Nelson Arbach

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA:
O SABER DO ALUNO E O SABER ESCOLAR

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
2002

Nelson Arbach

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA: O SABER DO ALUNO E O SABER ESCOLAR

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática sob a Orientação da Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

2002

Nelson Arbach

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA:
O SABER DO ALUNO E O SABER ESCOLAR

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

____

Prof[a] .Dr[a.] Sonia Barbosa Camargo Igliori

(orientadora)

Dedico este trabalho à Daisy , por nunca me deixar sem chão e direção,

por sempre estar ao meu lado .Não me concebo sem sua presença.

Tenho muito orgulho dos momentos da vida que partilhamos.

AGRADECIMENTOS

À Prof.ª Dr.ª Sonia, pela contribuição e confiança depositadas em mim na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, pelas valiosas contribuições no encaminhamento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pelas indicações e sugestões muito úteis para que se construísse esta dissertação.

À minha mãe, Dona Rosa, que nunca deixou de me presentear com uma palavra de incentivo em todas as horas desta pesquisa.

Ao meu pai, Seu Abdo, que nos levou tão cedo a vida, e cuja falta é tão grande quanto às saudades que sentimos dele.

Aos meus filhos, Rafael e Julia que, cada um ao seu modo, auxiliaram-me na produção deste trabalho.

À minha irmã Roseli, pelas horas usadas nas revisões e sugestões deste trabalho e por disponibilizar sempre seu conhecimento matemático para que eu possa superar dificuldades nesta área do saber. Muito obrigado.

À Prof.ª Evânia, pela sempre presente alegria, incentivo e amizade que deposita em mim.

À amiga Ciomara e ao amigo Fernando pela paciência das traduções, mesmo as de últimas horas.

Às funcionárias da Biblioteca da PUC/SP, Campus Marquês de Paranaguá, Ângela e Talita, pela enorme paciência durante todo o tempo utilizado neste trabalho.

A Ricardo e George pela presença constante nos momentos de alegria ou tristeza.

Aos Professores do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelas discussões e orientações apresentadas dentro e fora das salas de aulas.

À Prof.ª Dr.ª Anna Franchi, pelas orientações na elaboração deste trabalho.

Às amigas Maria José, Iara, Débora e Elaine, por me abrirem caminhos com sua imensa crença na vida.

Aos amigos Carlos, Frederico e Vladimir, de cujos conhecimentos tento me servir nas horas de decisão.

Ao Rhuan, pelo interesse que acaba em se transformar em incentivo.

A João e Paulo pelo conforto das palavras e pelos momentos de descontração tão importantes quando nos colocamos tarefas que exigem tanto de nós.

A MENTE É UM FOGO A SER ACESO E NÃO UM VASO A PREENCHER.

Plutarco

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos fotocopiados ou eletrônicos.

Nelson Arbach

São Paulo, 30 de Setembro de 2002

ÍNDICE

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos e avaliamos algumas atividades desenvolvidas por alunos de duas classes das séries finais do ensino fundamental, na área da Geometria Plana, com propostas de ensino diferentes. Tais atividades foram elaboradas em duas direções : por um lado, tomando como base teorias desenvolvidas por Balacheff (1987) e por Polya (1954) sobre demonstração;e, por outro lado, considerando a noção de contrato didático, com base nas idéias de Brousseau (1986). O objeto de pesquisa foi o de investigar procedimentos e ações de alunos em situações de ensino, com o propósito de demonstrar e/ou conjecturar e avaliar possíveis interferências das propostas de ensino nas duas classes.

Pudemos observar semelhanças e diferenças entre as duas classes. Quanto aos aspectos referentes à participação, ambas são muito parecidas: aos alunos são permitidas as argumentações e discussões entre si e com o professor. A diferença se apresenta quanto aos sistemas de validação e à sua utilização:enquanto que na primeira as demonstrações são utilizadas nas validações das conjecturas,na segunda, os mecanismos de prova são, basicamente, os exemplos.

Esta pesquisa pretendeu apresentar algumas contribuições para o ensino da Geometria Plana, tendo por base que o desenvolvimento da Matemática e, em particular da Geometria, dá-se principalmente por meio de um processo heurístico de provas e refutações.

ABSTRACT

ABSTRACT

On this work, it is presented and evaluated some activities developed by two groups of students at the last level of high school in the field of plain geometry with different objectives. These activities were made into two directions: one using the theories developed by Balacheff (1987) and Polya (1978) by demonstrating and, on the other hand, considering the notion of the pedagogical contract, based on the ideas of Brousseau (1986). The aim of this research was to investigate procedures, actions of students in situations of learning with the objective to demonstrate and / or talk about and test possible inferences of the propositions of learning in the two groups.

It could be observed similarities and differences between the two groups. Talking about participation, both are very similar. Students were allowed to talk about and discuss among them and with the teacher.

The difference is shown by validation system and its use. The first demonstrations are used to validate its theories and the second the test mechanisms are, basically, the examples.

This research aimed to present some contributions for the teaching of ‘plain’ geometry, based on the development of Mathematics and in particular of geometry, is given by means of global process of statements and refutations.

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como tema o estudo do ensino de Geometria Plana no nível fundamental. Centra-se em uma proposta de ensino com dois paradigmas: por um lado, a necessidade de um contrato didático que priorize a argumentação dos alunos, em um processo heurístico de provas e refutações, e, por outro lado, o uso das demonstrações como sistema de validação privilegiado da Matemática.

No capítulo 1 estão apresentados trabalhos de pesquisa nesse tema. Eles evidenciam que o foco principal das investigações sobre o ensino da Geometria desenvolvidos no Brasil, nas últimas décadas, tem sido o fenômeno do abandono desse ensino no nível fundamental. Nesse quadro situamos e justificamos o problema desta pesquisa, como de inserção em abordagens de ensino considerando ser essa uma via para contribuir a superar os efeitos gerados por tal abandono.

No capítulo 2, apresentamos fundamentação teórica, problemática e questões que nos propusemos investigar tanto a que se refere ao contrato quanto ao sistema de validação.

No capítulo 3, são apresentados a caracterização da pesquisa, da instituição onde foi ela realizada e dos sujeitos pesquisados. E, também os procedimentos metodológicos, a descrição de cada uma das sessões desenvolvidas e o papel do pesquisador. A título de exemplo incluímos nesse capítulo a prova do Teorema de Pitágoras, efetuada nas duas unidades com o propósito de evidenciar os tipos de contrato didático discutidos neste trabalho.

No capítulo 4, apresentamos as atividades que foram desenvolvidas nesta pesquisa, seus objetivos e as soluções esperadas.

No capítulo 5, apresentamos as intervenções dos alunos durante a aplicação das atividades dessa pesquisa, obtidas com gravação de áudio das sessões e anotações do pesquisador.

No capítulo 6, comparamos as soluções apresentadas pelos dois grupos em cada atividade proposta, procurando responder às questões apresentadas como problema de pesquisa e apresentamos as conclusões da pesquisa.

CAPÍTULO 1 APRESENTAÇÃO

Capítulo 1

1.1. Contextualização

Meissner (2001), num estudo sobre o processo do ensino/aprendizagem de Geometria refere-se ao fato de que não tem sido muito investigado o como as crianças aprendem Geometria. Indica ele como exemplo que, somente 5% das dissertações de mestrado em Educação Matemática, são referentes a esse tema.

No Brasil a situação parece não ser muito diferente, é o que inferimos após uma busca das produções da UNESP- Rio Claro e PUC/SP, universidades essas, as únicas do país que possuem programas de pós graduação específicos na área de Educação Matemática. No período compreendido entre 1997 e 2000, encontramos dezessete dissertações e uma tese de doutorado relativas ao ensino da Geometria Plana.

Para a nossa revisão bibliográfica, foi importante a dissertação de Pereira (2001), que nos deu muitos subsídios, já que, a mesma traz um amplo material sobre o assunto, tendo como objeto de seu estudo, exatamente realizar levantamento de pesquisas brasileiras sobre o ensino da Geometria. Pudemos constatar que, a maioria dos trabalhos apresentados nesse levantamento, tinha basicamente como interesse de pesquisa investigar causas do abandono do ensino da Geometria, fenômeno esse registrado não só no Brasil, como em outros países. Há vários enfoques nesses trabalhos, mas de um modo geral as causas apresentadas pelos pesquisadores são: i) de ordem política/ ideológica; ii) de problemas de formação do professor; iii) de ordem relacionadas à abordagens nos livros didáticos, como omissão de tópicos de geometria; iv) pelas lacunas deixadas pelo movimento da Matemática Moderna, entre outras. As análises não se apresentam de forma excludentes como as indicamos aqui, mas de certa forma essa síntese as caracterizam.

Além dessas abordagens, encontramos ainda, propostas de engenharias didáticas elaboradas para um determinado tópico da Geometria. Em geral nesses casos, a ênfase dada está no uso de figuras como meio de produção de conhecimento.

Em Gouveia (1996), um ponto de interesse deste estudo é abordado, qual seja, a influência do contrato didático, no processo de ensino de Geometria. Segundo ela: "além da questão da formação do professor, há condicionamentos que se referem ao contrato didático que estipula as expectativas de comportamento dos professores e alunos frente ao saber e à sua produção". Ou "quando desenvolvidas as deduções não são em geral descobertas ou intuídas pelo aluno, mas literalmente impostas com o exagero de formalização" (p.125).

Apesar desse levantamento bibliográfico não ter sido exaustivo, foi significativo para nos fazer perceber que o tema do ensino/aprendizagem da Geometria no nível fundamental é pouco explorado. E, também, para motivar a efetivação deste estudo, indicando que ele pode apresentar alguma contribuição a esse tema de pesquisa.

O quadro existente, em nosso entendimento acarreta prejuízos à utilização do ensino da Geometria, como formador de atitudes científicas. Em nossa prática docente, rejeitamos sempre um ensino que se atenha em especial a desenvolvimento de conteúdos. Temos procurado sempre encontrar meios que propiciem a participação dos alunos na produção do saber escolar, a formação de atitudes científicas, trabalhando com eles o levantamento de conjecturas e a validação de resultados por meio de demonstrações, entre outras atitudes.

