PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Marcos Lopes de Oliveira

GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES E TECNOLOGIAS DIGITAIS: ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS PARA A APRENDIZAGEM

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Marcos Lopes de Oliveira

GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES E TECNOLOGIAS DIGITAIS: ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS PARA A APRENDIZAGEM

Texto apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob orientação do Professor Dr. Gerson Pastre de Oliveira.

São Paulo
2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, grupo Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT)

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira (orientador)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Prof. Dr. Emerson Freire
Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza (CEETEPS)

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ São Paulo, __ /__ /___

Dedico esta pesquisa às pessoas mais importantes de minha vida, as quais amo muito: minha querida esposa Marisa Bortoletto de Oliveira e aos meus Filhos, Amanda Bortoletto de Oliveira e André Bortoletto de Oliveira, pelo incentivo, apoio, paciência e principalmente pelos momentos de ausência durante a dedicação ao Mestrado.

Dedico ao meu pai Rubens de Oliveira e em memória à minha mãe Alice Lopes de Oliveira com amor e carinho.

Dedico à minha sogra e segunda mãe Marlene Bortoletto Martinez.

Agradeço à CAPES e à PUC-SP pelo apoio financeiro que possibilitou a realização desta pesquisa

AGRADECIMENTOS

A Deus por iluminar meus passos e permitir que continuasse acreditando e chegasse até aqui.

Ao meu orientador Gerson Pastre de Oliveira a quem tenho enorme gratidão. Obrigado pelas orientações, sugestões, conselhos e principalmente pelo apoio dentro e fora de campo. Acreditou que dessa parceria poderia chegar a uma dissertação honesta e com contribuições ao ensino e aprendizagem da matemática. Cresci muito com tudo isso.

A meus companheiros do mestrado que se tornaram grandes amigos.

A minha amiga Érica parceira de tantas horas.

Aos todos os professores do mestrado que muito contribuíram para meu acadêmico e pessoal.

A banca Professor Dr. Saddo Ag. Almouloud e Professor Dr. Emerson Freire por suas recomendações que possibilitaram ajustes, novos olhares e aprofundamentos.

Em especial a minha esposa e companheira de mais de trinta anos de caminhada. Sem o seu apoio eu nem poderia pensar em calcar esse mestrado, acreditou e me fez acreditar, apoiou e me incentivou. Sinto honrado e agradecido pelo seu amor e por tudo que fez até hoje.

Oliveira, Marcos L. Generalização de padrões e tecnologias digitais: uma proposta para a aprendizagem matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC/SP. São Paulo, Brasil, 2017.

RESUMO

Este estudo procura entender como a tecnologia pode potencializar o aprendizado do aluno em álgebra na educação de nível básico, empregando problemas e/ou situações que envolvam a generalização de padrões como tema central. Neste sentido, a investigação assume um caráter de pesquisa qualitativa, com um delineamento suportado pelos conceitos da Engenharia Didática. Em termos teóricos, encontra suporte na Teoria das Situações Didáticas e nos autores relacionados à temática central, como Dreyfus, Zazkis e Mason, por exemplo. A revisão da literatura aponta a possibilidade de empregar estratégias didáticas envolvendo atividades relacionadas à generalização de padrões, utilizando tecnologias diversas, incluindo as de caráter digital. Desse modo, as tecnologias poderão envolver o aluno em atividades que busquem a descoberta de padrões algebricamente válidos. Procurou-se estabelecer um dialogo entre os dois componentes de conteúdo: pedagogia e tecnologia, propondo uma convivência em estado de equilíbrio entre elas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Generalização de Padrões; Tecnologias Digitais; Engenharia didática; Teoria das Situações Didática; Conhecimento do Conteúdo Pedagógico tecnológico.

Oliveira, Marcos L. Generalization of patterns and digital technologies: a proposal mathematical learning. Dissertation (Master in Mathematics Educations), PUC/SP. São Paulo, Brazil, 2017.

ABSTRACT

This study seeks to understand how technology can enhance algebra learning, of basic school in algebra, by using problems and /or situations, which encompasses generalization of patterns as the key topic. In this connection, this investigation assumes perspectives of qualitative nature, with an experimental design grounded on the concepts of Didactic Engineering. The theoretical framework is grounded on the Theory of Didactic Situations and in authors, such as Dreyfus, Zazkis and Mason, which embrace the focus of this research. The literature review points out to the possibility of using didactic strategies involving activities related to the generation of standards using several technologies, including digital ones. Therefore, technology involves the student in tasks that aim at discovering algebraically valid patterns. We sought to establish a dialogue between both components content: pedagogy and technology, proposing a coexistence in a state of balance between them.

Keywords: Mathematics Education; Generalization of Standards; Digital Technologies; Technological Pedagogical Content Knowledge; Didactic Engineering; Theory of Didactic Situations; Pedagogical Technological Content Knowledge.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Triângulo didático...15
Figura 2: Reconfigurações do triângulo didático...16
Figura 3: Fases da metodologia de pesquisa Engenharia Didática no contexto da TSD................22
Figura 4: Matriz Numérica..26
Figura 5: Generalização de padrões é tema secundário..28
Figura 6: Generalização de padrões é tema principal...29
Figura 7: A Generalização de Padrões é tema principal..30
Figura 8: Complementos da figura 7...30
Figura 9: Ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais..............................34
Figura 10: Exemplo de polígono não convexo..42
Figura 11: Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 01....................................44
Figura12: Funções programáveis no GeoGebra para verificar respostas da Atividade 01 (somas)...45
Figura 13: Funções programáveis no GeoGebra para verificar respostas da Atividade 01 (expressão)...45
Figura 14: Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 02....................................50
Figura 15: Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 03....................................50
Figura 16: Visualização do arquivo da atividade 01 antes da validação local................................56
Figura 17: Validação local da atividade 01com suporte do GeoGebra.......................................57
Figura 18: Janela aberta na construção de outros polígonos da atividade 01..............................58
Figura 19: Atividade 01 – Janela de visualização gráfica de dois arquivos independentes abertos simultaneamente na tela...61
Figura 20: Relação entre as fases análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*..............70
Figura 21: Atividade 01, descrição da dupla D1, primeira reflexão...76
Figura 22: Atividade 01, descrições das duplas D2, D3 e D4, segundo suas reflexões.................77
Figura 23: Atividade 01 – questão “a” – descrição da dupla D2...79
Figura 24: Construções da dupla D4 no GeoGebra..80
Figura 25: Construções da dupla D1 no GeoGebra...81
Figura 26: Atividade 01 – Parte do raciocínio algébrico da dupla D4...83
Figura 27: Atividade 01 – Comentário dos alunos sobre a atividade 87
Figura 28: Conhecimentos prévios – Atividade 02...94
Figura 29: Atividade 01 questão “a” – descrição da dupla D2...96
Figura 30: Atividade 02 questão “b” – descrição das duplas..98
Figura 31: Atividade 02 questão “d” – expressão algébrica..103

Figura 32: Atividade 02 questão “c” dupla D4..105
Figura 33: Atividade 03 questão “a” – descrição das duplas...110
Figura 34: Atividade 03 questão “b” – descrição das duplas...112
Figura 35: Atividade 03 questão “c” – descrição das duplas...114
Figura 36: Atividade 03 questão “d” – expressão algébrica – descrição das duplas...........115
Figura 37: Atividade 03 questão “e” – expressão algébrica – descrição das duplas............116
Figura 38: Atividade 03 questão “f” – descrição das duplas..117

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Visualizações possíveis no GeoGebra referente a atividade 1: janela algébrica, janela de visualização gráfica e planilha..59
Quadro 2: Visualização do arquivo da atividade 02 após as manipulações...................................63
Quadro 3: Visualização do arquivo da atividade 03 sem as manipulações 65
Quadro 4: Visualização do arquivo da atividade 03 após as manipulações...................................65
Quadro 5: Construções de tabela da dupla D3 na atividade 01 em uma nova janela do GeoGebra...82
Quadro 6: Atividade 01 – Tempo de resolução das duplas D1, D3 e D4 com o uso do GeoGebra...89
Quadro 7: Visualização do arquivo da atividade 03 sem as manipulações.....................................91
Quadro 8: Tabela de apoio...92
Quadro 9: Inicio da experimentação da atividade 1 no GeoGebra da dupla D1.............................97
Quadro 10: Construções da dupla D4 no GeoGebra – tabela..100
Quadro 11: Construções atividade 02 da dupla D2 no GeoGebra – tabela-conversão GeoGebra...101
Quadro 12: Construções atividade 02 da dupla D2 no GeoGebra – tabela-conversão – erro na mídia 1...101
Quadro 13: Construções atividade 02 da dupla D2 no GeoGebra – tabela-conversão – erro na mídia 2...102
Quadro 14: Atividade 02 – Tempo de resolução das duplas D1, D3 e D4 com o uso do GeoGebra...106
Quadro 15: Manipulação da dupla D1 na atividade 03 com o uso software GeoGebra 110
Quadro 16: Atividade 03 – dupla D1..113
Quadro 17: Etapa de validação da conjectura sobre o padrão descoberto – dupla D1..................118

Quadro 18: Validando a conjectura relativa às conversões segundo a posição, comprimento e base dez – dupla D1..118
Quadro 19: Validando a conjectura relativa às conversões apresentadas em notação científica – dupla D1...119

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..11

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS..15

1.1 Sobre os elementos teóricos, metodológicos e suas articulações......................15

1.2 Sobre as análises preliminares: generalização de padrões...............................22

1.3 Sobre as pesquisas relacionadas à generalização de padrões..........................27

2. TECNOLOGIA E MATEMÁTICA..32

2.1 Tecnologias e matemática: intervenções no fazer e na inteligência................32

3. ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA ....;...................................38

3.1 Descrição dos sujeitos...38

3.2 Descrição do ambiente..39

3.3 Descrição dos instrumentos..41

3.3.1 Descrição da Atividade 01..41

3.3.2 Descrição da Atividade 02 e 03..47

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS..54

4.1 Análise *a priori* da atividade 01...54

4.2 Análise *a priori* da atividade 02......61

4.3 Análise *a priori* da atividade 03..64

4.4 Experimentação...69

4.5 Análise *a posteriori* da atividade 01..74

4.6 Análise *a posteriori* da atividade 02..90

4.7 Análise *a posteriori* da atividade 03..108

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS..120

CONSIDERAÇÕES FINAIS...123

REFERÊNCIAS..126

ANEXOS...131

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa vem sendo desenvolvida no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, no contexto das investigações do grupo PEA-MAT (Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática)[1].

Em relação ao processo de construção deste trabalho, entende-se, como Fiorentini e Lorenzato (2006), que o desenvolvimento de uma investigação envolve um planejamento que procura refletir a busca do pesquisador por respostas às questões formuladas. Procura-se, portanto, alinhar, da melhor forma possível, encaminhamentos às eventuais hipóteses indicadas. Este planejamento, de natureza flexível, deve permitir múltiplas revisitas e reformulações em relação aos objetivos iniciais, que receberão sucessivos refinamentos à medida que a investigação avança. Este trabalho tinha como escopo inicial a álgebra e suas inserções curriculares na escola básica. As leituras e perquirições realizadas ao longo do trabalho de estruturação do texto, no entanto, permitiram realizar recortes que direcionaram esta iniciativa para a temática que se anuncia aqui. Ou seja: a generalização de padrões, ainda no escopo da álgebra, levando em conta a utilização de estratégias didáticas com tecnologias digitais, tendo como sujeitos os integrantes de um grupo de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II.

A partir da definição do problema, então, alinham-se os movimentos pela busca relativa à revisão bibliográfica, aos suportes teóricos, aos procedimentos metodológicos, entre outros procedimentos relevantes. Justamente neste sentido, a ideia do problema de pesquisa assim pode ser definida:

> [...] cada problema surge da descoberta de que algo não está em ordem com o nosso suposto conhecimento, ou, examinando logicamente, da descoberta de uma contradição interna entre nosso suposto conhecimento e os fatos, ou, declarado mais corretamente, da descoberta de uma contradição entre nosso suposto conhecimento e os supostos fatos (POPPER apud FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 90).

De todo modo, pode-se pensar que a descoberta de novas possibilidades advindas do confronto entre o conhecimento atual e os fatos, na argumentação de Popper, pede o esforço em torno da consideração da complexidade dos elementos envolvidos no tema e no problema em si, e suas articulações. No caso da pesquisa que aqui se relata, pretendeu-se construir sequências didáticas envolvendo o trabalho com padrões algébricos. Empregamos as sequências na investigação de fenômenos relativos à aprendizagem deste tema entre os membros de um grupo de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental II (do nono ano,

[1] CNPq (Processo no. 477783/2013-9) e FAPESP (Processo no. 13/23228-7).

mais especificamente), por meio de interações mediadas por tecnologias digitais, como o software GeoGebra. A questão que direciona esta trajetória pode ser especificada da seguinte forma (até este momento): *quais contribuições podem ser proporcionadas na aprendizagem do tema "generalização de padrões" para um grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental a partir do uso de estratégias didáticas com tecnologias digitais?*

Entende-se, como em Oliveira (2013; 2015), que o uso de tecnologias digitais nos processos de ensino de matemática não representa um fim em si, mas um componente de uma estratégia didática que tem o conhecimento matemático a ser construído como foco. Esta visão influencia, entre outros pontos, a escolha das interfaces que compõem as atividades e os processos pelos quais os participantes de determinada atividade formam, em relação aos dispositivos midiáticos envolvidos, configurações que representam coletivos de pessoas-com-tecnologias. Esta proposta é, por sua vez, inspirada nas ideias de Borba e Villarreal (2005). Para eles, a construção do conhecimento matemático deve ser vista como produto das interações constituídas a partir de um coletivo de seres-humanos-com-mídias, de forma indissociável.

Parte-se do princípio, também, de que o uso de tecnologias permite a reorganização do pensamento das pessoas em torno de novas possibilidades que vão além da mera substituição ou suplementação de seus recursos originais (TIKHOMIROV, 1981). Finalmente, a abordagem aqui assumida leva em conta que a construção de conhecimento a partir de um coletivo formado por pessoas e tecnologias não prescinde do desenvolvimento de fluência sobre as mídias em uso. A construção do coletivo descrito pelos autores supramencionados não dispensa o desenvolvimento de fluência em relação aos elementos tecnológicos envolvidos, tanto em relação ao funcionamento dos dispositivos presentes nas interfaces utilizadas, como à lógica subjacente às distintas ferramentas (OLIVEIRA, 2013).

Neste sentido, o presente trabalho leva em consideração, em seu desenvolvimento, a construção de problemas a serem solucionados por grupos de alunos de matemática da escola básica, mais especificamente os do nono ano, em conjunto com as abordagens com tecnologias digitais mais apropriadas a cada tarefa. O sentido de tarefa, aqui, pode ser alinhado ao de problema, como construções cognitivas que permitam ao sujeito refletir, conjecturar e alinhar propostas por conta própria, de acordo com o que recomenda a Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau (1986).

Como objetivos desta investigação podem ser elencadas as seguintes pretensões:

- Evidenciar eventuais contribuições, no âmbito de um grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental, na aprendizagem relativa ao tema "generalização de padrões” a partir de uma estratégia didática com o uso de tecnologias digitais, por meio de sequências didáticas compostas por problemas relativos à temática anunciada – este seria o objetivo geral;

- Criar e empregar, no contexto investigativo descrito, aplicações no software GeoGebra que possam ser usadas, para que alunos do nono ano do Ensino Fundamental reflitam e avancem autonomamente, em termos de conhecimento, nas reflexões e conjecturas sobre a generalização de padrões algébricos;
- Analisar as produções dos estudantes, a partir de uma metodologia qualitativa baseada em experimentações (engenharia didática), levando em conta as contribuições que a estratégia didática com tecnologias pode efetivar em relação à aprendizagem do tema matemático em estudo.

Desta forma, este trabalho tem suas descrições e ações estruturadas em capítulos assim caracterizados:

O **capítulo 1** trata dos elementos teóricos e metodológicos no qual se apoiam os processos relativos à análise dos dados coletados nesta investigação, respectivamente a Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Guy Brousseau (1986), e a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, de Michèle Artigue (2014). Quanto à TSD, foca-se em suas ação, formulação, validação e institucionalização; no que diz respeito à Engenharia Didática, no contexto da TSD, leva-se em consideração suas fases: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e a análise *a posteriori*. Neste capítulo, ainda, se encontra a revisão bibliográfica. O entendimento acerca da generalização de padrões na visão de diferentes referenciais e a relevância da generalização de padrões na pesquisa.

O **capítulo 2** versa sobre a relação entre as Tecnologias com a Matemática, mais especificamente a tecnologia digital, dentro dos processos de construção de saberes e conhecimentos matemáticos, juntamente com um breve paralelo histórico desses processos educacionais e a sociedade. Também é tratada a relevância da tecnologia digital na investigação quanto instrumento que permite o movimento de pessoas-com-tecnologias digitais, o ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais: exploração da lógica das interfaces, pensar com tecnologias, explorar e desenvolver trajetórias investigativas e, por último, elaborar estratégias didáticas e/ou de autoaprendizagem. Além do interesse de empregar o software GeoGebra nesta pesquisa.

O **capítulo 3** contém as descrições dos componentes envolvidos na fase de experimentação: descrição dos sujeitos, do ambiente, dos instrumentos e das atividades.

O **capítulo 4** descreve os procedimentos metodológicos da pesquisa segundo as fases da Engenharia didática delineando as sequências didáticas empregada na experimentação. Assim, aparecem as relações entre as fases e o funcionamento da lógica interna da metodologia.

O **capítulo 5** abarca com discussões e conclusões dos resultados obtidos com as análises que foram adequadamente relacionadas aos pressupostos objetivos da pesquisa, o referencial teórico e a revisão bibliográfica, principalmente do confronto da análise *a priori* com a análise *a posteriori* dentro de uma validação interna.

De tal modo, em relação a estas asserções, são alinhadas, nas próximas seções, as reflexões constituídas até o momento.

1. APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

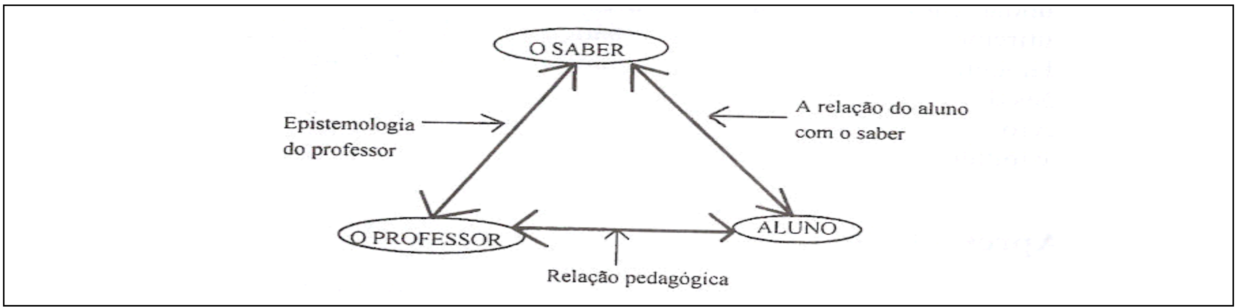
1.1 Sobre os elementos teóricos, metodológicos e suas articulações

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) constitui um dos elementos teóricos no qual se apoiam os processos relativos à análise dos dados coletados nesta investigação. Por meio deste construto, procura-se dar conta de subsidiar as reflexões que surgiram a partir do trabalho dos sujeitos com a resolução de problemas no âmbito das chamadas situações didáticas e, mais especificamente, considerando que as mesmas são compostas por movimentações também conhecidas por situações adidáticas. Neste âmbito, Brousseau (1986) defende o engajamento dos aprendizes nestas situações, que seriam aquelas em relação às quais não é dado perceber a intencionalidade didática do professor. Um dos elementos primordiais da dinâmica subjacente é o processo de devolução, que consiste na propositura de um problema pelo docente e sua aceitação, com a responsabilidade do provimento de respostas, por parte dos aprendizes. Além disso:

> Deste ponto de vista, a propositura do problema prevê um contexto material, didático e teórico de caráter antagônico (o *milieu*), no âmbito do qual o processo investigativo do estudante segue por três dialéticas distintas: de ação, de formulação e de validação. O professor retoma o caráter didático da proposta quando se propõe a discutir e esclarecer sobre o estatuto do conhecimento matemático válido, o que se dá pela dialética de institucionalização (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 822).

Na visão de Brousseau (1997), professor, aluno e saber se relacionam intensivamente como componentes do processo de ensino e/ou aprendizagem em Matemática, constituindo o que o autor chama de *triângulo didático*. Nos comentários que Almouloud (2007) faz a esta proposição é possível perceber as interações entre os mencionados componentes e seus significados (figura 1).

Figura 1: Triângulo didático



Fonte: Almouloud, 2007, p. 35.

Os processos assim definidos, de acordo com a dinâmica proposta pelo triângulo, instituem, entre professor e aluno, uma relação de natureza pedagógica. Isto permite constituir interações que seriam equivalentes a uma associação para pesquisas científicas, a partir da qual o aluno seria instado a investigar e construir, com uso de seus conhecimentos anteriores, novos conhecimentos. A ligação destacada entre o saber e o professor está calcada no trabalho, efetuado por este, em realizar as transformações adaptativas em relação ao saber matemático de referência, de caráter formal e científico, de modo que o mesmo possa ser apropriado pelos alunos nos processos investigativos já mencionados. Por sua vez, são justamente os procedimentos que simulam a investigação e o trabalho do matemático que pautam a relação do aluno com o saber, ou seja, na construção de aportes cognitivos de forma reorganizada, o que permite aplicar tais ganhos na resolução dos problemas propostos.

Em relação ao *milieu*, é de grande importância ressaltar que Brousseau (2008) destaca que o mesmo seja estruturado a partir de uma lógica antagônica, no sentido de representar um elemento de desequilíbrios, de dificuldades e de contradições. A partir da construção de fatores de interação (instrumentos, como sequências didáticas, por exemplo), e considerando o caráter por assim dizer múltiplo da natureza deste componente (objetivo, material, social), espera-se o engajamento dos sujeitos, que passam a estruturar a construção do conhecimento a partir de retroações em relação a este componente. Assim, pode-se aventar que este é, justamente, o encaixe das estratégias didáticas com tecnologias em relação à TSD, como aduzem Oliveira e Gonçalves (2017, p. 12):

> É, justamente, no âmbito do *milieu* que se pode compreender o papel das mídias componentes das estratégias didáticas empregadas em determinado sistema de ensino em um dado momento: adotadas a partir do planejamento do professor, constituem uma possibilidade para a promoção da reorganização do pensamento dos estudantes, com vistas à constituição de um saber.

Estes autores recorrem a Oliveira (2009) para indicar que as tecnologias podem oferecer outra visão ao triângulo didático original, não em substituição, mas em complemento, como se pode ver na figura 2.

Figura 2: Reconfigurações do triângulo didático

Fonte: Oliveira, 2009, p. 229.

Na interpretação desta representação gráfica, reforça Oliveira (2009, p. 229-30):

> As setas representam os fluxos, nos sentidos pretendidos por LÉVY (1993), que proporcionam, através das mediações negociadas entre as figuras humanas do processo (professores e alunos), a construção do conhecimento matemático de múltiplas maneiras (individualmente, cooperativamente, colaborativamente), previstas pelas estratégias didático-pedagógicas, as quais, também, admitem reconfigurações de acordo com a dinâmica que se efetiva no saber ensinado. As mediações são as ambiências das TICs e das mais diversas tecnologias envolvidas dos processos de ensinar e aprender Matemática.

Ainda no âmbito da teoria proposta por Brousseau (2008), e considerando o papel das tecnologias na forma supramencionada, o professor tem a função de apresentar aos alunos um bom problema, capaz de mobilizar elementos da estrutura cognitiva dos estudantes, os quais, todavia, não são suficientes para responder às questões suscitadas. A trajetória de resolução, então, permanece pautada por dialéticas de ação, formulação e validação, vistas como adidáticas, no sentido que, em seu curso, o aprendiz não deve perceber a intencionalidade didática do proponente. É pelo movimento didático que recebe o nome de *institucionalização*, nome dado pelo professor – momento marcado por discussões coletivas acerca daquilo que foi discutido nos momentos anteriores e no qual o estatuto formal do conhecimento matemático é fixado pelo docente –, que o novo conhecimento, surgido como resposta à problemática levantada, passa a constituir o patrimônio cognitivo do grupo envolvido.

Em termos processuais, o docente deve apresentar determinado problema aos alunos, que deverão construir estratégias para resolver a situação proposta, fase denominada de dialética de ação. Em seguida, os alunos são convidados a elaborar conjecturas em torno desse problema e comunicá-las aos seus colegas, o que permitirá o desenvolvimento da dialética da formulação. Face à discussão proposta, os alunos devem organizar suas proposições em torno de demonstrações mais robustas sobre o tema e convencer seus colegas de que elas são válidas dentro de um sistema de regras predeterminadas, marcando a dialética da validação. Deve-se entender, apesar da exposição estruturada aqui feita, que as fases mencionadas não se apresentam de forma linear e/ou hierárquica, mas se interpenetram e sobrepõem, de maneira a permitir múltiplas e distintas trajetórias, marcadas por idas e vindas ao longo das dialéticas. Por fim, cabe ao professor o reconhecimento externo, conferindo a validade cultural do que foi proposto, além de organizar e sintetizar o novo conhecimento, o que compõe a dialética da institucionalização.

As dialéticas propostas pelo autor francês, quando estrategicamente organizadas em torno de bons problemas, não somente permitem evidenciar a estruturação cognitiva do conhecimento, são capazes de aguçar o espírito investigativo dos estudantes. Promove uma argumentação que tem elementos matemáticos como base e a elaboração de conjecturas, atividades essenciais ao trabalho de um matemático, que é o que se quer simular.

Desta forma, estes elementos da TSD foram adaptados, no âmbito da investigação aqui relatada, de modo a envolver os alunos selecionados como sujeitos, já que se pretendeu que os mesmos percorressem, no âmbito das tarefas, "um percurso investigativo, não direcionado pelo pesquisador, e mediado pelas tecnologias" (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 823). Assim, coube a esta pesquisa entender que avanços cognitivos o aluno eventualmente apresentou ao trabalhar com tarefas que previam o uso de tecnologias e que tinham a generalização de padrões como tema matemático principal. Neste contexto, o uso de tecnologias digitais é compreendido como forma de constituir um coletivo – *seres-humanos-com-mídias*, na forma como entendem Borba e Villarreal (2005). A partir desta proposta, e considerando que as mídias podem permitir a reorganização do pensamento (TIKHOMIROV, 1981), a estratégia didática foi estabelecida no intuito de empregar estes instrumentos como forma de promover a autonomia dos sujeitos. Como forma de aproximar os sujeitos da fluência necessária para o emprego das interfaces do software GeoGebra, que se previu usar aqui, foram utilizadas as reflexões teóricas de Oliveira (2013), que indica uma trajetória para uso de tecnologias em processos de ensino e de aprendizagem.

Esta pesquisa tem a engenharia didática (ARTIGUE, 2014) como perspectiva metodológica. Trata-se de uma proposta baseada nas chamadas "realizações didáticas", planejadas para ocorrerem em ambientes como os da sala de aula. As trajetórias levadas a efeito nesta perspectiva estão calcadas

> [...] na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. [A metodologia] caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste (ALMOULOUD, 2014, p. 171).

De tal maneira, as sequências didáticas, nesta pesquisa, pretenderam engajar os sujeitos em trajetórias autônomas para a constituição de conjecturas, de validações das mesmas, de revisitas às formulações iniciais. Isto tendo no *milieu*, do qual as tecnologias fazem parte, o elemento a partir do qual se espera que ocorram as retroações capazes de consolidar a construção do conhecimento acerca do tema generalização de padrões. Em outras palavras, o arcabouço estrutural da engenharia didática será mobilizado para a organização dos esquemas experimentais almejados.

O uso desta metodologia em conexão com a abordagem teórica proposta pela TSD é típica e, de certa forma, consolidou-se como uma das características e de elementos mais relevantes do que Brousseau chamou de *didática como ciência* (BROUSSEAU apud BARQUERO; BOSCH, 2014). Na visão do autor francês, no âmbito da Didática:

> A engenharia didática surgiu como um necessário e 'concreto' domínio entre uma atividade pobremente explorada, o ensino de matemática, e uma ciência ausente, a Didática, a qual deveria, por um lado, redefinir ambos, e, por outro, encontrar a contingência naquilo em que se confrontam e que se complementam. 'Não se contentar apenas com as evidências', 'reproduzir sistematicamente', 'analisar para acumular experiências', 'aceitar conceitos exógenos apenas a partir da testagem promovida pela engenharia didática' – estes foram os princípios orientadores da Didática (BROUSSEAU apud BARQUERO; BOSCH, 2014, p. 249).

Pode-se aventar, como aduzem Barquero e Bosch (2014), que a engenharia didática ocupa, como metodologia, um papel intermediário entre a realidade das salas de aula e a didática da Matemática, como campo científico. As autoras mencionam a reflexão de Artigue (2014) feita sobre este tema. Para esta pesquisadora, a engenharia didática contribuiu para estabelecer o local do *design* na pesquisa em Educação Matemática. Neste sentido, a metodologia aqui mencionada seria fundamental para, no âmbito da pesquisa em didática da matemática, promover o "entendimento e a melhoria do funcionamento dos sistemas didáticos onde o ensino e a aprendizagem da matemática ocorrem". Tal compreensão, por consequência, "não pode ser alcançada sem considerar esses sistemas em seu funcionamento concreto, prestando a atenção necessária às diferentes restrições e forças que agem sobre eles". Desta maneira, então, "as realizações controladas nas salas de aula devem, portanto, ser desempenhadas de forma proeminente nas metodologias de pesquisa para identificar, produzir e reproduzir fenômenos didáticos, para testar construções didáticas" (ARTIGUE apud BARQUERO; BOSCH, 2014, p. 250).

Em outro trabalho, Artigue (apud BARQUERO; BOSCH, 2014) indica quais seriam as principais características da engenharia didática como forma de proceder uma intervenção baseada em um arcabouço de natureza teórica (a TSD, no caso):

- A noção de situação desempenha papel central, tanto na modelagem do conhecimento matemático quanto na organização de seu ensino;
- A fundamental atenção que deve ser dada à epistemologia do conhecimento e a necessidade de reconstruir qualquer conteúdo matemático como resposta a algum assunto trazido à tona por meio de uma situação social;
- A importância dada às características do *milieu* empírico da situação e às interações dos alunos com este *milieu*;

- As três distintas funcionalidades atribuídas ao conhecimento matemático, materializadas por meio da tríade adidática ação – formulação – validação;
- A visão do papel do professor como organizador das relações entre as dimensões didática e adidática das situações (estas "atitudes" são conhecidas como *devolução* e *institucionalização*).

Pode-se concluir, conforme mencionam os autores referenciados, que a engenharia didática, como metodologia de pesquisa, emprega as ferramentas conceituais fornecidas pela TSD. Segundo Artigue (2014), a comunidade de Educação Matemática da França adotou esta metodologia como recurso preferencial, no que toca aos procedimentos de pesquisa levados a efeito da escola básica ao ensino superior. Mais do que isto, a partir dos anos 1990, a engenharia didática começou a ser empregada também em processos de formação e em sessões de desenvolvimento profissional de professores, tanto em matemática como em outras disciplinas, inclusive em outros países. No Brasil, por exemplo, o Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática tem uma já extensa tradição em pesquisa calcada nos parâmetros da Didática Francesa, com emprego da engenharia didática de forma intensiva.

Em termos organizacionais, a engenharia didática é uma metodologia experimental e estruturada em fases bem definidas. A primeira delas, chamada de *análises preliminares*, diz respeito a um questionamento epistemológico do conteúdo matemático em estudo no contexto de uma dada investigação, o que inclui uma discussão acerca da necessidade de sua presença no contexto escolar (BARQUERO; BOSCH, 2014). Além disso, esta fase prevê um estudo das condições e das restrições existentes nas instituições nas quais ocorre processo de ensino e de aprendizagem. Para as autoras, "este é um primeiro passo essencial por meio do qual as hipóteses de pesquisa são formuladas e o conteúdo a ser ensinado/aprendido é questionado, usualmente considerando os diferentes tipos de fenômenos didáticos envolvidos. É, também, a fase em que os resultados prévios de pesquisa são retomados" (BARQUERO, BOSCH, 2014, p. 251).

A fase seguinte é conhecida como *construção das situações* (ou *design*) *e análise a priori*, e corresponde à forma pela qual o conteúdo em questão é trabalhado em termos de modelos no contexto da pesquisa didática. Dois níveis distintos podem ser identificados aqui, quais sejam, o *matemático* e o *didático*. Por consequência, a *análise matemática* se encarrega de caracterizar (ou mesmo definir) o conteúdo em jogo, enquanto a *análise didática* permite indicar de que forma emergem os problemas considerados em uma sequência de situações concretas advindas da compreensão matemática de objetos e/ou temas envolvidos. De forma mais específica, é nesta fase que são construídas as sequências didáticas, geralmente constituídas por problemas que visam provocar os movimentos dialéticos de ação, formulação e validação por parte dos estudantes, que precisam se engajar em trajetórias investigativas que permitam compor conjecturas, a exemplo do matemático que busca recursos teóricos para o desenvolvimento de seu trabalho. Tais problemas devem implementar interfaces em relação a um *milieu* antagônico, devendo, portanto, desafiar os conhecimentos prévios, de modo que o processo de resolução dos mesmos coincida com o conhecimento a ser construído. De todo modo, devem ser providas descrições matemáticas e didáticas de cada problema específico, o que inclui pensar nas estratégias, corretas ou não, que os alunos podem considerar em sua resolução. Também é a fase em que se identificam e que se explicam as variáveis didáticas envolvidas.

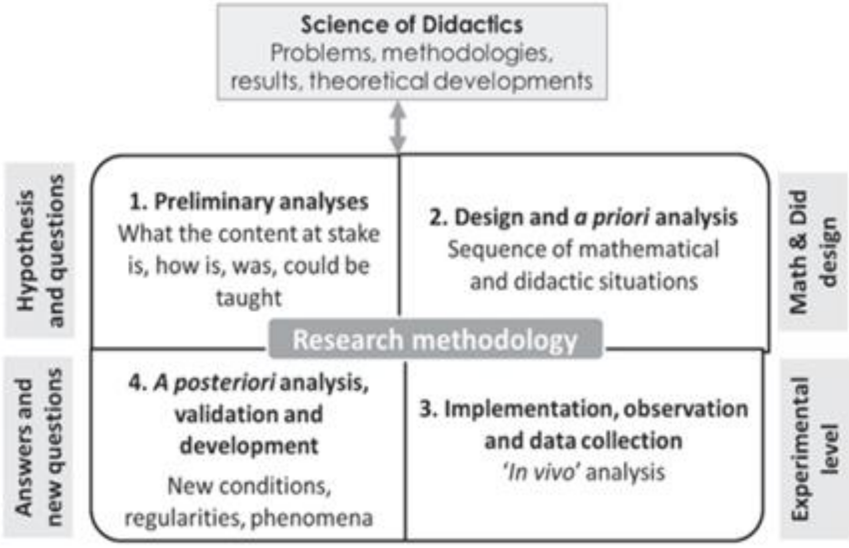
A terceira fase contém a implementação do processo didático previamente engendrado, sua observação e a coleta de dados. Neste nível, de caráter experimental, uma análise *in vivo* é desenvolvida tipicamente, com uma interpretação simultânea (ou quase) do que ocorre na sala de aula. Em seguida, uma *análise a posteriori* representa a última etapa do procedimento, sendo organizada em termos de comparação, validação e desenvolvimento das hipóteses de pesquisa e propostas de *design* estruturadas nas fases anteriores, principalmente na análise a priori, o que acarreta, frequentemente, a formulação de novos problemas, relacionados tanto à pesquisa em si quanto ao desenvolvimento do ensino (BARQUERO; BOSCH, 2014).

Ainda que exista uma ordem de ocorrência, por assim dizer, destas fases da engenharia didática, vê-las de forma disjunta seria um erro. Da mesma maneira, as fases mencionadas aqui não devem ser consideradas como lineares e absolutas, no sentido de não admitirem revisitas, revisões e reconsiderações. De fato,

> É preciso ressaltar que, mesmo que a análise a priori preceda as análises *in vivo* e a posteriori, há sempre uma interação constante entre os resultados das diferentes fases: os resultados da análise a posteriori podem não apenas sugerir a introdução de mudanças no *design* do processo de ensino, como também no desenvolvimento da caracterização do conteúdo em questão (análise preliminar). [...] Nesse sentido, a engenharia didática não é uma prática de desenvolvimento em que os resultados de pesquisa previamente estabelecidos são transformados em propostas de ensino. É uma maneira de contrastar empiricamente os pressupostos sobre as possibilidades de difusão do conhecimento matemático e os fenômenos que o impedem (BARQUERO; BOSCH, 2014, p. 251).

Desta forma, as quatro fases indicadas por Artigue (2014) em sua proposta de estrutura metodológica podem ser vistas, de modo sintetizado, na figura 3.

Figura 3: Fases da metodologia de pesquisa Engenharia Didática no contexto da TSD



Fonte: BARQUERO; BOSCH, 2014, p. 252.

Por conseguinte, a organização do design do estudo, que se descreve aqui, permite articular as teorias e a abordagem metodológica. Isto possibilita justificar os elementos contidos no estudo a partir da lógica descrita, esquematicamente, na figura 3.

1.2 Sobre as análises preliminares: generalização de padrões

Emprega-se, no contexto da matemática, a expressão “padrão” quando se quer referir à tentativa de encontrar regularidade, repetição e/ou simetria, com propósito de compreender ordem ou estrutura (ORTON; ORTON, 1999). Logo, a ideia de padrão abrange uma lógica de regularidades marcadas, eventualmente, pela forma como certos resultados ou expressões se repetem. Esta ideia pode ser entendida, na matemática escolar, não apenas como um tema a investigar, mas como um componente que perpassa toda a trajetória de aprendizagem da disciplina (VALE, 2013).

A exploração deste tema, de modo geral, pode ser justificada pela importância atribuída a ele em todos os cenários de formação de pessoas que aprendem ou ensinam matemática. De tal maneira, a generalização de padrões é, sem dúvida, um tema bastante tratado em pesquisas e artigos acadêmicos que de alguma forma se debruçam sobre elementos da álgebra, sem, contudo, que se tenham esgotado as possibilidades de promover o enriquecimento de sua compreensão em termos teóricos e didáticos.

Neste sentido, os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), indicam que os padrões formam o alicerce do pensamento algébrico e que, por meio de sua exploração, é possível envolver os estudantes em tarefas de identificação de relações e na percepção de generalizações. O referido documento propõe que o reconhecimento de padrões conste entre os objetivos de todos os níveis escolares. Para Mason (1996), por exemplo, construir conhecimentos que permitam, com desenvoltura, a expressão de generalidades, é uma conquista sobremaneira relevante, uma vez que este saber é básico em relação ao desenvolvimento e consolidação do aprendizado sobre álgebra.

O conhecimento desta natureza deve, entre outras possibilidades, habilitar um aprendiz a reconhecer a existência de padrões em seu cotidiano, perceber a generalidade envolvida nesta iniciativa e, sobretudo, prover descrições matematicamente válidas, do ponto de vista da correção, em um primeiro momento, e da formalidade, em um segundo (OLIVEIRA, 2008). Justamente por isso, esta ideia da centralidade do conhecimento acerca de padrões na aprendizagem de álgebra, em particular, e de matemática, de forma mais ampla, remete a uma trajetória que reconhece vários personagens, estes vistos como autores que defenderam este ponto de vista em suas investigações. Sobre este aspecto, Vale (2013, p. 65) menciona que uma série de estudiosos já se referia à matemática como "ciência dos padrões". Entre eles, em uma recuperação de caráter temporal, de 1940 a 1991, a autora menciona Devlin, Steen, Sawyer e até, de certa forma, Hardy. Repercutindo o trabalho de 1981 de David e Hersh, ela diz que "o próprio objetivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão" (VALE, 2013, p. 66).

A mesma autora sugere, então, a análise de propostas didáticas alicerçada na resolução de tarefas desafiadoras, envolvendo padrões em contextos visuais, por meio de múltiplas resoluções e representações, que levariam o aprendiz a compreender conceitos matemáticos estruturantes. Assim, a generalização, na visão da autora, permitiria estimular a criatividade do aluno e do professor do ensino básico, e competiria à escola desenvolver mecanismos para facilitar tal estímulo, tendo em vista a melhora das competências matemáticas dos estudantes **(**VALE, 2012).

Do ponto de vista das recomendações que impactam nas estruturas curriculares, de acordo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Matemática (BRASIL, 1998), a generalização de padrões é um tema relevante, inclusive como forma de estimular o estudo da matemática e de seu emprego junto ao desenvolvimento de competências correlatas. Isto porque "a Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico" (BRASIL, 1998, p. 24-25).

Assim, de forma transversal, os PCN tomam a resolução de problemas como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, de forma a inseri-la em situações que privilegiem as interconexões entre seus diversos ramos e articulações com as demais áreas do conhecimento. Os conteúdos aparecem em blocos, contrapostos ao modo tradicional: grandezas e medidas; espaço e formas; números e operações e tratamento da informação. Assim, conforme consta neste documento (BRASIL, 1998, p. 84), seria importante "[...] a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o reconhecimento da sintaxe (regras de resolução) de uma equação". Neste sentido, então, seria importante, de acordo com estas orientações, resgatar situações que levem os alunos a construção de noções algébricas por meio da observação de regularidades proporcionada pela apresentação de diversos registros como tabelas e gráficos. Isto possibilitaria, então, encontrar padrões em sucessões numéricas, representações geométricas e identificar suas estruturas; desenvolver a linguagem algébrica de maneira simbólica; levar o aluno ao entendimento das letras como variáveis; representar relações funcionais diante de situações-problema concretas e utilizar software educativo, que apresentam planilhas ou gráficos. Além disso, a generalização faz parte de um processo lento e trabalhoso vinculado ao domínio de um saber e pensar matemático, por sua vez, dentro de um conjunto de elementos fundamentais do conhecimento matemático, para que o aluno desenvolva aptidões importantes à leitura e à interpretação de informações relativas às diversas áreas do conhecimento (BRASIL, 2002). Neste âmbito, Rossini (2006) faz algumas críticas relacionadas a este documento, principalmente quando assevera que o mesmo não instrumentaliza seus leitores (professores, principalmente) para lidar com as eventuais dificuldades de alunos ou situações que pediriam interpretações. A autora expõe o seguinte:

> Encontramos o exemplo de uma situação que tem a finalidade de mostrar como um aluno, a partir de um texto, poderia perceber as vantagens do uso de letras (como variável) para generalizar procedimentos. O documento sugere ao professor a organização de dados em uma tabela, que leve o aluno a fazer uma descrição oral dos procedimentos e empregue a noção de variável para indicar genericamente a interdependência das grandezas envolvidas. Todavia, o documento não discute as dificuldades que os alunos poderiam encontrar para fazer essa generalização, como se esse raciocínio decorresse naturalmente. Além disso, não sugere a construção de um gráfico para a situação descrita, apesar de destacar a importância desse recurso para o desenvolvimento de conceitos e de procedimentos algébricos. Notamos igualmente a ausência de, pelo menos, uma situação que ilustrasse a leitura e a interpretação de um gráfico (ROSSINI, 2006, p. 90).

