu desenvolvimento profissional.

A metodologia de pesquisa que permite atingir nossos objetivos é a metodologia da TAD, baseada na Engenharia Didática, que é desenvolvida em quatro fases: a primeira é a de análises preliminares em que se fez um estudo epistemológico de quadriláteros que permitiu a construção de um Modelo Epistemológico de Referência e os estudos econômico e ecológico de quadriláteros para a identificação do modelo dominante no sistema educativo peruano; na segunda fase planejamos e analisamos a *priori* o dispositivo de PEP-FP a distância para o ensino de quadriláteros, na terceira experimentamos e analisamos *in vivo* tal dispositivo e na quarta fase realizamos as análises a *posteriori*.

[1] Chamamos a distância porque as interações entre os professores, a formadora e as ferramentas digitais são a distância.

O relatório da pesquisa é composto de seis capítulos incluindo esta introdução como Capítulo 1. No capítulo 2, apresentamos a Teoria Antropológica do Didático, a revisão de literatura, a justificativa, a delimitação da problemática e a metodologia de pesquisa associada à TAD baseada na Engenheira didática.

No capítulo 3 apresentamos as análises preliminares da Engenharia Didática, isto é, o estudo das dimensões epistemológica, econômica e ecológica dos quadriláteros propostos por Gascón (2011) em que apresentamos como resultado da dimensão epistemológica uma proposta de Modelo Epistemológico de Referência e como resultados das outras dimensões, a partir da análise do currículo e livros de textos do sistema educativo peruano, propomos um modelo dominante do sistema educativo peruano.

No capítulo 4 é apresentado o desenho do Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP) a distância, considerando as ferramentas tecnológicas que foram utilizadas para o desenvolvimento dos módulos do PEP-FP e para sua organização. No capítulo 5 apresentamos as análises de cada um dos módulos do Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores de nível secundário, para o ensino de quadriláteros em que no módulo M_1 propusemos o dispositivo didático no contexto de um Tsunami nas costas Lima, capital do Peru. No capítulo 6 tecemos as reflexões finais a respeito dos principais resultados desta pesquisa e de perspectivas para pesquisas futuras.

2 PROBLEMÁTICA

Iniciamos este capítulo apresentando o marco teórico, sustentado pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), para dar ferramentas para a compreensão de algumas noções usadas na justificativa e na delimitação do problema de pesquisa, além de apresentar a revisão da literatura.

2.1 Referencial teórico

A Teoria Antropológico do Didático (TAD), de acordo com Chevallard (1999), situa a atividade matemática e, consequentemente, a atividade de estudo em matemática, no grupo de atividades humanas e instituições sociais. Essa teoria aparece nas primeiras formulações da Teoria da Transposição Didática que, segundo Bosch et al (2006), apresenta dois problemas básicos que podem ser considerados como a origem da TAD:

> Por um lado, a necessidade do pesquisador de emancipar-se dos modelos epistemológicos dominantes nas instituições escolares (Chevallard, 2006) (o que implica que a TAD nos fornece noções para nos libertar do modo como o conhecimento matemático e a atividade matemática são considerados nas instituições escolares).
> Por outro lado, o questionamento das condições e restrições que afetam qualquer processo de difusão do conhecimento matemático na escola (ou seja, o estudo do que possibilita o ensino e a aprendizagem de matemática, o que o dificulta etc.). (BOSCH et al., 2006, p. 38).

Pode-se entender que a TAD fornece aos pesquisadores ferramentas para explicitar o Modelo Epistemológico Dominante (MED)[2], isto é, da forma como os objetos matemáticos são abordados nas escolas ou, de forma geral nas instituições estudando as condições e restrições que impõem a seu ensino.

Uma dessas ferramentas é a noção de praxeologia ou organização que permite a análise de práticas sociais, em particular, da atividade matemática, tanto por sua descrição, quanto pelo estudo das condições em que tais práticas são realizadas. Essa noção se baseia no pressuposto de que toda atividade humana pode ser modelizada por meio de uma praxeologia (práxis + logos) que, de acordo com Chevallard (1999), é composta por uma tarefa (t) que pertence a um determinado tipo de tarefa (T) que é realizada por meio de uma ou mais técnicas (τ) que são explicadas

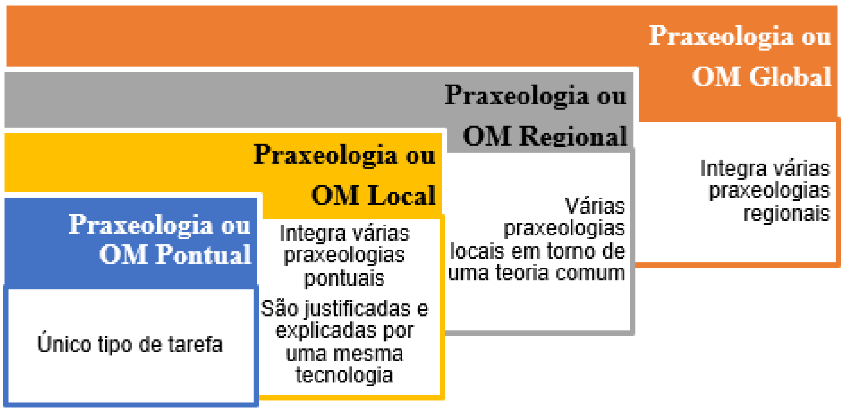
[2] Gascón (2021) passa a chamar esse modelo de Modelo Epistemológico Vigente (MEV).

por tecnologias (θ), aqui entendidas como um discurso racional a respeito das técnicas que, por sua vez é justificada por uma teoria (Θ) que justifica a tecnologia e que, de acordo com Gascón e Nicolás (2021) se interpreta como a tecnologia da tecnologia.

As praxeologias são caracterizadas por dois blocos: ***o técnico – prático*** que compreende as tarefas e as técnicas e ***o tecnológico – teórico*** que abrange um discurso racional que, em um primeiro momento, como tecnologia, explica a técnica e, e um segundo momento justifica a tecnologia.

Chevallard (1999) distingue dois tipos de praxeologias ou organizações: a matemática (OM) que se refere à realidade matemática que pretendemos estudar, e a didática (OD) que se refere ao modo como é posto em prática o ensino de determinada organização matemática. Para o autor, dependendo do grau de complexidade, as praxeologias ou organizações matemáticas podem ser: pontuais (OMP), locais (OML), regionais (OMR) e globais (OMG). Para o autor uma ***praxeologia matemática pontual*** se refere a um único tipo de tarefa; u*ma* ***praxeologia local*** resulta da integração de diversas praxeologias pontuais cujas técnicas são explicadas por uma mesma tecnologia. Uma ***praxeologia regional***, por sua vez, é construída pela coordenação, articulação e posterior integração de praxeologias locais cujas tecnologias são justificadas por uma teoria matemática comum e a ***praxeologia global*** emerge do agregado de várias praxeologias regionais a partir da integração de diferentes teorias. Na Figura 1 apresentamos uma síntese dos tipos de praxeologias.

Figura 1 – Tipos de organizações ou praxeologias matemáticas



Fonte: Elaboração própria

De acordo com Chevallard (1991), um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre um conjunto de transformações adaptativas para ocupar o lugar de um objeto de ensino por meio de um processo chamado transposição didática que, segundo Bosch e Gascón (2014), permite considerar os fenômenos relacionados à forma como a matemática é introduzida e reconstruída na escola. Para os autores essa interpretação se apoia nos seguintes questionamentos:

> Que praxeologias matemáticas são propostas para serem estudadas na escola e por quê? Do que elas são feitas? De onde elas vêm? Elas vivem fora da escola? Onde vivem e sob que formas? Os processos de transposição didática sublinham a relatividade institucional do conhecimento e situam os problemas didáticos em nível institucional, além das características individuais dos sujeitos das instituições consideradas. (BOSCH; GASCÓN, 2014, p. 70).

Nesta perspectiva, para os autores a transposição didática é um processo de transformação que um determinado saber sofre para fazer pertencer e viver em uma determinada instituição. Por isso, nos processos transpositivos, os saberes que são desenvolvidos em instituições produtoras do saber (saberes acadêmicos) são chamados de ***saberes sábios***; os saberes acadêmicos adaptados para uma situação de ensino são produzidos pela noosfera[3] e identificados por ***saberes a ensinar***; os saberes efetivamente ensinados em sala de aula nas instituições de ensino são nomeados de ***saberes ensinados*** e os saberes que foram aprendidos pelos estudantes, em uma comunidade de estudo, protagonista do processo didático, são os ***saberes aprendidos***. Para Bosch e Gascón (2005, p. 116) a transposição didática permite analisar as praxeologias matemáticas desenvolvidas em cada instituição de referência, no caso do “saber aprendido” ele:

> é composto por elementos praxeológicos que, ao final do processo didático, passarão a integrar o *milieu* matemático do grupo e que, consequentemente, poderão ser utilizados de maneira relativa na problemática para o estudo de novas questões e para a realização de novos tipos de tarefas. (tradução nossa).

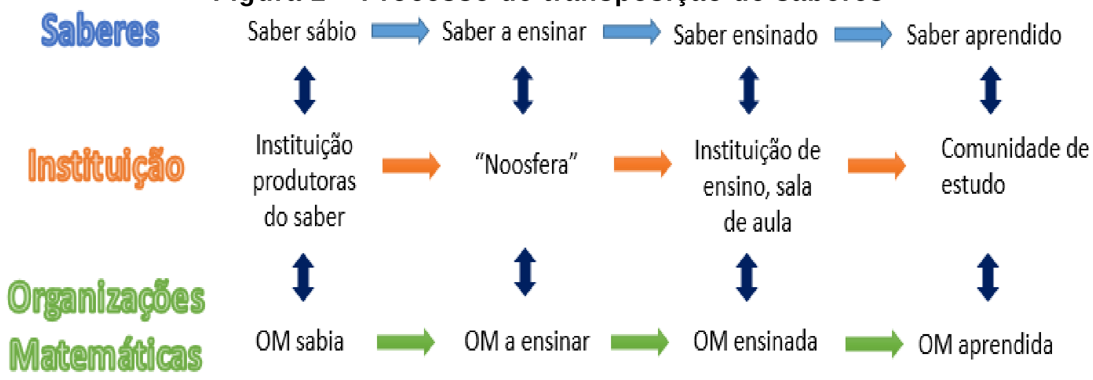
Na Figura 2, apresentamos um esquema para relacionar os saberes com as instituições e que “vivem”. Por exemplo, a matemática pertence às instituições produtoras de saberes matemáticos, isto é, em instituições onde se produzem saberes novos considerados legítimos e institucionalizados, mas a matemática também está presente nas instituições que a ensinam em todos os níveis de escolaridade. Essas duas apresentam condições e restrições distintas para o desenvolvimento de

---

[3] A noção de Noosfera do sistema de ensino foi introduzida por Chevallard (1991) no contexto da Transposição didática para designar a esfera em que se pensa o funcionamento do sistema didático. A Noosfera vincula a instituição produtora do saber com a escola. As produções da Noosfera (programas oficiais, livro de textos, recomendações para os professores, materiais didáticos etc.) condiciona fortemente as características e até a natureza do saber que deve ser ensinado na escola. (GASCÓN, 2011, p. 221)

matemática, pois os contratos didáticos relacionados a cada praxeologia matemática também são distintos, ou seja, os saberes matemáticos não são exatamente os mesmos, pois sofrem processos de transposição diferentes como consequência da circulação de saberes ou de praxeologias entre as instituições.

Figura 2 – Processo de transposição de saberes



Fonte: Adaptado de Bosh e Gascon (2005, p.116 e p.118)

Na TAD, uma instituição organiza as atividades humanas a partir de condições e restrições que os sujeitos, que pertencem ou ocupam uma posição em tal instituição, devem cumprir ou respeitar, por este motivo as praxeologias, que modelam a atividade humana, são diferentes de acordo com cada instituição. Uma praxeologia matemática em uma instituição produtora do saber é diferente da praxeologia matemática correspondente em uma instituição de ensino.

> Constantemente, em uma determinada instituição *I*, parecem surgir novas praxeologias que, pelo menos *uma parte* dos atores de *I*, consideram necessárias para *melhorar* o funcionamento de *I*. Essas praxeologias deverão, consequentemente, ser *produzidas* ou, mais frequentemente, *reproduzidas* na medida em que *já* existam em qualquer outra instituição *I'* - a partir da qual se poderá propor "importá-las" para *I*. As condições impostas pela ecologia[4] de *I* fazem com que a praxeologia desejada não possa ser reproduzida de forma *idêntica*, mas sofrerá, nesta "transferência", certas modificações adaptativas: falaremos, então, não de transferência, mas de *transposição* de *I'* para *I*. (CHEVALLARD, 1999, p. 231, tradução nossa, grifos do autor).

Para Bosch e Gascón (2014, p. 72):

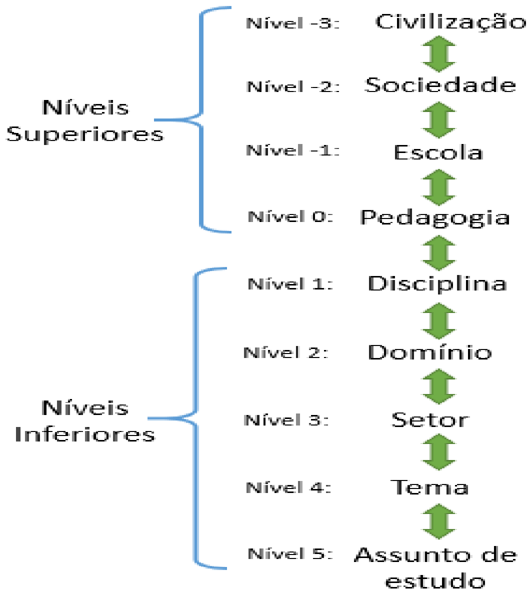
> O estudo da ecologia das praxeologias matemática e didática afirma que, quando o professor e os alunos se encontram em torno de uma questão em jogo ♥, o que pode acontecer é determinado, principalmente, por condições que não podem ser reduzidas àquelas imediatamente identificáveis em sala de aula, como o equipamento praxeológico de professor e alunos, o material didático disponível, a organização temporal das atividades etc.

---

[4] A ecologia do didático estuda as relações e interações entre os fenômenos didáticos e os ambientes em que se desenvolvem. Abstratamente, uma ecologia é um conjunto de condições. (Bosch et al., 2020, p. xxviii).

Para aprofundar esse estudo Chevallard (2002) desenvolveu, como uma noção da TAD, a escala dos níveis de codeterminação didática para auxiliar a distinguir as condições e restrições que afetam os processos de ensino e de aprendizagem, que são originados na disciplina e, os níveis genéricos, que são comuns ao ensino dessa disciplina. Assim, os classificou em dois níveis: os superiores e os inferiores como apresentados na Figura 3.

Figura 3 – Níveis superiores e inferiores na escala de codeterminação



Fonte: Adaptado de Chevallard (2002, p. 10)

Para o autor “cada nível se refere a uma realidade (sociedade, escola, matemática etc.) que não é um dado, mas uma construção histórica” em que “cada nível contribui para determinar a ecologia das organizações matemáticas e das organizações didáticas a partir dos pontos de apoio que oferece e das restrições que impõe.” (p. 10). Acrescenta que nos níveis superiores: civilização, sociedade, escola e pedagogia, se situam as restrições de tipos mais genérico que apontam para a maneira com que nossas sociedades, por intermédio de instituições de ensino, organizam o estudo das diferentes disciplinas.

Os níveis ***civilização*** e ***sociedade*** referem-se às condições e restrições estabelecidas por uma sociedade. Quando são comuns a várias sociedades podemos dizer que são estabelecidas pela civilização a que pertencem. Para o autor “uma sociedade pode olhar para a instrução ministrada em sua Escola a partir de vários pontos de vista, que não são didaticamente equivalentes [...] não criam, a *priori* as mesmas condições, em sala de aula, diante de um objeto de estudo.” (p. 14)

No nível ***escola*** observam-se as condições e restrições que dependem da instituição de ensino específica considerada no estudo.

No nível ***pedagogia***, comum às diferentes disciplinas ensinadas na escola, buscam-se os recursos, formatos e estratégias que os professores e alunos devem ativar para que os processos de ensino e de aprendizagem ocorram. Para Chevallard (2002) a liberdade pedagógica dos professores deve respeitar todas as condicionantes pedagógicas, o que o deixa com uma margem de manobra muito limitada, como é o caso dos objetivos visados pelos programas.

Os níveis inferiores: disciplina, domínio, setor, tema e assunto de estudo, correspondem às condições e restrições [5] diretamente ligadas aos diferentes componentes de uma disciplina, de acordo com a forma como é estruturada ou delimitada na instituição de ensino considerada.

O nível ***disciplina*** está relacionado à disciplina a que o conteúdo pertence, como por exemplo, Matemática, Física, Economia etc. De acordo com Chevallard (2002) se analisa as condições oferecidas e as restrições impostas, pelo sistema escolar existente, ao estudo de um conteúdo qualquer e, portanto, a qualquer disciplina a que pertença (p. 12).

O nível ***domínio*** é uma subárea da disciplina, como pode ser a álgebra, aritmética ou geometria pertencentes a disciplina de Matemática.

O nível ***setor*** é uma subárea do domínio, por exemplo, polígonos, transformações no plano, triângulos são setores do domino da geometria plana, na disciplina de matemática.

No nível ***tema***, as condições e as restrições relacionadas ao ensino e à aprendizagem de um tópico específico, como, por exemplo, triângulos, quadriláteros etc.

No nível ***assunto de estudo*** concentram-se em as organizações matemáticas, motivadas e articuladas no interior de um tema mais amplo como, por exemplo, no

[5] Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2018) indicam que as condições e restrições aos níveis específicos da escala de codeterminação didática dependem, em grande medida, dos modelos epistemológicos dominantes da instituição escolar sobre a matemática e suas diferentes áreas. É por isto, que em nossa pesquisa colocamos as condições e restrições do estudo dos quadriláteros no capítulo 3, especificamente, no estudo das dimensões econômicas e ecológicas.

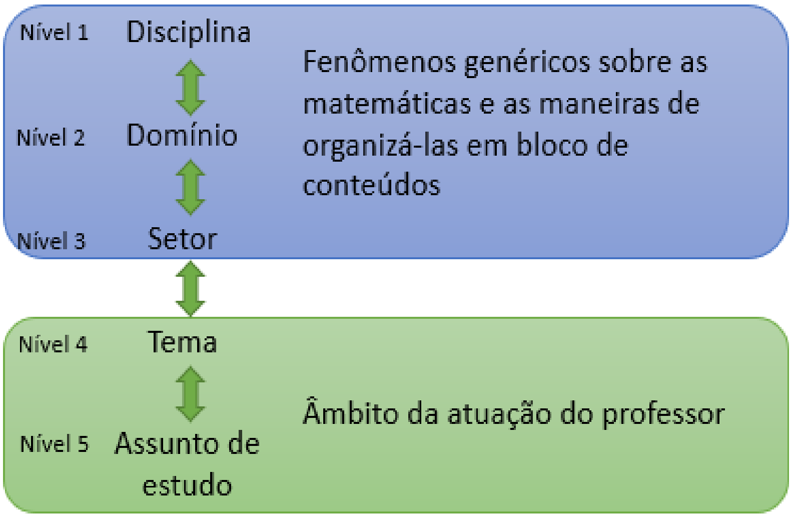
tema quadriláteros estudar perímetros, determinar a medida de áreas, fazer uma classificação etc.

Para Bosch e Gascón (2014, p. 81):

> os professores organizam, sequenciam e programam os temas à sua maneira, mas raramente questionam ou, muito menos, modificam a estrutura dada. Essa restrição curricular tende a confinar a praxeologia didática do professor ao nível do tema o que torna difícil chamar a atenção para *o racional* das praxeologias matemáticas ensinadas, porque muitas vezes parecem estar além dos temas (e mesmo além dos setores ou domínios) onde ocorrem.

Para Chevallard (2002, p. 6) esses níveis esboçam um princípio essencial da ecologia das organizações didáticas que permite "reconhecer o que poderia ser – e o que não pode ser – na organização do estudo de um determinado assunto ou tema, é preciso considerar os níveis superiores da hierarquia." Para o autor o nível da pedagogia "forma uma fronteira entre o "mundo abaixo" e o "mundo acima" em que o de baixo faz raras incursões no de cima, porque "se estabeleceu uma típica população noosférica – a de especialistas pedagógicos" que propõem leis sem se preocupar com suas aplicações. (p. 13). É nessa discussão que Gascón (2004) identifica o fenômeno, que chamou de ***Autismo Temático***, para identificar a separação marcante entre dois blocos de níveis inferiores da escala de codeterminação que agrupa no primeiro os níveis: disciplina, domínio e setor (Figura 4) e, no segundo, os níveis tema e assunto de estudo.

Figura 4 – Autismo Temático



Fonte: Elaboração própria

Para Gascón (2004) esses níveis deveriam interrelacionar, no entanto o professor atua apenas no segundo bloco. Para o autor o ***Autismo temático*** é o fenômeno didático:

> que se manifesta no confinamento da instituição escolar (currículo, documentos e livros didáticos) no nível temático e que, como tal fenômeno, o professor também está sujeito. Se produz assim uma cisão entre *o matemático* e *o pedagógico*, entendido como o âmbito de atuação do professor. [...] O autismo temático provoca *o desaparecimento escolar das razões de ser* (do *porquê* e do *para que*), não só de muitas organizações matemáticas ensinadas no nível temático, mas também de certos setores, como a geometria analítica e até de áreas completas da matemática, como a própria geometria. (GASCÓN, 2004, p. 41-42, tradução nossa, grifo do autor)

Por outro lado, Chevallard (2013) considera que a epistemologia escolar atual se caracteriza por ter eliminado as "razões de ser" das praxeologias matemáticas propostas para serem estudadas na escola. Para o autor se pretendemos que a educação obrigatória seja um meio, entre outros, de "melhorar a vida dos cidadãos", é essencial modificar essa epistemologia para acomodar as "razões de ser" das OM estudadas. Acrescenta que essa as praxeologias matemáticas são estudadas, na escola, como objetos já criados, valiosos por si mesmos, que o aluno é convidado a visitar, como se fossem monumentos, sem levantar questões. Assim, identifica o fenômeno do **monumentalismo** baseado no **paradigma de visita às obras** que, na TAD também é conhecido como "visita de monumentos", pois cada conhecimento é apresentado como um monumento "que os estudantes devem admirar e apreciar, mesmo que não saibam quase nada sobe suas *razões de ser*, nem atuais, nem do passado".(p. 164, tradução nossa).

Para contrapor esse paradigma Chevallard (2013) propõe o **paradigma de questionamento do mundo** entendendo que "a educação é um processo que se desenvolve durante toda a vida. Chevallard (2013) indica que "o didático" é uma dimensão vital das sociedades humanas e, no caso da didática da matemática considera o sistema didático $S(X,Y,O)$ em que *X* representa um aluno ou um grupo de alunos em que cada um é representado por *x*, *Y* identifica um professor ou uma equipe de assistentes ou ajudantes didáticos, cada um representado por *y* a quem corresponde ensinar a obra O.

Assim, nesta perspectiva, para o autor esse novo paradigma didático:

> tem como objetivo criar um *ethos* cognitivo no qual, quando surge alguma questão Q, *x* a leva em conta e, quando seja possível, comece seu estudo com o objetivo de fornecer uma resposta valiosa *R*, em muitos casos com alguma ajuda de algum *y*. Em outras palavras, se supõe que x não se opõe sistematicamente a enfrentar situações que envolvam problemas que ele nunca enfrentou ou resolveu. (CHEVALLARD, 2013, p. 168, tradução nossa).

Para Bosch e Gascón (2014) um sistema didático, no caso do paradigma do questionamento do mundo, é representado como $S(X,Y,$❤$)$ em que o estudo de ❤ é realizado por questões e/ou componentes praxeológicos. Para os autores, os sistemas didáticos mais óbvios são os da escola em que Y é, normalmente, "o professor". Acrescentam que

> Dado o sistema didático S (X; Y; ♥), a análise praxeológica procura fornecer respostas sobre as praxeologias em que se faz o jogo didático ♥. Em contraste, a análise didática aborda questões, incluindo: O que é o X? O que é y? Quais são as praxeologias didáticas postas em prática por X e Y e que *mileux* didáticos se mostraram necessários para isso? Que equipamento praxeológico[6] pode ser engendrado em X como um resultado de curto prazo e a longo prazo do funcionamento de S (X; Y; ♥)? (BOSCH; GASCÓN, 2014, p. 72).

Avançando nas discussões a respeito desse novo paradigma, Bosch (2018, p. 4039) representa então o sistema didático por $S(X, Y, Q)$, que não se refere mais à uma praxeologia a ser estudada, "mas em torno de uma questão Q para a qual X, com a ajuda de Y, deve fornecer uma resposta A♥. O estudo de Q gera um processo de investigação que envolve um meio didático M, composto por diferentes tipos de objetos ou ferramentas para a investigação." Nesse sentido, Bosch (2018) apresenta uma organização dos níveis de codeterminação considerando os dois paradigmas.

Figura 5 – Escala dos níveis de codeterminação didática com relação aos paradigmas

Fonte: Adaptado de Bosch (2018, p. 4005 e 4020)

Observamos, na Figura 5, que no *paradigma de visita às obras*, os processos instrucionais são pré-estabelecidos por um conjunto de obras ou organizações praxeológicas, em que o professor apresenta ou descreve um determinado corpo de

---

[6] O equipamento praxeológico é o amálgama de praxeologias e elementos praxeológicos que uma pessoa tem à sua disposição, isto é, que ela pode ativar a qualquer momento e sob certas condições e restrições. (BOSCH; GASCÓN, 2009, p.89).

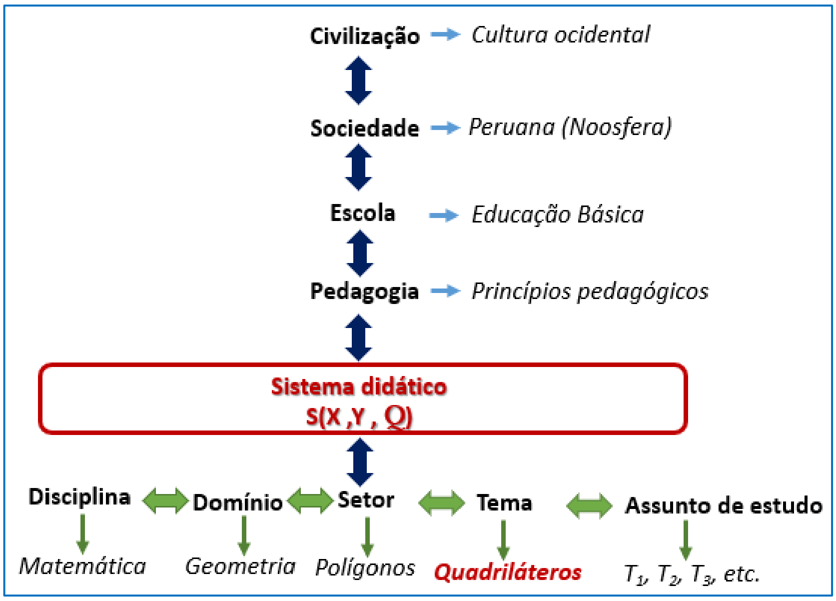
conhecimento para os alunos adquiri-lo e tentar aplicá-lo, por meio de um determinado conjunto de atividades e, consequentemente, o sistema didático é estabelecido no final dos níveis específicos das disciplinas. Por outro lado, no *paradigma de questionamento do mundo*, as questões *Q* não pertencem a nenhum campo pré-estabelecido de conhecimento e, por isso, o sistema didático se estabelece antes dos níveis correspondentes às disciplinas. Para a autora, nesse paradigma de questionamento do mundo:

> faz parte do processo investigar as possíveis fontes de respostas úteis e, em particular, misturar praxeologias de natureza, tamanho e grau de "honorabilidade" diferentes. Assim, os níveis específicos correspondentes às disciplinas dadas devem estar localizados abaixo - ou depois - do sistema didático. (BOSCH, 2018, p. 4052, tradução nossa).

Para Bosch (2018), no paradigma do questionamento do mundo a “visita às obras” não desaparece, pois é usada para encontrar respostas apropriadas que resultem produtivas para as pesquisas, às vezes, pode ser necessário explorar domínios de conhecimento e buscar a ajuda de guias especializados. No entanto, a visita, neste caso, é motivada, não pela importância ou prestígio da obra, mas por sua produtividade na construção de respostas aos questionamentos.

Em nosso estudo, que está focado no estudo de quadriláteros no sistema educativo peruano e no paradigma de questionamento do mundo, a escala de níveis de codeterminação pode ser representada como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Escala dos níveis de codeterminação referente ao estudo de quadriláteros



Fonte: Elaboração própria

A TAD como uma estratégia de ensino a ser aplicada na pedagogia de questionamento do mundo, propôs a noção de Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP que integra o esquema herbatiano[7] representado por $S(X,Y,Q)$➥$R^{♥}$ em que os estudantes X investigam uma pergunta Q, sob a direção de Y, com o intuito de obter uma resposta R à questão Q, isto é, a exploração da pergunta Q conduz à produção de uma resposta R. Nessa representação a seta ➥ indica esse processo e o símbolo ♥ a relatividade institucional do saber, ou seja, a resposta é produzida sob condições e restrições próprias de cada instituição (CHEVALLARD, 2009a).

A elaboração de R♥, a partir de Q, supõe então a organização, por parte do sistema S, de um *milieu* didático M, como um meio de exploração e de construção de uma resposta para Q, que reúne recursos antigos ou novos que X usará, que faz com que o sistema, parcialmente desenvolvido, passe a ser denotado por: $[S(X,Y,Q)$➥$\mathrm{M}]$➥$R^{♥}$. Assim, Chevallard representa o *milieu* por: $M = \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \cdots, R_n^{\diamond}, O_{n+1}, \cdots\ O_m\}$ em que:

> as entidades denotadas por $R_i^{\diamond}$, para $i = 1, \ldots, n$, são supostamente respostas "prontas" para a questão Q, as entidades Q_j, para $j = n+1, \ldots, m$, são outras obras que permitirão, por exemplo, elaborar R♥ baseada, principalmente, nas respostas $R_i^{\diamond}$, em que o expoente ◊ recebeu o "selo" de alguma instituição (não necessariamente "acadêmica"). (CHEVALLARD, 2009b, p. 22).

O esquema herbartiano desenvolvido é então representado por:

$[S(X,Y,Q)$➥$\{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \cdots, R_n^{\diamond}, \quad O_{n+1}, \cdots\ m\}]$➥$\mathrm{R}^{♥}$.

Com a introdução do esquema herbartiano Chevallard (2009a, 2009b) propõe que os Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) são gerados por uma questão, chamada questão geratriz que, por não ter uma resposta imediata, implica em formular outras perguntas, derivadas de Q, cujas respostas permitem a construção de um *milieu* didático. De acordo com Chevallard (2012) nesse meio didático o professor não é o possuidor absoluto do saber e os estudantes têm suas possibilidades de ação, ao formular perguntas e procurar recursos e fontes de informação para construírem suas respostas, as avaliarem e as validarem de maneira crítica. Dessa forma, Chevallard (2009a) afirma que o PEP é codisciplinar porque o aluno, na busca de respostas,

[7] Chamado de esquema herbartiano pelo pedagogo alemão, Johann Friedrich Herbart (1776-1841) quem é considera como o pai da pedagogia científica.

mobiliza várias ferramentas praxeológicas de vários domínios da matemática, como também de diferentes disciplinas.

Assim, em um percurso de estudo e pesquisa, “a “pesquisa” deve resultar da construção de uma resposta à questão estudada, supostamente geradora do percurso e o estudo é o estudo das obras encontradas no caminho” (CHEVALLARD, 2017, p. 169). Para o autor, outro ponto decisivo na implementação de um PEP é o grau de profundidade do estudo, pois pode ser entendido como outra maneira de manter “o mundo de visita às obras.” Considerando a maneira como o professor dirige um PEP o autor os classifica em **fechado** quando o professor impõe “um certo percurso que leva a classe a conhecer (e confrontar) as noções matemáticas escolhidas previamente pelo mesmo professor” (p. 168); em **semiaberto** quando o professor escolhe “a pergunta para investigar de tal maneira que, sob as restrições vigentes, o percurso passe quase necessariamente por esta ou aquela obra matemática” (p. 168) e **aberto** quando o papel do professor é “puramente negativo, no sentido de que o professor, como "chefe de investigação", se conforma em impor, de vez em quando, a decisão de não ir encontrar tal ou qual obra, que lhe parece estar ainda fora do alcance do grupo de estudantes” (p. 169).

Para um ensino por meio de PEP, de acordo com Chevallard (2012), é necessário mobilizar formas de fazer ou gestos de estudo e pesquisa por meio de nove dialéticas que permitem implementar, gerir, organizar e descrever o processo de estudo.

A primeira, chamada de ***Dialética de questões e respostas***, é o centro do ensino por um PEP e se refere ao fato de que qualquer busca, genuína e não simulada, por respostas para a pergunta, gera novas perguntas que a comunidade de estudo decidirá quando e como serão respondidas. A segunda, chamada de ***Dialética do individual e do coletivo****,* considera que cada membro da comunidade de estudo deve considerar-se livre para realizar o estudo e investigar as questões sem sem deixar de contribuir com o coletivo. A terceira, ***Dialética mídia – milieu****,* considera que *o milieu* de estudo não é definido de antemão, mas construído na medida que seus componentes são testados paralelamente à construção de respostas, o que lhe dá um caráter mais amplo e aberto, pois permite a entrada de qualquer tipo de conhecimento por diferentes fontes de informação ou diferentes mídias. A quarta, ***Dialética da análise e da síntese praxeológica e didática***, se refere ao fato de que toda análise didática supõe uma análise praxeológica e, reciprocamente, para entender uma realidade praxeológica (tarefa, técnica, tecnológica e teórica) é essencial realizar uma análise didática que, por possuir um componente epistemológico, questiona a gênese das praxeologias em jogo.

A quinta, chamada de ***Dialética de entrada e saída do tema*** pondera que uma verdadeira questão geratriz, inevitavelmente, leva ao estudo e à pesquisa de conhecimentos vinculados direta ou indiretamente à questão inicial em que a busca de respostas não é linear e direta. Durante o percurso o cainho pode apresentar ramificações que conduzem a "saídas" do tema inicial, que conduzem à retomada do percurso posteriormente. A sexta, ***Dialética do paraquedista e das trufas***, refere-se à condição de exploradores que os atores do sistema didático assumem, como paraquedistas quando se distanciam de o problema par explorá-lo por um nível mais alto, ou do coletor de trufas quanto explora o problema com um olhar minucioso. A sétima, ***Dialética das caixas pretas e caixas claras***, coloca em caixas claras os saberes relevantes que merecem ser esclarecidos, analisados etc., enquanto deixa em caixas pretas os saberes que não são necessários para responder a questão geratriz, permanecendo na escuridão. Na oitava, ***Dialética da leitura e da escrita*** se considera apenas a parte útil das respostas, evitando a transcrição formal das respostas parciais. A última, ***Dialética da difusão e da recepção*****,** refere-se à disseminação e defesa da resposta obtida pela comunidade de estudo para torná-la conhecida, explicar seus componentes e justificar as escolhas feitas. Não se trata de uma simples apresentação da resposta, mas de difundi-la, considerando a recepção da comunidade, ponderando as perguntas, as aceitações e as resistências.

Por outro lado, um problema didático ou problema de pesquisa deve considerar três dimensões, segundo Gascón (2011), a dimensão epistemológica, a dimensão ecológica e a dimensão econômica. Para o ator um problema didático pode ser representado pelo seguinte esquema heurístico: $\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$ em que P_0 é a formulação inicial do problema docente[8], enquanto P_1, P_2 y P_3 representam as dimensões epistemológica, econômica e ecológica, respetivamente.

[8] Chamamos problemas de ensino àqueles que o professor apresenta quando tem que ensinar um assunto matemático para seus alunos. Por exemplo: o que devo ensinar aos meus alunos e como ensiná-los sobre geometria, estatística, cálculo diferencial ou proporcionalidade? (GASCÓN, 2011, p. 207)

Para Gascón (2011), na *dimensão epistemológica* se apresentam questões relacionadas à natureza, às funções e às razões de ser da obra de estudo O para construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER); que, na TAD, se constitui em um instrumento de emancipação do pesquisador em didática já que, baseado nele, permite questionar como as instituições interpretam o conhecimento matemático; a *dimensão econômica* inclui questões a respeito da criação, gestão e modificação das condições existentes, em uma determinada instituição, para o estudo de O; a *dimensão ecológica* inclui questões que se referem ao conjunto de restrições que permitem, afetam ou até impedem o estabelecimento de certas condições e seu possível desenvolvimento em uma determinada direção.

Para o autor a formulação inicial P_0 necessita, minimamente, da dimensão epistemológica, isto é, precisa de P_1, para ser considerada um problema didático ou um problema de pesquisa ($P_0 \oplus P_1$). A sequencialidade entre as dimensões é indicada pelo símbolo $\hookrightarrow$, que não deve ser interpretado como inclusão, pois uma formulação completa de P_{i+1} requer uma formulação prévia de P_i, finalmente, o problema didático é representado como P_δ.

Como pretendemos estudar o problema didático dos quadriláteros, na continuidade de nossa problemática apresentamos a revisão da literatura com artigos, dissertações e teses de pesquisas a respeito desse tema.

2.2 Revisão da Literatura

Com o objetivo de detectar e obter informações relevantes e necessárias para o estudo do problema didático de quadriláteros, procuramos, no Brasil, teses e dissertações de mestrados acadêmicos, no banco de teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e, no Peru, no portal do Registro Nacional de Trabalhos de Investigação da SUNEDU (Superintendência Nacional de Ensino Superior Universitário), além de procurar no Google acadêmico e em banco de teses de outros países. Procuramos ainda por artigos em revistas com indexação Scielo, Scopus e Web of Science por serem os indexadores de maior impacto na comunidade acadêmica e em anais de congressos nacionais e internacionais. Para tal busca elegemos as palavras-chave “Quadriláteros”, “Quadrilateral”, “Cuadriláteros” e “quadrilatères” em português, inglês, espanhol e francês, respectivamente, assim como as palavras trapézio, paralelogramo, quadrado, retângulo e losango. Não especificamos um período para os trabalhos.

Com a palavra quadriláteros, em um primeiro momento, nos deparamos com 46 pesquisas, mas como nosso interesse estava em pesquisas direcionadas à Educação Básica no nível secundário (11 até 16 anos de idade) e na formação de professores descartamos alguns e ficamos com 21 pesquisas sendo uma tese, nove dissertações, sete artigos publicados em revistas e quatro publicados em anais de congressos.

A seguir as categorizamos as pesquisas em quatro grupos (Quadro 1): a primeira composta por trabalhos com estudantes, a segunda por pesquisas cujo enfoque foi a formação de professores, a terceira por estudos de livros didáticos e a quarta por ensaios teóricos.

Quadro 1 – Categorias e pesquisas da revisão de literatura

Categorias		Pesquisas
I	Estudos com estudantes	Maguiña (2013), Borja (2015), Espinoza (2015), Forsythe (2015) e Jara (2015), Pereira e Câmara (2016).
II	Estudos na formação inicial docente	Dalcín e Molfino (2012), Fernández e Díaz (2012), Escudero e Carrillo (2014), Sánchez-Matamoros, Fernández e Valls (2015), Ferreira (2016) e Vilaça (2018).
	Estudos na formação continuada docente	Maioli (2002), Almeida (2015) e Goméz (2015).
III	Estudos com livros didáticos	Dalcín (2006), Micelli e Crespo (2012), Becerra (2015) e Pereira e Santos (2019).
IV	Ensaios teóricos	Gascón (2004) e Huerta (1996).

Fuente: Elaboração própria

Na **primeira categoria** a pesquisa de mestrado de Maguiña (2013) objetivou propor uma sequência de atividades para o desenvolvimento do raciocínio geométrico durante a construção de conhecimentos e habilidades relacionados a quadriláteros, em estudantes de quarto ano (15 a 16 anos) de nível secundário no Peru. O pesquisador utilizou um pré e um pós-teste, antes e depois da aplicação da sequência de atividades, para evidenciar possíveis mudanças no nível do raciocínio geométrico na aprendizagem de quadriláteros, de acordo com os níveis de Van Hiele.

Maguiña (2013) observou que os estudantes do quarto ano da Educação Básica Regular no Peru reconhecem figuras de quadriláteros, mas não estabelecem propriedades mínimas para caracterizar as figuras que representam esses objetos geométricos, além de não relacionarem os diferentes tipos de quadriláteros, o que mostra que os estudantes estão em aquisição baixa no nível de dedução informal de

Van Hiele. Para o autor, a sequência de atividades permitiu que os estudantes atingissem um nível alto de aquisição para o nível 1 (Reconhecimento), um nível intermediário de aquisição no nível 2 (Análise) e desenvolvendo habilidades no nível 3 (Dedução informal) que os fez passar de um nível de aquisição nulo para baixa.

A pesquisa de mestrado de Borja (2015) tinha por foco o estudo do quadrilátero trapézio com o objetivo de analisar como estudantes de segundo ano (12 a 13 anos) de nível secundário no Peru encontram a medida de sua área, por meio de sua reconfiguração usando malha quadriculada e o GeoGebra. A autora utilizou a Teoria de Registros de Representação Semiótica, mais especificamente, o registro figural e a apreensão operatória de reconfiguração, que consiste no fracionamento ou divisão da figura que representa o trapézio para obter uma outra figura que permita determinar a medida de sua área. Utilizou ainda a metodologia de pesquisa Engenharia Didática e, para a parte experimental, elaborou uma sequência de três atividades planejadas para que os estudantes desenvolvessem em representações figurais do trapézio a operação de reconfiguração.

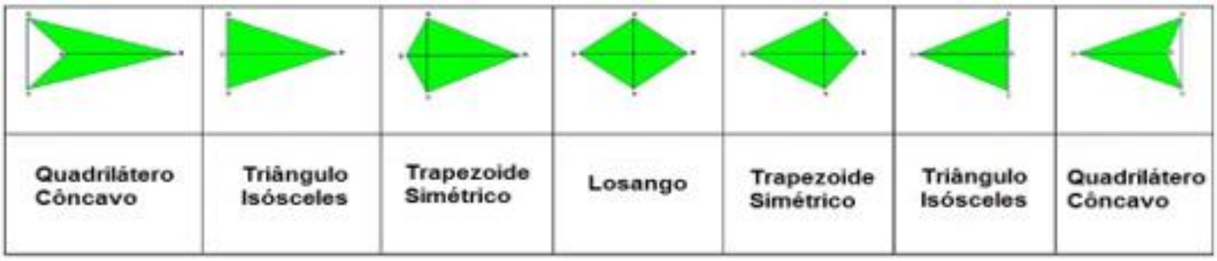
A autora identificou a apreensão perceptiva, discursiva, sequencial e operatória mobilizadas pelos estudantes quando solucionaram as atividades da sequência, mas que os estudantes do segundo ano do nível secundário no Peru, não determinam a medida da área do trapézio porque dão importância ao uso de uma fórmula mesmo sem compreendê-la ou a ter esquecido. Assim, não conseguem mobilizar outros procedimentos que permitam resolver as atividades por meio da operação de reconfiguração.

Na mesma linha, Espinoza (2015), em sua pesquisa de mestrado, estudou o trapézio focando em sua propriedade da base média com o objetivo de analisar como estudantes de quarto ano de nível secundário da Educação Básica Regular no Peru (15 a 16 anos) conjecturam essa propriedade quando articulam as apreensões no registro figural em uma sequência didática apoiada no GeoGebra. A pesquisadora usou como referencial teórico alguns aspectos da teoria de Registros de Representação Semiótica e utilizou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Espinoza (2015) concluiu que os estudantes mostraram mais dificuldade em construir o trapézio isósceles do que o trapézio escaleno o que revela que desenvolveram a apreensão sequencial para o trapézio escaleno porque a pesquisadora apresentou uma sequência ordenada de passos para construí-lo. Além disso, percebeu que os estudantes mostraram conhecimentos limitados a respeito do trapézio embora tenham utilizado uma linguagem matemática adequada quando apresentaram suas conjecturas.

Em seu artigo, Forsythe (2015), apresenta uma pesquisa com estudantes britânicos de 13 anos de idade, baseado no desenvolvimento do raciocínio Geométrico de Van Hiele e na forma de classificação hierárquica proposta por De Villiers. O objetivo do estudo foi verificar se uma tarefa baseada em uma figura dinâmica construída em um programa de Geometria Dinâmica poderia contribuir para o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes. Para isso, a pesquisadora usou a ferramenta arraste no ambiente *Geometers Sketchpad* e focou em relações entre formas geradas a partir da figura dinâmica, especialmente, o losango como um caso especial de *trapezoide simétrico*[9]. A autora afirma que o desenvolvimento da ideia de inclusão de figuras não foi automático para os estudantes, mas a observação da animação (Figura 7) permitiu que os estudantes assistissem a natureza contínua da mudança de figura e mostrou ser o catalisador para perceber relações inclusivas entre o losango e o trapezoide simétrico.

Figura 7 – Formas geradas durante a animação



Fonte: Forsythe (2015, p. 213)

Para Forsythe (2015), quando os estudantes trabalham, em um ambiente de geometria dinâmica, a representação é mais visual e torna-se o foco principal de sua atenção o que dá à esse ambiente um caráter mais intuitivo e próximo de como as mentes trabalham, o que auxilia os estudantes a desenvolverem visualizações mentais.

[9] Trapezoide simétrico é o quadrilátero que não tem lados paralelos, mas tem um eixo de simetria.

A pesquisa de mestrado de Jara (2015) objetivou determinar os diferentes níveis de raciocínio, bem como os conhecimentos e habilidades que possuem um grupo de cinco estudantes do primeiro ano do nível secundário no Peru (12 a 13 anos) em relação ao objeto paralelogramo, por meio de uma sequência de atividades. A metodologia de pesquisa usada foi o estudo de caso e para análise da sequência de atividades usou as fases para o desenvolvimento do raciocínio proposto por Van Hiele. A autora concluiu que esses alunos não conseguem definir, nem classificar quadriláteros, embora as respostas dos estudantes, para cada atividade tenham permitido associar características de cada nível.

A pesquisa de Pereira e Câmara (2016), apresentada em um artigo a respeito de um estudo dos quadriláteros notáveis, por meio do GeoGebra, realizado no Brasil com uma turma de 30 alunos do 6° ano de ensino fundamental (11 a 12 anos). Os autores usaram como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática e como referencial teórico os níveis de raciocínio geométrico de Van Hiele. Evidenciaram que as estratégias utilizadas pelos estudantes, no desenvolvimento das atividades, centraram-se em três dimensões: a) pragmática, quando os estudantes referenciam somente o aspecto global dos quadriláteros notáveis (verificado em 47% das duplas); b) aplicativa, quando os alunos utilizam a definição usual da figura geométrica (observado em 3% da turma); c) relacional, quando mencionam propriedades dos quadriláteros notáveis em suas produções (evidenciado em 50% da turma). Nesse sentido, as referências mais mobilizadas nas construções foram as propriedades dos quadriláteros notáveis, enquanto os aspectos globais e as definições dessas figuras ficaram em segundo e terceiro lugar.

A primeira categoria evidencia que o ensino atual não tem contribuído para uma real aprendizagem dos conteúdos tratados, pois os estudantes não mobilizam os conhecimentos necessários para avançar, mostrando que não percebem propriedades básicas para caracterizar os quadriláteros e não os relacionam, além de priorizarem aspectos visuais em suas respostas.

Na ***segunda categoria,*** que se refere às pesquisas a respeito de formação de professores consideramos duas subcategorias: as que tratam de formação inicial e as que tratam de formação continuada de professores. Da primeira constam as pesquisas de Dalcín e Molfino (2012), Fernández e Díaz (2012), Escudero e Carrillo

(2014), Sánchez-Matamoros, Fernández e Valls (2015), Ferreira (2016) e Vilaça (2018).

Dalcín e Molfino (2012) investigaram as possibilidades de construção e justificação de propriedades dos quadriláteros geradas a partir de classificações não tradicionais em atividades realizadas, tanto com lápis e papel, quanto com o GeoGebra. A pesquisa foi realizada, no Uruguai, com 3 turmas de 50, 40 e 25 estudantes, em formação inicial, que trabalharam em equipes de três ou quatro estudantes. Os autores usaram os paradigmas do Espaço de Trabalho Geométrico[10] propostos por Houdement e Kuzniak para planejar as atividades.

Os pesquisadores concluíram que os estudantes classificaram os quadriláteros tomando como critérios, exclusivamente, a igualdade de seus lados ou a igualdade de seus ângulos, que nunca haviam feito antes e que não aparecem nos livros didáticos do Uruguai, mas no início do trabalho, eles só conseguiam fazer a classificação por paralelismo (paralelogramos, trapézios e trapezoides). Além disso, os estudantes conceberam e construíram famílias de quadriláteros, que nunca haviam considerado antes, como quadriláteros com três lados (ou ângulos) de mesma medida. Os autores afirmam que a construção no GeoGebra, de algumas famílias de quadriláteros, embora muitas vezes significasse um grande desafio, permitiu ampliar as famílias consideradas para além dos quadriláteros conhecidos pelos estudantes.

No mesmo sentido, os pesquisadores observaram que os estudantes estabeleceram a equivalência ou não de diferentes definições que comandaram a classificação dos quadriláteros, isto é, a hierárquica ou por partição no sentido de De Villiers.

O artigo de Fernández e Díaz (2012) apresenta os resultados obtidos em dois questionários relacionados com a definição e classificação de quadriláteros convexos aplicados em uma pesquisa desenvolvida na Província de Buenos Aires, no período de 2011 a 2014., com objetivo de analisar os critérios utilizados por estudantes em formação inicial. Os autores afirmam que durante o primeiro ano de formação aplicaram um questionário que tratava do Trapézio e observaram nas respostas dos

[10] Os paradigmas do Espaço de Trabalho Geométrico propostos são a Geometria I, na qual as validações são perspectivas, a Geometria II, na qual as validações são hipotéticas dedutivas e Geometria III, na qual as validações são por meio de um raciocínio lógico e axiomático.

estudantes que apresentavam dois tipos de definições, uma que usavam para eles mesmo e, outra, para ser usada no momento de ensino. A partir desse estudo exploratório aplicaram outro questionário, no segundo ano de formação dos mesmos estudantes, para que escrevessem as definições de quadrado, retângulo, losango, trapézio, paralelogramo, trapezoide e romboide diferenciando aquelas que eles adotam para si mesmos e aquelas que eles usariam para ensinar. Na última pergunta do questionário os estudantes devem construir um diagrama de Venn, para representar a classificação dos quadriláteros resultantes das definições adotadas.

Os resultados de Fernández e Díaz (2012) mostram que 41,2% dos entrevistados definem o trapézio de maneira contraditória entre as categorias "para si mesmos" e "para ensinar". Por exemplo, um estudante formulou a definição de trapézio para si mesmo, como o quadrilátero com pelo menos um par de lados opostos paralelos; e para ensinar, como o quadrilátero com um único par de lados opostos paralelos. No primeiro caso, os paralelogramos são trapézios, enquanto no segundo não são; analogamente, a primeira definição é inclusiva com respeito aos paralelogramos e a segunda exclusiva ou por partição nos termos de De Villiers.

No mesmo sentido, o artigo de Sánchez-Matamoros; Fernández e Valls (2015) apresentam uma pesquisa feita com 48 estudantes de licenciatura de educação secundário no contexto espanhol, com o objetivo de analisar "como os estudantes de licenciatura compreendem a trajetória de aprendizagem [11] de estudantes de secundário em relação à classificação dos quadriláteros" (p. 2). Para cumprir tal objetivo, os pesquisadores realizaram seis atividades baseadas no estudo do quadrado, losango e retângulo, que envolvem definições, características e propriedades desses quadriláteros. No momento de solucionar cada uma das atividades os estudantes de licenciatura devem pensar o que fariam os estudantes de secundário, se fossem resolver essas mesmas atividades, reconhecendo os percursos que fariam.

---

[11] Trajetória de aprendizagem (CLEMENTS E SARAMA, 2004; WILSON, MOJICA E CONFREY, 2013, *apud* SÁNCHEZ-MATAMOROS, FERNÁNDEZ E VALLS, 2015, p. 2) entendida como um percurso hipotético por meio do qual a aprendizagem do estudante pode progredir e servir de referência quando o professor interpreta ou antecipa o pensamento matemático dos estudantes definindo objetivos de aprendizagem.

Sánchez-Matamoros; Fernández e Valls (2015) indicam que a maioria dos estudantes considerou que ter uma maior compreensão do processo de classificação dos quadriláteros era obter classificações não inclusivas, o que os levou a determinar esse tipo de classificação como um objetivo de aprendizagem. Um pequeno grupo considerou que ter uma maior compreensão do processo de classificação dos quadriláteros era a obtenção de classificações inclusivas, o que os levou a tomar essa classificação como um objetivo de aprendizagem.

Tanto a pesquisa de Fernández e Díaz (2012) como de Sánchez-Matamoros, Fernández e Valls (2015) evidenciam que a classificação de quadriláteros depende de como os estudantes fazem suas definições (inclusivas ou não inclusivas).

Escudero e Carrillo (2014), em seu artigo, analisaram o conhecimento que 51 estudantes do segundo ano de Licenciatura em Educação Primária da Universidade de Sevilla têm sobre quadriláteros baseando-se no modelo teórico de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK, siglas em inglês). Inicialmente, para identificar o conhecimento matemático, aplicaram um questionário a todos estudantes e depois uma entrevista a 12 participantes que, por terem participado das duas coletas, foram considerados sujeitos da pesquisa.

Os resultados permitiram que os pesquisadores conhecessem a imagem conceitual, desse grupo de futuros professores, para diferentes quadriláteros, incluindo o trapézio, embora alguns tenham apresentado dificuldades para reconhecê-los, provavelmente por causa da posição, não convencional, com que as figuras foram apresentadas. Observaram, ainda, que muitos também apresentaram dificuldades para representar um quadrilátero convexo, embora tenham fortalecido seus conhecimentos, pois associaram a uma representação prototípica (figuras em posição convencional, no plano) a uma definição, caracterização ou nome.

Finalmente, os pesquisadores afirmam que as principais defasagens dos estudantes estão na falta de compreensão de noções geométricas, como propriedades comuns aos quadriláteros, porque focam na forma da figura e sua imagem prototípica incentiva os estudantes a indicar propriedades incorretas para as figuras.

Na sua tese de doutorado, Ferreira (2016) estudou uma proposta didática com tarefas que articulam provas e demonstrações como estratégia de ensino com o objetivo de minimizar dificuldades relacionadas ao tópico quadriláteros, com 12 estudantes de licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia no Brasil. A pesquisadora utilizou, como marco teórico, a Teoria Antropológica do Didático para a análise de livros didáticos e para modelar as situações de ensino; a Teoria de Registros de Representação Semiótica enfatizando as diferentes apreensões de uma figura; a Teoria de Situações Didáticas para a elaboração, experimentação e análise didática da sequência; além de concepções de prova e demonstração[12] de Balacheff (2000). Utilizou como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática.

No estudo dos livros didáticos a autora afirma que abordam quadriláteros de maneira direta no sentido da formalização para a resolução de problemas e que a organização didática apresentada não parece ter potencial para permitir ao estudante participar da construção deste conceito, mas apenas compreender o que foi feito por outro.

Nas tarefas que envolvem definições de quadriláteros e a relação entre eles, a pesquisadora evidenciou dificuldades conceituais relativas à caraterização de quadriláteros notáveis e às relações entre eles, algumas relacionadas à apreensão perceptiva e às justificativas propostas pelos estudantes. A autora afirma que, apesar de os estudantes terem realizado provas formais, mostraram fragilidades para o desenvolvimento de uma demonstração e para articular propriedades e conceitos geométricos. Além disso, constatou que a experiência a vivência dos estudantes se restringe à geometria intuitiva (conhecimentos baseados em experiências empíricas), pois nas construções dos quadriláteros, em nenhum momento, recorrem, por exemplo, a propriedades de simetria axial para justificar suas construções.

Por outro lado, a pesquisa de mestrado de Vilaça (2018) objetivou investigar como 36 estudantes de um curso de licenciatura em matemática, agrupados em trios,

---

[12] BALACHEFF (2000, *apud* FERREIRA, 2016, p. 44) distingue os termos ‘explicação’, ‘prova’ e ‘demonstração’:
Explicação: Um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, refutados ou aceitos.
Prova: Uma explicação aceita por dada comunidade em dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate voltado a determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
Demonstração: Um tipo de prova dominante em matemática, com uma forma particular. Trata-se de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras.

utilizavam o Geoplano durante a realização de algumas atividades que envolviam características de quadriláteros em duas oficinas. O autor usou como marco teórico a Abordagem Instrumental e a Orquestração Instrumental.

Os principais resultados da pesquisa evidenciam dificuldade na compreensão e reconhecimento de características dos quadriláteros, especificamente, a definição dessa família de figuras, principalmente, o losango, além da predominância de utilização de quadriláteros convexos, especialmente os notáveis. Em relação à utilização do Geoplano identificou que esse recurso é dispensável em atividades que apenas solicitam a construção de figuras.

A segunda subcategoria, baseada na formação continuada de professores, é composta pelas pesquisas de Maioli (2002), Almeida (2015) e Goméz (2015).

A pesquisa de mestrado de Maioli (2002) tinha por objetivo observar como dez professores de matemática de ensino médio no Brasil desenvolvem conhecimentos a respeito de quadriláteros e teorias na área de educação matemática, como a Teoria de Situações Didáticas - TSD e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de promover uma reflexão de suas práticas em sala de aula. Os procedimentos metodológicos permitiram que os professores experimentassem dois momentos: um em que foi proposto aos professores que os professores se colocassem no lugar de seus alunos para resolver situações problemáticas e, no outro, que os professores refletissem a respeito de pesquisas que usaram a teoria das situações didáticas e a teoria dos registros de representação semiótica para relacioná-las à sua prática de ensino. O objeto matemático foi analisado a partir de vários pontos de vista: aspectos visuais, definição, propriedades, construções geométricas, conjecturas, demonstrações, contraexemplos, teorema recíproco e discussão entre o grupo de professores.

Para analisar a participação e o processo de formação, desse grupo de professores, a autora estabeleceu seis categorias em que as quatro primeiras correspondem às dificuldades que apresentam em relação à geometria e seus aspectos conceituais e visuais, situações e livros didáticos; e as duas últimas relacionadas à visão de pesquisa e registros de representação. As atividades foram projetadas para serem trabalhadas em diferentes registros de representação (enunciados verbais, representação figural e discurso matemático) considerando as três dialéticas de ação, formulação, validação, além da institucionalização propostas por Brousseau na TSD.