Não se encontra em geral nos livros didáticos, propostas que proporcionem um ensino da Geometria nesses moldes, mas sim reduzido a cálculos algébricos entre elementos de figuras (como, por exemplo, cálculos com medidas repetidos à exaustão, algoritmização dos procedimentos geométricos em detrimento ao uso de propriedades que podem ser obtidas pela manipulação das figuras e das propriedades das figuras), apresentação de propriedades sem as devidas demonstrações, além de elaborações teóricas que não levam em conta a participação efetiva dos alunos na produção do saber escolar.

Procuramos situar então nosso problema de pesquisa numa abordagem de intervenção, qual seja a de propor e analisar atividades de ensino, elaboradas à luz de referenciais teóricos, enfocando:

O contrato didático e a formação de atitudes nos alunos priorizando a argumentação em um processo heurístico de provas e refutações; com vistas a levar os alunos a efetuar demonstrações e utilizar os procedimentos de generalização; análise/síntese como um instrumento de prova.

1.2 Justificativa

O campo da Geometria foi e é decantado como privilegiado para propiciar condições favoráveis de apropriação das competências essenciais ao aprendizado da Matemática, na medida que possibilita o desenvolvimento de habilidades lógicas. Ao encontro dessa concepção estão os dizeres de Jacques Bernoulli: “A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida" [1]e é fato conhecido que em diversos períodos da história do ensino, a Geometria foi valorizada. E, no Brasil, seu ensino é diferenciado com relação ao público alvo, como sugere Pavanello (1989 p.166):

″ A tradicional dualidade do ensino brasileiro até que poderia, em termos de ensino de matemática, ser colocada como : escola onde se ensina geometria (escola para a elite) e escola onde não se ensina geometria (escola para o povo)″, já que nas escolas públicas o abandono do ensino de Geometria se inicia primeiro e mais intensamente do que nas escolas privadas.

A partir do movimento da Matemática Moderna (década de 70), houve um direcionamento maior ao ensino da Álgebra, no nível do ensino, podendo-se mesmo afirmar que nessa tendência, não só no Brasil, o ensino da Geometria foi relegado a segundo plano. De uma maneira geral os livros didáticos reservam aos conteúdos referentes a esse campo, os últimos capítulos e, em conseqüência disso, raramente os mesmos são abordados em função de falta de tempo.

"Este costume de programar a geometria para o final do ano letivo é, de outro modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que pude observar, abordam esses temas quase sempre por último". (Pavanello, 1989. p.6)

---

[1] www.start.com.br/matematica/

Uma pesquisa sobre os livros citados nos PCNs (1998) mostra que os assuntos relativos à Geometria continuam a ser apresentados como capítulos finais destes livros.

Nos PCNs (1998,p19): ″O que se propunha (na Matemática Moderna) estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental.″ Mais adiante, é afirmado que (p.21): ″Nota-se (no ensino da Matemática) o predomínio absoluto da álgebra″.

Tomando por base análise de livros didáticos e nossa vivência docente, inferimos que ainda hoje no ensino fundamental o ensino da Geometria não é trabalhada na perspectiva que confere a ela um espaço privilegiado como o referido acima, seu ensino em geral é reduzido a cálculos algébricos entre elementos de figuras.

Analisamos todos os livros de matemática citados nos PCNs, 1998, ensino fundamental e observamos que somente o livro ″Matemática hoje é feita assim ″ (Lopes, 2000) apresenta definições sobre demonstrações, e postulados.

Nesse livro há alguns exercícios onde é solicitado ao aluno que defina termos como demonstração, explique a necessidade das demonstrações ou localize a hipótese e tese de um teorema apresentado pelo autor (p.172).

Nos PCNs (1998), sobre o ensino fundamental, há um posicionamento sobre reflexos do uso de livros didáticos na prática docente ″Não tendo oportunidade e condição para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas de sala de aula, os professores apoiam-se, quase exclusivamente, nos livros didáticos que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatórias ″ (p.21)

Vemos como um reflexo deste quadro a dificuldade de desenvolvimento de uma prática docente que leve em conta a participação efetiva dos alunos na produção do saber escolar. Nossa experiência tem nos indicado que em geral, o professor do ensino fundamental atém - se mais a desenvolvimento de conteúdos do que à formação de atitudes, como levantamento de conjecturas, validação de resultados (por meio de demonstrações) entre outras, que a nosso juízo são fundamentais para a aprendizagem em geral e da Matemática em particular.

É o contraponto entre nossa convicção de que o ensino da Geometria é essencial na formação de atitudes científicas, o que encontramos sobre a forma abordada nos livros didáticos e, em geral, em observações realizadas por meio de nossa experiência como docente que, justifica as escolhas feitas para este trabalho de pesquisa.

CAPÍTULO 2 REFERENCIAL TEÓRICO

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Sobre o Contrato Didático

As formulações dos diversos pesquisadores apresentadas a seguir referenciaram nossa pesquisa no que tange ao relacionamento entre contrato didático e o processo de ensino/aprendizagem.

“O contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que tem o professor de a colocar em cena. Mas a evolução da situação modifica o contrato que permite então a obtenção de situações novas“.

Em todas as situações didáticas, o professor tenta fazer o aluno saber o que ele quer que ele faça. Teoricamente, a passagem da informação e da instrução do professor à resposta esperada, deveria exigir da parte do aluno a mobilização do conhecimento visado, seja ele em curso de aprendizagem ou já conhecido.

O professor deve efetuar, não a comunicação de um conhecimento, mas a devolução do bom problema. Se esta devolução se opera, o aluno entra no jogo e termina por ganhar, a aprendizagem se opera.

O que nos interessa aqui é o contrato didático, quer dizer a parte desse contrato que é especificamente do "conteúdo": o conhecimento matemático visado.

Remarquemos que esse jogo de obrigações não é exatamente um contrato: de início ele não pode ser completamente explicitável, desde que se pretenda colocar sobre o resultado a ação de ensinar. E se o contrato refere-se apenas sobre as regras de comportamento do professor ou do aluno, o respeito a ele de forma inescrupulosa condenará a relação didática a um fracasso. Em forma de síntese estão aqui indicadas diversas ligações entre contrato didático e ensino/aprendizagem feitas por Brousseau (1998).

"O primeiro diagnóstico sobre quais poderiam ser as origens da dificuldade para ensinar e aprender demonstração nas Matemáticas foi formulado em termos da natureza do contrato didático que emerge naturalmente das posições do aluno e do professor com respeito aos saberes que estão em jogo. Dado que o professor é quem garante a legitimidade e a validade epistemológica do que se constrói na sala de aula, então isto implica em que o aluno se vê privado de um acesso autentico a uma problemática da verdade e da prova. A superação desta dificuldade inerente aos sistemas didáticos pode ser investigada em situações que permitem a devolução aos alunos da responsabilidade matemática sobre suas produções, isto significa o desaparecimento do professor dos processos de tomadas de decisão durante a resolução de um problema favorecendo a construção de meios autônomos de prova por parte dos alunos” Balacheff (1999,p.01)

"Colocar a exigência de provocar a reconstrução por parte dos alunos/as, de seus conhecimentos, atitudes e modos de atuação requer outra forma de organizar o espaço, o tempo, as atividades e as relações sociais na aula e na escola. É preciso transformar a vida da aula e da escola, de modo que se possam vivenciar práticas sociais e intercâmbios acadêmicos que induzam à solidariedade, à colaboração, à experimentação compartilhada, assim como a outro tipo de relações com o conhecimento e a cultura que estimulem a busca, a comparação, a crítica, a iniciativa e a criação.″ Sacristán (2000, p.26).

″A função do professor/a será facilitar o surgimento do contexto de compreensão comum e trazer instrumentos procedentes da ciência, do pensamento e das artes para enriquecer esse espaço de conhecimento compartilhado, mas nunca substituir o processo de construção dialética desse espaço, impondo suas próprias representações ou cerceando as possibilidades de negociação aberta de todos e cada um dos elementos que compõem o contexto de compreensão comum″.Sacristán (2000, p.64)

″Supõe se esforçar para criar, mediante negociação aberta e permanente, um contexto de compreensão comum, enriquecido constantemente com as contribuições dos diferentes participantes, cada um segundo suas possibilidades e competências ″. Sacristán (2000 p.64).

Segundo Vygotsky (2000) o ensino direto de conceitos é impossível .Tal prática teme se mostrado infrutíferas e os resultados obtidos por tal prática são um verbalismo vazio e uma repetição de palavras que substitui o conhecimentos por palavras sem significado para as crianças.

"As concepções dos alunos e as do professor interagem na sala de aula, constituindo um processo conjunto de avanço direcionado para um saber mais elaborado. Os alunos precisam ter oportunidade e serem estimulados a explicar suas concepções, a tomar consciência delas para poder confrontá-las com as novas informações, dando lugar a um processo de ajuste cognitivo que é, sem dúvida, o processo de construção do conhecimento”.(Torres, 1992.p.53).

2.2 Sobre o sistema de validação

Admitimos de início que a Geometria é uma ciência cujos conceitos primitivos e primeiras verdades (os postulados) podem ser apresentados de forma empírica e cujas verdades se constituem progressivamente a partir de um método baseado em demonstrações que garantem sua veracidade.

"O uso da demonstração como instrumento de prova caracteriza a matemática como distinta das outra ciências". Arsac (1988, p.249) assumimos como referência as formulações de Balacheff, sobre um sistema de validação, por apresentarem ampliações as essas e as quais podem possibilitar a nosso ver, uma maior flexibilidade no processo de ensino no nível fundamental.

Ele as apresenta assim:

a).."chamamos de explicação um discurso que visa tornar inteligível o caracter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, recusados ou aceitos.

b)...chamamos de prova uma explicação aceita por uma certa comunidade em um dado momento.

c)...entre as provas, algumas são organizadas de acordo com regras determinadas, um enunciado é aceito como verdadeiro ou deduzido daqueles que o precedem a partir de regras de dedução que fazem parte de um conjunto de regras bem definido. Chamamos de demonstrações a estas provas."Balacheff (1987)

2.3 Sobre categorias lógicas

"A generalização é a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento, ou a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito" Polya (1978).

Neste trabalho utilizamos a generalização restrita e ampla, para diferenciar dois momentos dessa categoria, considerando as definições encontradas em Lefebvre (1979): na generalização restrita a lei proposta resume em uma afirmação todos os casos particulares estudados e na amplificadora, passa-se de um número finito de fatos estudados para um número infinito de fatos possíveis.