Para Dreyfus (1991), generalizar é tirar como resultado ou induzir a partir de dados, para reconhecer particularidades comuns; ir de um caso particular para um caso geral e estender os domínios de validade de uma conclusão. Neste sentido, ainda, outras proposições devem ser destacadas: segundo Mason (1999, p. 9), "a generalização tem a ver com a observação de padrões e com propriedades comuns a várias situações". Com o intuito de evidenciar a importância deste tema no desenvolvimento da aprendizagem, o mesmo autor indica que "a generalização é um batimento cardíaco da matemática", e reforça: "se os professores não estão conscientes de sua presença e não têm o hábito de fazer com que os alunos trabalhem para expressar suas próprias generalizações, então o pensamento matemático não está ocorrendo" (MASON, 1996, p. 65).

Para Vale (2012), a generalização de padrões envolve pensamentos de ordem superior, o que inclui o raciocínio abstrato, o pensamento holístico, a visualização e a flexibilidade. Assim,

> A literatura descreve vários estudos, com alunos e com professores, que nos permitem concluir que as tarefas de padrões (e.g. de repetição e de crescimento, lineares e não-lineares, numéricos e figurativos), com as suas diferentes naturezas e contextos, tem-se revelado potenciadoras no desenvolvimento de capacidades de generalizar e em promover o pensamento algébrico e, em particular, o simbolismo que lhes está associado (VALE, 2012, p. 186).

Segundo Dreyfus (1991), o abstrair e o representar são processos complementares, pois o conceito é abstraído perante as múltiplas representações apresentadas, e estas, por sua vez, representam um conceito ainda mais abstrato.

Para além das definições, interessa a esta investigação encontrar meios de apresentar a generalização de padrões a um grupo de sujeitos, alunos da escola básica, por meio de problemas e atividades significativas[2]. Em relação à forma pela qual o trabalho com generalização de padrões pode ser realizado, várias propostas poderiam ser descritas. Entretanto, uma em particular interessa a esta investigação justamente por possibilitar uma estratégia que inclui tecnologias digitais: trata-se da proposta indicada por Zazkis, Liljedahl e Chernoff (2007).

Em seu texto, os autores mencionam, com base nos trabalhos de Mason (1996; 1999) que a generalização pode ser compreendida a partir da constituição de exemplos típicos. Tal estratégia encontra suporte na noção de "espaço de exemplos", proposta por Watson e Mason (2005), e que se refere ao conjunto a partir do qual os exemplos são constituídos. Para estes autores, então, a eleição dos exemplos empregados na estratégia didática destinada a promover a generalização, depende do contexto no qual as atividades relacionadas são definidas. No trabalho que descrevem os autores, envolvendo professores em formação, dois são os principais recursos orientadores das estratégias empregadas: o que chamam de "big

[2] A ideia de "problema significativo" aparece atrelada ao conceito de "bom problema", de Brousseau (1986). Ou seja, um problema a partir do qual o aluno pode refletir, conjecturar, discutir e organizar soluções com autonomia.

numbers" (números grandes, o que envolve, inclusive, uma discussão de quais números poderiam ser assim classificados), e a variação numérica. Neste caso, foi relevante incluir como uma das bases da proposta apresentada alguns contraexemplos, de modo a auxiliar os aprendizes a refutar generalizações incorretas ou imprecisas.

Outra forma de trabalhar com o tema foi descrita por Oliveira (2008), ao revisitar a investigação descrita por Zazkis e Liljedahl (2002). O autor propôs que um grupo de pós-graduandos em Educação Matemática analisasse o mesmo problema aos quais os sujeitos da pesquisa original foram submetidos, que tem por base o exposto na Figura 4, uma matriz numérica com uma conformação peculiar.

Figura 4: Matriz Numérica

1	**2**	**3**	**4**	
	8	**7**	**6**	**5**
9	**10**	**11**	**12**	
	16	**15**	**14**	**13**
17	**18**	**19**	**20**	
. . .				

Fonte: ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002, p. 383.

Em relação à matriz mencionada, eram propostos, originalmente, os seguintes questionamentos:

> Como você pode continuar este padrão? (Ou: como você pode estender este arranjo, preservando alguma regularidade?); Suponha que você continue [o arranjo], indefinidamente. Existem números os quais você saberia "com certeza" onde colocar? Como você decidiria? Você pode prever onde o número 50 estaria? 150? E o 86? 87? 187? 392? 7386? 546? Em geral, dado um número qualquer, como se poderia prever onde o mesmo apareceria neste padrão? Explique a estratégia que você propõe (ZAZKIS; LILJEDAHL, 2002, p. 383).

Na abordagem diferenciada proposta por Oliveira (2008), os sujeitos puderam utilizar uma planilha eletrônica do Microsoft Excel, construída com fórmulas que visavam implementar a continuidade da referida matriz até um ponto qualquer, limitado ao tamanho da própria planilha em linhas. Além disso, outras fórmulas, que podiam ser editadas, indicavam o número que ocuparia certa posição da matriz, dadas suas coordenadas em linha e coluna. A partir, então, da manipulação da interface, os sujeitos propuseram respostas contendo a generalização solicitada, apresentando um nível de acerto mais acentuado do que no estudo original, e em um tempo consideravelmente menor. Entre as considerações do autor ao relatar os resultados de sua pesquisa, deve-se ponderar o papel exercido pelo trabalho dos pós-graduandos com o Excel:

> Entre as impressões surgidas no debate, grande parte dos integrantes do grupo concordou que a transposição para o contexto de TIC pode facilitar a atividade de generalização de padrões por parte do professor, na medida em que, ao buscar uma lógica que atenda à construção solicitada em um problema determinado, o professor engendra fórmulas computacionais e/ou configura ferramentas do programa que geram uma formalização, a partir da qual é possível criar uma formalização algébrica em forma de notação (OLIVEIRA, 2008, p. 309).

As construções efetuadas pelos sujeitos, segundo o autor, concorreram para diminuir o intervalo cognitivo, descrito como “tensão” por Zazkis e Liljedahl (2002), entre o pensamento algébrico e a notação equivalente. Desta forma, as reflexões abertas por Oliveira (2008), principalmente no que se refere à estratégia empregada com o uso de tecnologias, podem auxiliar na construção dos problemas que serão tratados pelos sujeitos nesta pesquisa.

Pensar em problemas que possam ser inseridos em uma estratégia que favoreça o processo de investigar, elaborar conjecturas, inferir e generalizar surge, então, na literatura de referência, como uma das principais metas ligadas às investigações voltadas para o tema aqui tratado. Neste sentido, na visão de Alvarenga e Vale (2007, p. 28):

> Os problemas que envolvem a descoberta de padrões contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos. Em particular, é um modo de envolver os alunos em alguns dos componentes fundamentais do pensamento algébrico como sejam o particularizar, o conjeturar, o generalizar e, eventualmente, o simbolizar das relações encontradas.

Resta dizer, sobre o uso de problemas significativos para a investigação acerca da generalização de padrões, que este parece ser um caminho promissor, tendo em vista que permite engajar os sujeitos (estudantes da escola básica) em uma trajetória que prioriza o trabalho com experimentações e conjecturas. Os PCN (BRASIL, 1997) destacam a importância do desenvolvimento, por meio de estratégias didáticas, de recursos que permitam ao aluno do ensino básico desenvolver a percepção acerca de regularidades, compreendendo regras, algoritmos e propriedades. Por extensão, devem semelhantes estratégias oportunizar o reconhecimento da existência de identidades essenciais com o objetivo de analisar e resolver situações-problemas.

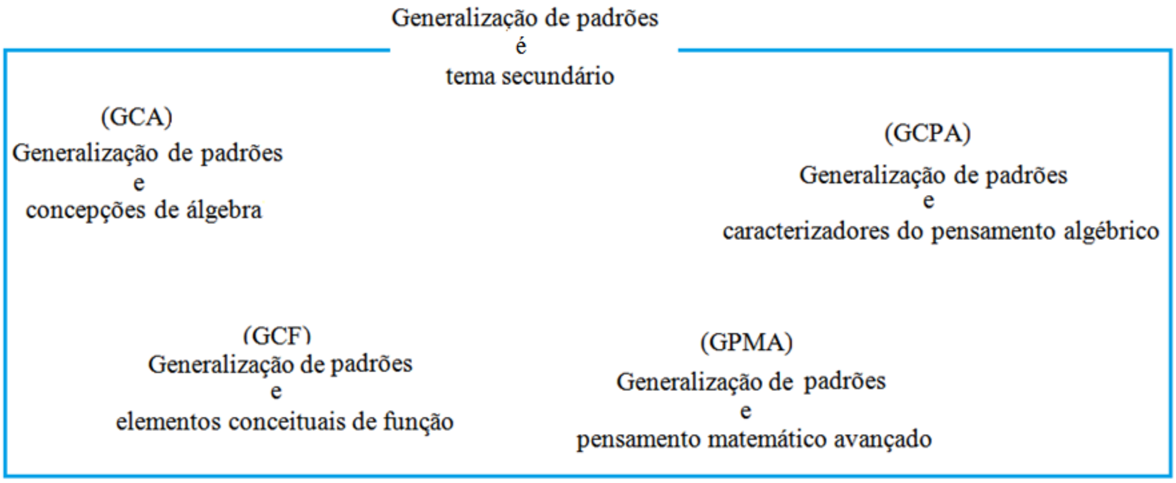
Em seguida, a revisão da literatura busca recuperar alguns trabalhos acadêmicos importantes, no sentido de fornecer subsídios à investigação aqui relatada.

1.3 Sobre as pesquisas relacionadas à generalização de padrões

A investigação realizada por Baqueiro (2016) contribuiu para uma visão panorâmica das pesquisas com o tema generalização de padrões. A autora indica que é pequeno o número de trabalhos realizados sobre este assunto no período de 2003 à 2013. Também questiona a quantidade de novas pesquisas a serem realizadas após 2013, fato relevante pois o tópico possui grande importância para a aprendizagem da matemática.

A autora garimpou e identificou 27 dissertações e 1 tese que trazem contribuições relevantes ao assunto. Organizou-as, deste modo, por meio de características comuns em duas categorias: a primeira tem a generalização de padrões como tema secundário, ou seja, contribuições indiretas, constituída por 11 dissertações. Entre elas, surgiram mais quatro novas subcategorias, quais sejam ‘Generalização de padrões e concepções de álgebra’ (GCA), ‘Generalização de padrões e caracterizadores do pensamento algébrico’ (GCPA), ‘Generalização de padrões e elementos conceituais de função’ (GCF) e ‘Generalização de padrões e pensamento matemático avançado’ (GPMA). Esta categorização pode ser visualizada na figura abaixo:

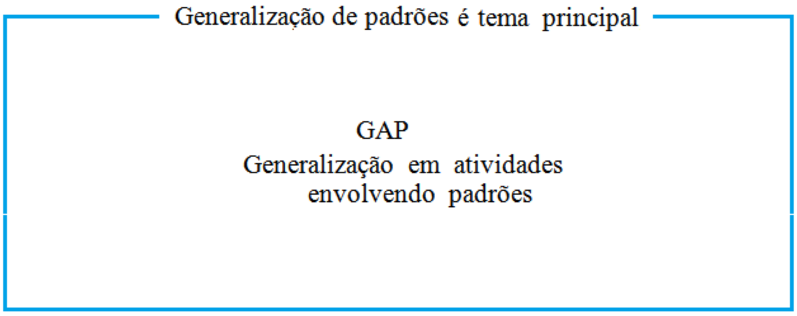
Figura 5: Generalização de padrões é tema secundário



Fonte: Baqueiro, 2016 (adaptado)

A segunda categoria tem a generalização de padrões como tema principal, quer dizer, com contribuições diretas sobre o tema, o que pode ser visto na figura 6:

Figura 6: Generalização de padrões é tema principal



Fonte: Baqueiro, 2016 (adaptado)

A categoria teve como base de dados 15 dissertações e formou apenas uma subcategoria: ‘Generalização em atividades envolvendo padrões’ (GAP). A GAP é constituída por pesquisas que usam sequências de atividades com generalização de padrões como foco principal. Frisamos que essa categoria se alinha ao intuito dessa pesquisa. Portanto, daremos a ela um tratamento mais aprofundado.

O critério previamente defendido para a subcategoria GAP é a presença de atividade que contenha uma sequência numérica ou geométrica. A tarefa inicial possui o objetivo de analisar os dados e, preliminarmente, encontrar as primeiras abstrações diante das representações. Tal tarefa é chamada, em sua pesquisa, de generalização próxima, para então chegar em outros termos da sequência e, desse modo e consecutivamente, visualizar a fórmula do termo genérico (BAQUEIRO, 2016). Do mesmo modo, passo a passo pela observação e pelo entendimento das representações, o sujeito é conduzido a abstrair o conceito (DREYFUS, 1991) de forma a alcançar novos patamares, como a generalização e a síntese. Entra, então, a atuação do professor mediador que, perante tais elementos, pode naturalmente incorporá-los em suas práticas em sala de aula, deixando nítida sua importância para levar os sujeitos a tal nível de entendimento (ROSSINI, 2006).

Por se tratar de informações importantes para essa pesquisa, apresentamos o quadro a seguir com as produções referentes à subcategoria GAP no período de 2003 a 2013:

Figura 7: A Generalização de Padrões é tema principal

Nº	Autor	Ano	Instituição	Nível	Sujeito da Pesquisa	Categoria
1	Nakamura, O.	2003	PUC-SP	EFII	Aluno	GAP
2	Modanez, I.	2003	PUC-SP	EFII	Professor e Aluno	GAP
3	Andrezzo, K.	2005	PUC-SP	EM	Aluno deficiente visual	GAP
4	Almeida, M.	2006	PUC-SP	EFII	Professor	GAP
5	Perez, E. Z.	2006	PUC-SP	EM	Aluno	GAP
6	Carvalho, C.	2008	PUC-SP	EM	Aluno	GAP
7	Santos, J. G.	2008	PUC-SP	FC	Professor	GAP
8	Silva, R. S.	2009	PUC-SP	EFII	Professor	GAP
9	Ferreira, C.	2009	PUC-SP	EM	Aluno	GAP
10	Carvalho, M.	2010	PUC-SP	EM	Professor	GAP
11	Trevisani, F. M.	2012	UNESP-RC	EFII	Aluno	GAP
12	Mineli, J. P.	2012	PUC-SP	EFII	Aluno	GAP
13	Faria, R. W. S	2012	UNESP-RC	EM	Aluno	GAP
14	Conceição, K. E.	2012	UNIBAN-SP	EFII	Aluno deficiente auditivo	GAP
15	Barbosa, T. A.	2013	PUC-SP	EM	Aluno	GAP

Fonte: Baqueiro (2016, p. 132).

Para complementar os dados após 2013, apresenta-se a figura 8, segundo as categorias estabelecidas por Baqueiro (2016):

Figura 8: Complementos da figura 7

Nº	Autor	Ano	Instituição	Nível	Sujeito da Pesquisa	Categoria
1	Carmo, P. F.	2014	PUC-SP	EFII	Aluno	GCA
2	Baqueiro, G. D. S.	2016	PUC-SP	EFII,EM,FC	Documentos	TODAS
3	Américo, L. R.	2016	PUC-SP	EFII	Professor	GCA

Fonte: Elaborado com base em outras pesquisas, mencionadas, mas que não constam especificamente na pesquisa de Baqueiro (2016)

Analisando as informações das tabelas referentes à GAP, pode ser verificado que:

- Entre 2003 a 2013, tem-se 80% das produções realizadas na instituição PUC-SP;
- Em relação ao nível de ensino, aproximadamente 47% das produções tinha por âmbito o Ensino Fundamental II; o mesmo percentual de trabalhos ocorreu no Ensino Médio, enquanto que, aproximadamente, 6% das produções ocorreu no âmbito da formação de professores;
- Em relação aos sujeitos da pesquisa, 10 pesquisas foram feitas com alunos, em um total de 15; o professor surgiu como sujeito em 4 pesquisas; uma investigação tinha professores e alunos como sujeitos. Além destas considerações, duas entre essas pesquisas envolveram alunos com deficiências (auditiva e visual).

No campo teórico, a autora apresenta uma síntese bastante ampla:

> Todas as pesquisas da categoria 1 têm como preocupação o desenvolvimento do pensamento algébrico e, consequentemente, a aprendizagem algébrica. Os temas tratados foram: as visões de álgebra, segundo Usiskin (1995) e Lee (2001); abordagens algébricas, de acordo com Kieran, Berdnarz e Lee (1996); discussões sobre o ensino da álgebra e aspectos caracterizadores do pensamento algébrico, de acordo com Kaput (1999) e Fiorentini et al. (2005); a teoria dos processos de pensamento matemático avançado, de Dreyfus (1991); e elementos conceituais de função. (BAQUEIRO, 2016, p. 188).

Os dados relacionados aos sujeitos de todas as pesquisas apuradas foram provenientes de documentos ou dos próprios sujeitos.

Em relação aos questionamentos deixados no âmbito da pesquisa, pode-se destacar que a autora pode concluir que o tema é concentrado em determinados anos escolares e que há certo desconhecimento do mesmo por parte dos professores. Mais especificamente:

> Encontramos o depoimento de professores que afirmaram não trabalhar com atividades de generalização de padrões por desconhecimento do tema e por sua pouca divulgação. Como fazer para que os resultados das pesquisas acadêmicas cheguem até os professores do ensino básico?
> As pesquisas apresentaram resultados para o 7.º e 9.º ano do ensino fundamental. E nos outros anos? Que tipo de generalização é esperado em cada um deles? (BAQUEIRO, 2016, p. 196).

2. TECNOLOGIA EM MATEMÁTICA

2.1 Tecnologias e matemática: intervenções no fazer e na inteligência

Para Oliveira (2018), o conhecimento matemático, do ponto de vista de suas representações, comunicação e formas de construção sempre esteve relacionado com as tecnologias típicas do tempo em que era discutido e/ou produzido. Este entendimento corrobora as asserções de D´Ambrosio (2003, p. 2), de acordo com o qual "a geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível". Importante destacar que estes autores não consideram tão somente as tecnologias digitais como estritamente associadas ao conhecimento matemático, mas indicam que esta relação ocorre desde tempos imemoriais, quer no uso de instrumentos rudimentares desde a pedra lascada, passando por artefatos destinados a apoiar atividades como medições e navegações na idade média, até os mais recentes e inovadores avanços em computação digital.

Quando se fala de tecnologias em processos educacionais, quase sempre as ideias se voltam para computadores e dispositivos contemporâneos sofisticados. Porém, o formato digital não é o único pelo qual as mídias estão presentes neste contexto: a escola e outros ambientes em que se ensina e aprende sempre foram marcados pela presença de tecnologias, considerando que meios hoje vistos como "tradicionais" também podem ser assim classificados. Desta forma, compasso, lápis, régua e papel são instrumentos de natureza tecnológica e que habilitam as pessoas a certos tipos de realizações e formas de materializar as representações matemáticas, por exemplo. De fato, sem o uso de tecnologias, os objetos matemáticos praticamente não poderiam surgir nos cenários escolares, uma vez que existem primordialmente no campo das ideias, precisando, de tal modo, das representações para atividades ligadas ao raciocínio e à construção do conhecimento.

Para Lévy (1993), os diferentes momentos evolutivos da sociedade, e a ligação dos mesmos com os processos de construção de saberes e conhecimentos, foram marcados por três distintos polos, reconhecidos como elementos das chamadas *tecnologias da inteligência*: a oralidade, a escrita e a informática. Nas sociedades orais, segundo Oliveira (2018), inteligência e memória se confundiam, pois não havia meios por assim dizer físicos para registrar eventuais estudos e avanços de caráter científico/cultural. A escrita e sua popularização estabeleceram outras relações, inclusive "entre as instâncias mnemônica e cognitiva" (OLIVEIRA, 2018). Neste sentido, aduz Lévy:

> (...) a memória separa-se do sujeito ou da comunidade tomada como um todo. O saber está lá, disponível, estocado, consultável, comparável. Esse tipo de memória objetiva, morta, impessoal, favorece uma preocupação (...) [com] uma verdade independente dos sujeitos que a comunicam. A objetivação da memória separa o conhecimento da identidade pessoal ou coletiva (1993, p. 95 apud OLIVEIRA, 2018).

Neste sentido, a informática representa o último dos polos mencionados pelo autor francês. Aos aspectos de registro e armazenamento já objetivados pela escrita, a informática junta a velocidade e as noções distintas de tempo e espaço para os processos de construção do conhecimento e para as interações em geral. Para Oliveira e Lima (2018, p. 392), a tecnologia digital permitiria "aglutinar as outras formas de comunicação e informação sob outra lógica, que inclui velocidade ampliada, temporalidade distinta e outras funções para elementos como a inteligência e a memória". Os modelos digitais assim constituídos convivem com os modelos anteriores em regime de convergência e redefinição, segundo Oliveira (2018), o que significa que novas aplicações e mídias com arquitetura mais sofisticada não precisam substituir as chamadas "tecnologias antigas", mas podem conviver com elas, em processos que preveem transições, novas aprendizagens dos usuários e o encontro de outras possibilidades.

Assim, para Tikhomirov (1981) as tecnologias, principalmente as de caráter computacional, redefinem o pensamento das pessoas, criando reconfigurações que realmente mudam o modo pelo qual as pessoas pensam e resolvem problemas. Esta ideia permitiu que autores como Borba e Villarreal (2005) propusessem que o conhecimento matemático seria produzido por coletivos formados por seres-humanos-com-mídias, sem que se possa vê-los de forma separada. Concordando com estes autores, Oliveira (2018) explica que, ao redefinir o pensamento de alunos e professores, o uso das tecnologias permite entrever possibilidades antes ignoradas, considerando elementos como visualização, experimentação e dinamismo, em conexão com estratégias didáticas adequadas e no âmbito do estatuto do conhecimento formal do conteúdo – matemático, neste caso. É neste contexto que Oliveira, Gonçalves e Marquetti (2015, p. 475) indicam que "(...) as mídias não são apenas assistentes dos humanos ao se fazer Matemática, pois elas mudam a natureza do que é feito, sugerindo, assim, que diferentes coletivos humanos com mídias produzem diferentes formas de acessar o conhecimento matemático".

No cenário desta investigação, assume-se como instrumentos preponderantes aqueles que permitam o movimento de *pessoas-com-tecnologias-digitais* e, mais especificamente, de *pessoas-com-GeoGebra*. Desta maneira, são consideradas de forma mais intensiva as experimentações em ambientes dinâmicos, apoiados na visualização das intervenções, ou seja, na avaliação provisória dos resultados, o que permite uma correção de rumos no apoio às conjecturas, ainda que as convergências com as chamadas "tecnologias não digitais" estejam presentes de forma interveniente. Aqui, então, um ponto a se considerar é a necessidade de que eventuais sujeitos envolvidos desenvolvam algum tipo de “familiaridade” com o aparato tecnológico previsto, principalmente em relação às interfaces, isto é, a camada das aplicações, programas, softwares e etc., que permite a interação entre os dispositivos digitais e o pensamento. Esta familiaridade não pode ser encarada como algo ligeiro, apressado, superficial, mas de forma que se desenvolva uma *fluência* que permita, como se referiam Papert e Resnick (1995), a produção de resultados importantes. Na interpretação da posição destes autores, Oliveira (2018) assevera:

> Defendida por Papert e Resnick (1995), a proposição do desenvolvimento de fluência digital consiste em um avanço em relação à ideia de que é necessário saber como empregar determinada ferramenta computacional – para os autores, então, mais do que simplesmente usar, é preciso desenvolver a possibilidade de implementar construções significativas a partir da utilização de dispositivos e interfaces digitais. Este ponto de vista, apoiado no construcionismo, parte do princípio de que o processo de aprendizagem ocorre de forma mais adequada quando a pessoa constrói elementos relacionados àquilo que pretende conhecer e em que está interessado, de forma real e concreta, de modo que este constructo possa, então, ser objeto de análise.

Neste sentido é que o autor supramencionado desenvolve um constructo teórico baseado na *fluência no uso de tecnologias em processos educacionais*. As etapas relacionadas a esta ideia podem ser vistas na figura 9:

Figura 9 – Ciclo da fluência no uso de tecnologias em processos educacionais

Fonte: OLIVEIRA, 2018

Na concepção de Oliveira (2018), a ideia do ciclo pode ser aplicada tanto a cenários de ensino quanto de aprendizagem. Para o autor, os momentos envolvidos não são lineares, nem precisam ocorrer em uma ordem determinada. No entanto, geralmente começam com a *exploração e apropriação da lógica das interfaces*. Em regra, o ciclo é revisitado inúmeras vezes, tanto em um mesmo processo de ensino/aprendizagem, quanto em processos diversos. Sinteticamente, em relação ao significado de cada um dos elementos expostos na figura XX, pode-se dizer:

- *Exploração e apropriação da lógica das interfaces*: neste ponto, o aprendiz precisa considerar o *potencial interativo das interfaces*: as ferramentas e dispositivos disponíveis para que atue em relação a uma representação de um objeto matemático. É por isso que se deve considerar que diferentes programas computacionais, por exemplo, implicam em distintas possibilidades de uso e abordagens em relação a uma atividade. Para um aluno, desenvolver certa *expertise* na manipulação destes elementos é essencial, já que lógicas diversas predominam em mídias e tecnologias que podem ser escolhidas no âmbito das estratégias didáticas (ou de autoaprendizagem) possíveis. Outra questão a considerar, segundo o autor, envolve os *saberes necessários e a complexidade inerente* às representações e aos saberes matemáticos em processo de desenvolvimento, o que implica em desenvolver articulações entre o conhecimento matemático necessário para a resolução de problemas e as formas pelas quais as tecnologias podem permitir as necessárias reorganizações do pensamento. Resumindo, este momento do processo permitiria escolher a tecnologia adequada para o que se quer ensinar ou aprender e dominar seus recursos, sem esquecer de que o conhecimento matemático é o elemento-chave, sem o qual o recurso tecnológico em si pouco valeria;
- *Pensar com tecnologias*: com base nos três principais componentes das tecnologias informáticas, consideradas como tecnologias da inteligência – experimentação, visualização e dinamismo –, pensar com tecnologias significa, segundo Oliveira (2018), a efetivação dos coletivos formados por seres-humanos-com-mídias, conforme propostos por Borba e Villarreal (2005). Isto quer dizer que passa a valer um condicionamento ligado às possibilidades agregadas quando se aprende a usar certa mídias, principalmente, no caso, as digitais, no sentido proposto por Lévy (1993), que assevera que a transformação efetuada por este aprendizado altera as relações das pessoas e dos modos como lidam com a construção de soluções para

problemas que envolvam saberes em geral, pois não é mais possível ignorar os progressos feitos a partir dos novos conhecimentos adquiridos;

- *Elaborar e desenvolver trajetórias investigativas*: segundo Oliveira (2018), este seria um movimento destinado à "elaboração de conjecturas em um espaço de experimentação, as quais são passíveis de teste e reconfigurações". Da mesma forma, o autor assevera que "as discussões assim encaminhadas podem, também, ocorrer em comunidades de pessoas-com-tecnologias que desenvolveram fluências específicas. Desta forma, é possível constituir fluxos autônomos de aprendizagem e propostas desvinculadas da mera transmissão, quanto ao ensino".
- *Elaborar estratégias didáticas e/ou de autoaprendizagem*: as estratégias mencionadas pelo autor devem permitir a integração entre os conhecimentos considerados no processo educacional, levando em conta os recursos tecnológicos "como parte indissociável de uma rede de interações que inclui o conhecimento matemático e os aportes relativos à didática e/ou às trajetórias autônomas de aprendizagem" (OLIVEIRA, 2018). Todos os momentos do processo passam a ter influência desta proposta, inclusive "as atividades iniciais de planejamento e elaboração de programas de ensino". O autor destaca, também, que as estratégias mencionadas incluem planejamentos relativos às possibilidades de "interações entre estudantes, professores e o conhecimento, por meio da resolução de problemas" e que preveem a seleção de materiais a serem empregados nos processos educacionais, bem como "a gestão dos progressos da aprendizagem e das relações institucionais que envolvem as pessoas".

Neste contexto, e no âmbito deste trabalho, o que se espera é que as tecnologias (digitais, no caso) e as estratégias didáticas estejam alinhadas para evitar situações em que o aluno é mero repetidor de tarefas, um simples repetidor de sequência de acionamento da mídia de acordo com comandos de um roteiro, sem realmente compreender o objeto ou tema matemático a aprender.

Neste trabalho, a opção foi feita pelo uso do software GeoGebra, dadas as características típicas deste aplicativo, que permite intervenções usando o mouse em representações de objetos matemáticos, bem como o uso de comandos e entradas numéricas, meios estes disponibilizados por suas variadas formas de interação. Trata-se de um software de distribuição livre para fins acadêmicos, criado por Markus Hohenwarter por ocasião de sua tese de doutoramento. As representações dos objetos matemáticos podem ser contempladas em diversas formas de visualização e intervenção neste programa computacional, o que inclui janelas de álgebra, de visualização (usada, entre outras finalidades, para a manipulação direta de representações geométricas dos objetos matemáticos) e planilhas, se consideradas apenas as formas de intervenção existentes desde as primeiras edições do aplicativo. Nas últimas versões, duas importantes funcionalidades devem ser destacadas: a adição da janela de visualização 3D, utilizada para o trabalho com representações de objetos matemáticos tridimensionais, e a janela CAS (*Computer Algebra System*), que serve para a computação simbólica e que permite intervir em resoluções de problemas envolvendo "cálculos aritméticos, simplificações de expressões algébricas, substituições de símbolos em expressões, resoluções de equações e sistemas de equações lineares e não lineares, cálculos matriciais, cálculos de derivadas e integrais, resoluções de equações diferenciais ordinárias, etc." (BORTOLOSSI, 2016, p. 438). De tal modo, estas características, principalmente ligadas à manipulação de objetos usando a janela de visualização clássica (bidimensional), a janela algébrica e a planilha, foram essenciais para a escolha deste software como componente tecnológico relacionado à pesquisa ora apresentada.

3. ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Conforme se indicou anteriormente, a pesquisa aqui descrita está organizada por meio da construção de experimentos didáticos, cujo design segue os princípios da engenharia didática (ARTIGUE, 2014). Os referidos experimentos estão objetivados por meio de um rol de problemas, envolvendo elementos relativos à generalização de padrões, e preveem o uso de tecnologias digitais em grande parte dos processos de resolução.

De forma geral, a proposta tem como objetivo proporcionar aos alunos de nono ano do Ensino Fundamental de uma escola de São Paulo, sujeitos da pesquisa, instrumentos que venham possibilitar a construção autônoma do conhecimento sobre o tema matemático em foco nesta investigação. Procura-se, então, por meio de múltiplas representações, a ampliação da compreensão sobre generalização de padrões, à medida que se procura propor atividades que incentivem percepção de padrões, regras e métodos gerais em uma sequência, bem como identificar as relações de correspondência e dependência dos elementos que a constituem. Desta forma, a seguir, serão descritos os alunos participantes da investigação e o ambiente da pesquisa. Depois, serão apresentados os instrumentos já mencionados com a respectiva análise *a priori*. Tal análise será conduzida de modo que

> [...] o pesquisador [possa] elaborar e analisar uma sequência de situações-problemas, para que o aluno possa desenvolver certas competências e habilidades, como ler interpretar e utilizar diferentes representações matemáticas e construir conhecimento e saberes de maneira construtiva e significativa. As situações-problemas devem conduzir o aluno a agir, se expressar, refletir e evoluir de maneira autônoma. [...] Por análise a priori das situações-problemas, entende-se por uma análise matemática e uma análise didática do objeto em estudo. Além disso, este é o momento de verificar as variáveis didáticas referentes ao assunto abordado, analisando, assim, a forma pela qual essas escolhas permitem controlar os comportamentos dos alunos, analisando de maneira prévia as possíveis respostas para as atividades de construção nos diversos instrumentos disponíveis (FERNANDES, 2010, p. 47).

Mais adiante, as sessões nas quais os problemas foram apresentados e trabalhados com os sujeitos serão descritas, em movimento conjunto com a análise *a priori* e com algumas considerações que emergiram deste movimento.

3.1 Descrição dos sujeitos

Para a pesquisa de campo, no que diz respeito ao recolhimento de subsídios que permitiriam tratar dos objetivos e da questão de investigação, foi selecionado um grupo formado por oito alunos do nono ano do ensino fundamental II de uma escola particular da zona norte da cidade de São Paulo, no período matutino, que possuíam as seguintes características em comum:

- Supostamente, eram conhecedores dos conteúdos prévios importantes para a realização das atividades propostas nessa pesquisa, uma vez que já haviam tido contato com os mesmos no âmbito das aulas regulares;
- Apresentavam interesse em aprender matemática – ou seja, eram alunos que, ao aderir voluntariamente à participação na pesquisa, indicavam querer aprimorar ou desenvolver seus conhecimentos;
- Possuíam noções quanto à manipulação do software GeoGebra, pois estiveram envolvidos em atividades com o uso do mesmo em anos anteriores.

Em termos comportamentais, estes alunos, componentes de duas turmas distintas, apresentavam características que, de certa forma, podem ser consideradas típicas, marcadas, principalmente, por uma certa agitação no modo de proceder cotidiano, ainda que isto não implicasse em qualquer desrespeito em relação aos pares ou ao professor, autor desta pesquisa. Geralmente, o imediatismo e uma certa falta de paciência apareciam durante a resolução das atividades matemáticas: aparentemente, tais alunos estão constantemente procurando soluções rápidas, como aquelas encontradas em pesquisas na Internet. Diante deste contexto, parece até normal que os jovens procurassem apoio imediato do pesquisador em relação às respostas que deveriam fornecer. No entanto, em relação a tais indagações, em quaisquer situações, é fundamental que o docente leve o sujeito à reflexão. Dessa forma, uma pergunta, no lugar de uma resposta pronta, deve priorizar orientações e devoluções, de modo que os sujeitos percebam suas responsabilidades como gestores do próprio conhecimento e saibam que a construção esperada deve provir deles mesmos. A este respeito, Almouloud (2014, p. 175) assevera: “o papel do professor é o de mediador e orientador; suas intervenções devem ser feitas de maneira a não prejudicar a participação do aluno no processo de aprendizagem”. De certo modo, o que se pretendeu foi proporcionar um ambiente favorável à concentração e às reflexões matemáticas, importante na construção do conhecimento, sem prejuízo aos debates, trocas, interações e eventuais intercâmbios de informações necessárias entre eles.

Finalmente, para preservar o anonimato dos participantes da pesquisa, tomou-se o cuidado de identificá-los apenas por letras maiúsculas (A, B, C, D, E, F, G e H).

3.2 Descrição do ambiente

O experimento foi realizado em um laboratório de informática instalado em uma área separada das demais salas de aula, no terceiro andar do edifício no qual se localiza a escola – isto permitiu a redução dos ruídos externos. Entretanto, havia a movimentação de automóveis de uma das principais avenidas do bairro, na qual o colégio foi construído. Nesse sentido, achou-se conveniente fazer a medição dos níveis de ruído. A medição foi realizada na região central do laboratório e registrou uma faixa de 40 a 50 decibéis. Em termos comparativos, 40 dB correspondem ao ambiente de uma biblioteca e 50 dB ao de um escritório silencioso. Assim, em termos de tranquilidade para a realização das atividades, o ambiente se mostrou bastante adequado.

No tocante à infraestrutura computacional, os equipamentos existentes no local atendiam plenamente aos requisitos mínimos necessários à experimentação. Nesta, os principais componentes verificados foram a memória e a capacidade de processamento, principalmente para a execução de programas que envolvessem grande demanda de vídeo e som, pois cada equipamento precisaria processar dois softwares, além da estrutura típica do sistema operacional, quais sejam o GeoGebra, para a execução do experimento em si, e o OBS Studio, para gravar as manipulações realizadas pelos sujeitos. Essa etapa foi acompanhada pelo técnico de informática responsável pelo laboratório. Com os equipamentos em ordem, os softwares instalados e verificados, o ambiente não trouxe qualquer empecilho ao trabalho com as atividades. É relevante comentar que todos os computadores utilizados na pesquisa possuíam a mesma configuração de hardware.

O experimento foi realizado fora do horário de aula, no período da tarde, com um intervalo de uma hora após o término do período regular dos sujeitos. Como forma de organizar as interações, ocorreram três encontros, sendo que em cada um deles se desenvolveu uma atividade distinta. A participação dos alunos foi autorizada expressamente pelos pais ou responsáveis, por meio da aposição de assinatura em um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). A direção da escola também foi cientificada e autorizou a realização dos procedimentos investigativos.

Para a coleta de dados, o trabalho dos estudantes ao longo das atividades no ambiente digital foi registrado por meio do software OBS Studio, que grava as manipulações objetivadas na tela do dispositivo computacional. Adicionalmente, foram feitas e registradas algumas observações por meio da escrita, de modo a destacar fatos que foram considerados importantes e que poderiam ser recuperados nas análises.

As atividades forma realizadas por duplas, constituídas de forma aleatória pelo pesquisador, de modo que se pudesse, de alguma forma, incentivar a ocorrência de trocas de ideias e discussões acerca das conjecturas elaboradas; esta foi, sobretudo, uma maneira de implementar e gerir o movimento que se esperava que ocorresse em torno das dialéticas de ordem adidática (BROUSSEAU, 1986).

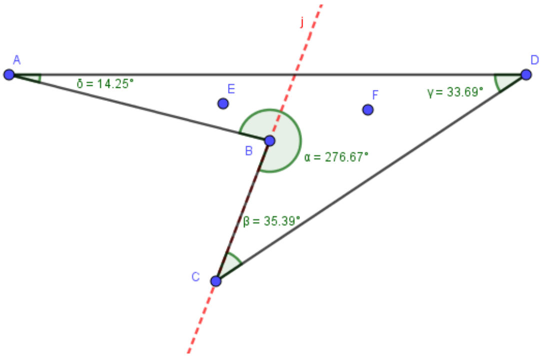
3.3 Descrição dos instrumentos

As sequências empregadas nesta pesquisa foram compostas a partir de instrumentos escritos, que pediam respostas que, por sua vez, deveriam ser anotadas pelos sujeitos. Tais elementos previam que as respostas aos problemas ali elencados surgissem após o uso do software GeoGebra, que representava a tecnologia digital que poderia ser usada pelos estudantes para apoiar seu trabalho. Eventualmente, caso quisessem, os sujeitos poderiam empregar outros aplicativos existentes nos computadores do laboratório de informática, como softwares de planilhas eletrônicas (Microsoft Excel, por exemplo), e calculadoras. Além disso, cada dupla deveria gravar em arquivos próprios suas propostas para a resolução dos problemas existentes nas atividades com os quais tiveram contato. Não estava previsto o auxílio de outras fontes de pesquisa para a resolução das atividades, em função da proposta deste estudo, que previa apenas interações entre os pares e com o pesquisador, de modo que os alunos viessem a avançar autonomamente na construção ou ressignificação do conhecimento em jogo. Desta forma, o acesso à Internet foi interrompido no laboratório, e os estudantes não puderam usar seus celulares.

3.3.1 Descrição da Atividade 01

A proposta desta atividade envolve alguns conhecimentos básicos de geometria euclidiana plana, principalmente no que se refere à soma dos ângulos internos de polígonos convexos. Empregaram-se polígonos convexos devido à dificuldade de construir uma atividade com a mídia que abarcasse conjuntamente polígonos não convexos. Portanto, foi uma escolha didática que não influenciou negativamente no objetivo almejado. Para melhor entendimento, um *polígono não* é convexo se existir pelo menos um par de pontos que está em semiplanos opostos relativamente a uma reta que contém um lado do polígono, como se pode observar o ponto E e o ponto F, que estão em planos opostos e internos ao polígono não convexo.