A autora observou, durante o desenvolvimento da sequência de atividades, a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, algumas dificuldades ao verbalizarem erros como: "ponto médio da reta", "reta tangente a um ponto", “pontos AB”, justificados pelos professore por não estarem acostumados a verbalizar uma construção e não como consequência de falhas conceituais, o que mostra que dão mais importância ao aspecto visual do que conceitual. Em relação às dificuldades na área da geometria, a autora observou o uso de termos impróprios, confusão entre propriedades e definições, a diagonal de um polígono é sempre interna e a ideia de "base" no contexto da geometria confundida com a ideia de base no sentido comum.

A dissertação de Almeida (2015), objetivou analisar e compreender as concepções matemáticas de 16 professores dos anos iniciais do ensino fundamental para introduzir Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) como ferramentas auxiliares da prática docente, no ensino de Geometria, em particular dos quadriláteros, no Ensino Fundamental.

Para realizar sua pesquisa, a autora utilizou como subsídios teóricos os Saberes Docentes segundo Tardif, os conhecimentos do conteúdo específico, pedagógico geral, pedagógico do conteúdo de Shulman e o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo segundo Palis. Em um primeiro momento, a autora aplicou um questionário e fez entrevistas a professores atuantes do 1º ao 5º ano do ensino da rede pública do município brasileiro de Formigueiro do estado do Rio Grande do Sul. Em um segundo momento, baseada nos dados coletados no questionário e nas entrevistas, a pesquisadora elaborou e implementou uma oficina que chamou “*O Software GeoGebra na Formação Continuada de Professores no Ensino e Aprendizagem de Quadriláteros”*.

A autora mostra que os professores, que participaram da oficina, tinham consciência da importância do ensino de Matemática e de Geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, mas que esbarra em dificuldades decorrentes de sua formação inicial e continuada, já que nelas houve pouca ênfase no ensino e na aprendizagem de matemática, além de apresentarem lacunas nos saberes disciplinares. Além disso, Almeida (2015) percebeu que o GeoGebra, pode contribuir de maneira efetiva para organização e desenvolvimento da prática docente, oferecendo técnicas alternativas que enriquecem o ensino de quadriláteros nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Goméz (2015) analisou como um estudo de quadriláteros que envolve o processo de visualização, mediada pelo GeoGebra, pode contribuir para a formação continuada de professores de nível secundário no Peru. Fundamentou sua pesquisa na Teoria de Registros de Representação Semiótica com ênfase na visualização e na articulação entre as apreensões sequenciais, perceptivas, operativas e discursivas. Como metodologia de pesquisa usou à Engenharia Didática.

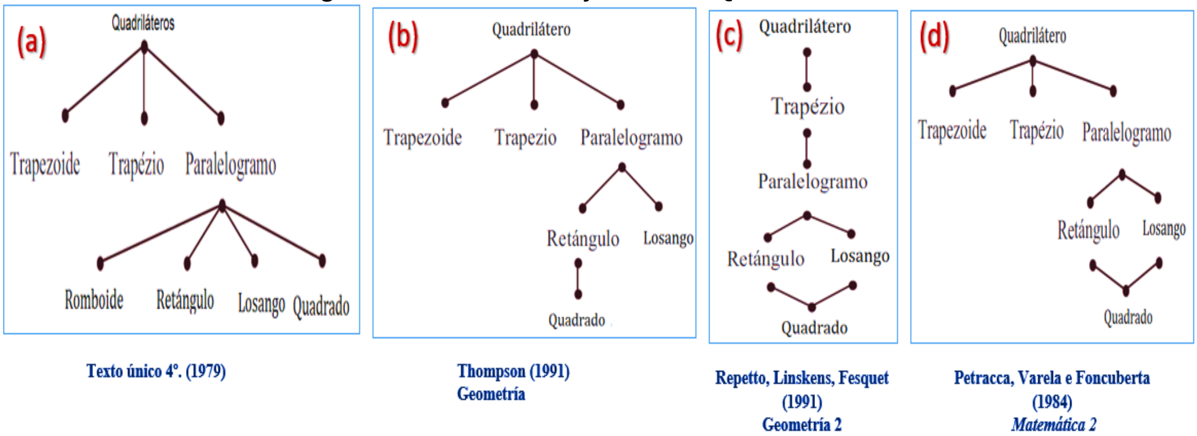
A pesquisadora elaborou e implementou uma oficina com quinze professores, que já conheciam o GeoGebra, composta por quatro atividades que focavam no estudo do paralelogramo baseada na configuração, na reconfiguração e no arraste. Para a autora os professores mobilizaram conhecimentos para o estudo de quadriláteros, uma vez que conseguiram realizar tratamentos no registro figural ao utilizar ferramentas específicas do GeoGebra, embora apresentassem dificuldades em coordenar os registros figural e o discurso. No entanto, conseguiram articular as apreensões, perceptivo-operatória, perceptivo-discursiva e perceptivo-operatória-discursiva, o que evidencia que desenvolveram processos de visualização do objeto matemático quadrilátero. Além disso, a pesquisadora conjecturou que se os professores desenvolveram suas apreensões então são capazes de criar situações para o objeto matemático que propiciem em seus estudantes o desenvolvimento da visualização.

A segunda categoria, tanto para a formação inicial, como para a formação continuada de professores, evidencia dificuldades conceituais relativas à caracterização e classificação de quadriláteros notáveis e a identificação de relações entre eles, algumas delas relacionadas ao foco dado à apreensão perceptiva como único meio para as justificativas propostas na resolução de problemas.

A ***terceira categoria***, que agrega estudos relacionados ao ensino de quadriláteros proposto em livros didáticos, é formada pelas pesquisas de Dalcín (2006), Micelli e Crespo (2012), Becerra (2015) e Pereira e Santos (2019).

Em seu artigo, Dalcín (2006) apresenta um estudo das definições e classificações de quadriláteros que se encontram em livros didáticos antigos e atuais usados no Uruguai. O autor usa os tipos de classificação propostos por De Villiers, hierárquica e por partição, e apresenta algumas classificações dos quadriláteros como pode-se observar na Figura 8, em que o paralelogramo pode ser classificado como partição (8a) ou como hierarquia em que o quadrado é considerado um retângulo (8b), ou o quadrado pode ser um retângulo e o losango e o paralelogramo podem ser um trapézio (8c) ou ainda o quadrado pode ser um retângulo ou um losango, mas o paralelogramo não é um trapézio (8d).

Figura 8 – Classificações dos Quadriláteros



Fonte: Adaptado de Dalcín (2006, p. 474-475)

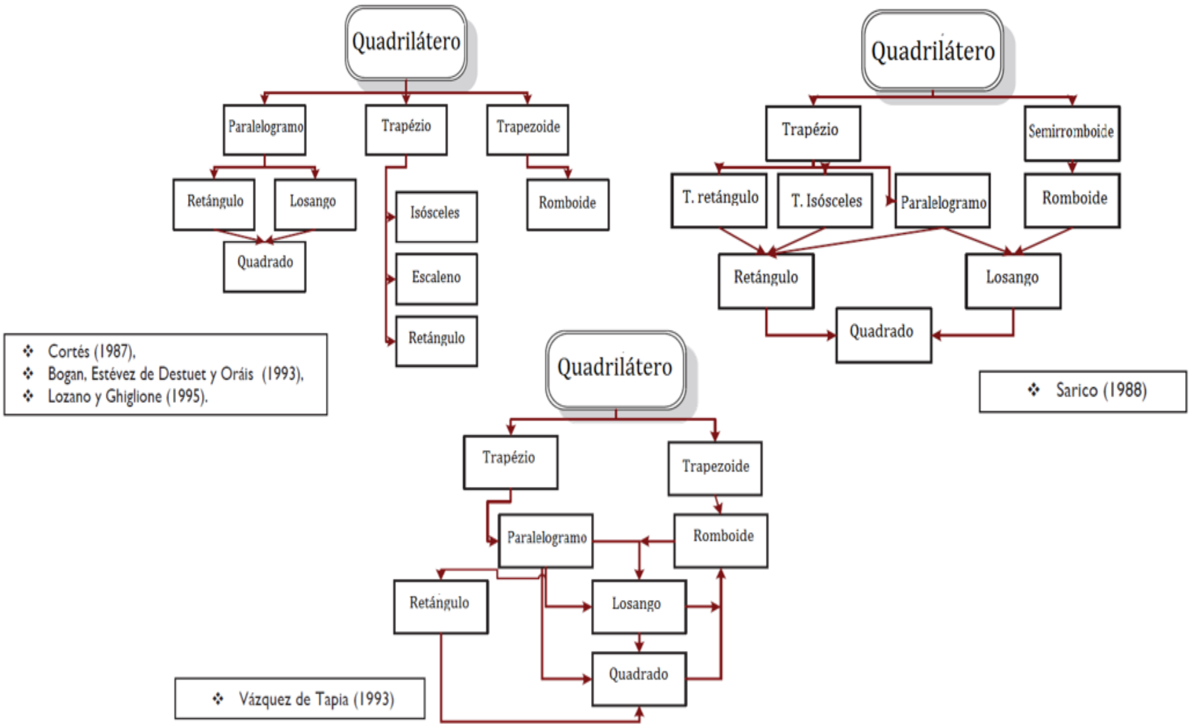
O autor conclui que não há uma única classificação correta, isto é, que pode haver muitas maneiras, matematicamente corretas, de definir e classificar quadriláteros e que a tarefa é investigar a conveniência de usar uma ou outra definição em sala de aula considerando o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

De modo similar, Micelli e Crespo (2012) apresentam uma análise de 16 livros didáticos para o ensino médio utilizados nos últimos vinte anos no ensino básico na Argentina baseadas na classificação proposta por De Villiers (hierárquica e por partição).

Na figura 9 podemos ver algumas classificações em que as autoras indicam que a possibilidade de definições diferentes, para o mesmo quadrilátero, leva a classificações diferentes, todas igualmente válidas. As pesquisadoras sugerem investigar se os professores estão cientes da existência de diferentes classificações.

Como pode ser observado, Dalcín (2006) e Micelli e Crespo (2012) usaram em suas pesquisas os tipos de classificação de De Villiers e evidenciaram que há diferentes formas de classificar quadriláteros que dependem dos critérios utilizados para suas definições. Dessas pesquisas, podemos dizer que as classificações apresentadas têm como critério o paralelismo dos lados dos quadriláteros e se sua definição é inclusiva ou exclusiva.

Figura 9 – Classificações dos Quadriláteros



Fonte: Adaptado de Micelli; Crespo (2012, p. 849)

Outra pesquisa qualitativa, de tipo bibliográfica, a respeito do estudo de quadriláteros foi feita no mestrado de Becerra (2015) que teve por objetivo descrever e analisar a organização matemática presente na quarta unidade de um livro didático do quinto ano do ensino fundamental distribuído pelo Ministério da Educação a todas as instituições públicas de ensino do Peru.

A pesquisadora usou a Teoria Antropológica do Didático (TAD) para lhe dar os elementos necessários para descrever a organização matemática (tipos de tarefas, tarefas, técnicas, tecnologia e teoria) presente no livro didático. Além disso, a autora utilizou os sete critérios do grau de completude de uma Organização Matemática Local – OML.: OML1: integração dos tipos de tarefas e existência de tarefas relacionadas ao questionamento tecnológico. OML2: diferentes técnicas para cada tipo de tarefas e critérios para escolher entre elas. OML3: independência dos objetos ostensivos que servem para representar as técnicas. OML4: existência de tarefas e técnicas "inversas". OML5: interpretação da operação e resultado da aplicação das técnicas. OML6: existência de tarefas matemáticas "abertas". OML7: integração de elementos tecnológicos e incidência na prática.

Os resultados obtidos por Becerra (2015) mostram a presença de 9 tipos de tarefas, 23 tarefas, 6 técnicas, 14 elementos tecnológicos e uma teoria na quarta unidade do livro didático analisado. Com relação aos indicadores de completude observou que os indicadores de OML1 a OML6 são parcialmente atendidos e o indicador OML7 não é atendido, o que a conduziu a concluir que a organização matemática apresentada não é completa.

Por outro lado, Pereira e Santos (2019), em seu artigo, apresentam uma pesquisa qualitativa de caráter de análise documental, que objetivou investigar a organização matemática presente em um livro didático de matemática, do 6º ano do ensino fundamental, sobre paralelogramos e trapézios baseados na Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Os autores indicaram nove tipos de tarefas sendo a mais presente, determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável, que contém duas tarefas: determinar a medida do comprimento dos lados de um quadrilátero e determinar a medida do ângulo interno de um quadrilátero. As técnicas aplicadas centraram-se, essencialmente, na visualização e no uso de representações geométricas e o discurso tecnológico-teórico apoiado em tipos e propriedades de ângulos, em definições e propriedades de quadriláteros e em operações fundamentais com suporte na Geometria, em Grandezas e Medidas e na Aritmética.

A terceira categoria dos trabalhos de nossa revisão bibliográfica, estudo de livros didáticos, centrou-se no tipo de classificação dos quadriláteros notáveis (paralelogramo, trapézio e trapezoide) e indica que a classificação depende da maneira como são definidos os quadriláteros (inclusiva ou exclusiva). Além disso, as pesquisas que usaram como quadro teórico a TAD, reportam que as organizações matemáticas, propostas em alguns livros didáticos, são incompletas e que as técnicas aplicadas se centram essencialmente em aspetos visuais e no uso de representações de figuras geométricas.

A ***quarta categoria***, que contém ensaios teóricos é formada pelas pesquisas de Huerta (1996) e Gascón (2004).

Huerta (1996) apresenta, em seu artigo, uma resenha histórica dos quadriláteros no período do século XIX até finais do século XX revendo definições e tipos de quadriláteros desde as perspectivas de Euclides, Legendre, Pastor e Andam, além de mostrar como são apresentados os quadriláteros em livros didáticos de nível fundamental (primário na Espanha). O autor ressalta que somente os quadriláteros notáveis (paralelogramo, trapézio e trapezoide [13] são ensinados, e que sua classificação é feita baseada no paralelismo de seus lados. O estudo indica que essa organização tem sido permanente no período estudado, embora existam outras maneiras de organizar tal classificação, como por exemplo, a classificação hierárquica considerando a concavidade dos quadriláteros (côncavo e convexo) e não somente o paralelismo de seus lados.

Para o autor a tradição tem comandado o ensino de geometria e, portanto, o ensino de quadriláteros que é apresentado como um produto acabado do qual nada se pode dizer por que tudo já está dito. Mas, considera que essa tendência pode ser modificada se outras formas de organização do conhecimento forem almejadas.

Por outro lado, o artigo de Gascón (2004) apresenta um ensaio a respeito de classificação de quadriláteros que é trabalhado nas escolas como acabado e pronto como se não houvesse reflexões a fazer a seu respeito. O autor mostra o *porquê* e *para que* se ensina nas escolas a classificação de quadriláteros considerando diferentes critérios como as propriedades de suas diagonais, tipos de simetria e seus ângulos.

Baseado na escala de codeterminação[14] proposta na Teoria Antropológica do Didático explica que a classificação de quadriláteros se encontra no tema polígonos, mas se a simetria de figuras fosse considerada como critério para sua classificação, estaria no nível temático simetria e no setor de movimentos no plano. Desta forma, cada uma das classificações pode ser entendida como um estudo de quadriláteros que permitiriam recuperar a razão de ser do estudo de classificação no nível secundário. Acrescenta que se essa proposta pudesse ser realizada teria um impacto muito além do nível temático e provocaria profunda reestruturação de diferentes setores e em algumas áreas do currículo em matemática.

[13] No sistema educativo peruano, o trapezoide é considerado como o quadrilátero que não tem lados paralelos.

[14] Níveis de inferiores da escala de codeterminação (Disciplina ⇄Domínio ⇄ Setor ⇄ Tema ⇄ Assunto de estudo).

Na quarta categoria, os ensaios mostram que a tradição tem mandado no ensino de quadriláteros, mas apresentam como essa perspectiva pode ser modificada, considerando outras formas de organização do conhecimento.

Ante o exposto podemos inferir que os trabalhos que tratam da formação de professores evidenciam que eles não têm um domínio conceitual de quadriláteros suficiente para proporcionar a aprendizagem de seus alunos, um ponto é o foco que dão à apreensão perceptiva que também é notada nos resultados dos alunos quando priorizam os aspectos visuais das figuras. Os alunos aprendem de acordo com o que os professores ensinam e, como sabemos estes têm no livro didático um apoio à sua prática, no entanto, vimos que os livros didáticos apresentam organizações matemáticas incompletas e focam nos aspectos visuais das figuras. Entendemos que há uma relação direta entre livros didáticos, formação de professores e aprendizagem dos alunos que podem ser justificadas pelo modo como os quadriláteros são apresentados no ensino como questionam Huerta e Gascón. Huerta mostra que durante dois séculos o ensino foca apenas nos quadriláteros notáveis e os classifica apenas pelo paralelismo de seus lados, por outro lado Gascón apresenta outras formas de classificação, além de outra forma de organização desse saber para o ensino.

Podemos deduzir que tais resultados podem ser consequência do paradigma de visita as obras, pois o ensino de quadriláteros é apresentado como um produto acabado que não é questionado, nem por professores, nem por alunos, que provavelmente não percebem a razão de ser do ensino desse conteúdo escolar. Entendemos que uma formação continuada de professores baseada no paradigma de questionamento do mundo por meio de um PEP, que pode ser levado para a sala de aula, pode lhes propiciar um momento de reflexão a respeito do ensino de quadriláteros que recupere a razão de ser de seu ensino.

Assim, baseada no apresentado até aqui apresentamos na sequência a justificativa de nossa investigação.

2.3 Justificativa

Vimos em nossa revisão que nem sempre os professores estão preparados para ensinar, especificamente, quadriláteros, mas há pesquisas, como as de Navarro

(2002) e Vaillant (2013) que mostram a existência de lacunas na formação inicial de professores na América Latina, evidenciando falta de conexão entre teoria e prática, pouca atualização para o desenvolvimento de competência digitais, escassa articulação com reformas curriculares, insuficiência na formação disciplinar, além de uma abordagem altamente fragmentada do que é ensinado e aprendido nas instituições de formação de professores.

No Peru, a formação inicial de professores para o nível secundário, geralmente, é organizada em programas regulares oferecidos por universidades e Institutos de Ensino Superior Pedagógico (ISP) que, de acordo com a instituição, pode lhes dar a habilitação para ensinar matemática; matemática e física ou matemática e informática. No entanto, nas salas de aula podemos encontrar professores de matemática formados em engenharia, economia ou matemática pura.

Os currículos dos ISP e das faculdades de educação das universidades são diferentes, porque as universidades têm autonomia para elaborar os currículos de seus cursos, enquanto os ISP, desde 2010, devem seguir um currículo único elaborado pelo Ministério da Educação do Peru, desde 2010. Atualmente está em vigor o Desenho Nacional de Currículo Básico de Formação Inicial de Professores - Programa de Estudos Educação Secundária, especialidade Matemática aprovado em 2020, mas houve diminuição dos cursos oferecidos tanto para Matemática, quanto para Didática da Matemática. No currículo de 2010 foi observado que estava desatualizado das necessidades atuais dos processos atuais de ensino e de aprendizagem e não se conectava com as reformas curriculares realizadas para a educação básica regular no Peru.

Por outro lado, os resultados da Avaliação Nacional dos graduados dos Institutos de Ensino Superior Pedagógico, realizada em 2014, indicam que apenas 8,06% dos formados alcançam um nível satisfatório de alfabetização matemática (PERU, 2015d) e na avaliação dos professores, que exercem a carreira docente pública, realizada em 2015, de um total de 19 239 professores avaliados 47,7% não atingem o nível mínimo de desempenho docente. Da mesma forma, no teste único nacional de Concurso de Nomeação de Professores (PERU, 2018), apenas 15,4% dos professores conseguiram superar as notas mínimas em cada uma das três avaliações: compreensão de leitura, raciocínio lógico e conhecimentos curriculares e pedagógicos da especialidade.

Os resultados da Avaliação Nacional de estudantes do ano 2004, realizada pelo departamento de Medição da Qualidade das Aprendizagens (UMC) [15] do Ministério da Educação do Peru, mostraram que apenas o 2,9% dos estudantes que estavam finalizando o quinto ano do nível secundário (15 a 16 anos), último ano da Educação Básica Regular do sistema educativo peruano, estavam no nível esperado no componente Geometria e Medição, o que significa que mais de 97% dos estudantes peruanos estavam entre os níveis inferiores e básicos. Um dos motivos de tais resultados por ser a prioridade dada ao cálculo, em detrimento do desenvolvimento de capacidades fundamentais, pois:

> a maioria dos professores escolhe trabalhar associando matemática com a capacidade de calcular. No ensino básico, o fundamental é o domínio dos cálculos aritméticos e, no segundo, o cálculo algébrico, geométrico e trigonométrico. Este retorno ao básico prevalece até hoje na prática de ensino, fato que pode ser verificado pela existência de estudos que indicam que quase 85% dos exercícios resolvidos pelos estudantes em seus cadernos de trabalho na sala de aula se concentram na aplicação de algoritmos (PERU, 2005, p.18).

No ano de 2015, o Ministério da Educação do Peru realizou a Avaliação Nacional de Estudantes (ECE)[16] em 490 637 estudantes do 2º ano do nível secundário oficialmente matriculados no sistema educacional peruano e os resultados indicam que houve uma pequena melhora da aprendizagem dos estudantes. Em 2016, última aplicação de uma ECE, mostra que apenas 11,5% dos estudantes desse nível estavam no nível satisfatório. Da mesma forma, internacionalmente, estudantes peruanos de 15 anos obtiveram uma pontuação média de 399,8 em competência matemática, bem abaixo da média da OCDE que foi de 489,3 (PERU, 2020).

Essas evidências, além das mostradas em nossa revisão de literatura como as de Dalcín e Molfino (2012), Fernández e Díaz (2012), Escudero e Carrillo (2014), Sánchez-Matamoros, Fernández e Valls (2015), Ferreira (2016), Vilaça (2018), Maioli (2002), Almeida (2015) e Goméz (2015) que mostram lacunas no domínio conceitual de professores, com relação à caracterização e classificação de quadriláteros, nos

[15] Em espanhol, Oficina de la Medición de la Calidad de los aprendizajes (UMC).

[16] Em espanhol, Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) é uma avaliação estandardizada que realiza o Ministério da Educação do Peru, a través do departamento da Medição da Qualidade das Aprendizagens (UMC), para saber o que e quanto estão aprendendo os estudantes das escolas públicas e privadas do Peru.

conduzem a buscar contribuir com a formação sua formação continuada para o ensino desse conteúdo.

Entendemos que nossa pesquisa está justificada pelo já exposto e, no que segue, apresentamos a delimitação do problema e seus objetivos.

2.4 Delimitação do problema

Com base nos estudos já realizados, a respeito do ensino e da aprendizagem de quadriláteros, delimitamos nossa pesquisa à Teoria Antropológica do Didático (TAD) para propor um Percurso de Estudo e Pesquisa a distância para uma formação continuada de professores de matemática (PEP-FP) para o ensino de quadriláteros no nível secundário do sistema educativo peruano, no sentido de propiciar ferramentas aos docentes para o ensino desse conteúdo, que conduzam à aprendizagem nos apoiando no paradigma de questionamento do mundo. Assim delimitamos nosso problema para buscar respostas à seguinte questão: quais estratégias são elaboradas por um grupo de professores do ensino secundário a partir da elaboração de um PEP a distância de modo que possam questionar, desenhar e experimentar processos de ensino para os quadriláteros?

Para responder à pergunta da pesquisa temos como **objetivo geral**: elaborar, implementar e analisar um percurso de estudo e pesquisa a distância para formação continuada de professores do nível secundário para o ensino de quadriláteros no Peru.

Como **objetivos específicos** temos:

- Construir um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de quadriláteros na Educação Básica Regular no Peru.
- Realizar um estudo econômico e ecológico para identificar e descrever o Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino de quadriláteros na Educação Básica Regular no Peru.
- Construir e aplicar um percurso de estudo e pesquisa a distância para o ensino dos quadriláteros com professores do nível secundário.

2.5 Metodologia de pesquisa: Engenharia Didática na TAD

Segundo Artigue (1988, 1995 e 2015) o termo Engenharia Didática (ED) foi cunhado à metodologia por comparar a forma de trabalho de um pesquisador em educação matemática com o trabalho de um engenheiro que concebe, planeja e executa um projeto com conhecimento científico, que no caso do pesquisador o projeto é de ensino. Para a autora o professor concebe, executa, observa e analisa sequências de ensino para alcançar a aprendizagem de um conteúdo matemático em um grupo específico de estudantes.

Artigue (1995) afirma que a Engenharia Didática é um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino que se caracteriza por sua validação interna, isto é, a validação ou não dos pressupostos assumidos no estudo se dá no confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori*. Em 2015 a autora insere nas fases da metodologia alguns pressupostos da Teoria Antropológica do Didático em suas fases, na primeira fase, **análise preliminar**, foca nas análises epistemológica, institucional e didática e explica que:

> ***Uma análise epistemológica*** do conteúdo em jogo, incluindo frequentemente uma parte histórica. Essa análise ajuda os pesquisadores a fixar os objetivos precisos da ED e a identificar possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Também apoia a busca de situações matemáticas representativas do conhecimento visado, o que a teoria das situações didáticas chama de situações fundamentais. São situações problemáticas para as quais o conhecimento é necessário ou, em certo sentido, ideal. A análise epistemológica ajuda os pesquisadores a tomar a posição reflexiva e a distância necessárias em relação ao mundo educacional em que estão inseridas e a construir um ponto de referência.
> ***Uma análise institucional*** cujo objetivo é identificar as características do contexto em que a ED ocorre, as condições e restrições que enfrenta. Essas condições e restrições podem estar situadas em diferentes níveis do que é chamado de níveis de hierarquia de codeterminação (Chevallard, 2002) na Teoria Antropológica do Didático.
> ***Uma análise didática*** cujo objetivo é pesquisar o que as pesquisas têm a oferecer em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo em jogo e provavelmente orientará o desenho. (ARTIGUE, 2015, p. 472, tradução nossa)

Considera a segunda fase, **desenho e análise a *priori*** como fundamental porque é nela que o pesquisador, a partir da análise preliminares, deve fazer as escolhas didáticas para a elaboração de uma proposta de ensino. Artigue (2015), indica que, esta fase, deve ser compreendida como uma análise de controle do sentido, pois determina de que forma as escolhas realizadas permitem controlar os comportamentos dos sujeitos da pesquisa e o sentido desses comportamentos. É uma fase de análises descritiva e preditiva. Considerando um PEP aberto:

> na análise a priori os investigadores estão mais interessados em pesquisar o potencial didático da questão selecionada, tentando deixar claro como o seu estudo pode desenvolver e gerar novas e interessantes questões, motivar o estudo e a estruturação progressiva de importantes praxeologias, do que na

> optimização das trajetórias de aprendizagem dos estudantes. (ARTIGUE, 2015, p. 491, tradução nossa)

Na terceira fase, **experimentação,** predomina a relação entre o pesquisador e os sujeitos da pesquisa quando são aplicados os instrumentos projetados pelo pesquisador e são realizados registros de observação da experiência e a coleta de dados da pesquisa. No caso de um PEP aberto:

> Chevallard nega a possibilidade de uma análise a priori. Assim, ele introduz a ideia de *análise in vivo*, totalmente integrada ao trabalho de inquérito. Essa posição pode ser questionada ainda mais, pois as publicações de pesquisadores que trabalham sob essa perspectiva mostram que eles desenvolvem alguma forma de análise a priori para selecionar perguntas com um forte poder de geração sob as condições e restrições institucionais em jogo. (ARTIGUE, 2015, p. 491, tradução nossa).

Em outras palavras, podemos realizar uma análise a *priori* de um PEP em que o pesquisador deve focar no potencial didático da questão selecionada e das outras possíveis.

Para Artigue (2015) na quarta fase, **análise a *posteriori* e validação**, é realizada a análise dos dados coletados nos diferentes momentos da experiência, assim como o confronto entre esses dados com as análises a *priori*.

Para a autora a ED, como metodologia de pesquisa, precisa de alguma acomodação para lidar eficientemente com as questões de pesquisa que emergem e para considerar as drásticas mudanças no acesso à informação da era digital, assim, para a nossa pesquisa, que propõe um PEP-FP a distância, adaptamos cada fase da ED. Na fase de **análise preliminar e desenho do PEP**, fizemos o estudo das três dimensões didáticas do problema didático dos quadriláteros, isto é, a dimensão epistemológica que é materializada na construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), a dimensão econômica e a dimensão ecológica que permitiram a identificação do Modelo Epistemológico de Dominante (MED). Na fase de **desenho e análise *a priori***, desenhamos cada um dos módulos do PEP-FP a distância e no módulo M_1 apresentamos um mapa de questões e respostas[17] preliminares do PEP a ser vivido. Segundo Barquero e Bosch (2015), nesta fase também devemos considerar as funções didáticas: mesogênese (evolução dos *milieux* experimentais),

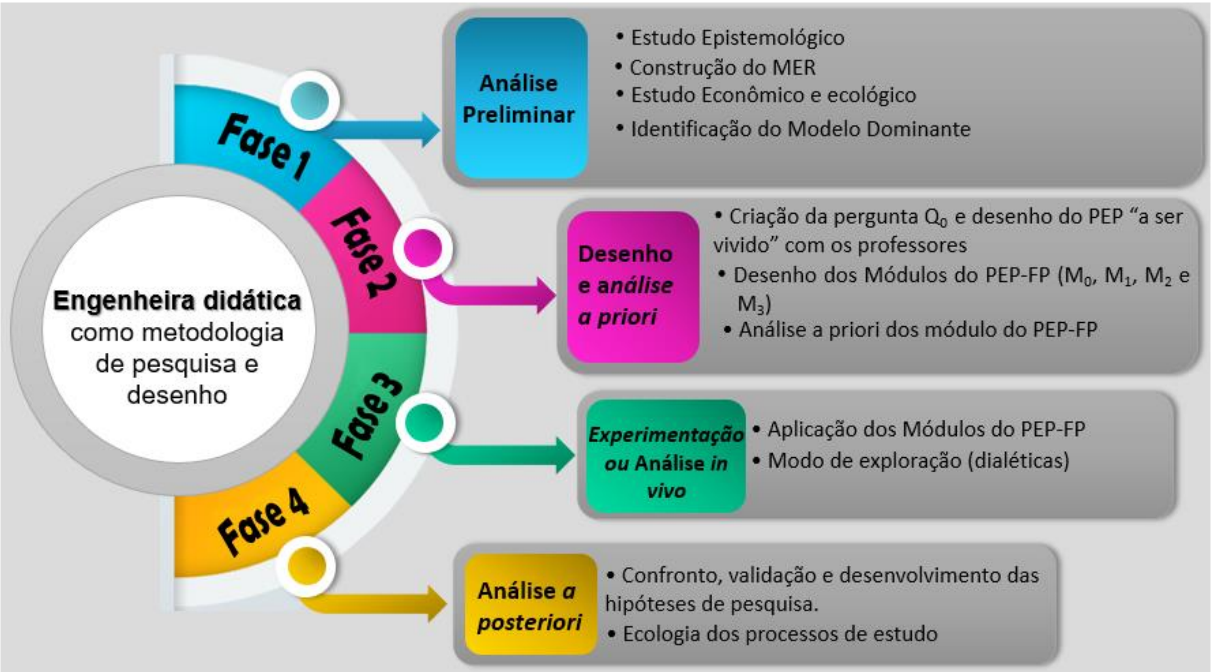
---

[17] De acordo com Winsløw, Matheron e Mercier (2013, p. 271, tradução nossa), o Mapa de questões e respostas é um esquema usado para enfatizar, principalmente, a dialética e a estrutura semântica de perguntas e respostas, às custas, por exemplo, da maneira como elas se desdobram no tempo.

cronogênese (evolução de novas questões e o conhecimento introduzido pela mídia) e topogênese (compartilhamento de responsabilidades entre pesquisador e professores), além das dialéticas do PEP propostas na TAD.

Na fase de **experimentação** aplicamos a distância os módulos do PEP-FP (M_0, M_1, M_2 e M_3), em uma formação continuada, com professores de matemática em que atuam no nível secundário no sistema educativo peruano previsto para serem realizados em oito encontros de duas a três horas cada um. Na fase da **análise *a posteriori***, fizemos o confronto entre os dados recolhidos e nossa análise a *priori* para validar PEP-FP a distância por meio das dialéticas e realizamos um estudo das condições e restrições dos módulos. Na Figura 10, resumimos as quatro fases da Engenharia Didática adaptadas para nossa pesquisa associadas aos procedimentos adotados.

Figura 10 – ED como metodologia de pesquisa e desenho do PEP



Fonte: Elaboração própria

A adaptação da aplicação de um PEP presencial, para um PEP desenvolvido a distância, por causa do momento da pandemia de Covid 19, nos fez buscar instrumentos de coleta de dados que, geralmente, não são utilizados em formações presenciais. Decidimos utilizar três ferramentas tecnológicas para esse fim: o *Zoom Meeting*, Documentos do *Google* e *Google Classroom.*

O *zoom meeting*, foi escolhido por ter uma versão gratuita e por ser uma ferramenta de videoconferência ou reunião online que permite distribuir os participantes em pequenos grupos, isto é, o administrador da reunião pode criar uma sala principal, com todos os participantes, e várias salas com grupos de participantes, recurso que utilizamos em todos os encontros. O Zoom meeting possibilita o compartilhamento de telas e gravações no computador ou na nuvem, recursos que favorece o trabalho colaborativo entre os professores e acesso aos vídeos pelo pesquisador.

A ferramenta Documentos do *Google* permite criar e editar textos *online* e, consequentemente, que os professores trabalhem colaborativamente na produção de um documento, isto é, que todos os integrantes de um grupo podem editá-lo ao mesmo tempo para apresentar suas perguntas e respostas. A associação dos recursos do *zoom meeting* com os recursos dos documentos do *Google* possibilitou aos professores compartilhar suas telas do computador, discutir e editar documentos para que os questionamentos fossem respondidos rapidamente, por procura na Internet e depois fossem compartilhados entre os grupos na sala principal.

O *Google Classroom* (ou Google Sala de Aula) foi escolhido por ser uma ferramenta grátis, específica para professores, que possibilita organizar o trabalho em tópicos para que os participantes disponibilizassem arquivos de imagens, de documentos (em *word* ou pdf), de link de páginas da Internet ou de arquivos editados nos documentos do *Google*. Foi utilizado para organizar os documentos produzidos em cada etapa do desenvolvimento do PEP-FP a distância.

Dando continuidade apresentamos no que segue os estudos realizados para cumprir a primeira fase de nossa metodologia de pesquisa.

3 ESTUDO DAS TRÊS DIMENSÕES DIDÁTICAS DE QUADRILÁTEROS

Neste capítulo apresentamos o estudo das dimensões epistemológica, econômica e ecológica propostas por Gascón (2011).

3.1 O problema Didático

Gascón (2011) constrói a noção de problemas didáticos com as ferramentas da TAD e os esquematiza por meio de um padrão heurístico da seguinte forma: $\{[(P_0 \oplus\ P_1) \hookrightarrow P_2\,] \hookrightarrow\ P_3\ \} \hookrightarrow\ P_\delta$, que não é necessariamente histórico, em que "P_1, P_2 e P_3 representam as dimensões fundamentais do problema, enquanto P_0 tem um papel especial porque [...] é uma *formulação inicial*, de certa forma pré-científica, de alguns problemas didáticos, que denominamos *problema docente*" (p. 206). O símbolo $\oplus$ significa que P_0 é um problema incompleto, o símbolo $\hookrightarrow$ não pode ser interpretado como inclusão, mas que cada dimensão P_i é "logicamente anterior à dimensão P_{i+1}" (p. 206) no desenvolvimento do problema já P_δ representa simplesmente o *problema didático* que contém as três dimensões fundamentais.

A primeira dimensão fundamental, P_1, é a epistemológica que apresenta uma descrição e uma interpretação, um modelo epistemológico, do âmbito matemático em questão, que é provisório, e contém as praxeologias intrainstitucional e interinstitucional que serão analisadas. Além disso, permite estudar o saber matemático antes de ser transformado em saber a ser ensinado e condiciona as outras dimensões, "deve ser descrito conforme a gênesis e o desenvolvimento (incluindo ampliações e completações progressivas) de determinadas praxeologias matemáticas" (p. 212).

P_2 representa a dimensão econômica-institucional e "abarca o sistema de regras e princípios (nomos) que regulam – em uma instituição determinada – a organização e o funcionamento das OM e as OD envolvidas no problema didático" (p. 213), em suma, "apresenta questões a respeito do resultado que, em um período histórico determinado, produziu a ação da transposição didática nas praxeologias matemáticas e didáticas" (p. 216).

Já P_3, a dimensão ecológica de um problema didático, inclui de certa forma as dimensões anteriores e "considera as restrições e condições impostas às praxeologias em *todos os níveis de codeterminação didática*, desde os mais genéricos, como a sociedade e a civilização, aos mais específicos, como o tema e a questão matemática concreta" (p. 217). Para Gascón (2011) "na nova *ecologia praxeológica* é necessário *priorizar y hierarquizar as restrições* que iremos considerar, já que nem todas têm a mesma importância nem a mesma relevância" (p. 219), pode ocorrer que uma seja tão decisiva eu anule as outras.

3.1 Estudo da Dimensão Epistemológica dos quadriláteros

A Teoria Antropológica do Didático tem como hipótese a relatividade institucional dos saberes e, consequentemente, a existência de uma posição epistemológica universal, privilegiada como um quadro de referência que guia uma pesquisa em educação matemática. Segundo Fonseca, Gascón e Lucas (2014) a dimensão epistemológica de um problema didático se materializa em um Modelo Epistemológico de Referência (MER), que pode ser descrito concretamente mediante uma rede de questões cujas respostas têm uma estrutura praxeológica. Para Barquero, Bosch e Gascón (2013) e Gascón (2014) o MER é um instrumento que permite ao pesquisador em didática da matemática desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja difusão intrainstitucional ou interinstitucional quer analisar, ou seja, é uma forma de interpretar e descrever os saberes que predominam nas instituições escolas, na noosfera e nas instituições produtoras do saber matemático. Barquero, Bosch e Gascón (2013) acrescentam que é essencial para estudar o saber matemático antes de ser transformado para ser ensinado, mas também o porquê de se encontrar no sistema de ensino alguns objetos e não outros.

Para Chevallard (1991, 1997) não existe um modelo epistemológico de referência privilegiado que possibilite observar, analisar e julgar o mundo dos saberes, mas essa ausência não torna menos essencial a utilização de modelos de referência relativos adequados para cada problema e cada situação. Para o estudo da dimensão epistemológica e a proposta de nosso Modelo Epistemológico de Referência – MER apoiamo-nos nas seguintes questões:

Q1: Por que é importante o estudo de quadriláteros?
Q2: O que é quadrilátero?
Q3: Quais são os tipos de quadriláteros?
Q4: Como os quadriláteros são classificados?

A seguir, respondemos a cada uma dessas questões para efetuar o estudo da dimensão epistemológica:

Q1: Por que é importante o estudo de quadriláteros?

Esta pergunta aprofunda as razões de ser dos quadriláteros em Geometria, antigas e atuais, porque segundo Chevallard (2009a, 2012 e 2013), com os Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) se espera recuperar o sentido e as razões de ser (pelo menos uma) das obras propostas a estudar. Assim, propomos uma breve resenha histórica a respeito de Geometria com o objetivo de identificar a evolução dos conceitos geométricos, de maneira geral, para então aprofundar em quadriláteros para identificar quais são suas razões de ser.

Para Eves (1992), a história da Geometria, como a de outras áreas em desenvolvimento e mudança, compõe-se de dois fios entrelaçados. Um que narra o desenvolvimento de seu conteúdo e outro que narra sua natureza mutável. O autor, indica a existência de uma Geometria subconsciente e uma Geometria Científica em que a primeira parece ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e medidas e acrescenta que:

> Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes. A noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar a terra à noção de figuras geométricas, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos, como as noções de vertical, paralela e perpendicular, teriam sido sugeridos pela construção de muros e moradias. Muitas observações de seu cotidiano devem ter levado ao homem primitivo à concepção de curvas, superfícies e sólidos. (EVES,1992, p. 1-2)

Já a Geometria científica[18], segundo o autor, aparece desde que a inteligência humana se tornou capaz de, a partir de certo número de observações relativas a formas, medidas e relações espaciais de objetos físicos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores como casos particulares. “Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado “Geometria Científica”, uma vez que a indução, ensaio e erro e procedimentos empíricos eram os instrumentos de descoberta”. (EVES,1992, p. 3).

[18] O autor considera como geometria científica à geometria empírica. (EVES, 1992, p. 7)

Para Eves (1992, p. 3) esse avanço a vantagem de se ordenarem problemas geométricos práticos em conjuntos que podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento geral.

> Nenhum dado nos permite estimar quantos séculos se passaram até que o homem fosse capaz de elevar a geometria ao status de ciência. Mas escritores que se ocuparam desta questão unanimemente concordam que o vale do rio Nilo, no Egito, foi o local onde a Geometria subconsciente transformou-se em científica. (EVES,1992, p. 3)

Nesse sentido, para Saito (2015):

> O uso de conhecimento geométrico para resolver problemas de ordem prática já era bem conhecido entre os egípcios, chineses e outras civilizações. Entretanto, a ideia de prova em geometria parece ser essencialmente grega. Até o período da decadência do mundo antigo, a característica mais marcante das matemáticas gregas foi geometria demonstrativa, cujo modelo de prova inspirou outras ciências. (SAITO,2015, p. 39)

Eves (1992) afirma que os gregos consideravam que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos ou demonstrativos quando formulam um modelo axiomático para a geometria, graças aos trabalhos de Euclides, Arquimedes e Apolônio, entre outros.

> Os elementos de Euclides são o mais antigo exemplo extensamente desenvolvido de uso do modelo que nos foi transmitido. Em anos mais recentes, o modelo axiomático material foi significativamente generalizado de modo a fornecer uma forma de discurso abstrato conhecido como “axiomática formal”. (EVES,1992, p. 10)

Para o autor a Geometria axiomática material, desenvolvida pelos gregos, estava ligada ao espaço físico, mas com o trabalho de Hilbert e outros avançaram para uma Geometria axiomática formal que desconsidera qualquer discurso de conteúdo concreto e passa a um desenvolvimento abstrato em que primeiro são considerados os postulados. Assim, por meio da história podemos identificar diferentes geometrias como apresentamos na Figura 11.

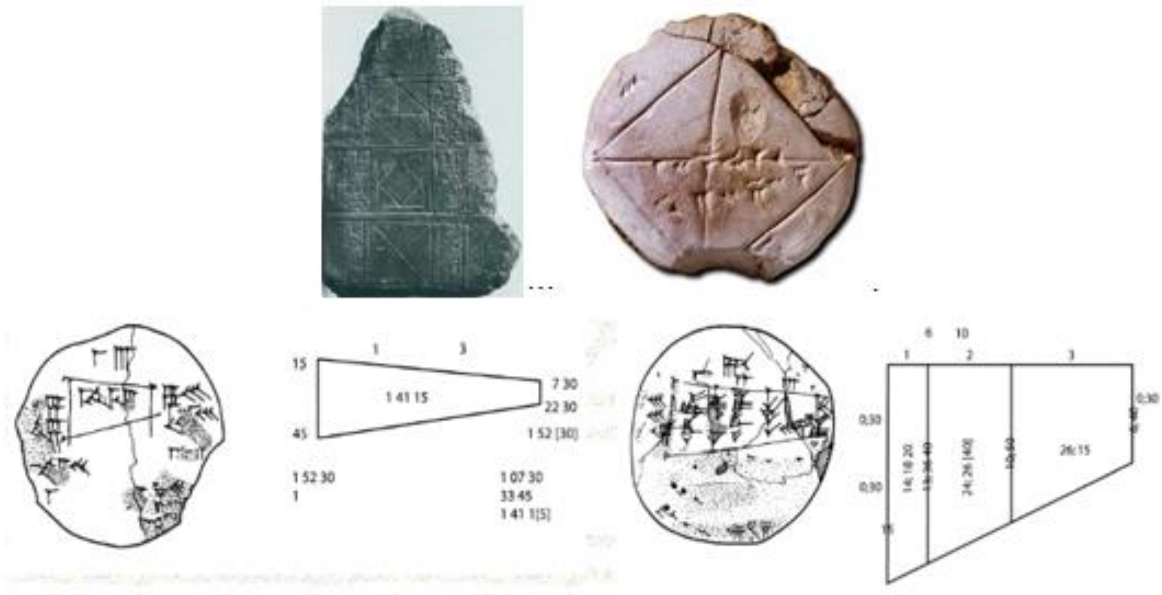
Figura 11 – Desenvolvimento da Geometria no longo da História

Fonte: Elaboração própria

A partir dos aspectos apresentados nesse desenvolvimento histórico da geometria nos perguntamos: como surge o estudo de quadriláteros? Quais foram os problemas que levaram ao estudo de quadriláteros? Como vimos nos inícios da geometria os conceitos geométricos eram subconscientes, pois eram construídos por meio de observações do espaço físico e, é nesse quadro se encontram os primeiros registros escritos a respeito de quadriláteros.

Para dar resposta a essas perguntas faremos um estudo de como surge os quadriláteros. E como já se indicou, nos inícios da Geometria os conceitos geométricos foram subconscientes, isto é, por meio das observações do entorno (Geometria subconsciente). Os primeiros registros escritos em que se observam quadriláteros aparecem em tabuletas babilônicas do período de 2000-1600 a.C. como mostra a Figura 12 em que se vê duas tabuletas e as representações atuais dos quadriláteros tratados.

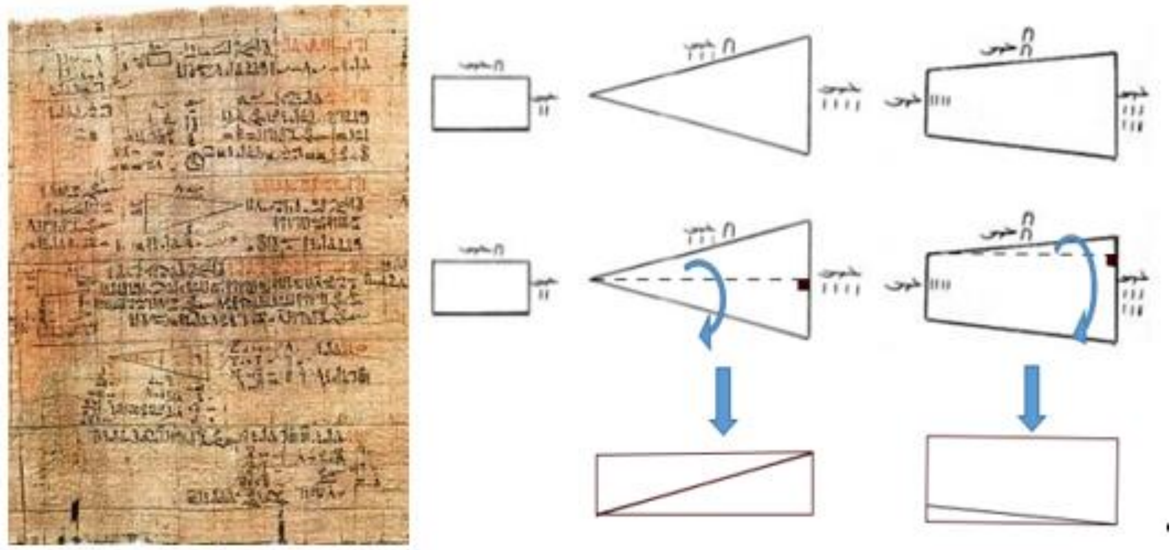
Figura 12 – Tabuletas de argila babilónicas



Fonte: http://www.beanlogic.es/sumerios/matematicas.php

Com a descoberta dos papiros matemáticos de Rhind e de Moscou foram ratificados os conhecimentos geométricos da época egípcia. No papiro de Moscou, o problema 6 apresenta o cálculo da medida da área de um retângulo, Boyer (2010) indica que o problema 49 do papiro de Rhind (Figura 13) trata do cálculo da medida da área de um retângulo com lados medindo 10 e 2; o problema 51, o cálculo da medida da área de um triângulo isósceles de altura 13 e base medindo 4 pela multiplicação da metade da medida da base, pela medida da altura e, este método é justificado pela divisão do triângulo isósceles em dois triângulos retos para compor um retângulo. O problema 52 propõe o cálculo da medida da área de um trapézio isósceles de bases medindo 6 e 4 com distância entre elas de 20, que é resolvido pela semissoma das medidas das bases multiplicada por 20 e justificada pela decomposição do trapézio para formar um retângulo, como mostram as ilustrações atuais.

Figura 13 – Problemas 49, 51 e 52 do Papiro de Rhind

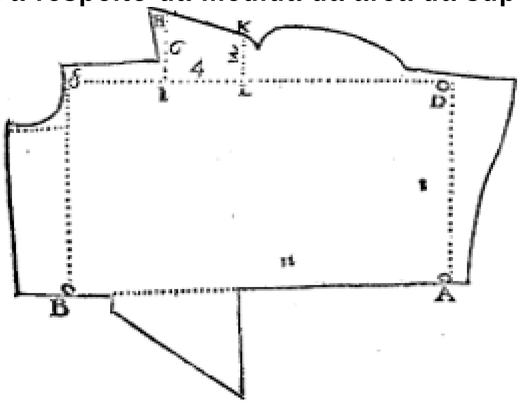


Fonte: Adaptado de Scriba e Schreiber (2015, p. 12)

O Império Romano, experiente em conquistar terras, necessitava de matemáticas práticas para calcular medidas de terras para redimensionar, distribuir ou calcular impostos, de edificações para construções de aquedutos etc. Para Saito (2015) a matemática prática se referia ao conhecimento matemático utilizados por contadores, arquitetos, agrimensores etc., ou seja, que permitisse contar, calcular e medir e não pode ser confundida com matemática aplicada que só surgiu no século XIX. Para Saito (2015, p. 11) a agrimensura “era a arte de medir terras com vista a mapear uma região” cuja atividade envolvia outros conhecimentos como a utilização de diferentes instrumentos como a *groma*, o *chorobates* e a *dioptra*. Em particular, o *gromático,* de acordo com o autor, era responsável por medir superfícies como um campo ou uma propriedade, geralmente, em formato retangular e seu trabalho consistia basicamente em traçar ruas nas cidades, distribuir lotes de terra a colonos ou mapear um terreno para construção de fortificações militares.

O uso da groma aparece no tratado de geometria prática de Perez de Moya (1573) para resolver dois problemas relacionados a medida de área de uma superfície que, segundo Covián (2013) e Romo-Vásquez (2017), referem-se ao tipo de tarefa determinar a medida da área da superfície de um terreno plano.

Figura 14 – Problema a respeito da medida da área da superfície de um terreno



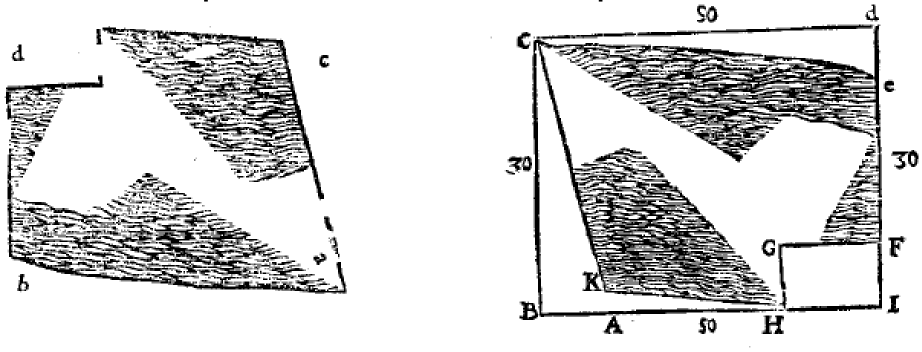
Fonte: Perez de Moya (1573, p. 185)

Para resolver o primeiro problema, apresentado na Figura 14, Perez de Moya (1573) apresenta a seguinte técnica:

> Coloque o instrumento (groma) no ponto A, onde se parece e desenhe uma linha ao ponto B e coloque um sinal. Do ponto B ao ponto C com o instrumento, levante uma linha reta que forme um ângulo reto com AB e coloque sinais em cada um deles. Então, fique no ponto C e faça uma linha para apontar D e de D um para apontar A para que no final tenha um paralelogramo. Isso de tal forma que os lados menores tenham 8 e os lados principais 12. Multiplique 8 por 12 e você terá a área da figura ABCD. Então, para obter o resto, faça-os quadrados, ou paralelogramos ou triângulos, a figura que você quer e siga suas regras. Para medir a figura IHKL, que por um lado tem 3 quantidades e no outro 4 e no outro 6 e no outro KH não se sabe que quantidade, mas a área pode ser encontrada. Adicione 3 com 6 e será 9, metade (que é 4 e meio) e multiplique por 4 e você terá 18. Combine com a área da figura do DCBA e desta forma você medirá os outros. (PEREZ DE MOYA, 1573, p. 185).

O outro problema, proposto por Perez de Moya (1573), trata do cálculo da medida da área de um terreno que tem lagos ou espaços com água, como mostra a área hachurada da Figura 15 A que, para Covián e Romo-Vázquez (2017), refere-se ao tipo de tarefa: medir os lados de uma superfície irregular para determinar a medida de sua área em terrenos irregulares que apresentam protuberâncias ou sinuosidades.

Figura 15 – Problema para o cálculo da área da superfície de um terreno irregular



(A) (B)

Fonte Perez de Moya (1573, p. 186)

A técnica apresentada por Perez de Moya (1573) em seu tratado ilustrado na Figura 15(B) é o seguinte:

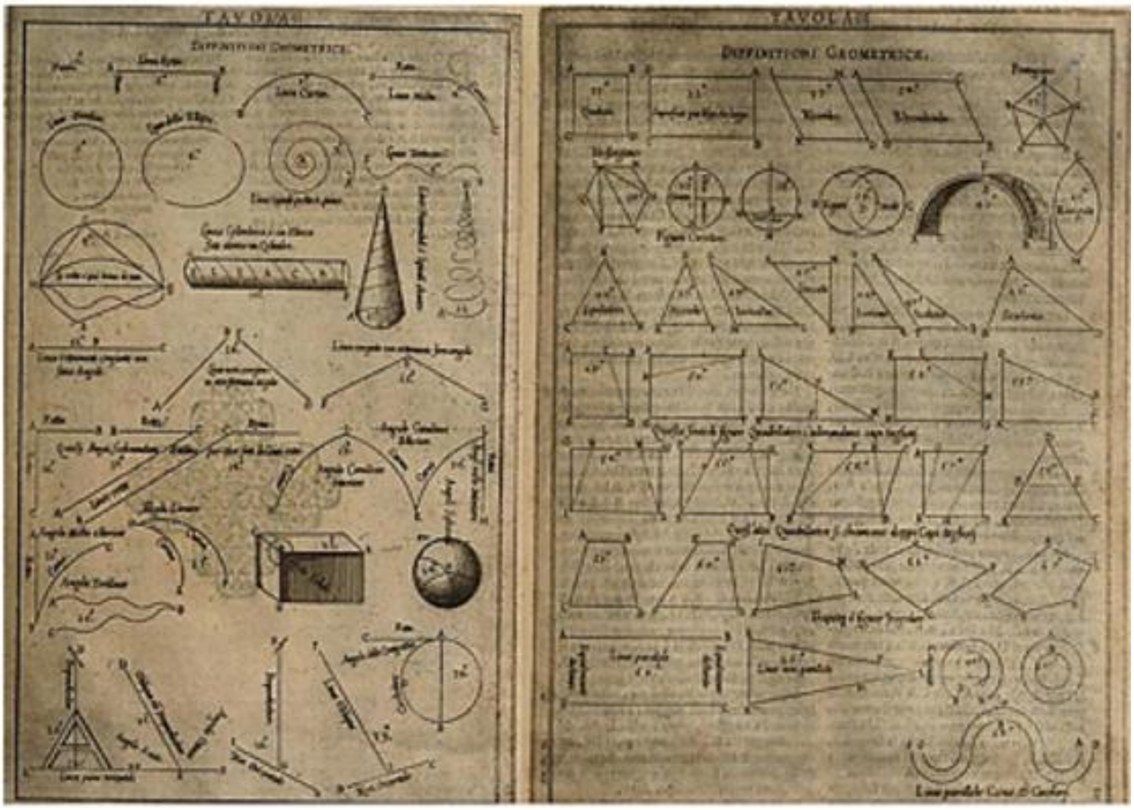
> Fazer um paralelogramo ou quadrado circunscrito ao terreno. Depois de medir este quadrado ou paralelogramo, você subtrairá o que você vê com o que mede. Para facilitar a explicação da técnica, um exemplo é dado: Como se fosse um pedaço de terra que contivesse uma lagoa de água de tal maneira que fosse denotada a figura *abcd* (figura 15A). Fazer um paralelogramo colocando o seu instrumento de forma que seja *dcbi* (figura 15B). Suponha que este paralelogramo que circunscreve ou abranja a terra tenha 50 tamanhos (seja varas, ou paus ou o que você quiser) e, nos outros 30, meça com sua régua usada e será 1500 e tantos tamanhos ou quantidades quadradas. Então, meça pela régua do triângulo a quantidade entre a linha *bc* e o fim da terra *akc* e o que você verá entre *kah* e entre *ihgf* e entre *edc*. O que você obtém subtraindo com o paralelogramo e o que resta será a área daquela terra *e*, dessa forma, qualquer outra forma será medida. (PEREZ DE MOYA, 1573, p. 186)

Como temos visto até o momento, o estudo dos quadriláteros surge para o cálculo da medida da área de uma superfície, como se observa nos problemas 49, 51 e 52 do papiro de Rhind, e no século XVI o mesmo se observa com a geometria prática utilizada, principalmente, na agrimensura, em que os tipos de tarefas que envolviam o estudo de quadriláteros na época eram, medir e delimitar um terreno, calcular a medida da área de uma superfície (regular ou irregular) de um terreno plano (técnica composição e decomposição de figuras) entre outros. Em geral, geometrizar um terreno com figuras que conheciam como triângulos, quadriláteros ou círculos (discurso tecnológico teórico). Nesse sentido, Covián (2013, p. 102-103) afirma que:

> A geometrização do espaço está determinada pela necessidade de trabalhar em terrenos planos, assim como a técnica, que faz que o valor que se obtivera com a soma de aproximações a figuras conhecida (devido à geometria que já era conhecida nesse momento, a Euclidiana). Isto também leva a determinar o tipo de figuras que melhor se aproxime e que posa descrever melhor o terreno com que se trabalha. Portanto, também se deduz que a forma de elaboração, semelhante ao método de exaustão, também é pela exigência de certa precisão.

Esta técnica também pode ser observada no tratado de Geometria Prática de Pomodoro (1603), como vemos na figura 16, em que o autor chama de “definições geométricas”, as que são usadas para a medida de terrenos, usa figuras geométricas como triângulos e quadriláteros, além de apresentar diferentes maneiras para descompor quadriláteros para obter medidas de área.