Exemplos:

O Restritivo: triângulos semelhantes ao triângulos de lados 3 , 4 e 5 são retângulos

O Amplo: triângulos semelhantes à triângulos retângulos são retângulos.

"A análise é a separação de um conjunto em seus elementos constituintes, processo que vai do geral para o particular, do composto para o simples" (Polya, 1978) Tal procedimento tem a intenção de descrever cada elemento constitutivo de um conjunto para que, separados os elementos, possa se fazer um estudo mais detalhado do conjunto, propiciando mudanças de quadros que permitam mobilidade ao raciocínio.

"Por exemplo, em um problema de Geometria Métrica da 2ªsérie do ensino médio, pede-se para calcular o volume de um cone reto com área da base é $9.\pi\ m^2$

e com área lateral igual ao dobro da área da base. Inicialmente o problema se refere a elementos da geometria métrica mas, como para se calcular o volume de um cone devemos conhecer a área da base e sua altura do cone e então o problema passa a ser, de fato, de geometria plana, já que, com as afirmações dadas calcula-se a altura usando-se o teorema de Pitágoras,$h^2 + r^2 = g^2$, onde h, r e g são respectivamente, as medidas da altura, do raio da base e da geratriz do cone reto" (Polya, 1978).

"Em que consiste a síntese? Em executar, passo a passo, os cálculos cuja possibilidade foi indicada pela análise.... A síntese consiste na tradução das idéias em ações...A análise é invenção e a síntese, execução... a análise consiste em conceber um plano e a síntese, em executá-lo" Polya (1978)

No exemplo acima, a síntese consiste nos cálculos da altura do cone reto e de seu volume.

2.4 PROBLEMATIZAÇÃO/QUESTÃO DE PESQUISA

Tendo por referência essa problematização sobre o ensino da Geometria propugnada pelos pesquisadores e por nós destacada, e com clareza da amplitude da mesma, restringimos então nossa investigação a três de seus aspectos: contrato didático, sistema de validação e atividades de ensino.

2.4.1 Quanto ao Contrato didático

O uso abusivo do formalismo, como a redução do ensino da Geometria a meros cálculos algébricos entre elementos de figuras e apresentação de propriedades sem as devidas demonstrações, pode levar a um tipo de ensino em que o saber do aluno não é tomado por referência na construção do saber escolar.

No âmbito de nossa experiência profissional podemos observar que, os cursos são desenvolvidos com o intuito de apenas apresentar conteúdos e mesmo quando é dada uma certa liberdade de participação aos alunos isto sem uma concepção de contrato didático.

No âmbito dessa problemática e ao encontro de uma das proposituras de Brousseau, de que o contrato didático não é um contrato pedagógico geral, mas depende estreitamente dos conhecimentos em jogo, nos colocamos para esta pesquisa uma primeira questão:

Quais as características do contrato didático, relacionadas ao ensino de "conteúdo" da Geometria favoreça aceitar e/ou refutar as tentativas de aproximação entre o saber produzido pelos alunos e o saber escolar? Nesta perspectiva, que tipo de atividades seriam eficazes para propor aos alunos?

2.4.2 Quanto aos sistemas de validação

A. Demonstração

- Nos livros didáticos citados em PCNs:

Entre todos os livros de Matemática citados nos PCNs – 1998, para o ensino fundamental, somente em um deles são apresentadas definições de demonstração e postulados. Para demonstração o autor apresenta a seguinte definição: ″Seqüência de argumentos lógicos que pode ajudar a decidir se um fato matemático é verdadeiro ou falso.″ (Lopes,2001).

- Em dicionários, enciclopédias, dicionários eletrônicos e livros:

De forma sintética é apresentada como: "demonstração é um argumento utilizado para mostrar a veracidade de uma proposição matemática. Começa com uma ou mais declarações denominadas premissas e prova, utilizando as regras da lógica, que se as premissas são verdadeiras, então uma determinada conclusão também deve ser certa". (Encyclopaedia of Mathematics, Mathematics Dictionary, Introduction to the Foudation of Mathematics)

- Um exemplo no âmbito de pesquisa

″ Demonstrar uma propriedade de um conceito, expressa por uma proposição, é mostrá-la decorrente de outras proposições, já antes demonstradas, por meio de regras de inferências fornecidas pelo Cálculo do Predicados de Primeira Ordem com Igualdade, isto é, pela Lógica costumeiramente usada na matemática" Bicudo (1999,p.117):

- Em outras áreas do conhecimento

Os alunos do ensino fundamental podem utilizar diferentes procedimentos de validação no estudo de outras disciplinas, por isso os incluímos em nosso levantamento observamos que nas ciências da natureza, há algumas alterações relativamente aos sistemas de validação. Os debates sobre a escolha de teorias não podem ser expressos numa forma que se assemelhe totalmente a provas matemáticas ou lógicas. Nessas últimas, as premissas e regras de inferência estão estipuladas desde o início. Se há desacordo entre as conclusões, as partes comprometidas no debate podem refazer seus passos um a um e conferi-los com as estipulações prévias... esse debate é sobre premissas e recorre a persuasão como um prelúdio a possibilidade de prova. Kuhn (2000, p.245).

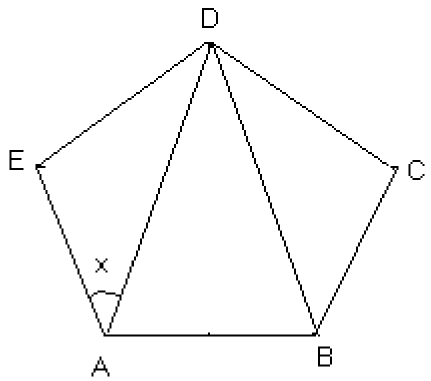
Os sistemas de validação de um conhecimento dependem do tipo de objeto estudado. Para os conhecimentos físicos, químicos ou biológicos (restringindo-nos a disciplinas normalmente organizadas nos ensinos fundamental e médio), a ferramenta prioritária para se decidir entre várias propostas de soluções de problemas é a prática.

Há alguns conteúdos que podem ser verificados numa prática normalmente fora da sala de aula tradicional. O uso de laboratórios nos quais são feitas medições e/ou procura de relações entre variáveis ou ainda estabelecer leis que valem para determinados campos do conhecimento (e podem ser invalidados por novas teorias) são práticas comuns nestas ciências.

- O uso de medidas em Geometria

No ensino de Geometria Plana (para crianças entre 13, 14 anos de idade) algumas discussões que surgem sobre aspectos de uma prova ou sobre a validade de uma proposição podem ser resolvidas no campo prático. Por exemplo, há dúvidas sobre a congruência ou não das diagonais de qualquer paralelogramo. A utilização da medida como um contra-exemplo pode resolver o problema.

Mas há casos em que a figura serve somente como ilustração do problema, não sendo a medida um sistema de validação. Vejamos um exemplo: Dado o pentágono regular ABCDE, descrito abaixo, encontrar a medida do angulo x.



Medições de ângulos da figura só podem apresentar resultados aproximados e não o real valor de x. Problemas como esse justificam a necessidade de procedimentos que permitam chegar à sua solução.

- O uso de exemplos

O uso de exemplos concretos com a intenção de levantar uma possibilidade ou uma conjectura é um procedimento que não nega a demonstração, desde que esteja situado dentro dos limites de sua aplicação.

Exercícios que utilizam-se de medidas, verificações de relações inicialmente arbitrárias, são procedimentos que propriamente localizados dentro de uma estratégia mais global, podem auxiliar no alcance dos objetivos propostos anteriormente.

Nos colocamos, então, a segunda questão:

Que sistemas de validação poderiam ser utilizados no ensino de Geometria Plana no nível fundamental, que pudessem favorecer a aproximação do saber produzido pelos alunos e o saber escolar, adequados aos conhecimentos dos alunos e às operações de raciocínio aceitas pela lógica formal como, por exemplo, a dedução?

O uso de demonstrações como sistema de validação do conhecimento geométrico pode facilitar que os alunos utilizem-se das categorias lógicas apresentadas anteriormente (generalização , análise e sintese)?

CAPÍTULO 3 CARACTERIZAÇÃO/PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Capítulo 3

Caracterização / Procedimentos metodológicos.

Nossa pesquisa insere-se entre as que são desenvolvidas numa atividade normal do professor. Apesar das atividades terem sido desenvolvidas como atividade extraclasse os alunos não receberam nenhuma informação adicional às que haviam recebido no curso. Tudo se passou como se tratasse de uma aula de exercícios em pequenos grupos.

Nesse trabalho os dados foram obtidos no ambiente escolar sendo o professor/pesquisador seu principal instrumento; a coleta dos dados foi efetuada de forma descritiva (protocolo dos alunos, gravação das respostas, entrevistas); a preocupação voltada mais para as atitudes dos alunos do que propriamente ao produto.

A análise dos dados foi realizada pressupondo, uma hipótese, qual seja a interferência do contrato didático e sistema de validação.

É o estudo de uma proposta de ensino, com um contrato didático definido em articulação com um sistema de validação escolhido. O foco de investigação está nos procedimentos dos alunos frente à resolução de problemas cujo enfoque é a validação.

3.1 Caracterização da Instituição de Ensino e das Sessões

A pesquisa desenvolveu-se em uma instituição de ensino situada em uma cidade da periferia de São Paulo. É uma fundação pública com cursos fundamentais, médios e técnicos nível médio.

Esta instituição compõe-se de duas unidades de ensino, separadas geograficamente e com direção educacional diferentes. Os professores de Matemática e Geometria são distintos embora as coordenações de áreas sejam as mesmas. Nas duas unidades, os professores têm autonomia na organização de seu trabalho.

A procura por vagas nessa instituição se dá por dois motivos, sua respeitada posição no que se refere aos conteúdos trabalhados em classe e por ter a mensalidade mais barata da cidade (seu custo mensal é a metade do custo das escolas da região). Com isto, sua clientela é, basicamente, de famílias que não querem que seus filhos estudem em escolas públicas, mas não podem arcar com os custos das escolas particulares.

A estrutura do curso em nível fundamental difere do que usualmente ocorre em outras escolas, pois suas grades curriculares assumem para a área das matemáticas três disciplinas, assim distribuídas, com o respectivo número de aulas semanais.