Figura 10 – Exemplo de polígono não convexo



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Com a finalidade de garantir certa generalidade das explicações dos fatos observados e contribuições do uso da tecnologia digital, citam-se as variáveis didáticas potenciais que ocorrem durante a experimentação envolvidas na atividade 1. Entre elas:

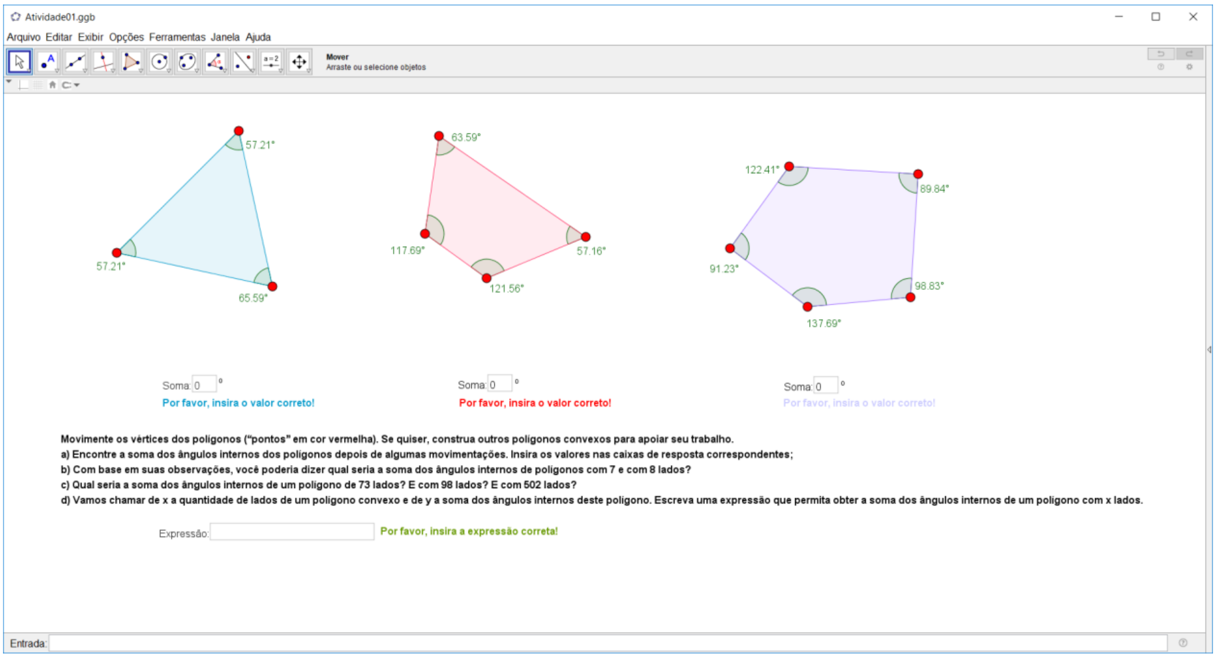
- Dificuldade de generalizar os padrões, porque se entendem que não se trata de um processo que acontece naturalmente e, por esse motivo, pode ser um obstáculo que poderá interferir no processo de construção do conhecimento do sujeito (variável potencial dependente do conteúdo matemático/dimensão cognitiva);
- O resgaste de seus conhecimentos prévios sobre polígono convexo e seus elementos como: diagonal, lado e ângulo interno e operar com adição, subtração, divisão e multiplicação de ângulo incluindo suas subdivisões, minutos e segundos, para que então possa procurar uma relação consistente entre a quantidade de lados de um polígono convexo com a soma dos ângulos internos desse polígono (variável potencial dependente do conteúdo matemático/dimensão epistemológica);
- Fluência com a mídia que pode interferir no entendimento e no tempo no intervalo cognitivo. Isto, inclusive, pode contribuir para reduzir a dificuldade no processo de generalização e mesmo na síntese (variável potencial de ordem geral/dimensão didática);
- Em relação aos fatores externos emocionais: distração, ansiedade e insegurança (variável potencial de ordem geral/dimensão cognitiva);
- O funcionamento do software e do hardware apesar da verificação preliminar anteriormente citada, pois o software pode deixar de funcionar em decorrência de um defeito no hardware ou de uma interrupção do fornecimento de energia elétrica (variável potencial de ordem geral);

- As atividades foram realizadas por duplas, constituídas de forma aleatória pelo pesquisador, de modo que se pudesse incentivar a ocorrência de trocas de ideias e discussões acerca das conjecturas elaboradas; esta foi, sobretudo, uma maneira de implementar e gerir o movimento que se esperava que ocorresse em torno das dialéticas de ordem adidática (BROUSSEAU, 1986).

Pretendia-se, aqui, que o sujeito manipulasse uma aplicação no GeoGebra, contendo um triângulo, um quadrilátero e um pentalátero, de modo a apoiar suas conjecturas acerca dos questionamentos provenientes dos problemas que cada um deles recebeu, em folhas de papel. Em termos da conexão desta atividade com os objetivos desta pesquisa, pretendia-se que os sujeitos fossem levados a refletir a respeito dos padrões existentes em relação à soma dos ângulos internos dos objetos matemáticos mencionados, identificando e compreendendo as variáveis envolvidas neste processo e elaborando conjecturas acerca das generalizações necessárias para chegar às respostas corretas. Esperava-se, igualmente, que a existência da tecnologia digital, sobre a qual os estudantes já haviam desenvolvido fluência que lhes permitia, ao menos, *pensar com tecnologias* (OLIVEIRA, 2018), incentivasse os alunos a fazer testes e validações pontuais, para, posteriormente, perceber de modo mais amplo os padrões ali presentes, bem como as generalizações necessárias. Em termos teóricos, estes procedimentos tinham por intenção envolver os sujeitos no processo de construção do conhecimento, de modo que os mesmos percorressem, no âmbito da tarefa, “um percurso investigativo, não direcionado pelo pesquisador, e mediado pelas tecnologias” (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 823). Justamente no contexto das cogitações que os alunos organizassem, esperava-se que a constituição de coletivos envolvendo pessoas-com-tecnologias apoiasse as necessárias reorganizações do pensamento de modo que surgissem respostas e proposições amparadas nesta estrutura. Além disso, almejava-se, igualmente, que o emprego da tecnologia digital pudesse também auxiliar os aprendizes a refutar generalizações incorretas, na medida em que possam compreender as relações matemáticas envolvidas e efetuar sucessivas experimentações e visualizações em um ambiente dinâmico.

A aplicação desenvolvida no GeoGebra para apoiar a primeira atividade desta investigação pode ser visto na Figura 11, em seguida.

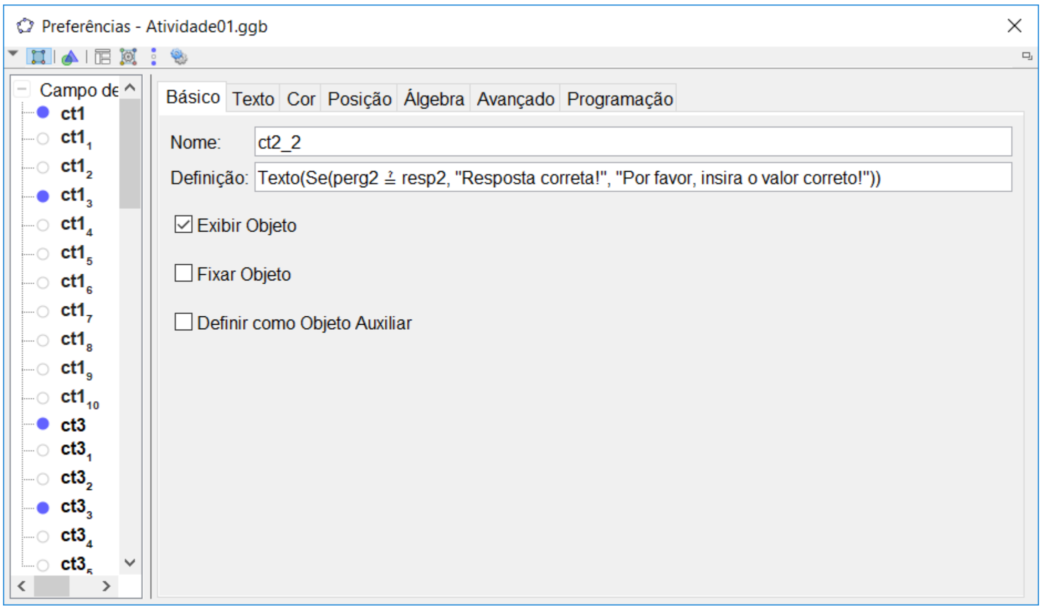
Figura 11 – Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 01



Fonte: desenvolvida pelo orientador da pesquisa (disponível em https://www.geogebra.org/m/ZZDvjFQD)

Em termos operacionais, os sujeitos poderiam manipular as construções relativas aos três polígonos por meio de seus vértices, modificando as dimensões de cada uma delas, ou seja, promovendo alterações em relação aos ângulos internos, assinalados em suas posições, em outros componentes constitutivos, como área e perímetro, não assinalados. Evidentemente, as modificações realizadas promovem a possibilidade de visualizar diferentes valores para as medidas dos ângulos, bem como realizar diversas experimentações em relação a eventuais conjecturas que os alunos viessem a elaborar. Abaixo de cada figura, caixas de entrada solicitavam que os estudantes digitassem os valores relativos à soma das medidas dos ângulos internos de cada um dos polígonos. O software foi programado para indicar, por meio de mensagens escritas, se a proposição dos usuários era correta ou não (figura 12).

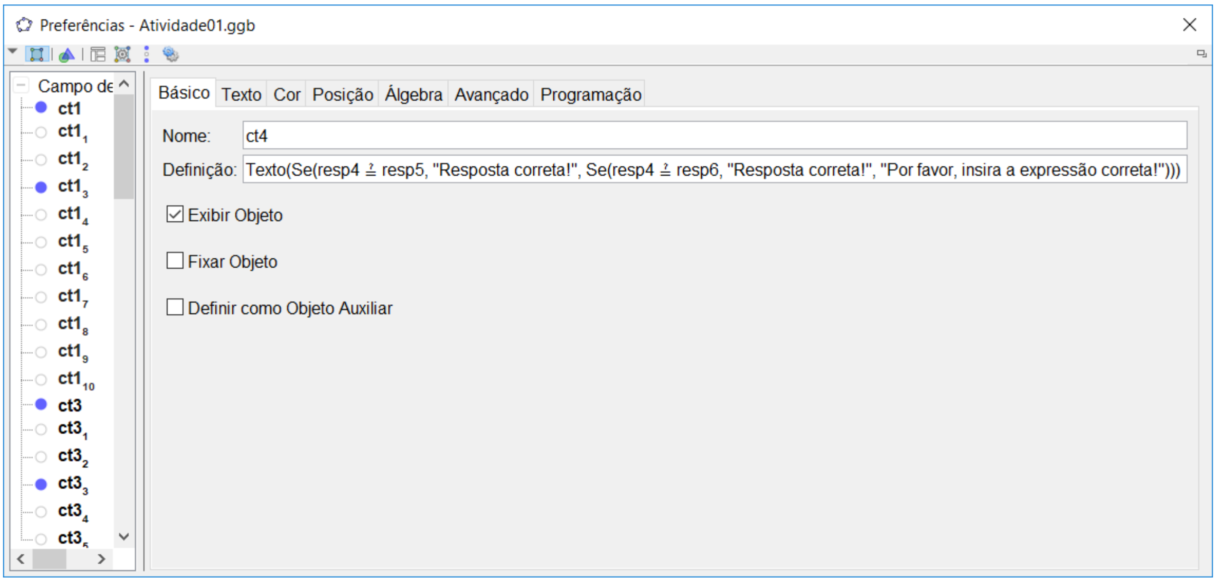
Figura 12 – Funções programáveis no GeoGebra para verificar respostas da Atividade 01 (somas)



Fonte: desenvolvida pelo orientador da pesquisa

Da mesma forma, havia outra caixa de entrada, localizada abaixo das instruções da atividade (explicadas mais adiante), cujo objetivo era permitir que o estudante escrevesse uma expressão que correspondesse à generalização do padrão existente em relação à soma das medidas dos ângulos internos de polígonos convexos, capaz, também, de indicar acerto ou erro por meio de uma mensagem de texto (figura 13).

Figura 13 – Funções programáveis no GeoGebra para verificar respostas da Atividade 01 (expressão)



Fonte: desenvolvida pelo orientador da pesquisa

Em seguida, são descritos os problemas e instruções relativos à Atividade 01, constantes da sequência entregue aos alunos, participantes desta investigação:

- *Localize no computador que você está usando o arquivo chamado "Atividade01". Clique sobre o nome do arquivo duas vezes para abri-lo.*

  O arquivo do GeoGebra, relativo à figura 11, estava disponível nos computadores utilizados para esta atividade. Assim, cabia apenas aos estudantes abrir o respectivo arquivo e iniciar a tarefa. Evidentemente, neste momento, a organização das duplas para o trabalho já tinha sido feita. Apesar da aplicação já conter alguma previsão de uso, devido ao fato de já trazer os polígonos e as caixas de respostas para a interação, não estava descartado o uso de outros arquivos "em branco" do GeoGebra pelos sujeitos, de modo que eles pudessem construir, por exemplo, outros polígonos e apoiar de maneira diversa da prevista inicialmente as próprias conjecturas.

- ***(5 minutos)** Note que são exibidos três polígonos convexos na tela do GeoGebra. Caso tenha dúvidas sobre o que são polígonos convexos, converse com seu colega de atividade. Ao final, o professor/pesquisador solicitará que cada dupla fale um pouco sobre suas conclusões a este respeito, que devem ser registradas no espaço abaixo.*

  Aqui, os estudantes deveriam começar a mobilizar algum conhecimento anteriormente construído acerca da ideia e do significado da expressão "polígonos convexos", em termos matemáticos, ou, se esse não fosse o caso, abrir uma discussão sobre este termo com base nas experimentações possíveis com a interface digital. Não seria descabida uma intervenção orientadora do pesquisador, caso esta ideia obstaculizasse de forma insuperável o desenvolvimento de propostas em direção de alguma solução. De fato, em termos matemáticos, a definição de um polígono convexo, para Schorn e Fischer (1994, p. 9, tradução nossa), começa com a definição de um conjunto convexo, ou seja, "um conjunto de pontos *S* é convexo se, para qualquer segmento construído entre dois pontos deste conjunto *S*, todos os pontos do mencionado segmento também pertencem a este conjunto". Esta definição permite afirmar, então, que um polígono convexo é um polígono tal que todo e qualquer segmento componente, traçado a partir de dois pontos, não se sobrepõe concorrentemente a outro segmento do mesmo polígono – em termos mais simples, é possível afirmar que os segmentos mencionados não se "cruzam", ou seja, restringem-se mutuamente a partes do plano nas quais não há qualquer ponto de outro segmento do mesmo polígono.

  Além disso, esperava-se que os alunos discutissem entre si e buscassem recordar das definições que já tivessem ouvido sobre estes polígonos. Poderiam surgir proposições equivocadas sobre o significado procurado ou o recurso ao pesquisador, que deveria, neste caso, devolver o questionamento, encaminhando, assim, a descoberta ou ressignificação da ideia almejada.

- ***(10 minutos)*** *Observe que cada um dos polígonos possui vértices na cor vermelha. Estes elementos podem ser manipulados. Movimente os vértices e observe o que ocorre com os polígonos e seus ângulos. Registre suas conclusões no espaço abaixo.*
- Para as próximas tarefas, você pode construir outros polígonos para apoiar seu trabalho. Use outro arquivo do Geogebra para isto (não feche o arquivo atual, mantenha o novo arquivo e o fornecido pelo pesquisador abertos). Caso não consiga abrir o arquivo novo sem fechar o anterior, peça ajuda ao pesquisador. Quando as respostas adequadas forem inseridas, aparecerão mensagens avisando você sobre isto.

a) Encontre a soma dos ângulos internos dos polígonos depois de algumas movimentações. Insira os valores nas caixas de resposta correspondentes, disponíveis no arquivo do GeoGebra. Registre, a seguir, suas respostas e conclusões.
Triângulo:_______________________
Quadrilátero: ___________________
Pentalátero: ____________________

b) Com base em suas observações, você poderia dizer qual seria a soma dos ângulos internos de polígonos com 7 e com 8 lados? Como chegou às suas conclusões?

c) Qual seria a soma dos ângulos internos de um polígono de 73 lados? E com 98 lados? E com 502 lados? Como chegou às suas conclusões?

d) Vamos chamar de **x** a quantidade de lados de um polígono convexo e de **y** a soma dos ângulos internos deste polígono. Escreva uma expressão que permita obter a soma **y** dos ângulos internos de um polígono com **x** lados. Registre sua expressão no espaço deixado no GeoGebra para esta finalidade. Você pode usar, além das variáveis **x** e **y**, os símbolos + (adição), - (subtração), . (ponto; multiplicação), : (dois pontos; divisão) e = (igualdade), além dos parênteses. Não esqueça de colocar espaços entre que usar. Registre sua resposta e suas conclusões no espaço a seguir.

   - Para finalizar esta atividade, escreva o que achou sobre ela. Fale um pouco, também, sobre o que achou do GeoGebra neste trabalho: como ele ajudou?

3.3.2. Descrição da Atividade 02 e Atividade 03

Conversão de unidade de medida de comprimento é o conhecimento escolhido para as atividades 2 e 3, pelos seguintes motivos:

- Ser empregada em componente de diversas áreas do conhecimento como: matemática, Física, química, geografia, biologia e etc.;
- Permear o ensino da matemática em diferentes níveis;
- Possibilitar trabalhar com o reconhecimento de padrão, generalização e síntese;
- Permitir a interface com a tecnologia de modo que ela possa favorecer o entendimento desse conhecimento de forma dinâmica;
- Observações em sala de aula mostram que os alunos têm dificuldade de compreender esses conhecimentos, decorrentes do nível de abstração que se exige, como o valor da medida com sua dimensão geométrica, ou seja, entender que um valor de medida de comprimento apresentado nas mais diferentes unidades representa o mesmo comprimento e, portanto, a coerência matemática nessas conversões é indispensável.

As atividades 2 e 3 articulam:

- Operações que envolvem números que pertencem ao conjunto dos números reais;
- Operações com números em notação científica;
- Propriedades da potenciação.

Dessa forma, essas atividades mobilizam vários conhecimentos matemáticos que são ensinados aos alunos do nono ano do ensino fundamental.

A atividade 02 e a atividade 03 possuem caráter complementares em relação a suas naturezas e abrem a discussão sobre conversão dos padrões úteis para conversão dos múltiplos do metro para os submúltiplos do metro, bem como no sentido contrário.

Práticas de sala de aula revelam que o conhecimento da conversão de grandeza de medida de comprimento precisa ser revisitado no nono ano porque será exigido como condição prévia para o entendimento de outros conhecimentos tratados dentro da Matemática, tal como em outras disciplinas já mencionadas.

Estratégias didáticas ditas como tradicionais são aquelas que apresentam o conteúdo ao aluno e na sequência procuram reforçar essa aprendizagem por meio de atividades que são repetições de exemplo feitos pelo próprio docente. Nessa situação o aluno perde a oportunidade de participar ativamente da construção do seu próprio conhecimento acerca do objeto matemático. Então o aluno reproduz o que presenciou e não abstrai a base para entender o objeto matemático em jogo. O aluno, diante de uma situação diferente daquela que assistiu, pode não conseguir progressos por falta da construção desse alicerce. No sentido oposto, as atividades 02 e 03 pretendem encaminhar o sujeito a construir seu próprio conhecimento acerca do objeto matemático aqui eleito, de modo autônomo e auxiliado pela tecnologia digital, o GeoGebra, propiciando ao sujeito o desenvolvimento de sua habilidade com a mídia e o desenvolvimento do raciocínio algébrico diante de situações que exigem dele o reconhecimento de padrões, a apropriação desses padrões úteis e, por fim, possa chegar à generalização. Assim sendo, que o sujeito possa representar a totalidade por meio de um ente matemático, a síntese (objetivo geral).

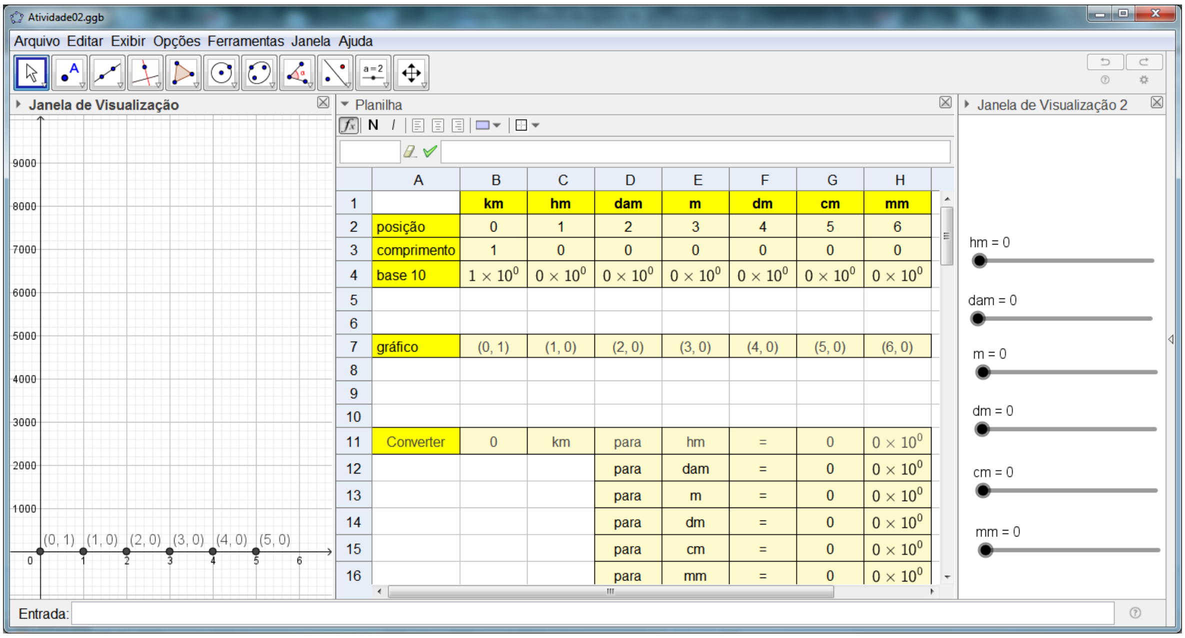
Nesse momento é importante identificar as variáveis didáticas potenciais que serão manipuladas nas fases que se seguem (ARTIGUE, 1988):

- Dificuldade de generalizar os padrões;
- Fluência com a mídia que pode interferir no entendimento e no tempo no intervalo cognitivo;
- Variáveis externas como distração, ansiedade e insegurança;
- O funcionamento do software e do hardware, apesar da verificação preliminar citada;
- Conhecimentos prévios ausentes;
- Falta de comunicação entre os sujeitos da dupla;
- A passividade de um dos integrantes da dupla perante a situação proposta, isto é, a não assunção do papel de sujeito ativo, tal como se espera nesta pesquisa.

Intenciona-se com as atividades 02 e 03 que o sujeito supere inicialmente a etapa de familiarização com a mídia e passe a manipular a aplicação no software no sentido de desvendar a lógica interna da atividade e reflita sobre os padrões presentes nas conversões, percebendo as variáveis relacionadas na situação e consecutivamente pensando como a tecnologia percorre uma trajetória com elaboração de conjecturas e generalizações para solucionar as questões propostas em que sujeito venha excluir padrões não viáveis para a generalização e, dessa maneira, construir seu conhecimento de modo autônomo com experimentações e visualizações que favoreçam a compreensão. Como explica Durval (1995), sobre as representações semióticas citada por Almouloud (2007), "As representações semióticas, não são somente e necessárias para fins de comunicação, mas também essenciais para as atividades cognitivas do pensamento".

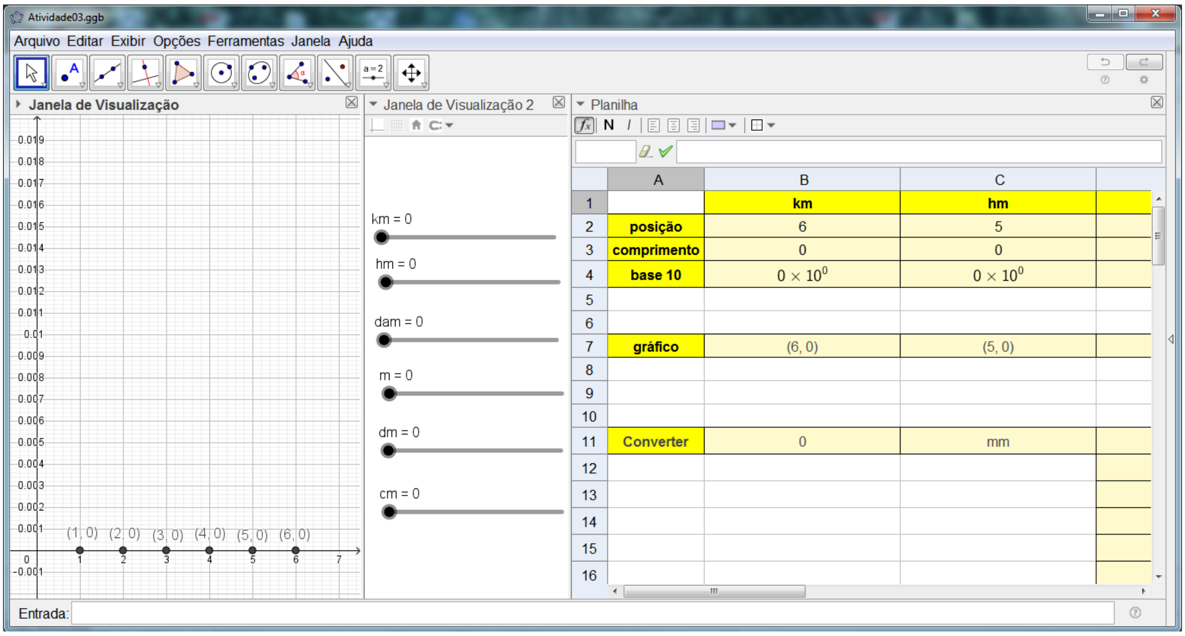
A seguir é apresentado a aplicação para a atividade 02 e para a atividade 03 planejadas no software GeoGebra.

Figura 14 – Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 02



Fonte: Oliveira, G. Pastre; Oliveira, M. Lopes (2017)

Figura 15 – Aplicação construída para apoiar a resolução da Atividade 03



Fonte: Oliveira, G. Pastre; Oliveira, M. Lopes (2017)

Em relação à construção da tabela, os sujeitos controlariam o movimento do campo deslizante para encontrar o valor de medida apropriado para a respectiva conversão, o que levaria a translação vertical da respectiva coordenada no gráfico associado à unidade, ao controle deslizante que está sendo movimentado. Assim, o aplicativo faz ajustes simultâneos conforme a manipulação do sujeito no controle deslizante (janela de visualização 2), no comprimento, na base 10, no par ordenado (planilha) e na respectiva coordenada no gráfico (janela de visualização), pois existe uma relação matemática entre eles e com uma programação idealizada para esse fim, empregada aqui, por entender que esse processo é importante para as atividades cognitivas dos sujeitos. De certa forma, o sujeito poderia se apropriar desse recurso para fazer validações pontuais e consecutivamente reconhecer os padrões e a generalizar. Desse modo, há um campo dentro da planilha que permite o sujeito inserir valores de medidas (célula B11), para obter conversões nas demais unidades de medida de comprimento automaticamente em notação científica conforme função interna do aplicativo que é uma maneira de estender o domínio de validade tratadas nas linhas 2, 3 e 4 da planilha.

Portanto, essa estratégia didática tem objetivos bem definidos e fases que pretende promover contribuições aos sujeitos durante a construção do conhecimento no que diz respeito a superar a dificuldade em generalizar por ser um processo que não ocorre naturalmente, conforme relata Rossini (2006).

As atividades 02 e 03 representam duas trajetórias opostas, porém complementares, na conversão de unidade de medida de comprimento. Ambas juntas representam apenas um conteúdo: a conversão de unidade de medida de comprimento. Esse fato pode representar o obstáculo que os sujeitos encontrariam para chegar a uma expressão algébrica que abarcasse ambas as trajetórias.

Em seguida são descritos os problemas e instruções relativos às Atividades 02 e 03, constantes da sequência entregue aos alunos, participantes desta investigação.

Atividade 02:

- *Nesta atividade vamos trabalhar com unidades de medida de comprimento. Você já conhece o sistema métrico decimal? Vamos pensar um pouco sobre ele. Abra o arquivo denominado* ***Atividade02*** *em seu computador – por enquanto, não use os recursos do GeoGebra (vamos fazer isto dentro de poucos minutos). Observe a tabela existente neste arquivo. Ela contém algumas unidades de medida do sistema métrico decimal. O que você sabe sobre elas? Escreva um pouco sobre isto no espaço abaixo.*

  O arquivo do GeoGebra, relativo à figura 12, estava disponível nos computadores utilizados para esta atividade. Assim, cabia apenas aos estudantes abrir o respectivo arquivo e iniciar a tarefa.

  Foi sugerido observar, ainda sem o uso do GeoGebra, as três representações na tela do computador desenvolvida no software. Logo em seguida, propôs-se descrever as informações sobre as representações apresentadas na mídia, aquelas que conseguiu se apropriar. Tal procedimento é justificado para que o sujeito comece a compreender a lógica interna da situação, resgatar os conhecimentos prévios e o convidar a entrar no jogo (participar da atividade resolvendo em um caráter investigativo).

a) Agora, sim, vamos usar os recursos do GeoGebra! Procure seguir as instruções deste material exatamente como estão – depois, teremos liberdade para explorar à vontade. Existe uma relação entre as unidades de medida da tabela a que nos referimos aqui, sendo que uma delas é tomada por base. Com o uso dos controles deslizantes que estão na Janela de Visualização 2, estabeleça uma relação válida entre as unidades mencionadas. Observe que a mudança nos controles gera mudança nas tabelas. Ajuste os valores como lhe parecer correto. A Janela de Visualização pode ajudá-lo, também, a compreender esta tarefa. Depois de manipular estes controles, registre suas descobertas no espaço seguinte;
b) Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?;
c) Agora, vamos para a tabela propriamente dita. Escolha alguns valores para verificar o que ocorre na conversão dos mesmos, escrevendo estas medidas na célula B11, logo após a palavra “Converter”. Tente valores como 5, 6 ou 7, por exemplo, e valores maiores também, como 67, 89, 150, entre outros. O que você observou sobre as conversões feitas? E as notações que estão sendo usadas?;
d) Escreva uma expressão genérica (uma generalização) para estas conversões. Para isto, tome como base alguma das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. A ideia é escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos das conversões que estamos fazendo.

Aqui o sujeito precisa articular as informações, observar e relacionar os padrões úteis com a generalização e determinar uma expressão algébrica que represente essa totalidade.

Atividade 03:

- *Da mesma forma como na atividade anterior, procure seguir as instruções deste material exatamente como estão. Existe uma relação entre as unidades de medida da tabela a que nos referimos aqui, sendo que uma delas é tomada por base (não é a mesma da atividade anterior). Com o uso dos controles deslizantes que estão na Janela de Visualização 2, estabeleça uma relação válida entre as unidades mencionadas. Observe que a mudança nos controles gera mudança nas tabelas. Ajuste os valores como lhe parecer correto. A*

Janela de Visualização pode ajudá-lo, também, a compreender esta tarefa. Depois de manipular estes controles, registre suas descobertas no espaço seguinte.

O que se comentou na atividade 02 se aplica à atividade 03 para esse item.

- *Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?*

  Inicialmente instiga o sujeito a comparar a atividade 02 com a atividade 03 e entender que as conversões nesta atividade ocorrem diferentemente da atividade 02 porque são realizadas a partir da unidade do milímetro e, consequente a isso, o fator multiplicativo também é diferente. Essa diferença precisa ser observada com cuidado, pois representa um obstáculo a ser superado no momento que precisar determinar uma expressão algébrica que possa servir a ambas as atividades.

c) Agora, vamos para a tabela propriamente dita. Escolha alguns valores para verificar o que ocorre na conversão dos mesmos, escrevendo estas medidas na célula B11, logo após a palavra “Converter”. Tente valores como 5, 6 ou 7, por exemplo, e valores maiores também, como 67, 89, 150, entre outros. O que você observou sobre as conversões feitas? E as notações que estão sendo usadas?;

d) Escreva uma expressão genérica (uma generalização) para estas conversões. Para isto, tome como base alguma das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. A ideia é escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos das conversões que estamos fazendo;

e) Neste ponto, é bastante provável que você já tenha percebido a lógica que permeia as conversões que fizemos nas atividades dois e três. Vamos tentar avançar um pouco mais: proponha uma expressão, com base nas posições das unidades na tabela de medidas, que permita calcular a conversão entre quaisquer duas unidades. Registre no espaço seguinte como chegou às suas conclusões. Você pode usar o GeoGebra ou qualquer outro recurso computacional que desejar;

f) O que você achou das atividades dois e três? E do uso do GeoGebra nestas atividades?

(Grave seu trabalho. Não desligue seu computador!)

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 Análise *a priori* da atividade 01

Conforme mencionam Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) sobre o objetivo da análise *a priori*:

> O objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Dessa forma, em uma análise a priori devemos:
> • Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida;
> • Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
> • Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Assim, as variáveis locais pertinentes para essa atividade, soma dos ângulos internos de um polígono como objeto matemático, são:

• O resgaste de seus conhecimentos prévios (dependente do conteúdo matemático/dimensão epistemológica);

• Dificuldade em generalizar e sintetizar (dependente do conteúdo matemático/dimensão cognitiva);

• Fluência com a mídia (ordem geral/dimensão didática);

• O funcionamento do software e do hardware (ordem geral);

• Comunicação entre os integrantes da dupla (ordem geral/dimensão didática);

• Fatores externos emocionais (ordem geral/ dimensão cognitiva).

As quais serão manipuladas pelo professor pesquisador de forma a posicionar o sujeito em uma situação que ele não perceba as intenções do professor pesquisador, estruturação de um milieu adidática, e venha a interagir para encaminhar o processo de aprendizagem.

A comunicação interna de cada dupla é um fator importante, pois cada sujeito carrega sua experiência individual o que permite visões diferenciadas, abertura de discussões, formulação de conjecturas, redução das dificuldades que possam ocorrer para generalizar e sintetizar. No entendimento desta pesquisa, o compartilhamento feito entre os integrantes pode propiciar a compreensão conjunta dos elementos que compõem essa estratégia didática.

Entre estes elementos estão: mídia, representações geométricas, representação simbólica, linguagem materna entre outros relacionados como o objeto matemático.

Em um âmbito mais amplo, o objetivo é instigar o sujeito a avançar em seu aprendizado de forma autônoma a partir de seus conhecimentos prévios por meio de uma estratégia didática, com o uso de tecnologia digital sobre o tema generalização de padrões, essência nessa pesquisa em relação à organização global da engenharia didática (ARTIGUE, 1988). Sobre essa variável global procura-se entender:

• Quais são as contribuições de usar uma estratégia didática com o tema generalização de padrões? (dimensão didática e cognitiva);

• Que nível de abstração os alunos dos nono ano do ensino fundamental são capazes de alcançar? (dimensão cognitiva);

• Quais são as contribuições da tecnologia digital no aprendizado desse conhecimento? (dimensão didática e cognitiva);

• Como a temática e a tecnologia se complementam? (dimensão didática e cognitiva);

• Trabalhar em dupla pode ser uma condição promissora para os sujeitos construírem esse saber? (dimensão cognitiva).

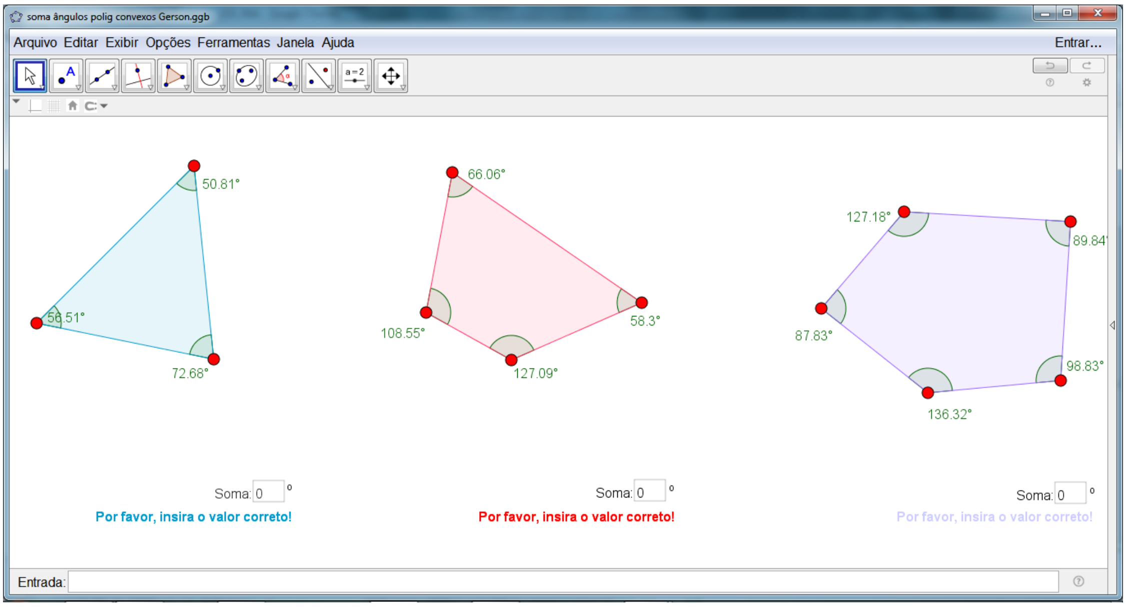
Preliminarmente, tal estratégia didática procurou entender se o sujeito tinha conhecimento dos conteúdos subsunçores, aqueles que são indispensáveis à construção do novo conhecimento, de modo que os alunos empenhem conhecimentos pessoais como ferramentas, e assim vem a servir de subsídio à construção dos novos conhecimentos, que são consecutivamente ancorados e assimilados a essa forma (AUSUBEL, 2003, apud, FERNANDES, 2010, p. 53). Entre esses saberes matemáticos envolvidos estão os conceitos: polígono convexo, ângulo interno, vértice de um polígono – além da fluência na manipulação do software GeoGebra. A atividade resgata o conteúdo geométrico, soma dos ângulos internos, por meio de uma proposta pedagógica que traz uma mídia com uma sequência de três polígonos que são manipuláveis pelo sujeito, ou seja, “Uma situação suscetível de provocar uma aprendizagem será tal que o aluno dispõe de uma estratégia básica para começar a jogar.” (ALMOULOUD, 2014, p. 36). Dessa maneira, por intermédio da manipulação dos vértices desses polígonos disponibilizados na mídia, o sujeito passa a experimentar novas situações, que tangem à dialética da ação, TSD:

> Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do milieu. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar

> seu modelo para criar outro: a situação provoca assim aprendizagem por adaptação (ALMOULOUD, 2014, p. 37).

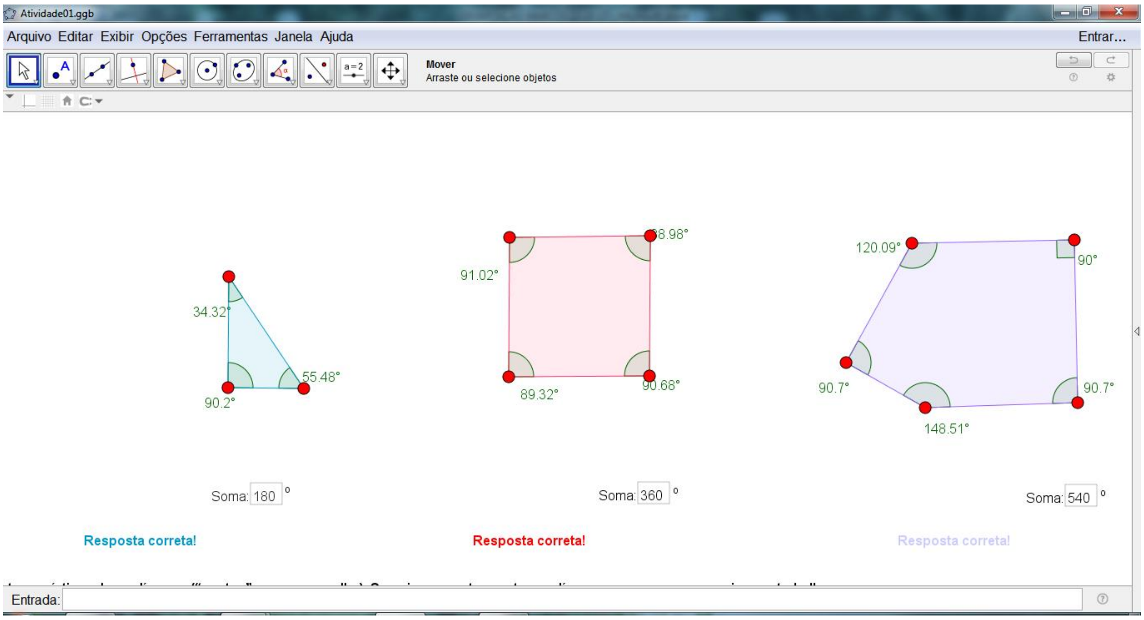
Nesse sentido, foi planejada uma situação de manipulação constituída de intencionalidade para possibilitar a aprendizagem do objeto matemático pelo sujeito, via o reconhecimento de padrões. Pretendia-se estimular o sujeito pela interação e pelo dinamismo propiciados pela atividade construída com o software GeoGebra. As orientações propostas no protocolo foram planejadas de maneira que o sujeito viesse agir, falar, refletir e evoluir por si próprio, o que significa que o sujeito aceitou entrar no jogo. Desse modo, a primeira ação esperada do sujeito é a leitura do protocolo que irá direcioná-lo a iniciar a experimentação em um ambiente midiático. Procura-se, com a manipulação, que o sujeito movimente os vértices dos polígonos, identificado pela cor vermelha e com isso possa perceber as mudanças que ocorrem no polígono quanto à soma de seus ângulos internos. O próximo passo aguardado é que o aluno, através de suas observações, reconheça padrões próximos e, em seguida, comece a validar suas conjecturas locais. A mídia, então, abre um campo, uma caixa de resposta, onde o aluno pode digitar o valor da somado dos ângulos e saber se sua conjectura é valida, pois quando a resposta estiver certa aparecerá a seguinte mensagem "Resposta correta!". Isto pode ser visto nas figuras 16 e 17.