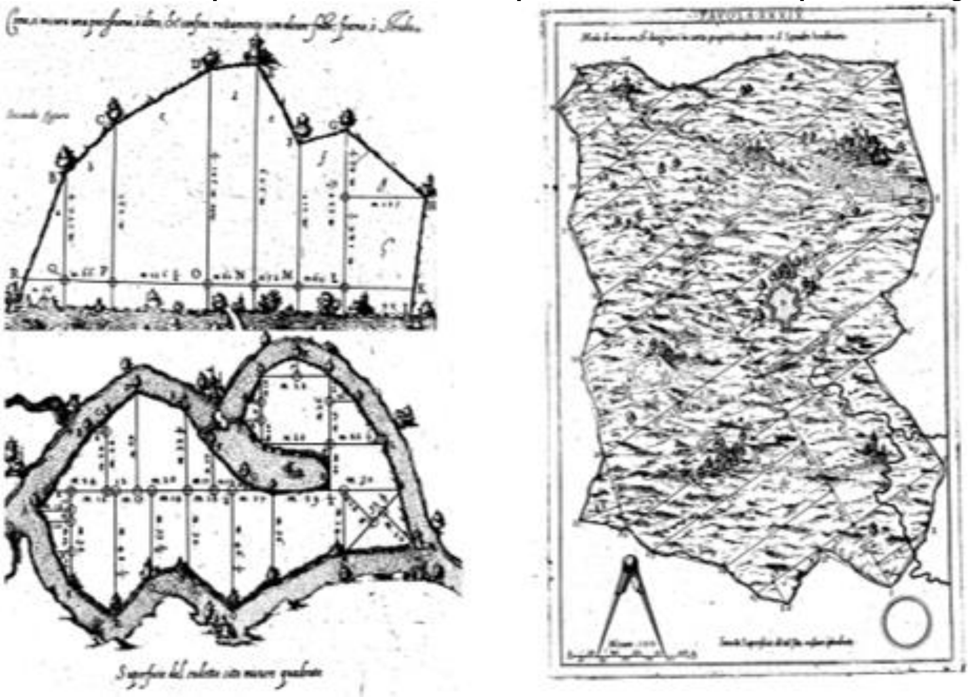
Figura 16 – Definições geométricas no tratado de Geometria Prática de Pomodoro



Fonte: Pomodoro (1603, pp. 6-7)

No mesmo tratado, o autor mostra como calcular a medida de áreas de superfícies de terrenos planos, a partir da geometrização do terreno por figuras planas conhecidas na época como quadriláteros e triângulos, como vemos na Figura 17.

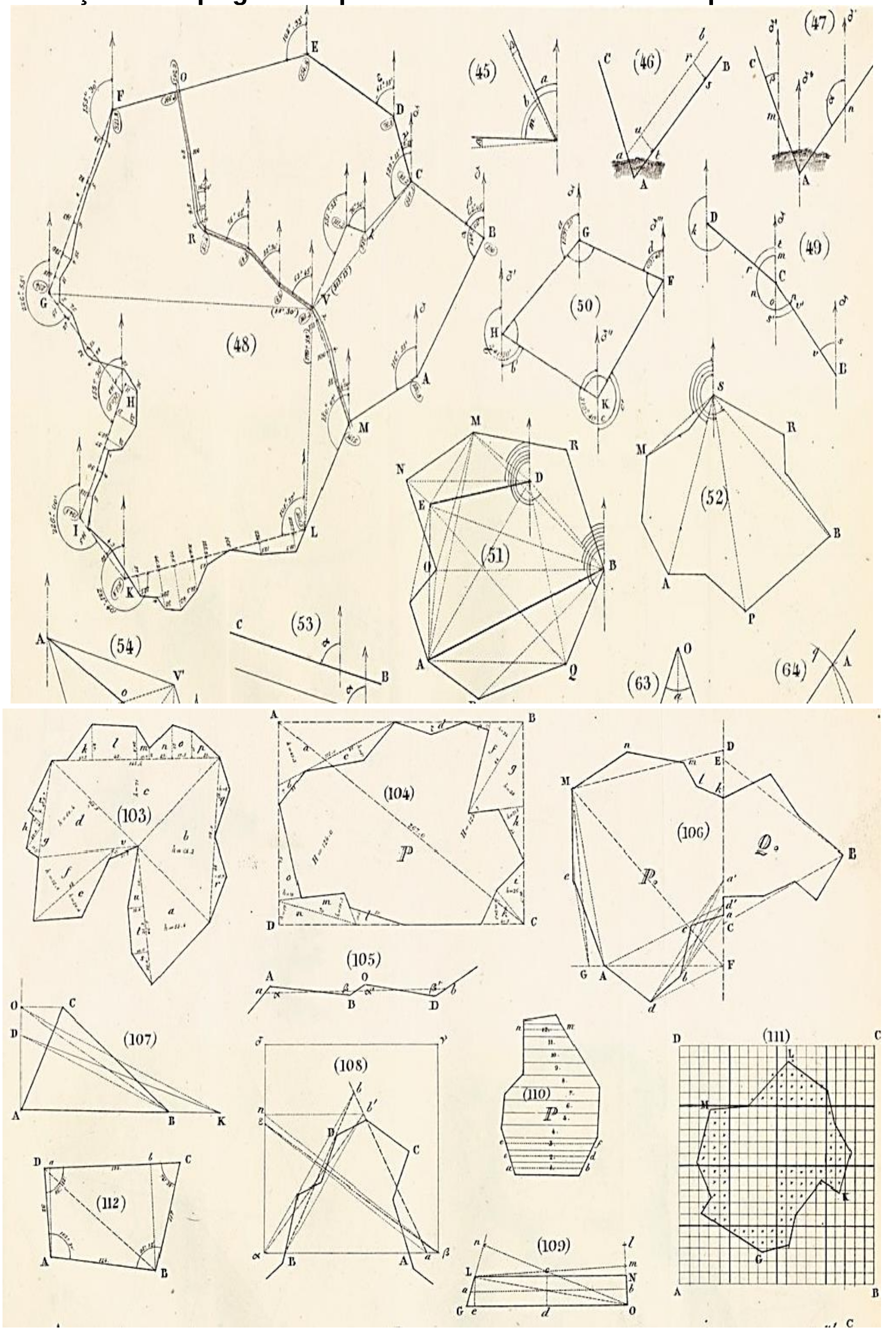
Figura 17 – Técnicas para medir área de superfície de terrenos planos irregulares



Fonte: Pomodoro (1603, p. 32, 39 e 45)

Camacho et al. (2011) indicam que a atual topografia era conhecida como geometria prática, nos tempos dos gregos e romanos, o que nos motivou a procurar tratados de topografia. Encontramos o *traité de topographie et de nivellement* (tratado de topografia e nivelamento), de Goulard-Henrionnet (1849), que apresenta algumas técnicas para decompor figuras de terrenos irregulares, como os apresentados na figura 18, usando triângulos, quadriláteros ou malha quadriculada como auxiliar para o cálculo da medida da área de tais terrenos.

Figura 18 – Traçados topográfico para medida da área da superfície de um terreno



Fonte: Goulard-Henrionnet (1849, pp. 3 e 7)

Podemos dizer que uma possível razão de ser do estudo de quadriláteros é a medição de perímetros e áreas de terrenos em que o paralelismo dos ladosque alguns deles apresentam como o quadrado, retângulo, losango, romboide e trapézio, foi usado historicamente neste tipo de tarefa, o que mostra a importância de seu ensino.

Q2: O que é um quadrilátero?

Para responder esta pergunta nos baseamos em definições de Euclides (2009), Legendre (1809), Pogorélov (1974) e Usiskin e Griffin (2008). Os dois primeiros por serem matemáticos, Euclides por ter sido o primeiro a sistematizar a geometria de seu tempo e Legendre por apresentar a geometria no início do século XIX, Pogorélov por apresentar a geometria elementar a ser ensinada no ensino superior e em escolas técnicas e Usiskin e Griffin por apresentarem um estudo da definição de quadriláteros em livros didáticos de 1833 a 2004.

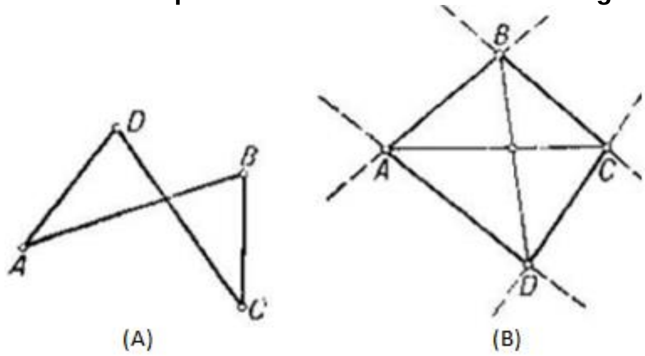
Euclides no primeiro livro de “Os elementos”, apresenta a definição 19 para quadriláteros: “figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras as contidas por mais do que quatro retas. (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Legendre (1809, p. 2) em seu livro “Elementos de Geometria” apresenta na definição V que “superfície é o que tem comprimento e largura sem grossura ou altura” e que “figura plana é um plano terminado de todas as partes por linhas. Se as linhas são retas, o espaço que elas fecham se chama figura retilínea ou polígono e as mesmas linhas todas formam o contorno ou o perímetro do polígono” (p. 2-3). Na definição XIV que: “de todos os polígonos, o mais simples é o de três lados que se chama triângulo, o de quatro lados se chama quadrilátero, o de cinco, pentágono, o de seis, hexágono, etc.” (p.3). Podemos observar que Legendre define o quadrilátero a partir da definição de polígono que, para o autor, é uma figura plana, ou seja pode ter sua área e seu perímetro medidos. Pogorélov (1974) apresenta a seguinte definição, quando trata de quadriláteros convexos e a ilustra como mostra a Figura 19(A):

> Recebe o nome de quadrilátero uma figura ABCD formada por quatro pontos A, B, C e D, que de três em três não estão na mesma reta, e quatro segmentos AB, BC, CD e AD que unem esses pontos. Os pontos A, B, C e D, são chamados vértices do quadrilátero e os segmentos AB, BC, CD e DA são seus lados. (POGORÉLOV, 1974, p. 75, tradução nossa)

de apresentar o teorema: “as diagonais do quadrilátero convexo se cortam” e demonstrá-lo apresenta a Figura 19(B). Vemos que para Pogorélov o quadrilátero é obtido pela união de segmentos, ou seja, só tem perímetro, mas não tem área.

Figura 19 – Um quadrilátero de acordo com Pogolérov



Fonte: POGOLÉROV (1974, p. 76)

Usiskin e Griffin (2008) fizeram um estudo em 101 livros de texto de geometria de 1833 até 2004 nos Estados Unidos e encontraram as seguintes definições para quadriláteros:

1) Polígono de quatro lados.
2) A união de quatro segmentos de linha que se juntam em quatro pontos coplanares, não sendo três deles colineares, cada segmento é interceptando exatamente com outros dois, em um ponto terminal.
3) Uma figura plana fechada de quatro lados.
4) Uma porção de um plano delimitado por quatro retas.
5) Uma figura fechada com quatro segmentos de linha reta.

Observa-se que a definição (1) coincide com a definição de Legendre em que se considera o quadrilátero como um polígono de quatro lados, ou seja, depende da definição de polígono assumida e este, por sua vez, depende da definição de ângulo. Se o ângulo é definido como o arco formado a partir da interseção de duas semirretas, segmentos ou retas, ou se é definido como a porção do plano delimitada por duas semirretas com origem em um ponto chamado vértice do ângulo. No segundo caso, o polígono tem superfície; a definição (2) coincide com a definição de Pogolérov e a definição (4) coincide com a definição dada por Euclides em que o quadrilátero é uma porção do plano delimitado por quatro retas, como a de Legendre. Os autores apresentam ainda as definições (3) e (5) nas quais o quadrilátero é considerado uma figura plana fechada, mas não está claro se são superfícies ou não.

Em nossa pesquisa o quadrilátero foi considerado um polígono de quatro lados que contém uma superfície.

Q3: Quais são os tipos de quadrilátero?

Para dar resposta a esta questão usamos as definições de Euclides (2009), Legendre (1809), Pastor e Adam (1959), De Villiers (1994) e Josefsson (2012 e 2014).

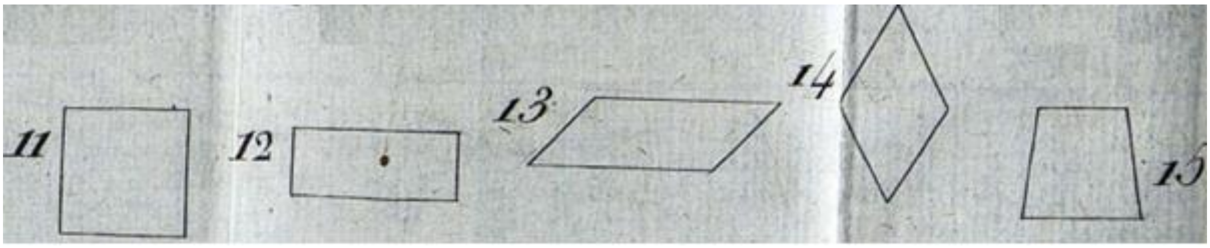
No livro I dos elementos, que data dos anos 300 a.C., Euclides apresenta a definição 22:

> E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango a que, por um lado, é equilátera, e por outro não é retangular, o romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios. (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Pode-se observar que Euclides baseia suas definições na igualdade das medidas dos lados e em ter ou não todos os ângulos retos, assim, o q*uadrado* é tanto equilátero como retangular; o oblongo (retângulo) não é equilátero, mas é retangular e o losango é equilátero, mas não é retangular. Para o romboide (paralelogramo) que não é equilátero, nem retangular o caracteriza por ter lados opostos e ângulos opostos de mesma medida e, todas as outras figuras que não se enquadram em qualquer dessas definições são os trapézios.

Em Legendre (1809, p. 3) na definição XVII apresenta:

> Entre os quadriláteros se distingue:
> O *quadrado* (fig.11.) que tem os lados iguais e os ângulos retos. [...]
> O *retângulo* (fig. 12) que tem os ângulos retos e não tem os lados iguais. [...]
> O *paralelogramo* ou *rombo* (fig. 13) que tem os lados opostos paralelos.
> O *losango* (fig. 14) que tem os lados iguais, mas os ângulos não são retos.
> Finalmente o *trapézio* (fig. 15) que só tem dois lados paralelos.

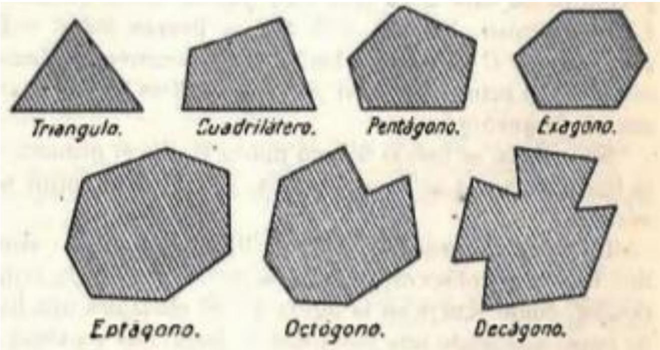


Fonte: Legendre (1809, p. 355)

As definições de Legendre, próximas das de Euclides, baseiam-se na igualdade dos lados e em possuir ou não ângulos retos, mas se diferencia porque apresenta uma definição para trapézio, explicitando que estes tem apenas dois lados paralelos.

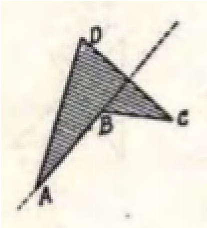
Os autores Pastor e Adam (1959, p. 32), em seu livro “Elementos de Geometria” em um primeiro momento classificam os polígonos da seguinte forma, acompanhado da figura ....:

> Os polígonos se classificam pelo número de vértices. O mais simples, que tem três vértices não situados em linha reta, se chama triângulo; o que quatro vértices se chama quadrilátero; o de cinco se chama pentágono; o de seis hexágono; o de sete heptágono; o de oito octógono; o de nome eneágono; o de dez decágono; o de quinze pentadecágono etc. (tradução nossa)



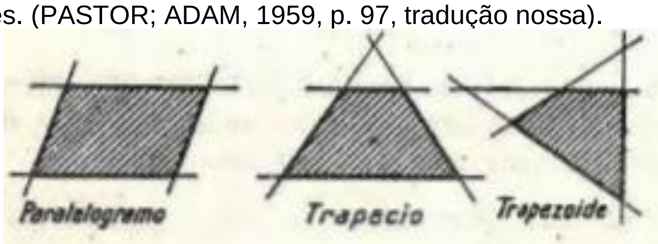
Na sequência definem polígono convexo:

> Um polígono se chama convexo quando a reta que pertence a cada lado não corta o polígono, quer dizer, o deixa todo a um mesmo lado dela. Os triângulos são sempre convexos. Pelo contrário um quadrilátero pode ser como o na figura ao lado. Tampouco o são o octógono e decágono da figura anterior. (PASTOR; ADAM,1959, p. 33, tradução nossa).



Depois de capítulos que tratam de transformações no plano e de lugares geométricos, apresentam a lição 17 para estudo dos quadriláteros em que apresentam a seguinte classificação:

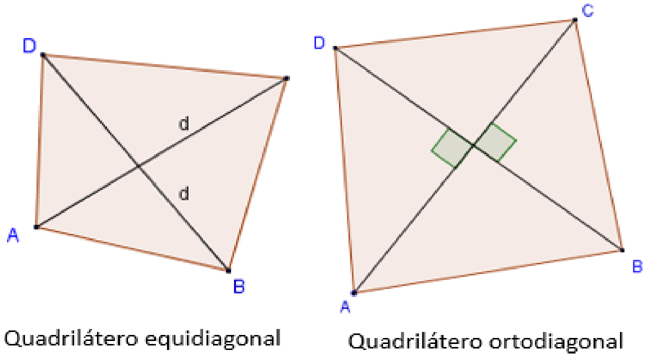
> Deixando de lado a distinção entre quadriláteros côncavos e convexos, já que nos ocupamos apenas dos últimos, os quadriláteros se classificam apenas pela posição relativa dos lados.
> Os quadriláteros que têm paralelos cada dois lados opostos se chamam paralelogramos.
> Os que tem apenas um par de lados opostos paralelos se chamam trapézios.
> Os que não tem paralelos qualquer para de lados opostos se chamam trapezoides. (PASTOR; ADAM, 1959, p. 97, tradução nossa).



Da mesma forma que Legendre, os autores especificam que os trapézios têm apenas dois lados opostos paralelos.

Josefsson (2012, 2014) apresenta uma caracterização dos quadriláteros a partir de suas diagonais definindo os equidiagonais como sendo os quadriláteros convexos que têm diagonais congruentes (Figura 20), como é o caso do trapézio isósceles, do retângulo e do quadrado e os quadriláteros ortodiagonais como aqueles que têm diagonais perpendiculares, que podemos dizer contém os trapezóides simétricos de Usiskin e Griffin.

Figura 20 – Quadriláteros equidiagonais e ortodiagonais



Fonte: Elaboração própria

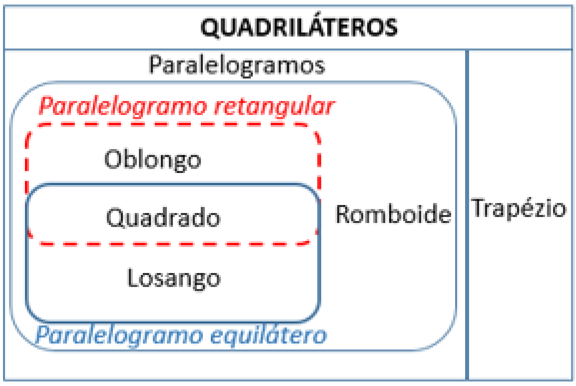
Como vimos, existe diferentes tipos de quadriláteros, em especial, os paralelogramos e os trapezoides, sendo os primeiros os mais destacados em todos os estudos, especialmente o quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio. O fundamental é assumir uma definição, para cada um deles, para então verificar e justificar suas propriedades.

Q4: Como os quadriláteros são classificados?

Existem várias formas de classificar os quadriláteros que dependem dos critérios utilizados para suas definições, por isso apresentamos as classificações propostas por Euclides (2009), Legendre (1809), De Villiers (1994), Huerta (1996), Gascón (2003), Usiskin e Griffin (2008) e Vásquez de Tapia (1993).

De acordo com a definição 22 do livro 1, para Euclides um quadrilátero pode ser paralelogramo ou trapézio, baseado no paralelismo de seus lados. Os paralelogramos podem ser retangular (oblongo) ou equilátero (losango) (Figura 21) sendo que os que possuem as duas características são chamados de quadrados e os que não respondem a essas caraterísticas são chamadas de romboide.

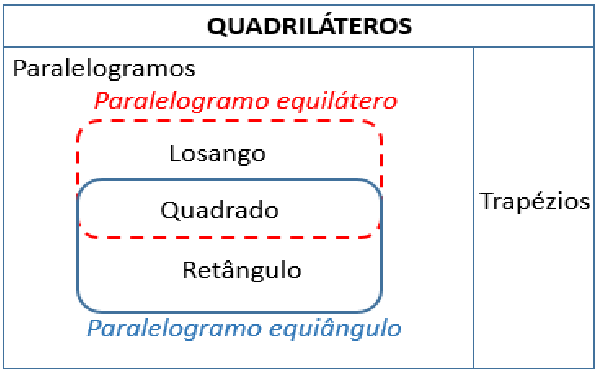
Figura 21 – Classificação dos quadriláteros de Euclides



Fonte: Adaptado de EUCLIDES (2009)

A classificação de Legendre baseia-se nas definições dos quadriláteros propostas em sua obra “Os elementos de Geometria” onde considera, como Euclides, que os quadriláteros podem ser trapézios e paralelogramos. Nesta classificação, (Figura 22), destacam-se duas características para os paralelogramos, o equilátero (losango) e o equiângulo (retângulo), o quadrilátero que cumpre com as duas é chamado de quadrado.

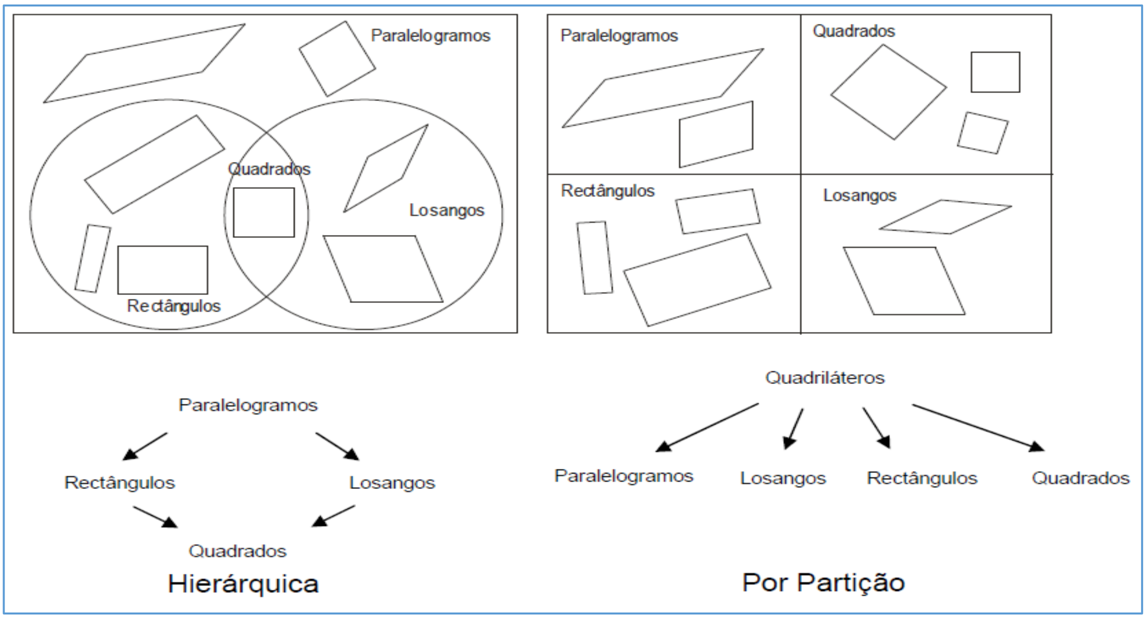
Figura 22 – Classificação dos quadriláteros de Legendre



Fonte: Adaptado de LEGENDRE (1809).

De Villiers (1994) classifica os quadriláteros de duas maneiras: a hierárquica e por partição, a primeira classifica um conjunto de conceitos de tal forma que os mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais, por outro lado, na classificação por partição os vários subconjuntos de conceitos são disjuntos, como mostra a Figura 23, em que podemos ver que não inclui o trapézio.

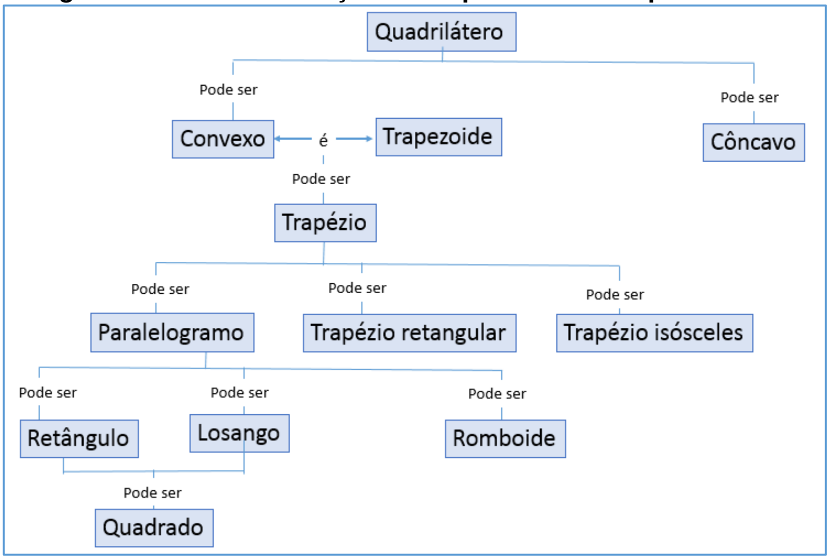
Figura 23 – Classificação dos quadriláteros de De Villiers



Fonte: De Villiers (1994, p.12)

Outra classificação é a proposta por Huerta (1996) que considera a concavidade, ou seja, os classifica a partir de serem côncavos ou convexos como pode-se observar na Figura 24, em que nada apresenta a respeito dos quadriláteros côncavos, como fez Pastor e Adam (1959) visto na questão 3.

Figura 24 – Classificação dos quadriláteros por Huerta



Fonte: Huerta (1996, p. 61)

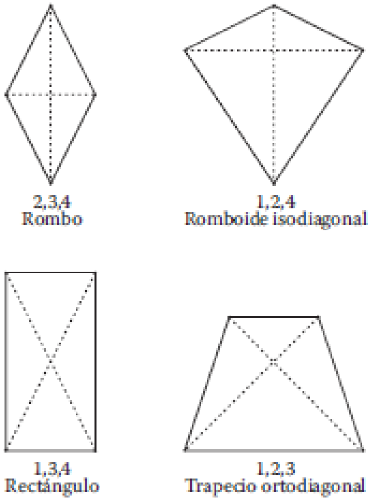
Finalmente, apresentamos as classificações, propostas por Gascón (2003), uma baseada nas diagonais do quadrilátero e outra em seus eixos de simetria. Para a primeira classificação o autor considera quatro propriedades:

> D1: As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
> D2: As diagonais são cortadas perpendicularmente (formam quatro ângulos iguais).

> D3: O ponto de intersecção das diagonais divide ambas na mesma proporção.
>
> D4: O ponto de intersecção divide uma das diagonais em duas partes iguais.

Para o autor, se eliminarmos uma das propriedades (D1, D2, D3 ou D4), que podem ser interpretadas como restrições, obtemos 4 tipos de formas quadrangulares, como mostra a Figura 25.

Figura 25 – Quatro tipos de formas quadrangulares



Fonte: Gascón (2003, p. 44)

Na Figura 25 pode-se observar que duas dessas formas, losangos (rombos) e retângulos são bem conhecidas, mas as outras duas não aparecem em livros didáticos de nível secundário (romboide isodiagonal e trapézio ortodiagonal). Para o autor se considerarmos D2, D3 e D4 obtemos rombos, D1, D2 e D4 os romboides isodiagonais, D1, D3 e D4 os retângulos e, finalmente, D1, D2 e D3 os trapézios ortodiagonais.

Na Figura 26 [19], o autor apresenta uma classificação dos quadriláteros considerando as que cumprem as quatro propriedades até as que cumprem apenas duas. Nessa figura observa-se que os quadrados são os quadriláteros que satisfazem as quatro propriedades e, por isso, se encontram no primeiro nível. No segundo nível, estão os quadriláteros que satisfazem três das propriedades, como o losango (propriedades 2, 3 e 4); o retângulo (1, 3 e 4); o Romboide isodiagonal[20] (1, 2 e 4) e,

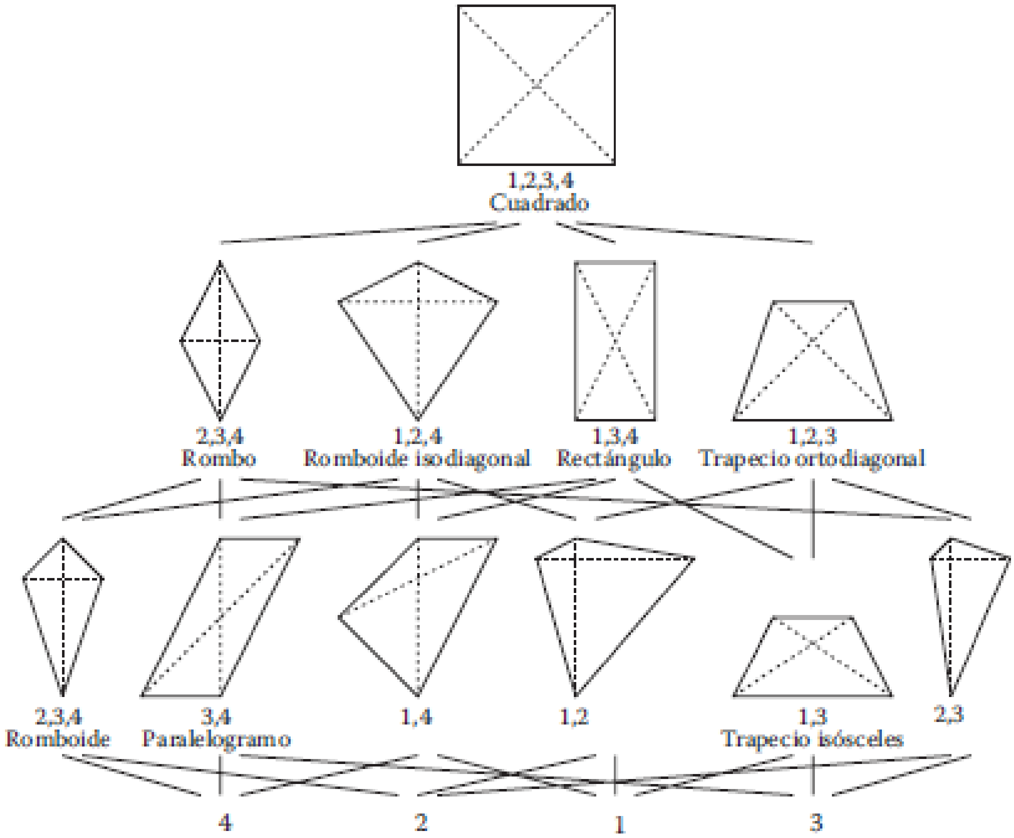
---

[19] Na figura 25, o número 1 representa a propriedade D1, o número 2 representa a propriedade 2, assim sucessivamente.

[20] “Para Rey Pastor, um romboide é um quadrilátero que tem um eixo de simetria que passa por dois dos seus vértices. Desde o ponto de vista das propriedades das diagonais poderíamos definir os romboides como aqueles quadriláteros cujas diagonais são cortadas perpendicularmente (D2) e, além disso, o ponto de intersecção das referidas diagonais divide um deles em dois partes iguais (D4) ”. (GASCÓN, 2003, p. 52)

finalmente, o trapézio ortodiagonal (1, 2 e 3). No terceiro nível, estão os quadriláteros que satisfazem duas propriedades como o romboide (com as propriedades 2 e 4); os trapézios isósceles (1 e 3) entre outros que não têm um nome específico.

Figura 26 – Classificação dos quadriláteros por suas diagonais

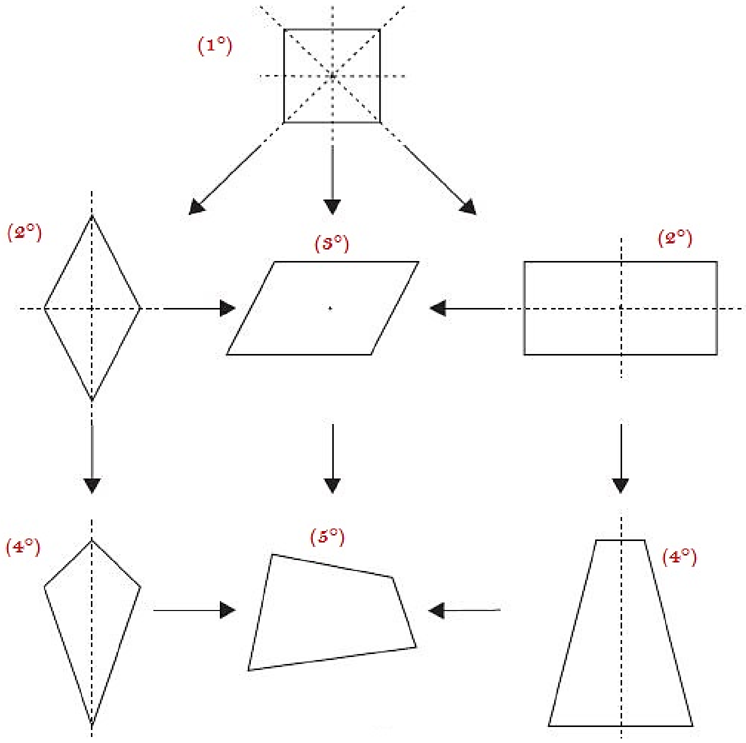


Fonte: Gascón (2003, p. 44)

Outra classificação, proposta por Gascón (2003), relacionada ao setor dos movimentos do plano, é baseada no tipo de simetria, como se observa na Figura 27, em que podemos notar sete classes de quadriláteros distribuídos em cinco categorias.

Na primeira categoria se encontra apenas a classe do quadrado que tem simetria diédrica ou composta de ordem 4, por ser invariante por quatro simetrias e quatro rotações; na segunda categoria aparecem os retângulos e os losangos, que possuem simetria composta de ordem 2, porque permanecem invariantes duas simetrias e duas rotações; na terceira categoria estão os paralelogramos que são os quadriláteros que possuem simetria rotacional de ordem 2, pois permanecem invariantes para duas rotações; na quarta categoria aparecem as classes dos trapézios isósceles e dos trapezoides simétricos, como sendo os quadriláteros que possuem simetria bilateral, ou seja, são invariantes por uma simetria axial e, finalmente, na quinta categoria, estão os quadriláteros que permanecem invariantes pela identidade, isto é, não tem simetria.

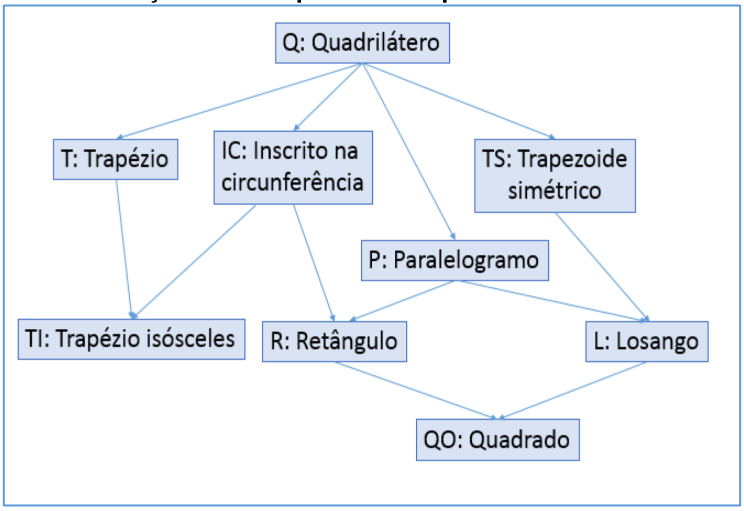
Figura 27 – Classificação dos quadriláteros por simetria



Fonte: Gascón (2003, p. 47)

Usiskin e Griffin (2008) apresentam uma classificação para os quadriláteros baseada na classificação hierárquica de De Villiers (1994) com oito tipos de quadriláteros que são chamados de especiais: o trapézio (T), o quadrilátero inscrito na circunferência (IC), trapezoide simétrico (TS), paralelogramo (P), losango (L), retângulo (R), trapézio isósceles (TI) e o quadrado (QO), como apresentado na Figura 28.

Figura 28 – Classificação hierárquica dos quadriláteros de Usiskin e Griffin

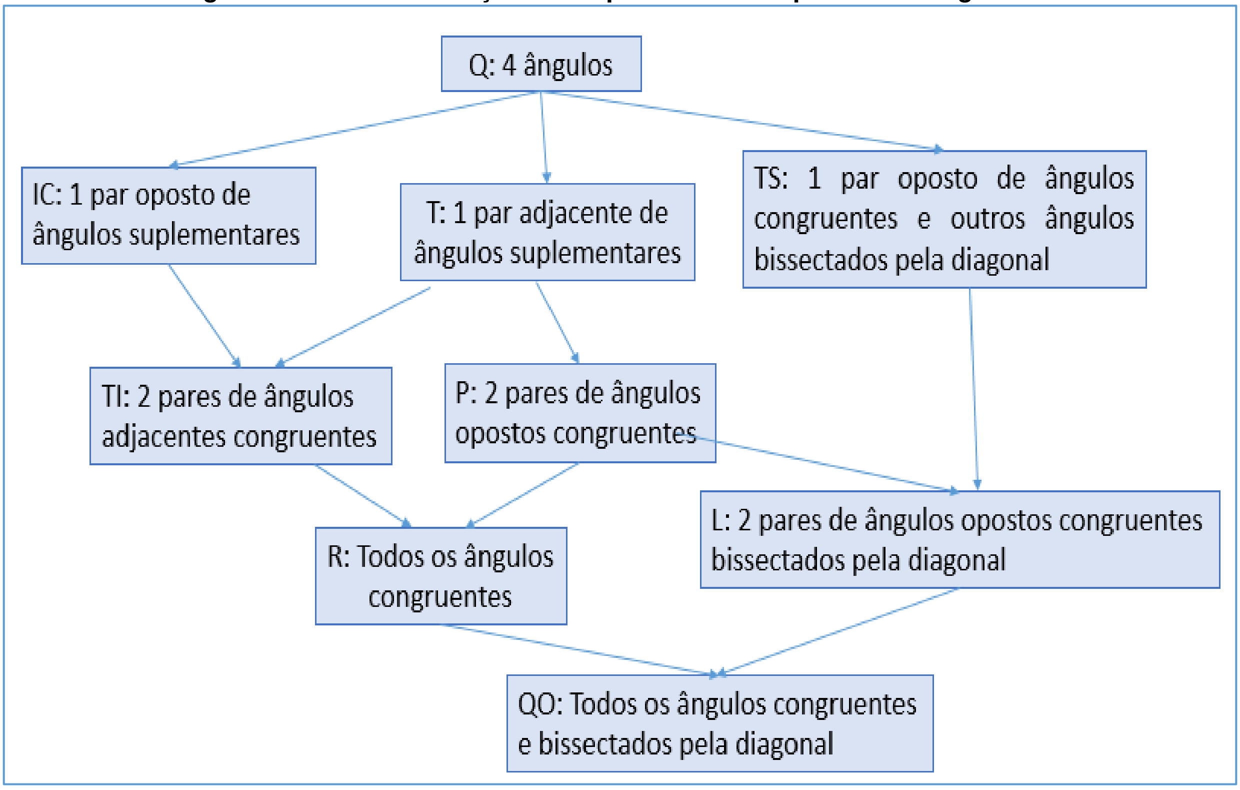


Fonte: Usiskin e Griffin (2008, p. 71)

Nessa figura é possível observar que o retângulo e o trapézio isósceles são quadriláteros inscritos na circunferência. Mas, há trapézios isósceles que são trapézios não inscritos em circunferência, da mesma forma que há retângulos que são considerados paralelogramos sem estarem inscritos na circunferência. Para os autores, o quadrado é um retângulo (por ter quatro ângulos retos) e um losango (por ter quatro lados de mesma medida).

De acordo com esta classificação Usiskin e Griffin (2008) apresentam hierarquicamente os quadriláteros considerando seus ângulos, seus lados, suas diagonais e simetria. Na Figura 29 os autores apresentam o primeiro tipo de classificação, considerando se os ângulos são adjacentes, opostos, suplementares, de mesma medida ou bissectados por suas diagonais.

Figura 29 – Classificação dos quadriláteros por seus ângulos

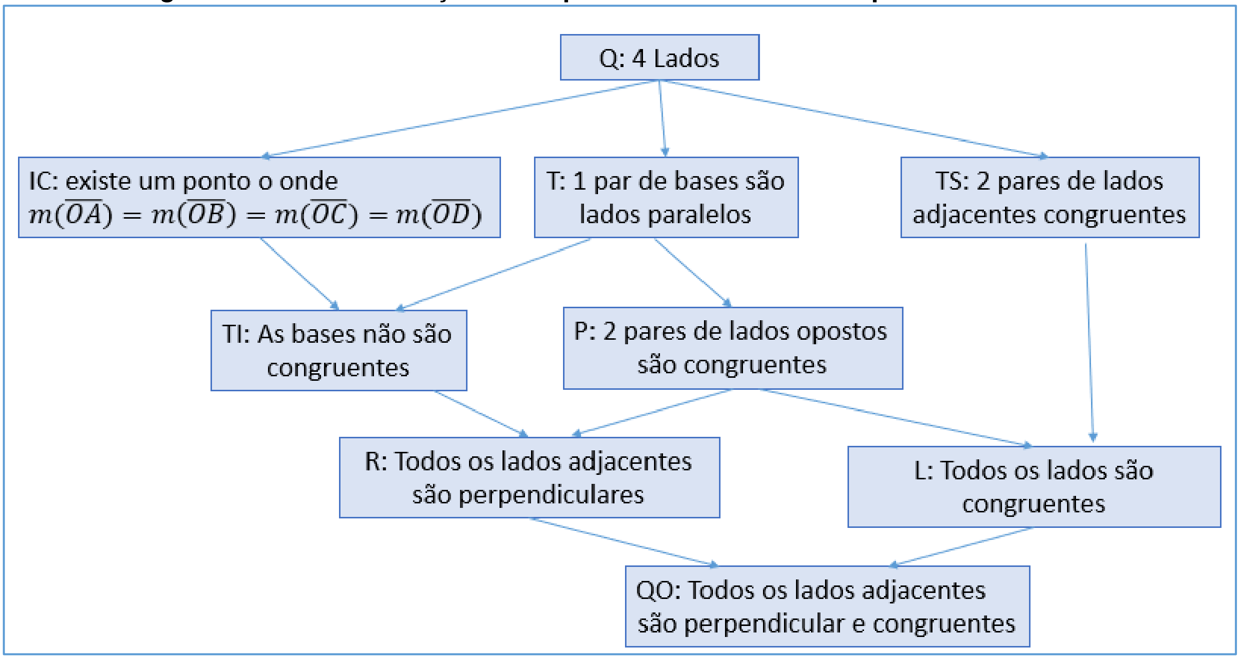


Fonte: Usiskin e Grifin (2008, p. 72)

Segundo os pesquisadores, no primeiro nível estão os quadriláteros (Q) que são definidos como sendo polígonos que têm quatro ângulos; no segundo nível estão os quadriláteros inscritos (IC) definidos como sendo quadriláteros que têm um par de ângulos opostos suplementares; os trapézios (T) como quadriláteros que têm um par de ângulos adjacentes suplementares e os trapezoides simétricos (TS) que têm um par de ângulos opostos congruentes e os outros ângulos são bissectados pela diagonal. No terceiro nível, estão os trapézios isósceles (TI) que têm pares de ângulos adjacentes congruentes e os paralelogramos (P) que têm pares de ângulos opostos congruentes; no quarto nível, os retângulos (R) que têm todos seus ângulos congruentes e os losangos (L) que têm dois pares de ângulos opostos congruentes bissectados pela diagonal, finalmente, no último nível, se encontram os quadrados (QO) que têm todos seus ângulos congruentes bissectados pela diagonal.

Usiskin e Griffin (2008) apresentam também uma classificação para os quadriláteros baseados em seus lados (Figura 30), considerando paralelismo, perpendicularidade e congruência. No primeiro nível estão os quadriláteros Q definidos como sendo polígonos que têm quatro lados; no segundo nível os quadriláteros inscritos (IC) caracterizados pela existência de um ponto O, cuja distância aos vértices do quadrilátero têm mesma medida; os trapézios (T) que têm os lados paralelos identificados como suas bases e os trapezoides simétricos (TS) que têm dois pares de lados adjacentes de mesma medida; no terceiro nível estão os trapézio isósceles (TI) cujas bases não são congruentes e os paralelogramos (P) que têm pares de lados opostos congruentes.

Figura 30 – Classificação dos quadriláteros definida por seus lados

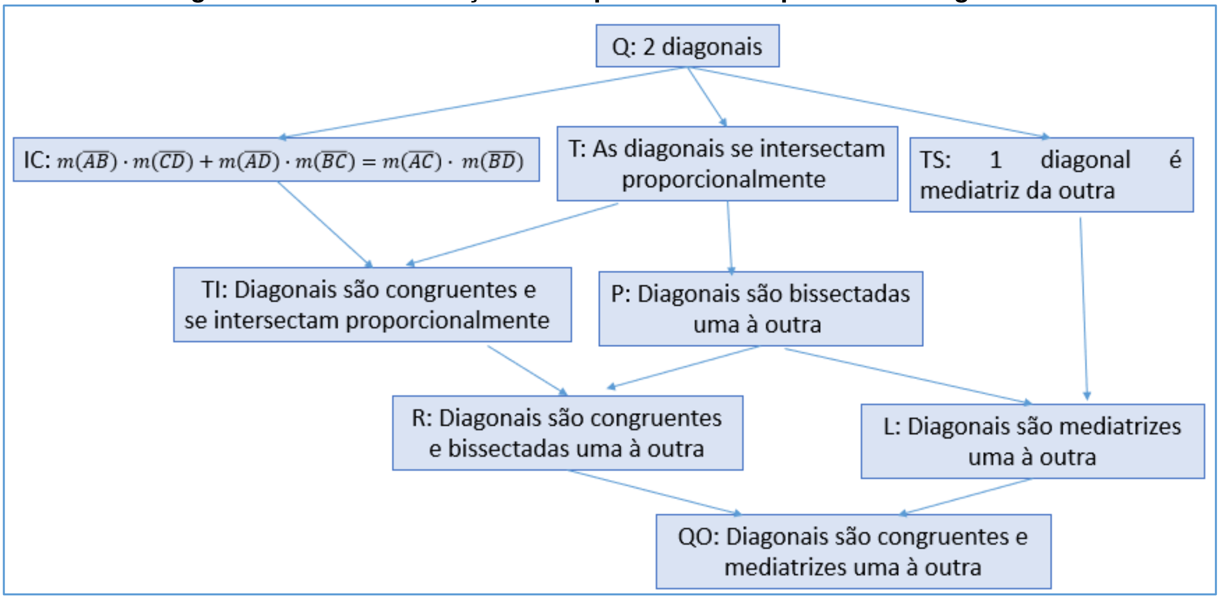


Fonte: Usiskin e Griffin (2008, p. 73)

No quarto nível estão os retângulos (R) que têm todos os lados adjacentes perpendiculares e os losangos (L) que tem todos os lados congruentes, finalmente, no quinto nível se encontram os quadrados (QO) que têm lados adjacentes perpendiculares e congruentes, reunindo as propriedades do retângulo e do losango.

Os autores propõem ainda uma classificação de quadriláteros considerando suas diagonais (Figura 31), em que no primeiro nível estão os quadriláteros (Q) definidos como sendo polígonos que têm duas diagonais. No segundo nível estão os quadriláteros inscritos (IC) definidos como aqueles em que o produto das medidas das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas de seus lados opostos; os trapézios (T) como sendo os quadriláteros cujas diagonais se intersectam proporcionalmente e os trapezoides simétricos (TS) como sendo os quadriláteros em que uma diagonal é mediatriz da outra.

Figura 31 – Classificação dos quadriláteros por suas diagonais



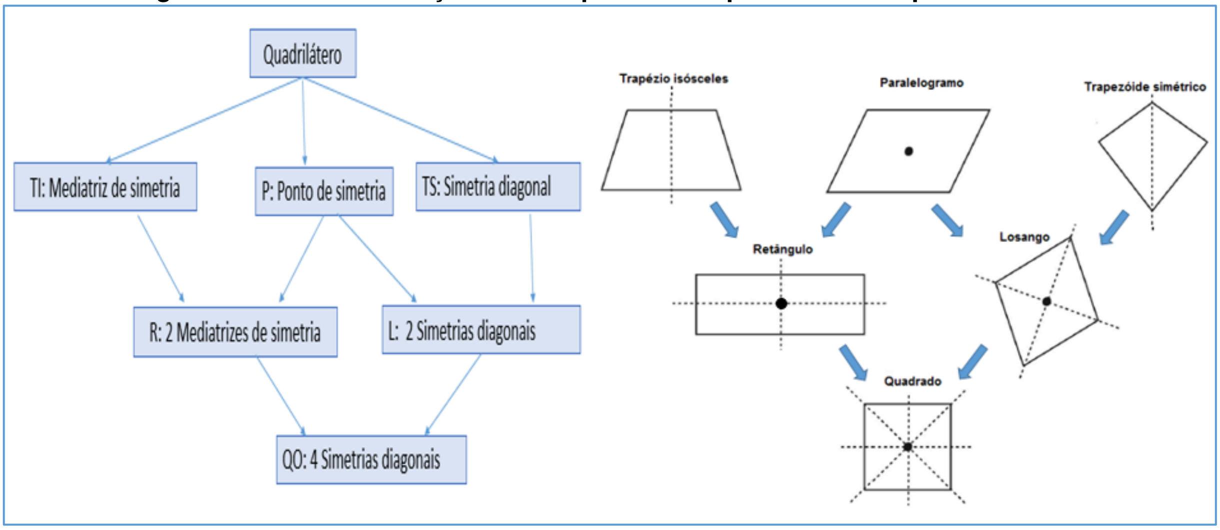
Fonte: Usiskin e Griffin (2008, p. 73)

No terceiro nível, os trapézios isósceles (TI) que têm diagonais congruentes que se intersectam proporcionalmente e os paralelogramos (P) que têm diagonais bissectadas. No quarto nível, os retângulos (R) cujas diagonais são congruentes e bissectadas uma à outra e os losangos (L) cujas diagonais são congruentes e mediatrizes uma da outra, finalmente, os quadrados (QO) que têm diagonais congruentes e são mediatrizes uma à outra.

Usiskin e Griffin (2008) classificam também os quadriláteros por tipo de simetria, (Figura 32) em que se observa, no primeiro nível os trapézios isósceles (TI) que têm como eixo de simetria a mediatriz dos lados paralelos; os paralelogramos (P) que que têm centro de simetria e os trapezoides simétricos (TS) que têm como eixo de simetria uma de suas diagonais.

No segundo nível, estão os quadriláteros que têm centro e eixo de simetria, como é o caso dos retângulos (R) que possuem centro de simetria e as mediatrizes dos lados opostos como eixos de simetria e os losangos (L) que se caracterizam por ter suas diagonais como eixos de simetria e sua intersecção como centro de simetria, finalmente, o quadrado, pois as mediatrizes dos lados opostos e suas diagonais são eixos de simetria e se intersectam em um ponto, o centro de simetria.

Figura 32 – Classificação hierárquica dos quadriláteros por simetria

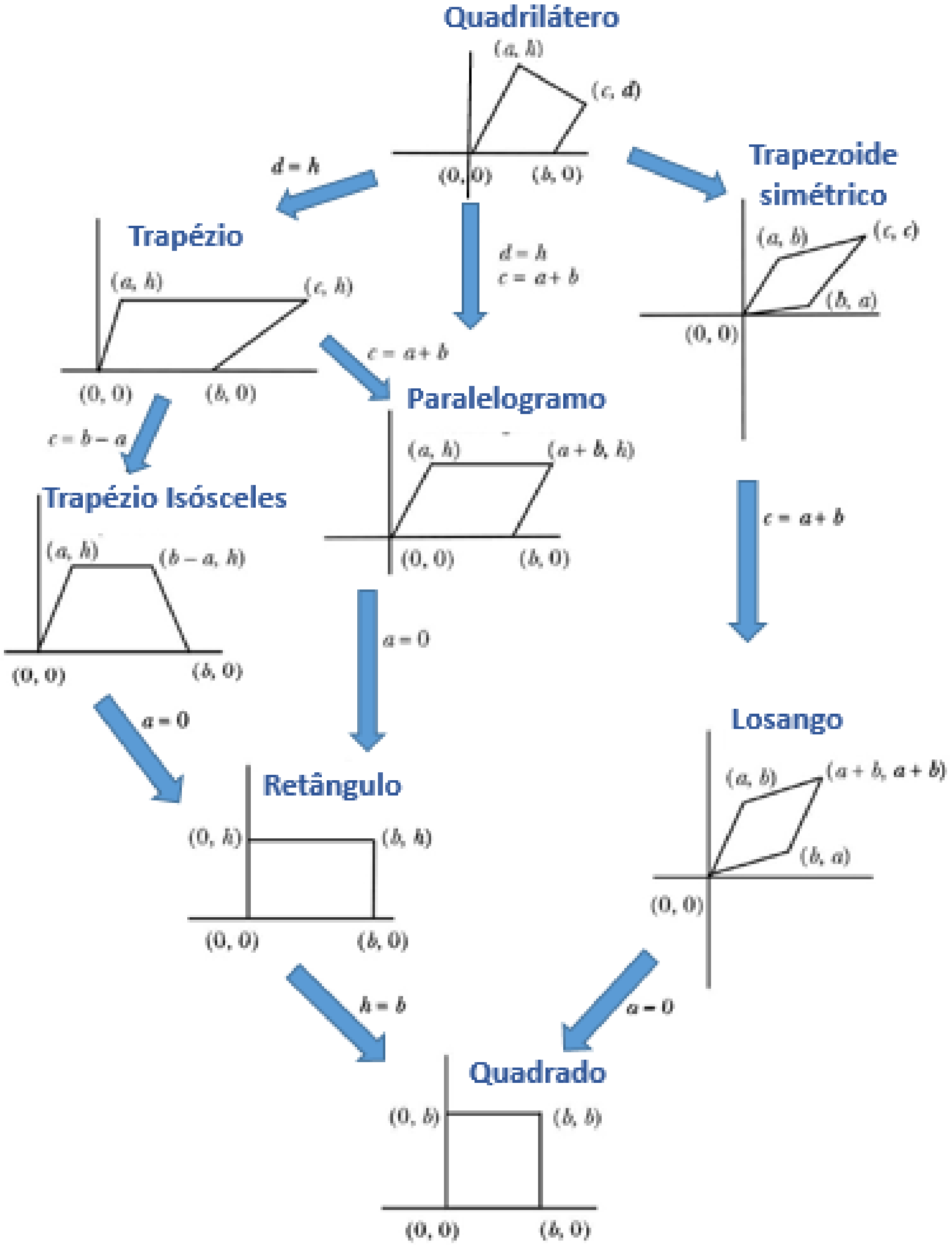


Fonte: Adaptado de Usiskin e Griffin (2008, p. 75)

Usiskin e Griffin (2008) apresentam ainda uma classificação hierárquica para os quadriláteros considerando sua posição no plano cartesiano e algumas restrições (representadas nas figuras por setas azuis) para produzir os quadriláteros em cada um dos níveis.

Na Figura 33 os pesquisadores usam um número mínimo de variáveis como: vértice na posição standard (0;0) ou em posições convenientes no primeiro quadrante do plano. O quadrilátero inicial cujos vértices têm coordenadas (0,0), (b,0), (c, d) e (a, h), está localizado no primeiro quadrante do plano cartesiano, considerando que um de seus vértices sempre estará na origem (0;0) e as seguintes restrições: $d = h$, $c = a + b$, $c = b - a$, $a = 0$ ou $h = b$ geram os outros quadriláteros.

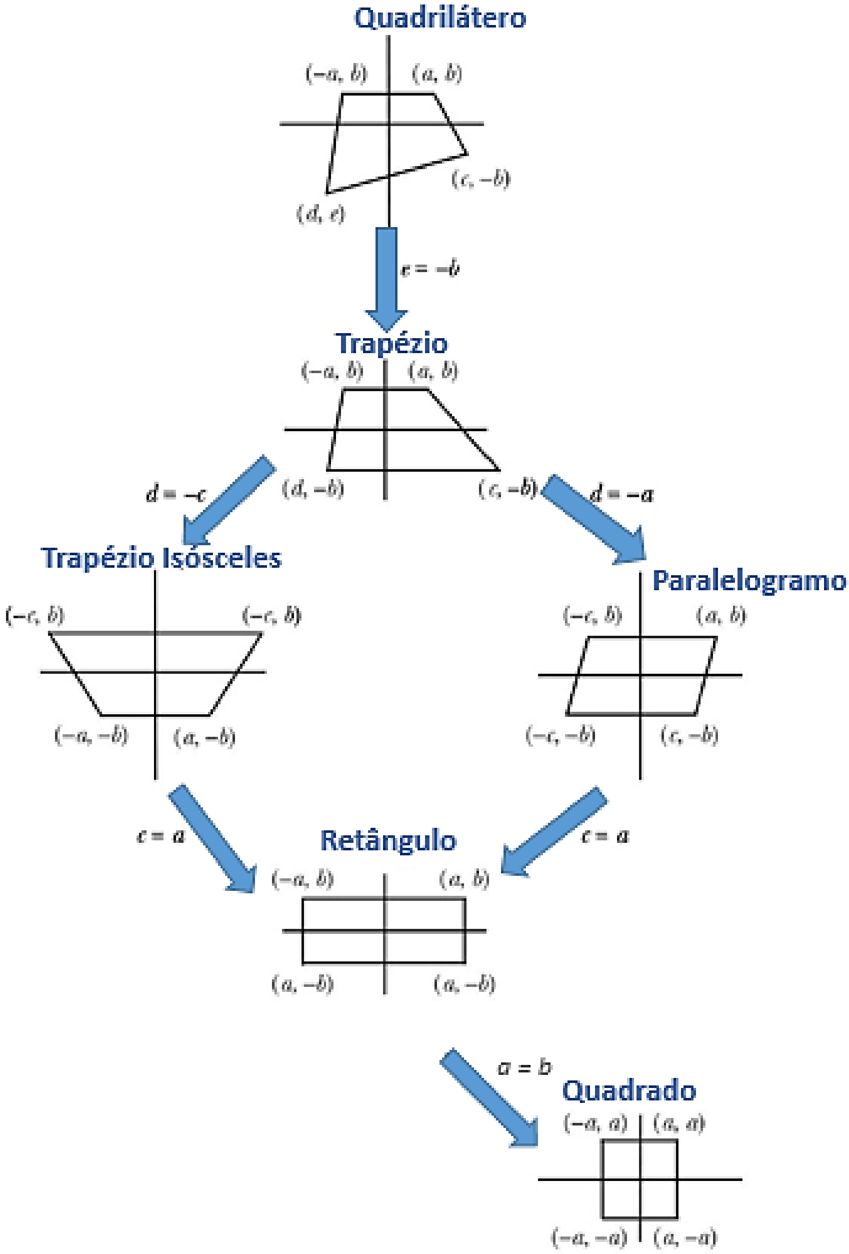
Figura 33 – Classificação dos quadriláteros: primeiro quadrante do plano cartesiano



Fonte: Usiskin e Griffin (2008, p. 77)

Usiskin e Griffin (2008) consideram também, para realizar outra classificação para os quadriláteros, posições simétricas em torno dos eixos e origem para observar em cada nível o paralelismo dos lados opostos (Figura 34). O quadrilátero inicial apresenta seus vértices com as coordenadas (-a, b), (d, e), (c, -b) e (a, b) e considerando as restrições: $e = -b,\ d = -c,\ d = -a,\ c = a$ ou $a = b,$ os pesquisadores apresentam sua classificação observando em cada nível se os lados opostos dos quadriláteros obtidos são paralelos.