5ªsérie–Matemática(cinco aulas) e Desenho Geométrico (duas aulas)

6ªsérie–Matemática(cinco aulas) e Desenho Geométrico (duas aulas)

7ªsérie–Matemática(cinco aulas), Desenho Geométrico (duas aulas) e Geometria (2 aulas)

8ªsérie–Matemática(cinco aulas), Desenho Geométrico (duas aulas) e Geometria (2 aulas)

O conteúdo da disciplina de Matemática, em todas as séries, é a Álgebra. O conteúdo da disciplina Desenho Geométrico foi organizado para cobrir as construções geométricas, desde as elementares (como traçado de paralelas ou perpendiculares) até a construção de lugares geométricos ou figuras equivalentes em área.

Os conteúdos dessas três disciplinas foram organizados de forma a se completarem mútuamente, em particular as duas últimas, onde as construções servem de base para a elaboração dos objetos geométricos e estes justificam tais construções.

Em particular, na disciplina de Geometria os conteúdos trabalhados foram os seguintes, nas duas séries finais do ensino fundamental, respectivamente:

a) Conceitos Primitivos, Postulados, Segmentos de Reta, Ângulos (definições, ângulos opostos pelo vértice, ângulos complementares e suplementares, ângulos formados por paralelas e transversais), triângulos (definição, condições de existência, classificação, teoremas sobre ângulos internos e externos, congruência), quadriláteros convexos (definições, teorema sobre ângulos internos, quadriláteros notáveis), polígonos convexos (definições, soma dos ângulos internos e dos externos, polígonos regulares, calculo do número de diagonais) e ângulos de circunferência.

b) Teorema de Tales, Teoremas das bissetrizes de triângulos (interna e externa), Semelhança de triângulos, Relações métricas no triângulo Retângulo, Relações métricas na circunferência, trigonometria no triângulo Retângulo, comprimento de circunferência área de figuras planas.

No ano de 2001, foram formadas cinco classes da série final do ensino fundamental na primeira unidade, e três na outra unidade. As aulas de Geometria da primeira unidade são de nossa responsabilidade.

Para desenvolver as atividades propostas nesta pesquisa, foram escolhidas aleatoriamente duas classes, uma de cada unidade, e, dentro de cada classe, também de forma aleatória, cinco alunos.

A pesquisa desenvolveu-se em três sessões para o primeiro grupo e de duas sessões para o segundo grupo, descritas abaixo:

a) primeira sessão – apresentamos quais os objetivos e os procedimentos que seriam usados nas atividades (como seria organizado o trabalho do grupo)

b) segunda sessão - foram desenvolvidas as três atividades iniciais

c) terceira sessão – foi desenvolvida a quarta atividade com o primeiro grupo

A primeira sessão foi desenvolvida, nos dois grupos, fora do ambiente da sala de aula, no período da manhã (as aulas normais desenvolvem-se no período da tarde) .

Perguntamos aos alunos se eles aceitariam participar de uma pesquisa, através da resolução de algumas atividades sobre Geometria Plana, com gravação de suas intervenções. Os alunos dos dois grupos aceitaram participar das atividades propostas.

Em todas as sessões não houve faltas de alunos.

Estabelecemos, com os alunos, que a resolução das atividades seria produto do trabalho coletivo do grupo.

Na segunda sessão, apresentamos as atividades, na forma de questões abertas (vide anexo 2) .

O tempo de resolução das atividades foi de, aproximadamente, cinqüenta minutos para o primeiro grupo e de sessenta minutos para o segundo grupo.

Nas atividades dessa sessão tínhamos a intenção de verificar/comparar se os alunos aplicariam conhecimentos anteriores na resolução de problemas inéditos, produziriam conjecturas e generalizariam resultados.

A terceira sessão foi desenvolvida apenas com o primeiro grupo pois os alunos do segundo não efetuavam demonstrações em suas atividades de ensino. Nosso propósito foi o de ampliar a investigação, desejando verificar se estes conseguiriam elaborar uma demonstração num caso inédito para eles, qual seja encontrar a fórmula de cálculo da área de um trapézio. (vide anexo2), O tempo para a resolução desta atividade foi de quinze minutos.

Em cada atividade o pesquisador teve os seguintes funções:

a) distribuição das questões que seriam debatidas pelos alunos (vide anexo)

b) supervisão dos trabalhos

c) mediação das discussão

d) apresentação ao grupo de perguntas sobre aspectos formais das atividades

e) registro gravado e escrito das discussões e procedimentos na resolução das atividades

f) recolhimento dos protocolos individuais (vide anexo)

Para o desenvolvimento das atividades os alunos não tiveram acesso a material algum de saber institucionalizado como livros ou cadernos, porque algumas das questões apresentadas no desenvolvimento dos trabalhos poderiam ser contaminadas por informações já institucionalizadas nestes materiais.

Estão em anexo os protocolos utilizados pelos alunos na pesquisa. Neles estão documentados os procedimentos utilizados pelos grupos ao resolverem as questões propostas.

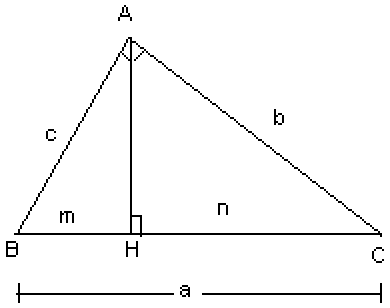
3.2 Mecanismos de Provas

Existem diferenças quanto aos mecanismos de prova adotados normalmente nas duas unidades da Escola. Na primeira, os teoremas são demonstrados e na segunda, normalmente, são apresentados como conseqüências de exemplos que os confirmem.

Procurando evidenciar as diferenças de contrato relativamente a mecanismos de prova entre as duas unidades, descrevemos a seguir o caso do Teorema de Pitágoras.

Na primeira, esse teorema teve como mecanismo de prova a demonstração que se desenvolveu da seguinte maneira:.

Introduzimos o conceito de projeção de segmento sobre uma reta; desenhamos a figura exposta abaixo. Os alunos identificaram que $\Delta ABH \cong \Delta CAH \cong \Delta CBA$, utilizando o caso A.A. de semelhança de triângulos e em seguida demonstramos as relações métricas do triângulo retângulo.



No processo todo, apenas participamos na identificação da congruência dos ângulos internos dos triângulos.

A partir daí, a classe escreveu as proporções entre as medidas dos lados dos triângulos semelhantes e, aplicando a propriedade fundamental das proporções, demonstraram as relações entre elas.

Em particular, usamos as fórmulas $c^2 = a.m$ e $b^2 = a. n$.

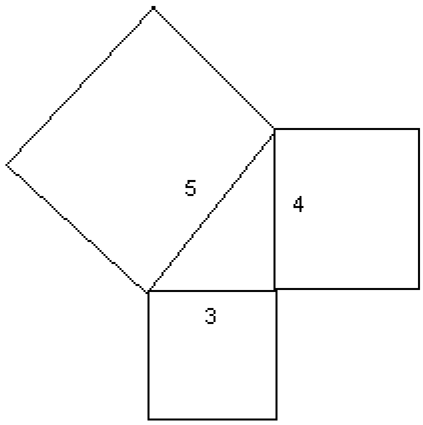
Somando as duas igualdades obtivemos a expressão $a^2 = b^2 + c^2$.

Na segundo unidade o Teorema de Pitágoras foi apresentado como sendo conseqüência de alguns exemplos.

O professor responsável pela disciplina apresentou o triângulo de lados 3 , 4 e 5 e calculou as áreas de quadrados de lados 3 , 4 e 5 . Comparou a área do quadrado de lado maior com a soma das áreas dos outros dois e mostrou que a soma da área dos dois últimos é igual à área do primeiro, como mostramos abaixo:

Foi feita a constatação: $3^2 + 4^2 = 5^2$

$9 + 16 = 25$



Foi apresentado um outro triângulo retângulo, de lados 5 , 12 e 13 e feitos os mesmos cálculos.

Logo após, o professor generalizou os resultados afirmando que, para todos os triângulos retângulos vale a relação $a^2 = b^2 + c^{2,}$ onde a é a hipotenusa do triângulo retângulo e b e c são seus catetos.

CAPÍTULO 4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES/SOLUÇÕES ESPERADAS

A. Primeira Atividade

Objetivo Geral: Generalizar uma propriedade de uma figura geométrica. Efetuar análise e síntese.

Parte 1. Considere um quadrado ABCD, de lados medindo 8cm. Sobre o lado AB, tome o ponto médio O e sobre o lado AD, considere o ponto E satisfazendo:

AE = $\frac{AD}{4}$. Prove que o ΔOEC é retângulo.

Objetivos·

a) Verificar se os alunos conseguem entender um texto matemático e construir corretamente a figura correspondente;

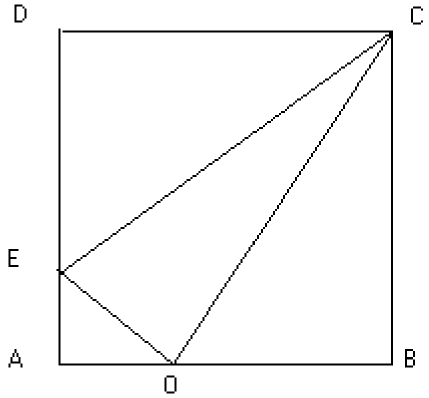
b) Aplicar o Teorema de Pitágoras em duas situações inversas (cálculo de lado de triângulo retângulo e verificação se um triângulo dado é retângulo);

c) Verificar se os aluno utilizam a figura para estabelecer uma conjectura;

d) Verificar se os alunos conseguem resolver um problema trabalhando coletivamente.

e) Verificar se os alunos utilizam procedimentos analíticos e sintéticos para resolver um problema;

Solução Esperada:



Esperamos que o aluno:

a) construa a figura com as medidas dadas e verifique se o ângulo D é reto;

b) calcule as medidas dos segmentos EO, EC e OC e verifique a possibilidade de se aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo OCE; e que identifique as medidas, AE = 2, ED = 6, DC = 8, CB = 8, BO = 4 e AO= 4, usando o procedimento seguinte:

c) No triângulo retângulo EAD, ele pode obter: $ED^2 = 2^2 + 4^2$ e então

$ED^2 = 20$ e, da mesma forma, (considerando-se os triângulos retângulos OBC e CDE) $OC^2 = 80$ e $CE^2 = 100$.