Figura 16: Visualização do arquivo da atividade 01 antes da validação local



Fonte: Oliveira, G. Pastre (2017)

Figura 17: Validação local da atividade 01com suporte do GeoGebra



Fonte: Oliveira, G. Pastre (2017)

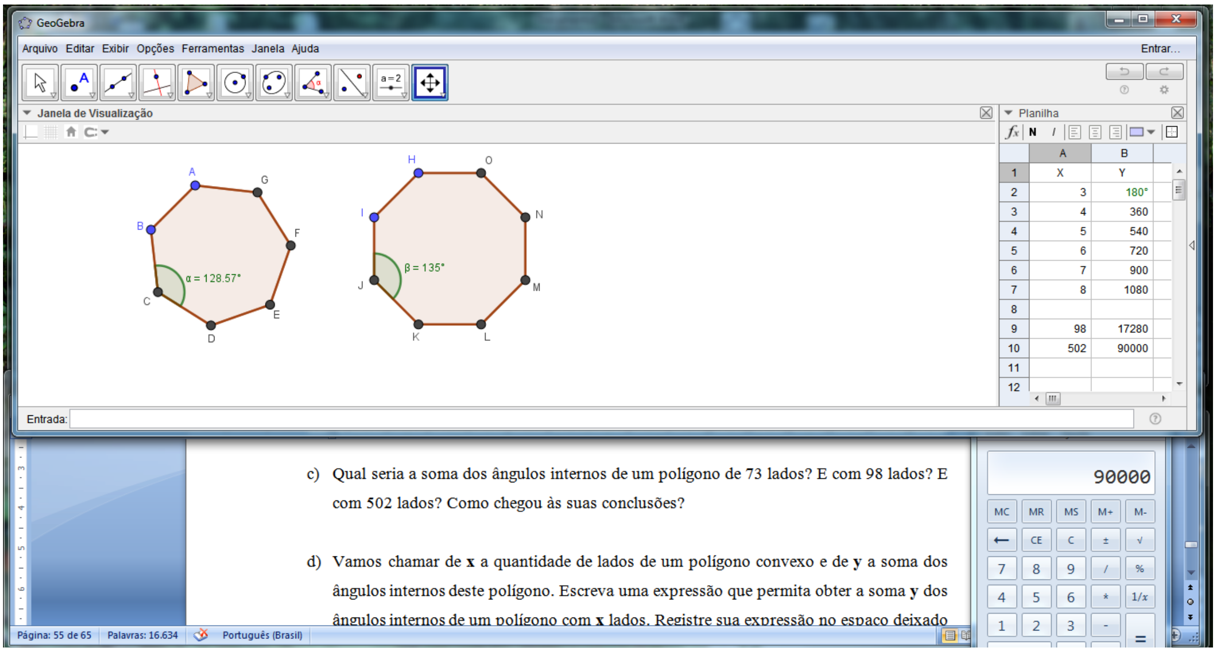
Pretende-se, então, que o sujeito crie conjecturas sobre a relação da soma dos ângulos internos do polígono com a quantidade de lados e perceba que independente da medida dos ângulos internos do polígono convexo a soma de seus ângulos internos será sempre igual a 180 graus. Espera-se que o sujeito durante a experimentação refletisse e tomasse decisões a respeito de cada fase proposta na atividade. De tal modo, portanto, esta fase

> (...) é essencial para o aluno exprimir suas escolhas e decisões por ações sobre o milieu. Nela, as interações estão centralizadas na tomada de decisões, embora possa haver trocas de informações (se os alunos trabalham em grupo, os conhecimentos dos elementos desse grupo fazem parte do milieu de cada um dos alunos, propiciando, portanto, retroações), mesmo que não sejam necessárias à ação. Os alunos dispõem das mesmas informações e as decisões são orientadas pelas retroações do milieu (ALMOULOUD, 2014, p. 38).

Foi disponibilizado um ambiente com condições propícias à apropriação do conteúdo. A expectativa é que o sujeito crie conjecturas por meio de observações, testes e validações pontuais e que, em dupla, determinasse a soma dos ângulos internos para polígonos com 7 e com 8 lados, padrões próximos. Na sequência determinasse padrões para estender o domínio para polígonos com 73, 98 e 502 lados, padrões mais distantes, e alcance uma visão mais ampla, a generalização. Desse modo, se trata de “um percurso investigativo, não direcionado pelo pesquisador, mas mediado pelas tecnologias” (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015, p. 823).

A atividade não ficou limitada apenas à mídia construída, ela inclusive incentivou o sujeito fazer outras experimentações em outra janela do GeoGebra. O próprio software GeoGebra disponibiliza a abertura de uma nova janela totalmente independente da primeira sem precisar encerrar a janela já aberta. Assim, o sujeito tinha a possibilidade de construir novos polígonos para estender o domínio de validade de suas conjecturas (ver o Quadro 3 que exemplifica esta situação).

Figura 18: Janela aberta na construção de outros polígonos da atividade 01



Fonte: Pesquisador (2017)

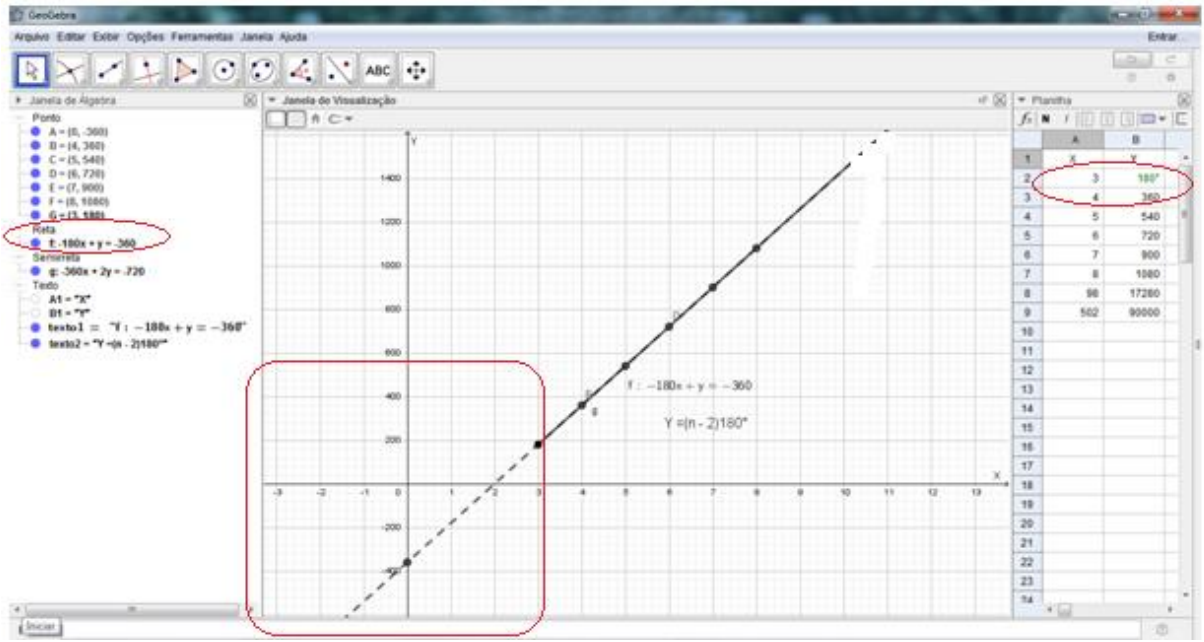
Prevendo a possibilidade de aparecerem dificuldades relativas à fluência com a mídia, deixamos o sujeito à vontade para solicitar ajuda ao professor pesquisador. A intenção é que a mídia desempenhe o seu papel nesse contexto didático, porque acredita-se que o software é uma ferramenta importante no aprendizado e no desenvolvimento do sujeito, pois pode oportunizar e reorganizar o pensamento em torno de novas possibilidades. O GeoGebra surge como uma poderosa ferramenta auxiliar ao sujeito na construção do seu conhecimento. Por meio de representações, janelas de visualização, dinamismo, respostas digitais rápidas a todas as interações entre homem e mídia, interface; para refutar generalizações incorretas, diminuir o intervalo cognitivo; proporcionar o desenvolvimento de outras habilidades como o manuseio com a tecnologia digital e com as construções geométricas. Tudo isso permite tornar o conteúdo mais atraente e abrir novos horizontes no qual o sujeito venha a ter desenvoltura em expressar, agir e evoluir perante suas iniciativas, em uma trajetória experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, tal como preconizado por Almouloud (2014, p. 171).

A seguir, é apresentado o protocolo contendo as diretrizes e os questionamentos a serem respondidos pelo sujeito. Desenvolvido com o objetivo de criar uma estratégia adequada ao aprendizado. O sujeito começa a interagir com o milieu adidático desenvolvido para esse fim. Almouloud (2014, p. 36), fundamentando-se em Brousseu, diz o seguinte:

> Brousseu modela as situações adidáticas em termos de jogo. Uma situação suscetível de provocar uma aprendizagem será tal que o aluno dispõe de uma estratégia básica para começar a jogar. Tal estratégia deve permitir ao sujeito compreender o problema e as regras do jogo. No entanto, as retroações fornecidas pelo milieu lhe permitem também perceber que essa estratégia não permitirá ganhar o jogo ou então que seu custo didático ou cognitivo é muito grande. Uma estratégia ótima deveria ser criada ou viabilizada utilizando-se conhecimento visado.

Na análise *a priori*, prever comportamentos possíveis é desejável. Neste âmbito, a atividade 01 possibilita outros percursos que podem ser projetados previamente. Entre eles, pode-se mencionar, desde já, o fato de permitir o trabalho com representação gráfica construída por meio da tabela na planilha, como mostra o quadro 1. A observação, no mesmo quadro, da janela de Álgebra mostra a expressão algébrica que representa a síntese do objeto matemático eleito para essa atividade.

Quadro 1: Visualizações possíveis no GeoGebra referente a atividade 1: janela algébrica, janela de visualização gráfica e planilha



Fonte: Pesquisador (2017)

O que chama a atenção nessa trajetória é que em domínio menor que 3, $]-\infty,3]$, não existe a construção de polígonos, pois como o domínio representa o número de lados dos polígonos e não é possível construir um polígono com o número de lados menor que 3, o domínio para o contexto só existirá para valores naturais maiores ou igual a 3. Portanto, trata-se de uma semirreta e não de uma reta. Isto interessa ser explorado junto aos sujeitos: a condição de existência para um polígono.

Entretanto, a expressão algébrica (lei de formação) para o intervalo $[3,+\infty[$, $y=(x-2)\cdot 180^{o}$ é válida, fornecida pelo GeoGebra na janela de Álgebra como $-180x+y=360$. O que abre a possibilidade de trabalhar intervalos.

Outro caminho válido, em nível de nono ano do fundamental II, é o algébrico. A partir de dois pares ordenados descoberto pelo sujeito, por exemplo, A(3,180) e B(4,360), é possível percorrer um caminho algébrico e determinar a expressão algébrica.

Pela função polinomial do primeiro grau $f(x)=ax+b$ e considerando $f(x)=y$ determinam-se duas equações e se resolve o sistema encontrando os coeficientes **a** e **b**, e, consequentemente, a expressão algébrica:

$y=ax+b$

Para o ponto A, x = 3 e y = 180 teremos, $180=3a+b$

Para o ponto B, x = 4 e y = 360 teremos, $360=4a+b$

$$\begin{cases} 180=3a+b \\ 360=4a+b \end{cases}$$

Algebricamente determina-se os coeficientes a e b.

$a=180 \quad b=-360$

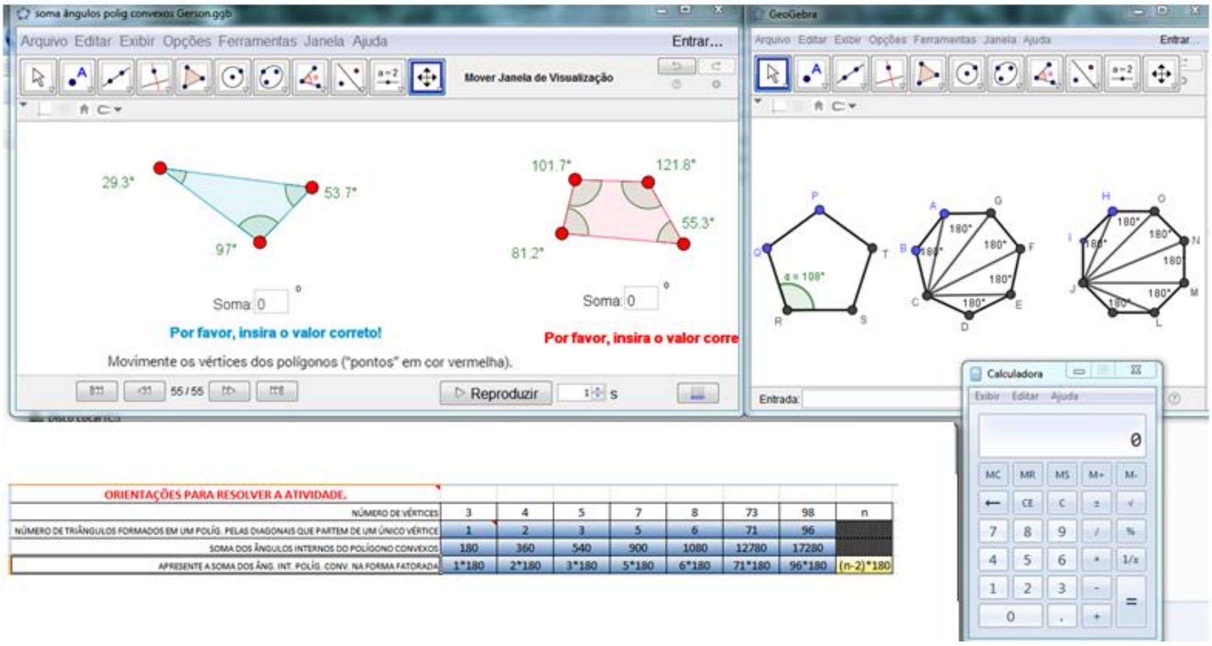
Assim, a expressão fica:

$y=180x-360$

$y=(x-2)\cdot 180$

A tecnologia digital possibilita também percorrer outro caminho, como se vê a seguir no figura 19.

Figura 19: Atividade 01 – Janela de visualização gráfica de dois arquivos independentes abertos simultaneamente na tela



Fonte: Pesquisador (2017)

Não podemos deixar de mencionar essa outra perspectiva em que é possível dividir o polígono em triângulos a partir de um único vértice e utilizá-los como unidade. Como cada triângulo tem a soma de seus ângulos internos igual a 180°, basta multiplicar a quantidade de triângulos formados pelas diagonais que parte de apenas um vértice por 180 que o mesmo que multiplicar o número de lados (n) subtraído de duas unidades (n-2) por 180°, sendo válido para polígonos regulares e irregulares.

Por fim, a hipótese da construção com régua e compasso de polígonos próximos, e posteriormente medir os ângulos internos e adicioná-los, representaria apenas uma etapa da atividade, caso levada de imediato a grandes aprofundamentos dentro da generalização. Neste caso, sem o uso da tecnologia digital, mas possível de construção.

A próxima análise também abarca a temática generalização de padrões com o uso da tecnologia digital, com estratégia didática utilizando do software GeoGebra como ferramenta para o desenvolvimento da atividade. Contudo, trata do conteúdo conversão de medida de unidade de comprimento.

4.2 Análise *a priori* da atividade 02

A análise *a priori* tem o objetivo de determinar como as escolhas das variáveis pertinentes permitem controlar os comportamentos dos sujeitos e explicar seu sentido. Dessa maneira, as atividades 02 e 03 assumem as mesmas variáveis potenciais que a atividade 01, diferenciando-se apenas em relação à especificidade do objeto matemático que será abordado no decorrer da análise *a priori* de cada uma. A justificativa é fazer uma análise individual das três atividades sob a mesma perspectiva e se chegar a uma conclusão final coerente que permita evidenciar as contribuições à aprendizagem do sujeito com o tema generalização de padrões e o uso da tecnologia digital que é o proposito maior dessa pesquisa.

Foi eleito para essa atividade o objeto relativo ao conteúdo matemático conversão de unidade de medida de comprimento que, por meio de uma estratégia didática, com o uso do GeoGebra, pretendeu que o sujeito determinasse os padrões úteis existentes, generalizasse esses padrões e sintetizasse.

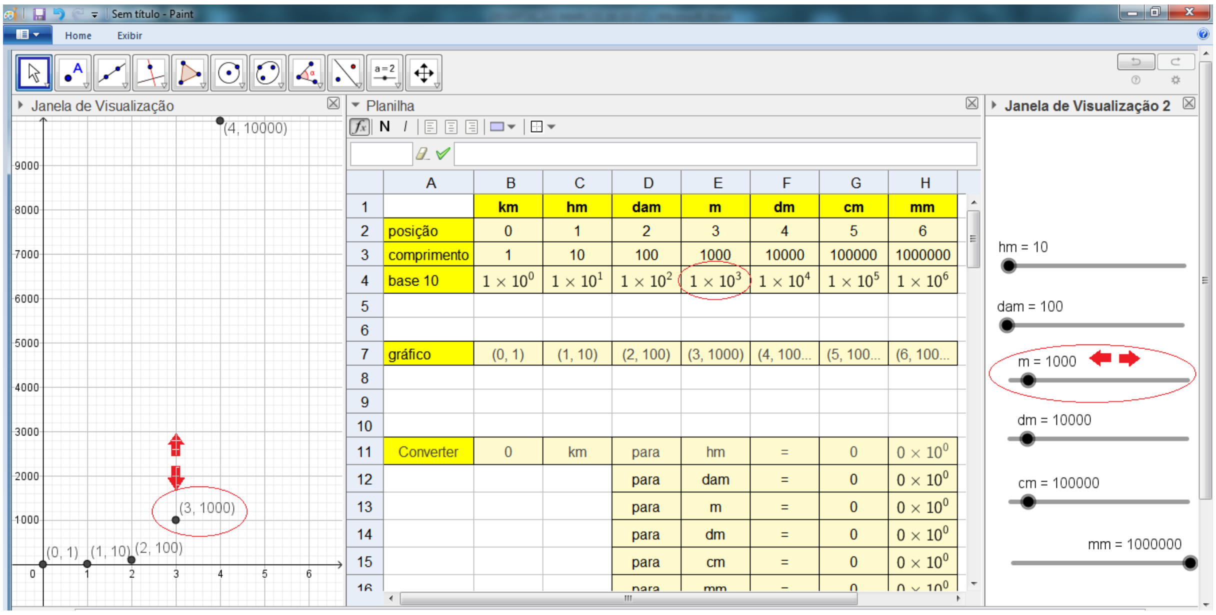
A atividade investiga inicialmente a existência dos pressupostos de conhecimentos, sobre o objeto matemático, que pertence à estrutura cognitiva do sujeito.

A unidade de medida de comprimento é um conteúdo que permeia todo o fundamental II e se estende ao ensino médio, até mesmo transpassa e vive em outras disciplinas, a exemplo: física e geografia.

É sugerido que, ainda sem o uso do GeoGebra, o sujeito observe as três representações na tela do computador, desenvolvida no software, e logo em seguida descreva as informações que conseguir se apropriar da sequência. Tal procedimento é justificado pela lógica interna da situação e convida o sujeito a aceitar e entrar no jogo.

Nesse momento da atividade o aluno tem a liberdade de explorar os recursos do GeoGebra, e descobrir a relação entre as unidades de medida da tabela, sendo que uma delas é tomada por base, um quilômetro, que é o único comprimento disponibilizado e serve de ponto de partida. Com o uso dos controles deslizante para cada unidade de comprimento, janela de visualização 2, o sujeito percebe o translado vertical do ponto correspondente no gráfico (representação geométrica) e simultaneamente a alteração de valor na tabela. Desse modo os dados são inseridos e o gráfico automaticamente será construído pelo GeoGebra. A estratégia de resolução é mostrada no Quadro 2.

Quadro 2: Visualização do arquivo da atividade 02 após as manipulações



Fonte: Oliveira, G. Pastre; Oliveira, M. Lopes (2017)

Por conseguinte, pretendeu-se que o sujeito, através, do controle deslizante, translado horizontal, observasse a interação entre a janela de visualização, a janela de visualização 2 e a planilha proporcionada pela mídia a fim de contribuir para que viesse a construir hipóteses a respeito do conteúdo de maneira a refletir, conjecturar e estabelecer relação válida entre as unidades mencionadas diante dos ajustes dos valores por ele determinado.

As três representações, como se apresenta no quadro 7, podem colaborar na compreensão e induzi-lo na descoberta de padrões, principalmente ao relacionar valor numérico da posição com valor do expoente da medida na base dez.

Primeiro descobre-se os padrões próximos para depois generalizar, pois desse modo o fará novas descobertas e assumirá a posição de agente na construção do conhecimento: “o aprendiz é o responsável pelo processo de sua aprendizagem” (ALMOULOUD, 2014, p. 35).

O amparo da tecnologia pode potencializar a construção do conhecimento, ou mesmo a reconstrução, além de ser uma ferramenta potencial para que o sujeito supere dificuldades apresentadas durante a experimentação de modo autônomo, de certo modo propiciando o desenvolvimento de sua autonomia.

A autonomia pode ser conquistada pelo sujeito se a atividade for desenvolvida e planejada a partir do sólido conhecimento do professor sobre o conteúdo e a tecnologia a ser empregada na estratégia didática, e, igualmente, se considere o contexto social envolvido. Para que o sujeito alcance sua autonomia, o monitoramento pelo professor pesquisador deve ser constante. Monitoramento, este, que tome como referência a estrutura teórica eleita e possa orientar o professor pesquisador nas observações das ação, formulação e validação realizadas pelo sujeito durante a experimentação. Essa teoria precisa ser estruturada de forma clara e objetiva para que as observações levantadas tragam informações importantes para confirmar se os objetivos pretendidos foram compreendidos e alcançados.

4.3 Análise *a priori* de atividade 03

As variáveis didáticas potenciais da atividade 03 também tomam como referência, assim como na atividade 02, as variáveis potenciais da atividade 01. As variáveis locais pertinentes para esta atividade, conversão de unidade de medida de comprimento, são:

• O resgaste de seus conhecimentos prévios (variável potencial dependente do conteúdo matemático/dimensão epistemológica);

• Dificuldade em generalizar e sintetizar (variável potencial dependente do conteúdo matemático/dimensão cognitiva);

• Fluência com a mídia (variável potencial de ordem geral/dimensão didática);

• O funcionamento do software e do hardware (variável potencial de ordem geral);

• Comunicação entre os integrantes da dupla (variável potencial de ordem geral/dimensão didática e cognitiva);

• Fatores externos emocionais (variável potencial de ordem geral/dimensão cognitiva).

Sobre a variável global procura-se entender:

• Quais são as contribuições de usar uma estratégia didática com o tema generalização de padrões? (dimensão didática e cognitiva);

• Que nível de abstração os alunos dos nono ano do ensino fundamental são capazes de alcançar? (dimensão cognitiva);

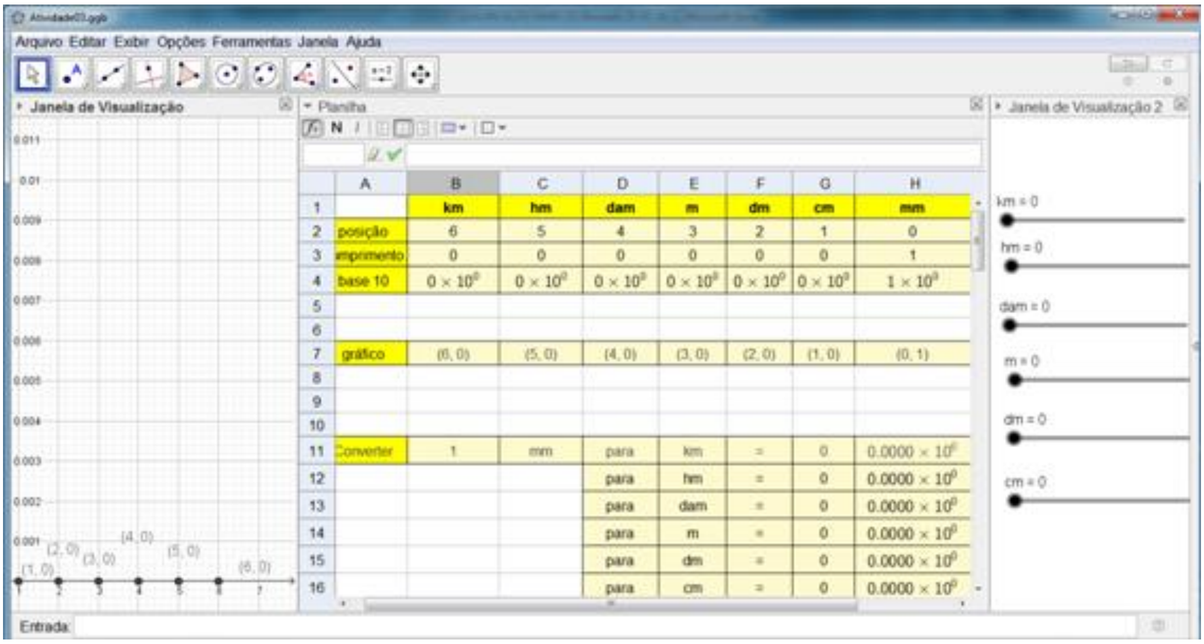
• Quais são as contribuições da tecnologia digital no aprendizado desse conhecimento? (dimensão didática e cognitiva);

• Como a temática e a tecnologia se complementam? (dimensão didática e cognitiva);

• Trabalhar em dupla pode ser uma condição promissora para os sujeitos construírem esse saber? (dimensão cognitiva).

A estratégia adotada para a atividade 03 é praticamente a mesma usada na atividade 02, exceto pela unidade tomada como base, ponto de partida, que na atividade 03 é o milímetro, como se pode observar no quadro 3.

Quadro 3: Visualização do arquivo da atividade 03 sem as manipulações

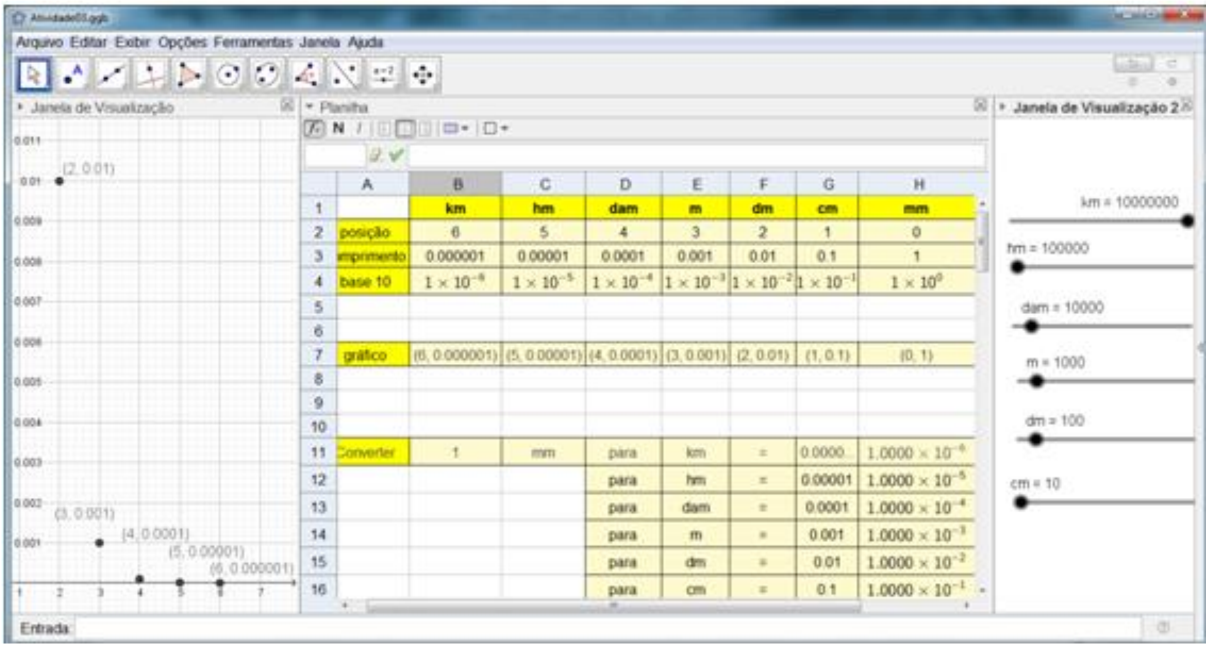


	A	B	C	D	E	F	G	H
1		km	hm	dam	m	dm	cm	mm
2	posição	6	5	4	3	2	1	0
3	mprimento	0	0	0	0	0	0	1
4	base 10	0×10^0	0×10^0	0×10^0	0×10^0	0×10^0	0×10^0	1×10^0
5								
6								
7	gráfico	(6, 0)	(5, 0)	(4, 0)	(3, 0)	(2, 0)	(1, 0)	(0, 1)
8								
9								
10								
11	Converter	1	mm	para	km	=	0	0.0000×10^0
12				para	hm	=	0	0.0000×10^0
13				para	dam	=	0	0.0000×10^0
14				para	m	=	0	0.0000×10^0
15				para	dm	=	0	0.0000×10^0
16				para	cm	=	0	0.0000×10^0

Fonte: Oliveira, G. Pastre; Oliveira, M. Lopes (2017)

O sujeito pode fazer ajustes e acertar os valores de maneira que a conversão fique correta por meio do deslocamento do controle deslizante. Os controles deslizantes estão interligados à planilha que, por sua vez, provocam alterações nos pares ordenados modificando os pontos no gráfico. O quadro 4 representa o preenchimento que se pretende que o sujeito visualize.

Quadro 4: Visualização do arquivo da atividade 03 após as manipulações



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		km	hm	dam	m	dm	cm	mm
2	posição	6	5	4	3	2	1	0
3	mprimento	0.000001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	1
4	base 10	1×10^{-6}	1×10^{-5}	1×10^{-4}	1×10^{-3}	1×10^{-2}	1×10^{-1}	1×10^0
5								
6								
7	gráfico	(6, 0.000001)	(5, 0.00001)	(4, 0.0001)	(3, 0.001)	(2, 0.01)	(1, 0.1)	(0, 1)
8								
9								
10								
11	Converter	1	mm	para	km	=	0.0000...	1.0000×10^{-6}
12				para	hm	=	0.00001	1.0000×10^{-5}
13				para	dam	=	0.0001	1.0000×10^{-4}
14				para	m	=	0.001	1.0000×10^{-3}
15				para	dm	=	0.01	1.0000×10^{-2}
16				para	cm	=	0.1	1.0000×10^{-1}

Fonte: Oliveira, G. Pastre; Oliveira, M. Lopes (2017)

Tem o objetivo de favorecer o sujeito na compreensão do conceito matemático por meio de dois campos de visualização, a planilha e a janela de visualização, em que os padrões devem ser observados e estendidos à generalização. Assim, trabalhar com o tema que envolve padrões estimula o aluno e instiga a criatividade (VALE, 2012, p. 181-182), e se chega à generalização ao ir de um caso particular para um caso geral, e estender os domínios de validade de uma conclusão (DREYFUS, 1991).

Em suma, o sujeito, ao manipular os controles deslizantes, percebe que ocorrem alterações na planilha e translação vertical dos pontos na janela de visualização, simultaneamente. A intenção é que o aluno, por intermédio dessa dinâmica, enxergue os padrões úteis em busca da generalização.

É apresentada uma tabela com as unidades de grandeza de comprimento que o preenchimento do valor da célula e o translado vertical do ponto representado na janela de visualização (representação gráfica) são feitos por meio do deslocamento dos respectivos controles deslizantes na janela de visualização 2, conforme Quadro 9. Pretendemos que o sujeito relacione as variáveis e encontre padrões com o auxílio das representações dinâmicas – dinâmica no sentido de movimento, de mudanças de valores de medida disponibilizadas –, pois, um dos objetivos é entender se o uso da tecnologia pode diminuir o intervalo cognitivo entre o pensamento algébrico e a notação equivalente descrita como “tensão” por Zazkis e Liljedahl (2002). Esta, segundo Oliveira (2013; 2015), não representa um fim em si, mas um componente de uma estratégia didática que tem o conhecimento matemático a ser construído como foco. Esta visão influência, entre outros pontos, a escolha das interfaces que compõem as atividades e os processos pelos quais os participantes dessa atividade formam, em relação aos dispositivos midiáticos envolvidos, configurações que representam coletivos de pessoas-com-tecnologias. De tal forma, passo a passo pela observação e pelo entendimento das representações, o sujeito é conduzido a abstrair o conceito (DREYFUS, 1991) de forma a alcançar novos patamares, como a generalização e a síntese.

Dessa maneira, as sequências didáticas nesta pesquisa pretendem se adequar aos pressupostos supramencionados, ou seja, engajar os sujeitos em trajetórias autônomas de constituição de conjecturas, de validações delas, de revisitas às formulações iniciais, tendo o milieu, do qual as tecnologias fazem parte, elemento a partir do qual se espera que envolvesse as retroações capazes de consolidar a construção do conhecimento acerca do tema generalização de padrões. O arcabouço estrutural da engenharia didática é mobilizado para a organização dos esquemas experimentais almejados. Esta natureza deve, entre outras possibilidades, habilitar o sujeito a reconhecer a existência de padrões, perceber a generalidade envolvida nesta iniciativa e, sobretudo, prover descrições matematicamente válidas, do ponto de vista da correção, em um primeiro momento, e da formalidade, em segundo (OLIVEIRA, 2008).

Ao inserir os valores no campo designado à conversão, B11, o sujeito pode passar a entender melhor como se dá a conversão. Ao digitar o valor que se quer converter na célula B11, automaticamente aparece ao sujeito as respectivas conversões de um valor para as demais unidades levando-o a perceber que o valor apresentado está em notação científica e ocorre apenas alteração no expoente do expoente da base dez proporcionalmente à conversão que se quer chegar. Pretende-se, nesse momento, que o sujeito seja capaz de generalizar e sintetizar. O gráfico auxilia o sujeito validar as conjecturas ao sintetizar, pois se os valores dos pares ordenados foram completados corretamente, o gráfico apresentará uma característica exponencial, o que pode levar o sujeito a validar em parte uma conjectura relativa ao fator multiplicativo com base dez elevado ao expoente relativo à quantidade de avanços da unidade do milímetro para a respectiva conversão desejada.

Nessa etapa da atividade está presente o processo de abstrair composto por seus elementos fundamentais: generalizar e sintetizar. Para Dreyfus (1991, p. 35), generalizar é quando se estendem os domínios de validade a partir do que aparece em comum, os padrões. Sintetizar, por sua vez, é integrar partes para constituir um todo, o objeto matemático. Ainda sobre a regularidade, é importante compreender a relação entre dois conjuntos, o domínio representado pelos valores da posição e a imagem pelos valores convertidos, para generalizar e chegar à expressão algébrica. Esta precisa estar adequada à situação de tal forma que seja facilmente manejável. Por meio da variável, valor da posição, é possível determinar o valor convertido diretamente pela expressão algébrica, sendo, assim, extremamente útil, não tendo a necessidade de revisitar a tabela de resultados. Segundo Caraça (2005, p. 112), a variável é uma entidade que se refere ao isolamento, pois ela expressa o domínio, mostra sua substância – o conjunto numérico de partida.

O encaminhamento e o questionamento são apresentados no protocolo, a seguir:

Atividades de Pesquisa Acadêmica

Nome:____

Nome:____

Atividade 03

a) Da mesma forma como na atividade anterior, procure seguir as instruções deste material exatamente como estão. Existe uma relação entre as unidades de medida da tabela a que nos referimos aqui, sendo que uma delas é tomada por base (não é a mesma da atividade anterior). Com o uso dos **controles deslizantes** que estão na *Janela de Visualização 2*, estabeleça uma relação válida entre as unidades mencionadas. Observe que a mudança nos controles gera mudança nas tabelas. Ajuste os valores como lhe parecer correto. A *Janela de Visualização* pode ajudá-lo, também, a compreender esta tarefa. Depois de manipular estes controles, registre suas descobertas no espaço seguinte:

b) Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?

c) Agora, vamos para a tabela propriamente dita. Escolha alguns valores para verificar o que ocorre na conversão dos mesmos, escrevendo estas medidas na célula B11, logo após a palavra "Converter". Tente valores como 5, 6 ou 7, por exemplo, e valores maiores também, como 67, 89, 150, entre outros. O que você observou sobre as conversões feitas? E as notações que estão sendo usadas?

d) Escreva uma expressão genérica (uma generalização) para estas conversões. Para isto, tome como base alguma das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. A ideia é escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos das conversões que estamos fazendo.

e) Neste ponto, é bastante provável que você já tenha percebido a lógica que permeia as conversões que fizemos nas atividades dois e três. Vamos tentar avançar um pouco mais: proponha uma expressão, com base nas posições das unidades na tabela de medidas, que permita calcular a conversão entre quaisquer duas unidades. Registre no espaço seguinte como chegou às suas conclusões. Você pode usar o GeoGebra ou qualquer outro recurso computacional que desejar.

f) O que você achou das atividades dois e três? E do uso do GeoGebra nestas atividades?

(Grave seu trabalho. Não desligue seu computador!)

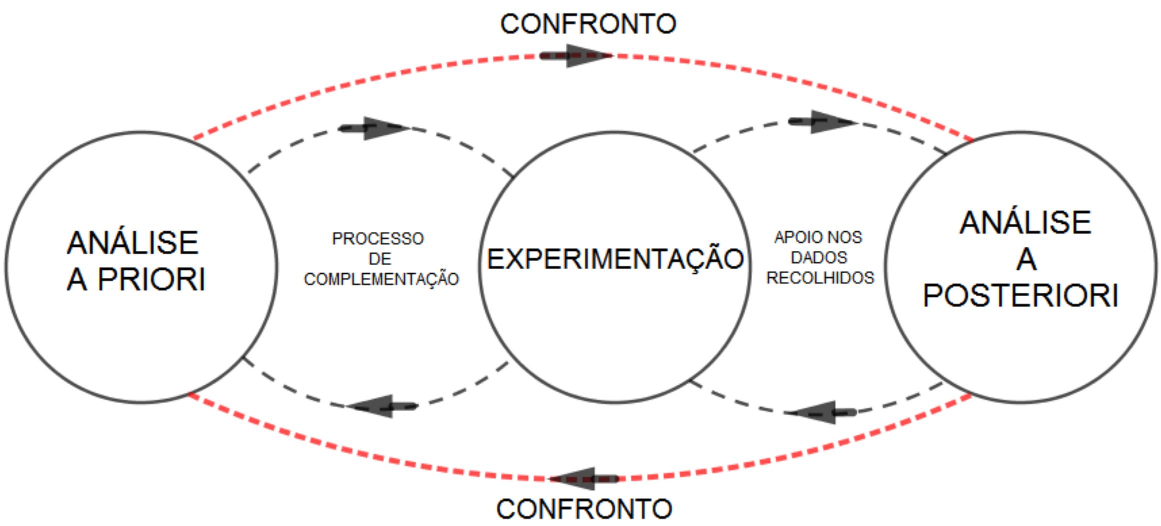
4.4 Experimentação

Conforme Almouloud e Coutinho (2008, p. 68):

> A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação. Ela é seguida de uma fase de análise a posteriori que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

Segue uma representação desse entendimento:

FIGURA 20: Relação entre as fases análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*.



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Esse processo envolvendo a análise *a priori*, a experimentação e a análise *a posteriori* deve funcionar de forma alinhada, como as engrenagens de um motor. Motor que é o coração da engenharia didática, onde ocorrem os ajustes e se fazem as reflexões sobre os dados coletados.

Consequentemente, a validação surge do confronto direto entre a análise *a posteriori* e a análise *a priori* apoiado na teoria e nos dados coletados durante a experimentação.

O experimento desta pesquisa foi realizado em três encontros nos dias 20, 23 e 25 de outubro de 2017, no período da tarde, após um intervalo de uma hora do término das aulas normais para descanso e alimentação. A atividade não limitou o tempo total para a realização, exceto as duas primeiras orientações do protocolo da atividade 01 com duração de 5 e 10 minutos, respectivamente. Por conta disto, a atividade 01 foi concluída em um tempo médio de 1 hora. A atividade 02 teve aproximadamente 34 minutos de duração, e a atividade 03 40 minutos, confirmadas pelas gravações com o software OBS Studio.

Em relação à mídia, procurou-se tomar o devido cuidado, pois como mencionam Oliveira e Lima (2018, p. 1168):

> A relevância da fluência na tecnologia escolhida para um processo de ensino pode ser de tal ordem que, se não desenvolvida de forma adequada, pode oportunizar que a interface concorra mais para atrapalhar do que para subsidiar o processo de construção do conhecimento matemático pelo sujeito, inclusive surgindo para impedir o desenvolvimento das conjecturas necessárias à investigação matemática.

Dessa maneira, os sujeitos tiveram algumas orientações iniciais em relação aos comandos dos recursos digitais empregados na pesquisa como, por exemplo, alternar de uma tela para outra dentro do GeoGebra, gravar a tela e o som com o OBS Studio, gravar e transferir o arquivo para o pen drive no final da atividade e etc.

Os sujeitos da pesquisa são oito alunos do nono ano do ensino fundamental II, devidamente autorizados pelos responsáveis. Trabalharam em duplas e cada um teve à disposição um computador com os softwares e atividades instaladas. As duplas foram identificadas por D1, D2, D3 e D4 e os sujeitos por letras maiúsculas A, B, C, D, E, F, G e H. Desse modo, A e B pertencem à dupla D1, C e D dupla D2, E e F dupla D3 e G e H dupla D4.

O contrato didático foi afirmado se deu em os sujeitos assumirem a posição de um pesquisador, seguindo uma trajetória investigativa com seriedade e responsabilidade. Eles foram informados que o papel do professor-pesquisador durante a experimentação era de observador e não iria intervir na construção do conhecimento deles, apenas fazer mediações quando achasse oportuno.

Durante a experimentação, os sujeitos mostraram algumas dificuldades ao mobilizar seus conhecimentos prévios, ou seja, os conteúdos já assimilados que pertencem à suas estruturas cognitivas e que iriam subsidiar a estruturação do novo conhecimento. No caso da atividade 01, soma dos ângulos internos de um polígono, apenas um sujeitos lembrava o significava de polígono convexo, conceito importante à atividade e trabalhado no quinto ano do fundamental II. Nesse momento a socialização entre os integrantes A e B da dupla D1 foi importante, pois essa troca de informações rendeu a recordação do conhecimento prévio por parte de um dos integrantes. Vê-se que a escolha didática em trabalhar em dupla, favoreceu a construção do conhecimento de um dos integrantes e a continuidade da experimentação; possibilitou também reduzir a intermediação com o professor/pesquisador com os sujeitos, o que beneficia o desenvolvido da autonomia. Isso não significa que o professor pesquisador não precisou intervir, pois ainda restaram três duplas que não conseguiram estabelecer um consenso sobre esses conceitos prévios. Como o entendimento desses conceitos prévios são relevantes para alcançar o que se pretende na atividade 01, o professor pesquisador intermediou através de questionamentos para que passassem a fazer reflexões a respeito do que não se lembravam. O objetivo do professor/pesquisador com o questionamento foi instigar os sujeitos de tal forma que mobilizassem suas estruturas cognitivas e resgatassem tais conceitos prévios.

Antes de iniciar o experimento, o professor pesquisador, através de questionamento, constatou que os sujeitos não se lembravam da fórmula da soma dos ângulos internos do polígono. Sabiam que tinham aprendido, porém não se lembravam. Informação importante para o andamento da experimentação, saber qual seria o ponto de partida para a reconstrução do conhecimento do objeto matemático aqui eleito. Assim foi realizado o questionamento oral e não se percebeu nenhum conhecimento por parte dos sujeitos que viessem a induzir a descoberta da fórmula sem percorrer a trajetória proposta pela estratégia didática, que pretende evidenciar eventuais contribuições que uma estratégia com tecnologias digitais, envolvendo o tema generalização de padrão, possa acarretar. Essa fase da metodologia de pesquisa Engenharia Didática no Contexto da TSD contém a implementação do processo didático criado das observações e das coletas de dados, que ajudam a garantir a qualidade da investigação, especialmente ao se tratar de particularidades e de fatores fundamentais envolvidos nesse universo, para descobrir respostas coerentes às indagações. O mesmo se pode atribuir as atividades 02 e 03.