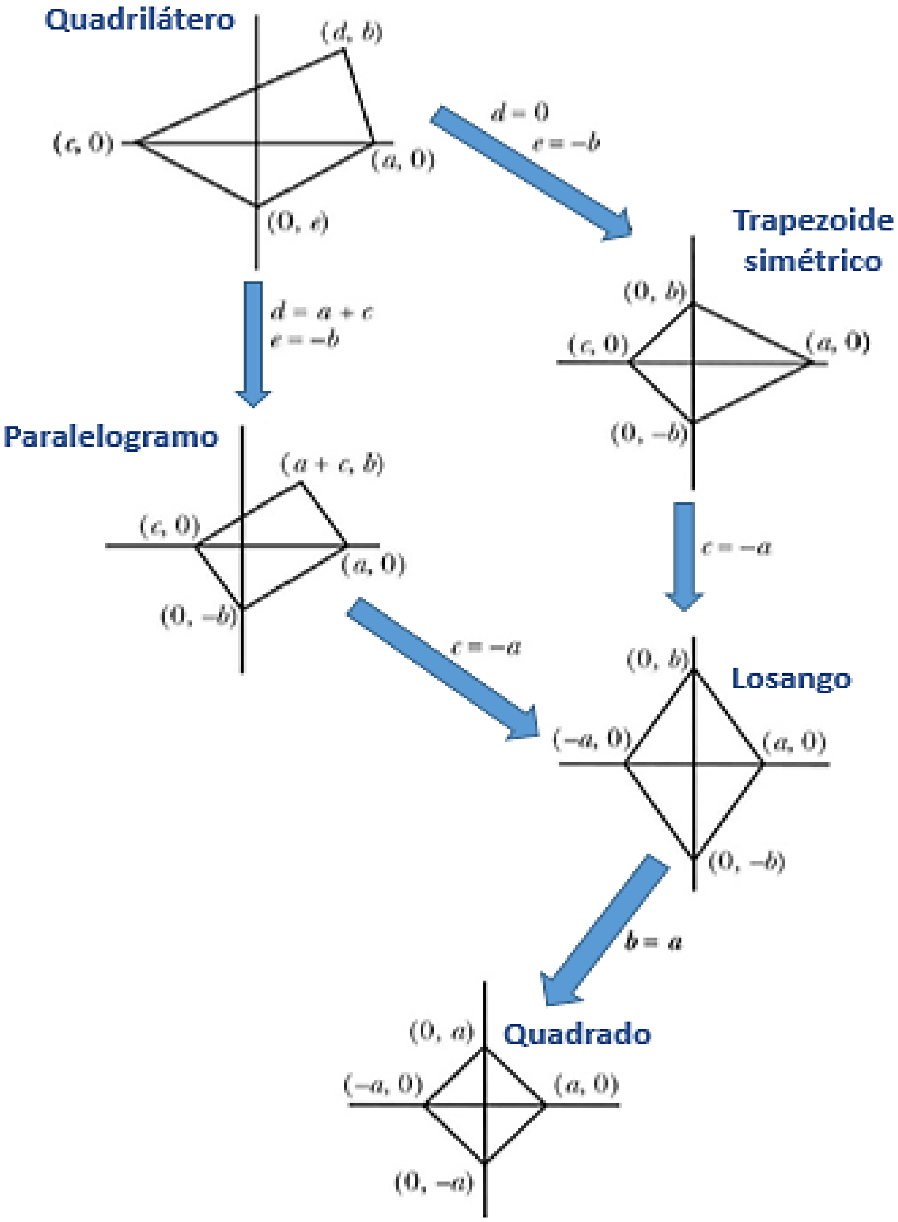
Figura 34 – Classificação dos quadriláteros: posições simétricas em torno dos eixos



Fonte: Usiskin e Griffin (2008, p. 78)

Em sua última classificação Usiskin e Griffin (2008) consideram as posições simétricas em torno dos eixos e da origem, no plano cartesiano, para observar a perpendicularidade de suas diagonais. Na figura 35, considerando o quadrilátero inicial com coordenadas dos vértices (c,0), (0, e), (a, 0) e (d, b) e as restrições $d = 0$, $e = -b$, $d = a + c$, $c = -a$ ou b $= a$, os pesquisadores apresentam a nova classificação observando o perpendicularismo das diagonais dos quadriláteros em cada um dos níveis.

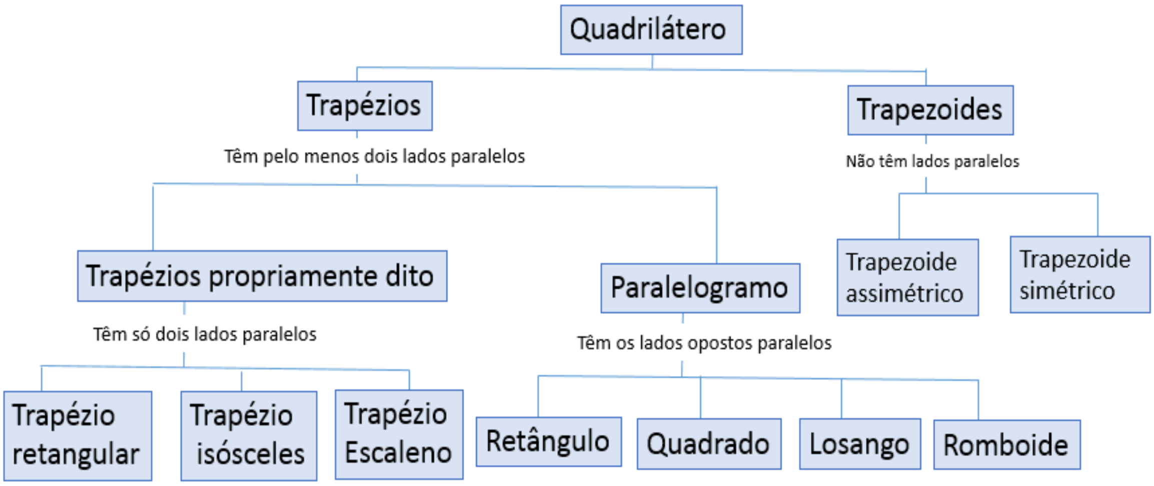
Figura 35 – Classificação dos quadriláteros: posições simétricas em torno dos eixos e origem



Fonte: Usiskin e Griffin (2008, p. 79)

Uma outra classificação é apresentada por Vásquez de Tapia (1993), que considera duas definições para o trapézio, uma inclusiva "um trapézio é um quadrilátero com pelo menos dois lados paralelos" e outra exclusiva que considera o trapézio como "um quadrilátero com exatamente dois lados paralelos". Considerando a primeira definição podemos afirmar que os paralelogramos são trapézios, o que não ocorre se considerarmos a segunda definição. A Figura 36 mostra a classificação dos quadriláteros se consideramos a definição inclusiva do trapézio.

Figura 36 – Classificação dos quadriláteros: definição inclusiva do trapézio



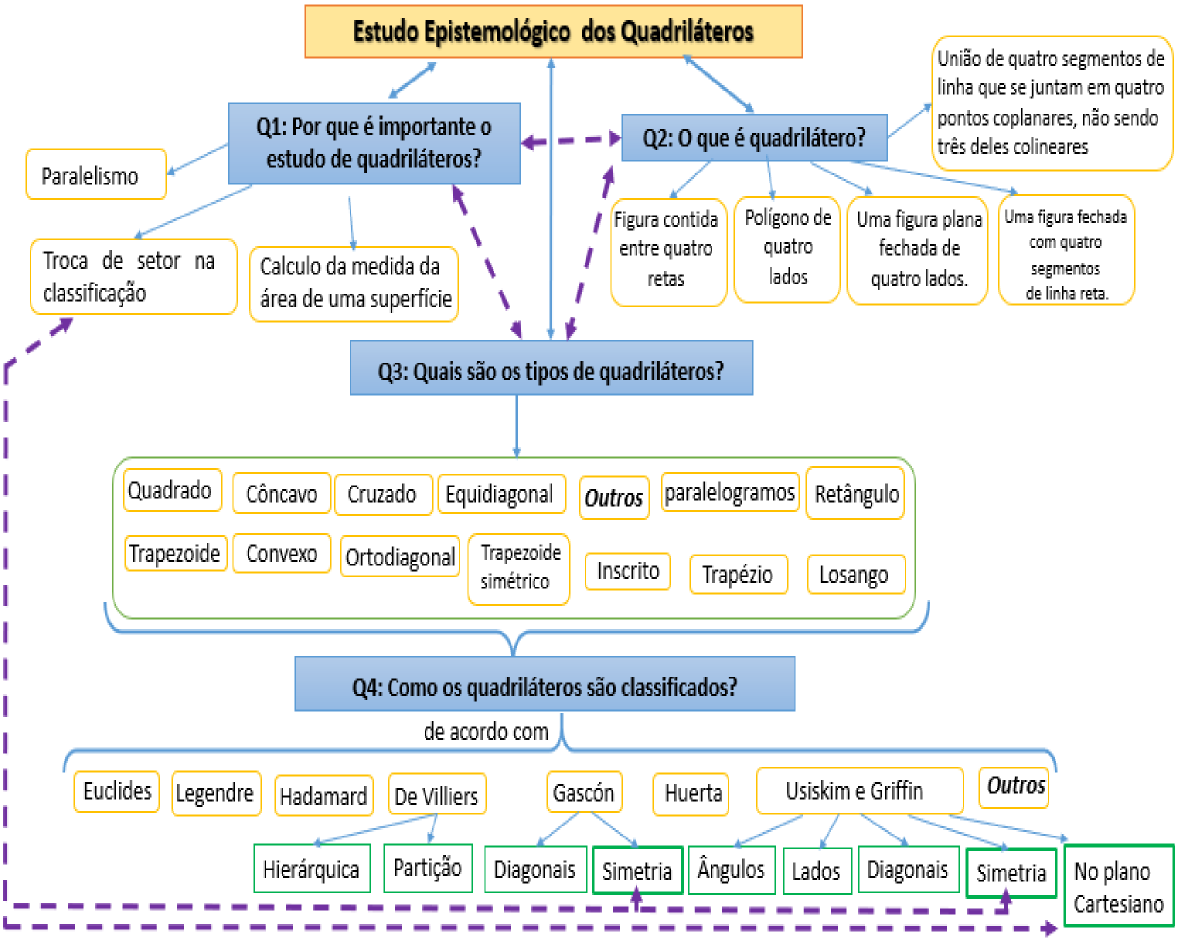
Fonte: Adaptado de Vásquez de Tapia (1993)

Como pode ser observado, os quadriláteros não têm uma única maneira de serem classificados, porque sua classificação depende dos critérios adotados para suas definições ou de restrições adotadas.

Para resumir o apresentado nesta seção do trabalho, apresentamos um Modelo Epistemológico de Referência (MER) (Figura 37), para o estudo dos quadriláteros que, por não ser único, pode ser reformulado ou ter sua construção continuada considerando as perguntas diretrizes Q1, Q2, Q3 e Q4 e suas principais respostas. A pergunta Q1, centrada em reconhecer como uma razão de ser para o ensino de quadriláteros a medição de áreas e as perguntas Q2, Q3 e Q4 centrada na sistematização matemática de objeto matemático.

Em nosso MER relacionamos as perguntas e, por isso, juntamos as perguntas Q1 e Q2 (representada na Figura 37 pela seta roxa) porque acreditamos que, para iniciar o estudo de quadriláteros, devemos considerar sua importância e suas razões de ser. Q1 nos conduz ao estudo de paralelismo e cálculo da medida de área de uma superfície, enquanto Q2 nos conduz a diferentes definições de quadriláteros se destacando a opção por ter superfície (as que consideram regiões do plano) ou não (as que consideram apenas seus perímetros, constituídas apenas por segmentos) que irão interferir diretamente nas definições dos tipos de quadriláteros. A seguir, relacionamos Q3 considerando os tipos de quadriláteros.

Figura 37 – Nossa proposta de MER para quadriláteros



Fonte: Elaboração própria

Deixamos para o final a pergunta Q4 porque sua resposta, ou seja, uma classificação, depende, inicialmente da definição de polígono assumida (ter superfície ou não) e do critério adotado para definir quadrilátero, além da definição de trapézio ser inclusiva ou não. Além disso as setas roxas mostram uma mudança de setor nos níveis de codeterminação que, no primeiro caso, passam do setor de polígonos para o setor de movimentos no plano e, no segundo caso, com a utilização do plano cartesiano que segundo Gascón (2004) é uma possível razão de ser para o estudo de quadriláteros (sua classificação).

Explicitado nosso MER retornamos ao sistema de ensino para analisar quais de seus aspectos estão presentes na matemática escolar peruana e em que atividades, além de buscar os aspectos que não aparecem ou são pouco usados. Estas análises constituíram o estudo das dimensões econômica e ecológica, de nosso problema didática, que apresentamos no que segue.

3.2 Estudo das Dimensões Econômica e Ecológica dos quadriláteros

Para o estudo da dimensão econômica, proposta por Gascón (2011), devemos focalizar na análise institucional, isto é, nos elementos constituintes de uma instituição (*I*), que, segundo Chevallard (2003) é:

> [...] um dispositivo social "total", que pode ter somente uma extensão muito limitada no espaço social (existem "micro instituições"), mas que permite – e impõe – a seus sujeitos, quer dizer às pessoas x que venham a ocupar diferentes posições *p* oferecidas em *I*, colocando em jogo formas próprias de fazer e pensar. Assim, a sala de aula é uma instituição (que as duas posições essenciais são as de professor e de aluno), da mesma forma que o *estabelecimento* (onde aparecem outras posições: as do CPE, do enfermeiro de saúde etc.), bem como esta instituição, que inclui classes e estabelecimentos em que se misturam diferentes posições de todos os tipos, o sistema educativo. (CHEVALLARD, 2003, p. 82, tradução nossa)

Para Chevallard (1989a) um objeto (O) do saber é institucionalizado ou reconhecido institucionalmente, se existe uma relação institucional denotada por *R*(I, O) que, segundo Henriques, Nagamine e Nagamine (2012), institucionais e pessoais, podem ser identificadas em uma análise institucional, por meio das condições e exigências que as determinam. Essa análise é um estudo realizado em torno:

> de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou *praxeologias* desses objetos que intervém no processo ensino/aprendizagem (HENRIQUES, NAGAMINE; NAGAMINE, 2012, p. 1268).

Em nossa pesquisa baseamos esse estudo na análise dos quadriláteros, como saber a ensinar no Peru, considerando o currículo e seu estudo praxeológico em livros didáticos. Para melhor compreender os documentos oficiais, na sequência, apresentamos o sistema educacional do Peru e os documentos oficiais que determinam o currículo atual.

3.2.1 Sistema Educativo Peruano

A lei N° 28044, de 2003, chamada Lei Geral de Educação, estabelece as diretrizes gerais da educação e do sistema educativo peruano, as atribuições e obrigações do Estado e os direitos e responsabilidades dos indivíduos e da sociedade em seu papel educativo. Esta lei governa todas as atividades educativas realizadas no território nacional do Peru, desenvolvidas por pessoas físicas ou jurídicas, públicas ou privadas, nacionais ou estrangeiras.

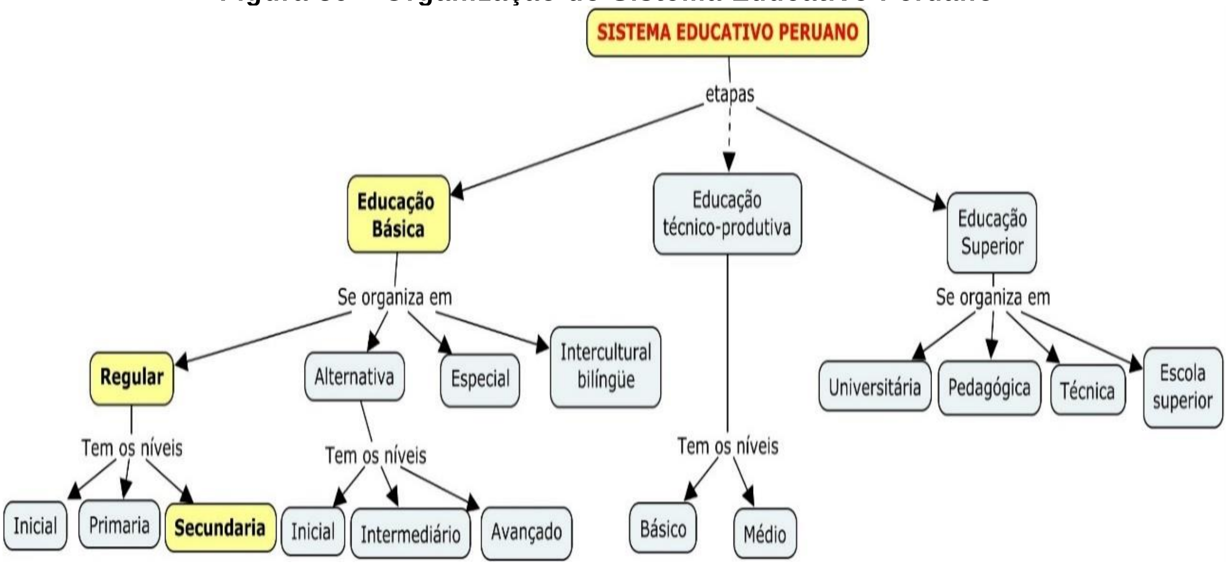
Na referida lei, se estabelece que o Ministério da Educação (MINEDU) é o órgão do Governo Nacional que tem o objetivo de definir, dirigir e articular a política de educação, cultura, recreação e esporte, de acordo com a política geral do Estado Peruano. Além disso, estabelece outros órgãos de gestão educativa, de menor hierarquia (Figura 38), como as Direções Regionais de Educação (DRE), que têm circunscrição territorial regional; as Unidades de Gestão Educativa Local (UGEL) que têm circunscrição territorial e agrega um conjunto de localidades de uma mesma região e as Instituições Educativas (I.E), as escolas públicas ou privadas.

Figura 38 – Órgãos de Gestão Educativa no Peru

Fonte: Elaboração própria

O artigo n° 28 da lei estabelece as etapas e níveis do sistema educativo peruano, como mostramos, na Figura 39, onde podemos observar que está dividido em três etapas: educação básica, a educação técnico-produtiva e a educação superior. A Educação básica se divide em básica regular, básica alternativa, especial e em básica intercultural bilíngue.

Figura 39 – Organização do Sistema Educativo Peruano



Fonte: Adaptado da Lei Geral da Educação N° 28044 (PERU, 2003).

A Educação Básica Regular (EBR) (Quadro 2), para crianças e adolescentes, é organizada em três níveis: inicial, primário e secundário que são organizados em ciclos, entendidos como processos educacionais desenvolvidos em função dos avanços na aprendizagem.

Quadro 2 – Níveis, ciclos e graus da Educação Básica Regular

Educação Básica Regular													
Níveis	**Inicial**		**Primária**						**Secundária**				
Ciclos	I	II	III		IV		V		VI		VII		
Grau			1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°	4°	5°
Idade (Anos)	0-2	3-5	6-7		8-9		10-11		12-13		14-16		

Fonte: Adaptado de Peru (2016a, p. 159).

A Educação Básica Alternativa (EBA), dividida em três níveis: inicial, intermediário e avançado, (Quadro 3) oferece educação para jovens e adultos, a partir dos 14 anos de idade, com os mesmos objetivos que a EBR e qualidade equivalente. Entre seus estudantes estão aqueles que não iniciaram sua educação formal na idade correta, que não concluíram a educação básica, os que devem combinar trabalho e estudo e os que desejam continuar seus estudos para se tornarem alfabetizados.

Quadro 3 – Ciclos e graus da Educação Básica Alternativa e sua equivalência com a EBR

Ciclo	**Inicial**		**Intermediário**			**Avançado**			
Graus	1°	2°	1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°
	Equivalente ao nível Primário					Equivalente ao nível Secundário			

Fonte: Peru (2016a, p. 160).

A Educação Básica Especial (EBE) tem um enfoque inclusivo e auxilia os alunos com necessidades educacionais especiais em que são oferecidos serviços educacionais especializados para prevenção, detecção e atenção oportuna para crianças menores de seis anos, além de apoio e assessoria às instituições educacionais inclusivas. A Educação Intercultural Bilíngue (EIB) é oferecida apenas nos níveis inicial e primário, sendo um de seus objetivos promover a valorização e o enriquecimento da cultura e da primeira língua dos alunos (Quéchua, Aimara, Shipibo ou Awajún), além do espanhol como segunda língua, o que exige dos professores domínio da língua indígena e do espanhol.

A Educação Técnico-Produtiva é orientada para ajudar os alunos a adquirirem e desenvolverem competências para a força de trabalho e se a pessoas que gostariam de entrar ou reingressar no mercado de trabalho e para alunos do Ensino Básico. Está organizado em um ciclo básico e um ciclo intermediário, que não são sequenciais nem corretivos, mas terminais, porque os graduados em qualquer ciclo devem estar preparados para entrar no mercado de trabalho. Conforme a lei n° 28044, a Educação Superior consolida a formação integral das pessoas, desenvolve pesquisa e inovação, e capacita profissionais em todas as áreas do conhecimento, arte, cultura, ciência e tecnologia para cobrir a demanda da sociedade e contribuir para o desenvolvimento do país. As instituições de ensino superior são as Universidades, Institutos Superiores Tecnológicos, Institutos Pedagógico e Escolas Superiores.

No Peru há um sistema informático de avaliação único chamado Sistema de Informação de Apoio à Gestão da Instituição Educacional (SIAGIE) no qual as escolas públicas e privadas devem informar as notas dos estudantes a cada final de bimestre e por competências, o que não flexibiliza o tempo de aprendizagem dos alunos e no desenvolvimento dos conteúdos do currículo.

Entendido o sistema educativo peruano, a seguir apresentamos como está constituído o currículo nesse sistema, focando em seu desenvolvimento e nos documentos oficiais que o compõe a fim de identificar as organizações matemáticas a respeito de quadriláteros que apresentam.

3.2.2 Currículo Peruano

A Lei Geral de Educação no Peru, lei n° 28044 de 2003, em seu artigo n° 33, indica que o Ministério da Educação é o responsável pela elaboração dos Currículos Básicos Nacionais que devem ser coerentes com os objetivos e princípios indicados na Lei n° 28044, no Projeto Nacional de Educação[21] e nos objetivos da educação básica.

O Peru tem um currículo integrado desde 2005 como produto da união dos currículos dos níveis inicial, primário e secundário, que haviam funcionado independentemente até esse momento, como mostra a Figura 40 que apresenta em uma linha de tempo o avanço do currículo no Peru desde 1995. Em 2009 foi lançada uma segunda versão do currículo chamado de "*Diseño Curricular Nacional (DCN)*"

---

[21] O Projeto Nacional de Educação (PEN) para 2021: "A Educação que queremos para o Peru", aprovada em janeiro de 2007, propõe seis objetivos estratégicos. É um instrumento para a formulação e execução de políticas públicas e para a mobilização da cidadania. Serve como marco estratégico para a tomada de decisões e como referência para avaliar a ação educativa do Estado e da sociedade. Peru (2006, p 9)

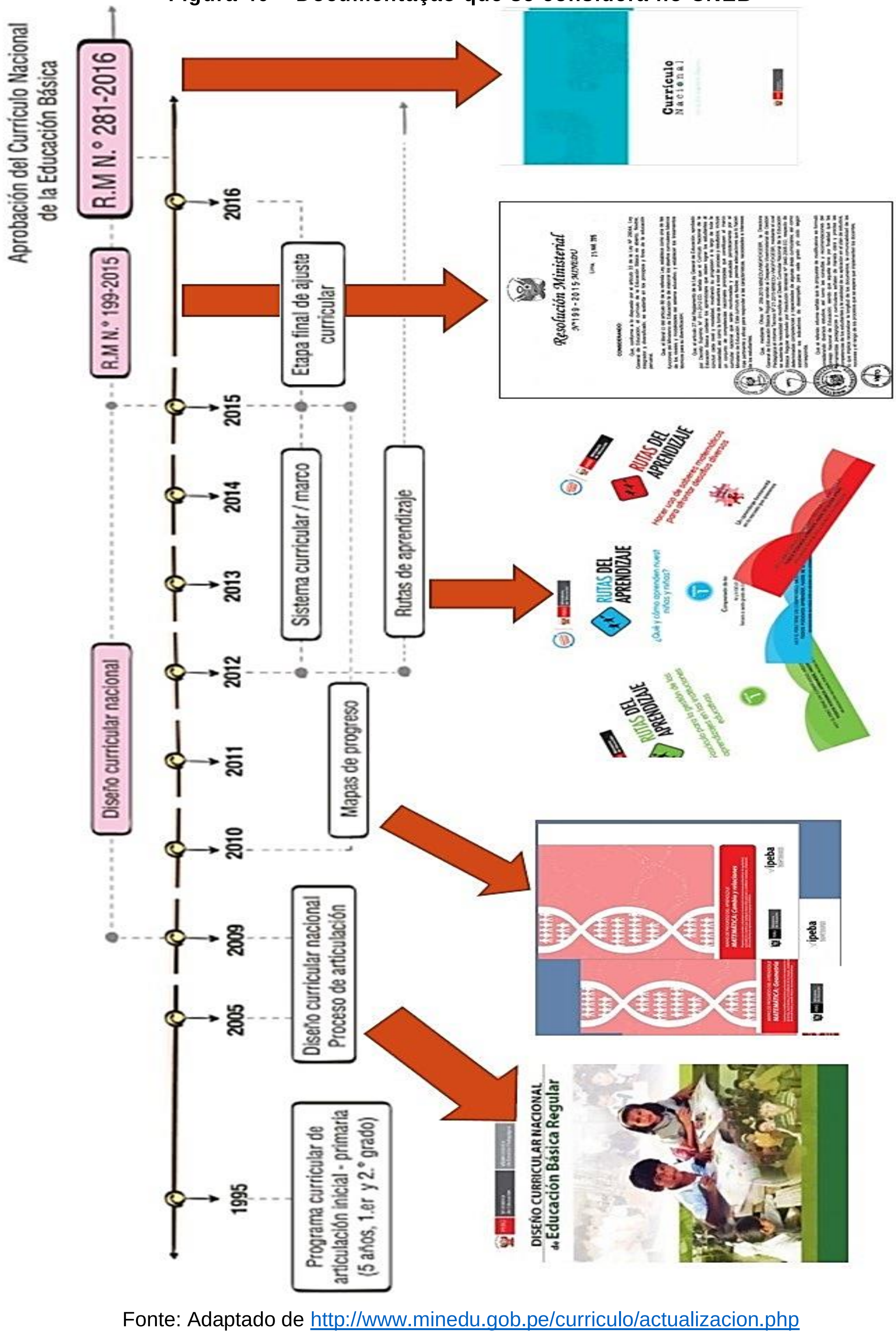
com uma abordagem baseada em competências, isto é, que o aprendizado das crianças deve ser expresso não somente pelo "saber", mas também pelo "saber fazer".

O DCN de 2009 foi validado totalmente em 2015 quando, a Resolução Ministerial n° 199, modificou as competências e capacidades de algumas áreas curriculares como: Comunicação; Ciência e Ambiente; Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente; Matemática; História, Geografia e Economia, Formação da Cidadania e Cívica, entre outras. No entanto, algumas áreas curriculares não foram alteradas como Inglês; Formação Religiosa, Educação para o Trabalho, Educação Física que usaram as competências e capacidades segundo o DCN-2009 original até final de 2017.

De 2010 até 2016 foram elaborados outros documentos oficiais como o ***Marco curricular*** que é um instrumento estruturante do sistema curricular que, baseado em uma perspectiva intercultural, inclusiva e integradora, define as aprendizagens fundamentais que todos os alunos da Educação Básica devem alcançar (PERU, 2014); os ***Mapas de progreso*** que são os **estândares de aprendizagem**[22]nacionais e descrevem a progressão das expectativas de aprendizagem, em níveis que se espera sejam alcançados por todos os estudantes peruanos em um ciclo e uma área curricular determinada (PERU, 2013); as ***Rutas del aprendizaje*** que são ferramentas para o trabalho dos professores das áreas curriculares e propõe as capacidades e competências que devem ser asseguradas aos alunos e os indicadores de alcance da aprendizagem por níveis de ensino (inicial, primário e secundário). (PERU, 2015).

[22] *Estándares de aprendizaje,* são descrições das realizações esperadas de aprendizado dos alunos e constituem referências comuns que devem alcançar ao longo de sua trajetória escolar. (Peru, 2013, p. 6)

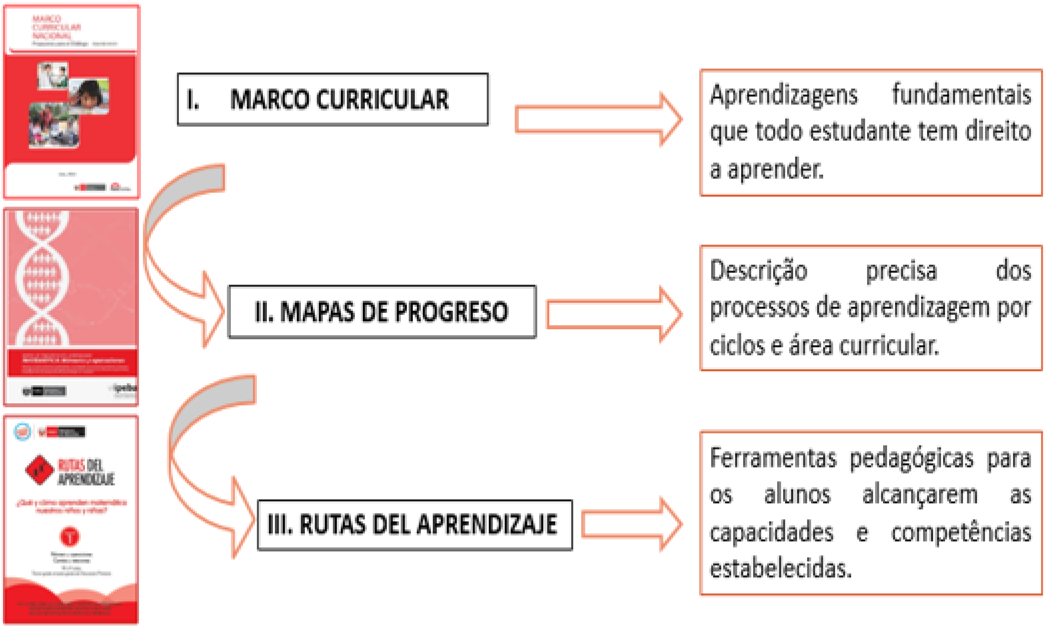
Figura 40 – Documentação que se considera no CNEB



Fonte: Adaptado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/actualizacion.php

Apresentamos na Figura 41 uma síntese dos documentos que fundamentam o novo currículo do sistema educativo peruano e que está vigente desde 2016, para o nível primário, e desde 2016 no nível primário e em 2018, para o nível secundário.

Figura 41 – Documentos curriculares oficiais construídos entre 2010 - 2015



Fonte: Elaboração própria.

O Currículo Nacional da Educação Básica (CNEB-2016) foi desenvolvido considerando todos os documentos construídos até esse momento e estabelece o perfil do graduado da Educação Básica, as competências nacionais e suas progressões, assim como os níveis esperados por ciclo, nível e modalidades. Está estruturado com base em quatro definições curriculares fundamentais: competências, capacidades, estândares de aprendizagem e desempenho; que se relacionam e permitem especificar, na prática educativa, as intenções expressas no perfil do graduado. Segundo o CNEB[23] (PERU, 2016c) uma competência é definida como a faculdade que uma pessoa tem para combinar um conjunto de capacidades para atingir um propósito específico em uma determinada situação, agindo de maneira relevante e com ética. Assim, as capacidades são recursos para agir com competência, tais como conhecimentos, habilidades e atitudes que os alunos mobilizam para enfrentar determinada situação. Os estândares de aprendizagem são descrições do desenvolvimento da competência em níveis crescente de

[23] No espanhol as competências do *CNEB (2016a)* são: Resuelve problemas de cantidad; Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; Resuelve problemas de forma, movimiento y localización e Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

complexidade, para toda a Educação Básica, de acordo com a sequência de progressão dos alunos para uma competência. Essas descrições são holísticas porque se referem, de maneira articulada, às capacidades que são colocadas em ação ao resolver ou enfrentar situações autênticas. Já os desempenhos são descrições específicas do que os alunos fazem em relação aos níveis de desenvolvimento das competências que são observáveis em uma variedade de situações ou contextos.

A Resolução Ministerial 199-2015 modificou as competências de matemática que foram usadas para a elaboração das *Rutas de Aprendizaje* (PERU, 2015a) e livros didáticos utilizados nas escolas públicas (Quadro 4) que culminaram no novo currículo de 2016 que numeramos para facilitar a referência.

Quadro 4 – Competências da área curricular de Matemática em documentos oficiais - Peru

DCN (2009)	**Resolução Ministerial n°199 *Rutas de aprendizaje* (2015)**	**CNEB (2016)**
Comunicação Matemática. Raciocínio e demonstração. Resolução de problemas.	Atua e pensa matematicamente em situações de quantidade	1) Resolve problemas de quantidade.
	Atua e pensa matematicamente em situações de regularidade, equivalência e variação**.**	2) Resolve problemas de regularidade, equivalência e variação.
	Atua e pensa matematicamente em situações de forma, movimento e localização	3) Resolve problemas de forma, movimento e localização.
	Atua e pensa matematicamente em situações de gerenciamento de dados e incerteza**.**	4) Resolve problemas de gerenciamento de dados e incerteza.

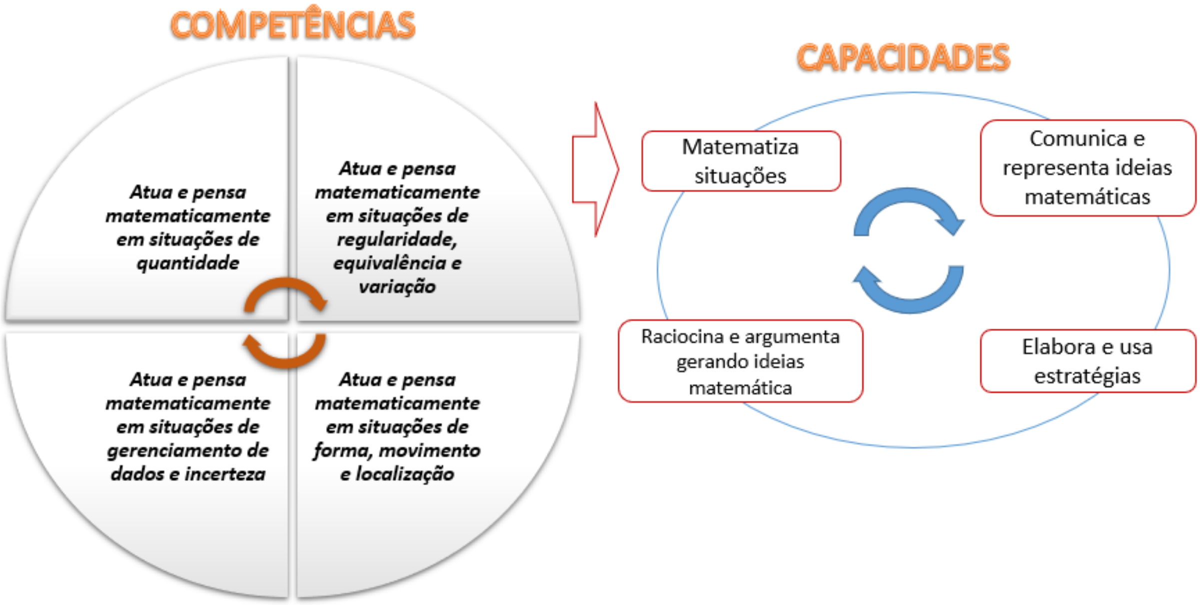
Fonte: Elaboração própria

As competências propostas na Resolução Ministerial n° 199, para a Educação Básica Regular em matemática, estão organizadas com base em quatro situações: ***atua e pensa matematicamente em situações de quantidade*** em que o estudante propõe e resolve problemas que envolvem o uso de modelos matemáticos relacionados à noção de número e operações; ***atua e pensa matematicamente em situações de regularidade, equivalência e variação,*** que se refere ao uso de modelos matemáticos relacionados a padrões, igualdades, desigualdades e relações funcionais, formas de raciocínio, argumentação e comunicação, utilizando diversas representações, linguagens e estratégias matemáticas; ***atua e pensa matematicamente em situações de forma, movimento e localização*** que consiste em propor e resolver problemas que envolvem o uso de propriedades dos objetos, sua posição e localização no espaço, formas de raciocínio, argumentação e comunicação, usando representações diversas, linguagem matemática e estratégias e, finalmente, a competência ***atua e pensa matematicamente em situações de gerenciamento***

de dados e incerteza que consiste em propor e resolver problemas que envolvem a coleta, organização e análise de dados e situações de incerteza; formas de raciocínio, argumentação e comunicação usando diversas representações, linguagem matemática e estratégias. Na Resolução Ministerial 199-2015 as capacidades são as mesmas para as quatro competências de matemática como se observa na Figura 42.

Segundo as *Rutas da aprendizaje* (PERU, 2015a) a capacidade ***matematiza situações*** é a que resulta de expressar um problema, reconhecido em uma situação, em um modelo matemático que é usado, interpretado e avaliado, de acordo com a situação que o originou.

Figura 42 – Abordagens transversais do Currículo Peruano



Fonte: Adaptado de *Rutas de aprendizaje*. PERU (2015, p. 11)

A capacidade ***comunica e representa ideias matemáticas*** corresponde a compreender o significado das ideias matemáticas e de as expressar oralmente e por escrito utilizando linguagem matemática e várias formas de representação como material concreto, gráficos, tabelas, símbolos e recursos tecnológicos. A capacidade ***elabora e usa estratégias*** consiste em planejar, executar e avaliar uma sequência organizada de estratégias e vários recursos que são utilizados de forma flexível e eficaz na abordagem e resolução de problemas. A capacidade ***raciocina e argumenta gerando ideias matemática*** corresponde a afirmar suposições, conjecturas e hipóteses de implicação matemática por meio de várias formas de raciocínio, bem como verificá-las para validá-las ou não por meio de argumentos.

Segundo o CNEB (PERU, 2016c), as competências de matemática são (1) ***resolve problemas de quantidade*** que permite ao estudante resolver problemas ou apresentar novos problemas que exigem construir e entender as noções de quantidade, número, de sistemas numéricos, suas operações e propriedades; (2) ***resolve problemas de regularidade, equivalência e variação*** possibilita ao estudante caracterizar equivalências e generalizar regularidades e variação por meio de regras gerais que permitam encontrar valores desconhecidos, determinar restrições e fazer previsões de comportamento de um fenômeno; (3) ***resolve problemas de forma, movimento e localização*** permite ao estudante descrever orientação, posição e movimento de objetos, e de si mesmo, no espaço, visualizando, interpretando e relacionando características dos objetos como formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, envolvendo medições diretas ou indiretas de superfície, de perímetro, de volume e de capacidade de objetos; (4) ***resolve problemas de gerenciamento de dados e incerteza*** possibilita ao o estudante analisar dados a respeito de um tópico de interesse ou estudo ou de situações aleatórias, que lhe permitem tomar decisões, fazer previsões e tirar conclusões razoáveis apoiadas na informação produzida.

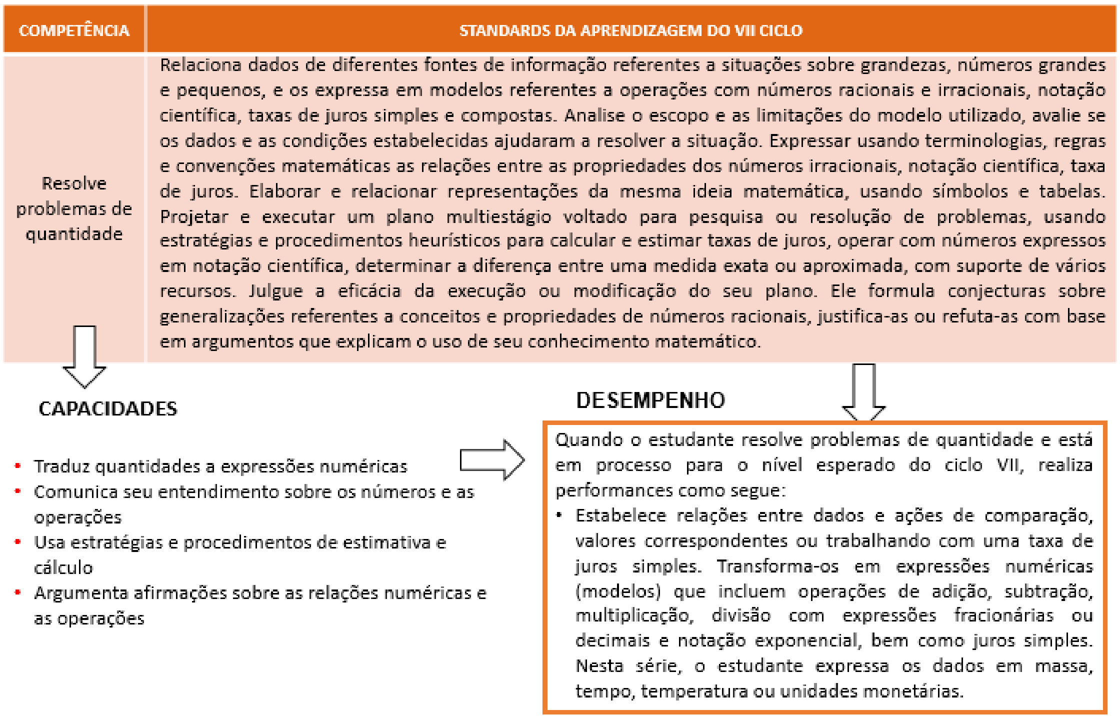
Quadro 5 – Capacidades vinculadas às competências da área curricular de Matemática

Competência	Capacidades
1) Resolve problemas de quantidade.	Traduz quantidades em expressões numéricas. Comunica seu entendimento a respeito de números e operações. Usa estratégias e procedimentos de estimativa e cálculo. Argumenta afirmações a respeito de relações numéricas e operações.
2) Resolve problemas de regularidade, equivalência e variação.	Traduz dados e condições para expressões algébricas. Comunica seu entendimento a respeito de relações algébricas. Usa estratégias e procedimentos para encontrar regras gerais. Argumenta afirmações a respeito de relações de variação e equivalência.
3) Resolve problemas de forma, movimento e localização.	Modela objetos com formas geométricas e suas transformações. Comunica seu entendimento relacionado a formas e relações geométricas. Usa estratégias e procedimentos para orientação no espaço. Argumenta afirmações a respeito de relações geométricas.
4) Resolve problemas de gerenciamento de dados e incerteza.	Representa dados com gráficos e medidas estatísticas ou probabilísticas. Comunica o entendimento de conceitos estatísticos e probabilísticos. Usa estratégias e procedimentos para recompilar e processar dados. Sustenta conclusões ou decisões baseadas em informação obtida.

Fonte: CNEB (PERU, 2016a). Tradução nossa

Ao contrário das *rutas de aprendizaje* (PERU, 2015a), no Currículo Nacional da Educação Básica - CNEB (PERU, 2016c), cada competência em matemática tem quatro capacidades distintas, (Quadro 5), que também são diferentes das apresentadas para as outras competências, pois não existem capacidades gerais. As competências e as capacidades de matemática são iguais para todos os níveis, enquanto os estândares de aprendizagem são específicos para um ciclo[24], no entanto, os desempenhos são classificados por grau de ensino, mas ambos relacionados a uma competência específica.

Figura 43 – Competência, capacidades, estândares de aprendizagem e desempenho



Fonte: Elaboração própria.

A título de exemplo exibimos, na Figura 43, como esses conceitos estão relacionados para a avaliação do aprendizado. Os estândares de aprendizagem do ciclo VII, para a competência resolver problemas de quantidade, apresenta as quatro capacidades a serem desenvolvidas e o desempenho esperado nos estudantes.

A seguir apresentamos como os quadriláteros vivem no sistema educativo peruano a partir da análise do CNEB (currículo atual) e dos livros didáticos.

3.2.3 Os quadriláteros como saber a ensinar no Peru

Neste estudo analisamos, especificamente, as *rutas de aprendizaje* (PERU, 2015a) e o Currículo Nacional da Educação Básica (PERU, 2016a), além de livros escolares a fim de identificar elementos de organizações matemáticas para ensinar

---

[24] O ciclo VI compreende o 1° e o 2° grau e o ciclo VII compreende o 3°; 4° e 5° grau da educação secundária.

quadriláteros resultantes do processo da transposição didática. Para Chevallard (1991), o saber a ensinar e o saber ensinado são diferentes do saber sábio, pois são resultantes do que chamou de Transposição didática.

> O saber que se ensina na escola provém de diferentes transformações de um "saber sábio" que é o que legitima e justifica sua difusão (ou "transposição") para outras instituições. Essas transformações se operam em instituições intermediárias e, em particular, na "noosfera". Esta atua como membrana do sistema de ensino, tornando-o permeável a certos objetos e protegendo-o de outros. É nesta instituição intermediária que se decide, determina e descreve o "saber a ser ensinado", quer dizer, aqueles objetos matemáticos que se propõem transpor para a escola e que se tornam oficiais nos programas oficiais, livros didáticos, recomendações aos professores, materiais didáticos etc. A escola também impõe restrições (nos níveis escolar, pedagógico e didático) para que os objetos matemáticos a serem ensinados atendam a certos requisitos que os tornam "ensináveis" de acordo com certos princípios e modos de funcionamento historicamente determinados. (CHEVALLARD, 1991 apud BARQUERO, BOSCH e GASCÓN, 2013, p. 20, tradução nossa)

Analisamos as *rutas de aprendizaje* (PERU, 2015a) porque os livros didáticos, usados nas escolas públicas do Peru, atualmente, baseiam-se em suas orientações, enquanto o Currículo Nacional da Educação Básica (2016a) orienta os livros propostos pelas editoras para escolas privadas desde 2018. A atualização dos livros nas escolas públicas ocorre a cada quatro anos, mas nas escolas privadas é anual.

Nas *rutas de aprendizaje* os quadriláteros são considerados na competência: *atua e pensa matematicamente em situações de forma, movimento e localização* e no Currículo Nacional da Educação Básica (Peru, 2016a) na competência: (3) *resolve problemas de forma, movimento e localização*. No Anexo A apresentamos os Quadros 13, 14 e 15 que mostram os indicadores de aprendizagem relacionados aos quadriláteros. No Quadro 13, os quadriláteros são apresentados como um saber a ser ensinado a partir do segundo grau do nível primário (7 anos) até o segundo grau do nível secundário (13 anos). Inicialmente os indicadores de aprendizagem focam nos elementos dos quadriláteros (vértices, ângulos e lados) e, a seguir, centram-se em suas representações, primeiro utilizando material concreto como o Geoplano e, no nível secundário, utilizando modelos que representam quadriláteros ao resolver problemas e, finalmente, o estudo de quadriláteros envolve medidas de perímetro e área. No nível primário, do segundo ao quinto grau, os indicadores abordam o quadrilátero como uma região, mas a partir de sexto do nível primário até segundo grau do nível secundário (13 anos) centram no estudo de quadrilátero como uma forma poligonal, ou seja, formada por segmentos de reta que embora tenham comprimento e largura não possuem superfície.

Os Quadros 14 e 15 (anexo A) têm como base os indicadores de aprendizagem do currículo atualizado (PERU, 2016c) que apresentam o estudo de quadriláteros do segundo ao sexto grau do nível primário e, no nível secundário, está inserido na competência r*esolve problemas de forma, movimento e localização*. No Quadro 14, estão os indicadores para o nível primário e no Quadro 15 os indicadores para o nível secundário. Nesse documento o quadrilátero é apresentado como uma figura bidimensional, como se fossem figuras planas e sem esclarecer se são figuras que têm perímetro e área ou que somente tem perímetro, também apresentam indicadores para estabelecer relações entre figuras planas e figuras espaciais, como por exemplo, o estudo do prisma com base quadrangular ou prisma reto com base retangular. Além disso, há indicadores a respeito do cálculo de perímetro e medida de área de quadriláteros e representação de figuras planas no plano cartesiano.

Quanto aos livros didáticos Chevallard (1991) sugere que eles oferecem uma concepção legitimada do saber a ensinar e institucionalizam uma forma de progressão do conhecimento dos estudantes. Diferentes autores indicam a importância de analisar os livros didáticos, na perspectiva da didática da matemática, isto é, como recurso didático e, alguns, concentram suas análises no modo como os livros didáticos refletem conteúdo específicos BITTAR (2017); ALMOULOUD (2015) (CHAACHOUA (2014); SANTOS, ALMOULOUD (2014); COBO, BATANERO (2004); REY, PENALVA (2002); MARTÍN (2002); ORTIZ (1999); GARCÍA, LLINARES (1995).

De acordo com Martinez e Penalva (2006) o livro de matemática é, nos níveis escolares, o instrumento mais utilizado em sala de aula e contém, praticamente, todas as informações escritas que o aluno manipula, não sendo apenas um meio de ensinar, mas também uma maneira de entender o desenvolvimento dos conteúdos curriculares.

Para a análise de livros didáticos do sistema educativo peruano nos baseamos nas propostas de Chaachoua (2014) e Almouloud (2015) que consideram aspectos como: o momento da edição do livro, sua representatividade, a estrutura do livro, análises praxeológicas e o estudo didático ecológico.

Usamos para esta análise sete livros didáticos do 6° grau do nível primário até o 3° do nível secundário de três editoras diferentes, porque estamos interessados no estudo de quadriláteros no nível de secundário e no último ano do nível primário, 6°grau, por ser a transição entre os dois níveis. A seguir, apresentamos a análise dos livros.

a) O momento de publicação dos livros didáticos

É importante mencionar que no Peru é distribuído somente um único livro, por grau de estudo a todas as escolas públicas do país, isto é, todas as escolas públicas usam o mesmo livro de acordo com o grau e nível de estudo. Os livros que estão sendo usados atualmente, nas escolas públicas, foram elaborados no ano de 2016 segundo as orientações das *rutas de aprendizaje* e a resolução ministerial n°199 de 2015, apesar de o novo currículo, CNEB (PERU, 2016a) ter modificado todas as competências e capacidades na área de matemática, cujas edições são feitas a cada quatro anos. As escolas públicas são proibidas de pedir outros livros aos pais, porque devem trabalhar apenas com os livros que o Ministério da Educação oferece. As escolas privadas, por outro lado, podem escolher seus livros desde que tenham implementado as modificações do CNEB de 2016.

b) A representatividade

Usamos os livros do MINEDU (Ministério da Educação do Peru) porque são utilizados em todas as escolas públicas do Peru, os livros da Editora Santillana por ser a principal produtora de livros para escolas privadas e, por ter ganhado alguns concursos públicos para produzir livros para o ministério e a Editora Instituto Apoyo porque, também são utilizados por algumas escolas públicas, embora apresentem livros traduzidos do alemão. Cabe informar que os concursos públicos do Ministério de Educação são realizados para ciclo do nível educativo, o que implica em que um nível utilize o livro de uma editora e em outro nível de outra. Assim, no Quadro 6, apresentamos os livros didáticos que contém estudo de quadriláteros escolhidos para análise.

Quadro 6 – Modificações curriculares no Peru nas últimas décadas

Editora	Título	Denominação para análise	Grau de escolaridade
MINEDU	Matemática 6	LD1	6° de Primário
	Matemática 1	LD3	1° de secundário
	Matemática 2	LD5	2° de secundário
SANTILLANA	Matemática 6	LD2	6° de Primário
	Matemática 1	LD4	1° de secundário
	Matemática 3	LD7	2° de secundário
INSTITUTO APOYO	Matemáticas para todos 2	LD6	2° de secundário

Fonte: Elaboração própria

c) A estrutura do livro

Os livros didáticos escolhidos têm diferentes estruturas, pois alguns têm a parte teórica e prática juntas e outros são compostos por um livro texto que apresenta a parte teórica e por um caderno de trabalho, que apresenta a parte prática com as atividades que os estudantes devem resolver.

Os livros didáticos da Editora Santillana (LD2, LD4 e LD7) têm o livro texto e o caderno de trabalho estruturados nas mesmas nove unidades, os da Editora Instituto Apoyo (LD6) apresenta apenas um texto com a parte teórica e a prática e está estruturado em nove capítulos, já os da editora do MINEDU (LD1, LD3 e LD5) têm livros de texto e caderno de trabalho, que para o nível primário (LD1) ambos têm a mesma quantidade de unidades, enquanto para o nível secundário (LD3 e LD5) os livros textos apresentam 12 capítulos e os cadernos apenas nove contendo entre oito e nove fichas de trabalho com quatro a seis páginas. No Quadro 7 apresentamos uma síntese das estruturas dos oitos livros didáticos.

Quadro 7 – Estrutura dos livros didáticos analisados

Livro	Contém	Quantidade de capítulos ou unidades	Capítulo ou unidade sobre os quadriláteros	Tópicos sobre os quadriláteros
LD1	Livro de texto	8 unidades	N° 5: Para que servem as figuras geométricas?	- Polígonos - Triângulos e quadriláteros - Áreas de triângulos e quadriláteros
	Caderno de trabalho	8 unidades	N° 1: Conhecemos triângulos e quadriláteros N° 6: Calculamos a área de triângulos e quadriláteros	
LD2	Livro de texto	9 unidades	N° 5: Polígonos N° 6: Perímetros e áreas dos triângulos e quadriláteros	- Polígonos: Classificação - Quadriláteros - Perímetro e área de quadriláteros
	Caderno de trabalho	9 unidades		
LD3	Livro de texto	12 capítulos	N° 8: Figuras poligonais	- Propriedades dos retângulos, quadrados e losangos. - Classificação dos quadriláteros - Perímetro e área do retângulo, quadrado e losango.
	Caderno de trabalho	9 unidades	N° 5: Ficha de trabalho 41 N° 6: Ficha de trabalho 46; 48 e 50	
LD4	Livro de texto	9 unidades	N° 8: Polígonos	- Quadriláteros: construção - Área e perímetro de triângulos e quadriláteros
	Caderno de trabalho	9 unidades		
LD5	Livro de texto	12 capítulos	N° 7: Figuras poligonais e círculo	- Quadriláteros: propriedades e construção
	Caderno de trabalho	9 unidades	N° 3: Ficha de trabalho 15 e 20. N° 6: Ficha de trabalho 42. N° 9: Ficha de trabalho 75.	
LD6	Texto único	9 capítulos	V: Quadriláteros: construir, demonstrar e definir	- Construção de quadriláteros - Quadriláteros simétricos - Demonstrações e definições
LD7	Livro de texto	9 unidades	N° 6: Polígonos	- Quadriláteros: Paralelogramos, trapézios e trapezoides
	Caderno de trabalho	9 unidades	N° 7: Áreas e volumes	- Área e perímetro de regiões triangulares e quadrangulares

Fonte: Elaboração própria

Acreditamos que uma dificuldade, na estrutura dos livros da editora do MINEDU para o nível secundário, é que os capítulos dos livros de textos e as unidades dos cadernos de trabalho não têm uma relação explícita. Por exemplo, o tópico quadrilátero no livro de texto LD 3 está no capítulo oito e no caderno de trabalho está na unidade cinco com apenas duas fichas de trabalho e, na unidade 6, com três sem qualquer orientação para o professor, que deve olhar os tópicos de cada ficha para relacionar ao capítulo do livro de texto. Além disso, cada ficha de trabalho pode tratar de vários tópicos de estudo.

d) Um estudo didático ecológico dos quadriláteros

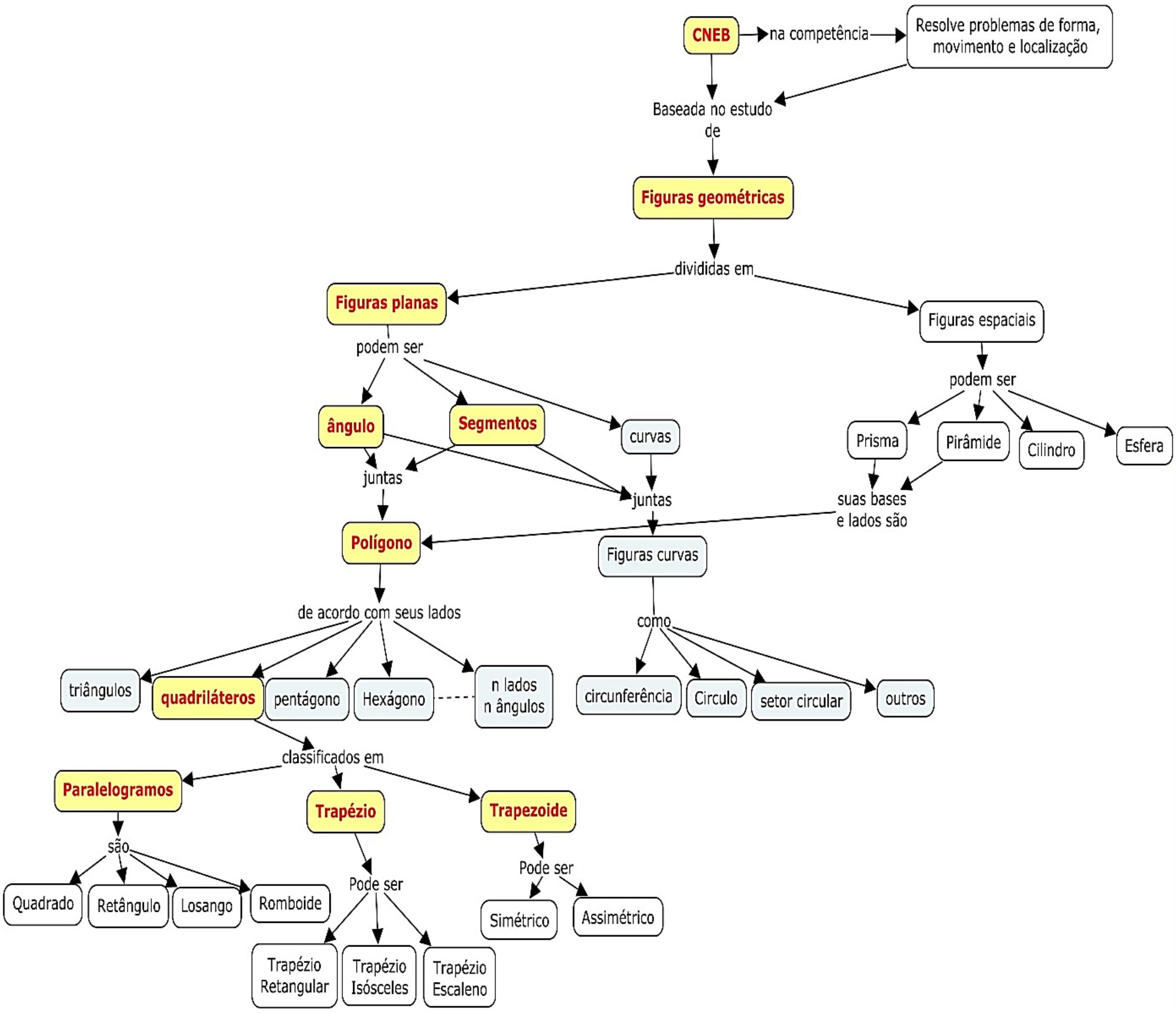
A Teoria Antropológica do Didático considera a problemática ecológica (CHEVALLARD, 1989b) que segundo Artaud é como um meio de questionar o real.