Percebendo que $CE^2 = ED^2 + CE^2$, conclui que ΔEOC é retângulo

Parte 2 Considere um quadrado ABCD. Sobre o lado AB, tome o ponto médio O.

e sobre o lado AD, considere o ponto E satisfazendo

AE = $\frac{AD}{4}$. Prove que o ΔOEC é retângulo.

Objetivo·

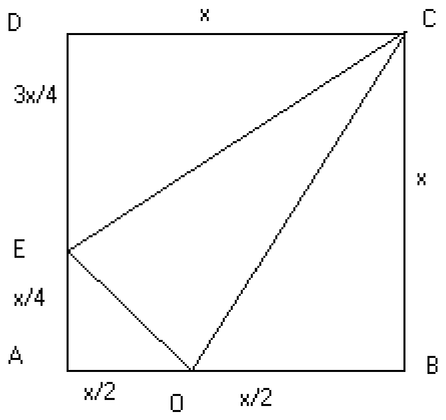
a) verificar se os alunos utilizam a análise da figura e a síntese dos resultados para provar a conjectura;

b) verificar se os alunos generalizam uma conjectura mediante uma demonstração;

c) verificar quais mecanismos de prova são utilizados na demonstração

Solução esperada

Construção da figura



Esperamos que o aluno possa encontrar, para este problema, duas soluções:

Primeira Solução:

1) prove que ΔOEC é retângulo, utilizando as medidas de seus lados e aplicando o Teorema de Pitágoras. Este raciocínio pode ser desenvolvido em quatro etapas, abaixo descritas:

a) cálculo de OE: como ΔEAO é um triângulo retângulo, segue que

$OE^2 = x^2 /16 + x^2/4 = 5.x^2/16$

b) cálculo de OC: da mesma forma, ΔOBC é um triângulo retângulo e, portanto

$OC^2 = x^2 + x^2/4 = 5.x^2/4$

c) usando o fato de que ΔCED é um triângulo retângulo

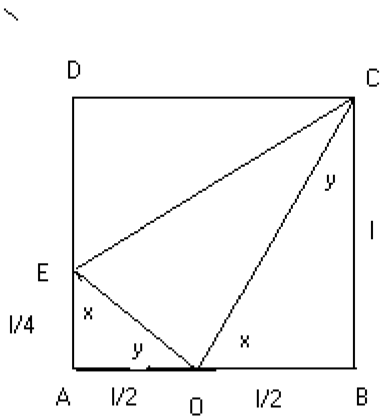
$CE^2 = 9.x^2/16 + x^2 =. 25x^2/16$

d) Finalmente, efetuando-se o cálculo de $OE^2 + OC^2$:

$OE^2 + OC^2 = 5.x^2/16 + 5.x^2 /4 = 25.x^2/16 = CE^2$, Pelo Teorema de Pitágoras conclui que o ΔDEC é um triângulo retângulo.

Segunda Solução

2) Poderia demonstrar a propriedade, usando-se semelhança de triângulos. Nesse caso a solução esperada é a seguinte:



Que constatem que os triângulos EAO e OBC são semelhantes, uma vez que são retângulos e dois de seus lados têm medidas proporcionais (conhecimento adquiridos). Em seguida esperamos que assinalem os ângulos como na figura acima, obtendo $x + y = 90^0$ (triângulo retângulo EAO). Assim poderiam observar que o ângulo EOC é reto e, portanto, que o triângulo EOC é retângulo.

B. Segunda Atividade

Objetivo Geral: Elaborar conjectura de Generalização

Parte 1 Dado que um triângulo tem lados medindo 3 , 4 e 5 cm, então ele é retângulo. Esta é uma afirmação verdadeira ou falsa? Por que?

Objetivo: Disponibilizar uma afirmação que será utilizada pelos alunos nas atividades posteriores.

Solução Esperada

Como os alunos dos dois grupos têm como conhecimento o teorema de Pitágoras, esperamos que eles calculem os quadrados de 3, 4 e 5 para verificar se $4^2 + 3^2 = 5^2$, e então concluam que o triângulo é retângulo.

Parte 2 Obtenha as medidas dos lados de três triângulos, semelhantes ao triângulo cujos lados medem 3,4 e 5 cm (1.1). Esses triângulos são retângulos? Por que?

Objetivo: Verificar se o aluno consegue utilizar um conhecimento que tem disponível (semelhança) para obter triângulos nas condições exigidas e avaliar a conjectura apresentada, por meio do Teorema de Pitágoras. O aluno tem que efetuar duas etapas: obter triângulos semelhantes a um triângulo dado e, logo após, verificar se os triângulos obtidos são retângulos.

A questão está elaborada não de forma usual aquela que utiliza do Teorema de Pitágoras para calcular um dos lado do triângulo retângulo, dadas as medidas dos outros dois. Aqui a premissa é: conhecendo-se as medidas dos lados de um triângulo verificar-se se ele é ou não retângulo.

Solução Esperada

Esperamos que os alunos utilizem a razão de proporcionalidade entre as medidas dos lados de triângulos semelhantes, como por exemplo, 2, 3 e 4 obtendo os triângulos com lados medindo por exemplo 6, 8 e 10 cm. ou 9,12 e 15 ou 12, 16 e 20 cm. Em seguida que verifique se os triângulos são retângulos pelo Teorema de Pitágoras.

Parte 3 O que você encontrou na questão anterior (1.2) permite tirar alguma conclusão?

Objetivo : Constatar se os alunos generalizam resultados, a partir de exemplos.

Solução esperada

Os três triângulos obtidos são retângulos e dois tipos de generalizações são esperadas:

a) restrita: triângulos semelhantes ao triângulo 3,4 e 5 são retângulos

b) ampla: triângulos semelhantes a triângulos retângulos são retângulos

Parte 4 Como comprovar se o que você concluiu na questão anterior (1.3) é verdadeiro?

Objetivo: Verificar qual o sistema de validação é utilizado pelos alunos para provar as conjecturas elaboradas por eles.

Solução Esperada

1) triângulos semelhantes ao triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 cm. são retângulos (generalização restrita).

A verificação pode ser feita

a) calculando-se os quadrados das medidas dos lados dos triângulos obtidos e verificando a relação de Pitágoras, por exemplo, $10^2 = 6^2 + 8^2$

b) triângulos semelhantes ao triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 cms têm lados 3x, 4x e 5x, sendo x a razão de semelhança.

Como $(5x)^2 = (4x)^2 + (3x)^2$, verificamos que a proposição é verdadeira.

2) triângulos semelhantes a um triângulo retângulo também são retângulos (generalização ampla)

A generalização desta conjectura pode ser demonstrada da seguinte forma:

Dado um triângulo retângulo de lados a, b e c u.c., verifica-se $a^2= b^2 + c^2$. Um triângulo semelhante a ele terá lados medindo ax, bx e cx u.c., sendo x a razão de semelhança.

Se considerarmos a soma dos quadrados

$(bx)^2 + (cx)^2= b^2.x^2 + c^2.x^2 = x^2.(b^2+c^2) = x^2.a^2$, e, portanto, como as medidas de seus lados verificam o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que o triângulo de lados ax, bx e cx u.c. também é um triângulo retângulo.

C. Terceira Atividade

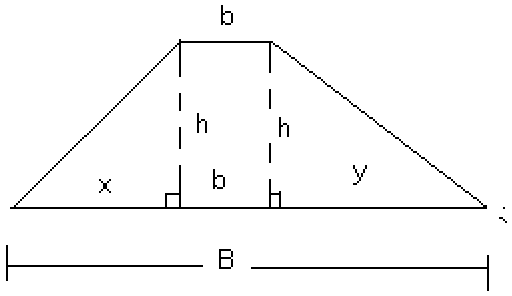
Esta atividade foi aplicada somente aos alunos do primeiro grupo já que o outro grupo não tinha como contrato didático o uso de demonstração como mecanismo de prova. Nossa intenção foi a de ampliar a investigação para avaliar a competência dos alunos do primeiro grupo em obter um novo conhecimento sobre uma figura geométrica, utilizando análise/síntese.

Objetivo Geral: Verificar se os alunos seriam capazes de obter uma fórmula para calcular área, por eles desconhecida. Além disso, se eles utilizariam construções auxiliares, eminentemente geométricas, para resolver o problema proposto.

3.1 Atividade: Obtenha a fórmula para o cálculo da área do trapézio, em função das medidas de suas bases e de sua altura.

Solução Esperada

Esperamos que os alunos utilizem procedimentos analíticos (dividir o trapézio em outros polígonos), seguidos de procedimentos de síntese (somar as áreas dos polígonos obtidos na análise).



Como a área do trapézio é igual à soma das áreas dos dois triângulos com a área do retângulo, pode-se escrever:

$$A_T = \frac{x.h}{2} + b.h + \frac{y.h}{2} = \frac{x.h + 2.b.h + y.h}{2}$$

$$A_T = \frac{h.(x + b + b + y)}{2} = \frac{h.(B + b)}{2}$$

CAPÍTULO 5 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Capítulo 5

5.1 Descrição das intervenções dos alunos durante a resolução das atividades:

Iniciamos este capítulo estabelecendo algumas convenções que nele serão utilizadas. As intervenções dos alunos serão destacadas no texto pelo uso das letras em itálico, precedidas das letras A, B, C D e E (em cada grupo) que indicarão qual aluno está fazendo a afirmação que se segue. A letra P foi reservada para indicar a participação do pesquisador nas discussões.

5.2 Sobre o primeiro grupo:

O grupo de cinco alunos é formado por três alunos com rendimento acima da média (alunos A, B e C), um com rendimento médio (D) e um com rendimento abaixo da média (E).

Em todo o desenvolvimento do trabalho de pesquisa, os alunos deste grupo discutiram entre si as possíveis soluções do problema proposto, expondo seus argumentos para o restante do grupo.

O contrato didático estabelecido entre professor – alunos – saber, prevê a procedimentos de discussão, com a intenção de se aproximar o saber produzido pelos alunos do saber escolar. Este grupo utiliza demonstrações como sistema de validação.

Durante a pesquisa, os alunos A , B e C deste grupo tiveram participação ativa, discutindo entre eles os sistemas de validação utilizados, embora os alunos D e E se mostrassem menos participativos .O grupo demorou cerca de uma hora minutos para desenvolver as atividades propostas.