Todas as duplas, por si mesmas, decidiram se orientar pelo protocolo impresso e usar conjuntamente apenas um computador. Somente usaram os dois computadores disponibilizados para a dupla em dois momentos. O primeiro quando os integrantes entraram em contradição sobre uma determinada conjectura qualquer durante a experimentação com o interesse de validar sua hipótese, e o segundo quando estavam na eminência de sintetizar, determinar a expressão algébrica. Neste segundo caso foi um fato que não ocorreu com todas as duplas. Algumas usaram anotações no papel ou ainda, como a dupla D3, usaram o Office Excel para criar tabelas. A estratégia didática previa tal possibilidade e os sujeitos tinham a liberdade de usar outras tecnologias, lápis e papel, inclusive outras tecnologias digitais no computador, sem acessar a internet, que também permite entender a contribuição do uso da tecnologia digital com essa temática.

Em relação ao protocolo digitalizado em Office Word, o professor pesquisador propôs que um dos sujeitos preenchesse o digitalizado e o outro preenchesse o protocolo impresso. Contudo isso não ocorreu, porque o professor pesquisador entendeu que não era relevante insistir, pois não iria prejudicar na coleta de dados.

Nas três atividades as duplas não tiveram grandes dificuldades com o entendimento do funcionamento e interface com a mídia: são sujeito que pertencem a uma era digital e, assim, a convivência com a tecnologia digital favorece para superar as possíveis barreiras que possam aparecer com a mídia. As tentativas com o uso de erro e certo foram muito empregadas nesse momento até se sentirem confortáveis com o manuseio da mídia.

Os sujeitos C e D da dupla D2, no início do experimento, se sentiram impotentes porque não recordavam os conhecimentos prévios exigidos. Depois esse sentimento foi reforçado pelo fato de não conseguirem encontrar os padrões próximos. A mediação do professor pesquisador mais uma vez se fez presente, por questionamento, a ponto de conseguir reverter a situação. Ficou nítido que estavam ansiosos, o que de alguma forma acabou os deixando inseguros.

Cabe esclarecer um pouco mais sobre a ansiedade dos sujeitos durante a experimentação. Tão logo se iniciou o experimento já começaram a questionar o professor pesquisador a respeito das questões. Ficou nítido que os sujeitos pretendiam obter de um modo sútil alguma informação para direcioná-los no processo de resolução da atividade. O professor pesquisador, que conhece o comportamento de alunos dessa faixa etária em sala de aula, procurou conduzir então a situação de maneira que os mesmos percebessem que não conseguiriam ajuda nesse sentido, que precisariam enfrentar, por eles mesmos, a atividade proposta, já que, reiterando, se pretende entender nesta pesquisa a trajetória que o sujeito percorre para resolver a atividade de maneira autônoma. Uma possibilidade para explicar essa ansiedade é que os sujeitos estavam diante de uma nova situação, adicionado ao fato dos sujeitos no seu dia a dia pessoal obter respostas imediatas a suas indagações momentâneas levando de certa maneira a insegurança, além de a estratégia didática aqui proposta não permitir o acesso à internet com a finalidade de que o sujeito tomasse a ação na construção do seu conhecimento.

A movimentação na mídia feita pelas duplas foi gravada pelo software OBS Studio. Todavia, a gravação do áudio no OBS Studio das duplas D1, D2 e D3 não funcionou. Assim, nosso suporte em relação ao áudio ficou apenas na gravação da Dupla D4.

Segundo as observações feitas durante a experimentação se percebe que os intervalos de tempo para determinar cada etapa da atividade se diferenciam. Podem-se assim distinguir basicamente três etapas:

- Intervalo para determinar os padrões próximos;
- Intervalo para generalizar os padrões úteis encontrados;
- Intervalo para determinar à síntese.

Essas etapas estão presentes nas atividades 01, 02 e 03, cada uma com a sua especificidade. Contudo, em todas elas o aumento do tempo obedece a seguinte ordem: intervalo para determinar os padrões próximos, intervalo para generalizar os padrões úteis encontrados e o intervalo para determinar a síntese. Desse modo, abre-se a discussão acerca dos intervalos descritos em relação ao aumento do tempo necessário para avançar de uma etapa para outra, que estão diretamente ligados à mobilização do pensamento matemático de natureza avançada no qual permite o sujeito ir de uma reflexão inicial a uma reflexão mais profunda sobre os próprios saberes, que é um processo complexo abarcado de abstrações e representações para que o sujeito vá de um nível a outro. Segundo Dreyfus (1991), conhecer esses processos envolvidos no pensamento matemático avançado é importante para compreender o porquê das dificuldades dos alunos, para entender como esses alunos pensam e fazem matemática. De certa forma, vem a contribuir para o questionamento de Rossini (2006, p. 90) e dessa pesquisa acerca do raciocínio para fazer a generalização de padrões que não ocorre naturalmente, pois é um processo lento e trabalhoso vinculado ao domínio do saber e pensar matemático (ROSSINI, 2006, p. 90). Então, não existem até então aprofundamentos sobre o porquê da dificuldade apresentada pelo aluno em generalizar os padrões úteis. Neste sentido que esta pesquisa pretende contribuir com informações que auxiliem nesta reflexão.

4.5 Análise *a posteriori* da atividade 01

A análise *a posteriori* tem como referência os dados coletados na experimentação e é completada pelas metodologias externas que são as entrevistas com os sujeitos e os questionários realizados antes, durante e até mesmo depois da experimentação.

> A análise a posteriori de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa (ALMOULOUD; COUTINHO 2008, p.68).

Ainda que exista uma ordem de ocorrência nas fases da engenharia didática, vê-las de forma isolada seria um erro. Da mesma maneira, as fases mencionadas até aqui não devem ser consideradas como lineares e absolutas, no sentido de não admitirem revisitas, revisões e reconsiderações.

O objetivo dessa atividade se dá em descobrir a fórmula para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono amparado pelo software GeoGebra. Em um caráter mais amplo, provar que é possível empregar a tecnologia digital em um contexto investigativo para que o aluno reflita e avance autonomamente em termos de conhecimento nas reflexões e conjecturas sobre a generalização de padrões algébricos.

O software GeoGebra disponibiliza muitos recurso, entre eles a possibilidade de movimentar os objetos nele construído, a exemplo, a movimentação dos vértices tal como na atividade 01. Quando o sujeito movimenta os vértices pela manipulação ocasiona a reconfiguração do polígono e consequentemente novas composições dos ângulos internos. De tal forma, o sujeito passa a observar que a soma dos ângulos internos do novo polígono com a mesma quantidade de vértices permanece a mesma. Isso permite que o sujeito comece a fomentar conjecturas e expandir de modo gradativo sua compreensão sobre os padrões presentes. O objetivo é aguçar o espírito investigativo e levar o sujeito a reflexões. Esperava-se que os sujeitos descobrissem o padrão presente na situação didática proposta, através do dinamismo apresentado na atividade desenvolvida no GeoGebra e na sequência estendesse o domínio chegando à generalização e posteriormente à síntese.

O ponto inicial para a ação do sujeito era a leitura do protocolo atividade 01.

- “Localize no computador que você está usando o arquivo chamado “Atividade 01”. Clique sobre o nome do arquivo duas vezes para abri-lo”;
- **“(5 minutos)** Note que são exibidos três *polígonos convexos* na tela do GeoGebra. Caso tenha dúvidas sobre o que são polígonos convexos, converse com seu colega de atividade. Ao final, o professor/pesquisador solicitará que cada dupla fale um pouco sobre suas conclusões a este respeito, que devem ser registradas no espaço abaixo”.

As duplas seguiram as orientações do protocolo e fizeram os acessos aos arquivos, no Office Word e a no software GeoGebra, sem questionamentos iniciais. Demonstraram uma certa fluência com a mídia, pois são alunos acostumados a trabalhar com o Office Word e com o GeoGebra.

Entretanto, antes de começarem a experimentação, como já se salientou anteriormente, o professor pesquisador explicou alguns recursos a serem usados que eram desconhecidos dos sujeitos, referentes à interface homem com a tecnologia digital.

Os sujeitos resolveram registrar suas ações apenas no protocolo impresso em papel sulfite deixando de usar o protocolo na mídia digital, nesse momento já aberto no Office Word. A justificativa apresentada por eles foi que levariam mais tempo para desenvolver a atividade, pois estariam anotando a mesma informação em dois lugares ao mesmo tempo, como foi mencionado pelo sujeito B da dupla D1. Como o registro foi assegurado para a análise, o professor pesquisador permitiu, porém sugeriu que cada integrante preenchesse um dos protocolos disponibilizados.

Pretendeu-se inicialmente, com a atividade 01, chamar o sujeito para o jogo e se esperava que ele aceitasse participar do desafio.

A princípio os sujeitos discutiram entre si sobre os conhecimentos prévios que o questionamento pedia. Como relatado anteriormente na experimentação, apenas a dupla D1, mais especificamente o sujeito B, conseguiu recordar o significado de polígono convexo, e socializou com o sujeito A. A socialização de conhecimentos que aconteceu nesse momento exemplificou a importância de se trabalhar em dupla.

Por outro lado se observou que as demais duplas apresentaram dificuldades em lembrar-se desse saber. Então o professor pesquisador fez uma intervenção e mediou a retomada do conceito, por meio de questionamento que os levassem à reflexão e resgate dos conhecimentos prévios que são indispensáveis e subsidiam a construção do novo conhecimento (AUSUBEL, 2003, apud, FERNANDES, 2010, p. 53). Esse momento descrito é conhecido como análise *in vivo*, é desenvolvida tipicamente, com uma interpretação simultânea (ou quase) do que ocorre na experimentação.

No espaço reservado para registrar o entendimento acerca de polígono convexo, a dupla D1 fez uma síntese das respostas dos itens b, c, d, a – nesta ordem. A explicação dada ao professor pesquisador pela dupla foi "distração":

Sujeito B

- "não sabia que tinha de escrever isso";

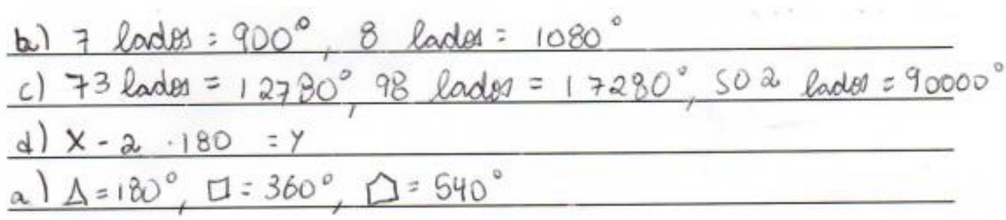
Sujeito A

- "usamos o espaço para mostrar o que encontramos como resposta às demais perguntas".

Fica então uma lacuna a ser investigada. Porque ocorreu essa distração? Será ansiedade, variável potencial de ordem geral de dimensão cognitiva? No entendimento dessa pesquisa, pode estar relacionado à dupla ter avançado até o item "c" para depois retornar e responder. Ou ainda, em uma segunda hipótese, pelo fato da dupla, nas primeiras manipulações com a mídia terem rapidamente percebido o padrão ali presente e por ansiedade apresentarem suas validações se descuidando do que realmente estava sendo solicitado.

Completando essa discussão, o professor pesquisador pode afirmar, baseado em sua convivência em sala de aula com adolescentes da faixa etária como destes sujeitos, que eles são alunos com fluência na leitura. O fato descrito pode ser observado na figura 9.

FIGURA 21: Atividade 01, descrição da dupla D1, primeira reflexão.


b) 7 lados = 900°, 8 lados = 1080°

c) 73 lados = 12780°, 98 lados = 17280°, 502 lados = 90000°

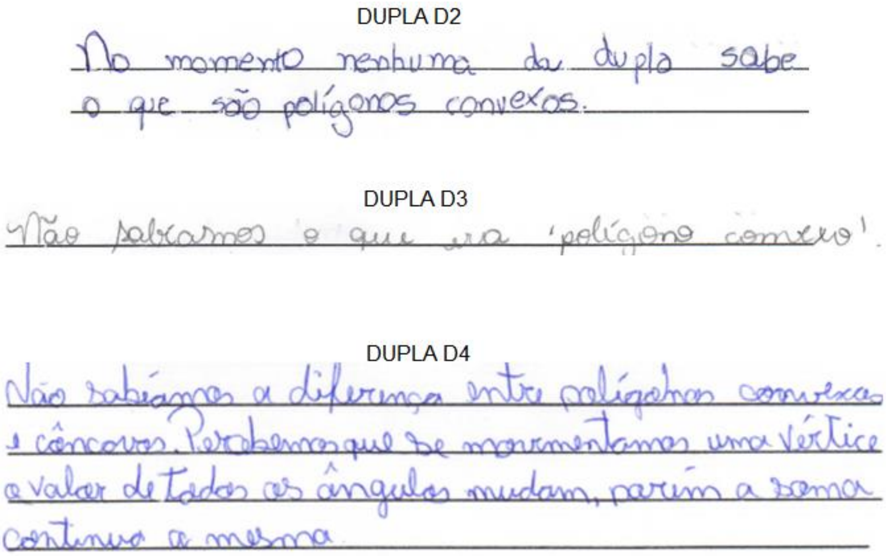
d) x - 2 · 180 = y

a) Δ = 180°, □ = 360°, ⌂ = 540°

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

As duplas D2, D3 e D4 não conseguiram resgatar o conceito sobre polígono convexo, assim suas anotações foram essas a seguir.

FIGURA 22: Atividade 01, descrições das duplas D2, D3 e D4, segundo suas reflexões.


DUPLA D2

No momento nenhuma da dupla sabe o que são polígonos convexos.

DUPLA D3

Não sabíamos o que era 'polígono convexo'.

DUPLA D4

Não sabíamos a diferença entre polígonos convexos e côncavos. Percebemos que se movimentamos uma vértice o valor de todos os ângulos mudam, porém a soma continua a mesma

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Aparece na resposta da dupla D4 “diferença entre polígonos convexos e côncavos”. Conforme o relato oral da dupla D4, eles sabiam diferenciar os polígonos, mas não sabiam conceituá-los. Como diz Almouloud (2008, p. 68), os dados foram completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas, nesse caso a entrevista com a dupla.

Entende-se, por meio dos dados coletados, que a dificuldade estava em usar a língua materna para expressar o que visualmente sabiam identificar pela figura plana geométrica, o polígono convexo. A partir disso, pode-se diz que a dupla sabia que estava manipulando polígonos convexos e não polígonos côncavos (também identificados como polígonos não convexos).

Ao escrever “percebemos que se movimentarmos um vértice o valor de todos os ângulos mudam, porém a soma continua a mesma”, os sujeitos G e H da dupla D4 anteciparam a resposta da próxima questão. Em um olhar inicial, conduz-se ao entendimento que se trata a influência da variável potencial de ordem geral de dimensão cognitiva, apenas ansiedade; mas quando comparado à distração da dupla D1, sugere outro entendimento. Ao explorar a lógica das intefaces, os sujeitos tiveram a oportunidade de pensar com a tecnologia, efetivando os coletivos formados por seres-humanos-com-mídias, conforme Oliveira (2018) se referindo a Borba e Villarreal (2005), fortalecendo a hipótese que o milieu constituído pela mídia se fez presente, pois compreende-se que os sujeitos descobriram logo de início o padrão, inclusive mais rápido que se imaginava, ao manusear os vértices do polígono. Isso foi confirmado através dos dados coletados com as gravações no OBS Studio que para as duplas D1 foi de 8 minutos e para a D4 de 6 minutos. Isto, de certa forma, representa sinais do papel que a mídia deveria exercer nessa estratégia didática.

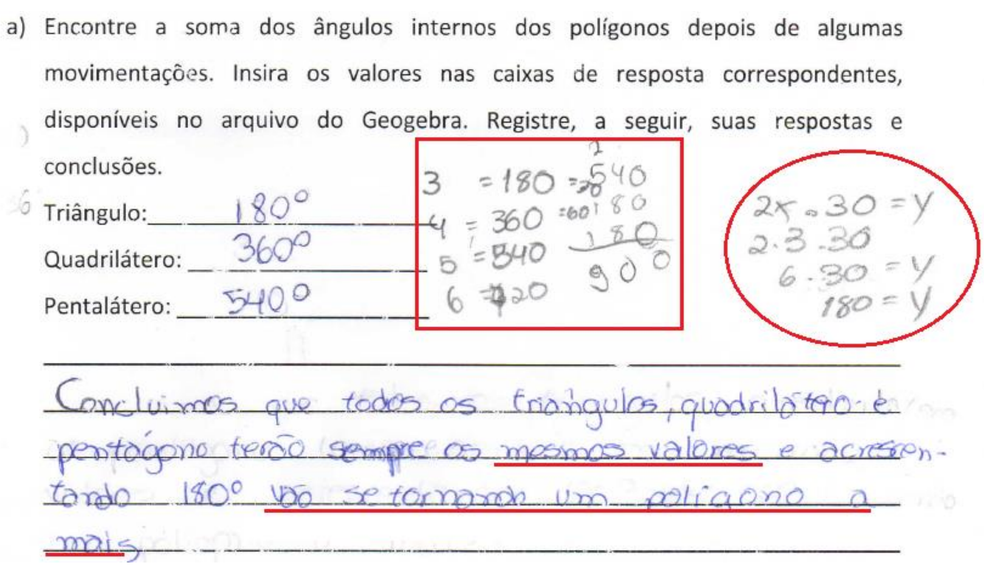
- **“(10 minutos)** Observe que cada um dos polígonos possui vértices na cor vermelha. Estes elementos podem ser manipulados. Movimente os vértices e observe o que ocorre com os polígonos e seus ângulos. Registre suas conclusões no espaço abaixo”.

A estratégia didática de movimentar os vértices instigou os sujeitos a elaborar conjecturas a respeito de regularidades relacionadas com a soma dos ângulos internos de cada polígono e entre eles, ou seja, o sujeito toma para si ação, fórmula e valida como prega a TSD. Passo a passo o sujeito vai construindo o seu conhecimento acerca da soma dos ângulos ao relacionar o valor às somas dos ângulos internos do triângulo, do quadrilátero e do pentágono e para depois estender o domínio.

As duplas usaram a calculadora do próprio computador para ajudar a verificar se suas conjecturas estavam corretas, foi uma maneira de usar outro recurso da tecnologia digital disponível no computador que também contribuiu para reduzir o intervalo cognitivo e chegar ao entendimento que independente da composição dos ângulos internos do polígono. Proporcionada pelas movimentações dos vértices, recomposição dos polígonos, o valor da soma dos ângulos internos será sempre a mesma.

À exceção da dupla D2, as demais entenderam o padrão e registraram respostas corretas. No caso específico da dupla D2, registram: “Não importa pra que lado se movimente o ângulo será sempre o mesmo”. Questiona-se: Será o mesmo para um ângulo qualquer ou para a soma dos ângulos internos do polígono? É nítida a falta de fluência com a linguagem materna para descrever a situação matemática. O fato volta a ocorrer com a dupla na questão “a”. Nesta questão a linguagem materna e a linguagem algébrica descrita pela dupla não traduz o reconhecimento das particularidades comuns que a própria dupla relatou oralmente ao professor pesquisador. É importante mencionar que esse momento teve como base as observações e registros feitos pelo professor pesquisador durante o experimento. Em contrapartida, pode-se observar, pela figura 23, que os sujeitos C e D, da dupla D2, registraram a soma dos ângulos internos do triângulo, do quadrilátero e do pentágono corretamente, o que representa indícios de avanços em suas proposituras iniciais.

FIGURA 23: Atividade 01 – questão “a” – descrição da dupla D2.



a) Encontre a soma dos ângulos internos dos polígonos depois de algumas movimentações. Insira os valores nas caixas de resposta correspondentes, disponíveis no arquivo do Geogebra. Registre, a seguir, suas respostas e conclusões.

Triângulo: 180°

Quadrilátero: 360°

Pentalátero: 540°

3 = 180

4 = 360

5 = 540

6 = 720

540

180

180

900

$2x \cdot 30 = y$

$2 \cdot 3 \cdot 30$

$6 \cdot 30 = y$

$180 = y$

Concluimos que todos os triângulos, quadrilátero e pentágono terão sempre os mesmos valores e acrescentando 180° vão se tornando um poligono a mais

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Na moldura retangular observa-se o sinal de igualdade empregado de modo inadequado. A dupla pretendia relatar que para o polígono de três lados teremos a soma dos ângulos internos igual a 180°, para o de quatro lados 360°, e assim por diante.

A moldura em elipse é uma conjectura que não se concretizou. É um instante importante para este estudo: o sujeito testa suas conjecturas, induz a partir de dados descobertos e percebe que ainda não são suficientes para suprir suas indagações; não consegue ir do caso particular para o caso geral e estender os domínios de validade de uma conclusão. O software GeoGebra é uma ferramenta importante para isso. Na sequência os sujeitos abriram uma nova janela e construíram outros polígonos de maior número de lados. Partiram das particularidades já percebidas para estender o seu domínio – a descoberta da soma dos ângulos internos para polígonos com maior quantidade de lados, mais distantes do triângulo, que exigiram a compreensão da estrutura da regularidade envolvida. Tal particularidade pode ser observada na expressão da dupla D2 quando tentaram descrever que para conseguir a soma dos ângulos internos do próximo polígono da sequência é necessário acrescentar 180º.

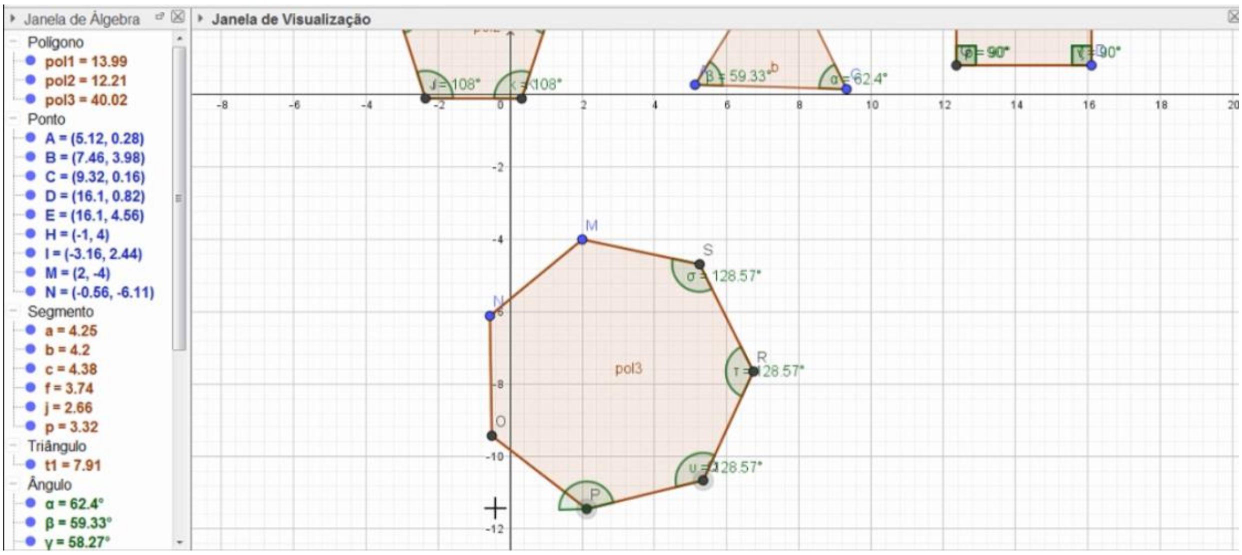
Para a questão “b”, as duplas D1, D2 e D3, em síntese, utilizaram o mesmo princípio: adiciona-se mais 180° na soma dos ângulos internos do polígono (SAIP) para se obter a SAIP para o próximo polígono, o que serviu de base para determinação a SAIP de polígonos próximos, de 7 lados (900°) e 8 lados (1080°), por exemplo. As dupla D1 e D4, que construíram polígonos regulares em uma nova janela do GeoGebra, conforme sugerido no protocolo, e isto configura uma mudança de quadro. Segundo Douady (1993) citada por Almouloud caracteriza um quadro como sendo:

> Constituído de ferramentas de uma parte de matemática, de relações entre os objetos, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e ser diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida (DOUADY, 1993, p. 389 apud ALMOULOUD, 2014, p. 64, tradução nossa).

A mudança de quadro é uma ferramenta útil para que o sujeito obtenha formulações diferentes do objeto matemático que antes não foram percebidas e possibilita evoluções em suas concepções.

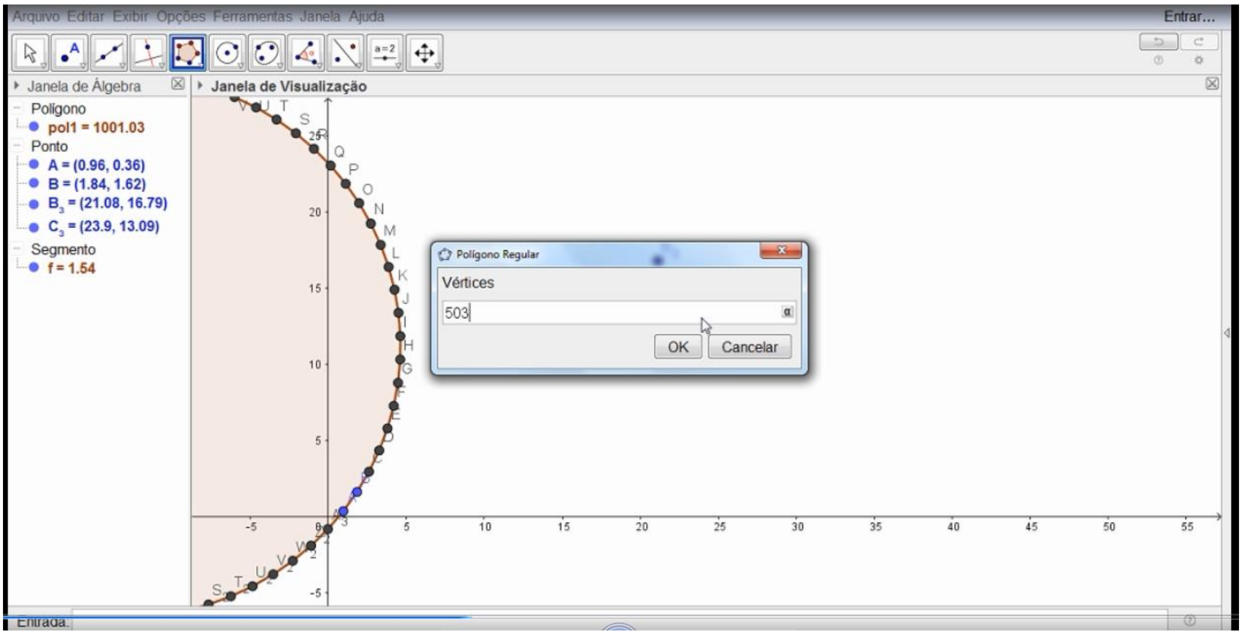
De tal forma, as duplas D1 e D4 fizeram uma mudança de quadro, construíram novos polígonos regulares, mediram o ângulo unitário desses polígonos regulares, multiplicaram pela quantidade de lados do polígono para determinar a SAIP. Observação à quantidade de lados de um polígono qualquer é igual à quantidade de ângulos desse polígono, saber geométrico. Essa etapa pode ser exemplificada, em partes, pelas figuras 24 e 25.

Figura 24: Construções da dupla D4 no GeoGebra.



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Figura 25: Construções da dupla D1 no GeoGebra.



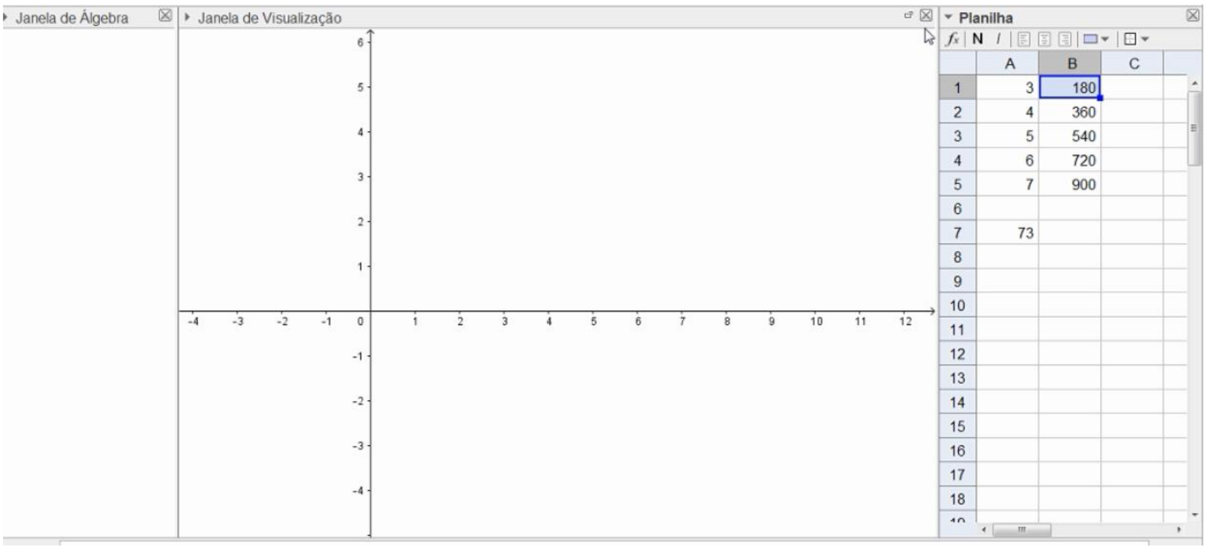
Fonte: Professor/pesquisador (2018)

A soma dos ângulos internos para cada polígono foi determinada, pelas duplas D1 e D4, de modo automático (mecânico), usando os recursos do GeoGebra sem um pensamento algébrico mais atuante, ou seja, pensar com a tecnologia mas tomando o cuidado de entender as particularidades dos padrões na relação número de lados com a soma dos ângulos internos do polígono convexo. Isto dificultou, de certo modo, a dupla na descoberta da fórmula, posteriormente, para sintetizar.

Essa estratégia de resolução de construção de outros polígonos foi proposta no protocolo e prevista na análise *a priori*. Porém, a expectativa era que a dupla D4, como as demais, criasse conjecturas e evoluísse a partir das novas descobertas de padrões e desse modo estendesse o domínio.

Por outro lado, as duplas D3 e D4 construíram uma tabela com esses dados coletados e utilizaram a planilha do GeoGebra para anotação e análise dos dados – Quadro 5.

Quadro 5: Construções de tabela da dupla D3 na atividade 01 em uma nova janela do GeoGebra.

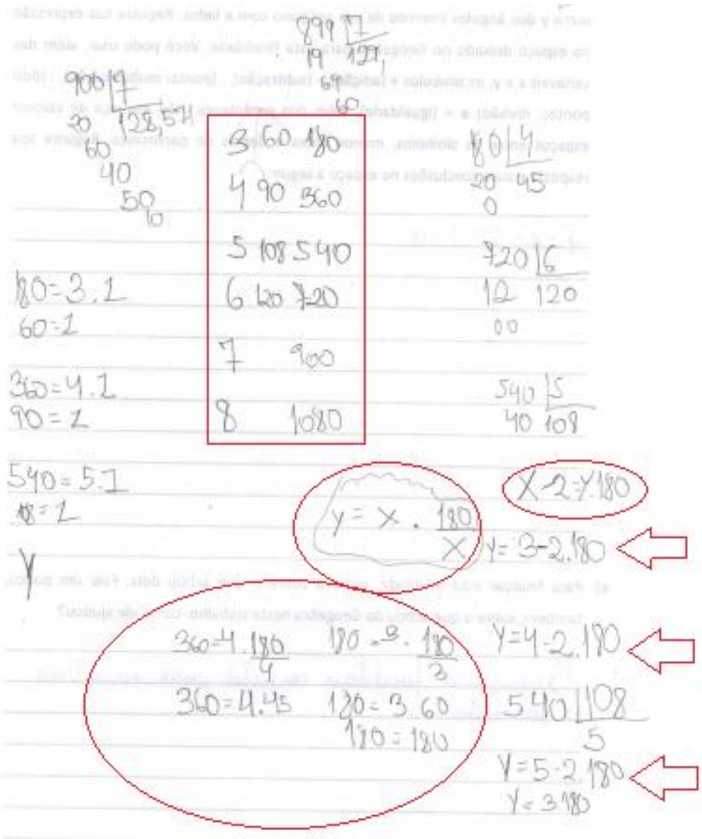


Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Tais dados posteriormente serviram de base para criar novas conjecturas para a validação. O que explica essa percurso é a facilidade que o sujeito G tem com o GeoGebra, perceptível nas experimentações iniciais da dupla que resultaram rapidamente em avanços. Vale a pena entender que a presença da tecnologia midiática por si só não é garantia de sucesso do aprendizado; antes, serve como estratégia didática bem articulada que leva o sujeito a refletir sobre suas próprias ações e, a partir dessas reflexões, chegar a novos entendimentos.

A questão “c” é uma retomada da questão “b”, porém para polígonos mais distantes, com 73 lados (12780°), 98 lados (17280°) e 502 lados (90000°). Observando essas situações, os sujeitos entraram em um processo de revisitas às conjecturas e validações anteriores com o objetivo de encontrar padrões úteis que pudessem ser usados em novas conjecturas. Assim, o uso software GeoGebra possibilitou simular novas situações: usar a planilha para digitar os dados coletados e, a partir destes dados, analisarem as relações entre o número de lados do polígono com a sua corresponde SAIP. Um trabalho investigativo que mobilizou o raciocínio matemático avançado com movimento de ação, formulação e validação. A Figura 26 é parte da trajetória da dupla D4 para descobrir a fórmula. Compõe dados importantes para se entender o processo cognitivo da dupla.

FIGURA 26: Atividade 01. Parte do raciocínio algébrico da dupla D4



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

O contorno retangular é uma representação da relação encontrada entre a quantidade de lados do polígono com a sua respectiva SAIP. Estes dados foram coletados durante a experimentação da dupla D4 ao construírem os polígonos na nova janela aberta do GeoGebra, os quais também foram registrados na planilha no GeoGebra. Como se pode observar, a conjectura fica inviável para polígonos mais distantes, ou seja, com muitos lados. Então, a dupla partiu para uma nova conjectura (contorno circular). Nesse momento a dupla percebeu a existência de uma razão (fator multiplicativo igual a 180°), que anteriormente não foi entendida pelos motivos já mencionados. Essa conjectura foi descartada pela dupla porque a relação entre x e y não satisfazia as particularidades já descobertas conforme as anotações na figura 12.

Depois de várias experimentações acabaram observando que 180º era o fator que deveria ser multiplicado pela quantidade de lados diminuída de duas unidades. Este desenvolvimento pode ser observado na figura 12 como apontam as setas. Ressalta-se que, apesar do raciocínio estar correto, faltou uma anotação algébrica adequada, ou seja, $y = x - 2 \cdot 180$ é diferente de $y = (x-2) \cdot 180$ – faltou o uso dos parênteses. Essa forma valida e apresenta a fórmula como resposta à questão “c”.

Nem todos os possíveis desenvolvimentos complementares previstos na análise *a priori* foram utilizados durante a experimentação pelos sujeitos. À exemplo dos utilizados podemos citar:

• Construção de novos polígonos em uma nova janela, a utilização da planilha do GeoGebra, dupla D4;

• Uso da calculadora interna do computador, duplas D1, D2, D3 e D4.

Entre os desenvolvimentos não usados durante a experimentação e previstos na análise *a priori* está:

• Construção de gráfico que poderia vir a auxiliar os sujeitos na descoberta da fórmula (expressão algébrica);

• Multiplicação do número de triângulo internos que se pode construir a partir de um dos vértices do polígono, como ilustra o quadro 5;

• Desenvolvimento algébrico a partir de um sistema de duas equações onde cada equação seria formada pelos pontos que tem a abscissa representada pelo número de lados do polígono e a ordenada pela soma dos ângulos internos desse polígono.

• Para polígonos próximos a construção com régua e compasso, e posteriormente medindo os ângulos e adicionado, nesse caso sem o uso da tecnologia digital, mas possível de construção.

Se os sujeitos (dupla D4) tivessem construído o gráfico teriam, a partir dos pares ordenados digitados na planilha, a oportunidade de ver a lei de formação na janela algébrica e, neste caso, ir em sentido contrário das intenções desta pesquisa que procura, entre outros fins, o desenvolvimento do pensamento algébrica do sujeito, não somente fornecer uma mídia que dê a resposta, mas uma mídia que possa contribuir para o entendimento dos padrões úteis, da generalização e da síntese.

Ainda referente à tecnologia digital, o sujeito E da dupla D3, por ter maior afinidade com o Office Excel, levou a dupla a analisar os dados, por eles coletados, a partir da planilha Excel. Os dados foram articulados com as anotações feitas em papel, e a utilização do Excel se deu através das tentativas de formulação e validação. Como se percebe, a pesquisa não se limitou apenas ao uso do software GeoGebra, abriu outras possibilidades para outras mídias, pois um dos componentes do objetivo geral desta pesquisa é o entendimento da contribuição da tecnologia digital na construção do conhecimento do sujeito, não apenas atrelado ao uso do softwares GeoGebra.

Observou-se a inquietude de todas as duplas diante da situação representada pelo momento que antecede a descoberta da fórmula que Zazkis e Liljedahl (2002) descreveram como “tensão”, intervalo cognitivo entre o pensamento algébrico e a notação equivalente. A tensão só diminuiu quando eles conseguiram validar a conjectura que lhes pareciam mais viáveis, dando início a um estado de exaltação pelo feito. É o momento da descoberta, indescritível. Sem exceção, todas as duplas quando determinaram a fórmula comemoram.

Os intervalos que os sujeitos procuraram definir, através de informações em levantamento de dados coletados anteriormente, revisitaram as conjecturas iniciais, fizeram reformulações que muitas vezes não se tornaram úteis ao propósito, procuraram encontrar novos padrões, buscaram validar conjecturas por meio de tentativas de cunho algébrico e criando novas construções no GeoGebra em um processo de tentativa e erro para encontrar um caminho mais viável. Além de rascunhos no papel e registros compartilhados com gestos, desenhos e fala.

Esse intervalo chama a atenção desta pesquisa, pois se entende a necessidade de uma investigação mais aprofundada. Apesar disso, como já foi inicialmente embasado, é um intervalo que está diretamente relacionado ao pensamento matemático de natureza avançada e seu desenvolvimento é um processo em evolução e, como tal, acredita-se que trabalhar o raciocínio algébrico junto ao aluno desde os primeiros anos escolares em muito se contribuiria, porque se trata de reflexões aprofundadas sobre o próprio saber. Isto porque, conforme as considerações de Dreyfus (1991), o pensamento matemático avançado ocorre desde a infância – embora Tall (1991) sustente que está presente a partir dos anos finais do Ensino médio. Assim, um constante trabalho de muitas vivências sobre pensamento matemático de natureza avançada, que está ligado intimamente com a generalização de padrões, feita ao longo da vida escolar do aluno, contribuiria para reduzir a dificuldade dos sujeitos em generalizar e mesmo sintetizar, o que não impede a possibilidade de começar um trabalho para desenvolver o pensamento matemático de natureza avançada em outros estágios da vida escolar do aluno.

Especificamente, os sujeitos envolvidos nesta pesquisa tiveram a oportunidade, no próprio nono ano, junto a este professor pesquisador, de participar de situações propostas em sala de aula de atividades que abarcavam generalização de padrões como situações-problemas durante o aprendizado de funções do primeiro e segundo grau, conteúdo iniciado no nono ano do ensino fundamental e revisto com maior aprofundamento na primeira série do ensino médio.

Durante todo o experimento, os sujeitos usaram a tecnologia digital, algumas duplas mais, outras menos, segundo ao tempo que dispensaram para criar suas conjecturas e validá-las. Esclarecendo que nessa atividade existe a intenção de uma estratégia didática usando o

GeoGebra, tecnologia digital, que contribuísse com o reconhecimento dos padrões pelo sujeito de modo a auxiliá-lo na construção de imagens mentais associadas ao objeto matemático. Também propiciar o entendimento das relações existentes por meio das várias representações e, por conseguinte, interferindo no tempo de resolução.

O intervalo dispensado para a resolução de cada questão ocorre em ordem crescente conforme o aumento da dificuldade relacionada ao nível de abstração de cada etapa. Dito de outro modo, reconhecimento dos padrões próximos, padrões mais distantes, generalização e síntese, respectivamente as questões “b”, “c” e “d”, cada uma com intervalo cognitivo diferente das demais, e assim aconteceu durante a experimentação.

A questão “a” trata de perceber que independente da configuração do polígono pelo movimento dos vértices, a soma de seus ângulos internos será sempre a mesma, cujo intervalo para esse reconhecimento foi relativamente rápido para as duplas D1, D3 e D4: em média de 11 minutos. Isto se deveu, acredita-se, devido à influência da mídia.

A questão “b” instiga o sujeito a perceber regularidade que inicia com a SAIP do triângulo, menor quantidade de lados possível para a construção de um polígono, e se estende para polígonos próximos de quantidade de lado iguais a 7 e 8, que em média foi de 15 minutos. Aqui os sujeitos usaram planilhas no GeoGebra basicamente, novas construções de polígonos e desenvolvimentos em papel. Observou-se que os alunos tiveram dificuldade inicial para reconhecer as SAIP dos polígonos de 7 e 8 lados. As duplas D1 e D4 determinaram medindo o ângulo unitário, e multiplicaram por 180. As duplas D2 e D3 foram somando de 180º em 180º até chegar nos respectivos polígonos.

O distanciamento da quantidade de lados dos polígonos da questão “b” para “c” provocou nas duplas D2 e D3 um aumento da tensão, pois os sujeitos perceberam que suas estratégias de ir somando de 180 graus em 180 graus não era mais viável. Já as duplas D1 e D4 continuaram no mesmo caminho construindo os polígonos de 73, 98 e 502, tal como ilustração feita anteriormente.