> O que existe, e por quê? Mas também, o que não existe e por quê? Poderia existir? Sobre quais condições? Inversamente, dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver ou, pelo contrário, quais são impedidos de viver nessas condições? (ARTAUD, 1998, p. 101, tradução nossa).

Segundo a autora, os objetos matemáticos e os objetos didáticos “vivem” em associação a partir de seu “nascimento” por organizações matemáticas, estudadas por pessoas ou instituições, que apresentam em seu seio objetos que não podem viver de maneira isolada. Para Almouloud (2007), a análise ecológica amplia o campo de análise e permite abordar problemas entre diferentes objetos do saber a ensinar e é organizada “em torno de dois conceitos: o *habitat* que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual desse objeto de saber, e o *nicho* que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage” (ALMOULOUD, 2015, p. 15).

Assim, baseados na análise do currículo e dos livros didáticos, podemos dizer que os quadriláteros, no sistema peruano, têm seu ***habitat*** na competência: resolve problemas de forma, movimento e localização, nos níveis primário e secundário (Figura 44), que para ser desenvolvida, necessariamente, solicita conteúdos de Geometria.

Figura 44 – Integração dos objetos envolvidos no desenvolvimento da competência 3



Fonte: Elaboração própria.

Entendemos que, em Geometria, o estudo das figuras geométricas é dividido em figuras planas e espaciais. No primeiro caso, temos o estudo de polígonos, de paralelismo, de perpendicularidade, de paralelismo de retas intersectadas por uma transversal, de ângulos e seus tipos, que alimentam o estudo de quadriláteros, que por sua vez, alimenta o estudo de seus diferentes tipos e de sua classificação, além do estudo de figuras espaciais, particularmente de prismas e pirâmides, nesses níveis de ensino. As caixas de cor amarela, na Figura 44, mostram o percurso do estudo de quadriláteros no currículo peruano. É importante mencionar que utilizam termos como figuras bidimensionais, para se referir a figuras que têm comprimento e largura; ou tridimensionais para aquelas que têm comprimento, largura e altura sem explicar seu significado, ou seja, no caso das bidimensionais há figuras que só têm perímetro e outras que têm perímetro e área. Na figura 44 podemos identificar esse equívoco quando o ponto, que teoricamente não tem dimensão, sendo categorizado como uma figura bidimensional e ângulo que pode ser definido por semirretas ou por região.

Como os objetos matemáticos não podem viver isolados, mas precisam ter um lugar em uma organização matemática mostramos na Figura 44, o ***nicho*** dos quadriláteros, ou seja, sua funcionalidade. O estudo de quadriláteros, alimentado pelos objetos já citados, tem a função de dar subsídios, ou seja, produzir conhecimentos para serem mobilizados tanto para determinar critérios para sua classificação, quanto para definir seus tipos em cada uma das classificações, além de serem mobilizados para o estudo de figuras espaciais e em representações gráficas no plano cartesiano.

Esse estudo, nos dá indícios de algumas restrições possíveis nos níveis de codeterminação didática para o estudo de quadriláteros. Nos níveis **sociedade/escola** uma restrição pode ser as contínuas mudanças no currículo, cuja definição por competências específicas, para cada área curricular, estão isoladas uma das outras.

Além disso, no Peru há um sistema informático único chamado Sistema de Informação de Apoio à Gestão da Instituição Educacional (SIAGIE) onde as escolas privadas e públicas devem informar as notas dos estudantes a cada final de bimestre, o que não flexibiliza o tempo de aprendizagem dos alunos. No nível **pedagogia** podemos considerar uma restrição a necessidade de avaliação por competências e capacidades, de acordo com os estândares de aprendizagem, que determina o desempenho para cada ano de escolaridade e a organização sequencial dos programas de estudo. Por outro lado, entendemos que, no nível de disciplina, a área curricular de matemática dá condições para o ensino focar na resolução de problemas, quando sugere que o ensino deve se desenvolver a partir de situações do cotidiano ou da realidade, o que permitiria o desenvolvimento de um PEP no ensino básico. No nível **disciplina** identificamos como restrição o fato de que os quadriláteros devem ser estudados apenas na competência “resolve problemas sobre forma, movimento e localização” que abrange conteúdos de geometria e, nos anos finais do nível secundário, conteúdos de trigonometria, pois o estudo de quadriláteros se desenvolve no sector de polígonos sem conexão com outros sectores como movimentos no plano, o que aparentemente significa que há uma atomização em seu estudo, por mais que esses conteúdos façam parte da mesma competência.

e) Análises praxeológica do livro didático

Iniciamos esta análise buscando, de maneira geral, o foco dado ao ensino de quadriláteros a partir de algumas questões: como o livro didático define quadriláteros? Como e quais quadriláteros são apresentados nos livros didáticos? Como os quadriláteros são classificados nos livros didáticos? Na sequência apresentamos a análise praxeológica dos livros, baseada na TAD, por meio da identificação de praxeologias matemáticas, ou seja, na identificação de tipos de tarefa, tarefas e técnicas e de seus respectivos discursos tecnológico-teórico para responder à questão: que praxeologias os livros didáticos apresentam?

$\mathbf{Q_1}$: Como definem os quadriláteros?

Como resposta à esta primeira questão encontramos cinco maneiras diferentes para definir quadriláteros, como:

1) Um polígono de quatro lados.
2) A união de quatro segmentos de reta coplanares determinados por quatro pontos, em que três deles não são colineares, cada segmento tem seus extremos coincidentes com extremos de outros dois.
3) Uma figura plana fechada de quatro lados.
4) Uma porção de um plano delimitado por quatro retas.
5) Uma figura fechada por quatro segmentos de linha reta.

Na análise dos livros didáticos observamos que quatro dos livros (LD2, LD3, LD4 e LD7) definem quadriláteros como polígono de quatro lados; LD5, como uma linha poligonal fechada de quatro lados. O livro LD1 não define os quadriláteros porque seu estudo se centra em seu perímetro e área e o livro LD6 não define o que é um quadrilátero, mas define o que é um quadrilátero simétrico em relação à uma reta e em relação a um ponto. No entanto os autores não deixam claro se as figuras definidas possuem área ou não, e as consequências dessas definições nos estudos seguintes.

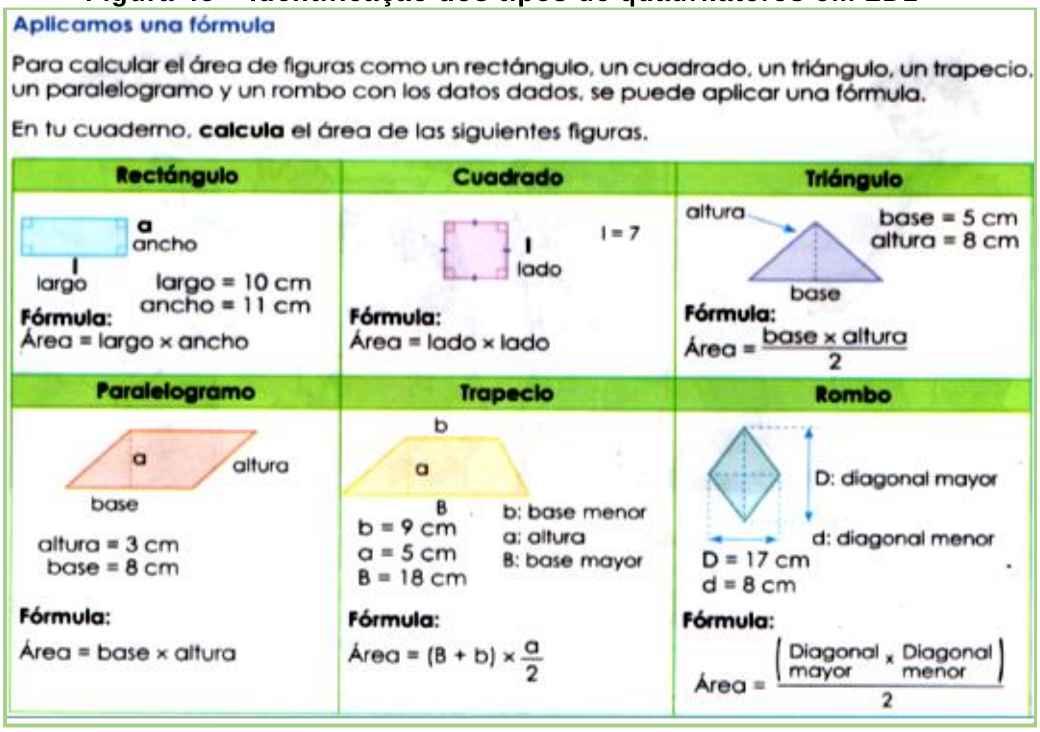
Q_2: Como identificam os tipos de quadriláteros e quais são eles?

Na busca de respostas para a segunda questão encontramos que os autores identificam os tipos de quadriláteros por:

1) Seu nome
2) Suas definições
3) Propriedades
4) Representações figurais

Pudemos observar que todos os sete livros identificam os tipos de quadriláteros por seus nomes. O livro LD1, que não apresenta uma definição de quadriláteros, os identifica apenas por seus nomes e representações figurais, porque foca no estudo da medida de suas áreas, priorizando a apresentação de “fórmulas”, e é apresentado junto com os triângulos no capitulo que é chamado triângulos e quadriláteros, como pode ser observado na Figura 45, onde se vê que a palavra “área” pode adquirir diferentes significados, mas nenhum conduz ao significado de grandeza, pois todas se relacionam a números.

Figura 45 – Identificação dos tipos de quadriláteros em LD1


Aplicamos una fórmula

Para calcular el área de figuras como un rectángulo, un cuadrado, un triángulo, un trapecio, un paralelogramo y un rombo con los datos dados, se puede aplicar una fórmula.

En tu cuaderno, **calcula** el área de las siguientes figuras.

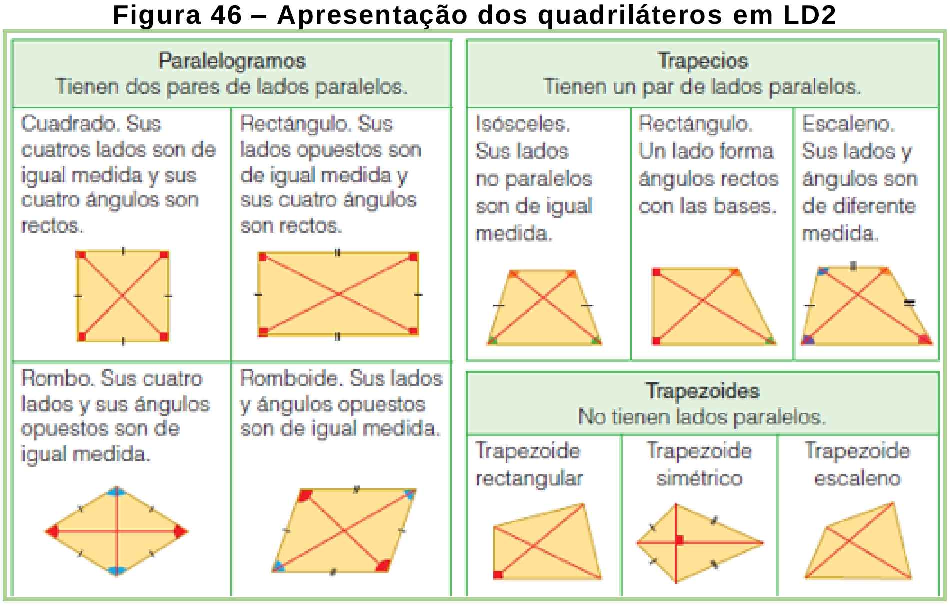
Rectángulo	Cuadrado	Triángulo
a ancho; largo largo = 10 cm ancho = 11 cm **Fórmula:** Área = largo × ancho	l lado; l = 7 **Fórmula:** Área = lado × lado	altura; base base = 5 cm altura = 8 cm **Fórmula:** Área = $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$
Paralelogramo	**Trapecio**	**Rombo**
a; altura; base altura = 3 cm base = 8 cm **Fórmula:** Área = base × altura	b; a; B b = 9 cm a = 5 cm B = 18 cm b: base menor a: altura B: base mayor **Fórmula:** Área = (B + b) × $\frac{a}{2}$	D: diagonal mayor d: diagonal menor D = 17 cm d = 8 cm **Fórmula:** Área = $\frac{\left(\text{Diagonal mayor} \times \text{Diagonal menor}\right)}{2}$

Fonte: Matemática 6: livro de texto (MINEDU, 2012, p. 108)

Utiliza ainda uma mistura de linguagem matemática com linguagem materna, como se pudéssemos operar com palavras, o que contradiz as orientações curriculares para a utilização de diferentes linguagens, por exemplo, para o retângulo poderia apresentar o discurso: a medida da área de um retângulo se obtém pelo produto das medidas de seus dois lados de medidas diferentes.

O livro LD 2, que quadriláteros como polígono de quatro lados, identifica os quadriláteros por suas definições e por representações figurais (Figura 46). Primeiro, define os paralelogramos como tendo dois pares de lados paralelos, para então definir seus tipos: quadrado, retângulo, losango e paralelogramo. A seguir, define os trapézios como tendo um par de lados paralelos, para especificar seus tipos definindo os isósceles, os retângulos e os escalenos, para então definir os trapezoides como os que não tem lados paralelos e identificar, por suas figuras, os que são retangular, simétrico e escaleno. Aqui, questionamos a identificação de um trapezoide simétrico, porque um objeto é simétrico a um outro, com relação a um referencial, ponto ou reta, no caso aqui apresentado, deveria ser identificado como um trapezoide que possui dois eixos de simetria.

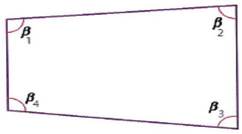
Figura 46 – Apresentação dos quadriláteros em LD2



Fonte: Matemática 6: livro de texto (Santillana, 2018a, p. 52)

O livro LD3, nível secundário, que define quadriláteros como polígono de quatro lados, inicia com a observação “para empregar as propriedades dos polígonos necessitamos de álgebra”, apresenta então a definição de retângulo como “um quadrilátero com quatro ângulos retos, quer dizer, de 90°, por isso sua soma é 360°. Em um retângulo seus lados são iguais dois a dois”, mas não apresenta qualquer representação figural de um retângulo e de acordo com a definição, o quadrado também seria um retângulo.

Figura 47 – Apresentação dos quadriláteros em LD3



Conexiones

En general, para emplear las propiedades de los polígonos necesitamos del álgebra.

Propiedades de los rectángulos

El **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, es decir, de 90°, por lo que la suma de ellos es 360°. En un rectángulo sus lados son iguales dos a dos.

Ejemplo 5

Verifica si la figura 43.8 es un rectángulo.

Solución

Mide los ángulos internos del cuadrilátero de la figura y luego súmalos.

$$\beta_1 = 85°;\ \beta_2 = 85°;\ \beta_3 = 95°;\ \beta_3 = 100°$$

$$85° + 85° + 95° + 100° = 365°$$

El cuadrilátero de la figura 43.8 no es un rectángulo, porque sus ángulos internos no son rectos. También puedes usar regla y compás para verificar que los ángulos no son rectos.

Figura 43.8

Propiedades de los rombos

El **rombo** es un cuadrilátero equilátero y de ángulos iguales dos a dos. En un rombo, sus diagonales son perpendiculares.

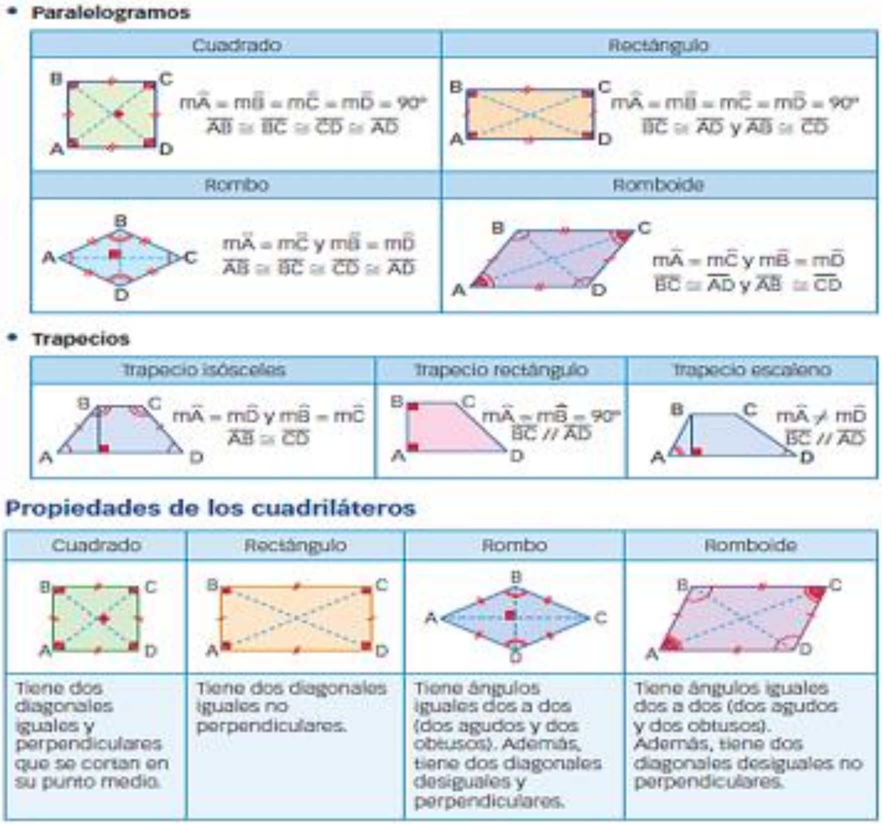
Fonte: Matemática 1: livro de texto (MINEDU, 2016**a**, p. 120)

Na sequência apresenta uma figura e pede para que seja verificado se representa um retângulo e mostra a solução por medição de seus ângulos. Acrescenta ainda a definição de losango como “um quadrilátero equilátero e de ângulos iguais dois a dois” e imediatamente que “em um losango suas diagonais são perpendiculares.

O livro LD4, que define quadriláteros como polígono de quatro lados, identifica os quadriláteros, no livro de texto, baseado em definições, representações figurais e notações matemáticas.

Na Figura 48 entendemos que quando trata de paralelogramos: identifica, quadrado, retângulo, losango e paralelogramo definindo-os por igualdade de medidas dos ângulos e apresenta a congruência de segmentos como propriedade. Os trapézios, isósceles, retângulo e escaleno, são identificados por igualdade de medidas de ângulos, além de reforçar o par de lados paralelos. As representações figurais levam ao entendimento de que representam regiões, ou seja, elas têm área, porque todas estão pintadas, o que pode ser entendido como uma contradição à definição de quadriláteros assumida. No final, apresenta o tópico “propriedades dos quadriláteros”, focando nos paralelogramos e as apresentando em linguagem natural.

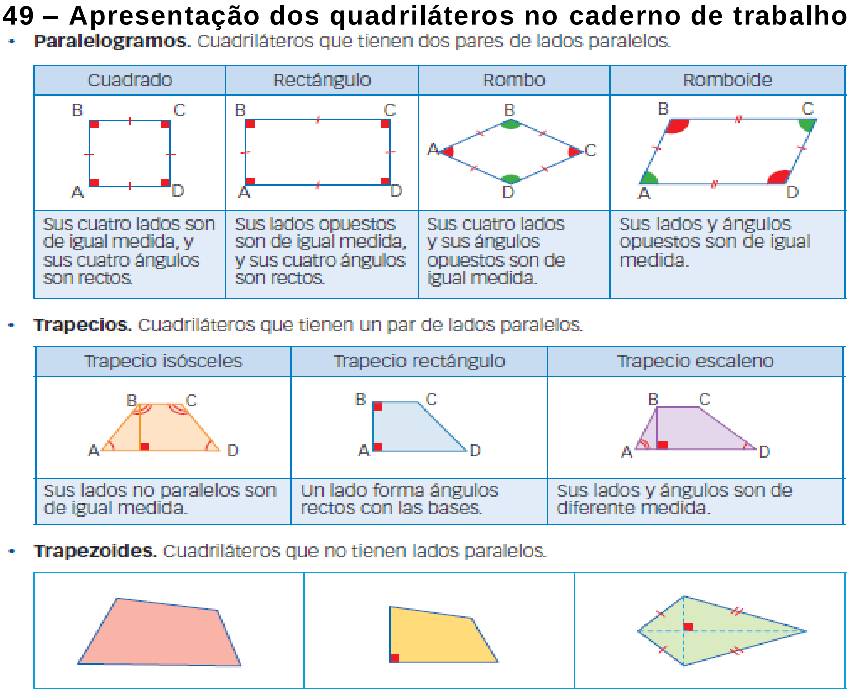
Figura 48 – Apresentação dos quadriláteros no livro texto em LD4



Fonte: Matemática 1: livro de texto (Santillana, 2018b, p. 336)

No caderno de trabalho, desse livro (Figura 49), os mesmos paralelogramos são apresentados por outras representações figurais que, por não estarem pintadas podem ser entendidas como sendo formadas apenas por seus lados, ou seja, como tendo perímetro, mas não área, o que não acontece para os trapézios e trapezoides.

Figura 49 – Apresentação dos quadriláteros no caderno de trabalho em LD4



Fonte: Matemática 1: caderno de trabalho (Santillana, 2018b, p. 324)

Enquanto no livro texto definem os paralelogramos e os trapézios por medidas de ângulos utilizando notação matemática, aqui os definem por paralelismo de seus lados usando língua natural. Os trapezoides que não foram tratados no livro texto, aqui são definidos como sendo quadriláteros que não têm lados paralelos, seguidos de três figuras como exemplo, sendo que a última representa um deltoide (pipa).

O autor do livro LD5, que define quadrilátero como “linha poligonal fechada de quatro lados”, associa seu estudo a um contexto de construções pré-colombianas, por uma foto, afirmando que nelas predominam figuras de quatro lados (Figura 50). Define quadrilátero convexo e, em seguida, apresenta a propriedade que garante que “em todo quadrilátero, convexo ou não, a soma das medidas de seus ângulos internos é 360°.” Apresenta, então uma classificação de quadriláteros convexos pelo critério do número de lados paralelos. Quando possuem dois pares de lados paralelos se chamam paralelogramos e podem ser paralelogramo, losango, retângulo e quadrado, por outro lado se possuem um para de lados paralelos se chamam trapézios e podem ser isósceles, escalenos e retângulos e, finalmente, se não possuem nenhum par de lados paralelos se chamam trapezoides.

Figura 50 – Apresentação dos quadriláteros em LD5


Tema 5

Cuadriláteros

En las construcciones realizadas por los antiguos peruanos podemos encontrar diversas formas, como en el caso de Chan Chan, en donde predominan figuras de cuatro lados, que son llamadas cuadriláteros.

Se denomina **cuadrilátero** a la línea poligonal cerrada de cuatro lados.

Chan Chan fue la capital de la cultura preínca chimú. En el siglo XV, llegó a ser la mayor ciudad precolombina. Constaba de nueve grandes complejos rectangulares.

Propiedad de los cuadriláteros

- En todo cuadrilátero, convexo o no, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 360°.

Clasificación de los cuadriláteros convexos

Los cuadriláteros convexos se clasifican según el número de lados paralelos.

a. Si tienen dos pares de lados paralelos, se llaman **paralelogramos**. Estos, a su vez, pueden ser: romboide, rombo, rectángulo y cuadrado.

b. Si tienen un par de lados paralelos, se llaman **trapecios**. Estos, a su vez, pueden ser: trapecios isósceles, trapecios escalenos y trapecios rectángulos.

c. Si no tienen ningún par de lados paralelos, se llama **trapezoide**.

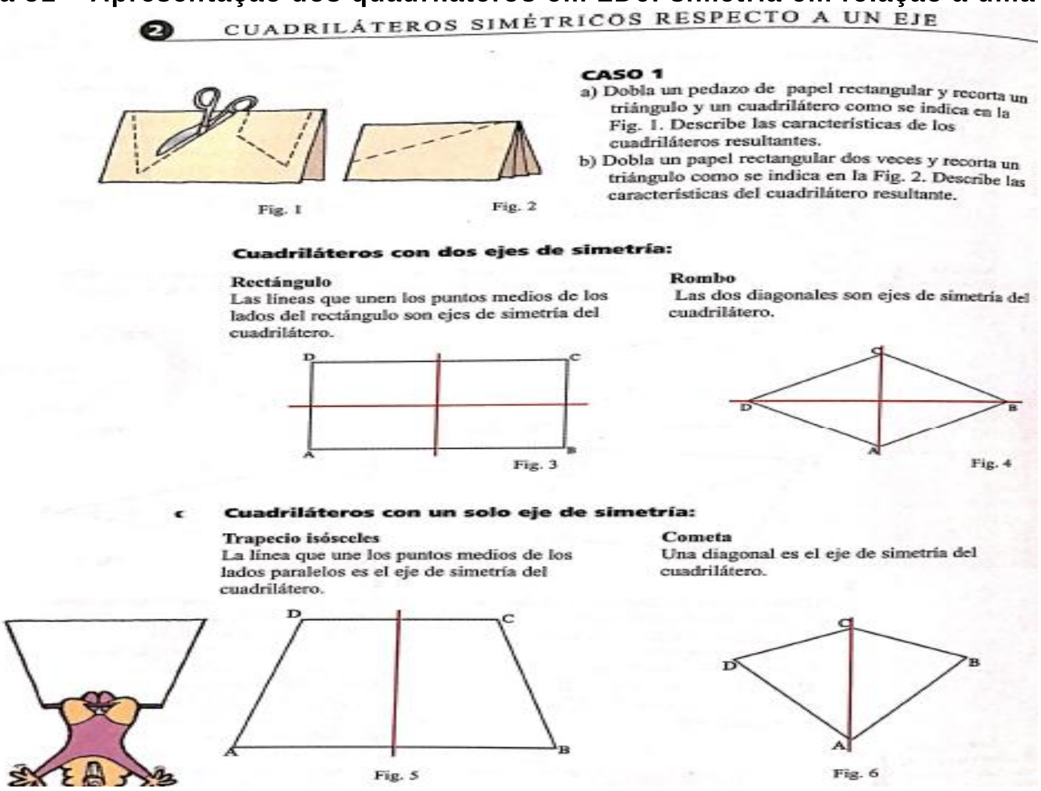
¿Sabías que...?

Se llama cuadrilátero convexo al cuadrilátero cuyos

Fonte: Matemática 2: livro de texto (MINEDU, 2016b, p. 101)

No livro LD6, no livro de texto, não define especificamente o que é um quadrilátero, mas o que é um quadrilátero simétrico em relação a uma reta, (Figura 51), mas que na realidade quer dizer que o quadrilátero tem eixos de simetria. O autor apresenta os quadriláteros, baseado em duas atividades, com material manipulativo, em que os alunos devem recortar folhas de papel retangulares e descrever características das figuras obtidas. Identifica então, os que têm dois eixos de simetria: os retângulos (os eixos passam pelos pontos médios de lados opostos) e os losangos (suas diagonais são os eixos), os que tem apenas um eixo de simetria: os trapézios isósceles (o eixo passa pelos pontos médios dos lados paralelos) e os deltoides (pipa) (uma diagonal é o eixo).

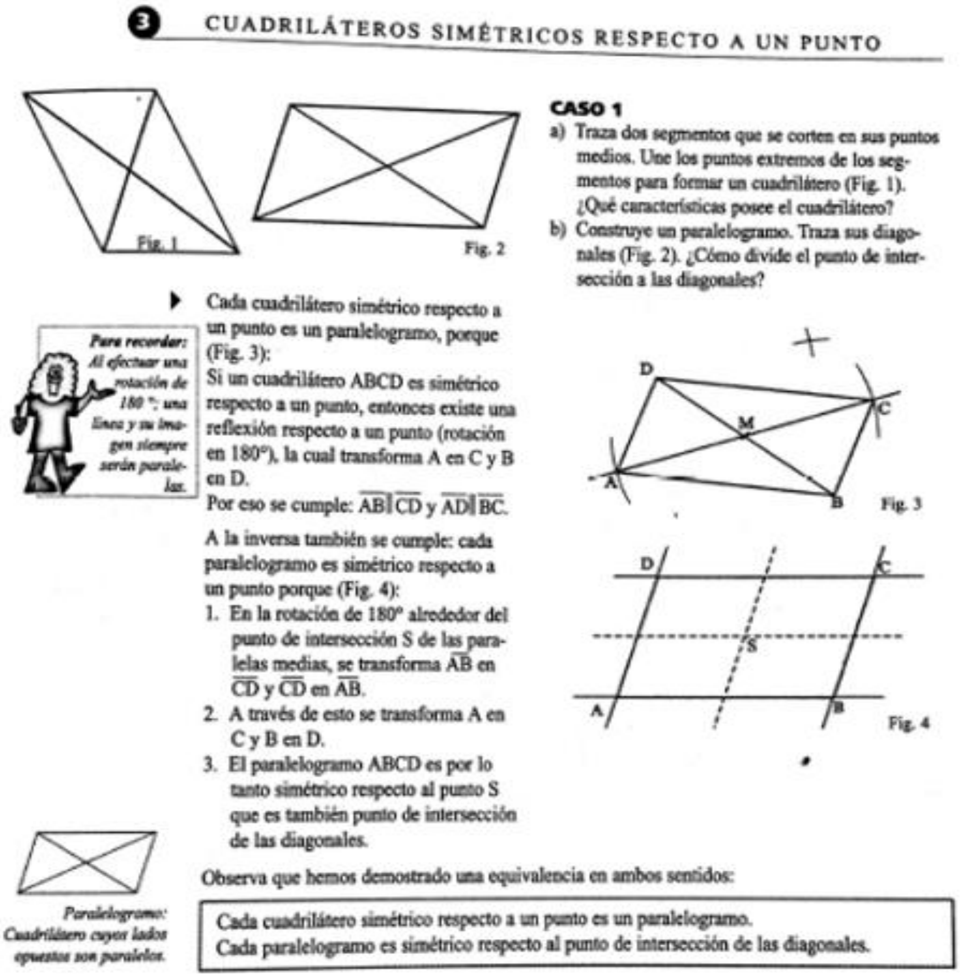
Figura 51 – Apresentação dos quadriláteros em LD6: simetria em relação a uma reta



Fonte: Matemática 2, (INSTITUTO APOYO, 2002, p. 116)

Nesse mesmo livro, o autor apresenta um estudo de quadriláteros simétricos em relação a um ponto para demonstrar a equivalência entre as afirmações: “cada quadrilátero simétrico em relação a um ponto é um paralelogramo” (na realidade se os vértices opostos de um quadrilátero são simétricos em relação a um ponto então é um paralelogramo) e “cada paralelogramo é simétrico em relação ao ponto de intersecção das diagonais” (ou seja, todo paralelogramo tem seus vértices opostos simétricos em relação ao ponto de intersecção das diagonais) e, para esta, usa rotação e não simetria em relação a um ponto para justificar.

Figura 52 – Apresentação dos quadriláteros em LD6: simetria em relação a um ponto



3 CUADRILÁTEROS SIMÉTRICOS RESPECTO A UN PUNTO

Fig. 1 Fig. 2

CASO 1

a) Traza dos segmentos que se corten en sus puntos medios. Une los puntos extremos de los segmentos para formar un cuadrilátero (Fig. 1). ¿Qué características posee el cuadrilátero?

b) Construye un paralelogramo. Traza sus diagonales (Fig. 2). ¿Cómo divide el punto de intersección a las diagonales?

Para recordar: Al efectuar una rotación de 180 °, una línea y su imagen siempre serán paralelas.

Cada cuadrilátero simétrico respecto a un punto es un paralelogramo, porque (Fig. 3):
Si un cuadrilátero ABCD es simétrico respecto a un punto, entonces existe una reflexión respecto a un punto (rotación en 180°), la cual transforma A en C y B en D.
Por eso se cumple: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

A la inversa también se cumple: cada paralelogramo es simétrico respecto a un punto porque (Fig. 4):

1. En la rotación de 180° alrededor del punto de intersección S de las paralelas medias, se transforma $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$ y $\overline{CD}$ en $\overline{AB}$.
2. A través de esto se transforma A en C y B en D.
3. El paralelogramo ABCD es por lo tanto simétrico respecto al punto S que es también punto de intersección de las diagonales.

Paralelogramo: Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Observa que hemos demostrado una equivalencia en ambos sentidos:

Cada cuadrilátero simétrico respecto a un punto es un paralelogramo.
Cada paralelogramo es simétrico respecto al punto de intersección de las diagonales.

Fonte: Matemática 2, (INSTITUTO APOYO, 2002, p. 117)

O livro LD7, que define quadriláteros como polígono de quatro lados (Figura 53) e apresenta a propriedade de que a soma das medidas de seus internos é igual à soma de seus ângulos externos. Em seguida afirma que pelas medidas de seus ângulos os quadriláteros podem ser convexos ou não e pelo paralelismo de seus lados podem ser paralelogramos, trapézios e trapezoides. Entendemos que assume como definição que os paralelogramos têm dois pares de lados paralelos e como propriedades que “suas diagonais se cortam em seu ponto médio”, “que seus ângulos opostos são congruentes”, “que seus ângulos adjacentes são suplementares” para então identificar o quadrado, o retângulo, o losango e o paralelogramo. Define trapézio como o quadrilátero que tem um par de lados paralelos e os identifica como isósceles e escalenos de acordo com a medida dos lados que não são paralelos. Define os trapezoides como sendo os quadriláteros que não têm pares de lados paralelos e que podem ser simétricos e assimétricos, talvez querendo expressar que possuem ou não eixos de simetria.

Figura 53 – Apresentação dos quadriláteros em LD7

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. La suma de sus ángulos internos es 360° al igual que la suma de sus ángulos externos.

- Por la medida de sus ángulos, los cuadriláteros se clasifican en convexos y no convexos (cóncavos).
- Por el paralelismo de sus lados, los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

  Paralelogramos. Tienen dos pares de lados paralelos y sus diagonales se cortan en su punto medio. Además, sus ángulos opuestos son congruentes, y sus ángulos adyacentes son suplementarios. Se clasifican en cuadrado, rectángulo, rombo y romboide

  Trapecios. Tienen un par de lados paralelos. Se clasifican según la medida de sus lados no paralelos en trapecios isósceles y trapecios escalenos.

  Trapezoides. No tienen pares de lados paralelos. Pueden ser trapezoides simétricos y asimétricos.

Fonte: Matemática 3: livro de texto (SANTILLANA, 2018c, p. 62)

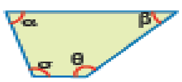
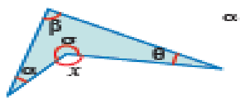
No caderno de trabalho, do mesmo livro (Figura 54) repete os dois primeiros itens da Figura 53 e, na sequência, apresenta a figura de um quadrilátero convexo e um não convexo realçando a soma das medidas dos ângulos internos, para então repetir a classificação de quadriláteros por paralelismo de seus lados, para então focar, especificamente, nos paralelogramos, repetindo definição e propriedades e apresentando representações figurais que ressaltam os elementos da definição e das propriedades e estas escritas em linguagem materna.

Figura 54 – Apresentação dos quadriláteros em LD7

9 Cuadriláteros: paralelogramos

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. La suma de sus ángulos internos es 360°.

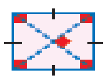
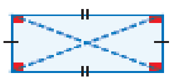
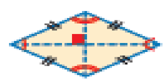
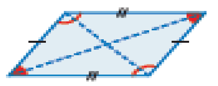
- Por la medida de sus ángulos, los cuadriláteros se clasifican en convexos y no convexos (cóncavos).

Cuadrilátero convexo	Cuadrilátero cóncavo
 $\alpha + \beta + \theta + \sigma = 360°$	 $\alpha + \beta + \theta + \sigma = 360°$ $x = \alpha + \beta + \sigma$

- Por el paralelismo de sus lados, los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramos

Tienen dos pares de lados paralelos y sus diagonales se cortan en su punto medio. Además, sus ángulos opuestos son congruentes, y sus ángulos adyacentes son suplementarios. Se clasifican en:

Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
			
Lados congruentes, ángulos rectos y diagonales perpendiculares.	Lados opuestos congruentes, cuatro ángulos rectos y diagonales congruentes.	Lados congruentes, ángulos opuestos congruentes y diagonales perpendiculares.	Lados opuestos congruentes y diagonales de distinta medida.

Fonte: Matemática 3: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018c, p. 270)

Quanto aos quadriláteros identificados, nesses livros didáticos, verificamos que, com exceção de LD1, LD3 e LD6, todos apresentaram os paralelogramos, os trapézios e os trapezoides por quantidade de pares de lados paralelos e, portanto, focaram nos paralelogramos: quadrado, retângulo, losango e paralelogramo (romboide); nos trapézios: isósceles, retângulo e escaleno. Quanto aos trapezoides LD4 apresenta figuras que os representam, mas não os identifica; LD5 os define, mas não os identifica nem por figuras; LD6 não cita trapezoide, mas apresenta a figura do deltoide (pipa/cometa) porque possui um eixo de simetria. Já LD2 apresenta os trapezoides por figuras, em que ressalta algumas características, como retangular (possui um ângulo reto), simétrico (as diagonais perpendiculares como eixos de simetria e dois pares de lados de mesma medida) e escaleno (diagonais não perpendiculares e os lados de medidas diferentes) e LD7 os define e os identifica como simétricos e assimétricos, sem qualquer definição ou figura. Esses dois livros, se os professores, não estiverem atentos, podem conduzir a uma compreensão equivocada da noção de simetria, pois só podemos falar de objetos simétricos a um outro, em relação a uma reta ou a um ponto, ou seja, em ambos os casos os autores deveriam ter se referido a figuras que possuem eixos de simetria. Quanto ao livro LD1 ele apresenta apenas o retângulo, o quadrado, o paralelogramo, o trapézio e o losango sem qualquer definição específica, porque está interessado em trabalhar com fórmulas para o cálculo de medida de área e LD3 identifica apenas o retângulo e o losango para apresentar o enunciado de uma propriedade para cada um, sem qualquer justificativa ou figura. Outro ponto a ser destacado é que livros como LD4 e LD7 conduzem os alunos a entender que os tipos de quadriláteros têm várias definições, o que impede a compreensão de que podemos escolher uma definição e, feita esta escolha, as outras se tornam propriedades que devem ser justificadas.

Nos baseando nas classificações que encontramos em nosso estudo epistemológico buscamos identificar se os livros se enquadram em algumas delas. Observamos que cinco dos sete livros escolhidos (LD1, LD2, LD4, LD5 e LD7) classificam os quadriláteros por paralelismo dos lados. Além disso, esses livros utilizam a classificação por partição proposta por De Villiers (1994), isto é, a classificação é feita como se fossem conjuntos disjuntos. No livro LD3, a classificação dos quadriláteros é feita somente por partição, isto é, não apresenta nenhuma hierarquia. E o livro LD6 apresenta apenas um esquema, onde propõe uma classificação dos quadriláteros a partir de eixos de simetria (tem dois eixos, um eixo ou um ponto de simetria).

No próximo item, propomos uma resposta à nossa terceira pergunta que está baseada na análise dos livros a partir dos tipos de tarefas, tarefas e técnicas.

Q_3: Que praxeologias os livros didáticos apresentam?

Para dar resposta a esta pergunta usamos a seguinte notação para identificar os elementos de uma praxeologia: T_i para o tipo de tarefa i; t_{i_j} para a tarefa j do tipo de tarefa i; $\tau_{i\_j\_k}$ para a técnica k, que permite cumprir a tarefa j do tipo i e $[\theta/\Theta]_n$ para representar o discurso tecnológico- teórico que justifica a técnica utilizada. Apresentamos no Quadro 8, as praxeologias encontradas considerando que os sete livros didáticos, em seu paradigma monumentalista, inicia suas obras apresentando as teorias entendendo que, depois, serão utilizadas para justificar as técnicas que serão trabalhadas. Assim, na coluna dedicada ao discurso tecnológico-teórico apresentamos nos baseamos na apresentação do assunto realizada pelos autores e nos referenciais que devem ser mobilizados para justificar cada uma das técnicas, tendo em vista que não encontramos explicitamente praxeologias bem determinadas. Na sequência mostramos alguns exemplos.

Quadro 8 – Análise praxeológica dos livros didáticos

Tipo de tarefa T	Tarefa t	Técnica τ	Passos da técnica	Bloco teórico-tecnológico $[\theta/\Theta]$
T_1: Reconhecer relações entre as retas suporte dos lados dos quadriláteros.	t_{1_1}: Reconhecer o paralelismo entre retas suporte dos lados dos quadriláteros.	$\tau_{1\_1\_1}$	Passo1: Colocar um lado do ângulo reto do esquadro coincidindo com um dos lados do quadrilátero. Passo2: Colocar a régua no outro lado do ângulo reto do esquadro. Passo3: Deslocar o esquadro até o outro lado do quadrilátero Passo4: Reconhecer os lados paralelos.	$[\theta/\Theta]_1$: Definição de retas paralelas. $[\theta/\Theta]_2$: Definição de retas secantes.
		$\tau_{1\_1\_2}$	Passo1: Prolongar os lados do quadrilátero. Passo2: Observar se os lados se cortam ou não em um ponto. Passo3: Concluir se os lados são paralelos.	
	t_{1_2}: Reconhecer a perpendicularidade entre retas suporte dos lados dos quadriláteros.	$\tau_{1\_2\_1}$	Passo1: Colocar o vértice do ângulo reto do esquadro e um de seus lados coincidindo com o vértice do quadrilátero e um de seus lados. Passo2: Observar se o outro lado do esquadro coincide com o outro lado do quadrilátero, isto é, se forma um ângulo de 90°. Passo3: Identificar os lados perpendiculares	$[\theta/\Theta]_3$: Definição de retas perpendiculares.
		$\tau_{1\_2\_2}$	Passo1: Colocar o ponto de 0º do transferidor na interseção de dois lados do quadrilátero e sua linha guia coincidindo com um dos lados do quadrilátero. Passo2: Observar que seja formado um ângulo de 90° com o outro lado do quadrilátero. Passo3: Identificar os lados perpendiculares	
T_2: Calcular a medida de ângulos internos de um quadrilátero.	t_{2_1}: Estimar a medida de ângulos.	$\tau_{2\_1\_1}$	Passo1: Observar o ângulo a estimar sua medida. Passo2: Comparar o ângulo estimado com um ângulo de referência (90°, 45° etc.). Passo3: Anotar a medida do ângulo.	$[\theta/\Theta]_4$: Classificação de ângulos por sua medida.
	t_{2_2}: Medir ângulos e comparar suas medidas.	$\tau_{1\_2\_2}$		$[\theta/\Theta]_5$: Postulado da medida de um ângulo.
	t_{2_3}: Determinar a medida de um ângulo interno desconhecido de um quadrilátero baseado em um enunciado em língua natural.	$\tau_{2\_3\_1}$	Passo 1: Realizar representações figurais do quadrilátero baseado no enunciado Passo 2: Medir todos os ângulos do quadrilátero. Passo 3: Somar as medidas dos ângulos do quadrilátero. Passo 4: Comparar a medida obtida com 360°. Passo 5: Determinar a medida do angulo desconhecido.	$[\theta/\Theta]_6$: Propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.
		$\tau_{2\_3\_2}$	Passo 1: Realizar representações figurais dos dados do quadrilátero com base no enunciado. Passo 2: Somar as medidas dos ângulos conhecidos do quadrilátero. Passo 3: Fazer uma subtração entre 360° e a soma determinada no passo anterior. Passo 4: Determinar a medida do ângulo desconhecido.	
	t_{2_4}: Determinar a medida de ângulos internos desconhecidos	$\tau_{2\_4\_1}$	Passo 1: Somar as medidas dos quatro ângulos do quadrilátero da figura. Passo 2: Compara a 360°. Passo 3: Determinar a medida do angulo desconhecido.	$[\theta/\Theta]_6$: Propriedade da soma das medidas dos

	de um quadrilátero baseado em sua representação figural.	$\tau_{2\_4\_2}$	Passo 1: Somar as medidas dos ângulos conhecidos do quadrilátero. Passo 2: Fazer uma subtração entre 360° e a soma obtida Passo 3: Determinar a medida do ângulo desconhecido.	ângulos internos de um quadrilátero.
T_3: Identificar propriedades das diagonais de quadriláteros.	t_{3_1}: Verificar a congruência das diagonais de quadriláteros.	$\tau_{3\_1\_1}$	Passo 1: Medir uma das diagonais com uma régua. Passo 2: Medir a outra diagonal com a régua. Passo 3: Comparar a medida das duas diagonais. Passo 4: Estabelecer que as medidas das diagonais são iguais. Passo 5: Concluir se as diagonais são congruentes ou não.	$[\theta/\Theta]_7$: Congruência de segmentos.
		$\tau_{3\_1\_2}$	Passo 1: Colocar a ponta seca do compasso em uma das extremidades de uma diagonal e abri-lo até o grafite coincidir com a outra extremidade dessa diagonal. Passo 2: Manter a abertura do compasso para compará-la com a outra diagonal. Passo 3: Determinar se as medidas das diagonais são iguais. Passo 4: Concluir se as diagonais são congruentes ou não.	
	t_{3_2}: Verificar a perpendicularidade das diagonais de quadriláteros.	$\tau_{1\_2\_2}$		
		$\tau_{1\_1\_1}$		
	t_{3_3}: Verificar se o ponto de intersecção das diagonais coincide com seus pontos médios.	$\tau_{3\_3\_1}$	Passo1: Medir com uma régua a distância entre o ponto de intersecção de uma diagonal com cada uns dos seus extremos. Passo 2: Determinar se o ponto de intersecção é seu ponto médio. Passo 3: Fazer os passos 1 e 2 para a outra diagonal. Passo 4: Determinar se as diagonais se intersectam ou não em seus pontos médios.	$[\theta/\Theta]_8$: Definição de ponto médio de um segmento.
		$\tau_{3\_1\_2}$		
T_4: Identificar quadriláteros	t_{4_1}: Identificar os quadriláteros por propriedades baseado em uma representação figural.	$\tau_{4\_1\_1}$	Passo 1: Observar a representação figural do quadrilátero. Passo2: Discriminar suas características. Passo3: Discriminar suas propriedades. Passo4: Relacionar a figura com as propriedades do quadrilátero representado.	$[\theta/\Theta]_9$: Definições dos tipos de quadriláteros. $[\theta/\Theta]_{10}$: Classificação dos quadriláteros.
	t_{4_2}: Identificar um quadrilátero por seu nome e realizar sua representação figural.	$\tau_{4\_2\_1}$	Passo 1: Identificar definição ou propriedades do quadrilátero nomeado. Passo 2: Realizar a representação figural do quadrilátero.	$[\theta/\Theta]_9$: Definições dos tipos de quadriláteros.
T_5: Construir quadriláteros.	Construir um quadrilátero dado seu nome. (este é o exemplo de LD1) t_{5_1}: Construir um quadrado por sua definição.	$\tau_{5\_1\_1}$	Passo 1: Traçar um segmento AB. Passo 2: Traçar retas perpendiculares ao segmento AB nos pontos A e B. Passo 3: Fazer coincidir a abertura do compasso com o comprimento do segmento AB. Passo 4: Manter a abertura do compasso, colocar sua ponta seca no ponto A e traçar um arco de circunferência que intersecte a reta perpendicular que passa por A, para determinar o ponto D. Passo 5: Manter a abertura do compasso, colocar sua ponta seca no ponto B e traçar um arco de circunferência que intersecte a reta perpendicular que passa por B, para determinar o ponto C.	$[\theta/\Theta]_1$: Definição de retas paralelas. $[\theta/\Theta]_3$: Definição de retas perpendiculares. $[\theta/\Theta]_{13}$: Definição de quadrado.

			Passo 6: Traçar o segmento DC.	
		$\tau_{5\_1\_2}$	Passo 1: Traçar duas retas perpendiculares que se interceptam em um ponto O. Passo 2: Traçar uma circunferência com centro em O e abertura qualquer. Passo 3: Determinar os pontos de intersecção da circunferência com as duas retas perpendiculares. Passo 4: Nomear os pontos de intercepção com as letras A, B, C e D. Passo 5: Traçar os segmentos AB, BC, CD e DA.	
		$\tau_{5\_1\_3}$	Passo 1: Traçar duas retas paralelas. Passo 2: Determinar em uma delas um ponto A. Passo 3: Pelo ponto A traçar uma reta perpendicular às paralelas que intersecte a outra paralela no ponto B. Passo 4: Fazer coincidir a abertura do compasso com o comprimento do segmento AB. (passo 3 de $\tau_{5\_1\_1}$) Passo 5: Manter a abertura do compasso, colocar sua ponta seca no ponto A e traçar um arco de circunferência que intersecte a reta paralela que passa por A, para determinar o ponto D. Passo 6: Por D traçar uma reta perpendicular às paralelas que intersecte a outra paralela no ponto C. Passo 7: Traçar os segmentos AB, BC, CD e DA.	
	t_{5_2}: Construir um quadrilátero dada a medida de seus quatro lados e a medida de uma de suas diagonais.	$\tau_{5\_2\_1}$	Passo 1: Para construir o quadrilátero ABCD, baseado nos dados, é necessário observar que ele pode ser decomposto dois triângulos, ABC e ACD que têm a diagonal AC, do quadrilátero, como lado comum. Passo 2: Traçar o segmento AB com uma das medidas dada. Passo 3: Traça uma circunferência com centro no ponto A e raio com a medida da diagonal AC. Passo 4: Traçar uma circunferência com centro no ponto B e raio com a medida do segmento BC. Passo 5: Determinar o ponto C em uma das intersecções duas circunferências e determinar o ponto C. Passo 6: Construir o triângulo ABC. Passo 7: Traçar a circunferência com centro no ponto A e raio com a medida do segmento AD. Passo 8: Traçar a circunferência com centro em C e raio com a medida do segmento DC. Passo 8: Determinar o ponto D em uma das intersecções das duas circunferências de modo a obter o quadrilátero ABCD. Passo 9: Construir o quadrilátero ABCD	$[\theta/\Theta]_{14}$: Propriedade da diagonal de um quadrilátero (o divide em dois triângulos) $[\theta/\Theta]_{15}$: Teoremas de congruências dos triângulos.
	t_{5_3}: Construir um quadrilátero dada a medida de três de seus lados e dois de seus ângulos.	$\tau_{5\_3\_1}$	Passo 1: Traçar o segmento DC com a medida dada. Passo 2: Com o centro do transferidor no ponto D e sua linha guia coincidindo com o segmento DC, determinar o ponto P de tal forma que o ângulo $C\hat{D}P$ tenha a medida do ângulo $C\hat{D}A$. Passo 3: Traçar o segmento AD com a medida dada na reta CP.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros. $[\theta/\Theta]_{16}$: Medição de segmentos e de ângulos.

			Passo 4: Com o centro do transferidor no ponto C e linha guia coincidindo com o segmento DC, determinar o ponto Q de tal forma que o ângulo $D\hat{C}Q$ tenha a medida do ângulo $D\hat{C}B$. Passo 5: Determinar o ponto B, na reta CQ, de maneira que o segmento CB tenha a medida dada. Passo 6: Traçar o segmento AB para determinar o quadrilátero ABCD.	
	t_{5_4}: Construir um quadrilátero dada a medida de dois lados e três ângulos.	$\tau_{5\_4\_1}$	Passo 1: Traçar o segmento AB com a medida dada. Passo 2: Com o centro do transferidor no ponto B e sua linha guia coincidindo com o segmento AB determinar um ponto P de tal forma que o ângulo $A\hat{B}P$ tenha a medida dada para o ângulo $A\hat{B}C$. Passo 3: Determinar o ponto C, na reta BP, de maneira que o segmento BC tenha a medida dada. Passo 4: Com o centro do transferidor no ponto C e sua linha guia coincidindo com o segmento BC determinar um ponto Q de maneira que o ângulo $B\hat{C}Q$ tenha a medida do ângulo $B\hat{C}D$. Passo 5: Com o centro do transferidor no ponto A e sua linha guia coincidindo com o segmento AB, determinar o ponto M de tal forma que o ângulo $B\hat{A}M$ tenha a medida do ângulo $B\hat{A}D$. Passo 6: A intersecção das retas AM e CQ determina o ponto D para formar o quadrilátero ABCD.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros $[\theta/\Theta]_{16}$: Medição de segmentos e de ângulos.
	t_{5_5}: Construir um trapézio isósceles dada a medida dos dois lados não paralelos e a medida dos ângulos congruentes.	$\tau_{5\_5\_1}$	Considerando que AB//AD Passo 1: Traçar o segmento AB com a medida dada Passo 2: Com o centro do transferidor no ponto A e sua linha guia sobre o segmento AB determinar o ponto P de tal forma que o ângulo $B\hat{A}P$ tenha a medida do ângulo $B\hat{A}D$. Passo 3: Determinar o ponto D na reta AP de maneira que o segmento AD tenha a medida dada. Passo 4: Com o centro do transferidor no ponto B e sua linha guia sobre o segmento AB determinar o ponto Q de tal forma que a medida do ângulo $B\hat{A}Q$ tenha a medida do ângulo $B\hat{A}D$, pois $A\hat{B}C \cong B\hat{A}D$. Passo 5: Determinar na reta BQ o ponto C de forma que o segmento BC tenha a mesma medida do segmento AD. Passo 6: Traçar o segmento DC para determinar o trapézio ABCD.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros. $[\theta/\Theta]_{16}$: Medição de segmentos e de ângulos.
	t_{5_6}: Construir um losango dada a medida de sua diagonal e de um de seus lados.	$\tau_{5\_6\_1}$	Passo 1: Traçar a diagonal AC com a medida dada. Passo 2: Traçar uma circunferência com centro em A e raio com a medida do lado do losango. Passo 3: Traçar uma circunferência com centro em C e raio com a medida do lado do losango. Passo 4: Determinar os pontos D e B nas duas intersecções circunferências. Passo 5: Traçar os segmentos que determinam os lados do losango ABCD.	$[\theta/\Theta]_{17}$: Definição de losango $[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros.

	t_{5_7}: Construir um trapezoide com eixo de simetria dada a medida de dois lados e de um de seus ângulos.	$\tau_{5\_7\_1}$	Passo 1: Traçar o segmento AB com a medida dada. Passo 2: Com o centro do transferidor no ponto B e sua linha guia sobre o segmento AB determinar o ponto P de modo que o ângulo $A\hat{B}P$ tenha a mesma medida do ângulo $A\hat{B}C$. Passo 3: Traçar uma circunferência com centro em B e raio de medida BC que determina na intersecção com a reta AP o ponto C. Passo 4: Determinar o segmento BC. Passo 5: Traçar a reta que passa pelos pontos A e C para determinar a diagonal AC. Passo6: Determinar o ponto D, simétrico do ponto B em relação ao segmento AC, considerado o eixo de simetria do trapezoide. Passo 7: Traçar os lados do trapezoide com eixo de simetria ABCD.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros $[\theta/\Theta]_{18}$: Propriedades da simetria axial
	t_{5_8}: Construir um paralelogramo dada a medida das diagonais e de um dos ângulos formados em torno de sua intersecção.	$\tau_{5\_8\_1}$	Passo 1: Traçar uma das diagonais BD com a medida dada. Passo 2: Determinar seu ponto médio M. Passo 3: Com o centro do transferidor em M e sua linha guia sobre o segmento MB determinar o ponto P de tal forma que o ângulo BMP tenha a medida dada. Passo 4: Traçar uma circunferência com centro em M e com raio igual à metade da medida da diagonal AC. Passo 5: A circunferência intersecta a reta MP nos pontos chamados de A e C. Passo 6: Traçar os lados do paralelogramo ABCD.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros. $[\theta/\Theta]_{12}$: Propriedades dos paralelogramos. $[\theta/\Theta]_{8}$: Ponto médio de um segmento.
	t_{5_9} : Construir um quadrilátero dadas as coordenadas de quatro pontos em um plano cartesiano.	$\tau_{5\_9\_1}$	Passo 1: Localizar cada um dos quatro pontos, A, B, C e D, no plano cartesiano. Passo 2: Traçar os segmentos que determinam os lados do quadrilátero ABCD.	$[\theta/\Theta]_{19}$: Coordenadas no plano cartesiano.
T_6: Calcular a medida da área de quadriláteros, apresentados em uma malha quadriculada, considerando um quadrado da malha como unidade de medida.	t_{6_1}: Calcular a medida da área de um quadrilátero cujos lados coincidem com as linhas da malha quadriculada.	$\tau_{6\_1\_1}$	Passo 1: Determinar a quantidade de quadrados da malha que estão contidas no quadrilátero por contagem.	$[\theta/\Theta]_{20}$: Definição de medida da área. $[\theta/\Theta]_{21}$: Definição de unidade de medida.
	t_{6_2}: Calcular a medida da área de um quadrilátero cujos lados não coincidem com as linhas da malha quadriculada.	$\tau_{6\_1\_2}$	Passo 1: Decompor o quadrilátero em partes convenientes. Passo 2: Recompor as partes de maneira que se forme um quadrilátero. Passo 3: Se o novo quadrilátero tiver seus lados coincidindo com as linhas da malha, contar os quadrados contidos nele. Passo 4: Se o novo quadrilátero não tiver seus lados coincidindo com as linhas da malha, aproximar a medida da área do quadrilátero.	$[\theta/\Theta]_{20}$: Definição de medida da área. $[\theta/\Theta]_{21}$: Definição de unidade de medida.
T_7: Calcular o perímetro de quadriláteros.	t_{7_1}: Determinar o perímetro de um quadrilátero dada sua representação figural, tendo como dado o comprimento de seus lados	$\tau_{7\_1\_1}$	Passo1: Observar a representação figural do quadrilátero. Passo2: Identificar as propriedades do quadrilátero dado. Passo3: Preencher os dados dos comprimentos de seus lados. Passo 4: Calcular a medida do perímetro do quadrilátero.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros. $[\theta/\Theta]_{12}$: Propriedades dos paralelogramos. $[\theta/\Theta]_{22}$: Definição de perímetro.