Passamos a descrever alguns destes momentos:

a) Na segunda atividade (Parte 1) foi discutida a necessidade de se provar o Teorema de Pitágoras antes de aplicá-lo. Houve consenso que não haveria tal necessidade, pois esta demonstração já havia sido feita em classe.

b) Na segunda atividade (Parte 2) os alunos reproduziram o mesmo argumento utilizado anteriormente para encontrar triângulos semelhantes ao de lados medindo 3, 4 e 5 cm.

c) No desenvolvimento da primeira atividade houve a discussão abaixo sobre a necessidade de se construírem figuras e o papel destas na resolução de problemas geométricos(Parte 3),

A*: Precisa fazer a figura senão não se entende o problema.*

P: *Em todos os problemas de Geometria há a necessidade de se construírem figuras?*

C**:** *Não. Quando o problema é fácil, não precisa fazer (a figura).*

B*: Ou quando ele (o exercício) é só de fazer contas. Este aqui é difícil de se imaginar se não fizer a figura.*

A*: Será que precisa fazer a figura em escala?*

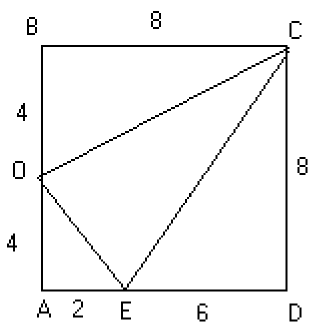
B*: Acho que não porque serve só para ilustrar.*

A*: Mas este problema fica difícil de entender se não fizermos a figura com as medidas certas.*

5.3 Soluções dos alunos para as atividades propostas

A. Primeira Atividade

Os alunos construíram a figura individualmente e verificaram que suas figuras eram iguais. Quando perguntados como haviam entendido o problema, os alunos passaram à seguinte discussão:



B: Temos vários triângulos retângulos e para provar que o triângulo pedido é retângulo, vamos calcular seus lados usando os triângulos retângulos da figura e tentar aplicar Pitágoras no triângulo pedido. Se a frase for verdadeira ele é (retângulo).

A*: Como a gente vai saber qual é a hipotenusa do triângulo? Só se gente tentar com todos os lados...*

B*: É só pegar o lado maior...*

Os alunos compararam as medidas dos três lados e verificaram qual seria a hipotenusa.

A: *Vamos chamar os lados de a, b e c.*

ΔDAE: $b^2 = 4^2 + 2^2$

$b^2 = 16 + 4$

$b = 2.\sqrt{5}$

ΔEDC: $c^2 = 6^2 + 8^2$

$c^2 = 36 + 64 = 100$

$c = 10$

ΔCBD: $a^2 = 8^2 + 4^2$

$a^2 = 64 + 16 = 80$

$a = 4.\sqrt{5}$

B*: Raiz de 100 é maior que raiz de 80 que é maior que raiz de 20, logo o lado mede raiz de 100.*

Feita esta constatação, os alunos utilizaram o Teorema de Pitágoras para concluir que, de fato, o triângulo pedido é retângulo.

B: $10^2 = (2.\sqrt{5})^2 + (4.\sqrt{5})^2$

$100 = 20 + 80$

$100 = 100$

C*: Apesar de nosso ângulo reto não parecer, o triângulo é retângulo.*

(porque verifica a relação de Pitágoras).

P: O fato de sua figura não estar correta altera sua conclusão?

B: Não, porque o teorema de Pitágoras deu certo e isto garante que o triângulo é retângulo.

P: Vocês já leram o enunciado da segunda parte? Qual a diferença entre a primeira e segunda partes?

D: Ele não dá o valor do lado (do quadrado). Aí você vai provar de verdade, não é mais um exemplo... temos que provar que vale para sempre..

A: Este exercício é teórico, não tem medida... Já fizemos alguns iguais antes.

P: Vocês se lembram de algum?

B: Quando demonstramos a diagonal do quadrado.

P: O que é um exercício teórico?

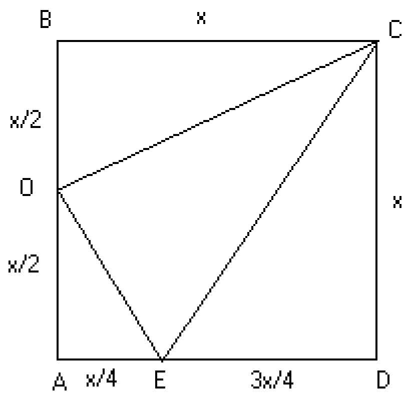
B: É um que vale para muitas figuras. O da diagonal do quadrado vale para todos os quadrados, não só para um quadrado.

Durante a construção da figura, colocamos a seguinte questão: a figura afeta os resultados? A explicação obtida foi a seguinte: não, pois na demonstração usa-se o Teorema de Pitágoras e se de sua aplicação resultarem fatos comprovadamente válidos, conclui-se que a afirmação feita é verdadeira.

A: *O que importa são as proporções e, como chamamos o lado de x, se for verdadeiro para ele, então vale para qualquer medida, qualquer figura (que respeite as condições do problema).*

B: *Vamos chamar o lado do quadrado de x e calcular os outros lados da figura aplicando Pitágoras nos três triângulos retângulos.*

Estamos considerando OE = b, EC = c, CO = a



ΔAEO: $b^2 = (\frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{4})^2$

$b^2 = 5.x^2/16$

ΔEDC: $c^2 = (\frac{3x}{4})^2 + x^2$

$c^2 = 25.x^2/16$

ΔCBO: $a^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2$

$a^2 = 5.x^2/4$

Cada aluno calculou as medidas dos lados dos triângulos e comparou estes cálculos com os dos colegas, chegando a um resultado único e correto. A seguir, para verificação de que o triângulo dado é retângulo, aplicou-se o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = 5.x^2/4 + 5.x^2/16 = 25.x^2/16 = c^2$$

B:. .*eu calculei os lados e apliquei Pitágoras e cheguei numa frase verdadeira, logo o triângulo é retângulo.*

P: *O que vocês podem concluir?*

C : *Que o triângulo do meio será sempre retângulo.*

B. Segunda Atividade

Parte 1

Os alunos concluíram que um dado triângulo é retângulo, calculando os quadrados das medidas quadrados de seus lados e verificando que tais medidas satisfaziam a relação de Pitágoras.

A: *Para verificar se o triângulo é retângulo é só aplicar Pitágoras.*

Chega-se que 25 é igual a 25 e aí prova que o triângulo é retângulo.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$9 + 16 = 25$

$25 = 25$

Um dos alunos formulou a seguinte questão:

C: *Precisa provar o Pitágoras ?*

B: *Não precisa, porque já provamos antes e por isto eu só fiz as contas*.

P: *Será que é necessária a construção do triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 unidades?*

B: *Não é necessária, pois os cálculos seriam feitos levando-se em conta as condições do problema e a figura seria apenas uma referência...*

Parte 2

P *Como vocês farão para obter triângulos semelhantes ao triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 unidades?*

A*: Eu peguei os lados do triângulo e multipliquei por 2, 3 e 4. Os lados são proporcionais então os triângulos serão semelhantes.*

D*: Os triângulos têm lados 6, 8 e 10, outro 9,12 e 15 e outro com lados 12, 16 e 20*

Parte 3

P: *Todos concordam com este procedimento?*

C: *Sim. Todos os triângulos obtidos são retângulos e aí a gente conclui que todos os semelhantes a um triângulo retângulo serão retângulos... os lados são proporcionais então os ângulos serão iguais.*

B*: Apenas vão aumentar os lados, os ângulos não mudam. Eles (os triângulos) vão ter a mesma forma.*

Neste ponto, um dos alunos questiona o fato de a conjectura proposta ser apresentada com exemplos.

C: *O que nós fizemos não foi dar exemplos? Dar exemplos não é demonstrar, será que poderíamos afirmar que a conclusão é verdadeira?*

B: *No item dois foi pedido para que dê exemplos e foi o que fizemos.*

C: *Concluímos que se um triângulo é retângulo, triângulos semelhantes a ele também serão retângulos.*

P: *Vocês tiraram uma conclusão a partir dos exemplos acima. Vocês podem afirmar que esta conclusão é verdadeira?*

C*: Não, porque nós só demos exemplos.*

B: *O que nós temos que provar agora? O que foi pedido é para se tirar uma conclusão a partir de exemplos e depois que se prove que a conclusão é verdadeira.*

Todos concordam que a conjectura é verdadeira (triângulos semelhantes ao triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 unidades são retângulos) e passaram a discutir como provar que a conjectura é verdadeira.

Parte 4

B: *Agora nós temos que pensar como que a gente vai provar. através de proporção.*

A: *Eu vou fixar um triângulo x,y e z e pegar outro com lados 2x,2y e 2z e ver se dá certo.*

Os alunos verificaram que o novo triângulo também é retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras.

A: $(2x)^2 + (2y)^2 = (2z)^2$. *Logo,* $4.x^2 + 4.y^2 = 4.z^2$

Dividindo tudo por 4, dá $x^2 + y^2 = z^2$

A: *Eu peguei o triângulo retângulo x, y e z e apliquei Pitágoras e aí apliquei Pitágoras no triângulo maior 2x, 2y e 2z, e cheguei a* $x^2 = y^2 + z^2$, *logo ele é retângulo.*

P: T*odos concordam com a demonstração?*

B: *Não, porque ele só fez para o dobro. Tem que fazer para todos os triângulos retângulos.*

A: *Teríamos que provar que vale para outros. Vamos pegar o triângulo ax. ay e az.*

P: *O que seria este a?*

C: *Seria a razão de semelhança, seria o k.*

A: *Vamos trocar por k porque já fica especificado que é a razão de semelhança.*

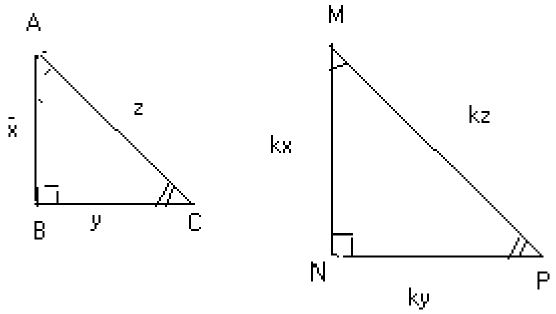
P: *Será que poderíamos escrever direto a frase* $(kx)^2 = (ky)^2 + (kz)^2$*?*

A: *Você já está supondo que ele é retângulo*.