Uma observação em relação à dupla D3 é que nas questões “b”, “c” e “d” os sujeitos praticamente usaram apenas suas conjecturas no papel e recorreram à calculadora do computador apenas para acelerar os cálculos que muitas vezes, pela agitação, acabavam sendo feitos no papel ou pelo calculo mental. Dê certa forma vai contra os comentários da dupla sobre o GeoGebra na questão “d”. Na entrevista a dupla relatou ao professor pesquisador que o GeoGebra só auxiliou no início da atividade, fato que pode ser constatado pela gravação.

A dificuldade aumentou quanto tiveram de descobrir o fator que seria multiplicado a 180º, que é o fator determinado pelo número de lados do polígono subtraído de duas unidades. A questão “d” é justamente a questão que pede para fornecer a expressão algébrica, a fórmula, que representa matematicamente a totalidade da situação proposta. Esse momento corresponde ao maior intervalo cognitivo do desenvolvimento da atividade, pois entram em jogo as vivências matemáticas de cada sujeito, a articulação dos dados coletados pelo sujeito durante a experimentação, a troca de ideias entre os integrantes da dupla, a fluência com a mídia e a persistência. Portanto, trata-se de uma situação matemática complexa, onde estão presentes os processos de abstrair e de representar.

A validação da propositura da pesquisa é constatada quando se percebe que o sujeito percorreu uma trajetória planejada e chega à síntese do objeto matemático. Nesse entendimento sobre o que se apresentou nessa atividade é sugestiva que a tecnologia digital e da temática generalização de padrões dentro da estratégia didática fez o efeito esperado.

Em alguns instantes foi necessária a presença do professor pesquisador para manter o espírito investigativo dos sujeitos até que as duplas determinassem a almejada expressão algébrica.

Na figura 27 pode-se ver os comentários dos sujeitos sobre a atividade e sobre a importância do software GeoGebra.

FIGURA 27: Atividade 01. Comentário dos alunos sobre a atividade.

e) Para finalizar esta atividade, escreva sobre o que achou dela. Fale um pouco, também, sobre o que achou do Geogebra neste trabalho: como ele ajudou?

DUPLA D1

TIRAR

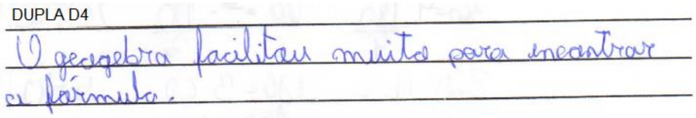
Tiras as próprias conclusões, gradativamente é algo muito interessante e o geogebra só auxilia nessas conclusões por apresentar a representação gráfica

DUPLA D2

Conseguimos perceber muitas coisas que sem o Geogebra seria impossível foi difícil mas depois que chegamos a formula tudo se tornou mais fácil.

DUPLA D3

Foi interessante fazer essa atividade porque pudemos criar fórmulas mesmo tendo poucos dados. O Geogebra nos ajudou a achar um caminho para fazer a fórmula.


DUPLA D4

O geogebra facilitou muito para encontrar a fórmula.

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

As duplas D1 e D3 usaram a palavra “interessante” para classificar a atividade 01. Dentro do contexto das respostas apresentadas a palavra está relacionada ao desenvolvimento da capacidade do sujeito em organizar por si mesmo suas investigações sem dependência total do professor pesquisador. A dupla D4 achou que o GeoGebra “facilitou” encontrar a fórmula. Já a dupla D2 menciona que a atividade foi difícil e o que ajudou a reconhecer os detalhes foi o GeoGebra.

> Na busca de padrões algebricamente úteis, as tecnologias de informação e comunicação (TICs) podem ter um papel decisivo, desde que utilizadas de forma crítica e reflexiva e no âmbito de uma estratégia didático-pedagógica que a veja como mediadora de um processo de busca por generalizações e/ou formalizações no âmbito da álgebra (OLIVEIRA, 2008, p. 295).

A dupla D2 apresentou dificuldades a partir da questão “c”. Não conseguiu, por si só, estender o padrão para polígonos com maior número de lados. Diante da situação caracterizada pela angústia e desanimo, o professor pesquisador fez-se presente. A mediação foi feita no sentido de induzir os sujeitos C e D à reflexão, por meio de perguntas e da sugestão de usarem mais os recursos do software GeoGebra. Assim, a dupla, ainda com muita dificuldade, acabou percebendo que o valor a ser multiplicado ao 180 graus era duas unidades a menos que o número de lados do respectivo polígono.

Todas as duplas estavam livres durante a experimentação para escolher e decidir suas ações sobre o milieu proposto, apesar do direcionamento sugerido pela estratégia didática construída.

No geral, ocorreram trocas de informações entre os elementos da dupla (D2) propiciando retroações, pois o conhecimento dos elementos dessa dupla faz parte do milieu de cada um dos sujeitos. As duplas fizeram conjecturas, determinaram padrões próximos, refutaram padrões não promissores e generalizaram os objetivos da estratégia didática com o uso de tecnologia sobre o tema generalização de padrões. Isto tudo propiciou avanços significativos na construção do conhecimento dos sujeitos.

O quadro 6 corresponde ao tempo de resolução das duplas D1, D3 e D4. Não foi possível contabilizar o tempo da dupla D2 devido a uma falha durante a gravação.

Quadro 6: Atividade 01 – Tempo de resolução das duplas D1, D3 e D4 com o uso do GeoGebra

	Dupla D1 (minutos)
questão a	6
questão b	3
questão c	14
questão d	34
total	57

	Dupla D3 (minutos)
questão a	10
questão b	19
questão c	23
questão d	7
total	59

	Dupla D4 (minutos)
questão a	7
questão b	11
questão c	8
questão d	38
total	64

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Como se pode observar, o tempo de duração para a experimentação, comparativamente, foi relativamente próximo: em média, 60 minutos – praticamente a duração de uma aula no colégio (55 minutos). Dessa forma, torna-se viável a sua realização em sala de aula. Bastam apenas alguns ajustes na estratégia didática. As duplas D1 e D4 apresentaram tempos próximos quanto a questão “d”, intervalos mais intensos onde fica nítida a tensão entre pensamento algébrico e notação algébrica proposta por Zazkis e Liljedahl (2002). O sujeito procura traduzir seus conhecimentos prévios e tenta associar aos dados coletados sobre padrão durante a experimentação para então tentar sintetizar. Essa tensão, no entendimento desta pesquisa, acontece também em outros momentos, principalmente quando o sujeito transpõe em suas conjecturas da formulação para a validação.

O tempo das duplas D1, D3 e D4, usado para entender a interface com a mídia, foi em média de 7,5 minutos, relativamente rápido, devido à facilidade não só desses sujeitos, mas de toda uma gama de alunos que nasceu dentro da era digital, que deve ser levado em consideração ao se construir uma estratégia didática com o uso de tecnologia digital.

Um fato relevante a observar se refere ao tempo das questões “b” e “c” quando adicionado para cada dupla. Os tempos ficaram de 17 minutos para a dupla D1, 43 minutos para a dupla D3 e 19 minutos para a dupla D4. Quando se compara os tempos, percebe-se que as duplas D1 e D3 necessitaram de um tempo para reconhecer os padrões muito próximos, respectivamente 17 minutos e 19 minutos, enquanto a dupla D3 precisou de mais tempo para o reconhecimento. Apesar de poucos dados para se chegar a uma conclusão definitiva, existe a possibilidade de estar relacionado à forma pela qual essas duplas encaminharam suas trajetórias investigativas. Como descrito anteriormente, a dupla D3 em relação às duplas D1 e D4 pouco usou a tecnologia para reconhecer os padrões úteis. Nesse sentido, existe a possibilidade do entendimento que a tecnologia digital veio a favorecer os sujeitos na busca de particularidades importantes relativas ao objeto matemático – soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

A gravação, por sua vez, permitiu a comparação a respeito dos tempos disponibilizados pelas duplas de modo a contribuir com o entendimento da importância que tecnologia tem dentro dessa estratégia didática.

4.6 Análise *a posteriori* da atividade 02

O propósito que se pretende alcançar com a análise *a posteriori* é o estabelecimento de relações com os objetivos que foram determinados para análise *a priori*.

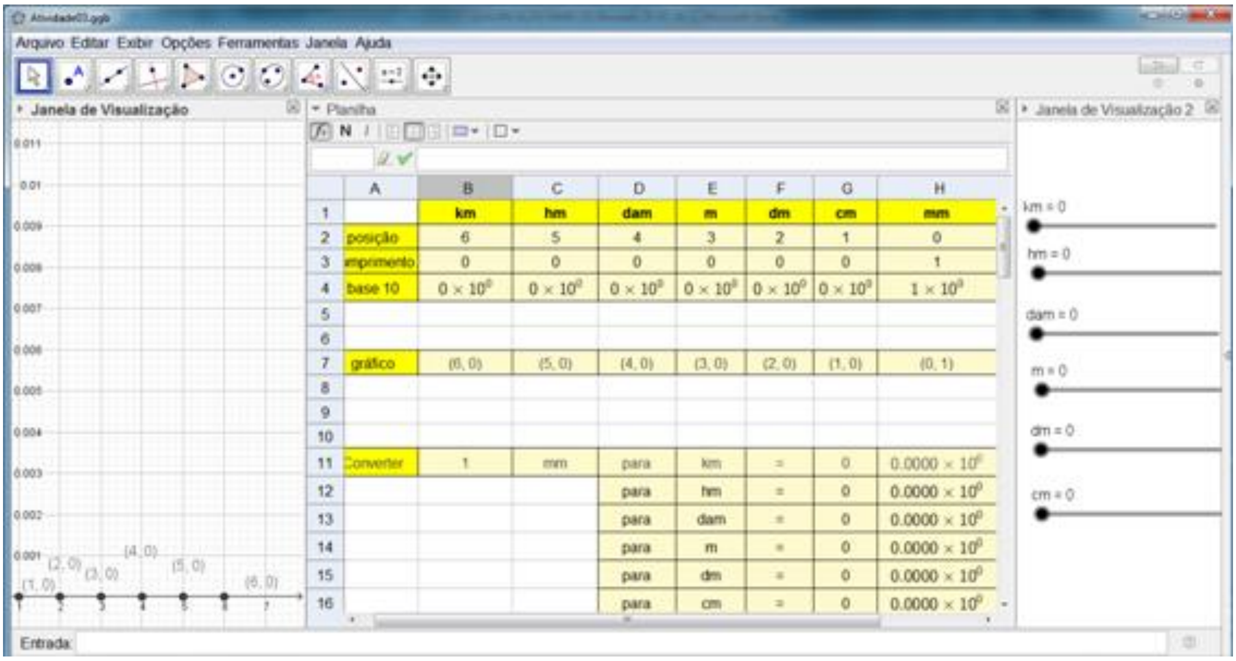
> A análise a posteriori depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente com a análise a priori realizada. (ALMOULOUD; COUTINHO 2008, p. 68).

Dessa maneira, alicerçado nas prerrogativas das variáveis didáticas potenciais estabelecidas na análise *a priori*, passa-se a analisar a atividade 02.

Procura-se proporcionar na atividade 02 um novo entendimento no aprendizado de conversão de unidade de medida de comprimento em que o sujeito viesse a construir ou mesmo reconstruir seus conhecimentos sobre o objeto matemático.

A estratégia com o tema generalização de padrões e o uso de tecnologia digital procura em uma trajetória investigativa favorecer o sujeito no aprendizado das conversões de unidade de medida de comprimento e levá-lo na sequência à descoberta da fórmula que permita à conversão de uma unidade a outra de mesma grandeza. Retomamos o quadro 7 para uma melhor visualização do que será explicitado a seguir.

Quadro 7: Visualização do arquivo da atividade 03 sem as manipulações



Fonte: Oliveira, G. Pastre; Oliveira, M. Lopes (2018)

Esperava-se que o sujeito, diante dessa situação, revisitasse seus conhecimentos ligados ao objeto eleito como a expressão exponencial, a representação de um número real na base dez, representação de um número real em notação científica e interpretação de gráfico. Desse modo, segundo Brousseau (1986), um bom problema é capaz de mobilizar elementos da estrutura cognitiva dos estudantes, os quais, todavia, não são suficientes para responder às questões suscitadas. Esses conhecimentos são componentes estruturantes dessa estratégia didática, intencionalmente convocados para propiciar contribuições na construção do conhecimento no tocante às representações interconectadas ao objeto matemático.

São possibilitadas duas representações: a geométrica e a tabular, que estão interligadas a movimentação dos controles deslizantes e ocorrem de modo simultâneo. Assim, quando os sujeitos manipularam os controles deslizantes na janela de visualização 2, perceberam, na janela de visualização 1, a movimentação em translado vertical e, ao mesmo tempo, a ocorrência de alteração do valor correspondente na planilha.

O objetivo inicial para essa atividade era o reconhecimento do quilômetro como unidade de referência, ponto de partida proposto para determinar seus valores equivalentes nas subsequentes unidades de medida de comprimento. A tabela a seguir, quadro 8, possibilita entender essa propositura.

Quadro 8 – Tabela de apoio

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm					
	1											
	1	0										
	1	0	0									
	1	0	0	0								
	1	0	0	0	0							
	1	0	0	0	0	0						
	1	0	0	0	0	0	0					
1km	=	10hm	=	100dam	=	1000m	=	10000dm	=	100000cm	=	1000000mm

Fonte: Oliveira, M. Lopes (2018)

Para evitar questionamentos, deixa-se claro que a unidade padrão de comprimento é o metro, conforme convenção do Sistema Internacional de medidas.

A decisão de trazer para a atividade 02 múltiplas representações está em constituir ferramentas que leve o sujeito, por meio de diferentes perspectivas, a formulações eventuais diferentes e a construção de imagens mentais associadas a essas representações vindas a possibilitar o desenvolvimento das concepções do sujeito sobre o objeto matemático estudado (ALMOULOUD, 2014, p. 64). Contudo, trabalhar com visualizações em si não caracteriza algo novo na educação matemática ou mesmo na tecnologia digital, mas tem potencial de ajudar o sujeito no desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente em suas abstrações (OLIVEIRA; LIMA, 2018, p. 1159).

Na experimentação, o sujeito procura descobrir padrões úteis ligados à conversão de unidade de comprimento. Nessa atividade, as conversões estão relacionadas à posição da unidade quando se toma como referência o quilômetro. As mudanças feitas pelos sujeitos via deslocamento dos controles deslizantes refletem sobre as células correspondentes ao comprimento, a base dez e o gráfico interconectado ao par ordenado.

Os pares ordenados que são formados automaticamente a partir do preenchimento da primeira tabela ocasionam movimentação dos pontos no gráfico que constitui outra representação das relações das variáveis dessa conversão de unidades que o sujeito pode vir associar também o objeto matemático, a função exponencial. A função exponencial é estudada no primeiro ano do ensino médio. Todavia, a interpretação de gráfico se inicia no nono ano. Por isso, esperava-se que os sujeitos pudessem usar essa representação para apoio suas conjecturas a respeito da expressão algébrica que permitisse converter de uma unidade a outra no sentido quilômetro para milímetro.

Há uma tabela de conversão, em um campo da mesma planilha, célula B1, possível de ser digitado o valor a ser convertido para as demais unidades que a mídia apresenta em notação cientifica. A representação de um número real em notação científica é citada na BNCC (2017), conteúdo a trabalhar no nono ano do ensino fundamental – *"Números reais: notação científica e problemas";* em relação às habilidades – *"(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações"*, habilidades, estas, empregadas na atividade 02.

Nesse domínio, as experimentações realizadas pelos sujeitos são suportadas pelo dinamismo próprio da interface do software GeoGebra. Pretende-se, assim, potencializar o processo de aprendizagem para que as duplas venham a criar conjecturas a partir da mediação do uso da mídia digital focado no desenvolver autônomo do sujeito. Segundo BNCC (2017):

> Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

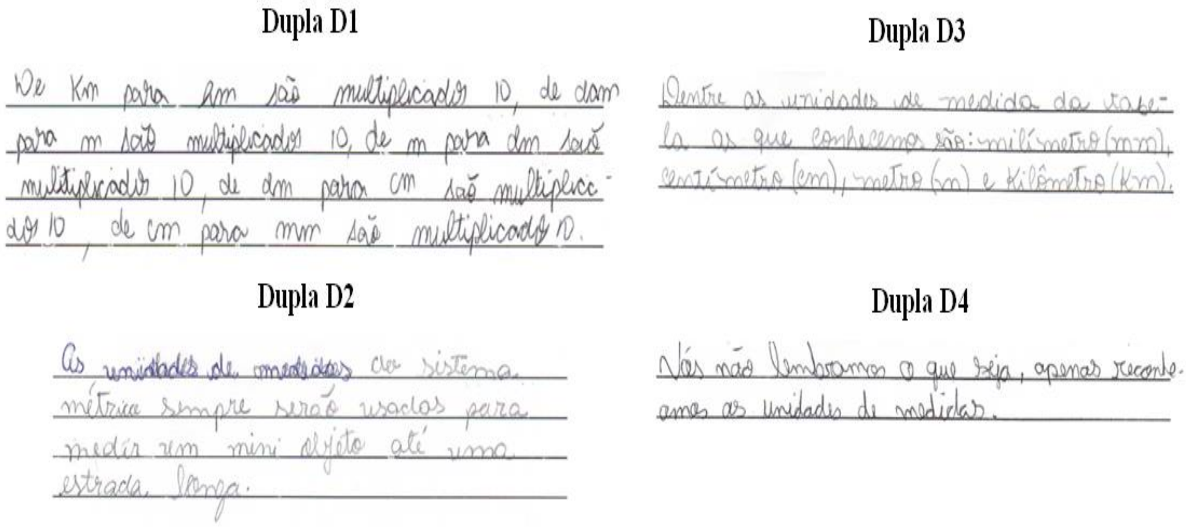
O objetivo é a descoberta, pelos sujeitos, da relação existente entre a unidade de medida de comprimento com sua respectiva representação na base dez. Escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos de conversões. O sujeito passo a passo faz experimentações que podem ser visualizadas nas representações mencionadas de forma que possa ser conduzido a abstrair o conceito (DREYFUS, 1991) e até mesmo alcançar novos patamares, como a generalização e a síntese. Dessa forma, é visível a intenção que se pretendeu estabelecer na situação proposta em suas diferentes linguagens e formas, para representar o objeto matemático ao sujeito baseada nas chamadas realizações didáticas, onde se pretendem que o aprendizado aconteça dentro das interações entre *conhecimento*, *professor*, *sujeito* e o *uso da tecnologia* com a linguagem envolvida: escrita, imagens, comunicação instantânea, que são agentes importantes no ensino da Matemática. O sujeito, em princípio, é um ser sociável que age e pensa e, dessa maneira, cria suas próprias representações a partir das noções que elaborou durante a experimentação que, na visão de Brousseau (1986), seguem três dialéticas: a ação, formulação e validação.

Para entender os experimentos realizados pelas duplas D1, D2, D3 e D4 na atividade 02, a análise *a posteriori* parte do exame dos dados coletados nas gravações, observações, questionamentos e anotações em um confronto direto com o que se visualizou na análise *a priori*, em caráter colaborativo, para o aprimoramento dos conhecimentos didáticos.

Inicialmente, o sujeito foi levado a refletir sobre seus conhecimentos prévios a respeito do sistema métrico decimal, ou seja, o que ele sabia a respeito. Em primeiro momento sem usar os recursos do GeoGebra com a finalidade de manter sua atenção centrada nas unidades que compõem a tabela, apresentada na mídia da atividade 02 e, em seguida, passasse a escrever sobre o que já conhecia.

A respeito da sondagem inicial sobre os conhecimentos prévios do conteúdo eleito, parte-se das observações de anotações das duplas, figura 28.

FIGURA 28: Conhecimentos prévios – Atividade 02



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

As duplas D1, D2, D3 e D4 mostraram que sabiam identificar e nomear as unidades, porém diferenciam umas das outras quanto ao modo de se expressar. A dupla D1 explica que para converter um valor de unidade de medida de comprimento para a sua imediata unidade inferior, basta multiplicar por dez; a dupla D2 relata que as unidades de medida de comprimento são empregadas para medir objetos de dimensões que vão de dimensões reduzidas a maiores, como exemplo uma estrada; a dupla D3 apenas nomeia as unidades de medida de comprimento; a dupla D4, disse: “Nós não lembramos o que seja apenas reconhecemos as unidades de medidas”. Portanto, entre as duplas, somente a dupla D1 lembrou-se do fator multiplicativo de conversão para o sistema métrico decimal. Assim, tinha o entendimento do padrão para converter unidades sucessoras, permitindo a dupla na etapa seguinte da atividade experimentar e validar essa conjectura e expandir seus conhecimentos para unidades mais distantes. Essa descrição procura trazer dados referentes à variável local potencial dependente do conteúdo matemático de dimensão epistemológica, os conhecimentos prévios.

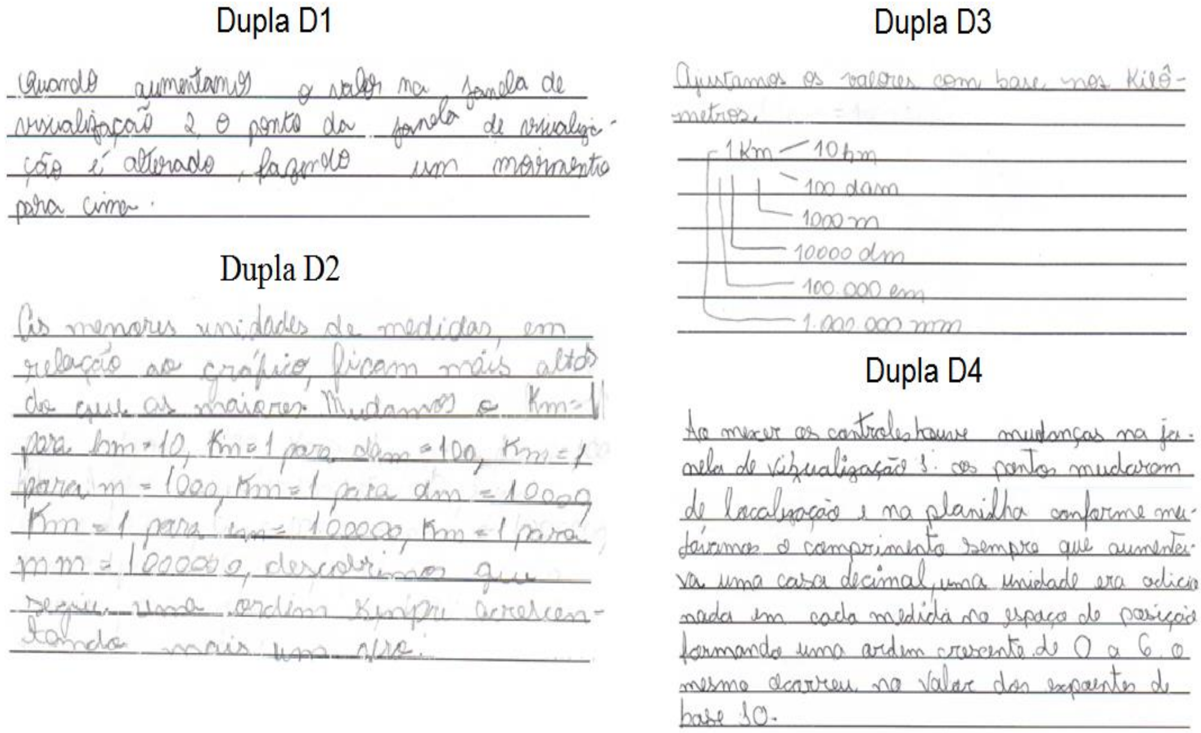
O item “a” dessa atividade 02 procura chamar a atenção do sujeito para a existência de uma relação entre as unidades, bem como mostrar que a referência nessa atividade é o valor unitário de um quilômetro, o qual o sujeito deve partir para determinar o valor das demais unidades de mesma grandeza.

As duplas são convidadas a experimentar os recursos do GeoGebra, isto é, manipular os controles deslizantes propositadamente construídos com a finalidade de que o sujeito viesse a observar a mudança na tabela e na janela de visualização gráfica. Tais recurso digitais podem ajudar o sujeito a compreender a tabela e posteriormente estabelecer um relação válida entre as unidades. Procurou-se alinhar a tecnologia digital com a estratégia didática para não ocorrer situações em que o aluno é mero repetidor de tarefas sem realmente compreender o objeto matemático a aprender.

Em relação à fluência com a mídia, variável potencial de ordem geral de dimensão didática, procurou-se levantar informações sobre o desenvolvimento do sujeito durante a atividade. Buscou-se chamar a atenção dos sujeitos para o descobrimento do funcionamento da atividade com o uso da tecnologia digital, software GeoGebra. Foi o momento que o professor pesquisador teve para coletar informações sobre o desdobramento do sujeito para superação à falta inicial de fluência com a mídia. Observou-se que os sujeitos entenderam rapidamente a atividade e tiveram facilidade para apreender a trabalhar com a mídia.

As duplas partiram de observações mais gerais para observação vinculadas à particularidade. Entre as particularidades, os ajustes dos valores para cada unidade equivalente a um quilômetro. A figura 29 traz as resposta das duplas para a questão “a”.

Figura 29: Atividade 01 questão “a” – descrição das duplas

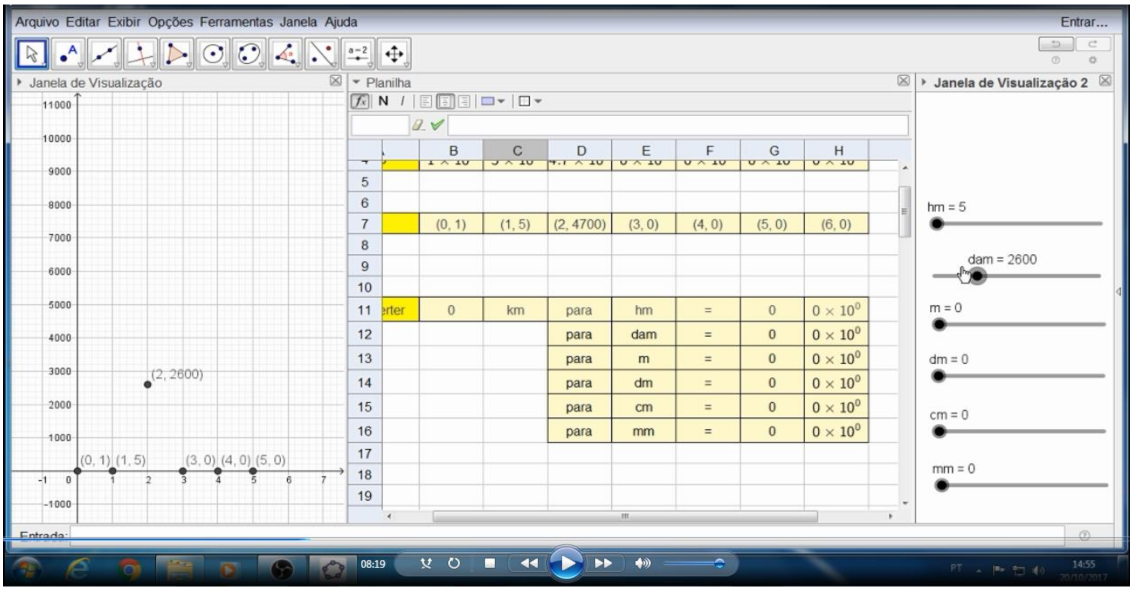


Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Observando a figura 29, percebe-se que as duplas D2 e D3 entenderam o questionamento, descobriram a unidade base de referência para essa atividade, o quilômetro, e fizeram as devidas conversões para as demais unidades partindo do quilômetro. Demonstraram, então, reconhecimento sobre o padrão e fizeram as conversões.

A questão “a” também solicita ao sujeito que explore os recursos do GeoGebra. As duplas D1 e D4, neste âmbito, relatam suas observações nesse foco e segundo o dinamismo da mídia na atividade. No quadro 9 se pode observar a movimentação inicial da dupla D1.

Quadro 9: início da experimentação da atividade 1 no GeoGebra da dupla D1.



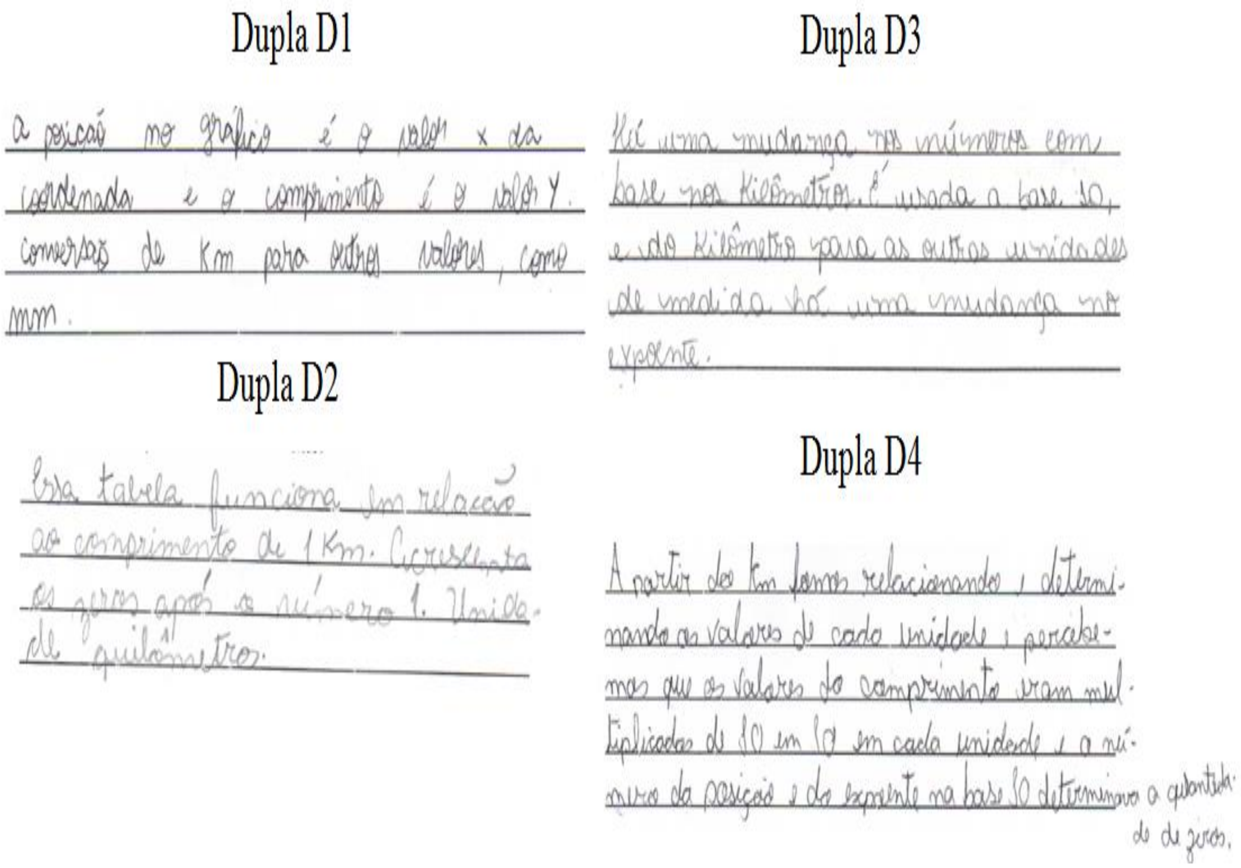
Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Observa-se que os sujeitos exploram os elementos da interface segundo os instrumentos disponíveis e tentam se apropriar da lógica, estabelecendo as primeiras ligações com o saber matemático em jogo na atividade (OLIVEIRA; LIMA, 2018, p. 1158).

No item “b” da atividade 2 o questionamento foi: *Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?*

Esperava-se que os sujeitos reconhecessem na tabela a existência de relações sugeridas entre posição da unidade, comprimento, base dez e o par ordenado. Nessa tabela são feitas as conversões de unidade de medida de comprimento que tem o quilômetro como unidade de partida, relacionado a um valor fixo de 1km.

Figura 30: Atividade 02 questão “b” – descrição das duplas



Dupla D1

a posição no gráfico é o valor x da ordenada e o comprimento é o valor Y. conversão de Km para outros valores, como mm.

Dupla D2

Essa tabela funciona em relação ao comprimento de 1 Km. Acrescenta os zeros após o número 1. Unidade quilômetros.

Dupla D3

Há uma mudança nos números com base nos Kilômetros. É usada a base 10, e do Kilômetro para as outras unidades de medida há uma mudança no expoente.

Dupla D4

A partir do km fomos relacionando e determinando os valores de cada unidade e percebemos que os valores do comprimento eram multiplicados de 10 em 10 em cada unidade e o número da posição e do expoente na base 10 determinavam a quantidade de zeros.

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

• Em relação “*a unidade a partir da qual as conversões são feitas”*, todas as duplas conseguiram reconhecer.

• Em relação ao “*tipo de conversão que é feita”*, as duplas D2, D3 e D4 descreveram seus entendimentos em relação às conversões de unidade de comprimento que são feitas na tabela. As duplas D3 e D4, mais especificamente a dupla D4, sugerem uma relação da posição da unidade com o expoente na base dez, padrão útil relacionado à generalização. A dupla D2 não havia, até então, percebido essa relação. Contudo, entenderam que ocorre o aumento de zeros após o número 1, que corresponde a um quilômetro.

A dupla D1 abriu comentários em relação ao gráfico, não exclusivamente a tabela. Estes comentários, como pode ser observado no quadro, têm o foco no par ordenado (x,y), em que a abscissa (x) é o valor da posição da unidade e a ordenada o comprimento (y). Não descreveu como a tabela funciona, que era uma das perguntas, mas comentaram sobre como os pares ordenados da tabela agem mutuamente com o gráfico. A explicação da dupla D1 para a conversão se refere ao sentido que ocorre a conversão, do quilômetro para as demais unidades.

A variável local de ordem geral e dimensão cognitiva, distração, aparece nessa situação, porque mais uma vez a dupla D1 deixou de responder partes da questão para explicar outra representação que não era a tabela. Assim, no lugar de atrelar sua resposta à tabela, conectou ao gráfico que não havia sido solicitado, apesar do par ordenado estar presente na tabela.

Por outro lado, o avanço dessa dupla sobre o entendimento das variáveis do gráfico representa contribuições da tecnologia digital e da temática generalização de padrões na construção do conhecimento dos sujeitos acerca do objeto matemático. Esse entendimento significa que anteriormente os sujeitos reconheceram alguns padrões úteis na tabela que permitissem chegar a essa observação.

Os sujeitos G e H, dupla D4, disseram: "[...] percebemos que os valores do comprimento eram multiplicados de dez em dez em cada unidade e o número da posição e do expoente na base dez determinava a quantidade de zeros". Então, as duplas foram criando conjecturas relacionadas ao expoente do número na base dez.

Por sua vez, para a tabela de conversão a partir do quilômetro, as trajetórias usadas pelas duplas, no geral, não foram iguais, a exemplo das duplas D1 e D3, que lembraram que um quilômetro equivale a mil metros.

O quadro 10 exemplifica como as duplas D1 e D3 completaram a tabela. Estas duplas lembraram que um quilômetro corresponde a mil metros e de sua representação na base dez com o expoente igual a três. A partir dessa referência se percebe que o caminho escolhido pelos sujeitos na conversão para as demais unidades está ligado à associação do valor com o comprimento, com a quantidade de zeros significativos e sua representação na base dez, mais especificamente ao valor do expoente, como se pode observar nas gravações. Dessa maneira, os sujeitos fizeram ajustes conforme a quantidade de zeros do comprimento e o valor do expoente da base dez.

Quadro 10: Construções atividade 2 da dupla D1 no GeoGebra – tabela

00:19:37

A	B	C	D	E	F	G	H
	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
osição	0	1	2	3	4	5	6
omprimento	1	1	2	0	1	10	1000
ase 10	1×10^0	1×10^0	2×10^0	0×10^0	1×10^0	1×10^1	1×10^3

00:19:53

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
osição	0	1	2	3	4	5	6
omprimento	1	1	2	1000	1	10	1000
ase 10	1×10^0	1×10^0	2×10^0	1×10^3	1×10^0	1×10^1	1×10^3

00:21:48

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
osição	0	1	2	3	4	5	6
omprimento	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
ase 10	1×10^0	1×10^1	1×10^2	1×10^3	1×10^4	1×10^5	1×10^6

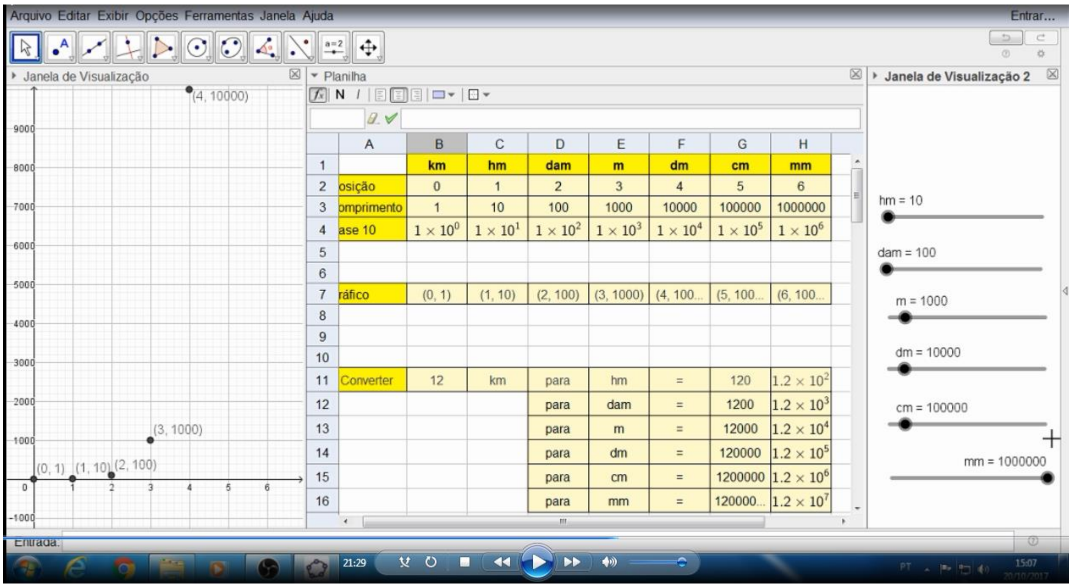
Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Dentro desse contexto informático-midiático a visualização e a experimentação são elementos importantes na produção do conhecimento pelo sujeito, são recursos que podem ajudá-lo nesse processo.

Na questão “c” as duplas foram orientadas a inserir valores na célula B11 da tabela e procurar entender como as conversões ocorrem a partir do valor digitado e perceber como as regularidades ocorrem. Nesse processo de inserir valores e verificar procurou-se levar o sujeito a uma trajetória de reflexão e descarte de conjecturas improváveis. Pretendia-se que na sequência eles pudessem criar novas conjecturas e validações.

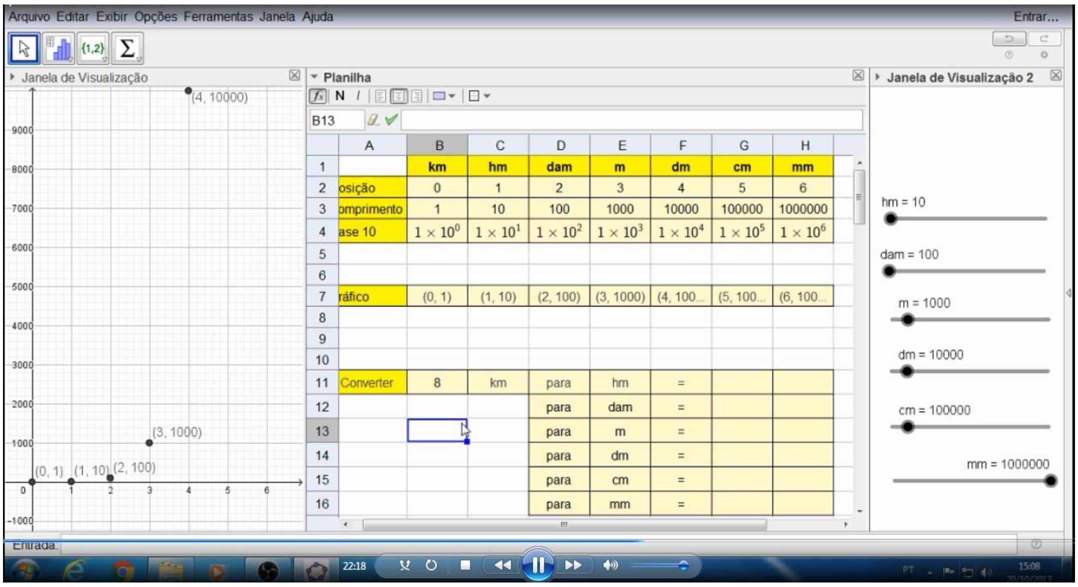
Cabe mencionar que a planilha de conversão onde se encontra a célula B11, quadro 11, apresentou um erro interno inesperado, pois deixou de realizar as conversões. Não foi possível afirmar se o erro ocorreu devido a um problema no hardware. Entretanto, procurou-se entender o fato analisando a gravação, então se percorre a gravação e não se constata nenhuma ação do sujeito que justificasse o erro repentino na planilha. O interessante que isso aconteceu após seu funcionamento normal por mais de vinte minutos. Tal erro é percebido quando se compara o quadro 11 com o quadro 12. Fato ligado a variável potencial local de ordem geral e dimensão didática e cognitiva.