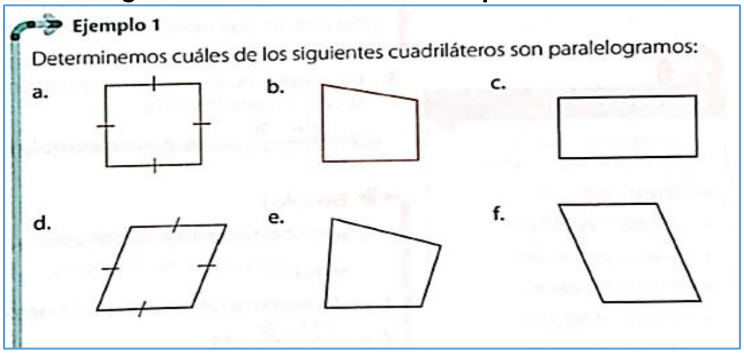
	t_{7_2}: Determinar o perímetro de um quadrilátero dado um enunciado em língua natural.	$\tau_{7\_2\_1}$	Passo1: Realizar uma representação figural para o quadrilátero descrito no enunciado. Passo2: Identificar ou determinar as medidas dos lados do quadrilátero. Passo3: Calcular a soma das medidas dos lados para obter o perímetro do quadrilátero.	
	t_{7_3}: Determinar a medida do lado de um quadrilátero dado seu perímetro.	$\tau_{7\_3\_1}$	Passo1: Realiza uma representação figural do quadrilátero. Passo2: Identificar as propriedades do quadrilátero dado. Passo3: Distribuir o valor do perímetro em cada lado. Passo4:indicar a medida de seus lados.	
T_8: Calcular a medida da área de quadriláteros.	t_{8_1}: Determinar a medida da área de quadriláteros dada sua representação figural com as medidas necessárias.	$\tau_{8\_1\_1}$	Passo1: Identificar os dados na representação figural Passo2: Aplicar a fórmula para determinar a medida da área correspondente ao tipo de quadrilátero Passo3: Determinar a medida da área do quadrilátero	$[\theta/\Theta]_{20}$: Definição de medida da área. $[\theta/\Theta]_{21}$: Definição de unidade de medida. $[\theta/\Theta]_{23}$: Fórmula para determinar a medida da área de quadriláteros.
		$\tau_{8\_1\_2}$	Passo1: Reconhecer as propriedades da figura dada Passo2: Preencher os dados que faltam Passo3: Descompor a figura em dois ou mais figuras conhecidas Passo4: Reconhecer e aplicar a fórmula para determinar a medida da área correspondente ao tipo de quadrilátero Passo 5: Determinar a medida da área	
		$\tau_{8\_1\_3}$	Passo1: Reconhecer as propriedades do quadrilátero dado Passo2: Preencher os dados que faltam Passo3: Identificar a medida da área a calcular Passo4: Somar ou restar a medida das áreas conhecidas Passo5: Determinar a medida da área do quadrilátero	
	t_{8_2}: Determinar a medida da área de um quadrilátero dado um enunciado em língua natural tendo como dados seus lados.	$\tau_{8\_2\_1}$	Passo1: Aplicar a fórmula para determinar a medida da área correspondente ao tipo de quadrilátero Passo 2: Determinar a medida da área do quadrilátero	
		$\tau_{8\_2\_2}$	Passo1: Realiza uma representação figural do quadrilátero Passo 2: Identificar os dados do quadrilátero Passo 3: Aplicar a fórmula para determinar a medida da área correspondente ao tipo de quadrilátero Passo 4: Determinar a medida da área do quadrilátero	
	t_{8_3}: Determinar a medida da área de um quadrado dada a medida de sua diagonal utilizando a fórmula.	$\tau_{8\_3\_1}$	Passo1: Aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a medida do lado do quadrado. Passo2: Usar a fórmula para o cálculo da medida da área de um quadrado para determina a medida da área do quadrado.	$[\theta/\Theta]_{23}$: Fórmula para determinar a medida da área do quadrado. $[\theta/\Theta]_{24}$: Teorema de Pitágoras.
		$\tau_{8\_3\_2}$	Passo1: Elevar ao quadrado o comprimento da diagonal Passo2: Divide entre dois a medida anterior Passo3: Determina a medida da área do quadrado	
	t_{8_4}: Determinar um dos lados de um quadrilátero (quadrado, retângulo)	$\tau_{8\_4\_1}$	Passo1: Realiza uma representação figural do quadrilátero. Passo2: Identificar os dados do quadrilátero. Passo3: Identificar a fórmula para determinar a medida da área correspondente ao tipo de quadrilátero.	$[\theta/\Theta]_{23}$: Fórmula para determinar a medida da área dos quadriláteros

	dado a medida de sua área.		Passo4: Calcular a medida do outro lado do quadrilátero.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros
T_9: Relacionar a medida da área com o perímetro de retângulos.	t_{9_1}: Relacionar a medida da área de retângulos diferentes dado as medidas de seus lados ou o perímetro	$\tau_{9\_1\_1}$	Passo1: Realiza uma representação figural dos dois retângulos. Passo2: a partir dos dados determinar a medida de suas áreas. Passo3: Comparar as medidas de suas áreas com seus perímetros.	$[\theta/\Theta]_{11}$: Propriedades dos quadriláteros $[\theta/\Theta]_{22}$: Definição de perímetro $[\theta/\Theta]_{23}$: Fórmula para determinar a medida da área dos quadriláteros
		$\tau_{9\_1\_2}$	Passo1: Realiza uma representação figural do quadrilátero tendo em conta a medida de seus lados Passo2: Calcular o perímetro do quadrilátero Passo3: Calcula a medida da área do quadrilátero Passo4: Observa o que acontece com a medida do perímetro se o lado é o duplo Passo5: Observa o que acontece com a medida da área se o lado é o duplo Passo6: Fazer a comparação a partir dos resultados	
	t_{9_2}: Relacionar a medida do perímetro de dois retângulos diferentes dada a medida de suas áreas.	$\tau_{9\_2\_1}$	Passo1: Realiza uma representação figural dos dois retângulos Passo2: Comparar a medida de seus perímetros Passo3: Inferir a resposta a partir dos exemplos mostrados	
	t_{9_3}: Relacionar a medida da área e do perímetro de quadriláteros.	$\tau_{9\_3\_1}$	Passo1: Realiza uma representação figural de um retângulo que a medida de perímetro seja representada por um número natural Passo2: Realiza uma representação figural de todos os retângulos que tenham a mesma medida de seu perímetro e estejam representadas por um número natural Passo3: Calcular a medida das áreas dos retângulos dos retângulos do passo 2. Passo4: Identificar o retângulo que tenha a maior medida da área e o que tenha a menor medida da área. Passo5: Comparar a medida da área com a medida do perímetro de cada uns dos quadriláteros.	

A partir do Quadro 8, identificamos 9 tipos de tarefas com suas 32 tarefas, 42 técnicas nos sete livros didáticos escolhidos. Em relação aos tipos de tarefas nos livros didáticos peruanos analisados, apresentamos alguns tipos de tarefas com algumas de suas tarefas porque são as que aparecem em mais de um dos livros e consideramos que não apresentam um discurso tecnológico-teórico para as técnicas porque não foi explicitado pelo autor.

Apresentamos na Figura 55, a tarefa t_{1_1}: reconhecer o paralelismo entre retas suporte dos lados de quadriláteros, que é do tipo T_1: reconhecer relações entre as retas suporte dos lados de quadriláteros, que foi proposta no livro LD5, em que o aluno deve identificar entre diversas figuras as que são paralelogramos. No entanto é uma tarefa impossível porque em nenhuma delas há dados suficientes para elaborar uma resposta, por exemplo, em (a), (c) e (d) o aluno não pode dizer que se trata de um quadrado, de um retângulo e de um losango, respectivamente, porque faltam informações a respeito dos ângulos.

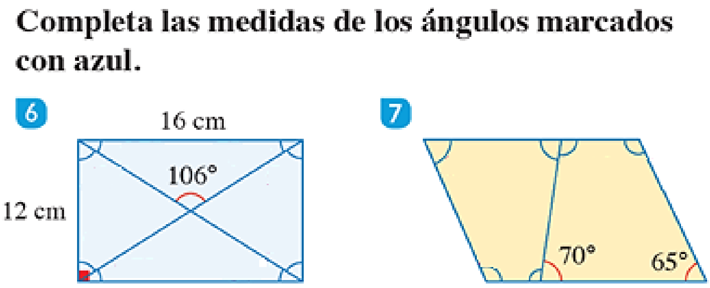
Figura 55 – Uma tarefa do tipo 1 de LD5



Fonte: Matemática 2: livro de texto (MINEDU, 2016c, p. 101)

A tarefa t_{2_4} : determinar a medida de ângulos internos desconhecidos de um quadrilátero baseado em sua representação figural, do tipo T_2: calcular a medidas de ângulos internos de um quadrilátero, foi proposta no livro LD7 (Figura 56) com sua respectiva solução, que acreditamos baseada na técnica $t_{2\_4\_2}$ sem qualquer justificativa.

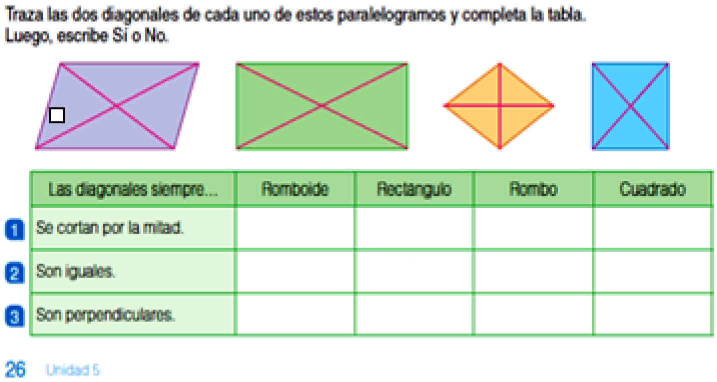
Figura 56 – Uma tarefa do tipo 2 de LD7



Fonte: Matemática 3: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018c, p. 272)

As tarefas t_{3_1}: verificar a congruência das diagonais de quadriláteros; t_{3_2}: verificar a perpendicularidade das diagonais de quadriláteros e t_{3_3}: verificar se o ponto de intersecção das diagonais coincide com seus pontos médios, do tipo T_3: identificar propriedades das diagonais de quadriláteros, foram propostas no livro LD2 como mostra a Figura 57. Podemos ver que o autor pede para traçar as diagonais e depois preencher um quadro com sim ou não, para as questões: as diagonais sempre se cortam pela metade, sempre são iguais ou sempre são perpendiculares.

Figura 57 – Uma tarefa do tipo 3 de LD2



Traza las dos diagonales de cada uno de estos paralelogramos y completa la tabla. Luego, escribe Sí o No.

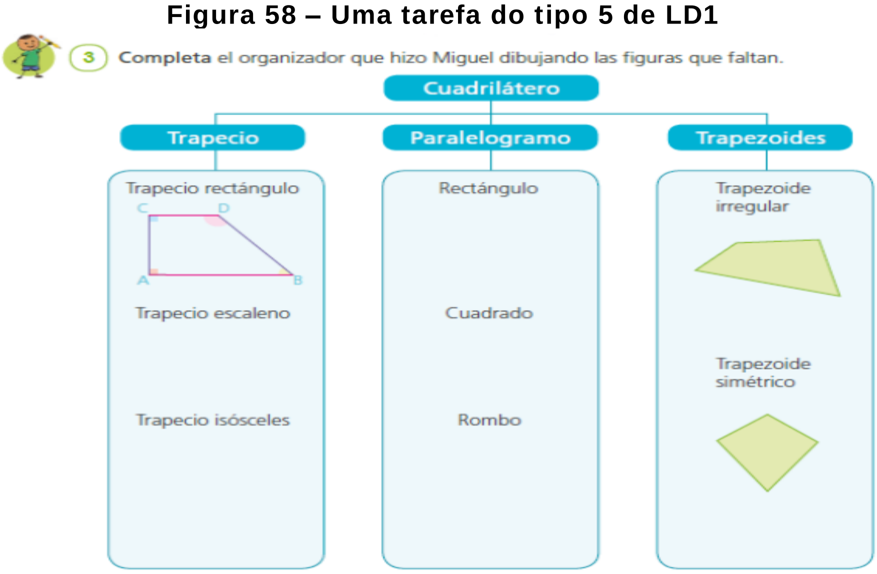
	Las diagonales siempre...	Romboide	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
1	Se cortan por la mitad.				
2	Son iguales.				
3	Son perpendiculares.				

26 Unidad 5

Fonte: Matemática 2: Caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018b, p. 26)

A tarefa t_{4_1}: identificar um quadrilátero baseado em uma representação figural do tipo T_5: construir quadriláteros é apresentada no livro LD1, como mostra a Figura 58, em que o ator solicita a construção de uma figura baseado em seu nome.

Figura 58 – Uma tarefa do tipo 5 de LD1

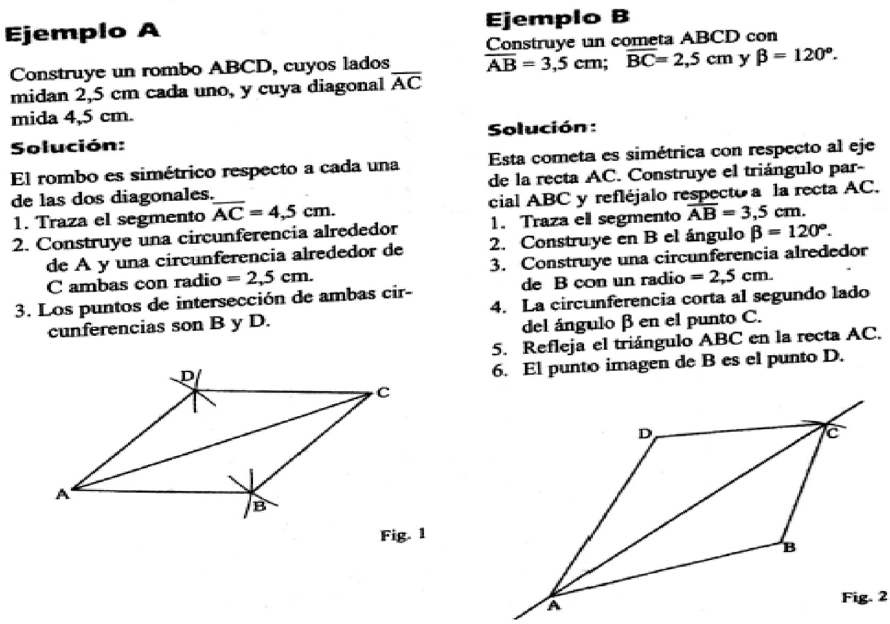


Fonte: Matemática 2: Caderno de trabalho (MINEDU, 2016c, p. 22)

As tarefas t_{5_6}: construir um losango dada a medida de sua diagonal e de um de seus lados e t_{5_7}: construir um trapezoide com eixo de simetria dada a medida de dois lados e de um de seus ângulos, do tipo T_5: construir quadriláteros, foram apresentadas no livro

LD6, como exemplos, como mostra a Figura 59, em que o autor mostra os passos de construção. Na primeira figura, mostra uma diagonal do losango, afirmando que ele é simétrico em relação às duas diagonais (embora o correto seria afirmar que o losango possui dois eixos de simetria) e, na segunda, uma diagonal de uma "pipa", assegurando que ela é simétrica em relação ao eixo da reta AC, (quando o correto seria afirmar que a diagonal AC da "pipa" é um eixo de simetria).

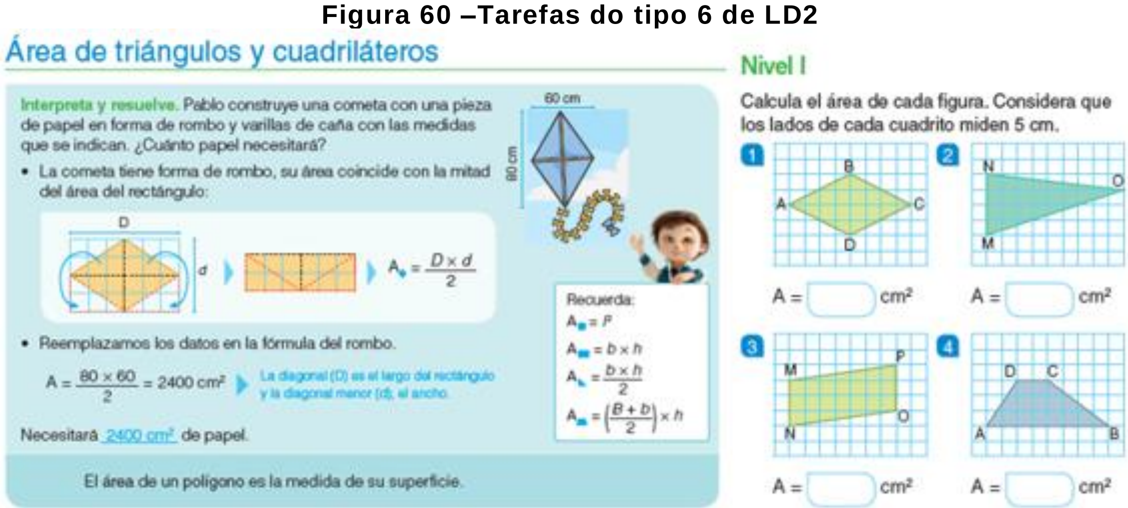
Figura 59 – Uma tarefa do tipo 5 de LD6



Fonte: Matemática para todos 2. (INSTITUTO APOYO, 2002, p. 117)

A tarefa t_{6_1}: calcular a medida da área de um quadrilátero cujos lados não coincidem com as linhas da malha quadriculada, do tipo T_6: calcular a medida da área de quadriláteros apresentados em uma malha quadriculada, considerando um quadrado da malha como unidade de medida, é apresentada no livro LD2, como mostra a Figura 60.

Figura 60 –Tarefas do tipo 6 de LD2

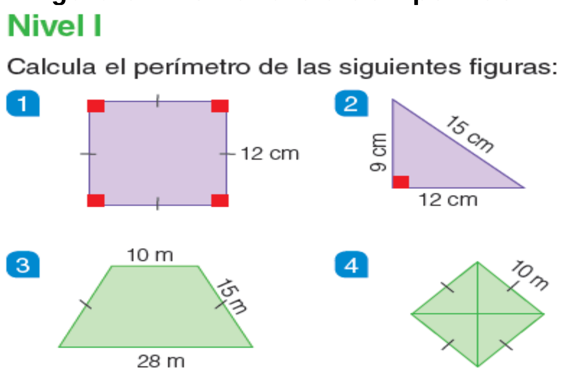


Fonte: Adaptado de Matemática 6: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018a, p.62)

Podemos ver que o autor apresenta um exemplo em que decompõe um losango para compor um retângulo, para que a contagem dos quadrados da malha justifique a fórmula para calcular a medida da área do losango e, ainda, apresenta um quadro para relembrar algumas fórmulas. Apresenta então, quatro quadriláteros representados em malha quadriculada, afirmando que cada quadrado da malha tem 5 cm de lado e solicita a área, o que conduz o aluno a entender área como número e não como grandeza. Apresenta então todos os resultados sem qualquer justificativa, tanto para a decomposição realizada, quanto para a aplicação da fórmula.

A tarefa t_{7_1}: determinar o perímetro de um quadrilátero dado sua representação figural do tipo T_7: calcular o perímetro de quadriláteros foi proposta no livro LD2 (Figura 61) em que apresenta dois quadrados, um trapézio isósceles e um triângulo retângulo, com respectivas medidas de lado, além de explicitar as operações necessárias para obter o resultado, simplificando, no caso do quadrado quatro adições por uma multiplicação. É necessário observar o que o resultado de uma operação matemática não admite qualquer unidade de medida como o autor mostra.

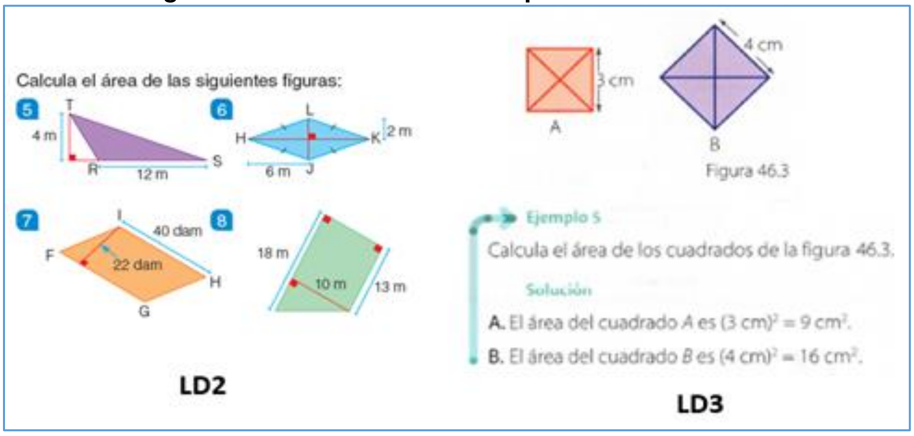
Figura 61 – Uma tarefa do tipo 7 de LD2



Fonte: Adaptado de Matemática 6: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018a, p.60)

A tarefa t_{8_1}: determinar a medida da área de quadriláteros dada sua representação figural com as medidas necessárias, do tipo T_8: calcular a medida da área de quadriláteros, foi apresentada nos livros LD2 e LD3 (Figura 62). Ambos apresentam figuras com as medidas necessárias para que a medida da área seja calculada e associam a área a um número. LD2, embora apresente representações não estereotipadas, apresentam unidades de medida como resultados de operações matemáticas e LD3, que trata apenas do quadrado em duas posições diferentes, realiza os cálculos incluindo a unidade de medida, o que conduz à compreensão de que podemos multiplicá-las e prejudica o entendimento de unidades de medida. A técnica utilizada é a $t_{8\_1\_1}$ sem qualquer justificativa.

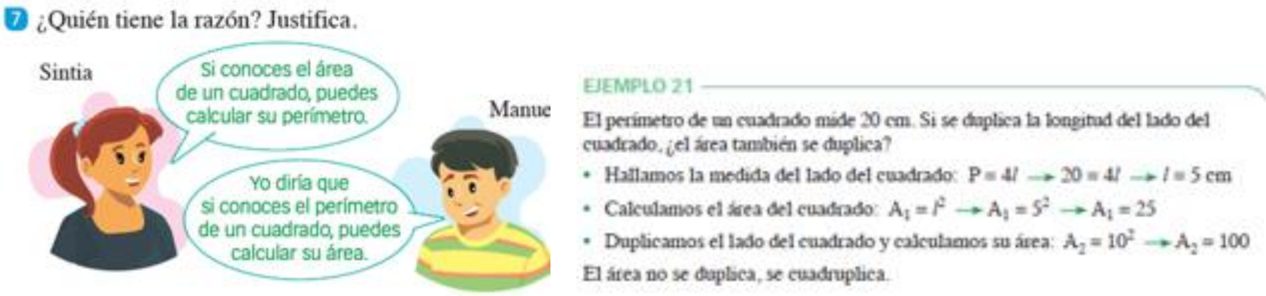
Figura 62 – Uma tarefa do tipo 8 de LD2 e LD3



Fonte: Adaptado de Matemática 6: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018a, p.62) e Matemática 1: Caderno de trabalho (MINEDU, 2016b, p.124)

A tarefa t_{9_1}: relacionar a medida da área de retângulos diferentes dadas as medidas de seus lados e seu perímetro, do tipo t_{9_1}: relacionar a medida da área com o perímetro de retângulos foi apresentada em LD4 (Figura 63), com sua solução para concluir que dado o perímetro de um quadrado, podemos calcular a medida de sua área e vice-versa e um exemplo, para mostrar que, se dobrarmos a medida do lado de um quadrado, a medida de sua área quadruplica. No entanto, em ambos os casos, apresenta a resposta de um cálculo com a unidade de medida e apresenta a resposta para a medida da área sem qualquer unidade. Para solucionar as tarefas utiliza as técnicas $t_{9\_1\_1}$ e $t_{9\_1\_2}$ sem qualquer justificativa.

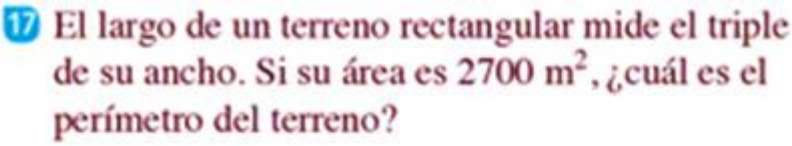
Figura 63 - Uma tarefa do tipo 9 de LD4



Fonte: Matemática 1: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018b, p. 330-331)

O livro LD7 apresenta a tarefa, do mesmo tipo, (Figura 64), t_{9_2}: relacionar a medida do perímetro de dois retângulos diferentes dada a medida de suas áreas, para o aluno resolver apresentando, imediatamente a resposta.

Figura 64 – Tipo de tarefa 9 de LD4 e LD7 resolvida pelos autores


17 El largo de un terreno rectangular mide el triple de su ancho. Si su área es 2700 m^2, ¿cuál es el perímetro del terreno?

Fonte: Matemática 3: caderno de trabalho (SANTILLANA, 2018c, p. 285)

Em nossa pesquisa, o estudo dos documentos curriculares e livros didáticos apresentados nas dimensões econômica e ecológicas, permitiu identificar as características do modelo epistemológico dominante (MED). Nesse sentido, os quadriláteros nos documentos curriculares no Peru estão presentes nos níveis primário e secundário e, em ambos, são tratados como figuras planas. No CNEB, o estudo de quadriláteros está relacionado ao desenvolvimento da competência: resolve problemas de forma, movimento e localização. Segundo este documento curricular, nos indicadores de desempenho, os quadriláteros devem ser ensinados ao longo do nível secundário, mas a análise dos livros didáticos mostra que ocorrem apenas até o terceiro ano.

Por outro lado, a análise praxeológica dos livros didáticos mostrou o trabalho com 9 tipos de tarefas com 32 tarefas e 42 técnicas (Quadro 8). No entanto, como não pudemos identificar qualquer discurso tecnológico teórico, que justificasse as técnicas utilizadas, não podemos falar de qualquer tipo de praxeologia, pois os autores focam apenas no saber-fazer, desprezando um discurso racional a respeito da técnica utilizada.

Considerando os níveis de codeterminação podemos dizer que o estudo dos quadriláteros está no domínio da Geometria, no setor dos polígonos, pois nos livros LD2, LD3, LD4, LD5 e LD7 o estudo de quadriláteros está incluído na unidade dos polígonos e são definidos como polígonos de quatro lados (definição de Legendre), o que confirma o que Gascón (2003) identificou como fenômeno do *autismo temático* no ensino deste objeto matemático e da Geometria em geral.

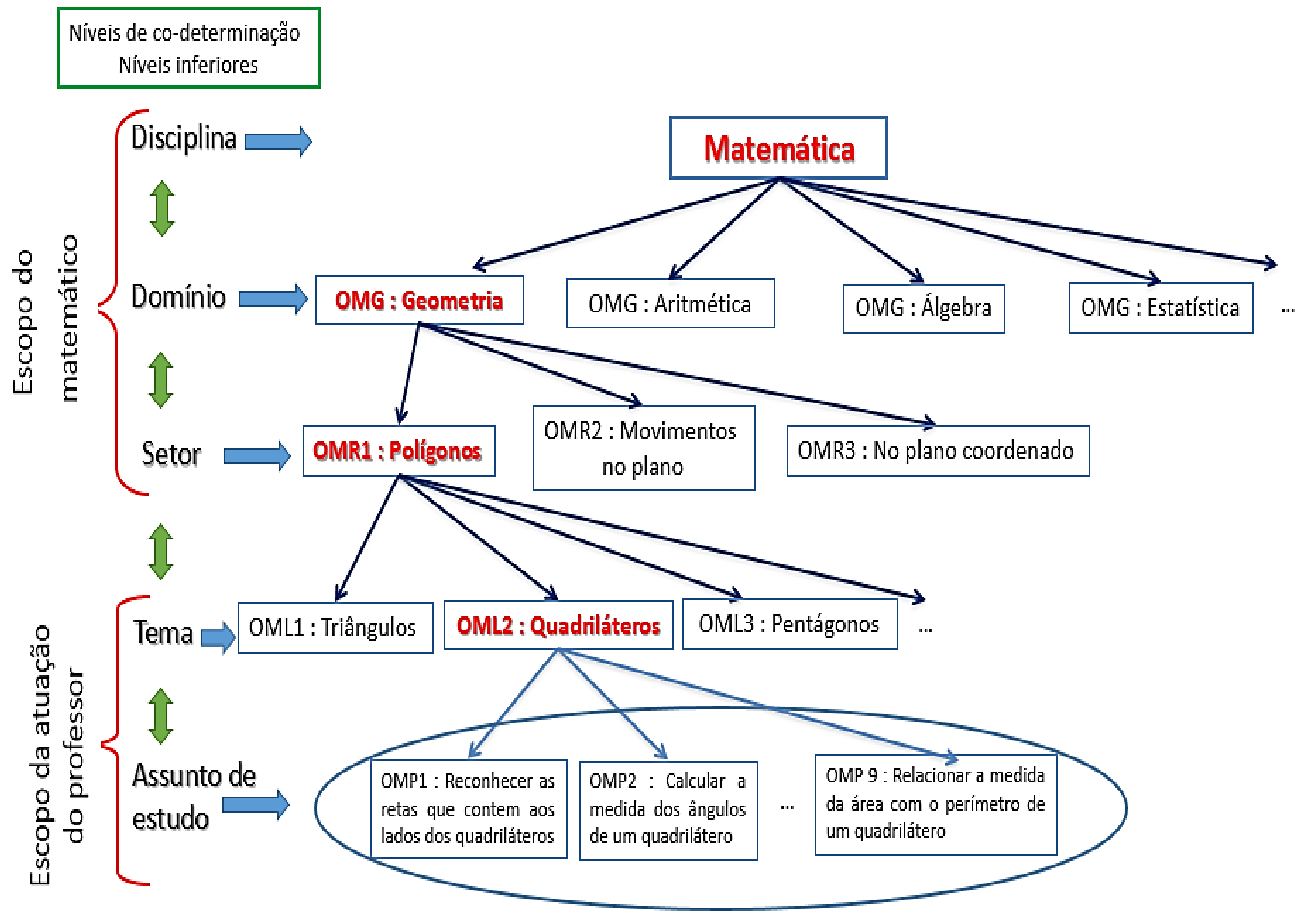
A partir do estudo das dimensões epistemológica, econômica e ecológica dos quadriláteros, a seguir apresentamos o modelo dominante no sistema educativo peruano.

3.3 Modelo Epistemológico Dominante dos quadriláteros no Peru

Segundo Gascón (2014), em todo sistema de ensino, pode-se encontrar um Modelo Epistemológico Dominante (MED), frequentemente implícito, que é imposto aos sujeitos de uma instituição, que determina a maneira de ensinar e aprender matemática nessa instituição. Para Rodriguez et al. (2019), o Modelo Epistemológico Dominante pode ser reconstruído, principalmente, a partir de programas oficiais (leis educacionais e currículos atuais) e outros documentos curriculares, como os livros didáticos e as orientações de ensino para os professores.

Assim, baseados nos estudos realizados no tópico anterior explicitamos, na Figura 65, nosso MED, em que podemos observar a relação entre as organizações matemáticas, em torno do estudo de quadriláteros, em que podemos observar que os estudos são realizados de maneira pontual e local, desarticulados de outros temas como, por exemplo, os movimentos no plano, especificamente, a simetria, que aparece timidamente e de forma equivocada no tratamento de trapezoides. Além disso, podemos observar que quadriláteros como, o quadrado, o retângulo, o losango, o paralelogramo e o trapézio, são os mais apresentados nos livros didáticos e a classificação predominante é por paralelismo de seus lados.

Figura 65 – Modelo Epistemológico Dominante - relação das OM em torno dos quadriláteros



Fonte: Elaboração própria

Dos nove tipos de tarefas, resultantes da análise praxeológica dos livros didáticos, somente três apresentam o cálculo da medida de áreas de quadriláteros, baseados na aplicação de fórmulas e nenhum deles apresenta sua razão de ser histórica, ou seja, estudar o tema baseado em medida da área de superfície de terrenos regulares e irregulares.

Além disso, dos sete livros didáticos analisados, não se observou nenhuma tarefa relacionada à classificação dos quadriláteros, isto é, que conduza os estudantes a realizarem suas próprias classificações, de acordo com seus próprios critérios, pois a classificação é dada como algo que já foi feito e está terminado. Em termos de Chevallard (2013), consideramos que, no caso da classificação dos quadriláteros no sistema educativo do Peru, estamos no paradigma da *visita às obras*, isto é, a classificação dos quadriláteros perdeu sua *razão de ser* nos níveis primário e secundário.

Assim, no próximo capítulo, apresentamos o desenho do Percurso de Estudo e Pesquisa a distância para formação de professores, PEP-FP, em que buscamos a possibilidade de ensino de quadriláteros, baseado em sua razão de ser histórica e no paradigma de questionamento do mundo.

4 Desenho da Engenharia Didática

De acordo com nossa metodologia de pesquisa, baseada na Engenharia didática, neste capítulo apresentamos o desenho do Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP), seguido das adaptações necessárias para sua aplicação a distância com docentes de matemática de nível secundário no sistema educativo peruano, em formação continuada.

4.1 Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores

Para Ruiz-Olarría (2015), o PEP-FP tem início com uma questão geratriz Q_0-FP, que deve ser formulada baseada em contextos ligados à formação de professores e deve focar em um objeto de ensino, considerando o nível escolar em que os professores estão inseridos. Para a autora,

> o ponto de partida é uma questão viva e crucial para a profissão de professor que chamamos de Q_0-FP. Para responder essa questão, o processo de formação é articulado em cinco módulos e é, justamente, o estudo dessa questão inicial que dará origem ao PEP-FP, permitindo ao mesmo tempo articular os módulos que o compõem e mostrar sua funcionalidade. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 137, tradução nossa).

Segundo Ruiz-Olarria (2015), a elaboração de um PEP-FP tem início com o desenho e experimentação de um PEP com estudantes do nível secundário ou primário, apoiado em um MER, embora possa ser iniciado com a elaboração de um PEP-FP sem a necessidade de ter sido previamente experimentado com estudantes. O PEP-FP tem como objetivo familiarizar os professores em formação, inicial ou continuada, com um PEP entendido como um dispositivo didático útil para seu desenvolvimento profissional, para:

> ir preparando uma transição efetiva do paradigma monumentalista para o paradigma de questionamento do mundo, a própria formação de professores requer dispositivos didáticos não fundamentados unicamente no paradigma monumentalista e, por isso, devem recorrer, de alguma forma, a dispositivos com estrutura do tipo PEP (estudo de questões, mídias e *meios etc.)*. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136, tradução nossa).

O PEP-FP se desenvolve em 5 módulos que são articulados durante o percurso. O módulo M_0: ***explicitar as razões de ser do PEP-FP***, tem início com uma pergunta geratriz do tipo: como ensinar um conteúdo matemático específico *C*? Que deve ser respondida, pelo menos parcialmente, no final do processo de estudo. A autora apresenta as seguintes questões para esse módulo:

> O que é C? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava? Por que se deve ensinar C? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? etc. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 138, tradução nossa).

O módulo M_1: ***viver um PEP*** tem como objetivo conduzir o professor a conhecer um PEP, mas que para gerenciá-lo deve ter que vive-lo e, por isso, é proposto que atuem como estudantes de um PEP para apresentar uma possível resposta à M_0. Assim, de acordo com a autora, este módulo deve ser elaborado:

> com o objetivo de que o aluno-professor realize um PEP na posição de matemático ou, mais geralmente, de estudante X de um sistema didático S (X, Y) situado na instituição de formação de professor. Como em todo PEP, esta primeira fase do percurso de formação partirá de uma questão Q1 para a qual se deverá apresentar uma resposta. RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 139, tradução nossa).

O módulo M_2: ***analisar o PEP vivido*** ocorre, depois de ter vivenciado o PEP no módulo M_1, com o objetivo de que o professor analise as tarefas sob uma perspectiva praxeológica, didática e ecológica, para focar nas condições e nas restrições que encontram nas instituições escolares para implementar esse tipo de dispositivo de ensino.

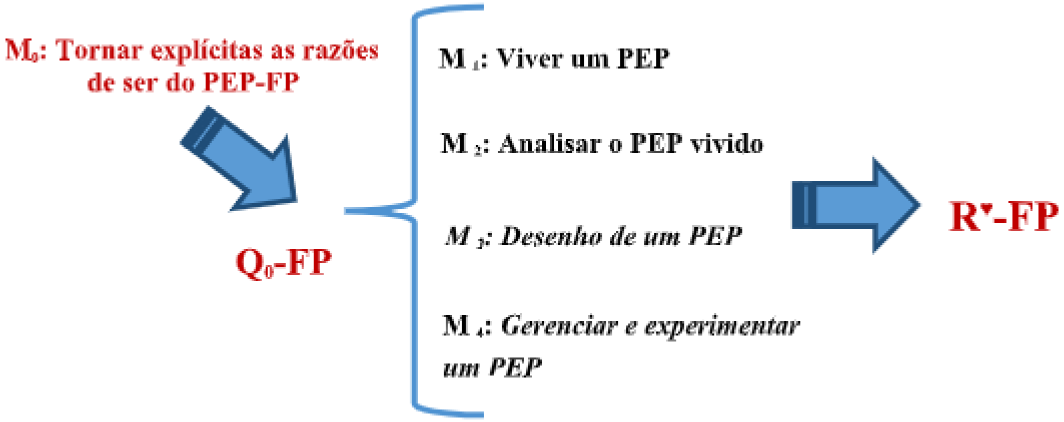
No módulo M_3: ***desenho de um PEP***, o professor deve adaptar o PEP vivido ou desenhar um novo PEP para um grupo específico de estudantes, considerando o que foi trabalhado nos módulos anteriores e nas restrições institucionais, em que se espera:

> que diferentes restrições institucionais surjam, por exemplo, rigidez curricular, distribuição de tempo, papéis tradicionais assumidos por professores e alunos, entre outros, e que sejam os próprios professores que os tornem explícitos. (BARQUERO; BOSCH; ROMO-VÁZQUEZ, 2019, p. 494, tradução nossa).

O módulo M_4: ***gerenciar e experimentar um PEP*** tem como objetivo apoiar os professores que iniciam no processo de desenhar e gerenciar um PEP, quanto à coleta de problemas e dificuldades ou obstáculos que podem surgir durante sua aplicação em sala de aula.

Na Figura 66, resumimos os cinco módulos do PEP-FP, em que se observa que o PEP tem início no modulo M_0, com uma pergunta Q_0-FP, que é transversal a todos os módulos M_1, M_2, M_3 e M_4, para obter uma resposta denominada $R^♥$ - FP.

Figura 66 – Desenho e desenvolvimento da análise do PEP-FP



Fonte: Elaboração própria.

Em nossa pesquisa desenvolvemos os módulos M_0, M_1, M_2 e M_3, pois o módulo M_4, que consiste em aplicar um PEP com estudantes do ensino básico, se tornou inviável, por conta da pandemia de Covid-19, por restrições impostas pelas instituições de ensino. Além disso, pelo mesmo motivo, tivemos que fazer adaptações aos módulos para que fosse aplicado a distância, que mostramos no que segue.

4.2 Desenho do PEP-FP a distância

Segundo Verduin e Clark (1991) a educação a distância é definida como "uma instrução em que a maior parte do ensino ocorre quando o professor e o aluno estão distantes um do outro". (p. 13). Assim, consideramos o tipo de comunicação, entre a formadora e os professores, (síncrona e assíncrona), além das ferramentas que foram utilizadas na formação para as adaptações. Desenhamos o PEP-FP a distância para que, os módulos que compõem este dispositivo didático, ocorressem em oito encontros por meio do *software* de videoconferência de *Zoom Meeting* por ter uma versão gratuita, com apoio da plataforma *Google Classroom*.

Como o módulo **M_0: *tornar explícitas as razões de ser do PEP-FP***, ocorreu no *Zoom Meeting*, disponibilizamos dois tipos de salas que podiam ser gravadas em vídeo. Uma que chamamos principal para reunir todos os professores e a outra, que chamamos de específica que reúne os professores em grupos. Apresentamos, na sala principal, a questão pergunta Q_0-FP: por que e como ensinar quadriláteros, que foi discutida pelos grupos, nas salas específicas, por meio de um documento Google, em que apresentaram respostas e novas perguntas. Essa organização permitiu que a pesquisadora pudesse ingressar em cada sala específica, para acompanhar e incentivar as discussões e para, por meio de uma mensagem, avisar os grupos para voltar à sala principal para as discussões coletivas. No módulo **M_1: *viver um PEP***, apresentamos, na sala principal, o PEP que foi vivenciado pelos professores e previamente desenhado em um contexto real de preparação da população para a ocorrência de um tsunami, com a questão Q_0: o que devemos considerar para se prevenir de um tsunami? Os professores se reuniram em grupos, em suas salas específicas, onde procuraram informações e buscaram respostas a essa questão. As respostas e dúvidas foram apresentadas em um documento *Google* e voltaram para a sala principal para socializar seus achados.

No módulo **M_2: *analisar o PEP vivido***, na sala principal do *Zoom meeting* a formadora fez uma breve apresentação do que é um PEP e seus objetivos e, a seguir, os professores analisaram esse dispositivo didático. No módulo **M_3: *desenho de um PEP***, a formadora solicitou que os grupos de professores desenhassem um PEP ou adaptassem o PEP vivido, para ensinar um conteúdo específico do nível secundário, no prazo de uma semana. Nesse período os professores se reuniram em suas salas específicas e apresentaram suas ideias em um documento *Google* ou apresentações em *Power Point.* A seguir, as propostas foram apresentadas e discutidas na sala principal.

Para organizar melhor as atividades dos professores e a coleta de dados utilizamos o *Google Classroom* para distribuir os encontros por etapas, tal organização apresentamos no que segue.

4.3 Organização do *Google Classroom*

Criamos uma página inicial no *Google Classroom*, um tópico que dá acesso a uma mensagem de bem-vindos e um formulário *Google* com o termo de consentimento livre e esclarecido, exigido pelo comitê de ética, para que os professores baixassem, assinassem e gravassem na mesma pasta. A formação foi dividida em cinco etapas, numeradas e nomeadas, como mostra a Figura 67, em que a primeira está relacionada ao módulo M_0 e permitiu que os professores colocassem seus achados em um documento *Google*. As etapas 2, 3, 4 e 5 foram relacionadas ao desenvolvimento do módulo M_1: *viver um PEP* e possibilitou que os professores, no papel de estudantes, desenvolvessem o PEP relacionado ao Tsunami e ao estudo de quadriláteros e colocassem os documentos produzidos.

Figura 67 – Organização do *Google Classroom*

Fonte: Elaboração própria

O módulo *M₂: analisar o PEP vivido* foi discutido diretamente pelo *Zoom meeting* e teve suas reuniões gravadas em vídeo.

A etapa 6 do *Google Classroom* estava relacionada ao módulo M_3: desenho ou adaptação de um PEP e possibilitou que os professores, despois das discussões, colocassem os PEPs construídos por cada grupo.

No capítulo 5 apresentamos as análises da aplicação do PEP-FP.

5 ANÁLISES DO PEP-FP

Neste capítulo apresentamos os sujeitos da pesquisa, a descrição da aplicação e as análises a *priori* e a *posteriori* dos módulos M_0, M_1, M_2 e M_3 do Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP).

5.1 Sujeitos de pesquisa

Os sujeitos de nossa pesquisa foram 10 professores de matemática (cinco professores e 5 professoras) alguns deles conhecidos da pesquisadora, que foram convidados e aceitaram participar voluntariamente da formação sabendo que a experiência fazia parte da pesquisa de doutoramento da formadora na PUC-SP.

Os professores formaram livremente três grupos para trabalhar nos oito encontros da formação. O grupo 1 (G1) constituído por três professores, que chamaremos de D1, D2 e D3. O professor D1 tem 36 anos e 15 anos de experiência de ensino, tem licenciatura em educação na especialidade de Matemática, mestrado em ensino de matemática e participou de algumas oficinas a respeito do ensino de matemática. Atualmente, leciona no nível secundário em tempo integral, em uma escola privada, e no nível superior por horas. O professor D2 tem 34 anos e licenciatura em matemática, além de ter participado de algumas oficinas. Leciona por horas no nível secundário em uma escola privada e no nível universitário. O professor D3 tem 51 anos de idade e mais de 15 anos de experiência no ensino, tem licenciatura em educação na especialidade de Matemática, é formado também em arquitetura. Atualmente é estudante do mestrado em ensino da matemática e leciona matemática no nível secundário em uma escola privada e no nível superior.

O grupo 2 (G2) constituído por quatro professoras que chamaremos de D4, D5, D6 e D7. A professora D4 tem 34 anos, 15 anos de experiencia no ensino, e tem licenciatura em educação na especialidade de Matemática e Física. Leciona matemática no nível secundário em uma escola privada. A professora D5 tem 36 anos de idade e 15 anos de experiência no ensino é licenciada em educação na especialidade de Matemática, participou de congressos, oficinas e cursos. Leciona matemática nos níveis primário e secundário em uma escola privada. A professora D6 tem 36 anos de idade, 15 anos experiência no ensino, é licenciada em educação na especialidade de Matemática e Física, participa de congressos e oficinas. Atualmente, leciona matemática no nível secundário em uma escola privada. A professora D7 tem 35 anos, 15 anos experiência no ensino, é licenciada em educação na especialidade de Matemática e Física e participa de cursos a respeito do ensino de matemática.

O grupo 3 (G3) formado por três professores que chamaremos de D8, D9 e D10. A professora D8 tem 42 anos, 15 anos experiência no ensino, é licenciada em educação na especialidade de Matemática, tem estudos de mestrado em ensino de matemática e participa em congressos. Leciona matemática no nível secundário em uma escola pública. O professor D9 tem 30 anos, 5 anos de experiência no ensino, é licenciado em Matemática e participa de cursos e congressos. Leciona matemática nos níveis secundário e superior. O professor D10 tem 42 anos, mais de 15 anos experiência no ensino, é licenciado em educação na especialidade de Matemática, mestrado em ensino de Matemática e participa em congressos e oficinas. Leciona matemática no nível secundário em uma escola privada.

Quadro 9 – Perfil dos sujeitos da pesquisa

Professor	Idade (anos)	Experiência (anos)	Nível em que leciona	Formação
D1	36	15	Secundário e superior	Licenciatura em educação na especialidade de matemática. Estudos de mestrado em ensino de matemática.
D2	34	10	Secundário e superior	Licenciatura em matemática. Estudos de mestrado em ensino de matemática.
D3	51	Mais de 15	Secundário e superior	Licenciatura em educação na especialidade de matemática e arquitetura. Estudos de mestrado em ensino de matemática.
D4	34	15	Secundário	Licenciatura em educação na especialidade de matemática e física
D5	36	15	Primário e Secundário	Licenciatura em educação na especialidade de matemática
D6	36	15	Secundário	Licenciatura em educação na especialidade de matemática e física
D7	35	15	Secundário	Licenciatura em educação na especialidade de matemática e física
D8	42	15	Secundário	Licenciatura em educação na especialidade de matemática. Estudos de mestrado em ensino de matemática.
D9	30	Menos de 5	Secundário e superior	Licenciatura em matemática.
D10	42	Mais de 15	Secundário	Licenciatura em educação na especialidade de matemática. Estudos de mestrado em ensino de matemática.

Fonte: Elaboração própria.

Em resumo, fizemos uma síntese do perfil dos professores no Quadro 9, onde podemos ver que os participantes da formação têm entre menos de 5 anos até mais de 15 de anos de experiência de ensino. Só dois ensinam em escolas públicas. Cinco não contam com estudos de pós-graduação, têm idade de 30 a 42 anos, só dois tem licenciatura plena em matemática e quatro além de ensinar no nível secundário ensinam no nível superior por horas ou jornada parcial.

É importante indicar que durante o desenvolvimento dos encontros três professores (D4, D5 e D6) faltaram por problemas pessoais ou por problemas de conectividade na Internet. Como a ausência ocorreu em apenas um dos encontros, em datas diferentes, os consideramos sujeitos da pesquisa porque estiveram presentes em sete dos oito encontros da formação.

A seguir apresentamos a descrição da aplicação do PEP-FP, quanto ao número de encontros e o tempo de seu desenvolvimento.

5.2 Descrição da aplicação do PEP-FP

A parte experimental de nossa pesquisa foi desenvolvida em oito encontros, aos sábados, porque era o dia da semana que os professores não davam aulas, de 17 de outubro de 2020 à 12 de dezembro de 2020, com um total de 20 horas. Em 07 de novembro não houve o encontro por problemas de conectividade na rede de Internet em algumas zonas de Lima-Peru.

Quadro 10 – Encontros da aplicação do PEP-FP

Encontro	Data	Horas	Desenvolvimento
1	17 de outubro	2	Boas-vindas aos professores e explicitação do uso das ferramentas virtuais a usar na formação.
2	24 de outubro	2	Desenvolvimento do módulo M_0
3	31 de outubro	2.5	
4	14 de novembro	3	Desenvolvimento do módulo M_1
5	21 de novembro	3	
6	28 de novembro	3	
7	05 de dezembro	2.5	Desenvolvimento do módulo M_2 Início do desenvolvimento do módulo M_3
8	12 de dezembro	2	Desenvolvimento do módulo M_3
Total		20	-

Fonte: Questionário de dados dos professores.

Como se pode observar no Quadro 10, no primeiro encontro demos as boas-vindas aos professores participantes, apresentações da pesquisadora e dos participantes, além de explicações do uso das ferramentas tecnológicas que seriam usadas na formação. O Modulo M_0 foi desenvolvido no segundo e terceiro encontro em um total de quatro horas e trinta minutos; o módulo M_1 foi desenvolvido no quarto, quinto e sexto encontros, com um total de nove horas; o módulo M_2 foi desenvolvido na primeira hora do sétimo encontro e no tempo restante foi iniciado o módulo M_3, que foi finalizou no oitavo encontro.

Em virtude do contexto da pandemia que impôs a utilização de ferramentas tecnológicas para a formação, dedicamos o primeiro encontro, de duas horas, para explicar o uso do *Zoom meeting* para o trabalho em grupos específicos, de documentos do *Google* para o trabalho colaborativo, do *Google Classroom* para anexar documentos, além de explicar o formulário para baixar o documento do termo de consentimento (TCLE) do comité de ética e como anexar o documento assinado.

No segundo encontro, a formadora apresentou em uma tela do *Zoom Meeting*, um quadro com colunas denominadas como G1, G2 e G3 em que os professores puderam decidir livremente a que grupo queriam pertencer. Na sequência foi iniciado o Módulo M_0 que perdurou até o terceiro encontro.

O desenvolvimento do Módulo M_1: *viver um PEP* ocorreu no quarto, quinto e sexto encontros e uma hora do sétimo encontro, quando foi estudado o PEP que tratava de Tsunamis. A questão Q_0 do PEP foi apresentada e os professores, no papel de estudantes de ensino secundário, propuseram novas questões e suas respostas, por meio do *Zoom Meeting* e de documentos do *Google*. A dinâmica dos grupos consistia em discutir suas perguntas nos grupos específicos, compartilhá-las no grupo principal, voltar aos grupos para buscar respostas e voltar ao grupo principal para que um representante do grupo as apresentassem. Esta dinâmica ocorreu durante todas as questões principais Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 do PEP no contexto do Tsunami.

Na primeira hora do sétimo encontro aconteceu uma discussão a respeito de classificação dos quadriláteros, sugerida pela formadora, nos grupos específicos e no grupo principal, que foi encerrado com a apresentação das classificações propostas no MER pela formadora. Na segunda hora, do sétimo encontro, a formadora apresentou o que é um PEP, desde a perspectiva da TAD e do PEP vivido, que foi seguida de uma discussão com a participação de todos os professores no grupo principal. Na última hora do sétimo encontro foi dada para os professores a tarefa de criar ou adaptar um PEP para o ensino de quadriláteros.

O oitavo encontro teve início com os professores discutindo suas propostas de PEP, nos grupos específicos com a mediação da formadora para sanar dúvidas ou dar orientações. Na segunda hora, um representante apresentou a proposta de cada grupo que foi discutida pelos professores no grupo principal. Depois, a formação foi avaliada pelos professores participantes.

5.3 Análises do Módulo M0: Tornar explícito as razões de ser do PEP-FP

Analise a *priori*

Como em todo PEP, deve-se iniciar com uma pergunta geratriz que gera outras questões parciais até chegar a uma resposta $R^{\heartsuit}$. O PEP-FP também tem uma pergunta geratriz, que denotamos como Q_0-FP, que é transversal a todos os módulos, pois no final os professores devem apresentar uma possível resposta que denotamos de $R^{\heartsuit}$-FP. A pergunta Q_0-FP escolhida foi:

Q_0-FP: por que e como ensinar quadriláteros?

Acreditamos que os professores, para respondê-la, podem fazer perguntas parciais em um documento do Google tais como:

Q_{0_1}-FP: Como os quadriláteros são ensinados?

Q_{0_2}-FP: O que se sabe dos quadriláteros? O que se precisa saber sobre quadriláteros para ensiná-los?

Q_{0_3}-FP: O que dizem os documentos curriculares a respeito de quadriláteros?

Q_{0_4}-FP: O que dizem os livros didáticos sobre quadriláteros?

Q_{0_5}-FP: Quais são as razões de ser do ensino de quadriláteros? O que dizem a história e os cientistas a esse respeito?

Previmos que o módulo M_0 ocorra em um encontro

Análise a *posteriori*

O módulo M_0 teve início, em 24 de outubro, com nove professores no *Zoom meeting*, mas que depois de 15 minutos ingressou mais um professor. Os dez professores formaram livremente os grupos G1, G2 e G3, isto é, sem interferência da formadora. A seguir, pediu aos professores se colocarem no papel de terem que cumprir a tarefa de ensinar quadriláteros e apresentou a pergunta *Q_0-FP: por que e como ensinar quadriláteros?*

Acompanhando o grupo G1, percebemos que as discussões ocorreram no sentido de responder a pergunta *por que ensinar quadriláteros*, baseados em suas experiencias de ensino. O professor D3 comentou a importância de os estudantes saberem as aplicações de conceitos matemáticos que são ensinados em sala de aula, D1 afirmou que, muitas vezes, os estudantes questionar o porquê aprender determinados conteúdos se não usarão em suas vidas; o professor D2 corroborou com os mesmos questionamentos e acrescentou com o que consta do currículo a respeito do tema.

Da mesma forma, o grupo G2 focou na mesma pergunta, e as professoras D4, D6 e D7 iniciaram a discussão, focando nas habilidades que os estudantes poderiam desenvolver com o estudo de quadriláteros e na importância de os estudantes saberem aplicar seus conhecimentos de quadriláteros em um contexto real. A professora D5, a partir de sua experiencia de ensino, afirmou que seus estudantes tinham problemas em reconhecer diferentes quadriláteros e a professora D6 acrescentou que tinha o mesmo problema.

O grupo G 3, como os anteriores, focou na mesma pergunta e os professores D9 e D10 mostraram preocupação com a aplicação de quadriláteros em contextos reais e D8 com os conhecimentos que precisam ser mobilizados para construir conhecimentos de quadriláteros.

Ao contrário do esperado, como consequência da Q_0 surgiram duas questões sendo: *por que ensinar quadriláteros* e *como ensinar quadriláteros*, em que a primeira foi discutida na primeira sessão do módulo M_0 o que acarretou na necessidade de outra sessão e de um total de quatro horas e trinta minutos.

Para responder a primeira questão os professores fizeram perguntas parciais, como mostra o Quadro 11, em que se observa que cada grupo apresentou distintas perguntas a partir das discussões feitas nos grupos específicos do *Zoom Meeting*.

Quadro 11 – Perguntas parciais para "por que ensinar quadriláteros?"

Grupo: G1	Grupo: G2	Grupo: G3
O que diz as ementas da instituição que trabalho e o currículo? Quais conceitos matemáticos prévios são necessários para o ensino de quadriláteros? Em um contexto real, onde podemos encontrar aplicações de quadriláteros? Na matemática que novos conceitos me permitem seu estudo?	Quais habilidades e capacidades podem ser desenvolvidas em meus alunos com o estudo de quadriláteros? Quais aplicações têm os quadriláteros? Em que situações são usados os quadriláteros? Os alunos diferenciam quadriláteros de outras figuras geométricas planas ou em dimensões diferentes?	Quais conhecimentos matemáticos podem ser relacionados ao estudo e aplicação de quadriláteros na solução de problemas em contextos reais? Que objetos matemáticos estão envolvidos na construção dos quadriláteros?

Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 11 podemos observar algumas restrições institucionais, apresentadas especificamente no grupo G1, quando apresentam inquietações a respeito das ementas dos conteúdos apresentadas nas instituições em que trabalham. Além disso, podemos ver que os três grupos se preocuparam com as aplicações de quadriláteros, o que pode indicar que estão no paradigma de visita às obras.

Para responder a essas questões, o grupo G1, centrou-se no currículo indicando que, no Desenho Curricular Nacional de 2016, o ensino de quadriláteros tem início no nível primário (ciclo V) e continua no nível secundário (ciclo VI) como parte do desenvolvimento da competência: resolve problemas de forma, movimento e localização. O grupo G2, a respeito de habilidades e capacidades que podem ser desenvolvidas pelos alunos quando estudam quadriláteros, baseados em Hernández e Villalba (2001) afirmou que favorece o desenvolvimento do pensamento e raciocínio espacial e dedutivo, além de permitir construir e estudar modelos do mundo físico. Os professores do grupo G3, a respeito dos objetos matemáticos que estão envolvidos no estudo de quadriláteros, afirmaram que além de permitir o cálculo da medida de áreas, permite o estudo das faces de poliedros, representar um sólido por meio de suas três vistas por meio de projeções ortogonais e o estudo de vetores.

Na segunda sessão do módulo M_0 os professores centraram-se na segunda pergunta: *como ensinar quadriláteros?* Trabalharam primeiro nas salas específicas de seus grupos e logo, registraram suas perguntas parciais e respostas em um documento *Google*, que foi compartilhado previamente pela formadora na etapa 1 do *Google Classroom* e as discutiram na sala principal de *Zoom meeting*.