P: *E se este triângulo não fosse retângulo? Como vocês saberiam?*

A: *Eu parti do Pitágoras no primeiro triângulo e cheguei novamente a Pitágoras, o que é verdadeiro, logo a frase inicial é verdadeira. As frases são equivalentes porque é uma expressão, a frase final é igual a inicial, que é verdadeira.*

Reproduzimos, a seguir, a demonstração proposta por um dos alunos.



Sendo $\Delta ABC \approx \Delta MNP$, $x^2 + y^2 = z^{2.}$

$(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$

$k^2.x^2 + k^2.y^2 = k^2.z^2$

$k^{2.}.(x^2 + y^2) = k^2.z^2$ cancela-se k^2 e tem-se

$x^2 + y^2 = z^{2.}$, CQD

C. Terceira Atividade

Todos os alunos construíram a correspondente figura, assinalando nela as alturas, a partir das extremidades da base menor, como mostra a figura abaixo.

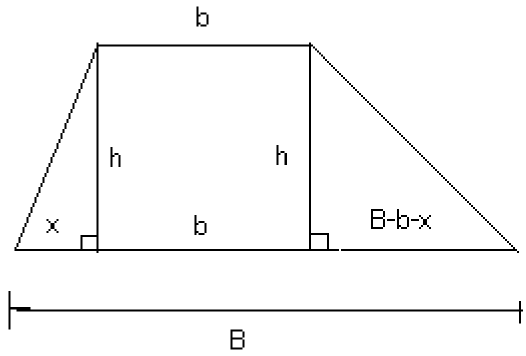
A: *Vamos traçar as alturas para dividir o trapézio em três partes... se somarmos as três áreas teremos a área do trapézio*...

B: *A figura do meio é um retângulo.*

P: *Por que?.*

B: *Porque, quando as alturas, os ângulos de baixo são retos.*

C: *A base menor é paralela à base menor, então os ângulos de cima também serão retos. .e a figura do meio é um retângulo..*



Apresentamos a seguir, a solução encontrada pelo grupo. Em alguns momentos houve dúvidas quanto a procedimentos algébricos (por exemplo, como escrever a soma das áreas, se determinados cancelamentos eram lícitos, como agrupar termos semelhantes, como finalizar a demonstração, etc...). Porém, o que consideramos mais importante e aqui queremos destacar, é a construção, pelos alunos, da demonstração da fórmula do trapézio, com a qual eles alunos nunca haviam antes se deparado e conseguiram realizar.

$A_{\Delta} = \dfrac{x.h}{2}$

$A_{\Delta} = \dfrac{(B-b-x)}{2}$

A = b.h

$$A_T = \frac{x.h}{2} + \frac{(B-b-x)}{2} + b.h$$

$$A_T = \frac{x.h}{2} + \frac{Bh-bh-xh}{2} + b.h$$

$$A_T = \frac{Bh-bh}{2} + b.h$$

$$A_T = \frac{Bh-bh+2bh}{2}$$

$$A_T = \frac{bh+bh}{2}$$

$$A_T = \frac{h(B+b)}{2}$$

Houve dúvidas quanto ao fato de os triângulos serem ou não isósceles. O aluno A indicou as bases dos dois triângulos com a letra x, sugerindo, assim serem os dois congruentes. Quando questionamos se poderíamos assumir que os triângulos são congruentes, obtivemos a seguinte resposta:

D: *Não, porque não foi dito que o trapézio era isósceles*

5.4 Sobre o Segundo Grupo

Dois dos (alunos A e B) têm rendimento, em termos de notas, acima da média de aprovação da Escola, que é seis; um dos alunos tem média igual a seis (aluno C) e dois deles têm média inferior a seis.(alunos D e E).

Os alunos cuja nota é maior que a média 6,0 conseguem tal rendimento mediante muito estudo, fazendo todas as tarefas individuais e estando, geralmente, muito atentos às aulas. No entanto, poucos participaram das discussões em sala de aula.

Já o aluno com conceito médio apresenta uma maior participação nas atividades de sala de aula, embora não seja muito aplicado na realização das atividades individuais.

Finalmente, os dois alunos com rendimento abaixo da média da unidade não se aplicam nas tarefas individuais e têm pouca participação nas atividades de sala de aula. Um deles poucas vezes faz as lições e o outro cumpre apenas 60% dos trabalhos extraclasse sugeridos.

Estas informações foram fornecidas pela professora de Geometria da classe destes alunos.

O grupo demorou uma hora e quinze minutos para desenvolver as atividades propostas.

Em todo o trabalho de resolução das atividades, os três primeiros alunos chamaram a si a responsabilidade da produção dos saberes enquanto que os dois últimos as executavam de forma menos compromissada, muito embora, quando solicitados a responder às questões propostas, se inseriram na discussão.

Ficou nítida, em vários momentos, a dificuldade que os alunos encontravam em discutir procedimentos que os levariam à resolução das atividades propostas. Nestas ocasiões, eles se dirigiam ao professor buscando aprovação aos métodos por eles sugeridos. Quando, no entanto, a pergunta era devolvida ao grupo, obtínhamos uma boa resposta: o aumento do interesse na discussão do problema.

O contrato didático estabelecido entre os alunos deste grupo e a professora de Geometria prevê a argumentação entre seus membros (usualmente os trabalhos em classe são desenvolvidos em grupo). No entanto, o sistema de validação adotado nas relações com o saber escolar prevê, normalmente, a utilização de exemplos como mecanismos de prova.

5.5 Soluções dos alunos para as atividades propostas

A. Primeira Atividade

Todos os alunos passaram a fazer a figura relativa à atividade proposta e houve consenso quanto à sua construção.

P: *Por que vocês estão fazendo a figura, se na atividade anterior ela não foi utilizada?*

A: *Porque este exercício não dá para entender sem a figura.*

B: *Fica complicado imaginar o que está sendo pedido...*

Não havendo discordância quanto à figura, o aluno B propôs que se calculassem as medidas dos lados dos triângulos OEA, BOC e CDE.

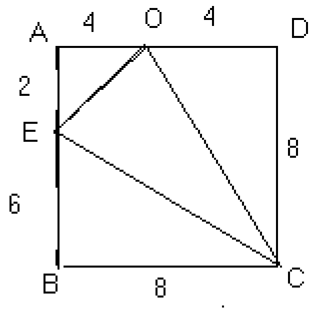
C: *Porque são os lados do triângulo que se quer provar que seja retângulo.*

Sendo x = EO, y = DC e z = EC, temos

P: *Como vocês sabem qual é a hipotenusa do* Δ*OEC?*

B: *É só olhar a figura.*

A: *Ou calcular os tres lados e ver qual é o maior.*



$x^2 = 6^2 + 8^2$	$y^2 = 16 + 64$	$z^2 = 2^2 + 4^2$
$x^2 = 36 + 64$	$y^2 = 80$	$z^2 = 4 + 16$
$x^2 = 100$	$y = 4\sqrt{5}$.	$z^2 = 20$
$x = 10$		$z = 2\sqrt{5}$

$10^2 = (4.\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2$

$100 = 16.5 + 4.5$

$100 = 80 + 20$

$100 = 100$, logo o triangulo OEC é retângulo.

P: *Qual é a diferença entre as duas partes desta atividade?*

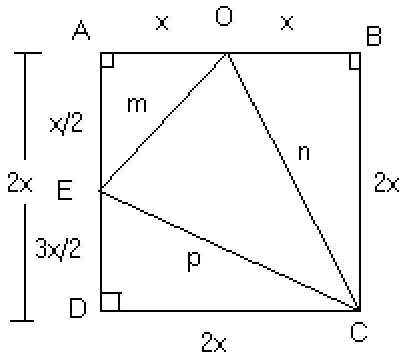
C: *Não se conhece o lado quadrado.*

P: *O que muda na atividade?*

A: *Só que tem que mexer com letras.*

A figura foi construída de modo análogo ao da atividade anterior: foram usadas, para a resolução do problema, informações já conhecidas (como por exemplo, qual seria a hipotenusa do triângulo OEC).

Reproduzimos, a seguir, a solução apresentada pelos alunos.



$AE = \frac{AD}{4}$	$ED = 2x - \frac{x}{2}$	ΔAOE	ΔOBC
$AE = \frac{2x}{4}$	$ED = \frac{4x-x}{2}$	$m^2 = (\frac{x}{2})^2 + x^2$	$n^2=x^2 + (2x)^2$

AE = $\frac{x}{2}$ ED = $\frac{3x}{2}$ $m^2 = \frac{1}{4}.x^2+x^2$ $n^2 = x^2 + 4.x^2$

$m^2 = \frac{5}{4}.x^2$ $n^2 = 5.x^2$

$m = \frac{x\sqrt{5}}{2}$ $n = x.\sqrt{5}$

ΔOEC

$(\frac{5x}{2})^2 = (\frac{x\sqrt{5}}{2})^2 + (x.\sqrt{5})^2$

$\frac{25}{4} \cdot x^2 = \frac{5}{4}.x^2 + 5.x^2$

$\frac{25}{4} \cdot x^2 = \frac{1}{4}.(5.x^2 + 20.x^2)$

$\frac{25}{4} \cdot x^2 = \frac{25}{4} \cdot x^2 \Rightarrow 25.x^2 = 25.x^2$, logo

o ΔOEC é retângulo

ΔEDC

$p^2 = (\frac{3x}{2})^2 + (2x)^2$

$p^2 = \frac{9}{4}.x^2 + 4.x^2$

$p^2 = \frac{1}{4}.(9.x^2 + 16.x^2)$

$p^2 = \frac{25}{4}.x^2$

$p = \frac{5x}{2}$

A: *Fica muito fácil fazer este problema quando já se fez o exercício anterior...*

P: *É possível resolver a terceira atividade sem ter visto a segunda?*

C:...*eu acho que só seria mais difícil mas daria para resolver porque nós já fizemos muitos exercícios teóricos antes.*

P: *Vocês se lembram de algum?*

B: *Não*.

P: *O que é exercício teórico?*

C :*É aquele que mexe com letras.*

P: *É possível tirar alguma conclusão desta atividade?*

C**:** *Que os triângulos do meio serão retângulos também.*

Ao expormos aos alunos que nosso objetivo era testar se eles utilizariam, para a solução da atividade 3, o conhecimento previamente adquirido na atividade 2, o grupo concordou que, de fato, a segunda atividade facilitava muito a resolução da terceira.