Quadro 11: construções atividade 2 da dupla D2 no GeoGebra – tabela-conversão



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Quadro 12: Construções atividade 2 da dupla D2 no GeoGebra – tabela-conversão – erro na mídia 1

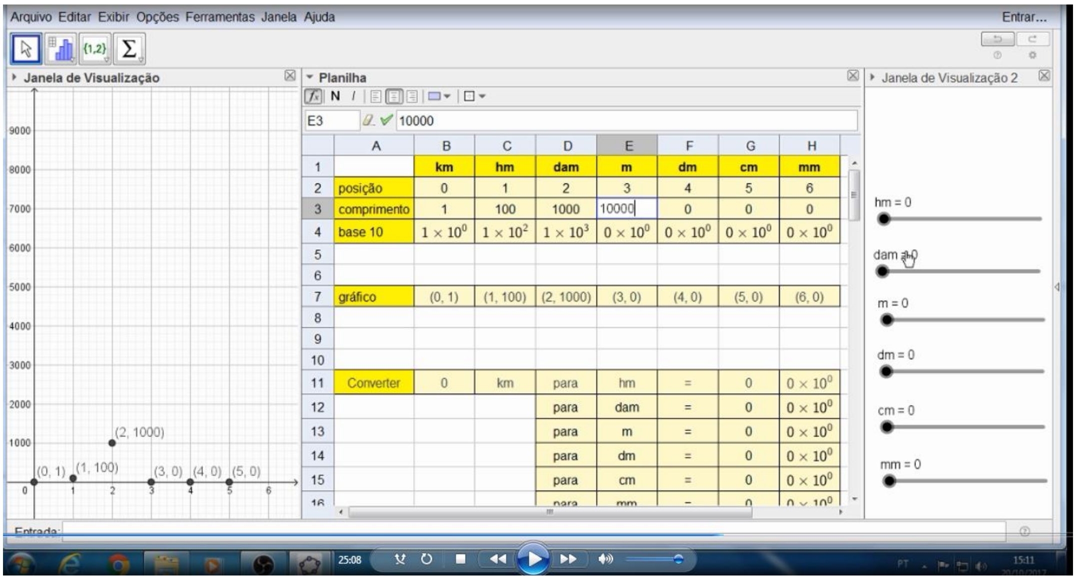


Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Diante da situação, a dupla D2 recorre ao professor pesquisador e, conforme orientação dada, reinicia a atividade 02 no GeoGebra com a esperança que o software volte a funcionar normalmente. Após a reinicialização da atividade 02 no GeoGebra, as funções referentes às conversões automáticas voltam a funcionar a partir da digitação do valor na célula B11. Por suas vezes, as células C3, D3, E3, F3, G3 e H3, que deveriam estar protegidas da digitação perdem esta função. Importante ressaltar que essa mudança relacionada às células desprotegidas não foi comunicada ao professor pesquisador. A ciência desse ocorrido pelo professor pesquisador se deu através das gravações. Desse momento em diante, a dupla D2 não usou mais os controles deslizantes, que acabou sendo deixado de lado, passando então os valores serem digitalizado diretamente nas células que deveriam estar protegidas – protegidas para que os sujeitos utilizassem os controles deslizantes como parte da estratégia. De tal modo, os sujeitos usaram outro percurso com a mídia, que não havia sido previsto. Frisa-se que mesmo digitando diretamente nas células a conversão automática estava ocorrendo. O relato desse erro é importante para entender que existem fatores na tecnologia digital que, de certa maneira, podem interferir durante a experimentação.

A mesma dupla D2 digitou na célula E3, célula que deveria estar protegida, um o valor de dez mil erroneamente, ao invés dos 1000 correspondentes à conversão de quilômetro para metro. Decorrente dos fatores externos, variável potencial de ordem geral, a distração, pois antes de ocorrer esse erro na mídia, a dupla já havia preenchido esse valor corretamente com o controle deslizante. Não se pode afirmar que a distração ocorreu devido à falha na mídia. Esse erro por distração acabou interferindo nas validações que se sucederam. Essa situação específica e inesperada na mídia de alguma forma atrapalhou os sujeitos na construção de seus conhecimentos, principalmente no tocante às validações necessárias para se chegar à generalização, pois se isso não tivesse ocorrido, a dupla até poderia ter chegado à validação e, quem sabe, à generalização e à síntese (ver quadro 16).

Quadro 13: construções atividade 02 da dupla D2 no GeoGebra – tabela-conversão – erro na mídia 2



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

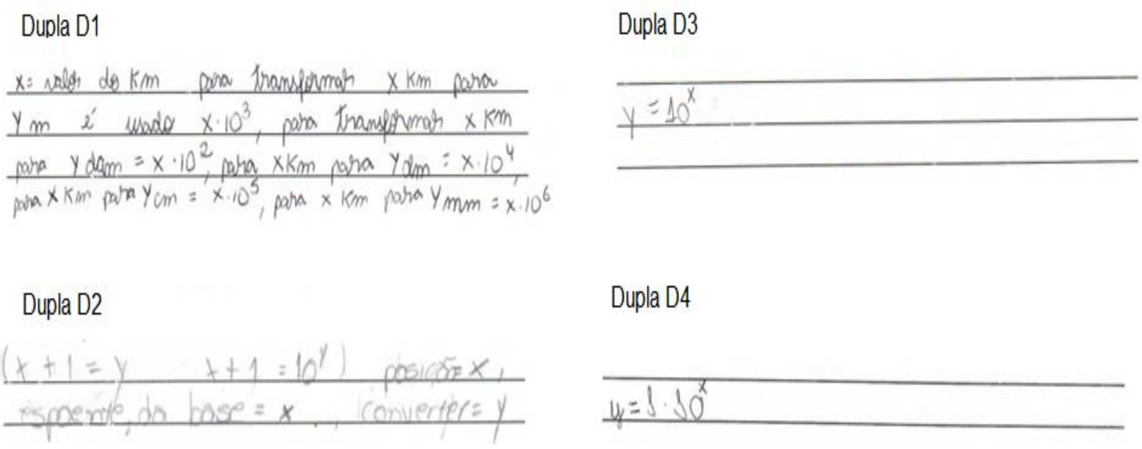
Apesar do planejamento minucioso de uma estratégia didática, a tecnologia digital pode falhar, e a estratégia didática muitas vezes precisa evoluir durante o processo para garantir o sucesso do aprendizado do objeto matemático eleito.

O item “d” pede para escrever uma expressão genérica, que sintetize as conversões, e que tome como base algumas das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. Recordando que a generalização e a sintetização são subprocessos do processo de abstração. Sintetizar, segundo Dreyfus (1991), é um processo no qual o sujeito simplifica a complexidade da situação em um processo construtivo de estruturas mentais a partir de propriedades relativas em um objeto matemático. Ao passo que a generalização está associada ao raciocínio dedutivo, induzir de um caso particular e expandir o seu domínio de validade. Sendo esses dois processos, generalizar e sintetizar, inseparáveis e complementares. Sob essa perspectiva, a abstração integra e relaciona as partes de maneira a compor o todo por meio de um objeto matemático. Os padrões, por sua vez, menciona Maison (1996), carregam sua importância como um dos elementos do pensamento algébrico e a generalização desses padrões é rota à Álgebra.

O objetivo era que o sujeito escrevesse uma expressão algébrica, a partir da substituição de uma parte variável por um número que permitisse uma resposta em termos das conversões. Momento de transformação algébrica que envolve a representação de variável, de números generalizados e da generalização, que são parte dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, momento, este, no qual ocorre a tensão entre o pensamento algébrico e a notação algébrica.

O que se observa na questão “d” é a tentativa das duplas de determinar uma expressão algébrica, a síntese, que poderia representar esse universo de conversões.

Figura 31: Atividade 02 questão “d” – expressão algébrica


Dupla D1

x= valor do Km para transformar x Km para Y m é usado $x \cdot 10^3$, para transformar x Km para Y dam = $x \cdot 10^2$, para x Km para Y dm = $x \cdot 10^4$ para x Km para Y cm = $x \cdot 10^5$, para x Km para Y mm = $x \cdot 10^6$

Dupla D3

$y = 10^x$

Dupla D2

($x + 1 = y$ $x + 1 = 10^y$) posição x, expoente da base = x, converter = y

Dupla D4

$y = 1 \cdot 10^x$

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Empregar na atividade a representação na base dez e em notação científica favoreceu os sujeitos a perceber que o fator multiplicativo era um número na base dez com expoente que deveriam relacionar a algum dado de maneira que permitisse estender o padrão para a totalidade dos casos apresentado.

A dupla D1 generaliza, porém não chega a representar a expressão algébrica propriamente dita, $y = m \cdot 10^x$, onde "y" representa o valor convertido, "*m*" o valor a converter, e o "*x*" o valor que representa a quantidade de fatores iguais a 10 que deverão ser multiplicados para se obter a conversão. Por outra perspectiva, o x é o valor da posição da unidade quando se toma como referência a unidade de quilômetro.

Os sujeitos A e B da dupla D1 consideram a letra x como o valor a ser convertido a partir do quilômetro. Para explicar como realizaram as conversões eles criaram alguns exemplos. Para converter de um valor qualquer da unidade de quilômetro para o metro eles usaram $Y[m]=X[km]10^3$ que não é a generalização, pois a variável dependente y, nesse caso, representa apenas o produto da conversão de quilômetro para o metro e não se estende para outras conversões a partir do quilômetro, mas chegando muito próximo da síntese.

A dupla D2 não conseguiu entender os padrões úteis e não chegou a se aproximar da expressão algébrica. O motivo provável é a digitação errada ao preencher a célula E3 correspondente à conversão para a unidade do metro na primeira tabela da planilha. Como já foi mencionado, falha na mídia e distração da dupla ao digitar um valor errado. Distração porque esse processo a dupla já havia feito corretamente antes da falha na mídia. Interessante é que a dupla comentou em entrevista feita posteriormente que eles ficaram tão concentrados em encontrar a expressão que acabaram não percebendo o erro.

A dupla D3 não incluiu o valor a converter na expressão algébrica. Entretanto, conseguiu perceber que esse fator multiplicativo, esse padrão, é valido nas conversões que experimentou.

A dupla D4 apresenta a seguinte expressão $y = 1 \cdot 10^x$, chegando próximo da expressão $y = m \cdot 10^x$, na qual considera o "x" como a posição, quantidade de fatores a serem multiplicados ou ainda quantidade de zeros significativos, tal como a dupla D2 mencionou. Na entrevista, os sujeitos relataram em que o valor "*um*" é decorrente da unidade de quilômetro como referência, unidade de partida. Isso inicialmente levou a entender que o raciocínio da dupla considerou apenas a tabela que parte de um quilômetro e não relacionou com o campo que permite a digitação, B11, um valor qualquer a ser convertido para as demais unidades e perceber outro padrão útil associado ao ente matemático. Contudo, a partir da resposta dada pela dupla D4 à questão “c”, percebemos que, apesar de terem usado um valor fixo com valor igual a “um”, reconheceram o padrão presente na tabela de conversão propriamente dita, aquela que converte um valor qualquer de quilômetro para as demais unidades em notação científica, e acabaram não incluindo na síntese, como se pode observar em seus comentários, figura 32.

Figura 32: Atividade 02 questão “c” dupla D4

Percebemos que a única mudança que ocorre é no valor (~~da multiplicação~~) da mantissa. Por exemplo: ao colocar 15 o valor da mantissa passa a ser 1,5; ao colocar 7 o valor da mantissa é 7 e o expoente da base 10 é 1 para km.

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Identifica-se um fato relevante da dupla D4 nesse movimento de ajustes para a validação como o questionamento ao professor pesquisador antes de apresentar a expressão algébrica: “devemos usar na expressão o comprimento ou a base dez”. Dito de outro modo, os sujeitos precisavam descartar um padrão que não levaria à generalização e validar um padrão útil que permitiria generalizar e sintetizar a situação.

É perceptível, nesse momento que antecede a determinação da síntese pela atitude dos sujeitos, uma movimentação cognitiva de intenção, descrita como “tensão”, já dita. As duplas retornam às conjecturas anteriores, analisam e voltam a fazer novas conjecturas e novas tentativas para validá-las. É o momento em que a atividade cognitiva do sujeito está acelerada ocorrendo articulações com observaram nas experimentações já realizadas. As agitação e troca de informação intensa é uma característica desse intervalo.

Dentro desse contexto o sujeito não cuidadoso pode dar saltos chegando a entendimentos e validações precipitadas que podem não representar a síntese, como é observado nessa atividade 02 nas duplas D1, D3 e D4. No entendimento desta pesquisa, a falta de fluência em reconhecer os padrões úteis, e, também, a falta da habilidade para generalizar e sintetizar. Isto marcou presença durante a experimentação, apesar de o professor pesquisador em sala de aula durante o nono ano do ensino fundamental com esses sujeitos ter empregador na construção de suas estratégias didáticas a temática generalização de padrões e o uso da tecnologia digital, mais especificamente o software GeoGebra. Como comenta Rossini (2006, p. 90), generalizar não é um processo natural e, dessa forma, há a necessidade de um trabalho árduo que se inicie nas primeiras vivências da vida escolar dos alunos. Trabalhar com essa temática é uma poderosa ferramenta para auxiliar ao longo da vivência escolar do aluno. É preciso, também, desenvolver o pensamento matemático de natureza avançada para que esses mesmos alunos venham a expressar suas próprias generalizações para que, assim, o docente possa se certificar que o pensamento matemático está ocorrendo (MASON, 1996, p. 65).

As duplas D1, D2 e D4 podem não ter determinado o ente matemático como se esperava, mas identificaram as relações, reconheceram os padrões úteis, foram de um caso particular e estenderam o domínio de validade (MASON 1999, p. 9).

Para entende melhor os dados coletados, foi realizado um estudo comparativo entre as questões "b", "c" e "d" que estão diretamente relacionadas à descoberta de padrões, generalização e síntese. O quadro 14 contém as tabelas que representam o tempo, em minutos, usado pelas duplas durante a atividade 02.

Quadro 14: Atividade 02 – Tempo de resolução das duplas D1, D3 e D4 com o uso do GeoGebra

DUPLA D1

QUESTÃO	TEMPO minuto
b	2
c	20
d	7
total	29

DUPLA D3

QUESTÃO	TEMPO minuto
b	8
c	4
d	20
total	32

DUPLA D4

QUESTÃO	TEMPO minuto
b	4
c	4
d	29
total	37

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

A média dos tempos totais das duplas D1, D3 e D4 foram de 33 minutos. Ao comparar o tempo disponibilizado para o reconhecimento de padrões, encontram-se as seguintes médias, referentes às questões "b" e "c": dupla D1 de 22 minutos, dupla D3 de 12 minutos e dupla D4 de 8 minutos.

Conforme o entendimento de Lee:

> Atendendo à simbolização algébrica ao explorar padrões no contexto de um curso de álgebra elementar para adultos foi um dos principais focos do experimento de ensino relatado por Lee (1996). De acordo com Lee, o principal problema para os estudantes não foi em "ver um padrão", mas em perceber um "padrão algebricamente útil" (p. 95). Quando os alunos perceberam um padrão de certa forma, era difícil para eles abandonarem sua percepção inicial. Uma visão flexível dos padrões deve ser desenvolvida para ajudar os alunos a encontrar esses padrões que podem levar à simbolização algébrica (LEE, 1996; INGLÊS e WARREN, 1998).

Ao comparar as tabelas, pode-se observar questões interessantes, relativas à generalização de padrões e o uso da tecnologia digital, principalmente relativa ao intervalo cognitivo que o sujeito parte para a descoberta da expressão algébrica. Procura-se entender por meio das características apresentadas nas tabelas, em um estudo comparativo entre as duplas, referindo-se ao tempo de resposta para os itens “b”, “c” e “d” da atividade 02. O reconhecimento de padrões nessa atividade 02 está associado às questões “b” e “c”, ao passo que generalização e sintetização para as questões “c” e “d”.

Em uma análise comparativa entre a atividade 01 e a atividade 02, relacionada ao tempo da resolução das questões “b”, ”c” e “d”, percebe-se, no geral, um comportamento exponencial das duplas D3 e D4, como se pode observar no quadro 16. Esse comportamento se explica pelo aumento da exigência para resolver as questões no sentido de “b” para “d”. A trajetória é composta de fases nesse sentido, reconhecimento de padrões úteis próximos, padrões úteis distantes, generalização e sintetização. Chama atenção a diferença entre o intervalo cognitivo empregado pelo sujeito para avançar do reconhecimento de padrões para a abstração, assim como os sujeitos no processo de descoberta de padrões se aterem a uma propriedade específica do objeto e acabarem desconsiderando as outras, ou invés de estabelecer a construção de relações mentais entre os objetos.

O comportamento praticamente linear do tempo de resolução apresentado das questões “b”, ”c” e “d” para a dupla D1 na atividade 02 e para a dupla D3 da atividade 01, conforme gravações, podem estar associadas ao fato de que essas duplas, nas respectivas atividades. pouco usaram os recursos oferecidos pela tecnologia digital. Nesse caso, por exemplo, a dupla D1 fez suas conjecturas e validações usando mais o instrumento lápis e papel que o instrumento digital disponibilizado no software GeoGebra para resolver os itens “b”, ”c” e “d” da atividade 02.

A conclusão sugerida nessa pesquisa é que ocorre redução do intervalo cognitivo à medida que melhora a fluência com a mídia e com o reconhecimento de padrões pelo sujeito. Porém, não se pode afirmar esse fato com grande convicção devido à quantidade insuficiente de dados para isso. Deixa-se, então, aberto a novas pesquisas.

Entre as representações disponibilizadas ao sujeito, o gráfico foi o recurso menos utilizado pelas duplas na trajetória para generalização e síntese, como se pôde verificar pelas gravações e nas anotações de professor pesquisador. Acreditava-se, conforme descrições na análise *a priori*, que os sujeitos poderiam usar desse recurso para validar suas conjecturas quanto ao comportamento exponencial da expressão algébrica.

A troca de informações durante a experimentação da atividade 02 se intensificou – ressalva para a dupla D4, na qual o sujeito G colocava suas conjecturas e o sujeito H poucas vezes se posicionou, praticamente assumindo a função fazer o registro. Esse fato chamou a atenção do professor pesquisador que fez uma nova mediação, pois é preconizada para essa pesquisa a troca de informações entre os integrantes da dupla de modo a um auxiliar o outro na dialética na formulação e na validação. Nas demais duplas não ocorreu a predominância de uma dos integrantes, eles realmente assumiram o papel de pesquisadores e, trabalhando juntos, comprovaram que o trabalho em dupla pode ser uma estratégia interessante para superar possíveis dificuldade que surgem durante a experimentação e diminuem a mediação do professor pesquisador. Isto porque passam a desenvolver a autonomia e aprender a trabalhar em sociedade. Segundo Lévy (1993), a construção do conhecimento matemático pode acontecer de múltiplas maneiras. No caso dessa atividade, colaborativamente, porque as estruturas das interações entre os integrantes das duplas se caracterizou pelo papel mais ativo de cada sujeito na construção do conhecimento.

4.7. Análise *a posteriori* da atividade 03

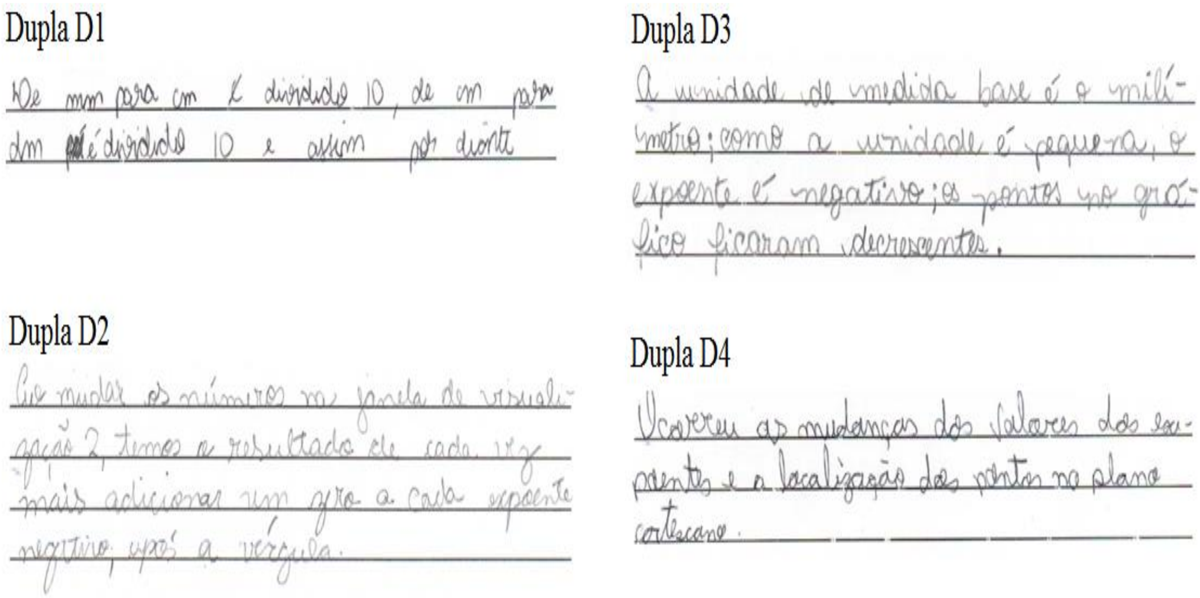
A fundamental atenção que deve ser dada à epistemologia do conhecimento e a necessidade de reconstruir qualquer conteúdo matemático, como respostas a algum assunto trazido à tona por meio de uma situação social, é o que fundamentou a atividade 3. A atividade 02 deixou uma situação a ser complementada, justamente as conversões que partem da unidade de milímetro em sentido ao quilômetro. Então, faltava uma reflexão acerca da totalidade desse conhecimento em relação à sua natureza e as etapas que constituem a conversão de unidade de medida de comprimento.

Nesta atividade 03 foi empregada como unidade base o milímetro para completar a trajetória de retorno das conversões. Essa mudança de referência também está fundada na intenção de provocar o desequilíbrio do sujeito, sair da zona de conforto que foi proporcionada pela atividade 02. Dessa maneira, o fator multiplicativo é diferente para cada uma das atividades. A atividade 03 tem o fator multiplicativo igual 10^{-x}, enquanto que a atividade 02 o fator multiplicativo é 10^{x}, onde x representa a quantidade de unidades avançadas ou retrocedidas na sequência de unidade de medida de comprimento. O sinal negativo simboliza a inversão do fator multiplicativo, representa a operação inversa da multiplicação, a divisão e, 10^{x} nessa circunstância é o divisor dessa operação $10^{-x} = \frac{1}{10^{x}} = 1:10^{x}$. Dentro do mesmo raciocínio, é multiplicar o valor a ser convertido por um fator fracionário, pois uma unidade representa uma parte de sua unidade imediatamente superior. Por exemplo, um milímetro é um décimo do centímetro; o centímetro é um décimo do decímetro; e assim por diante. São conhecimentos prévios a serem resgatados durante essa atividade, ou seja, variável local (ou variável microdidática) potencial dependente do conteúdo matemático de dimensão epistemológica.

No que tange a mídia, intencionalmente a atividade 02 e a atividade 03 foram planejadas com o uso dos mesmos recursos digitais, o que permitiu ao sujeito resgatar os conhecimentos relacionados à fluência com a mídia já adquiridos na atividade 02. Essa experiência com a atividade 02 favoreceu também as duplas no entendimento da lógica interna da atividade 03 devido a sua semelhança (variável local fluência com a mídia). Desse modo, aparece a dialética da ação, quando é apresentado o problema ao sujeito. Assim ele passa a formular suas conjecturas a partir da reflexão proposta na questão “a”. Essa proposta, por ser semelhante à atividade 02, permitiu aos sujeitos se sentirem mais confortáveis criando conjecturas com maior robustez. Consequentemente, a formulação e a validação foram realizadas dentro de um campo conhecido pelas duplas, e trouxe de certo modo tranquilidade para se sentirem mais seguros.

Segundo o enunciado da questão “a”: *Da mesma forma como na atividade anterior, procure seguir as instruções deste material exatamente como estão. Existe uma relação entre as unidades de medida da tabela a que nos referimos aqui, sendo que uma delas é tomada por base (não é a mesma da atividade anterior). Com o uso dos* **controles deslizantes** *que estão na Janela de Visualização 2, estabeleça uma relação válida entre as unidades mencionadas. Observe que a mudança nos controles gera mudança nas tabelas. Ajuste os valores como lhe parecer correto. A Janela de Visualização pode ajudá-lo, também, a compreender esta tarefa. Depois de manipular estes controles, registre suas descobertas no espaço seguinte*”. As duplas apresentaram as seguintes respostas (figura 33).

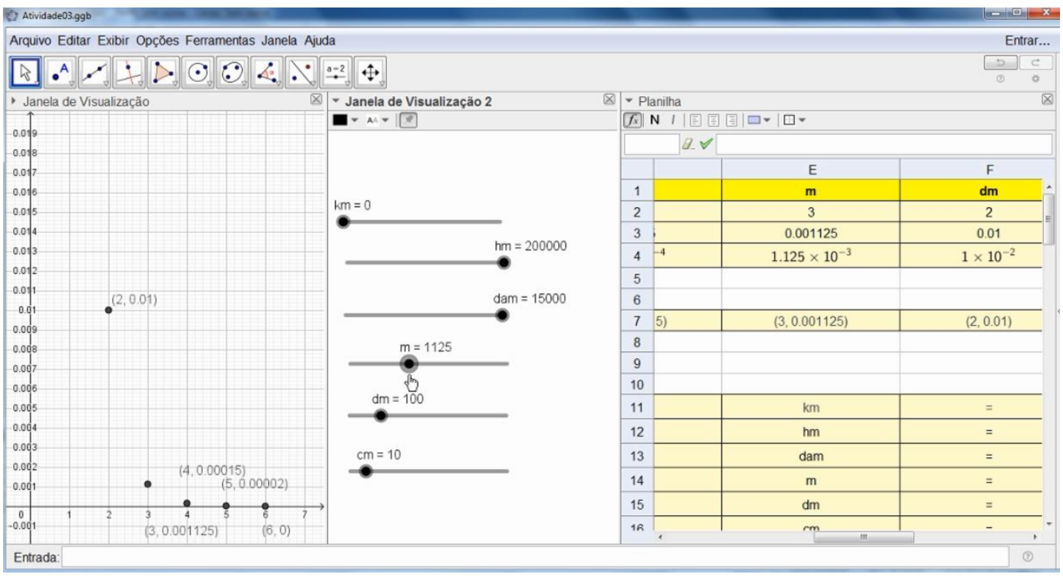
Figura 33: Atividade 03 questão “a” – descrição das duplas



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Com a questão “a” pretende-se inicialmente posicionar o sujeito na nova situação de modo que pudesse resgatar o conhecimento adquirido com a atividade 02. Também se questionam quais foram as descobertas feitas após as manipulações preliminares nesta atividade.

Quadro 15: Manipulação da dupla D1 na atividade 03 com o uso software GeoGebra



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

As duplas apresentaram, de modo geral, descobertas em focos distintos. Entretanto, as duplas D3 e D4 fazem menção ao expoente da base dez, quanto ao sinal e a mudança dos valores. Observa-se a descrição da dupla D3: "como a unidade é pequena, o expoente é negativo". A dupla entende que o valor em uma unidade superior comparado a outra unidade inferior representa uma parte, uma fração, por exemplo, do milímetro para o centímetro, $1mm \rightarrow \frac{1}{10}cm = 1 \cdot 10^{-1}cm = 0{,}1cm$. Durante o planejamento dessa sequência tomou-se o cuidado de empregar essas mesmas representações, na mídia. O objetivo foi de levar o sujeito a abstrair o conceito matemático envolvido nessa sequência didática, pois a observação e a compreensão feita pelo sujeito de tais representações podem favorecê-lo a reconhecer os padrões e partir para a generalização e a síntese (DREYFUS, 1991).

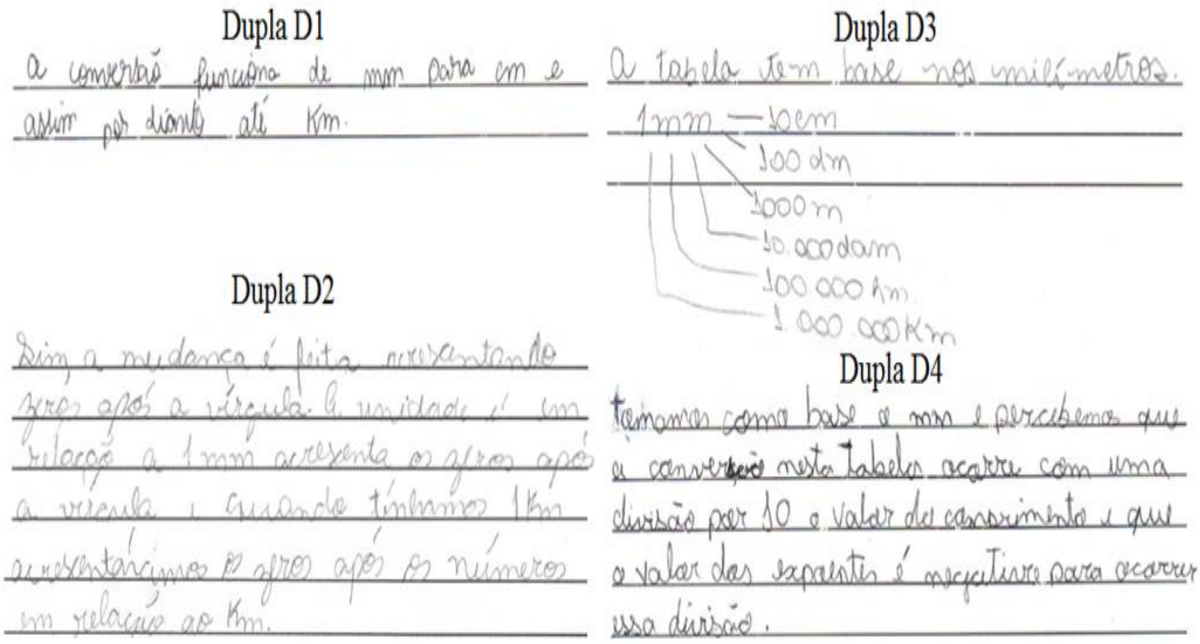
A dupla D2, nos campos comprimento e gráfico, fez uma observação em relação à quantidade de zeros adicionados após a vírgula no número em representação decimal. Assim, deslocar uma unidade imediatamente superior aumentará um algarismo após a vírgula – no comentário da dupla acrescenta-se um zero.

O foco dado pela dupla D1 é o fator multiplicativo 10^{-1} para a conversão. A dupla explica que para converter, de uma unidade para outra imediatamente superior, basta dividir o valor a ser convertido por dez. Também notaram que algebricamente é igual a multiplicar o valor a converter pela base dez que tem expoente oposto a um. Dessa maneira, apresenta seu entendimento, "De $x[mm]\_para\_x[cm] = x \cdot 10^{-1}$" e estende o raciocínio para a conversão das demais unidades a partir do milímetro.

Outra observação importante que não foi mencionada pelas duplas é a mudança dos valores das posições, exceto a unidade do metro. Na atividade 02 era crescente de 1 a 6, na atividade 03 decrescente de 6 a 1 devido à natureza da conversão nesses sentidos.

b) Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?

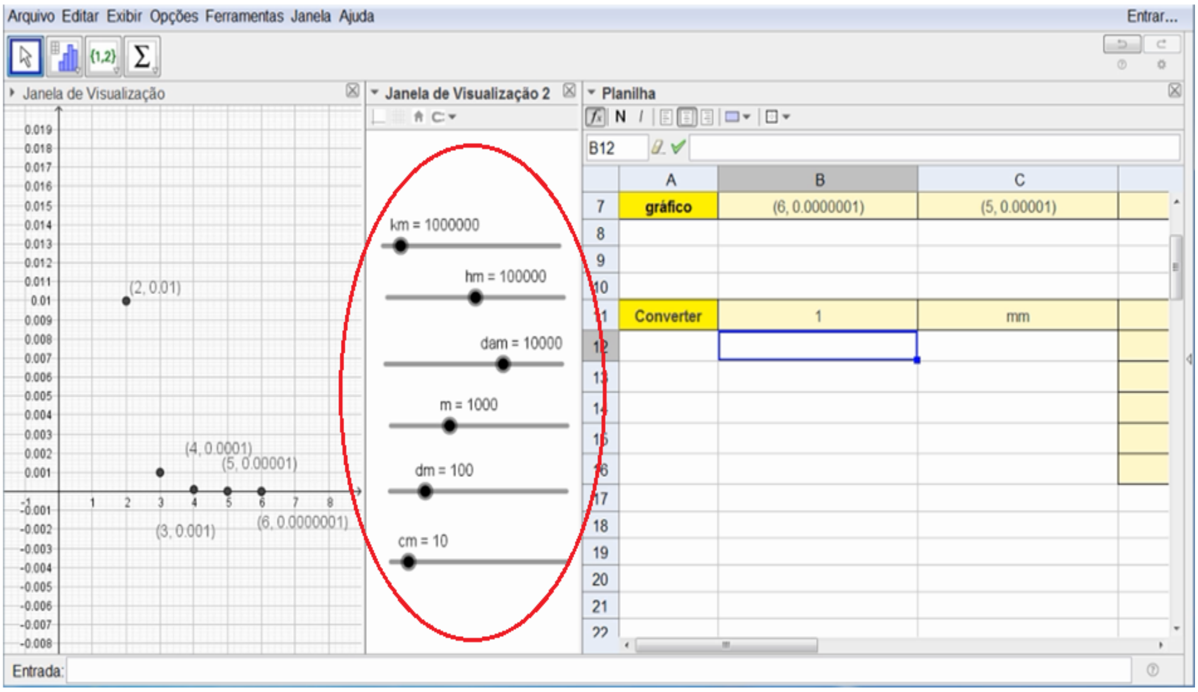
Figura 34: Atividade 03 questão “b” – descrição das duplas



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Procura-se compreender se o sujeito entendeu a lógica interna da atividade nesse item “b”. Conforme se percebe nas descrições, as duplas identificaram a unidade tomada como base, o milímetro. Quanto ao funcionamento da tabela, as duplas D1 relatam que as conversões obedecem ao sentido que vai do milímetro para o quilômetro e, conforme a dupla D4 relata, “ocorre com uma divisão por dez”, para ir de uma unidade para outra imediatamente superior. Já a dupla D3 fez um esquema relacionando a unidade de milímetro com as demais unidades. Contudo, a conversão apresentada no esquema não está coerente com conversão que tem como unidade de partida o milímetro. Pela entrevista, a dupla relata que o erro ocorreu porque fizeram uma associação errônea com os valores apresentados pelo controle deslizante, janela de visualização 2, que representam o denominador do fator fracionário, conforme quadro 16.

Quadro 16: Atividade 03 – dupla D1



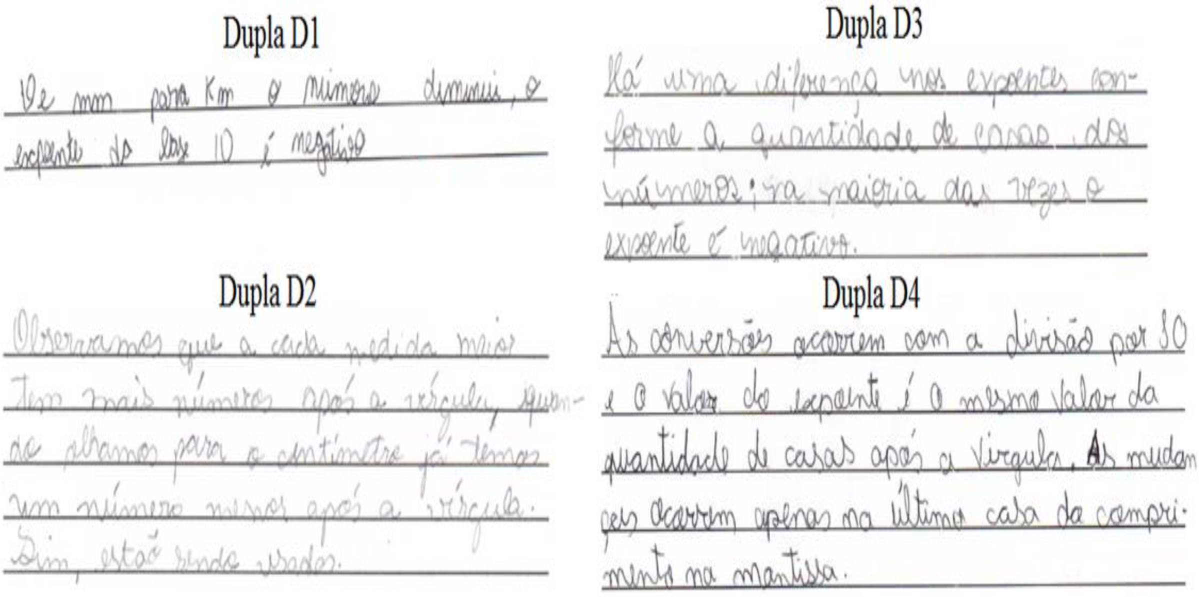
Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Esse fato ocorreu inesperadamente e não foi previsto durante a análise *a priori*. Será que é possível um ajuste na estratégia didática midiática para evitar que o sujeito faça uma associação errônea conforme ocorreu? Por outra perspectiva, a trajetória de construção do conhecimento não é constituída apenas de acertos, mas sim de muitas tentativas e erros, ou seja, conjecturas e validações que nem sempre se traduzem em validações coerentes, sendo esse processo parte do desenvolvimento do pensamento algébrico.

A dupla D2 traz em sua resposta o foco no sistema numérico decimal em relação a posição do número zero envolvendo o entendimento do significado do número zero em relação a ordem que ocupa dentro do número. Faz comentários à quantidade de zeros que são acrescentados ao número em relação ao sentido da conversão. Para essa atividade, quando se converter de milímetro no sentido ao quilômetro, é acrescentado o número zero após a vírgula – exemplo: 0,1; 0,01; 0,001,... e no sentido contrário após o número um, exemplo: 1, 10 ,100, ... O comentário da dupla representa uma particularidade, reflexo de um padrão, ou seja, o produto da multiplicação por um fator fracionário ao converter de uma unidade para outra imediatamente superior.

c) Agora, vamos para a tabela propriamente dita. Escolha alguns valores para verificar o que ocorre na conversão dos mesmos, escrevendo estas medidas na célula B11, logo após a palavra "Converter". Tente valores como 5, 6 ou 7, por exemplo, e valores maiores também, *como 67, 89, 150, entre outros. O que você observou sobre as conversões feitas? E as notações que estão sendo usadas?*

Figura 35: Atividade 03 questão "c" – descrição das duplas



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Na questão "c" o sujeito é estimulado a reconhecer particularidades comuns; ir de um caso particular para um caso geral e estender os domínios de validade de uma conclusão.

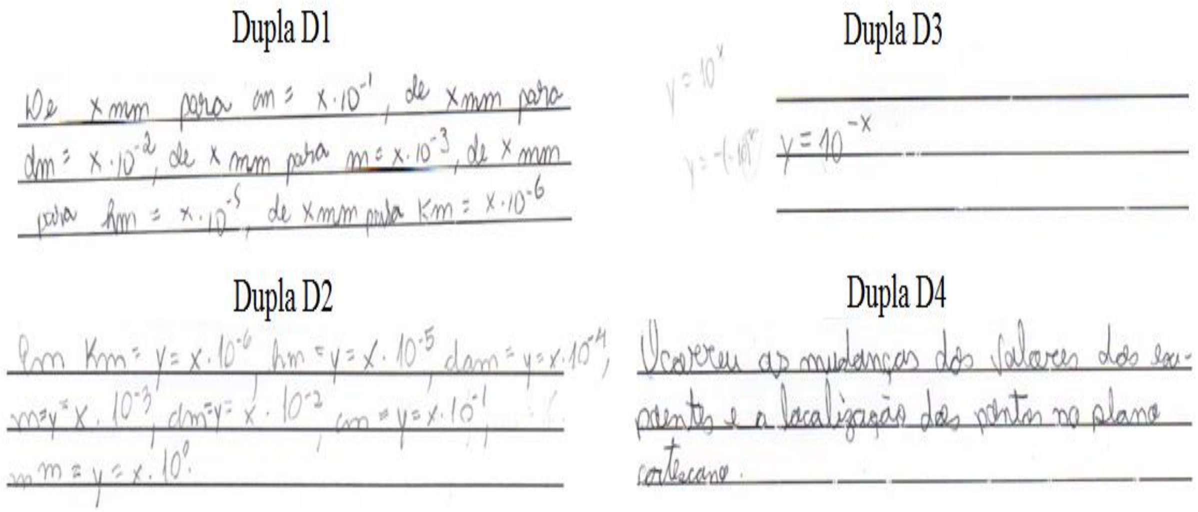
Como se pôde observar pelas gravações, as duplas D2, D3 e D4 inseriram alguns dos valores na celular B11 para entender a validade dos padrões encontrados. A dupla D1 resolveu ir por outro caminho, sem usar a célula B11. Esta dupla relata que não sentiu necessidade de usar a conversão pela célula B11 porque achou que era igual à atividade 02 e, por isso, já tinha uma conclusão.

A dupla D4 foi a única que mostrou entendimento das propriedades relacionadas às conversões de unidade de comprimento proposta na atividade, pois descobriram a existência de uma relação entre *posição da unidade*, *comprimento* e o *expoente da base dez* que pode ser útil para fazer a síntese. As demais duplas fizeram abstrações que não relacionavam as propriedades, somente refletiam uma entendimento isolado.

d) Escreva uma expressão genérica (uma generalização) para estas conversões. Para isto, tome como base alguma das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. A ideia é escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos das conversões que estamos fazendo.

A questão “d” solicita das duplas a generalização e a síntese. Para a análise, observe-se as descrições feitas pelas duplas na figura 22.