A formadora, acompanhando os grupos nas salas específicas do *Zoom Meeting*, percebeu que no grupo 1 as discussões estavam baseadas no currículo, nas propostas das instituições de ensino de cada um dos professores. O professor D2 expressou que em sua escola deve cumprir a programação curricular do ano e, as vezes, o tempo não permite aprofundar um conteúdo determinado. O professor D1, indicou que, nem sempre era possível usar o laboratório de informática, porque deve ser requisitado com antecedência e é muito solicitado pelos professores. O professor D3, centrou sua intervenção nos materiais que as instituições possuem e no tempo para cumprir como o programa curricular da escola.

O grupo G2 centrou suas discussões nos conhecimentos e habilidades que os estudantes podem desenvolver ao aprender quadriláteros. As professoras D4 e D6 focaram nos livros didáticos e no que apresentam a respeito de quadriláteros. As professoras D5 e D7, nas estratégias de ensino e nas ferramentas que podem usar para ensinar quadriláteros, observadas quando apresentaram as perguntas parciais: que ferramentas e estratégias usaríamos? Qual seria a situação problemática a propor? No caso do grupo G3, a discussão focou nas estratégias de ensino, no currículo e nos conhecimentos a serem desenvolvidos. Os professores D9 e D10 focaram nas estratégias, nas situações e no planejamento de uma sessão para ensinar quadriláteros, já o professor D8, no grau de ensino e nos documentos que deve revisar para ensiná-los.

Os professores, nas discussões de cada grupo nas salas específicas do *Zoom Meeting*, apresentaram as perguntas parciais que estão apresentadas no Quadro 12.

Os professores procuraram respostas para essas perguntas em livros didáticos, no currículo e na Internet e depois de um tempo, cada grupo compartilhou seus achados e algumas das respostas foram discutidas na sala principal com todos os professores. É importante dizer que no caso de livros didáticos foram disponibilizados, pela formadora, no *Google Classroom* algumas digitalizações de livros porque os professores não tinham livros nessa forma e alguns indicaram que, desde o início da pandemia, decidiram trabalhar com fichas de trabalho porque muitos estudantes não tinham comprado livros.

Como podemos observar no Quadro 12, algumas perguntas mostram restrições institucionais relacionada como o tempo, os materiais e as propostas a serem realizadas, outras apresentam características monumentalista porque os professores se consideram como a única fonte de informação para seus estudantes, por exemplo, quando o grupo G3 questiona a respeito dos documentos que devem revisar para ensinar quadriláteros, mas não a respeito do que os estudantes podem investigar para aprender quadriláteros.

Quadro 12 – Perguntas parciais para "como ensinar quadriláteros?"

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Quanto tempo temos para desenvolver este conteúdo? Que materiais estão disponíveis para o ensino de quadriláteros na referida instituição? São usados materiais específicos ou algum software? Qual é a proposta da instituição em relação ao ensino de matemática?	Qual é o conhecimento prévio que meus alunos têm sobre quadriláteros? Que informações encontro em várias fontes e livros para ensinar quadriláteros? Como é apresentada, na bibliografia existente, o assunto de quadriláteros? Quais são as dificuldades que costumam surgir no processo de aprendizagem de quadriláteros? Que recursos tenho ou posso elaborar? Que estratégias posso aplicar?	Em que níveis de ensino os quadriláteros podem ser ensinados? Que conhecimento prévio é necessário para ensinar quadriláteros? Que documentos devo revisar para ensinar quadriláteros? Que ferramentas e estratégias usaríamos? Qual seria a situação problemática a propor? Como planejar o desenvolvimento das sessões de aprendizagem?

Fonte: Dados da pesquisa

Neste módulo M_0, a ***dialética individual-coletivo*** foi viabilizada pelas discussões nas salas específicas do *Zoom meeting*, porque nelas cada professor apresentou perguntas (Quadros 11 e 12) para iniciar as discussões que, logo, foram socializadas e respondidas no coletivo na sala principal do *Zoom meeting*.

A ***dialética mídia-milieu*** do módulo M_0, pode ser identificada quando os professores, no início do estudo, tiveram contato com elementos de um *millieu*, como o trabalho em grupos de professores e a pergunta Q_0-FP. A seguir cada grupo constrói seu *milieu* próprio com novos questionamentos e a incorporação de mídias como o currículo nacional do Peru, livros didáticos, Internet para procurar informações a respeito de aplicações de quadriláteros e artigos de pesquisas para identificar algumas dificuldades para o ensino de quadriláteros e, assim, dar respostas para suas perguntas, o que permitiu uma evolução do *milieu*.

A ***dialética questões e respostas*** pode ser observada quando uma comunidade de estudo *X* (professores de matemática do nível secundário em formação continuada) e *Y* (formadora) abordam a questão Q_0-FP e fazem surgir novas perguntas, evidenciadas nos Quadros 11 e 12, formuladas e respondidas a partir de suas práticas docentes e suas experiências. Foram várias as perguntas que foram discutidas pelos professores na sala principal do Zoom meeting, entre elas apresentamos duas. A primeira, apresentada pelo grupo G2, que questiona a apresentação de quadriláteros na bibliografia existente, foi discutida com os professores dos outros grupos que chegaram as seguintes respostas:

> Tenta-se apresentar os conceitos de forma organizada, a partir de determinadas situações que se propõem fazer. No entanto, não constroem as definições e classificações, apenas as mencionam e a seguir propõem alguns exemplos que reforçam o reconhecimento da figura, mas não das propriedades. (GRUPO G1).
> Observa-se que nos livros procuram cumprir o que está estabelecido no currículo, mas obrigam as situações a dar-lhes um contexto que não representa o uso real e prático dos quadriláteros. (GRUPO G2).
> Os textos propõem atividades com material concreto para construir quadriláteros. Também apresentam quadriláteros por meio da aplicação de fórmulas para cálculo de áreas. Consideram o quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio e losango. (GRUPO G3).

Como mencionado pelo grupo G2, os livros didáticos apresentam quadriláteros como já estabelecido, em outras palavras, no paradigma de visita às obras que, embora tenham criticado, reconheceram que os usam como fontes principais para seu ensino porque, às vezes, devem cumprir seus conteúdos ou por exigências das instituições ou porque foram comprados pelos pais. A outra pergunta, que surgiu nos três grupos, trata de encontrar aplicações de quadriláteros em contextos reais que teve como respostas:

> Se pode observar quadriláteros nas portas, janelas, quando cobrem uma área (tesselação), mesa, laterais de cozinha, geladeira, televisão, alto-falantes, quadro-negro, capa de livro e caderno, telefone celular, campos de esportes, caixa, retângulo dourado (arquitetura), cortando um canal de irrigação. (GRUPO G1).
> Nas diferentes construções de objetos como pipas, janelas, portas, casas, edifícios. (GRUPO G2).
> Na fabricação de objetos, portas, casas, construção de pontes, etc. (GRUPO G3).

Podemos observar que todos os grupos indicaram que falar de aplicações de quadriláteros é equivalente a observar quadriláteros em seu entorno, mas não pensaram em situações reais em que os quadriláteros pudessem ser utilizados como uma ferramenta fundamental para resolvê-las.

5.4 Análise do Módulo M_1: *Viver um PEP*

Análise a *priori*

O objetivo deste módulo é que os professores, como se fossem estudantes, desenvolvessem um PEP. Para criar esse PEP usamos a análise do currículo e de livros didáticos, em que identificamos que a razão de ser para o ensino de quadriláteros, apresentada nos livros didáticos, é ensinar os quadriláteros pelos quadriláteros. Essa análise levou a questionar e considerar a possibilidade de reviver uma razão de ser reconhecida no estudo epistemológico de quadriláteros, com base em questões que motivam seu estudo e desenvolvimento e que permita reconhecer sua aplicação em situações que envolvem o cálculo de medida de áreas de superfícies de terrenos irregulares em que o quadrilátero será uma das obras utilizadas.

O MER construído em nossa pesquisa, mostra a evolução dos quadriláteros como objeto matemático, pois permitiu resolver tarefas reais, como o cálculo de medida da área da superfície de um terreno que, na antiguidade estava relacionada com as enchentes de rios. Procuramos então um contexto atual e encontramos no tsunami um contexto real, pois o território peruano é sensível à essa ocorrência por se encontrar em uma região tectônica, especificamente, nas cidades costeiras de Lima e Callao. A partir desse fenômeno queremos reviver a razão de ser dos quadriláteros, que está relacionada ao cálculo da medida de áreas de terrenos e, especificamente em nosso caso, da área de zonas que poderiam ser atingidas por um Tsunami. Nesse contexto acreditamos que tarefas envolvendo as zonas que podem ser atingidas por um tsunami poderiam permitir fazer reconfigurações das superfícies de terrenos para calcular medidas de áreas e considerar diferentes maneiras de prevenção a partir das informações que o estado e diversas instituições fornecem aos cidadãos. Dessa maneira, consideramos que a pergunta inicial do PEP, é:

Q_0: O que devemos considerar para se prevenir de um Tsunami?

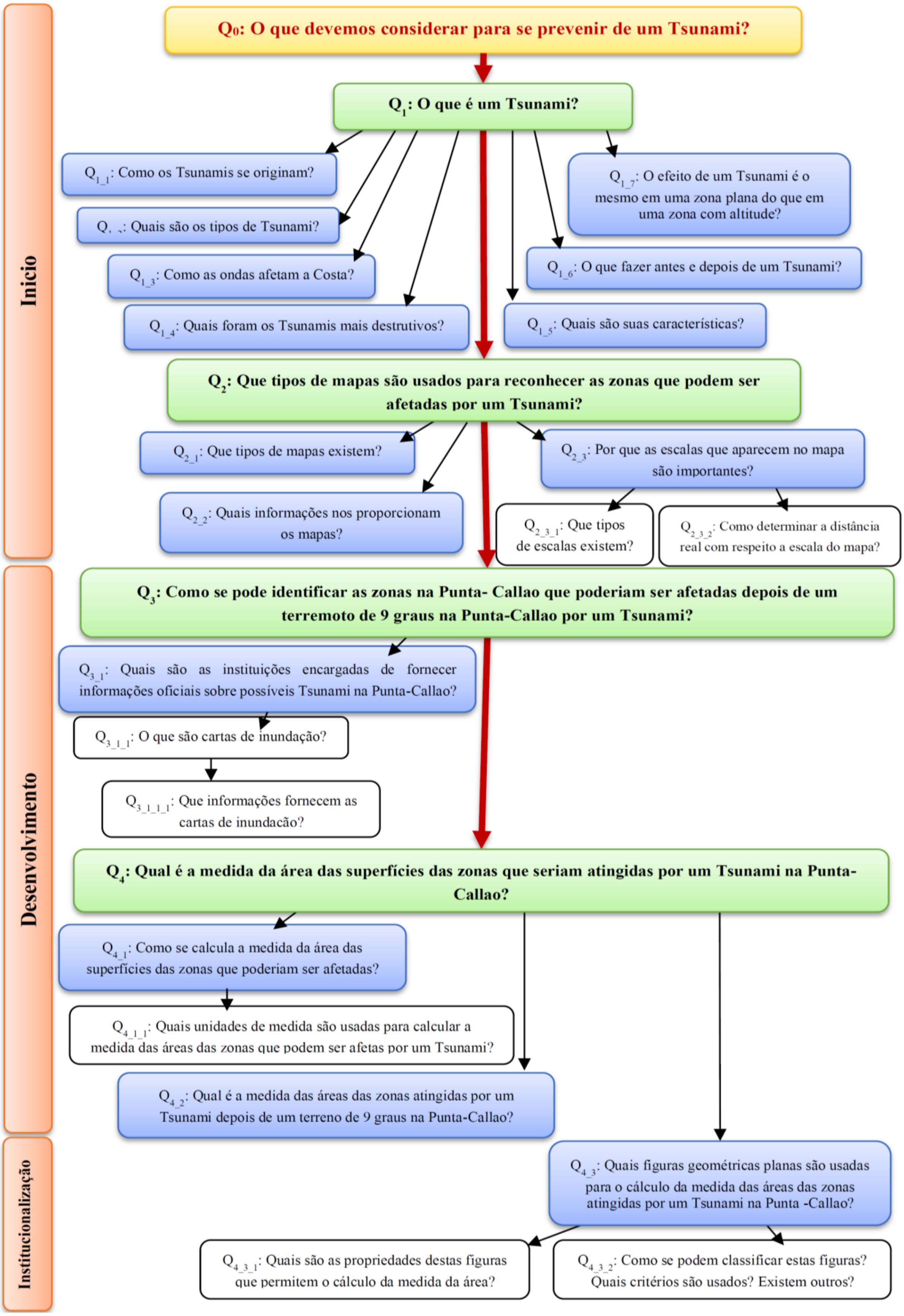
Acreditamos que esta pergunta é do contexto do mundo e permite gerar novos questionamentos como: o que é um Tsunami? Como ele se desenvolve? Como ele se forma? Entre outras. Em um segundo momento, consideramos as orientações que o estado e as instituições como o Instituto Geofísico do Peru fornecem aos cidadãos, para reconhecer zonas atingidas ou de segurança para que as pessoas possam agir quando têm um possível alerta de Tsunami. Foi assim que nasceu a ideia de usar essa informação para estudar quadriláteros por meio da medida de áreas das zonas de risco durante um Tsunami em Punta-Callao no Peru. Para o cálculo dessas medidas utilizamos saberes matemáticos ou de outras disciplinas, como a topografia, caso os professores se questionem a respeito do cálculo da medida de área de superfícies com altitude, pois os terrenos não são sempre planos e podem ter formas e características diferentes. Na Figura 68 criamos, baseados no estudo da dimensão epistemológica (MER) e de um problema do mundo, um esquema em que a pergunta Q_0 do PEP considera a tarefa inicial de estudo de quadriláteros e permite estudar obras de matemática (geométricas ou outras) e de outras disciplinas.

Figura 68 – Estudo de quadriláteros desde o questionamento do mundo.

Fonte: Elaboração própria

Por outro lado, no PEP a ser vivido pelos professores, pensamos em valorizar a classificação dos quadriláteros, que não está presente no Modelo Epistemológico Dominante, como vimos no estudo econômico dos quadriláteros, baseados em Gascón (2014) que propõe uma classificação no setor de movimentos no plano (simetria). Acreditamos que é importante trabalhar tal classificação com os professores para lhes apresentar um outro ponto de vista, além da que é proposta nos livros didáticos peruanos. Acreditamos que podem surgir as perguntas parciais que apresentamos na Figura 69, considerando que a construção a priori do PEP a ser vivido com os professores se dá em três etapas: **início**, composta pelas perguntas Q_0 e Q_1; **desenvolvimento**, composta das perguntas Q_2, Q_3 até Q_{4_2} e a **institucionalização**, composta pela pergunta Q_{4_3} e suas perguntas parciais.

Figura 69 – PEP a ser vivido no módulo 1 do PEP-FP



Fonte: Elaboração própria

A seguir apresentamos possíveis respostas (R^i, em que $i = 1, 2, \cdots, n$) às perguntas:

Q_1: O que é um Tsunami?

Para responder esta pergunta acreditamos que os professores se baseiem em sua origem na etimologia (significado da palavra) ou pelas características do fenômeno.

R^1_1: das palavras *tsu* que significa porto e *nami* que significa onda.

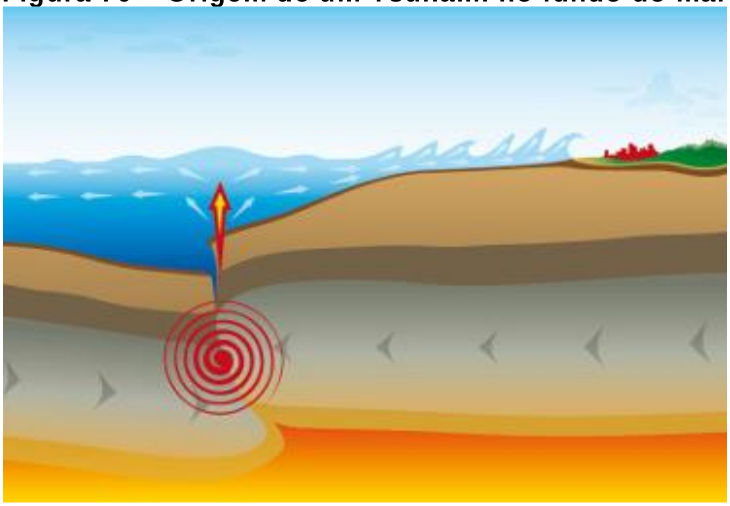
R^2_1: um terremoto marinho

R^3_1: é o deslocamento de água do mar para as zonas costeiras.

Q_{1_1}: Como os Tsunamis se originam?

Sabemos que os tsunamis possuem diferentes origens e provocam uma ruptura no fundo do mar que empurra a água para cima para iniciar a onda como é apresentado na Figura 70.

Figura 70 – Origem de um Tsunami no fundo do mar



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/tsunami.htm

Para responder a esta pergunta acreditamos que os professores procurem na Internet possíveis origem dos Tsunamis e respondam:

$R^1_{1\_1}$: origem tectônica (terremoto)

$R^2_{1\_1}$: erupções vulcânicas subaquáticas

$R^3_{1\_1}$: deslizamentos de terra submarinha.

$R^4_{1\_1}$: por queda de um meteorito no mar.

Q_{1_2}: Quais são os tipos de Tsunami?

Para responder a esta pergunta os professores devem procurar na Internet por tipos de tsunamis considerando a distância, a origem ou a intensidade.

$R^{1}_{1\_2}$: Tipos de tsunami de acordo com a distância

Este tipo de classificação considera a distância que o tsunami percorre, ou seja, a quantidade de quilômetros de seu início até seu impacto na costa e pode ser de três tipos: local, regional ou distante.

$R^{1-1}_{1\_2}$: Tsunamis de origem local

Produz efeitos devastadores na terra (ilhas e costas), se estiverem a menos de 100 quilômetros de distância, porque suas ondas alcançam a terra rapidamente, menos de uma hora, o que não dá tempo para evitá-los.

$R^{1-2}_{1\_2}$: Tsunamis de origem regionais

São tsunamis que ocorrem entre 100 e 1000 quilômetros das costas e que demoram entre uma e três horas para chegar ao continente, o que permite a evacuação de pessoas que se encontram na costa para zonas altas.

$R^{1-3}_{1\_2}$: Tsunamis de origem distante

Sua origem está a mais de 1000 quilômetros das costas e pode levar até 12 horas para tocar o continente, o que significa que não sejam destrutivos ao atingir o continente.

$R^{2}_{1\_2}$: Tipos de Tsunamis de acordo com a intensidade

Neste segundo critério de classificação dos tsunamis se considera sua intensidade, ou seja, a capacidade de destruição que podem atingir, caracterizada por seis graus.

$R^{2-1}_{1\_2}$: Tsunamis de grau I

Não tem efeitos destrutivos e só são detectados pelos registos das estações de maré.

$R^{2-2}_{1\_2}$: Tsunamis de grau II

Também não tem efeitos destrutivos e, são detectados, por habitantes da costa que conhecem o comportamento do mar.

$R^{2-3}_{1\_2}$: Tsunamis de grau III

Este tipo de tsunami causa danos menores, como inundações ou arrastar barcos pequenos.

$R^{2-4}_{1\_2}$: Tsunamis de grau IV

Tem uma intensidade mais forte que pode prejudicar construções portuárias e arrastar qualquer tipo de embarcação.

$R^{2-5}_{1\_2}$: Tsunamis de grau V

Esse grau é sinônimo de destruição porque as ondas arrastam tudo o que encontram em seu caminho e é acompanhada por um som forte.

$R^{2-6}_{1\_2}$: Tsunamis de grau VI

É a pior intensidade para um tsunami porque a força das águas pode arrancar uma árvore pelas raízes rapidamente e destruir tudo em seu caminho.

Q $_{1\_3}$***: Como as ondas afetam a costa?***

Para responder a esta pergunta os professores podem procurar na Internet e encontrar as seguintes respostas:

$R^{1}_{1\_3}$: Na maré alta a onda se move a uma velocidade de até 800 km/h e não tem alta altitude, mas ao atingir a costa pode causar destruição, embora sua velocidade diminua substancialmente.

$R^{2}_{1\_3}$: A variação da profundidade da plataforma continental pode alterar a altura da onda. Nas baías abertas e zonas costeiras adjacentes a águas profundas, onde há uma plataforma continental relativamente estreita, a altura do tsunami pode aumentar consideravelmente, já em um declive menos acentuado na beira-mar as ondas perdem força, atenuando o tsunami, como se observa na Figura 71.

Figura 71 – Origem de um Tsunami

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tsunâmi

Q $_{1\_4}$: Quais foram os Tsunamis mais destrutivos?

Para responder a esta pergunta acreditamos que os professores procurem na Internet, em jornais virtuais ou em artigos, para obter as seguintes respostas:

$R^1_{1\_4}$: segundo o Jornal Observador (https://observador.pt) os tsunamis mais destrutivos ocorreram: na baía de Ise no Japão, em 18 de janeiro de1586, com ondas de 6 metros de altura; em Nankaido no Japão, em 28 de outubro de 1707, com ondas de 25 metros de altura; em Lisboa em Portugal, no dia 1 de novembro de 1755, com ondas de 30 metros de altura; em Arica no Peru (região que agora pertence ao Chile), em 13 de agosto de 1868, com ondas de 21 metros; em Krakatau na Indonésia, em 27 de agosto de 1883, com ondas de 37 metros de altura; em Sumatra na Indonésia, em 26 de dezembro de 2004, com ondas de até 50 metros de altura e na costa leste do Japão, em 11 de março de 2011, com ondas de 10 metros de altura;

Q $_{1\_5}$: Quais suas características?

Os tsunamis podem ser caracterizados por seu deslocamento, complexidade e velocidade.

$R^1_{1\_5}$: O deslocamento caracteriza os tsunamis por seu afastamento do epicentro considerando o movimento de suas ondas, cuja profundidade determina sua velocidade.

$R^2_{1\_5}$: A complexidade caracteriza os tsunamis de acordo com a conjunção dos elementos que o consolidam sendo, por isso, chamados de fenômenos complexos.

$R^3_{1\_5}$: A velocidade caracteriza os tsunamis pela rapidez das ondas que pode atingir entre 500 e 1000 quilômetros por hora nos fundos marinhos. Ao chegar à costa a velocidade tende a ser drasticamente reduzida, por volta de 15 km por hora, pois depende da profundidade da praia.

Q $_{1\_6}$: O que fazer antes e depois de um Tsunami?

O Tsunami algumas vezes pode ser previsto pelo Instituto Geofísico que, depois de um sismo de grande magnitude na costa, pode acionar um alarme.

$R^1_{1\_6}$: antes de um Tsunami

- Se ouvir um alerta de tsunami oficial ou detectar sinais de um tsunami deve evacuar o local de uma só vez.

- Levar seu kit de emergência com os suprimentos necessários para ficar confortável durante a evacuação.

- Se conduzir para terrenos mais elevados, no sentido do interior, a pelo menos três quilômetros da orla marítima ou a uma altura de no mínimo 30 metros.

$R^{2}_{1\_6}$: depois de um Tsunami

- Ficar atento a ondas tardias ou novos terremotos permanecer em local seguro, até receber instruções confiáveis, mesmo que a água já tenha baixado.

- Esperar até que as autoridades locais emitam um sinal positivo para o retorno.

Q_{1_7}: O efeito de um Tsunami é o mesmo em uma zona plana do que em uma zona com altitude? Por quê?

Acreditamos que esta pergunta pode surgir porque a costa de Lima tem diferentes altitudes e os professores podem perguntar sobre o que acontece nessas zonas e, após pesquisar poderiam chegar a esta resposta:

$R^{1}_{1\_7}$: Uma cidade em zona plana pode ser atingida com mais facilidade pelas ondas de um tsunami do que uma zona com altitude, tendo em vista a recomendação de evacuação para zonas com altitude maior de 30 metros.

Q_{2}: Que tipos de mapas são usados para reconhecer as zonas que podem ser afetadas por um Tsunami?

Acreditamos que nas buscas feitas para os professores devem encontrar mapas e tentar entendê-los, com novas perguntas.

Q_{2_1}: Que tipos de mapas existem?

Figura 72 – Mapa físico do Peru

Fonte: https://cutt.ly/YbbyxIp

$R^{1}_{2\_1}$: Mapas físicos são aqueles que representam as formas do território, ou seja, montanhas, rios, lagos, planaltos e planícies e outras formas de relevo, como visto na Figura 72.

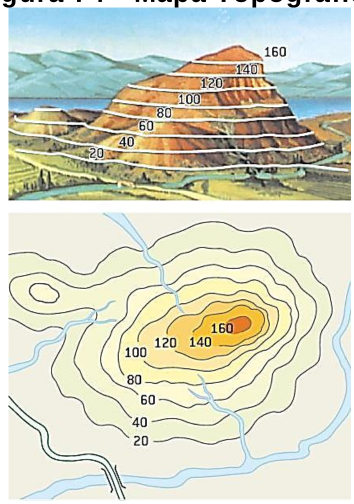
$R^{2}_{2\_1}$: Mapas políticos (Figura 73) indicam a divisão administrativa de países, estados, províncias e cidades.

Figura 73 – Mapa Político do Peru

Fonte: https://cutt.ly/abbyG2Y

$R^{3}_{2\_1}$: Mapas topográficos (Figura 74) representam a planimetria e altimetria das formas e dimensões do concreto, elementos fixos e duráveis de uma determinada área da superfície terrestre.

Figura 74 - Mapa Topográfico



Fonte: https://cutt.ly/vbbyMHc

$R^{4}_{2\_1}$: Mapa geomorfológico representa as características do relevo de uma região.

$R^{5}_{2\_1}$: Mapas temáticos são usados para mostrar, em certos territórios, determinados elementos ou fenômenos específicos, como os mapas rodoviários, turísticos, econômicos, étnico, linguístico, demográfico, religioso, climático, hidrográfico etc., que se caracterizam por possuírem símbolos e legendas específicos.

Q_{2_2}: Quais informações nos proporcionam os mapas?

Algumas possíveis repostas podem ser:

$R^1_{2\_2}$: A geografia de uma região, pais ou continente.

$R^2_{2\_2}$: A extensão de uma superfície representada.

$R^3_{2\_2}$: Nos permite orientar por meio dos pontos cardinais

Q_{2_3}: Por que as escalas que aparecem no mapa são importantes?

Algumas possíveis repostas podem ser:

$R^1_{2\_3}$: porque informam quantas vezes o terreno ou objeto real foi reduzido em relação ao mapa.

$R^2_{2\_3}$: porque a escala é uma razão matemática que, no caso dos mapas informa quantas vezes o real foi reduzido.

$Q_{2\_3\_1}$: Que tipos de escalas existem?

Algumas possíveis repostas podem ser:

$R^1_{2\_3\_1}$: Escala numérica

É uma relação numérica, razão, entre uma distância representada no mapa e sua distância no mundo real, que é expressa da seguinte forma: 1: 5.000, 1: 50.000, 1: 100.000, 1: 1.000.000.

$R^2_{2\_3\_1}$: Escala gráfica

A escala gráfica (Figura 75) é uma régua graduada que permite calcular distâncias mais rapidamente em um mapa, menos precisa que a escala numérica, mas com a vantagem de permanecer válida mesmo que o mapa tenha sido ampliado ou reduzido.

Figura 75 - Tipos de escala

Fonte: https://cutt.ly/ObxKNYn

Q_3: Como se pode identificar as zonas na Punta-Callao que poderiam ser afetadas por um Tsunami?

Uma possível resposta:

R^1_3: Por meio das informações da escala do mapa podemos determinar as distâncias entre os pontos no mapa.

Q_{3_1}: Quais são as instituições encarregadas de fornecer informações oficiais sobre possíveis Tsunamis no Peru?

Possíveis respostas:

$R^1_{3\_1}$: Instituto Geofísico do Peru (IGP)

$R^2_{3\_1}$: Instituto Nacional de Defesa Civil do Peru (INDECI)

$R^3_{3\_1}$: Diretoria de Hidrografia e Navegação do Marinha de Guerra do Peru

$Q_{3\_1\_1}$: O que são cartas de inundação?

Uma possível resposta:

$R^1_{3\_1\_1}$: As cartas de inundação são mapas que mostram o limite máximo de inundação causado por um tsunami e as rotas de evacuação e áreas de refúgio que são utilizadas pelas autoridades para a gestão de riscos de desastres e como um protocolo antes de um tsunami.

$Q_{3\_1\_1\_1}$: Que informações fornecem as cartas de inundação?

Possíveis respostas:

$R^1_{3\_1\_1\_1}$: Zonas inundável

$R^2_{3\_1\_1\_1}$: Rotas de evacuação

$R^3_{3\_1\_1\_1}$: Zonas de refúgio

$R^4_{3\_1\_1\_1}$: Principais vias de trânsito

Q_4: Quais são as medidas das áreas das superfícies das zonas que seriam atingidas por um Tsunami na Punta- Callao?

Acreditamos que para responder esta pergunta os docentes devem reconhecer que a zona de Punta-Callao está ao nível do mar e que, segundo as autoridades da marinha peruana, é uma zona com alto risco de um tsunami.

A partir da pergunta Q_4 os docentes podem formular perguntas como:

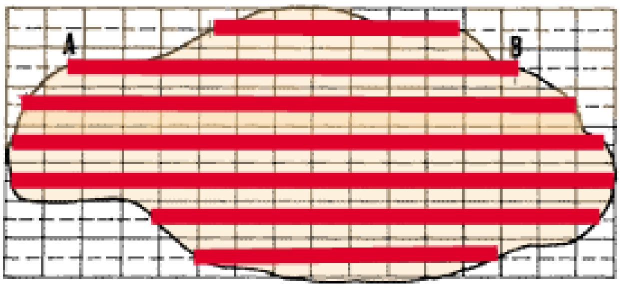
Q_{4_1}: Como se pode calcular a medida das áreas das superfícies das zonas que poderiam ser afetadas?

Para responder a esta pergunta acreditamos que os professores procurem técnicas para o cálculo da medida de áreas como as seguintes:

$R^1_{4\_1}$: Por meio da escala do mapa podemos determinar distâncias entre pontos no mapa.

$R^2_{4\_1}$: Pelo método de franjas ou faixas (Figura 76) em que se traçam franjas retangulares na região para calcular sua medida de área, quanto mais franjas, maior será a precisão da medida.

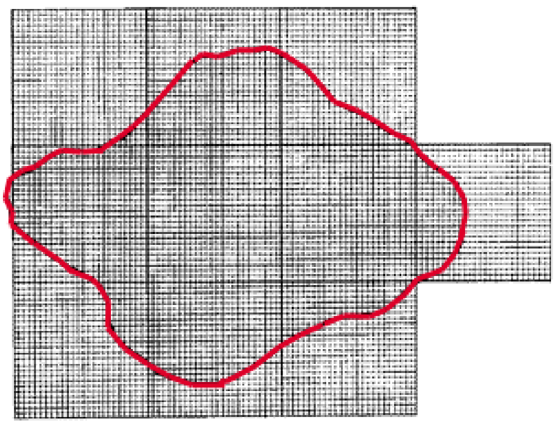
Figura 76 – Método de franjas



Fonte: https://cutt.ly/5bxKKco

$R^3_{4\_1}$: Pelo método de malha quadriculada (Figura 77) em que se cobre a região a ser medida com uma malha quadriculada em um papel transparente.

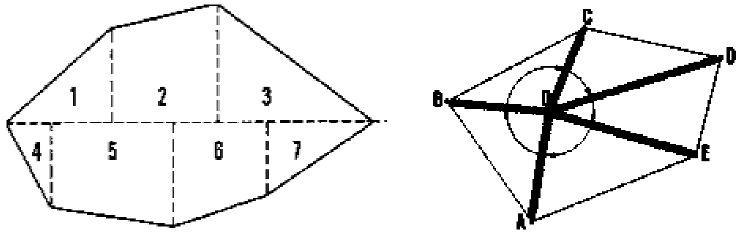
Figura 77 – Método de quadrículas



Fonte: https://cutt.ly/jbxGlNX

$R^4_{4\_1}$: Pela subdivisão da região em figuras geométricas (Figura 78) já conhecidas como triângulos, trapézios ou qualquer quadrilátero.

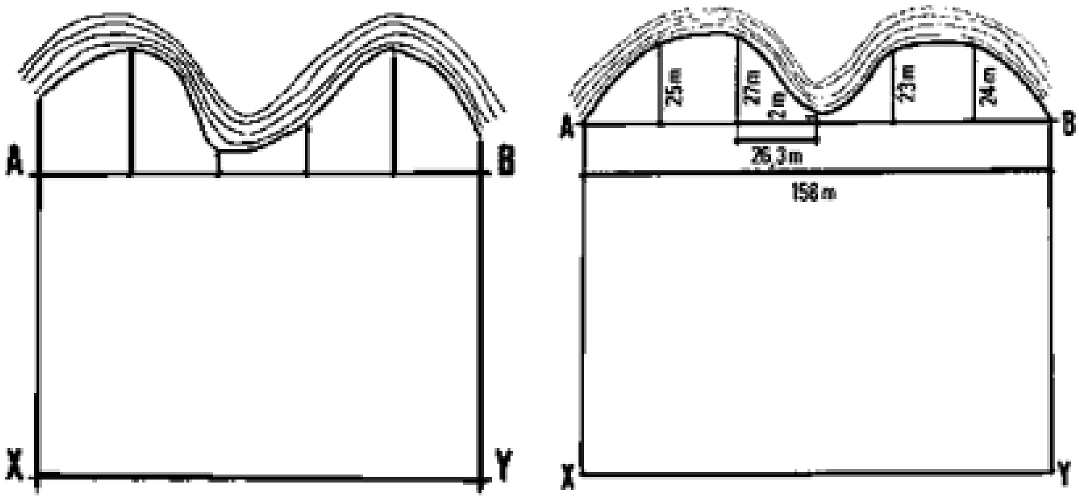
Figura 78 – Método de subdivisão de uma região



Fonte: https://cutt.ly/pbxGuLV

$R^{5}_{4\_1}$: Pelo método da régua trapezoidal em que são utilizados trapézios retângulos para estimar a medida de área de superfícies que contenham curvas. Como mostra a Figura 79, deve-se dividir o segmento AB em intervalos de mesma medida, que representam um dos lados do trapézio, por cada um dos extremos dos segmentos são traçadas retas perpendiculares ao segmento AB que interceptam a curva, para que os trapézios fiquem determinados. Para o cálculo da medida aproximada da área se multiplica a medida de AB pela soma dos segmentos perpendiculares.

Figura 79 – Método de régua trapezoidal



Fonte: https://cutt.ly/lbxGhJr

***$Q_{4\_1\_1}$*: Quais unidades de medida são usadas para calcular a medida das áreas das zonas afetadas por um Tsunami?**

Possíveis respostas:

$R^{1}_{4\_1\_1}$: A unidade de medida da área pode ser em metros quadrados (m^2)

$R^{2}_{4\_1\_1}$: A unidade de medida da área pode ser em quilómetros quadrados (km^2)

Q_{4_2}: Qual é a medida da área das zonas que seriam atingidas por o Tsunami depois de um terremoto de 9 graus apresentadas na Punta-Callao?

$R^1_{4\_2}$: Para dar resposta a esta pergunta, esperamos que os docentes apliquem os métodos da pergunta Q_{4_1}.

Q_{4_3}: Quais figuras geométricas planas são usadas para o cálculo da medida das áreas das zonas atingidas por um Tsunami na Punta-Callao?

Possíveis respostas:

$R^1_{4\_3}$: Triângulos

$R^2_{4\_3}$: Quadriláteros: quadrados, retângulos, trapézios.

$Q_{4\_3\_1}$: Como se podem classificar estas figuras? Quais critérios são usados? Existem outros?

Nesta pergunta também esperamos que os professores foquem em quadriláteros e, acreditamos que apresentem a classificação por paralelismo, tendo em vista que é a mais utilizada em livros didáticos, pode ser que utilizem alguma outra apresentada em nosso MER.

$R^1_{4\_3\_2}$: Os docentes apresentam a classificação dominante em seu ensino, isto é, por paralelismo de lados.

$R^2_{4\_3\_2}$: Os docentes apresentem diversos critérios de classificação como os colocados em nosso MER.

Entendemos que a etapa inicial, do PEP a ser vivido, com a questão geratriz e a Q_1 com suas perguntas parciais, ajudam os professores a se familiarizarem com o fenómeno do Tsunami. Na etapa do desenvolvimento, a pergunta Q_2 e suas perguntas parciais, focam em mapas e conduzem os professores a visitar obras como escalas, proporcionalidade e conversão de unidades de medida. A pergunta Q_3, está centrada na localidade da Punta-Callao no Peru, em conexão com os estudos realizados em Q_2, com o reconhecimento das zonas que podem ser afetadas por um tsunami, representadas por cartas de inundação feitas por instituições oficiais do Peru em que podem ser identificadas zonas de inundação, de não inundação, rotas de evacuação e zonas de refúgio.

Na pergunta Q_4, com foco no cálculo da medida das áreas das zonas inundáveis por um tsunami após um terremoto de 9 graus, que podem ser encontradas, especificamente, na carta de inundação da Punta-Callao de 2014 realizada pela Marinha do Peru em colaboração com o Instituto Geofísico do Peru e o INDECI. Para os cálculos de medidas de áreas os professores devem visitar obras como escala numérica, proporcionalidade, unidades de medida, triângulos, quadriláteros, medidas de áreas de triângulos e de quadriláteros. Na etapa de institucionalização, a pergunta Q_{4_3} e suas perguntas parciais, estão orientadas para o estudo de propriedades, baseado na definição dada à cada quadrilátero, e da classificação dos quadriláteros, bem como dos critérios para realizá-la.

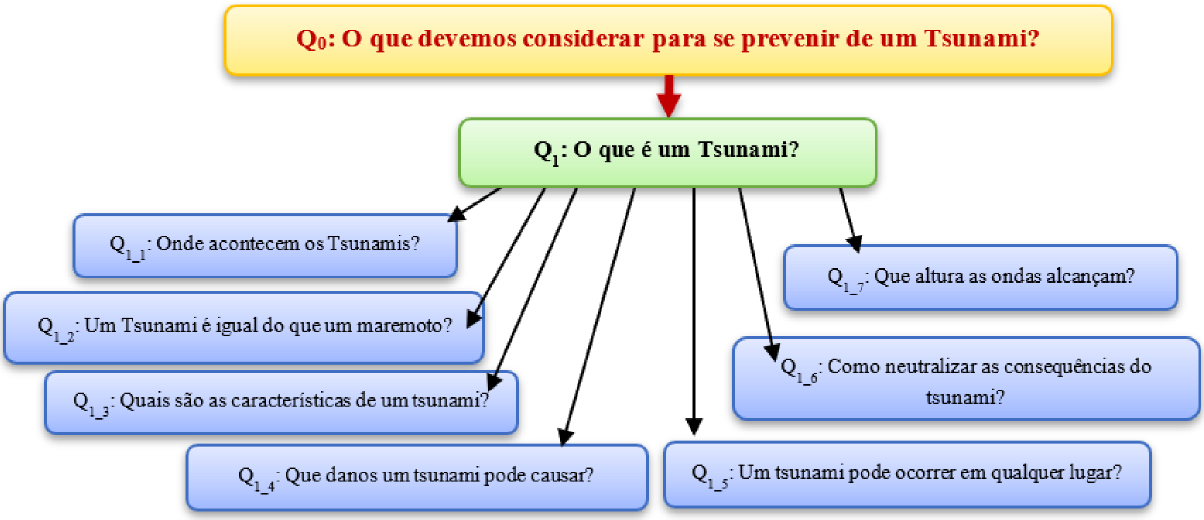
Previmos três encontros para o módulo M_1.

Análise a *posteriori*

O desenvolvimento do módulo M_1 se realizou em três encontros de três horas cada, mas diferente do previsto teve início em 14 de novembro, no terceiro e não no segundo encontro. No primeiro encontro deste módulo, a formadora apresentou a questão geratriz na sala principal do *Google meeting*, em seguida, os professores ingressaram nas salas especificas para discutir, procurar informações e criar outros questionamentos.

No grupo G1, os professores discutiram e apresentaram algumas perguntas parciais, apresentadas na Figura 80 em que se observa que várias focam nas características de um tsunami, nos danos que pode ocasionar, na altura das ondas e na dúvida se um tsunami seria o mesmo que um maremoto.

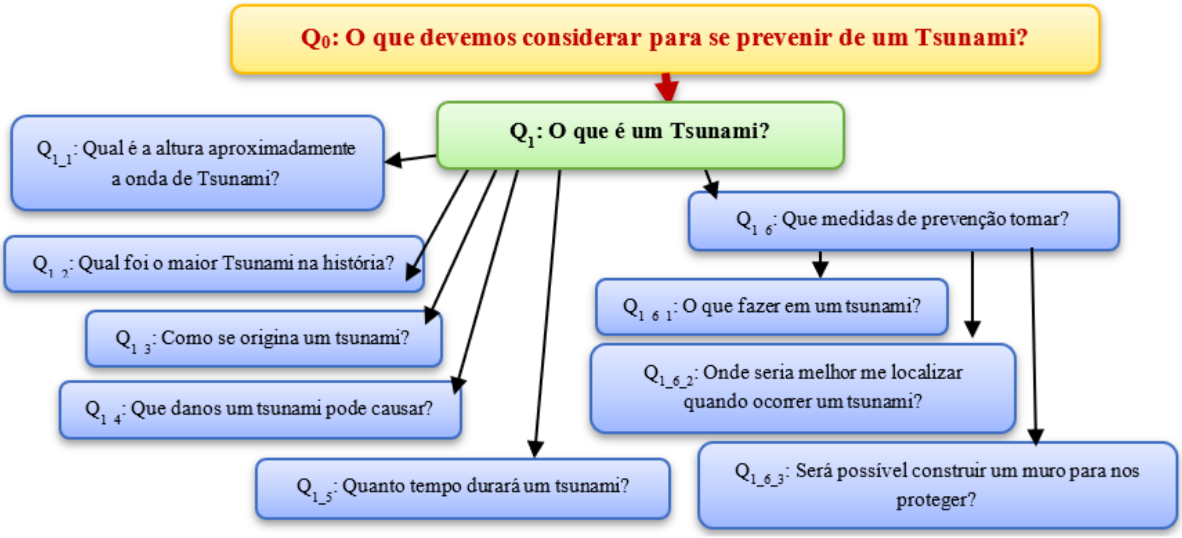
Figura 80 – Perguntas feitas pelo grupo G1 no primeiro encontro do M_1



Fonte: Dados da pesquisa

No grupo G2 os professores discutiram e apresentaram algumas perguntas parciais, apresentadas na Figura 81, em que se observam algumas a respeito da origem de um tsunami; dos danos que podem causar; de suas características, como altura das ondas e tempo, de medidas de prevenção; do que fazer depois de sua ocorrência, além da possibilidade de criação de um muro para proteger a cidade.

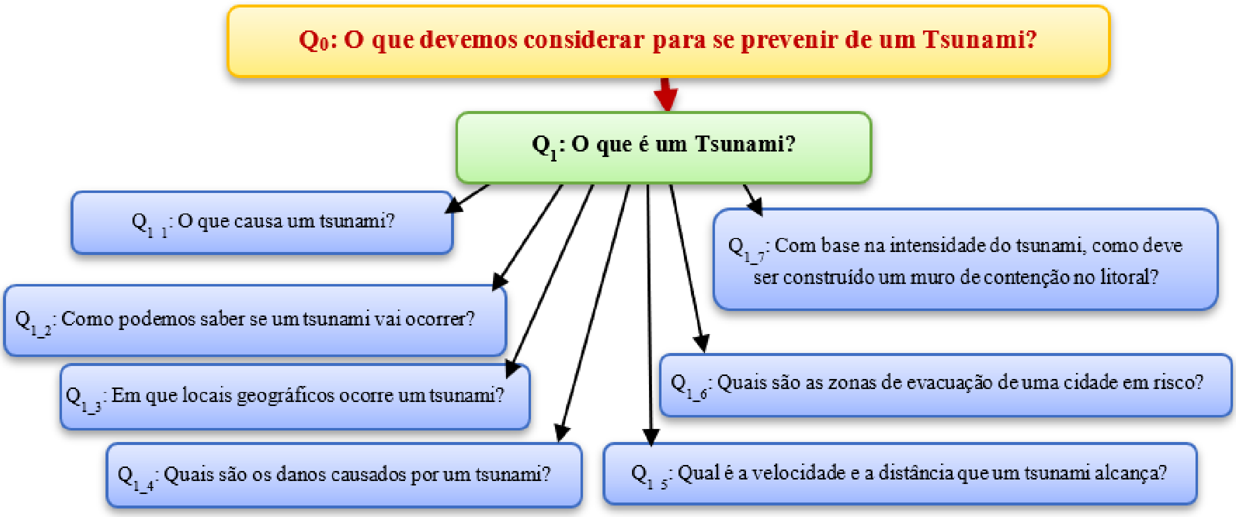
Figura 81 – Perguntas feitas pelo grupo G2 no primeiro encontro do M_1



Fonte: Dados da pesquisa

O grupo G3 também se preocupou com as causas, os danos, as origens de um Tsunami e zonas de segurança, como mostra a Figura 82 e, da mesma forma que G2 com a construção de um muro de contenção.

Figura 82 – Perguntas feitas pelo grupo G3 no primeiro encontro do M_1



Fonte: Dados da pesquisa

Ao contrário do que previmos os grupos focaram nas características de um tsunami e maneiras de prevenção e dois deles na possibilidade de construção de um muro de contenção, como o construído no Japão depois do tsunami de 2011, como mostramos na Figura 83, de acordo com o grupo G3 que escreveu:

> De acordo com as informações encontradas, a construção de um muro gigante é registrada no Japão ao longo das costas nordestinas do arquipélago com um comprimento de 400 km. Todas elas têm diferentes formas piramidais, uma delas tem 90 metros de comprimento e 15 metros de altura, pois seus estudos de impacto de construção são realizados graças a um simulador. Por outro lado, um dos pesquisadores, menciona que a construção dos muros não é uma proteção perfeita, mas graças a eles a quantidade de água que chega é reduzida e assim as pessoas podem ter mais tempo para evacuar. (GRUPO 3)

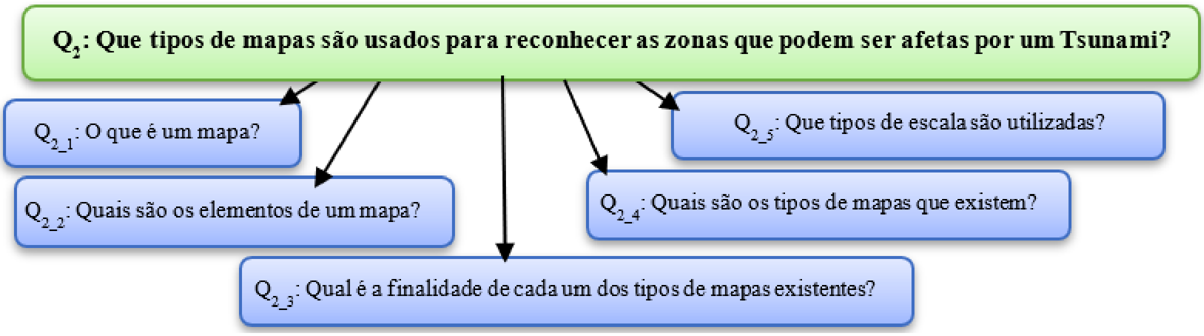
Figura 83 – Muro de contenção criado no Japão

Fonte: https://www.bbc.com/mundo/noticias/2015/03/150325_japon_muro_tsunami_lp

Este encontro foi finalizado com a discussão de perguntas e respostas na sala principal do *Zoom meeting* pelos representantes dos grupos e o compartilhamento dos arquivos no espaço dedicado à etapa 2 no *Google Classroom*.

No segundo encontro deste módulo, a formadora fez um resumo do que ocorreu no encontro anterior na sala principal do *Zoom meeting* e, na sequência, os professores continuaram discutindo a pergunta geratriz nas salas específicas. Desta vez focados em identificar as zonas que poderiam ser atingidas por um Tsunami, pois no encontro anterior já tinham questionado a respeito dessas zonas e de seus mapas. Os professores do grupo 1, na sala específica (Figura 84), discutiram a respeito das características, finalidade, tipos e escalas usadas nos mapas.

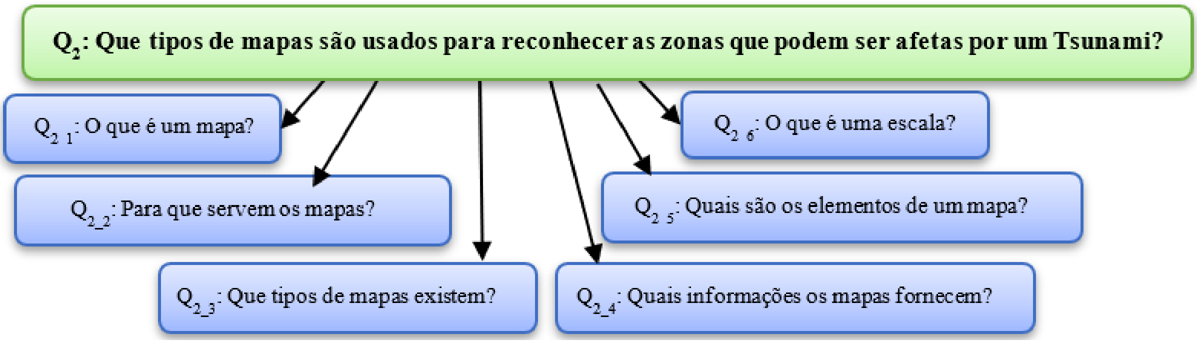
Figura 84 – Perguntas feitas pelo grupo G1 no segundo encontro do M_1



Fonte: Dados da pesquisa

O grupo G2, da mesma forma que G1, discutiram e formularam algumas questões (Figura 85) a respeito de características, tipos e escalas de mapas.

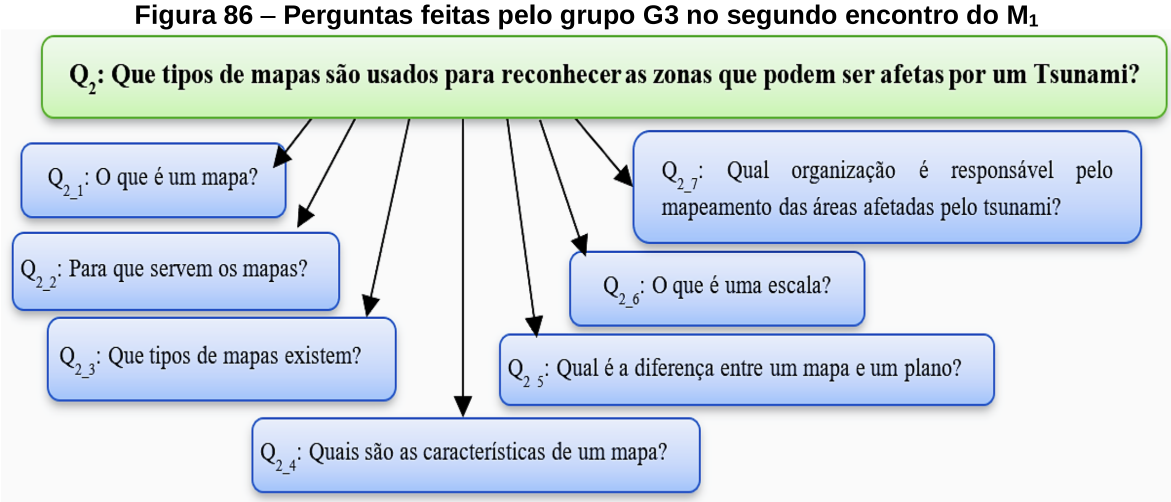
Figura 85 – Perguntas feitas pelo grupo G2 no segundo encontro do M_1



Fonte: Dados da pesquisa

No caso do grupo G3, além de discutir a respeito de características e tipos de mapas, diferente dos outros grupos, questionaram a diferença entre um mapa e um plano, como vemos na pergunta Q_{2_5} da Figura 86. Questionaram também sobre as instituições oficiais que constroem mapas, especificamente, os que se referem às zonas que podem ser atingidas por um tsunami (Q_{2_7} da Figura 86).

Figura 86 – Perguntas feitas pelo grupo G3 no segundo encontro do M_1



Fonte: Dados da pesquisa

Uma diferença entre o que previmos e o que realmente aconteceu foi que os grupos não questionaram a utilização das escalas para determinar a distância real. Por outro lado, as perguntas apresentadas por G3 conduziram os outros grupos, após as discussões na sala principal, a buscar respostas para Q_{2_7} da Figura 86 o que evidencia a dialética *individual-coletivo*, pois enriqueceram as discussões a nível intragrupo (no mesmo grupo) ou intergrupos (coletivo dos grupos).

No final das discussões na sala principal do *Zoom meeting* todos os grupos compartilharam suas questões e respostas na etapa 3 do *Google Classroom*.

No mesmo encontro, aproveitando os questionamentos a respeito das instituições oficiais que produzem os mapas apresentados pelo G3, a formadora apontou para os professores que um lugar específico, sujeito a um tsunami por estar no nível do mar é Punta-Callao que os conduziu a buscar identificar as zonas que poderiam ser atingidas nesse local.

Diferente do que previmos para o PEP *a ser vivido*, a pergunta Q_3 foi imersa na Q_2, porque surgiu nas discussões da pergunta Q_{2_7} da Figura 86, apresentada pelo grupo G3. Os professores, nas salas específicas, procuraram informações a respeito das zonas de risco ou de segurança em Punta-Callao dadas por instituições como a Marinha do Peru, o Instituto Geofísico do Peru e o Instituto Nacional de Defesa Civil (INDECI). Nessa procura encontraram mapas de inundação em artigos de jornais ou em imagens da Internet, no entanto quando a formadora ingressou em cada sala orientou que procurassem em fontes oficiais o que os conduziu a encontrar a carta de inundação em caso de um tsunami em Punta-Callao apresentado no Anexo B. Na sequência os grupos questionaram a carta de inundação e as informações que proporciona que permitiu compartilhar as sequintes respostas:

> Carta ou mapa de inundação é um documento emitido pela autoridade competente que indica áreas potencialmente inundadas por tsunamis e é usado como um insumo para definir áreas de risco. (GRUPO 2)
> Proporciona informação sobre zonas potencialmente inundáveis em caso o Tsunami seja provocado por um terremoto de grau 8.5 e no caso de grau 9, zonas de evacuação e zonas que não seriam atingidas pelas ondas (GRUPO 1).

Este segundo encontro do módulo M1 foi finalizado com a troca de ideias e pesquisas feitas pelos grupos na sala principal do *zoom meeting* que foram compartilhadas na etapa 3 do *Google Classroom*. A formadora orientou os professores para providenciarem, para o próximo encontro, lápis, régua e a carta de navegação impressa.

O terceiro encontro do módulo M_1, sexto de toda a formação, realizado em 28 de novembro de 2020, teve início com um resumo do encontro anterior. Como a pergunta Q_4, prevista para o PEP *a ser vivido*, não surgiu naturalmente dos professores a formadora apresentou a questão Q_{4_2} que trata da medida das áreas das superfícies das zonas de Punta-Callao que poderiam ser atingidas por um tsunami resultante de um terremoto de grau 9. Em seguida cada grupo se reuniu em suas salas especificas para discuti-la.

No grupo G1, surgiram questões como: o que é área? Como é calculada a área? Qual unidade de medida é usada para calcular áreas? Que figura tem a área afetada pelo tsunami? Como calcular a área de figuras irregulares? No grupo G2: o que é área? Área e superfície são a mesma coisa? Como é calculada a área? Com que figura plana se parece a superfície das zonas afetadas pela inundação? A zona afetada tem forma de figura regular ou irregular? Como calcular a área de uma figura irregular? No caso do grupo G3: que estratégias podem ser usadas para determinar a área da superfície solicitada? Que figura geométrica se aproxima da região solicitada? Que tipos de figuras geométricas podem ser consideradas para dividir a região total? Que fórmulas de área serão necessárias para calcular a área da superfície solicitada?

Depois os professores trabalharam individualmente, mas nas salas específicas para poder contar com a ajuda de seu grupo. Nesse ponto do trabalho, quando ingressou nas salas específicas a formadora observou que a maioria dos professores estavam com dificuldades em compreender a escala da carta de inundação, isto é, compreender a relação entre o comprimento apresentado na carta e sua medida real. Outra dificuldade foi identificar que a escala se refere a comprimentos, mas o que deveriam determinar era a medida de áreas. Para obter a resposta deveriam perceber que a escala gráfica na carta de inundação é que 3,5 cm equivale a 1000 m ou 100 000 cm na realidade, então 1 cm na carta de inundação é equivalente a $\frac{100\,000}{3,5}$ cm na realidade e, portanto, 1 cm^2 na carta de inundação é equivalente a $\left(\frac{100\,000}{3,5}\right)^2 cm^2$.

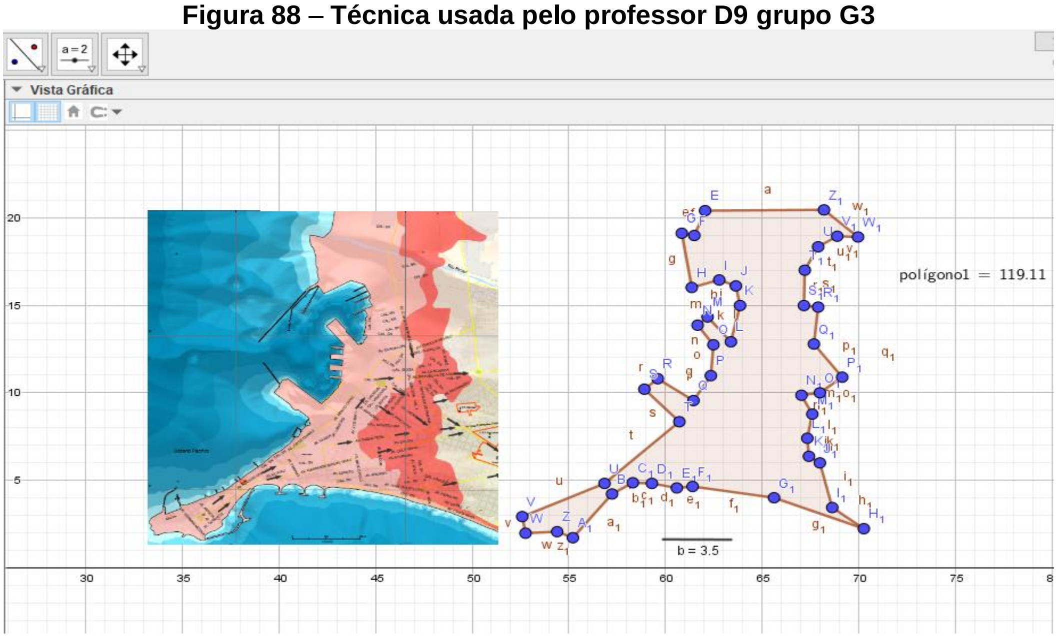
Para determinar aproximadamente a medida da área das zonas afetadas por um tsunami depois de um terremoto de 9 graus em Punta-Callao a professora D4, do grupo 2, bem como outros sete professores, reconfigurou a superfície em figuras geométricas como triângulos ou quadriláteros para determinar a medida da área de cada uma (Figura 87) para então determinar a medida total aproximada da área como sendo 9.895 km².