Figura 36: Atividade 03 questão “d” – expressão algébrica – descrição das duplas

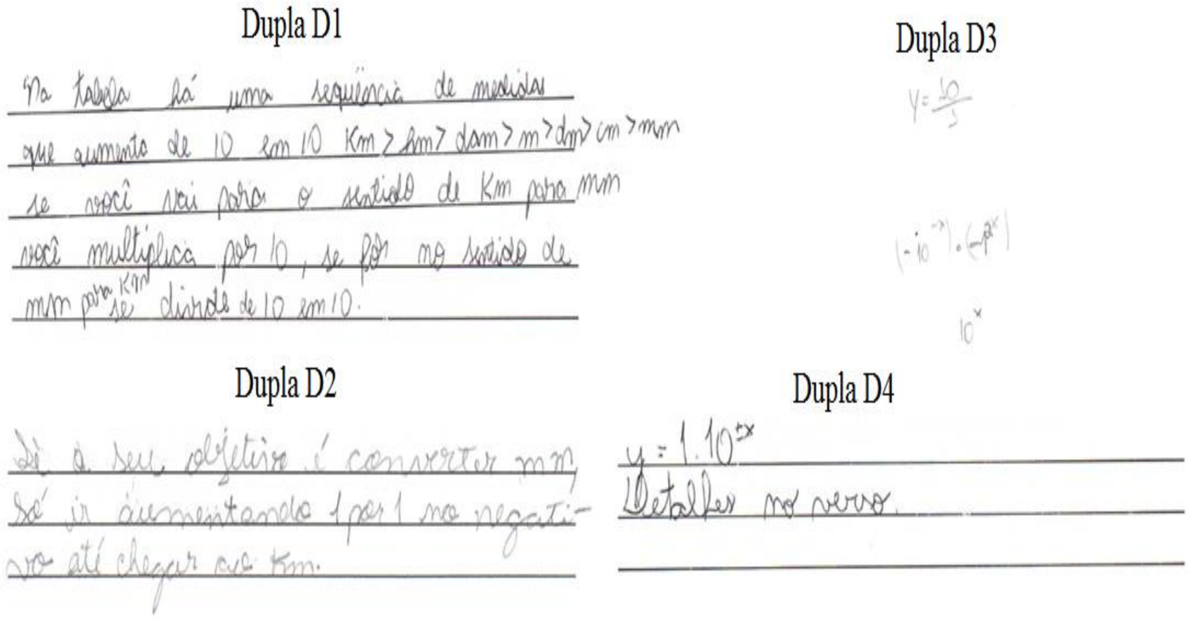


Fonte: Professor/pesquisador (2018)

A variável potencial dependente do conteúdo matemático de dimensão cognitiva se evidenciou nas respostas dadas pelas duplas, já previstas na análise *a priori*. Trata-se da dificuldade em generalizar e sintetizar. Mais uma vez os dados nos levam a entender que a generalização não ocorre naturalmente, requer um trabalho vinculado ao domínio do saber e pensar matemático e de uma constante vivência do sujeito com a temática. Fica nítida a dificuldade dos sujeitos em generalizar os padrões, transpor os dados em uma linguagem matemática, em um ente que represente a totalidade dos padrões úteis. As atividades 02 e 03 requisitam um nível de abstração final que os sujeitos não conseguiram atingir. As experiências anteriores em sala de aula com a temática e com o uso da tecnologia digital vieram a ajudar, mas não foram suficientes para chegar à síntese nas referidas atividades. Pode-se afirmar que sujeitos conseguiram avanços importantes como validar conjecturas acerca do reconhecimento de padrões úteis e generalizaram esses padrões.

e) Neste ponto, é bastante provável que você já tenha percebido a lógica que permeia as conversões que fizemos nas atividades dois e três. Vamos tentar avançar um pouco mais: proponha uma expressão, com base nas posições das unidades na tabela de medidas, que permita calcular a conversão entre quaisquer duas unidades. Registre no espaço seguinte como chegou às suas conclusões. Você pode usar o GeoGebra ou qualquer outro recurso computacional que desejar.

Figura 37: Atividade 03 questão "e" – expressão algébrica – descrição das duplas



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

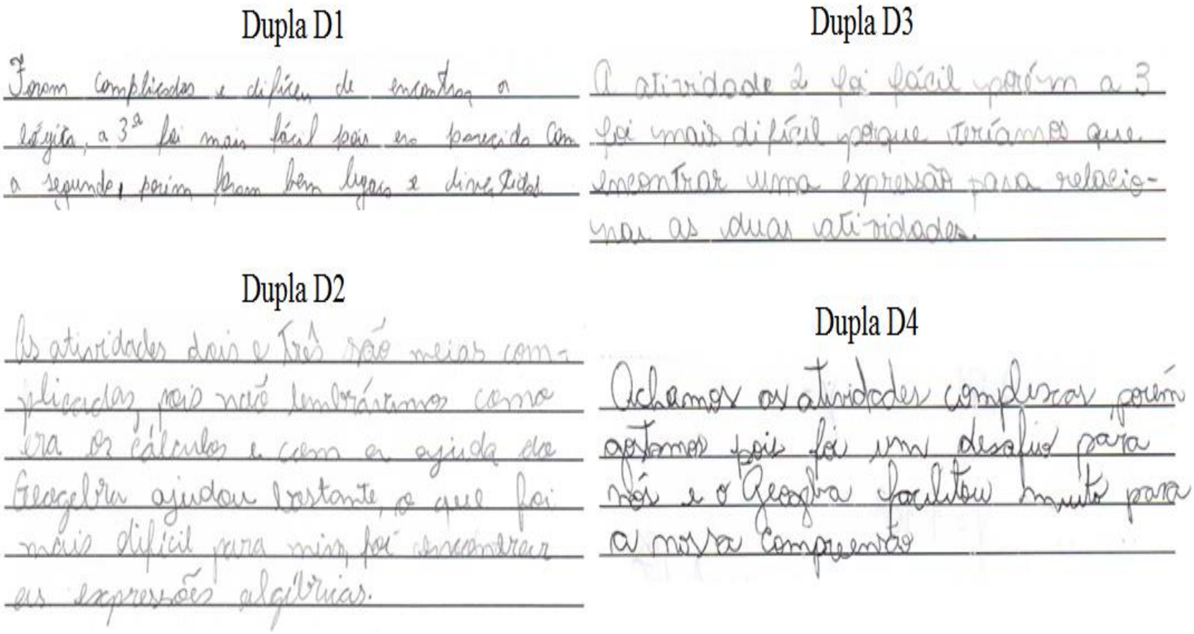
Observação no verso da atividade 03, questão "e", da dupla D4: a dupla fez os seguintes comentários: "O sinal determina pra ir ou pra voltar", "(-) determina divisão" e "(+) determina multiplicação".

Essa questão exige um nível ainda mais elevado de abstração dos sujeitos. A dupla D4 é a que mais se aproximou de um resultado coerente. Essa dupla apresenta uma expressão algébrica que só é útil para converter 1 km para as demais unidade inferiores e de 1 mm para as demais unidade superiores em uma única expressão apenas e para isso faz recomendações conforme seus relatos. Assim, não trata de uma expressão que sintetize a totalidade.

A Dupla D1 explica a lógica da atividade, porém não explicita a expressão.

e) O que você achou das atividades dois e três? E do uso do GeoGebra nestas atividades?

Figura 38: atividade 03 questão “f” – descrição das duplas


Dupla D1

Foram complicadas e difíceis de encontrar a lógica, a 3ª foi mais fácil pois era parecida com a segunda, porém foram bem legais e divertidas

Dupla D3

A atividade 2 foi fácil porém a 3 foi mais difícil porque teríamos que encontrar uma expressão para relacionar as duas atividades.

Dupla D2

As atividades dois e três são meias complicadas pois não lembrávamos como era os cálculos e com a ajuda do Geogebra ajudou bastante, o que foi mais difícil para mim foi encontrar as expressões algébricas.

Dupla D4

Achamos as atividades complexas porém gostamos pois foi um desafio para nós e o Geogebra facilitou muito para a nossa compreensão

Fonte: Professor/pesquisador (2018)

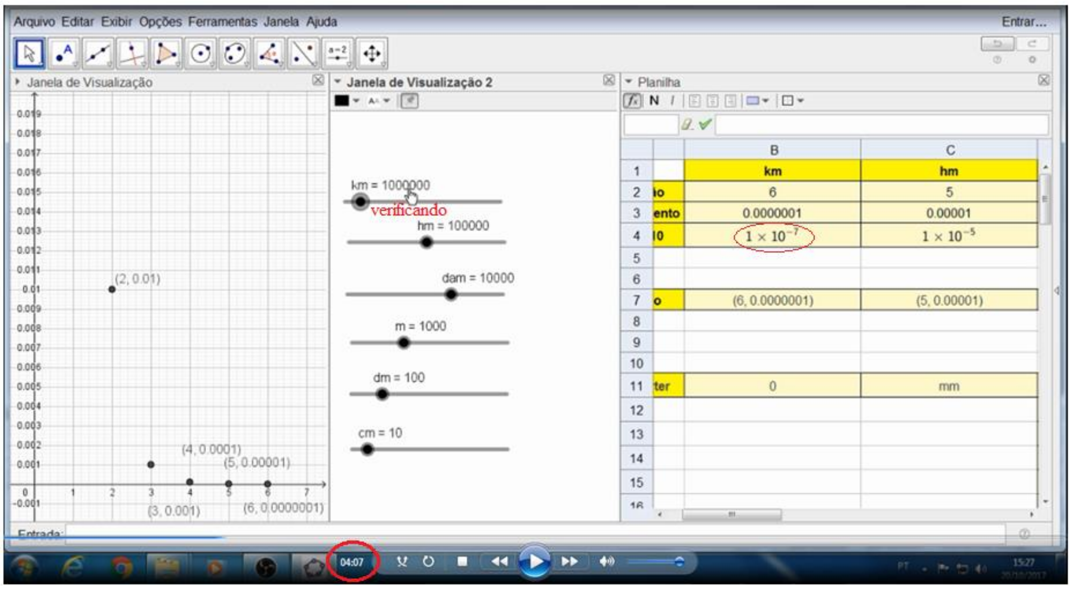
A questão “f” procura resgatar dados dos sujeitos para conhecer suas opiniões pessoais sobre as atividades 02 e 03, que, de certa forma, tem a intensão também de entender o nível de interesse que eles tiveram em realizar a experimentação, além de saber deles quanto o software GeoGebra contribuiu para superar as dificuldades encontradas nessas atividades.

As duplas D1, D2, D3 e D4 acharam as atividades 02 e 03 difíceis e complexas. Ao comparar os comentários das duplas D1 e D3 percebe-se opiniões opostas em relação ao nível de dificuldade das atividades 02 e 03. A dupla D1 achou mais fácil a atividade 03 porque já tinham conhecimentos prévios adquiridos com a atividade 02, enquanto a dupla D3 entendeu que a atividade 03 foi a mais difícil de realizar em decorrência de solicitar a expressão algébrica que expressasse as duas ao mesmo tempo, a trajetória de ida e de volta nas conversões de unidade de medida de comprimento. Para a dupla D2 a dificuldade nas duas atividades foi em determinar a expressão. A dificuldade, como se percebe, é referente a generalizar e, principalmente, sintetizar. Portanto, enquadram-se na variável local dependente do conteúdo e de dimensão cognitiva. A dupla D1 cita a dificuldade em entender a lógica. Na entrevista foi esclarecida que era referente a associar as informações para se chegar à expressão.

A fluência com a mídia não foi um problema a superar nessas duas atividades pelos sujeitos, pois rapidamente aprenderam a manusear os comandos digitais, do mesmo modo entender a dinâmica nas atividades ocasionadas pelo deslocamento dos controles deslizantes e da digitalização do valor na célula B11.

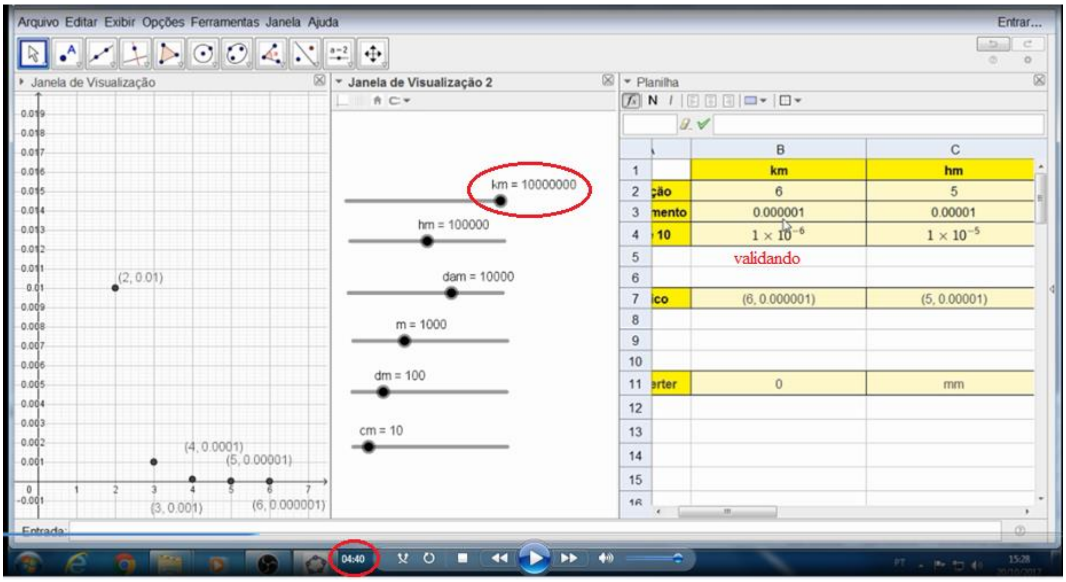
Em relação ao software GeoGebra, apenas as duplas D2 e D4 fizeram comentários, como se pode observar. Para saber como as duplas D1 e D3 pensavam sobre a contribuição do GeoGebra nas atividades foi necessária uma entrevista. Todas as duplas fizeram citações positivas a respeito das contribuições da tecnologia digital para superar dificuldade que foram aparecendo. Um dos pontos importantes do uso GeoGebra é que ele proporcionou aos sujeitos que fizessem validações locais durante a experimentação como os exemplos a seguir (quadros 17, 18 e 19):

Quadro 17: Etapa de validação da conjectura sobre o padrão descoberto – dupla D1



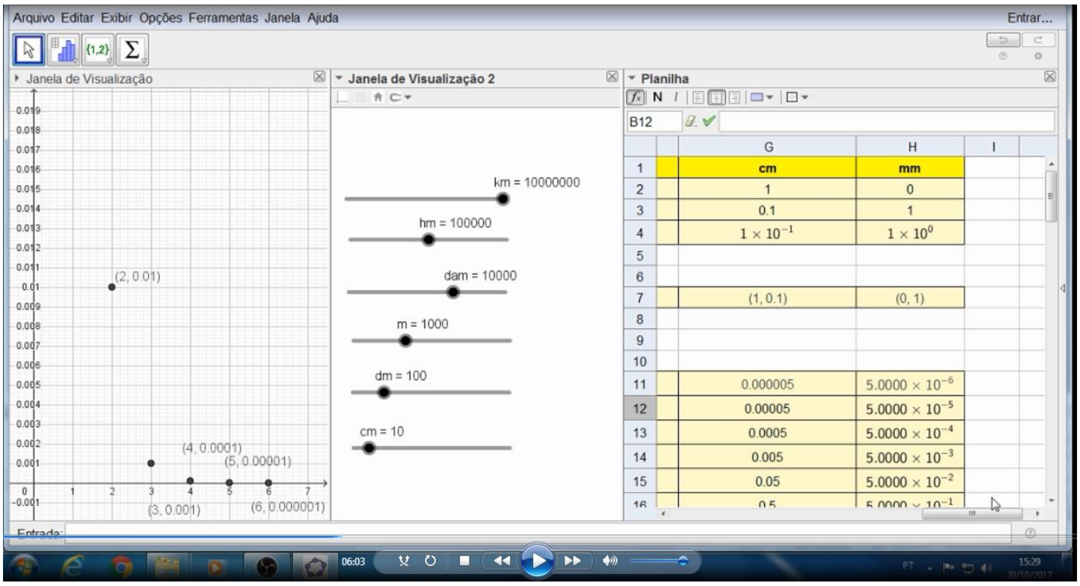
Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Quadro 18: Validando a conjectura relativa às conversões segundo a posição, comprimento e base dez – dupla D1



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Quadro 19: Validando a conjectura relativa às conversões apresentadas em notação científica – dupla D1



Fonte: Professor/pesquisador (2018)

Como se pode observar, a dupla D1 rapidamente finalizou a atividade 03, tomando a decisão de testar suas conjecturas diretamente na mídia para depois então preencher o protocolo, questionário em papel. Entende-se que a redução do tempo de resolução é fruto da experiência que a dupla D1 teve com a atividade 02. Não se pode deixar de mencionar os conhecimentos prévios que a dupla já tinha antes mesmo de começar a realizar a experimentação das atividades 02 e 03.

Nesse caso, para esta dupla foi uma oportunidade para resgatar e compreender o conceito matemático ligado às conversões sobre um novo foco, apesar de não conseguirem chegar à síntese.

Observou-se que, durante a resolução das questões matemáticas, as duplas trabalharam de forma colaborativa onde se percebeu a mobilização do pensamento matemático manifestado pela intencionalidade da sequência didática. O pensamento matemático se manifesta, acima de tudo, pelas decisões do sujeito diante de uma situação desafiadora. Algumas dessas decisões acabam não sendo suscetíveis de serem formuladas ou mesmo explicadas por eles. Verificou-se, em algumas situações, que os sujeitos tomaram decisões e não souberam necessariamente o porquê, mas sentiram que o que estavam fazendo era o certo.

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Durante a pesquisa procurou-se manter os princípios éticos de uma pesquisa de âmbito acadêmico em educação matemática.

Observou-se que os sujeitos percorreram uma trajetória investigativa e como tal assumiram o papel de pesquisador como sugerido inicialmente pelo professor pesquisador.

A trajetória percorrida por cada dupla e cada sujeito durante a experimentação foi marcada por peculiaridades, compondo uma complexa gama de dados que foram analisados com o suporte da TSD e aos olhos da metodologia da Engenharia Didática. A proposta de uma estratégia didática com a temática generalização de padrão esteve presente em todos os momentos investigativos, os quais os sujeitos partiram à descoberta de padrões úteis e tiveram a oportunidade de ter contato com uma estratégia que privilegia o desenvolvimento do pensamento algébrico e a autonomia do sujeito, favorecidos pelo dinamismo da tecnologia digital, software GeoGebra. Conforme diz Oliveira (2007, p. 298): "rendem largas oportunidades para a construção crítica do conhecimento". Nelas foram articuladas e estabelecidas relações lógicas entre diversos conceitos matemáticos ao mesmo tempo e, também, ocorreram trocas de ideias e informações entre os sujeitos que mobilizaram seus conhecimentos prévios, junto aos dados coletados, para formular e depois validar. O trabalho em dupla foi favorável à troca de ideias, discussões acerca das conjecturas elaboradas e, sobretudo, uma maneira de implementar e gerir o movimento que se esperava que ocorresse em torno das dialéticas de ordem adidática (BROUSSEAU, 1986), além da redução da intermediação do professor pesquisador com os sujeitos durante o experimento, propiciando o desenvolvido da autonomia.

Ainda assim, os sujeitos apresentaram dificuldades para generalização e síntese, pois, como diz Rossini (2006, p. 90), o raciocínio para fazer essa generalização de padrões não ocorre naturalmente, é um processo lento e trabalhoso vinculado ao domínio do saber e do pensamento matemático de natureza avançada no qual permite o sujeito ir de uma reflexão inicial a uma reflexão mais profunda sobre os próprios saberes. Segundo Dreyfus (1991), é importante que o professor conheça esse processo envolvido com o pensamento matemático de natureza avançada para poder melhor compreender o aluno diante da dificuldade em generalizar os padrões.

As habilidades para determinar os padrões e generalizar devem ser trabalhadas junto aos alunos já nas primeiras vivências em sala de aula. O desenvolvimento dessas habilidades precisa ser contínuo ao longo de toda a vivência escolar do aluno, pois sua importância está em se debruçar sobre elementos estruturantes da Álgebra (NCTM, 2000), além de abarcar com articulações do pensamento algébrico. Sendo assim, torna-se um caminho promissor para estimular o aluno no estudo da Matemática.

No entendimento dessa pesquisa existe a necessidade de aprofundamentos no tocante às dificuldades apresentadas pelos sujeitos em generalizar e sintetizar, não deixando de mencionar a descoberta de padrões úteis, haja vista que os sujeitos desta pesquisa não apresentam dificuldades em sala de aula com a disciplina Matemática e já tiveram contato com o software GeoGebra e com os objetos matemáticos aqui tratados. Mesmo com essa margem favorável, os sujeitos não determinaram a expressão algébrica das atividades 02 e atividade 03.

A pesquisa aponta também uma lacuna a ser preenchida no sentido de começar um trabalho efetivo junto aos alunos já nos anos iniciais com a temática generalização de padrões.

O intervalo relativo ao instante que o sujeito coloca em jogo seus conhecimentos prévios, aqueles anteriores à atividade, e os padrões úteis que conseguir perceber durante o experimento dentro de um processo reflexivo, refletindo a generalização e está preste a sintetizar constitui esse intervalo. Tal intervalo chamou a atenção desta pesquisa, pois se entende que o estudo das relações entre os elementos atuantes nele seria de grande valia para a compreensão das dificuldades encontradas pelos alunos ao generalizar e sintetizar, propiciando novas perspectivas à criação de estratégias didáticas que tenha como foco o desenvolvimento do pensamento matemático de natureza avançada.

Muitas pesquisas já identificaram a potencialidade da tecnologia digital na construção do conhecimento, particularmente no ensino da Matemática, o que demonstra sua importância no cenário atual da educação matemática, como se pode perceber pelas pesquisas aqui citadas: Oliveira (2018), Oliveira e Oliveira (2017), Bortolossi (2016, p. 438), Oliveira, Gonçalves e Marquetti (2015), Oliveira; Marcelino, (2015, p. 823), Oliveira (2013), Oliveira (2009, p. 229-30), Borba e Villarreal (2005), Tikhomirov (1981), Lévy (1993), Tikhomirov (1981), entre tantas outras pesquisas importantes que não foram citadas nessa pesquisa e que mesmo assim merecem nossas considerações e respeito. Na visão dos sujeitos, a tecnologia digital, no geral, facilita e ajuda na descoberta dos padrões e na determinação da expressão algébrica, o que se pode confirmar pelos dados analisados.

> Evidentemente, o uso das TICs não é o meio exclusivo pelo qual os professores podem trabalhar sua compreensão sobre o saber a ensinar, do ponto de vista da expressão do pensamento algébrico através de notações e generalizações típicas do ensino de matemática, nem mesmo se pode afirmar que somente através das TICs é possível compor os objetos de ensino, através de transposições adequadas, quando se pretende formalizar e generalizar. Outros recursos e estratégias podem apresentar a mesma eficiência (trabalhos em grupo, exposições, dinâmicas). E justamente aí, talvez, se encontrem as mais interessantes possibilidades, quando do uso conjunto de diferentes abordagens, pois o foco deve ser posto na estratégia, no trabalho didático, e não nas

> tecnologias em si. Para isso, entretanto, o professor deve pensar em (e receber condições objetivas para) apropriar-se de forma crítica e reflexiva das interfaces que lhe permitam selecionar as ferramentas mais adequadas, tanto para seu trabalho docente como para a construção dos próprios conhecimentos (OLIVEIRA, 2008, P. 310).

A tecnologia digital foi articulada, nesta pesquisa, cooperativamente com outros recursos, como trabalho em grupo e exposições, que beneficiou o sujeito na construção do conhecimento acerca do objeto matemático. No cenário desta investigação, assumiram-se como instrumentos preponderantes aqueles que permitiram o movimento de *pessoas-com-tecnologias-digitais* e, mais especificamente, de *pessoas-com-GeoGebra*. Desta maneira, foram consideradas de forma mais intensiva as experimentações em ambientes dinâmicos, apoiados na visualização das intervenções, ou seja, na avaliação provisória dos resultados, o que permitiu uma correção de rumos no apoio às conjecturas, ainda que as convergências com as chamadas “tecnologias não digitais” estejam presentes de forma interveniente.

Como as ações humanas também são regidas pelas emoções, salienta-se que os fatores emocionais estiveram atuando durante a experimentação, principalmente a ansiedade, a distração e a insegurança que interferiram na realização das atividades, ficando mais evidentes na dupla D2 que necessitou da mediação do professor pesquisador em alguns momentos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades foram construídas sobre o norte desta pesquisa, a temática “generalização de padrões”, para um grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental a partir do uso de estratégias didáticas com tecnologias digitais. Sobre isso se desenvolveu toda a pesquisa alicerçada na Teoria das Situações de Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (1986), e metodologia de pesquisa com base na Engenharia Didática, de Artigue (2014), em sequências didáticas com o propósito de propiciar ao sujeito o que é essencial à construção e entendimento do objeto matemático.

As variáveis potenciais foram evidenciadas e analisadas segundo a metodologia adotada no contexto da TSD explicitando as três dimensões envolvidas, a *epistemologia*, a *cognitiva* e a *didática*, que, na pesquisa, são percebidas nos resultados apresentados nas fases da Engenharia Didática, conforme Almouloud e Coutinho (2008).

Na análise *a posteriori* da pesquisa foram feitas reflexões a partir dos estudos preliminares nas quais está a questão de pesquisa, os fundamentos teóricos e a análise *a priori*. Principalmente pelo caráter marcante da Engenharia Didática, que é o confronto da análise *a posteriori* com a análise *a priori* e do entendimento dessa análise, se chegou à discussão dos resultados.

Procurou-se, nas sequências didáticas, trazer condições favoráveis à construção e compreensão dos conceitos, desafiando os sujeitos a percorrer uma trajetória investigativa através da qual foi possível analisar as ações dos sujeitos e constatar que aos alunos do nono ano do ensino fundamental II possuem condições cognitivas para realizar a proposta didática, assim como os instrumentos utilizados nesta pesquisa, em geral, se apresentaram adequados. De tal modo, “Ignorar o aspecto cognitivo significa não considerar as condições de apropriação reais de um conteúdo matemático e as razões das dificuldades pelos alunos” (ALMOULOUD, 2014, p. 76).

Contudo, ainda cabem adaptações de ordem didática para melhor instrumentalizar o sujeito a superar dificuldades e chegar à síntese. A intenção de empregar a tecnologia digital assumiu sua importância pois, segundo Tikhomirov (1981), as tecnologias, principalmente as de caráter computacional, redefinem o pensamento das pessoas, criando reconfigurações que realmente mudam o modo pelo qual as pessoas pensam e resolvem problemas. Desse modo, o uso das tecnologias permite entrever possibilidades antes ignoradas, considerando elementos como visualização, experimentação e dinamismo, em conexão com estratégias didáticas adequadas e no âmbito do estatuto do conhecimento formal do conteúdo – matemático (OLIVEIRA, 2018). Nesta pesquisa assumiram-se como instrumentos preponderantes aqueles que permitiam o movimento de *pessoas-com-tecnologias-digitais* e, mais especificamente, de *pessoas-com-GeoGebra*.

Na primeira atividade, todas as duplas conseguiram determinar a expressão algébrica com observação à dupla D2, que somente chegou à expressão após a mediação do professor pesquisador, como supramencionado. A atividade exigia dos sujeitos o reconhecimento de padrões úteis, advindos de validações que relacionavam o número de lados do polígono convexo com sua respectiva soma dos ângulos internos, em um processo que requeria inicialmente do sujeito o resgate dos conhecimentos prévios. O único sujeito que se lembrou desse conhecimento foi o sujeito B da dupla D1, que compartilhou com seu companheiro de dupla, o sujeito A.

As atividades 02 e 03 tiveram o mesmo objeto matemático, a conversão de unidade de medida de comprimento, sendo uma atividade complementar a outra. Em ambas foi solicitado o reconhecimento dos padrões úteis, generalizar e determinar a expressão algébrica. A atividade 02, as conversões de unidade de medida de comprimento, eram no sentido unidade de quilômetro para a unidade de milímetro, e a atividade 03 as conversões obedeciam ao sentido oposto, da unidade de milímetro para o quilômetro, com unidade base de partida de conversão no quilômetro e na unidade de milímetro. Ao final da atividade 03 foi solicitada aos sujeitos uma expressão algébrica que representasse ambas as expressões em uma só.

Nas segunda e terceira atividades as duplas D1, D2, D3 e D4 não conseguiram determinar uma expressão algébrica útil para realizar as conversões de unidade de medida de comprimento no sentido solicitado. Observaram-se tentativas de sintetizar a expressão. As expressões apresentadas não representaram a totalidade do objeto matemático eleito para essas atividades. Os sujeitos determinaram os padrões úteis, encontraram certa generalização nesses padrões, souberam explicar como ocorriam nas duas atividades, porém não conseguiram determinar uma expressão algebricamente coerente com a situação matemática.

As entrevistas, ao final das sessões, trouxeram grandes contribuições para a coleta de dados e para a institucionalização, pois foi o momento que os sujeitos tiveram para explicar às outras duplas como desenvolveram o raciocínio matemático em direção à determinação da expressão algébrica. As duplas relataram como descobriram os padrões, generalizaram e chegaram à expressão, a exemplo da atividade 01. Esses momentos foram importantes porque os sujeitos tiveram a oportunidade de entender como as demais duplas fizeram suas formulações e validações, compartilhando ações e dificuldades e, assim, puderam comparar sua trajetória em um momento de autoavaliação, ampliando o entendimento sobre o objeto matemático e dando prosseguimento à construção de sua aprendizagem.

Ficou evidente a dificuldade dos sujeitos em generalizar os padrões, transpor os dados em uma linguagem matemática para um ente que represente a totalidade dos padrões úteis. As atividades 02 e 03 requisitaram um nível de abstração final que os sujeitos não conseguiram atingir. As experiências anteriores desses sujeitos em sala de aula junto ao professor pesquisador, sobre a temática e com o uso da tecnologia digital, auxiliaram, mas não foram suficientes para chegar à síntese nas atividades 02 e 03.

O professor pesquisador se fez presente na entrevista ao final do debate de cada sessão para institucionalizar o conhecimento e levar o sujeito a reconstruir as observações e validações algebricamente incorretas em um processo contínuo de aprendizagem, pois, “aquilo que poderia ter sido considerado erro pode ser apropriado como elemento de construção da aprendizagem, e reformulado para um entendimento mais amplo e teoricamente justificável” (OLIVEIRA, 2007, p. 203). Sobre essa visão, a pesquisa atingiu seu propósito no que diz respeito à construção do conhecimento do sujeito em relação aos objetos matemáticos eleitos para a pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: UFPR, 2014.

ALMOULOUD, S. A; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: característica e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT – Revista Eletrônica Matemática. V3.6,p.62-77,UFSC:2008.

ALVARENGA, D.; VALE, I. A exploração de problemas de padrão. Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Quadrante, XV, 1, 2007. pp. 27-55.

ARTIGUE, M. Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.), Nordic research in mathematics education: Proceedings from NORMA08 (pp. 7–16). Copenhagen, 2008. Available from https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=212293. Acesso em 09 de abril de 2017.

ARTIGUE, M. Didactic engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträβer, & B. Winkelmann (Eds.), Mathematics didactics as a scientific discipline (1992, pp. 7–39). Dordrecht: Kluwer Academic.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 281–308. (English translation: Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), Recherches en didactique des mathématiques, Selected papers. La Pensée Sauvage, Grenoble,1990, pp. 41–70.)

BAQUEIRO, D.S. Achados sobre generalização de padrões ao “garimpar” pesquisas brasileiras de educação matemática (2003-2013), PUCSP, 2016.

BORBA, M. C.; VILLAREAL, M. E. Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Ed. Springer, 2005, p.229.

BORTOLOSSI, H. J. O uso do software gratuito geogebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade, vidya, v. 36, n. 2, p. 429-440, jul./dez., 2016 - Santa Maria, 2016. ISSN 2176-4603

BRASIL. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília-DF: Ministério da Educação e do Desporto, 2002. v. 1. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciasnatureza.pdf>. Acesso em: 05 maio de 2017.

BRASIL, S. DE E. F. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular Proposta premilinar. Terceira revisão revista. Brasilia: MEC 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental > Acesso em: 20 maio 2018.

BROUSSEAU, G. Fondementsetméthodes de la didactique. RecherchesenDidactiquedesMathématiques. Grenoble, n.7.2, p.33-115, 1986.

CARAÇA, B.J. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Gradiva, 2005. 6ª ed. _______. Lições de álgebra e análise. Lisboa: Sá da Costa, 1954. vol. II

CHALMERS, A. F., What is this thing called science? Philadelphia: Open University Press, 1976.

DEVLIN, K. Matemática, a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: KluwerAcademic, 1991.pp. 25-41.

FERNANDES, RICARDO UCHOA. Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de trigonometria na circunferência. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

LÉVY, Pierre. As tecnologias da Inteligência – O futuro do pensamento na era da informática. São Paulo. Editora 34. Tradução de Carlos Irineu da Costa. 2004

MASON, J. Learning and doing mathematics. York: QED, 1999.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.

NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM, 2000.

OPEN BROADCASTER SOFTWARE, 2016. https://translate.google.com.br/translate?hl=pt-BR&sl=en&u=https://obsproject.com/download&prev=search. Acesso em 01 de outobro de 2017.

OLIVEIRA, GERSON PASTRE DE; OLIVEIRA, MARCOS LOPES DE. Generalização de padrões e tecnologias digitais: aportes sobre uma investigação em andamento. Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044, [S.l.], v. 6, n. 1, maio 2017. ISSN 2238-8044. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/32579>. Acesso em: 17 nov. 2017.

OLIVEIRA, GERSON PASTRE DE; LIMA, NILO SILVEIRA MONTEIRO DE. Estratégias didáticas com tecnologias na formação continuada de professores de Matemática: uma investigação sobre homotetia. Revista Educação Matemática Pesquisa. ISSN 1983-3156,
v.17, n.Y, pp. 1147-1180, 2016

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Estratégias didáticas com o software Superlogo: adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática. Educação Matemática Pesquisa, v.17, n. 4, 2015. pp. 816 – 842.

OLIVEIRA, G. P. Numerical representations and technologies: possibilities from a configuration formed by teachers-with-GeoGebra. Educação Matemática Pesquisa, v.17, n. 5, 2015. pp. 897 – 918.

OLIVEIRA, G. P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do Superlogo e do Geogebra. VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática – CIBEM 2013. Anais....Montevidéu: FISEM, 2013.

OLIVEIRA, G. P. Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais. Educação Matemática Pesquisa, v. 10, n. 2, 2008. pp. 295 – 312.

OLIVEIRA, G. P. (2007). Avaliação em cursos on-line colaborativos: uma abordagem multidimensional. Tese de doutorado em Educação. São Paulo, USP.

ORTON. A; ORTON. J. Pattern and the approach to algebra. In: ORTON, A. (Ed.).Pattern in the teaching and learning of mathematics. London: Cassell, 1999.

PATAKI, Irene. Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC-SP, São Paulo, 2003.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, Matemática, 1997, http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf, acesso em 15 de abril de 2017.

PAPERT, S.; RESNICK, M. Technological Fluency and the Representation of Knowledge. Proposal to the National Science Foundation. MIT MediaLab (1995).

PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. Educação Matemática. In: XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática, Caminha, abril de 2005, p. 36-42.

POLYA, George. (1973). Como resolver problemas. Lisboa: Gradiva, 1997.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Eds.).28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.Proceedings... 1, 1-2. 2006.

ROSSINI, RENATA. Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxelogias. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SCHORN, PETER, AND FISHER, FREDERICK. Testing the Convexity of a Polygon, Graphics Gems IV, (ed. Paul Heckbert), p. 7-15, 1994.

SILVA JÚNIOR, F. M. Pensamento Algébrico: Indícios de um currículo enculturador. 2016. 241 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Educational Review, Harvard, v. 57, p.p, 1–22, 1987.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In:WERTSCH, J. V. (Ed.).The ConceptofActivity in SovietPsychology. New York: M.E. Sharpe Inc., 1981. pp. 256 – 278.

VALE, I. Algumas Notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática - O Estudo de Caso. Revista Academia Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, n 5, 2014, pp.171 - 202. https://www.academia.edu/10198052/Algumas_Notas_sobre_Investiga%C3%A7%C3%A3o_Qualitativa_em_Educa%C3%A7%C3%A3o_Matem%C3%A1tica_-_o_Estudo_de_Caso, acesso em 15 de setembro de 2017.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática.Revemat, v.8, n. 2, 2013. pp. 64 – 81.

VALE, I. As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos.Interacções, n. 20, 2012. pp. 181 – 207.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. Revista Educação e Matemática. n. 85,2005. pp. 14-20.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHAL, P.; CHERNOFF, E. J.The role of examples in forming and refuting generalizations. ZDM Mathematics Education.DOI 10.1007/s11858-007-0065-9. 2007.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHAL, P. Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraicnotation. Educational Studies in Mathematics, n. 49, pp. 379-402, 2002.

ANEXOS

Atividades de Pesquisa Acadêmica

Nome:____

Nome:____

Atividade 01

- Localize no computador que você está usando o arquivo chamado “Atividade01”. Clique sobre o nome do arquivo duas vezes para abri-lo;
- **(5 minutos)** Note que são exibidos três *polígonos convexos* na tela do GeoGebra. Caso tenha dúvidas sobre o que são polígonos convexos, converse com seu colega de atividade. Ao final, o professor/pesquisador solicitará que cada dupla fale um pouco sobre suas conclusões a este respeito, que devem ser registradas no espaço abaixo:

  ____
  ____
  ____
  ____
  ____
  ____

- **(10 minutos)** Observe que cada um dos polígonos possui vértices na cor vermelha. Estes elementos podem ser manipulados. Movimente os vértices e observe o que ocorre com os polígonos e seus ângulos. Registre suas conclusões no espaço abaixo:

____
____
____
____
____
____
____
____

- Para as próximas tarefas, você pode construir outros polígonos para apoiar seu trabalho. Use outro arquivo do GeoGebra para isto (não feche o arquivo atual, mantenha o novo arquivo e fornecido pelo pesquisador abertos). Caso não consiga abrir o arquivo novo sem fechar o anterior, peça ajuda ao pesquisador. Quando as respostas adequadas forem inseridas, aparecerão mensagens avisando você sobre isto.

a) Encontre a soma dos ângulos internos dos polígonos depois de algumas movimentações. Insira os valores nas caixas de resposta correspondentes, disponíveis no arquivo do GeoGebra. Registre, a seguir, suas respostas e conclusões.

Triângulo:_________________________

Quadrilátero: ____________________

Pentalátero: _____________________

____
____
____
____
____
____

b) Com base em suas observações, você poderia dizer qual seria a soma dos ângulos internos de polígonos com 7 e com 8 lados? Como chegou às suas conclusões?

c) Qual seria a soma dos ângulos internos de um polígono de 73 lados? E com 98 lados? E com 502 lados? Como chegou às suas conclusões?

d) Vamos chamar de **x** a quantidade de lados de um polígono convexo e de **y** a soma dos ângulos internos deste polígono. Escreva uma expressão que permita obter a soma **y** dos ângulos internos de um polígono com **x** lados. Registre sua expressão no espaço deixado no GeoGebra para esta finalidade. Você pode usar, além das variáveis **x** e **y**, os símbolos + (adição), **-** (subtração), . (ponto; multiplicação), : (dois pontos; divisão) e = (igualdade), além dos parênteses. Não esqueça de colocar espaços entre que usar. Registre sua resposta e suas conclusões no espaço a seguir:

____

____

____

____

____

____

____

e) Para finalizar esta atividade, escreva sobre o que achou dela. Fale um pouco, também, sobre o que achou do GeoGebra neste trabalho: como ele ajudou?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

(Grave seu trabalho. Não desligue seu computador!)

Atividades de Pesquisa Acadêmica

Nome:____

Nome:____

Atividade 02

Nesta atividade, vamos trabalhar com unidades de medida de comprimento. Você já conhece o sistema métrico decimal? Vamos pensar um pouco sobre ele. Abra o arquivo denominado **Atividade02** em seu computador – por enquanto, não use os recursos do GeoGebra (vamos fazer isto dentro de poucos minutos). Observe a tabela existente neste arquivo. Ela contém algumas unidades de medida do sistema métrico decimal. O que você sabe sobre elas? Escreva um pouco sobre isto no espaço abaixo:

a) Agora, sim, vamos usar os recursos do GeoGebra! Procure seguir as instruções deste material exatamente como estão – depois, teremos liberdade para explorar à vontade. Existe uma relação entre as unidades de medida da tabela a que nos referimos aqui, sendo que uma delas é tomada por base. Com o uso dos **controles deslizantes** que estão na *Janela de Visualização 2*, estabeleça uma relação válida entre as unidades mencionadas. Observe que a mudança nos controles gera mudança nas tabelas. Ajuste os valores como lhe parecer correto. A *Janela de Visualização* pode ajudá-lo, também, a compreender esta tarefa. Depois de manipular estes controles, registre suas descobertas no espaço seguinte:

d) Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?

e) Agora, vamos para a tabela propriamente dita. Escolha alguns valores para verificar o que ocorre na conversão dos mesmos, escrevendo estas medidas na célula B11, logo após a palavra “Converter”. Tente valores como 5, 6 ou 7, por exemplo, e valores maiores também, como 67, 89, 150, entre outros. O que você observou sobre as conversões feitas? E as notações que estão sendo usadas?

f) Escreva uma expressão genérica (uma generalização) para estas conversões. Para isto, tome como base alguma das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. A ideia é escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos das conversões que estamos fazendo.

____

____

(Grave seu trabalho. Não desligue seu computador!)

Atividades de Pesquisa Acadêmica

Nome:____

Nome:____

Atividade 03

g) Da mesma forma como na atividade anterior, procure seguir as instruções deste material exatamente como estão. Existe uma relação entre as unidades de medida da tabela a que nos referimos aqui, sendo que uma delas é tomada por base (não é a mesma da atividade anterior). Com o uso dos **controles deslizantes** que estão na *Janela de Visualização 2*, estabeleça uma relação válida entre as unidades mencionadas. Observe que a mudança nos controles gera mudança nas tabelas. Ajuste os valores como lhe parecer correto. A *Janela de Visualização* pode ajudá-lo, também, a compreender esta tarefa. Depois de manipular estes controles, registre suas descobertas no espaço seguinte:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

h) Como você acha que esta tabela funciona? Que tipo de conversão é feita? Qual é a unidade a partir da qual as conversões são feitas?

i) Agora, vamos para a tabela propriamente dita. Escolha alguns valores para verificar o que ocorre na conversão dos mesmos, escrevendo estas medidas na célula B11, logo após a palavra “Converter”. Tente valores como 5, 6 ou 7, por exemplo, e valores maiores também, como 67, 89, 150, entre outros. O que você observou sobre as conversões feitas? E as notações que estão sendo usadas?

j) Escreva uma expressão genérica (uma generalização) para estas conversões. Para isto, tome como base alguma das unidades ou sequências de números empregadas nesta atividade. A ideia é escrever uma expressão que, a partir da substituição de uma parte variável por um número, permita uma resposta em termos das conversões que estamos fazendo.

k) Neste ponto, é bastante provável que você já tenha percebido a lógica que permeia as conversões que fizemos nas atividades dois e três. Vamos tentar avançar um pouco mais: proponha uma expressão, com base nas posições das unidades na tabela de medidas, que permita calcular a conversão entre quaisquer duas unidades. Registre no espaço seguinte como chegou às suas conclusões. Você pode usar o GeoGebra ou qualquer outro recurso computacional que desejar

l) O que você achou das atividades dois e três? E do uso do GeoGebra nestas atividades?

(Grave seu trabalho. Não desligue seu computador!)