Figura 87 – Técnica usada pela professora D4 grupo G2

Fonte: Dados da pesquisa

Outra técnica foi usada pelo professor D9 do grupo 3, que usou o software GeoGebra como se pode observar na Figura 88.

Figura 88 – Técnica usada pelo professor D9 grupo G3



Fonte: Dados da pesquisa

Esse professor argumentou que para não ter problemas com a escala, colocou a imagem no GeoGebra, com as mesmas medidas da figura impressa, considerando um segmento de 3,5 cm como escala. Em seguida, usando a ferramenta área do *software* determinou que a área aproximada da carta de inundação era de 119,11 cm^2, o que representa na realidade é 1191100 cm^2, o que está equivocado porque 1 cm^2 no GeoGebra equivale a $\left(\frac{100\,000}{3,5}\right)^2$cm^2 na realidade, assim 119,11 cm^2 no GeoGebra é equivalente a 9,723265306x10^{10}cm^2 na realidade, ou seja, 9,723265306 km^2.

Outra técnica foi desenvolvida pelos professores D1 e D3 do grupo 1 em que utilizam malhas quadriculadas de 1cm de lado, apresentadas na cor azul na Figura 89, de 0,5 cm de lado na cor vermelha e 0,25 cm de lado da cor preta para melhor aproximar as medidas, em seguida fez as equivalências necessárias para cada uma dessas medidas para então somar e obter a área total de 9,130859375 Km^2.

Figura 89 – Técnica usada pelo professor D3 grupo G1

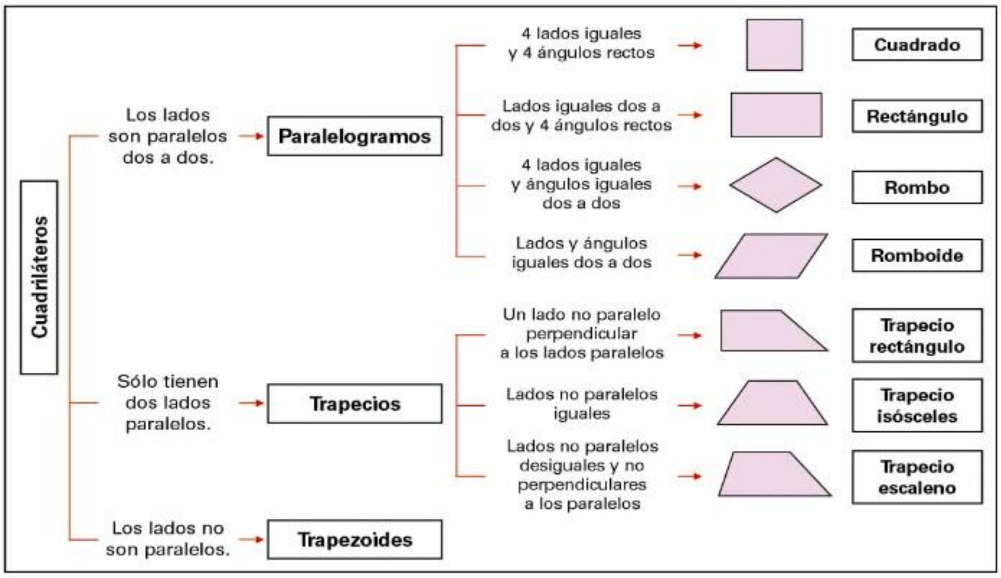
Fonte: Dados da pesquisa

Cada professor apresentou na sala principal do *Zoom meeting* sua técnica que permitiu a discussão das diferentes técnicas utilizadas. Posteriormente, centraram a discussão nas figuras usadas para a reconfiguração da superfície realizada pela maioria dos professores, isto é, triângulos e quadriláteros. Todas as informações e respostas desse encontro foram disponibilizadas na sores na etapa 4 do *Google Classroom*.

Ainda no terceiro encontro a formadora focou a discussão na classificação dos quadriláteros lançando questionamentos em como fazê-la e quais critérios utilizar, tendo em vista que não surgiu qualquer questionamento a respeito de propriedades como previsto. Depois de aproximadamente 30 minutos de discussão nas salas específicas, os professores voltaram para a sala principal para apresentarem seus achados que foram colocados na etapa 5 do *Google Classroom*.

Os professores de todos os grupos apresentaram duas classificações, uma com o critério de concavidade e a outra por paralelismo dos lados apresentada na Figura 90, com suas respectivas definições, o que evidencia a visão dominante de classificação que está presente nos livros, como mencionado em nosso estudo econômico. Isto faz reconhecer a importância do que foi dito por Gascón (2003) a respeito de reviver a razão de ser (o porquê e o para quê) da classificação de quadriláteros para dar sentido a seu estudo nas escolas e na formação de professores como uma oportunidade de os estudantes realizarem diferentes classificações baseados em diferentes critérios como os apresentados em nosso MER.

Figura 90 – C**lassificação de quadriláteros apresentada por todos os grupos**



Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, a formadora apresenta, usando *Google slides*, essas diferentes classificações com o objetivo de mostrar que existem outras formas de classificar quadriláteros, de acordo com critérios diferentes como, por exemplo, relações entre suas diagonais, ângulos ou lados, além de concavidade e simetria, entre outros que, em seguida, foram discutidas com os professores, que apresentaram algumas intervenções:

> Acredito que pretender fazer uma classificação mais sofisticada com os estudantes é difícil porque eles precisam saber mais propriedades. (PROFESSOR D3)
> Pela experiencia docente que tenho muitas vezes os estudantes perguntam o porquê dessas classificações pois sempre são apresentadas como algo já

> estabelecido e acho interessante trabalhar com os estudantes diferentes critérios de classificação deixando liberdade o qual ajuda a desenvolver seu pensamento crítico. (PROFESSORA D7).
> Considero que é importante trabalhar os diferentes tipos de classificações, especificamente o do tipo de simetria, com os estudantes porque vincula conceptos matemático que muitas vezes são trabalhados na sala de aula por separados. Achei interessante. (PROFESSOR D10).

Vemos, de certa forma, que os professores percebem a importância de estudar diferentes classificações com seus alunos, embora um deles apresente como argumento contrário a essa posição a falta de conhecimentos dos alunos.

No módulo M_1 a ***dialética individual-coletivo*** foi viabilizada nas discussões em cada grupo nas salas específicas do *Zoom meeting*, porque cada professor pode iniciar discussões e realizar perguntas como apresentamos nas Figuras 80 até 90 que foram compartilhadas e discutidas coletivamente na sala principal do *Zoom meeting*.

A ***dialética mídia-milieu*** do módulo M_1 pode ser identificada no PEP a ser vivido quando os professores e a questão geratriz constituem um primeiro *milieu* que se transforma quando cada grupo constrói seu *milieu* específico com novos questionamentos e respostas, além da incorporação de mídias como artigos, jornais, pesquisas, informações em páginas web, inclusive com os slides apresentados pela formadora a respeito da classificação de quadriláteros. Baseados nesses questionamentos e respostas os professores visitaram obras matemáticas como: omo áreas, escalas, conversões de medida, regra de três simples, propriedades e classificação de quadriláteros o que permitiu a evolução do *milieu* de cada grupo, em particular, e do grupo principal.

A ***dialética questões e respostas*** foi observada quando os professores em formação continuada, juntamente com a formadora abordam a questão Q_0 e novas perguntas denominadas parciais surgem para terem suas respostas, imediatamente, procuradas.

5.5 Análise do Módulo M2 e M_3

Análise a *priori*

Foi previsto para o modulo M_2 que a formadora iniciará o encontro com uma breve apresentação a respeito do que é um PEP e quais seus objetivos, na sala principal do *Zoom Meeting* para que, na sequência, os professores pudessem analisar esse dispositivo didático no sentido de observar as possíveis restrições institucionais para sua aplicação em sala de aula com estudantes do nível secundário. Acreditamos que uma dessas restrições pode ser curricular, pois as escolas, em geral, não são flexíveis quanto aos conteúdos que devem ser tratados durante o ano escolar, em outros termos, o tempo pode ser um impedimento. Uma outra pode ser imposta pelo momento da pandemia, tendo em vista a necessidade de priorizar alguns conteúdos, pois devem se restringir a disponibilidade de Internet dos alunos, bem como a terem computadores. Pode ocorrer ainda uma restrição, imposta pelos próprios professores, por não dominarem esse dispositivo didático.

O módulo M_3 foi previsto para ocorrer no penúltimo encontro, quando a formadora solicita que os grupos desenhem ou adaptem um PEP para ensinar quadriláteros para o nível secundário. Para cumprir tal tarefa os professores têm uma semana para se reunirem nas salas específicas e colocar na etapa 6 do *Google Classroom* suas propostas, para serem discutidas na sala principal no último encontro.

Análise a *posteriori*

O módulo M_2 teve início em 05 dezembro de 2020 com a apresentação da formadora a respeito do que é um PEP baseada na vivência dos professores durante os últimos três encontros da formação. Alguns professores se manifestaram:

> No PEP não só nos focamos no estudo de quadriláteros, também usamos escalas, conversões, áreas, unidades de medidas, réguas de três simples. Além disso, se aprendeu o que é um Tsunami, quais são suas características e reconhecer ações que poderíamos fazer em caso acontecesse (PROFESSOR D3).
> O interessante é que tudo iniciou de uma situação que pode acontecer nesta cidade, e que não se mencionou que conteúdos matemáticos serão usados para resolvê-los, por médio de questões e respostas chegamos a compreender várias questões. (PROFESSOR D8).
> Você (dirigindo-se à formadora) foi uma guia, nós indagamos as perguntas e suas respostas e você nos orientava e motivava, isso não se faz em um ensino tradicional porque sempre estávamos ativos no processo. (PROFESSORA D5).
> Dentro deste processo de pesquisa e perguntas, quando fazíamos perguntas a você, nos orientava sem dar a resposta, é como dar outra pergunta que nos levava a refletir e continuar no processo. (PROFESSOR D10).

Podemos evidenciar que os professores reconheceram o papel da formadora em não dar repostas, mas em ajudar para a reflexão e o questionamento do que está sendo discutido que lhes permitiu estarem atentos e ativos durante todo o processo de desenvolvimento do PEP, além dos diversos conteúdos que podem ser tratados.

No entanto, apresentam algumas restrições para levar esse dispositivo didático para a sala de aula.

> A maior limitação de levar um PEP na sala de aula é o tempo porque devemos cumprir com muitos conteúdos e temos pouco tempo para cumprir com o programado. (PROFESSOR D3).
> Acredito que foi importante vivenciar o PEP porque conseguimos ver o papel que você desempenha (a formadora) porque para levar na sala de aula devemos estar preparados e saber o papel que como professores vamos a ter o qual precisa de capacitação, acho que um professor que não vivenciou um PEP teria dificuldade de levá-lo na sala de aula. (PROFESSOR D10).

Como tínhamos previsto a restrição mais citada pelos professores foi a referente ao tempo de desenvolvimento de um PEP, não percebendo que ele proporciona vários estudos e não um especificamente. Tal restrição também foi relatada por Barquero, Bosh e Romo (2019) e Benito (2019).

Os professores indicaram ainda uma restrição curricular, pois eles têm que dar conta de todos os conteúdos determinados, além de desenvolver mais experiência para poder utilizar tal dispositivo didático, que podem ser vistas nos seguintes depoimentos:

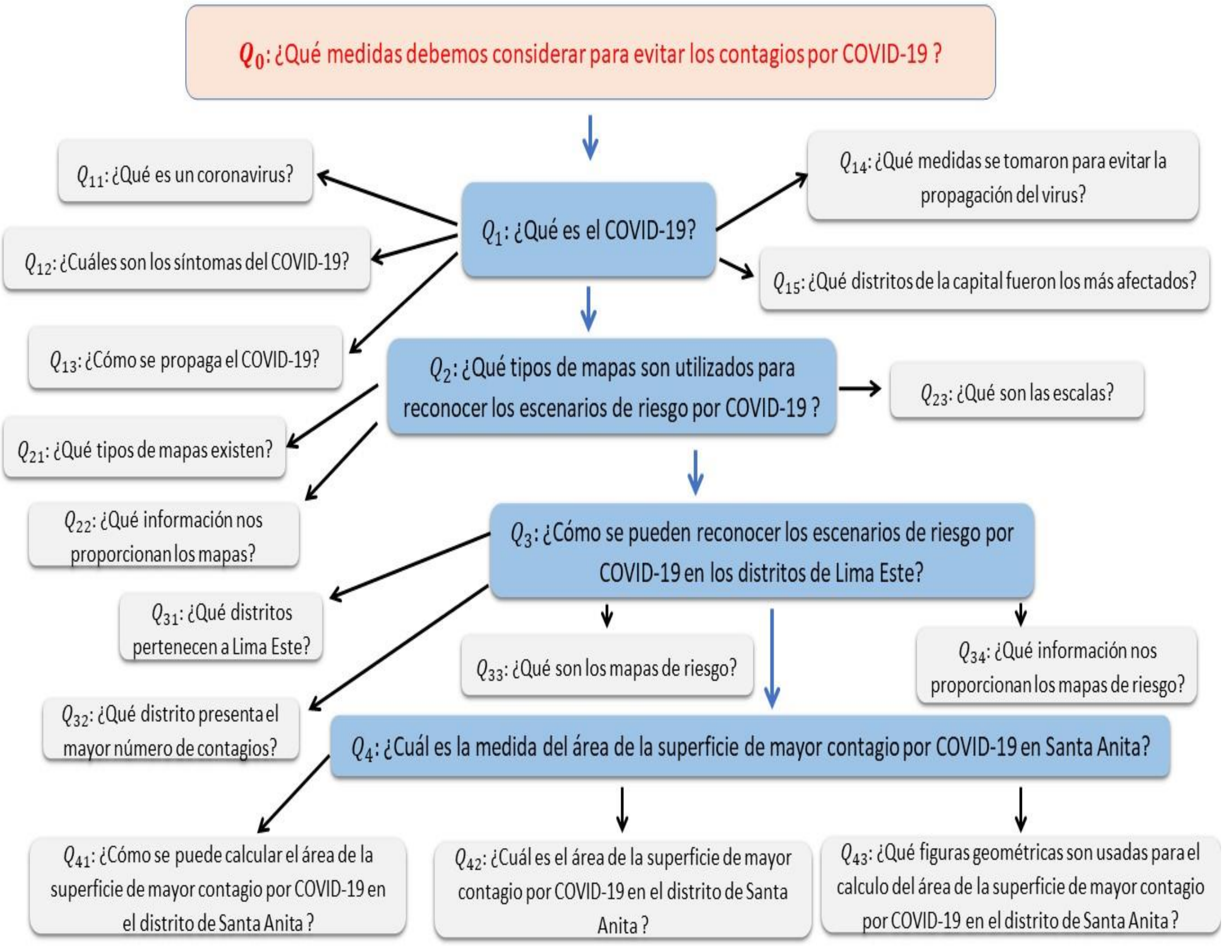
> Acredito que é muito importante levar o PEP na sala de aula, no colégio que trabalho devemos trabalhar por projetos que as vezes têm uma duração de quatro semanas. Com o PEP podemos ir trabalhando pouco a pouco e fazer um processo de indagação. (PROFESSOR D10).
> Considero que o PEP é uma oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente com outros colegas de outras áreas, agora que pela pandemia do COVID 19 nas escolas estão solicitando que não só trabalhemos uma área só e acho que a estrutura do PEP pode ajudar a que podamos cumprir com esse objetivo. (PROFESSORA D8).
> O trabalho em grupo ajudou à troca de ideias e na procura de dados para responder a cada questionamento que íamos avançando. É por isso que considero que o PEP favorece este tipo de trabalho e ajuda a avançar ao grupo. (PROFESSOR D1).

Vemos que indicam que o PEP dá oportunidades de um trabalho interdisciplinar que permitiria que fosse desenvolvido em parceria com colegas de outras áreas do conhecimento, como a geografia, por exemplo, como sugerido pela professora D8. Lembramos que uma característica do PEP é ser codisciplinar de acordo com Chevallard (2009a).

O módulo M_3 teve início na última hora do sétimo encontro, no dia 05 de dezembro, com a solicitação do desenho ou adaptação de um PEP para ensinar quadriláteros. No oitavo encontro, durante a primeira hora, os professores encerraram esse trabalho nas salas específicas do *Zoom meeting* compartilhando as pesquisas realizadas durante uma semana.

Na sequência, apresentaram suas propostas para um PEP na sala principal do *Zoom meeting* para serem discutidas com os colegas e com a formadora, em um processo de retroalimentação dos próprios PEPs. Os grupos modificaram o contexto, mas mantiveram os questionamentos do PEP vivido durante a formação, no entanto não regressaram para os livros didáticos, o que nos permite avaliar como um avanço no sentido de reconhecer que o PEP pode ser uma estratégia didática. Apresentamos na Figura 91 a adaptação do PEP, realizada pelo grupo G1, para o contexto da pandemia de COVID 19, em que as perguntas são semelhantes àquelas realizadas no PEP vivenciado na formação.

Figura 91 – PEP adaptado pelo grupo G1

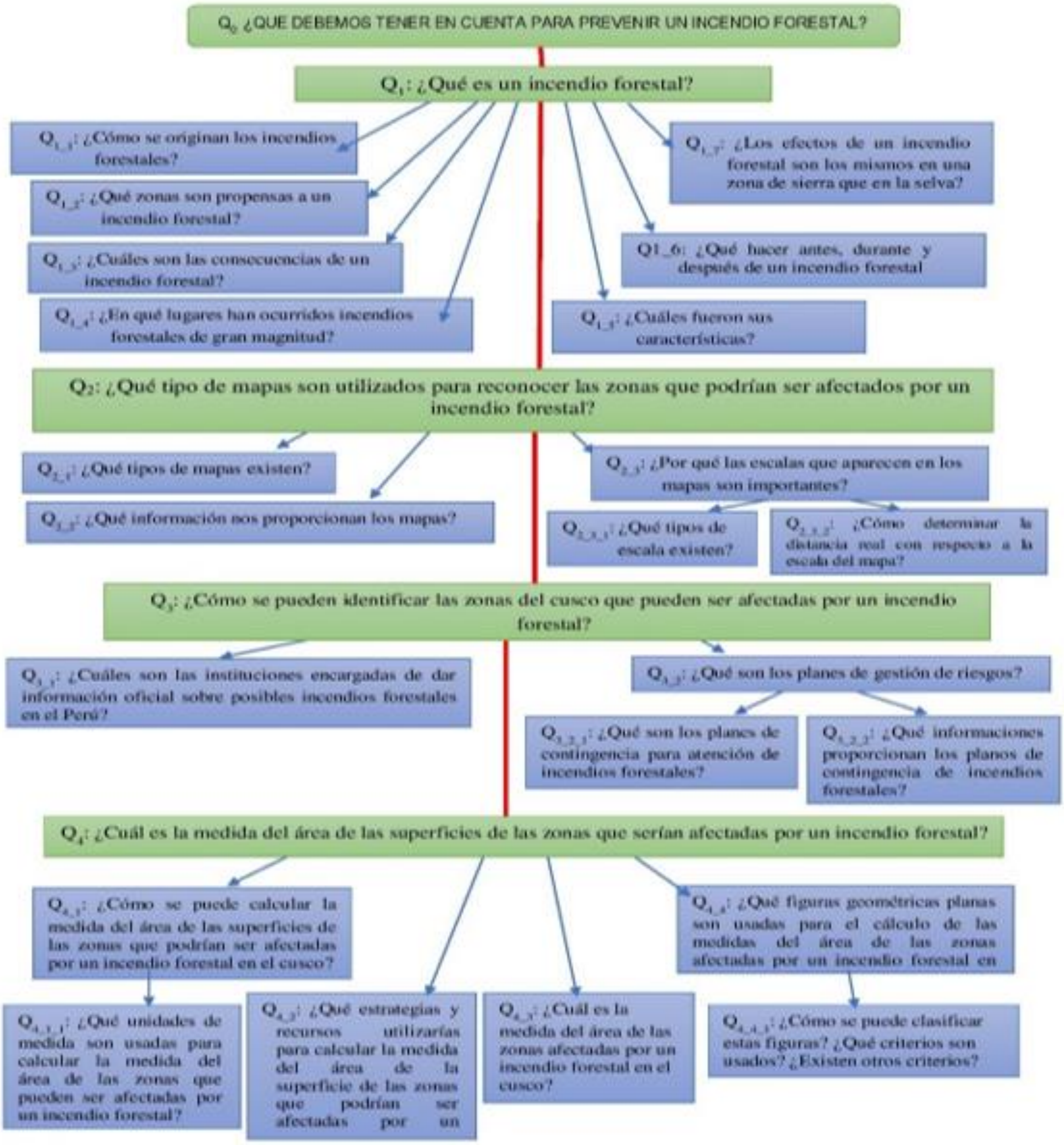


Fonte: Dados da pesquisa

Alguns professores, desse grupo, indicaram que a complexidade de criar um PEP está na construção da questão geratriz Q_0 e, por isso, precisavam vivenciar outros PEPs para terem mais segurança em levá-los para sala de aula, pois se tratava de uma estratégia de ensino nova para eles. Mostraram interesse em continuar a formação para aprofundar seus conhecimentos antes de trabalhar com seus alunos.

Na Figura 92 apresentamos o PEP adaptado, pelo grupo G3, para um contexto de incêndio florestal que, da mesma forma que G1 e G2, apresenta perguntas semelhantes às realizadas no PEP usado na formação.

Figura 92 – PEP adaptado pelo grupo G3



Fonte: Dados da pesquisa

Acreditamos que os professores modificaram apenas o contexto porque foi a primeira vez que trabalharam com esse tipo de dispositivo didático e, como indicaram, precisavam experimentar outros PEPs para terem a autonomia suficiente para construir seus próprios percursos. Por outro lado, consideramos como pontos positivos a motivação e o interesse em levar o PEP para sala de aula porque consideram que ele dá oportunidade para seus estudantes proporem e trabalharem com suas próprias questões e respostas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa desenvolvemos uma formação continuada de professores de Matemática, do nível secundário do sistema educativo peruano, baseada no dispositivo didático Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) que, por causa da pandemia da COVID 19, teve que ser adaptado para ocorrer a distância.

A formação a distância teve duração de 20 horas, contou com a participação de dez professores e utilizou como ferramentas tecnológicas para seu desenvolvimento o *Zoom meeting*, programa de reuniões síncronas; o *Google* documento que permite escrever de maneira *online* e colaborativamente e o *Google Classroom* que permitiu organizar a formação em etapas e o depósito das produções dos professores.

Consideramos que o acesso a diferentes mídias que podem ser encontradas na Internet, como jornais, revistas, livros digitais, pesquisas, currículo etc.; o uso de ferramentas digitais que permitem o trabalho colaborativo de maneira síncrona e sua organização em documentos; a possibilidade de gravação e de organização, oferecidos pelo documento *Google*, pelo *e* pelo *google Classroom* foram pontos favoráveis à formação a distância. Alguns professores que não conheciam esses recursos viram a possibilidade de os utilizarem em suas aulas.

Por outro lado, as questões de estabilidade de conexão com a Internet e a não permissão de gravar as reuniões nas salas específicas pelo *Zoom meeting* são pontos que não favorecem a formação a distância. Em vários momentos da formação alguns professores perdiam a conexão e eram obrigados a se ausentar das discussões até que fosse restabelecida.

Para construir o PEP-FP realizamos um estudo epistemológico que permitiu reconhecer razões de ser para o estudo de quadriláteros, em especial, para o cálculo de medida de áreas de superfícies irregulares, além de contribuir para o desenho do PEP que os professores vivenciaram durante a formação. Nosso objetivo era que os professores conhecessem e experimentassem um PEP para, então, desenhar e refletir a respeito da utilização desse dispositivo, em sala de aula, baseado no paradigma de questionamento do mundo como uma maneira de reviver as razões do estudo de objetos matemáticos.

Os dados levantados e analisados depois da formação baseada no dispositivo didático do PEP-FP consideramos que os professores participantes vivenciaram e desenvolveram um percurso para o estudo de quadriláteros que permitiu reconhecer uma de suas razões de ser, ou seja, o cálculo de medidas de áreas de superfícies irregulares. O PEP utilizado na formação se baseou no paradigma de questionamento do mundo, pois sua questão geratriz foi proposta para tratar da ocorrência de tsunamis na região de Punta-Callao, no Peru. Além disso permitiu trabalhar conteúdos como: áreas, escalas, conversões de medida, regra de três simples, propriedades e classificação de quadriláteros por uma abordagem distinta das apresentadas nos livros didáticos usados no sistema educativo peruano.

Embora a formação tenha ajudado os professores a refletirem a respeito de suas práticas de ensino, que eles mesmos caracterizaram como tradicionais, por outro lado, apresentaram restrições para aplicar um PEP em sala de aula, como o tempo necessário para seu desenvolvimento porque devem cumprir o currículo determinado pelas escolas. No entanto, dois professores argumentaram que o momento atual, com a pandemia do COVID 19, era propício para o trabalho colaborativo com professores de outras áreas e que o PEP podia ser uma estratégia de ensino para tal fim.

Um ponto fundamental para a não aplicação de um PEP em sala de aula do ensino secundário, mencionado pela maioria dos professores, foi a falta de experiência em trabalhar com essa dinâmica de investigação, própria desses percursos, pois necessitavam de orientações e de viver outros percursos.

Acreditamos que o não desenvolvimento do Módulo 4, que visa a implementação, do PEP vivido pelos professores, em sala de aula com seus alunos do secundário, por causa da pandemia e do tempo, prejudicou essa vivência com seus estudantes e, talvez, maior segurança para a aplicação desse dispositivo didático. Tal constatação nos faz refletir que o desenvolvimento de um PEP-FP em uma formação institucionalizada, como uma disciplina de um curso de especialização ou de pós-graduação, permitiria a ocorrência de todos os módulos previstos e, provavelmente, resultados diferentes dos que encontramos, tendo em vista que as disciplinas exigem avaliações para aprovação de seus alunos.

Acreditamos que a Teoria Antropológica do Didático – TAD nos proporcionou os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa, porque permitiu a construção de um MER, o reconhecimento do MED no sistema educativo peruano, além do desenho de um PEP-FP a distância, baseados no estudo das dimensões epistemológica, ecológica e econômica. Além disso as dialéticas propostas por essa teoria – questões e respostas, mídia-*milieu* e individual coletivo – forneceram as bases para as análises dos dados coletados.

A metodologia de pesquisa usada neste estudo, baseada na Engenharia didática associada à TAD, permitiu encaminhar nossa investigação e desenhar o dispositivo didático do PEP-FP a distância para uma formação continuada de professores do nível secundaria. Acreditamos que essa metodologia de pesquisa ajuda a criar e desenhar dispositivos didáticos como o PEP e PEP-FP para o estudo de diferentes objetos matemáticos ou de outras disciplinas.

Como perspectivas para futuras investigações caberia seguir pesquisando sobre o PEP e o PEP-FP que permita a estudantes e professores experimentar esta estratégia de ensino com sua dinâmica de investigação por questões e respostas, de maneira presencial ou a distância, para integrar diferentes disciplinas ou diferentes conteúdos matemáticos. Para o PEP-FP a distância é importante procurar um *software* de videoconferências que permita criar grupos e gravar as salas específicas de maneira que os dados das discussões de todos os grupos sejam coletados nas gravações.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. X. **As concepções de professores ao ensinar quadriláteros nos anos iniciais do ensino fundamental e as possibilidades de contribuições das TIC.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2015.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR. 2007.

____. **Teoria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos**. Revista Unión, 42, p. 9-32, 2015.

ARTAUD, M. **Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques**. Actes de la IXième École d'été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM&IUFM, p. 101-139, 1998.

ARTIGUE, M**. Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean (Org.). Didáticas das Matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Coleção Horizontes Pedagógicos, cap. 4, p.193-217, 1988.

____. **Ingeniería didáctica**. En Artigue, M., Douady, R, Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica. (1995).

____. **Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering.** Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, p. 467–496, 2015. doi:10.1007/978-94-017-9181-6_17
BID. Banco Interamericano de Desarrollo. Base de datos: CIMA. 2020. Disponível em: https://www.iadb.org/es/sectores/educacion/cima/inicio

BARQUERO, B.; BOSCH, M. Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Wastson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education – ICMI Study 22. Springer I, p. 249-272, 2015.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática.** Revista Educação Matemática e Pesquisa, 15 (1), p. 1 – 28, 2013.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO-VÁZQUEZ, A. **El uso del esquema Herbartiano para analizar um REI online para la formación del professorado de sencundaria**. Educação matemática e pesquisa, v.21, n.4, p. 493-509, 2019.

BECERRA, A. **Análisis de una organización matemática asociada al objeto cuadriláteros que se presenta en un libro de texto del quinto grado de educación primaria**. Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015

BITTAR, M. **Teoria antropológica do didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Revista Zetetike, 25(3), p. 364 – 387, 2017.

BONGIOVANNI, V. **As diferentes definições dos quadriláteros notáveis**. Revista do Professor de Matemática, PUC - São Paulo, n. 55, 2004.

BORJA, I. **Reconfiguración del trapecio para determinar la medida del ára de dicho objeto matemático con estudiantes del segundo grado de educación secundário**. Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015.

BOSCH, M. **Study and research paths: a model for inquiry**. In: International Congress of Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil, 2018. Disponível em https://eta.impa.br/dl/121.pdf

BOSCH, M. et al. **La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Educación Matemática, 18(2), p. 37-74, 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **La praxéologie comme unité d’analyse des processus didactiques**. Em A. Mercier & C. Margolinas (Coord.) Balises en Didactique des Mathématiques, pp. 107-122. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage. 2005.

____. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XIII**, pp. 89- 113. Santander: SEIEM. 2009.

____. **Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD).** In: Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (eds) Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer, 2014.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y; GARCIA, F.J; MONAGHAN, J. **Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook**. Routledge, 18(2), 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª Ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 2010.

BLUMENTHAL, L. **Geometría Axiomática**. Madrid: Aguilar, 1965.

CAMACHO, A.; SÁNCHEZ, B. I.; BLANCO, R.; CUEVAS, J. **Geometrización de una porción del espacio real.** Educación Matemática, 23(3), p.123-145, 2011.

CHAACHOUA, H. **Le role de l'analyse des manuels dans la theorie anthropologique du didactique**, 2014.

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel.** Grenoble: IREM d’Aix-Marseille, 1989a.

____. **Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège Deuxième partie**. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. Petit x 19, p.45-75, 1989b.

____. **La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.** La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición), 1991.

____. **La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado**. Aique, Buenos Aires, 1997.

____. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches em Didactique Mathématiques, Vol 19, n. 2, p. 221-266. 1999.

____. **Les TPE comme problème didactique**. Comunicação ao Seminário Nacional de Didática Matemática, 2001c. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14.

____. **Organiser l'étude 3. Écologie & régulation**. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Eds.), Actes de la 11° École d'Été de Didactique des Mathématiques, p. 41 – 56. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 2002.

____. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques.** Communication aux *3es Journées d'étude franco-québécoises* (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), *Rapport au savoir et didactiques*, Éditions Fabert, Paris, p. 81-104, 2003.

____. **La notion de PER: problèmes et avancées**. Texto de uma apresentação apresentada à IUFM de Toulouse, 2009a. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

____. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD**. 15e école d'été de didactique des mathématiques, p. 16-23, 2009b.

____. **Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD**. Séminaire de l'ACADIS, 2011a. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208

____. **Théorie Anthropologique du Didactique, Ingénierie Didactique du Développement,** 2012. Disponível em https://docplayer.fr/79632148-Umr-adef-yves-chevallard-theorie-anthropologique-du-didactique-ingenierie-didactique-du-developpement-annee.html

____. **Enseñar matematica en la Sociedad del Mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente**. REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, V2, n. 2, p. 161-182, 2013.

____. **¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan**. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1), p.159-169, 2017.

COBO, B.; BATANERO, C. **Significado de la media en los libros de texto de secundaria**. Enseñanza de las Ciencias, 22(1), pp. 5-18, 2004.

COVIÁN, O. **La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción**. Tesis (Doctorado en Matemática Educativa) – CINVESTAV, México, 2013

COVIÁN, O; ROMO-VÁZQUEZ, A**. Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas**. Innovación educativa. V 17, p. 17-47, 2017.

DALCÍN, M. **La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, p. 472-477, 2006.

DALCÍN, M.; MOLFINO, V. **Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores.** Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. v. 1, n. 1, p. LXXXI - XCVII, 2012.

DE VILLIERS, M. **The role and Function of hierarchical classification of quadrilaterals**. For the Learning of Mathematics 14(1), 11- 18, 1994.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**. Cali: Editorial Merlín, 2004.

ESPINOZA, B. **Base media del trapecio y aprehensiones en el registro figural. Una secuencia didáctica con el uso del Geogebra con estudiantes del nivel secundario***.* Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015.

ESCUDERO, A.; CARRILLO J. **Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro**. *Revista de Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276) Salamanca: SEIEM. 2014.

EUCLIDES, H. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Geometria**. Tradução: Domingues, Higyno. São Paulo: Atual editorial, 1992.

FERNÁNDEZ, O. E.; DÍAZ, F. **Definición y clasificación de cuadriláteros convexos: Contradicciones en las producciones escritas de estudiantes docentes**. III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 2012.

FERREIRA, M. B. C. Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Análisis a posteriori de um REI-FP como herramienta de formación del professorado**. Educação matemática e pesquisa, v.21, n.4, p. 382-394, 2019.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. **Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la Modelización funcional**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17(3), p. 289-318, 2014.

FORSYTHE, S. **Dragging maintaining symmetry: can it generate the concept of inclusivity as well as a family of shapes?** Research in Mathematics Education, v.17,n. 3, p. 198-219, 2015.

GARCÍA, M.; LLINARES, S. **El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución**. Currículo, 10-11, p.103-115, 1995.

GASCÓN, J. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico**. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME,* 14 (2), p. 203-231, 2011.

____. **Efectos del autismo temático sobre el estúdio de la Genometría secundário II. La clasificación de los cuadriláteros convexos**. Revista SUMA, 45, p. 41 – 52, 2004.

____. **Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas**. Educación Matemática, p. 99-123, 2014.

GÓMEZ, C. **Proceso de visualización de cuadriláteros: un estudio con profesores de nivel secundario.** Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015.

GOULARD-HENRIONNET. **Guide du géomètre pour les opérations d'arpentage et le rapport des plans, suivi d'un traité de topographie et de nivellement**, 1849.

HADAMARD, J. **Lecons de Géometrie élementarie (Géométrie plane)**. Paris, 1898.

HENRIQUES, A., NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. **Reflexões sobre análise institucional: O caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas**. Revista BOLEMA, 44, p. 1261 – 1288, 2012.

HUERTA, M.P. **Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX y a finales del siglo XX, ¿Qué ha cambiado?** Revista SUMA, 21, p. 55 – 62, 1996.

INSTITUTO APOYO. **Matemática para todos 2**, 2002.

JARA, L. **Niveles de razonamiento según el modelo de Van Hiele que alcanzan los estudiantes del primer año de secundaria al abordar actividades sobre paralelogramos.** Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2015.

JOSEFSSON, M. **Characterizations of Orthodiagonal Quadrilaterals**. Forum Geometricorum, 12 (1), p. 13 – 25, 2012.

____. **Properties of Equidiagonal Quadrilaterals. Forum Geometricorum**, 14 (1), p. 129 – 144, 2014.

LEGENDRE, A. **Elementos de Geometria**. Tradução de Ferreira de Araujo, Nanoel, Rio de Janeiro: S.A.R., 1809.

MAGUIÑA, A. **Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele**. Disertación (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2013.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros**. 2002. 153 f. *Dissertação* (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MARTÍN, C. **Criterios para el análisis de libros de texto desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. Aplicación a la estadística y la probabilidad**, em Penalva, M.C., Torregrosa, G.; Valls, J. (coords.). Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales, p. 373-386. Murcia: Compobell, 2002.

MARTINEZ, G.; PENALVA, M. **Proceso de simbolización del concepto de potencia: Análisis de libros de texto de secundaria**. Enseñanza de las ciencias, v. 24, n. 2, p. 285-297, 2006.

MICELLI, M.; CRESPO, C. **¿Existe más de una clasificación de cuadriláteros? ¿porqué?** Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, p. 845-853, 2012.

MOORE, M. G.; KEARSLEY, G. **Distance education: A system view** (2a. ed.). Belmont, CA, EE. UU.: Wadsworth Publishing, 2005.

NAVARRO, J. **¿Quiénes son los maestros? Carreras e incentivos docentes en América Latina**. Washington: BID. 2002.

ORTIZ, J. **Investigación sobre los libros de texto en didáctica de la matemática**. Publicaciones de la EU del Profesorado de EGB de Mellilla, 29, 177-191, 1999.

PASSERINI, K.; GRANGER, M. J. **A developmental model for distance learning using the Internet**. Computers & Education, 34(1), 1-15, 2000.

PASTOR, R.; ADAM, P. **Elementos de Geometria**. Madrid: Colección elemental intuitiva, 1959.

PEREIRA, A; SANTOS, M. dos **O estudo de quadriláteros notáveis no livro didático de Matemática: um olhar para a organização matemática**. Revemop, v. 1, n. 2, p. 229-247, 2019.

PEREIRA, A.; CÂMARA, M. (2016) . **Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237-9657, v.5, n.2, p. 03-17, 2016.

PEREZ DE MOYA, J. **Tratado de Geometría Prácticas y Especulativa**. Observatorio de Marina de San Fernando y con licencia y privilegio Real de los Reinos de Castilla y Aragón, 1573.

PERU. Ministerio de Educación. **Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente – Programa de estudios Educación Secundaria, especialidad Matemática**. Lima, 2020. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/download/185/

____. Ministerio de Educación**. Evaluaciones de logros de aprendizaje 2018.** Lima, 2019. Disponível em: http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2018/10/Informe-Nacional-ECE-2018.pdf

____. Ministerio de Educación**. Censo y mapeo de pestos del personal de las instituciones públicas de formación inicial docente a nivel nacional 2018.** Lima, 2018.

____. Ministerio de Educación. **Matemática 6**. Lima, 2012.

____. Ministerio de Educación. **Matemática 1**. Lima, 2016 a.
____. Ministerio de Educación. **Matemática 2**. Lima, 2016 b.

____. Ministerio de Educación**. Curricular Nacional de la Educación Básica**. Lima, 2016c. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/

____. Ministerio de Educación. **Reporte técnico de la Evaluación Censal de Estudiantes 2016**, Lima, 2016d. Disponível em: http://umc.minedu.gob.pe/resultadosece2016/

____. Ministerio de Educación. **Rutas del aprendizaje: ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? Área curricular Matemática**. Lima, 2015a. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/

____. Consejo Nacional de Educación. **Proyecto Educativo Nacional. Balance y recomendaciones 2014**. Lima, 2015b.

____. Ministerio de Educación. **Análisis de las pruebas aplicadas en la Evaluación Nacional de Ingreso 2014 y Egreso de los Estudiantes 2013 y 2014 de los Institutos de Educación Superior Pedagógicos**. Lima, 2015c.

____. Ministerio de Educación. **Marco Curricular Nacional (segunda edición)**. Lima, 2014. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/

____. IPEBA. **Mapas de progreso del aprendizaje**. Lima, 2013. Disponível em: http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/3697

____. Consejo Nacional de Educación (CNE). **Hacia una propuesta de criterios del buen desempeño docente**. Lima, 2011.

____. **Diseño Curricular Básico Nacional para la Carrera Profesional de Profesor de Educación Secundaria en la Especialidad de Matemática**. Lima. 2010. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/diseno-curricular-basico-nacional-2010-matematica/

____. Ministerio de Educación. **Diseño Curricular Nacional de EBR**. Lima, 2009. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/

____. Consejo Nacional de Educación. **Proyecto Educativo Nacional**. Lima, 2006. Disponível em: http://www.cne.gob.pe/proyecto-educativo-nacional/

____. Ministerio de Educación. Unidad de Medición de la Calidad. **Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004***.* **Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria.** Lima, 2005. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe

____. **Ley general de Educación Nro. 28044**. Lima, 2003. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/p/ley_general_de_educacion_28044.pdf

POGORÉLOV, A.V. **Geometría elemental.** Editorial MIR. 1974.

POMODORO, G. **Geometria prattica.** Geometria prattica dichiarata da Giouanni Scala sopra le tauole dell'ecc.te mathematico Giouanni Pomodoro tratte d'Euclide et altri authori: opera per generali da guerra, capitani, architetti, bombardieri e ingegnieri cosmografi, non che per ordinarii professori di misure. - Nouamente ristampato. Roma: appresso Giouanni Martinelli, 1603.

RODRIGUEZ, E.; GARCÍA, F.; HIDALGO, M.; SIERRA, T. **El problema del análisis de la epistemología dominante en una institución: el caso del número en la educación infantil,** Educação matemática e pesquisa, v.21, n.4, p. 431-450, 2019.

RUIZ-MUNZÓN, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Nuevos elementos de respuesta a la problemática del álgebra elemental desde la teoría antropológica de lo didáctico. En Ávila, A. (Eds.), **Rutas de la educación matemática**. México: SOMIDEM, 2018.

RUIZ-OLARRÍA, A. **La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundaria.** De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid/ES, 2015.

SAITO, F. **História da Matemática e Suas (Re)Contruções Contextuais**. Livraria da Física; Edição: 1, 2015.

SANCHEZ- MATAMOROS, G.; FERNÁNDEZ, C.; VALSS, J. **El conocimiento de matemáticas del estudiante para profesor en la interpretación de la comprensión del proceso de clasificar cuadriláteros**. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

SANTILLANA. **Matemática 6**. 2018a.

____. **Matemática 1**. 2018b.

____. **Matemática 3**. 2018c.

SANTOS, M. dos; ALMOULOUD, S.A. **O conceito de Limite: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos**. Perspectiva da Educação matemática, p.537 – 572, 2014.

SCRIBA, J.; SCHREIBER, P. **5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture** Springer Basel Heidelberg New York Dordrecht London, 2015.

USISKIN, Z.; GRITFFIN, J. **The classification of quadrilaterals: a study of definition.** USA: Information Age Publishing, INC, 2008.

VAILLANT, D. **Las políticas de formación docente en América Latina. Avances y desafíos pendientes. En M. Poggi, Políticas docentes. Formación, trabajo y desarrollo profesional**. Buenos Aires: IIPE UNESCO. 2013.

VÁSQUEZ DE TAPIA, N. **Matemática 2**. Buenos aires: Editorial Estrada, 1993.

VERDUIN, J. R.; CLARK, T. A. Distance education: The foundations of effective practice. San Francisco, CA, EE. UU.: Jossey-Bass, 1991.

VILAÇA, M. M. **Investigando o modo que licenciandos em matemática se apropriam do Geoplano para o ensino de quadriláteros**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2018.

WINSLØW, C.; MATHERON, Y.; MERCIER, A. **Study and research courses as an epistemological model for didactics**. Educational Studies in Mathematics, 83(2), p. 267-284, 2013.

Anexo A – Indicadores das capacidades da competência atua e pensa matematicamente

Quadro 13 – Indicadores das capacidades da competência 3 relacionadas ao estudo dos quadriláteros

Competência	**Atua e pensa matematicamente em situações de forma, movimento e localização**						
	Indicadores						
Capacidade	**2° Primário**	**3° Primário**	**4° Primário**	**5° Primário**	**6° Primário**	**1° Sec.**	**2° Sec.**
Matematiza situações	Identificar os elementos essenciais (lados e cantos, linhas retas e linhas curvas) dos objetos em seu ambiente e expresse-os em forma bidimensional (Triângulo, quadrado, retângulo e círculo) com material concreto. Verificar se um objeto do seu ambiente corresponde à forma geométrica.	Identificar características dos objetos do seu entorno de acordo com seus lados, ângulos, vértices, perímetro e superfície, e os referisse a uma figura bidimensional (Triângulo, quadrado, retângulo e círculo) regular ou irregular. Relacionar as características das figuras ao levantar ou resolver uma situação de construção de figuras compostas.	Identificar características dos objetos em seu ambiente de acordo com seus lados, ângulos, paralelismo ou perpendicularidade e expressa em um modelo baseado em paralelogramos. Use um modelo baseado em paralelogramos ao planejar ou resolver um problema.	Identifica características e propriedades geométricas explícitas de acordo com seu perímetro e área em objetos e superfícies de seu ambiente, expressando-as em um modelo baseado em quadriláteros e triângulos. Aplica as propriedades dos quadriláteros ou triângulos ao planejar ou resolver um problema.	Identificar características e propriedades geométricas em objetos e superfícies de seu ambiente, expressando-os em figuras geométricas bidimensionais (círculo, circunferência, polígonos regulares até 10 lados). Aplica as propriedades de figuras bidimensionais ao planejar ou resolver um problema.	Organiza medidas, características e propriedades geométricas das figuras e superfícies, e as expressa por médio de um modelo referido figuras poligonais (triângulo, retângulo, quadrado, losango). Usa o modelo mais relevante relacionado a representar ou resolver situações relacionadas a figuras poligonais e suas propriedades.	Organiza características e propriedades geométricas em figuras e superfícies, e as expressa em um modelo que se refere a figuras poligonais regulares, compostas (trapézio, losango, paralelogramo, etc.), triângulos e o círculo. Use modelos, relacionados a figuras poligonais regulares, compostas (trapézio, losango, paralelogramo, etc.), triângulos e o círculo para representar e resolver problemas.
Comunica e representa ideias matemáticas	Expressa os elementos essenciais de formas bidimensionais (pontas, lados, linhas retas, linhas curvas, etc.). Representa os objetos em seu ambiente de forma bidimensional ou	Descreva as figuras bidimensionais de acordo com seus elementos (lados, vértices e ângulos retos e ângulos menores do que um ângulo reto). Construa e desenhe figuras bidimensionais com diferentes	Descreve as características dos polígonos e paralelogramos, de acordo com o número de lados e vértices, nomeando-os apropriadamente (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.). Representa na forma concreta (cordas, geoplano, etc.) e gráfico (em quadriculas), diferentes	Descreva as características e propriedades básicas dos quadriláteros e triângulos em relação aos seus lados e ângulos e diagonais, paralelismo e perpendicularidade. Descreva a construção de	Descreve as propriedades e relações do círculo e da circunferência e dos polígonos regulares de acordo com seus lados e ângulos. Construir polígonos regulares em forma de concreto	Descrever as relações de paralelismo e perpendicularidad e em formas bidimensionais (Triângulo, retângulo, quadrado e losango) e suas propriedades usando terminologias,	Descrever as relações de paralelismo e perpendicularidade em polígonos regulares e compostos (trapézio, losango, paralelogramo, etc.), e suas propriedades usando terminologias, regras e convenções matemáticas.

	plana com material gráfico-plástico e concreto com o modelo presente ou ausente.	materiais de concreto, de certa forma gráfica (quadriculas, malha de pontos) e com régua, esquadro e transferidor. Construa figuras bidimensionais simples e compostas em forma concreta, a partir de instruções escritas e orais.	formas bidimensionais que possuem o mesmo perímetro. Representa na forma concreta (cordas, geoplano, origami, etc.) e gráficos (em quadriculas) diferentes retângulos, quadrados, rombos e romboides com o modelo presente e ausente. Construir paralelogramos de acordo com as indicações oral e escrito.	formas bidimensionais a partir de seus elementos ou propriedades. Representa na forma concreta (tangram, geoplano, origami) e gráfica (em quadriculas, malha de pontos), quadriláteros e triângulos, dado a medida de seus lados, ângulos, perímetro ou área.	(origami, tiras, etc.) e em forma gráfica. Representa formas bidimensionais graficamente no plano cartesiano, bem como suas extensões e reduções.	regras e convenções matemáticas. Expressar as relações e diferenças entre área e perímetro de polígonos regulares. Representa polígonos regulares seguindo as instruções e usando a régua e o compasso.	Representa formas poligonais, traços de retas paralelas, perpendiculares e relacionadas à circunferência seguindo instruções e usando a régua e o compasso.
Elabora *e usa estratégias*	Usa materiais concretos ou instrumentos, para construir formas bidimensional com o modelo presente e ausente de acordo com suas características e medidas.	Usa unidades padrão (1 cm quadrados por lado, lados de uma peça de blocos lógicos ou mosaico ou a quadrícula) para determinar quantas unidades quadradas são necessárias para cobrir superfícies de formas bidimensionais simples e compostas.	Usa unidades padrão (papelão, cartolina etc.) que medem um metro quadrado para determinar quantas unidades quadradas precisa para cobrir superfícies de formas bidimensionais. Use estratégias que envolvam traçar o caminho dos vértices das formas bidimensionais, usando recortes de figuras de papel para movê-lo sobre uma quadrícula.	Utiliza diversos materiais e recursos para construir ou desenhar figuras bidimensionais. Utiliza procedimentos como composição ou rotação de figuras, estratégias de contagem de quadrados ou composição de triângulos para calcular a área de paralelogramos e trapezoides da área do retângulo. Calcule a medida da área do triângulo a partir da área do retângulo.	Usa estratégias para construir e desenhar figuras de acordo com suas visualizações e rotação, usando diferentes materiais, instrumentos de desenho. Emprega estratégias que envolvem cortar a figura em papel e reorganizar as peças, dividindo em quadrados de 1 cm^2 e o uso de operações para determinar a área e o perímetro de figuras bidimensionais.	Usa estratégias para construir polígonos de acordo com suas propriedades e características usando instrumentos de desenho. Utiliza estratégias heurísticas, recursos gráficos e outros para resolver problemas de perímetro e área do triângulo, retângulo, quadrado e losango.	Calcular o perímetro e a área de formas poligonais regulares e compostas (trapézio, losango, paralelogramo, etc.), triângulos, círculos que compõem e decompõem em outras figuras cujas medidas são conhecidas, com recursos gráficos e outros. Usa as propriedades dos lados e ângulos de polígonos regulares ao resolver problemas.

Raciocina e argumenta gerando ideias matemática	Explique em sua própria linguagem as semelhanças ou diferenças de formas bidimensionais (Triângulo, quadrado, retângulo e círculo) de acordo com suas características.	Elabora suposições e as verifica sobre a estimativa de uma medida de comprimento ou superfície de um objeto, com base em experiências. Estabelece semelhanças ou diferenças entre figuras geométricas de acordo com suas características.	Justifique seus palpites usando exemplos dos procedimentos aplicados em problemas de cálculo de perímetro, área e capacidade com unidades padrão. Fazer conjecturas sobre quais são as características geométricas comuns de formas bidimensionais.	Estabelece semelhanças e diferenças entre quadrado e retângulo, entre quadrado e losango etc. Faça conjecturas sobre as propriedades dos quadriláteros e triângulos. Explique com exemplos e contraexemplos as características de quadrados, retângulos, losangos, triângulo retângulo e equilátero, etc.	Elabora conjecturas sobre a relação entre perímetro e área de formas bidimensionais, entre áreas de quadriláteros e triângulos. Estabelece características semelhantes em polígonos regulares.	Fazer conjecturas para determinar o perímetro e a área de formas poligonais (triângulo, retângulo, quadrado e losango). Justifica o pertencimento ou não de uma figura geométrica dada a uma determinada classe de quadrilátero.	Fazer conjecturas para reconhecer as propriedades dos lados e ângulos dos polígonos regulares. Justifica a pertença ou não de uma figura geométrica dada a uma determinada classe de paralelogramos e triângulos.

Fonte: Rutas de aprendizaje (PERU, 2015). Tradução nossa

Quadro 14 – Indicadores das capacidades da competência 3 relacionadas ao estudo dos quadriláteros no nível primário

Competência	**Resolve problemas de forma, movimento e localização**				
Grau	2° Primário	3° Primário	4° Primário	5° Primário	6° Primário
Indicador de desempenho	Estabelece relações entre as características dos objetos no ambiente, associa-os e os representa com formas geométricas tridimensionais (corpos que rolam e não rolam) e bidimensionais (quadrado, retângulo, círculo, triângulo), bem como com as medidas de seu comprimento (comprimento e largura). Expresse-se com material concreto e desenhe sua compreensão de algum elemento de formas tridimensionais (número de pontos, número de faces, formas de suas faces) e bidimensional (número de lados, vértices, lados curvos e retos). Também descreve se os objetos rolam, se aguentem, ou tem pontas usando a linguagem cotidiana e alguns termos geométricos.	Estabelece relações entre as características dos objetos do ambiente, associa-os e os representa com formas geométricas bidimensionais (figuras regulares ou irregulares), seus elementos e suas medidas de comprimento e superfície; e com formas tridimensionais (corpos redondos e compostos), seus elementos e sua capacidade. Expresse com desenhos sua compreensão dos elementos de formas tridimensionais e bidimensionais (número de lados, vértices, eixo de simetria). Faz declarações sobre algumas relações entre elementos das formas, sua composição ou decomposição, e as explica com exemplos concretos ou desenhos. Também explica o processo seguido. Exemplo: O aluno poderia dizer: "Todos os quadrados podem ser formados com dois triângulos iguais".	Estabelece relações entre as características de objetos reais ou imaginários, os associa e os representa com formas bidimensionais (polígonos) e seus elementos, bem como com suas medidas de perímetro, comprimento e superfície; e com formas tridimensionais (cubos e prismas de base quadrangular), seus elementos e sua capacidade. Expressa com desenhos seu entendimento dos elementos de cubos e prismas de base quadrangular: faces, vértices, arestas; também, seu entendimento dos elementos dos polígonos: ângulos retos, número de lados e vértices; bem como a sua compreensão de retas perpendiculares e paralelas usando linguagem geométrica.	Estabelece relações entre as características de objetos reais ou imaginários, associa e os representa com formas bidimensionais (quadrilaterais) e seus elementos, bem como com suas medidas de perímetro e superfície; e com formas tridimensionais (prismas retos), seus elementos e sua capacidade. Expressa com desenhos seu entendimento dos elementos de prismas e quadriláteros retos (ângulos, vértices, bases) e propriedades (lados paralelo e perpendicular) usando linguagem geométrica.	Estabelece relações entre as características de objetos reais ou imaginários, associa e os representa com formas bidimensionais (triângulos, quadriláteros e círculos), seus elementos, perímetros e superfícies; e com formas tridimensionais (prismas e cilindros retos), seus elementos e o volume de prismas retos com base retangular. Expressa com desenhos sua compreensão dos elementos e propriedades do prisma, triângulo, quadrilátero e círculo usando a linguagem geométrica. Fazer afirmações sobre as relações entre objetos, entre objetos e formas geométricas, e entre formas geométricas, bem como seu desenvolvimento no plano cartesiano, entre o perímetro e a superfície de uma forma geométrica, e os explica com argumentos baseados em exemplos concretos, gráficos, propriedades e em seu conhecimento matemático baseado em sua exploração ou visualização, usando raciocínio indutivo. Além disso, explique o processo seguido. Exemplo: "Dois retângulos podem ter uma área diferente, mas o mesmo perímetro", "A área de um triângulo pode ser obtida dividindo a área de um paralelogramo pela metade".

Quadro 15 – Indicadores das capacidades da competência 3 relacionadas ao estudo dos quadriláteros no nível secundário

Competência	**Resolve problemas de forma, movimento e localização**				
Grau	1° Sec.	2° Sec.	3° Sec.	4° Sec.	5° Sec.
Indicador de desempenho	Estabelece relações entre as características e os atributos mensuráveis de objetos reais ou imaginários. Associa essas características e representa com formas bidimensionais compostas e tridimensionais. Estabelece também relações de similaridade entre triângulos ou figuras planas, e entre as propriedades de volume, área e perímetro. Expressa, com desenhos, construções com régua e compasso, com material concreto e linguagem geométrica, sua compreensão das propriedades de retas paralelas, perpendiculares e secantes, e de prismas, quadriláteros, triângulos e círculos. Os expressa mesmo quando eles cambiam de posição e pontos de vista, para interpretar um problema de acordo com seu contexto e estabelecer relações entre representações. Seleciona e emprega estratégias heurísticas, recursos ou procedimentos para determinar o comprimento, perímetro, área ou volume de prismas, quadriláteros e triângulos, bem como áreas bidimensionais compostas, usando unidades convencionais (centímetros, metros e quilômetros) e não convencionais (berlinde, pães, garrafas, etc.)	Estabelece relações entre as características e os atributos mensuráveis de objetos reais ou imaginários. Associa essas características e representa com formas bidimensionais compostas e tridimensionais. Também estabelece propriedades de congruência entre formas poligonais e entre as propriedades de volume, área e perímetro. Ler textos ou gráficos que descrevem características ou propriedades de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais. Reconhece as propriedades de semelhança e congruência, e de composição de transformações (rotação, ampliação e redução) para extrair informações. Ler mapas e mapas em escalas e use-os para localizar no espaço e determinar as rotas. Seleciona e emprega estratégias heurísticas, recursos ou procedimentos para determinar o comprimento, perímetro, área ou volume de prismas, pirâmides, polígonos e círculos, bem como áreas bidimensionais compostas, usando coordenadas cartesianas e unidades convencionais (centímetros, metros e quilômetros)) e não convencionais (berlinde, pães, garrafas, etc.)	Estabelece relações entre as características e os atributos mensuráveis de objetos reais ou imaginários. Ele associa essas relações e representa, com **formas compostas bidimensionais** e tridimensionais, seus elementos e propriedades de volume, área e perímetro. Expressa, com desenhos, construções com régua e compasso, com material concreto e linguagem geométrica, sua compreensão das propriedades das razões trigonométricas de um triângulo, polígonos, prismas e cilindros, bem como sua classificação, para interpretar um problema de acordo com seu contexto e estabelecer relações entre representações. Seleciona e adapta estratégias heurísticas, recursos ou procedimentos para determinar o comprimento, perímetro, área ou volume de prismas, polígonos e estabelecer relações métricas entre lados de um triângulo, bem como determinar a área de formas bidimensionais irregulares usando unidades convencionais (centímetros, metros e quilômetros) e coordenadas cartesianas.	Estabelece relações entre as características e os atributos mensuráveis de objetos reais ou imaginários. Representa essas relações com formas bidimensionais e tridimensionais compostas ou corpos de revolução, que podem combinar prismas, pirâmides, cones ou poliedros regulares, considerando seus elementos e propriedades.	Estabelece relações entre as características e os atributos mensuráveis de objetos reais ou imaginários. Representa essas relações com formas bidimensionais, tridimensionais ou compostas, e com corpos de revolução, que podem combinar formas geométricas tridimensionais. Também estabelece relações métricas entre triângulos e círculos.

Fonte: Currículo Nacional da Educação Básica (PERU, 2016a). Tradução nossa

Anexo B – Carta de inundação em caso de tsunami