B. Segunda Atividade

Parte 1

P: *É necessário demonstrar o Teorema de Pitágoras, antes de usá-lo?*

A: *Não é preciso porque ele já foi demonstrado pela professora.*

P: *Como foi demonstrado o Teorema de Pitágoras?*

B: *A professora mostrou uns triângulos retângulos e fez as contas com os lados*

C*: E depois colocou a fórmula na lousa.*

No enunciado da atividade se propõe a demonstração de que o triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 u.c. seja retângulo. Os alunos passaram a provar esta afirmação usando o Teorema de Pitágoras.

C*: Já sabíamos que o triângulo é retângulo de tanto usá-lo nos exercícios mas como se pede que se prove, aplicamos Pitágoras.*

P: *Qual é a utilidade do Teorema de Pitágoras?*

A: *Serve para calcular lado de triângulo retângulo e para saber se um triângulo é ou não retângulo...*

P: *Se, em algum caso de aplicação do Teorema de Pitágoras, a sentença obtida não for verdadeira, o que isto significa?*

C: *Que o triângulo não é retângulo*...

Os alunos não utilizaram figura alguma para realizar a primeira atividade.

P: *É necessária a construção de figura* ?

A: *Não, porque estamos fazendo cálculos com Pitágoras e ele é suficiente para verificar se um triângulo é ou não retângulo*

Parte 2

Para obter triângulos semelhantes ao triângulo de lados medindo 3, 4 e 5 cm., os alunos usaram o caso de semelhança LLL, multiplicando a medida de cada lado do triângulo por uma constante não nula. Dessa forma, encontraram triângulos com lados medindo 6, 8 e 10 cm 9, 12 e 15 cm. e 12, 16 e 20 cm..

Parte 3

B: *Nem seria necessária a verificação para saber se os triângulos obtidos são ou não retângulos porque, obviamente, conservam a forma..*

C: *Não se mexe nos ângulos..*

B: *Todos os triângulos semelhantes ao triângulo de lados 3, 4 e 5 são retângulos.*

Parte 4

A: *É só aplicar o Teorema de Pitágoras nos três triângulos*

P: *Será que esta propriedade vale para outros triângulos retângulos?*

B*: Não dá para pegar todos os triângulos retângulos e fazer as contas*

A: *Que medidas teriam o triângulo?*

B: *Não dá pra dizer quais seriam as medidas.*

C: *Acho que é meio óbvio que vale para outros triângulo*s.

CAPÍTULO 6 ANÁLISE COMPARATIVA/CONCLUSÕES

6.1 Análise comparativa das produções dos dois grupos

1.Primeira atividade

Parte 1

Nos dois grupos, inicialmente os alunos converteram com sucesso o problema em linguagem natural para a geométrica, construindo a figura adequada. O Teorema de Pitágoras foi aplicado corretamente no cálculo da medida do lado do triângulo retângulo e a figura foi utilizada para estabelecer a conjectura de que o triângulo OEC era retângulo , validando-a pela forma inversa do Teorema de Pitágoras.

As decisões sobre os procedimentos (algébricos ou geométricos) foram discutidas pelos participantes dos dois grupos podendo se perceber que os membros do segundo grupo que não tem hábito de trabalhar para produzir conhecimento, sentiram-se motivados com o desafio.

Houve uma diferença no comportamento dos alunos dos dois grupos no que se refere ao papel do pesquisador/professor nas atividades. Enquanto que no primeiro foram raras a vezes em que algum aluno se dirigiu ao professor/pesquisador para decidir quais procedimentos adotar, o segundo tal prática foi mais comum.

Nesta atividade, cujos objetivos eram por um lado verificar se os alunos conseguiam aplicar o teorema de Pítágoras em sua forma inversa e por outro, prepará-los para a resolução da próxima atividade, não caracterizamos diferença entre os dois grupos na busca da solução. Creditamos isso, ao fato de que os procedimentos matemáticos necessários para resolver o problema se limitavam à aplicações do Teorema de Pitágoras e à cálculos algébricos.

Parte 2

Na primeira parte dessa atividade a medida do lado do quadrado era conhecida e valia 8cm , na segunda não, pretendendo verificar se os alunos eram capazes de generalizar. A ausência do lado do quadrado foi notada pelos dois grupos. No entanto, os modos de avaliá-la não foram iguais.

Para o primeiro grupo, lembrava algo teórico, relacionando-a a questões que se demonstram. Questionado pelo pesquisador/professor o que significava para eles uma questão teórica , eles responderam que teórica quer dizer ter validade para “todas “ as figuras.

O segundo grupo, também a referiu-se a questão teórica , e indagado pelo pesquisador/professor do que se tratava, eles responderam que teórica é que se usa letras.

Pudemos registrar que os dois grupos utilizaram procedimentos analíticos (separam-se partes da figura, para melhor entender o problema) e sintéticos (para decidir ser uma afirmação é correta) para resolver a atividade .

2.Segunda Atividade

Parte 1

Os dois grupos encontraram a mesma solução para o problema: aplicaram o Teorema de Pitágoras em uma relação inversa `a normalmente apresentada nos seu enunciado; ou seja, usaram-no para verificar se um dado triangulo é retângulo.

Quanto à necessidade de se fazer figuras para resolver o problema, ambos os grupos decidiram que bastava que se fizessem os cálculos, omitindo a representação geométrica.

Os dois grupos não acharam necessário efetuar a demonstração do Teorema de Pitágoras, evidenciando que entendiam-no como um saber que pode ser utilizado sem demonstrar.

Parte 2

Os dois grupos procederam da mesma forma para o obtenção de triângulos semelhantes ao triangulo de lados medindo 3 , 4 e 5 cm: multiplicaram as medidas dos lados por uma mesma constante não nula, a razão de semelhança.

Parte 3 e 4

As generalizações foram distintamente percebidas pelos dois grupos.

O primeiro grupo percebeu que, triângulos semelhantes ao triângulo de lados 3 , 4 e 5 cm são também retângulos. Além disso, esse grupo foi mais além conjecturou que : todo triângulo semelhante a um triangulo retângulo também é retângulo (generalização ampla). O grupo indicou que esta conjectura só poderia ser aceita se demonstrada e em seguida efetuou esta demonstração com sucesso.

O segundo grupo ficou na generalização restrita (triângulos semelhante ao triangulo retângulo de lados 3, 4 e 5 cm são retângulos), conjeturou que talvez a generalização ampla fosse verdadeira mas, não conseguiu elaborar uma demonstração, afirmando ser impossível efetuar as verificações para todos os triângulos (um a um).

6.2 Análise da produção do primeiro grupo relativamente à terceira atividade

Inicialmente os alunos decompuseram o trapézio em três figuras, a saber: dois triângulos e um retângulo. Perceberam a existência de um retângulo no interior do trapézio, quando traçaram duas de suas alturas. Encontradas as áreas de cada uma das três figuras acima descritas e somando-as, obtiveram a fórmula para o cálculo da área de um trapézio, até então desconhecida por eles.

Para desenvolver essa atividade os alunos utilizaram da propriedade da aditividade de figuras planas (se duas figuras planas A e B tem em comum no máximo pontos de suas fronteiras , então a área da figura AUB é a soma das área de A e B). Este saber assumido sem demonstração pareceu lógico para os alunos. Questionados se poderiam usá-lo , os alunos , assumindo-o como postulado , afirmaram que sim porque ....é lógico que isto é verdadeiro.

Houve manifestações quanto ao fato de já ter sido usada esta conjectura como verdadeira em duas ocasiões : a primeira ao demonstrar-se uma das fórmulas da área do triangulo , obtida a partir da área do paralelogramo, e , a segunda ao resolverem-se exercícios nos quais os cálculos de áreas de figuras planas mais complexas exigia a decomposição das figuras em uma reunião de outras mais elementares.

O raciocínio analítico e sintético (decomposição de uma figura em partes e o posterior agrupamento destas partes na demonstração) foi utilizado pelo grupo

6.3 Conclusões

Nesta pesquisa tínhamos como questionamentos que:

1) Um tipo de contrato didático que favoreça a participação do aluno na construção do conhecimento, favorece o uso de demonstrações como sistema de validação para alunos do ensino fundamental? Nessa perspectiva que tipo de atividades poderiam ser eficazes ?

Conclusões

1) Pudemos perceber no desenvolvimento deste trabalho que uma prática docente que tenha como base a participação, a argumentação do aluno nas produções em Geometria pode favorecer o rompimento de um contrato didático em que o professor tem a verdade e o aluno aceita o que ele diz, propiciando que alunos do ensino fundamental cheguem a aceitar um sistema de validação por meio de demonstração.

Os alunos do primeiro grupo tomaram a si a resolução das atividade e , raramente recorreram ao professor/pesquisador para decidir quais soluções eram mais apropriadas.

Houve vários momentos em que os alunos do segundo grupo se dirigiram ao professor/pesquisador para que este validasse alguma proposição elaborada por eles.

2) O uso de demonstrações como mecanismo de prova torna a Geometria atraente para os alunos. Um sistema de validação que utilize de generalizações , análises e sínteses, entre outras categorias lógicas aceitas pela comunidade matemática como mecanismos válidos na formulação de conjecturas, pode facilitar a compreensão da Geometria pelos alunos.

Constatamos que o uso de demonstrações aliado a um tipo de contrato didático como referido anteriormente, pode favorecer sua aprendizagem. O fato dos alunos do primeiro grupo poderem obter a fórmula da área do trapézio utilizando-se das categorias lógicas como análise e síntese, nos parece indicativo.

3. Processos heurísticos de provas e refutações , estabelecidos no contrato didático, mesmo quando implicitamente, podem facilitar a

produção de saberes pelos alunos, aproximando este saber ao saber escolar.

Nas discussões dos dois grupos houve vários momentos em que os procedimentos propostos por um de seus elementos eram discutidos por outros elementos do grupo. Estas discussões foram fundamentais para a resolução dos problemas propostos como , por exemplo , quando os alunos do segundo grupo discutiram como descobrir quais lados dos triângulos da segunda atividade eram hipotenusas ou quando os alunos do primeiro grupo discutiram como conseguir a formula da área do trapézio.

4) A elaboração pelo professor de material didático como o utilizado nessas atividades (em forma de desafios) pode contribuir para suprir uma falta nos livros didáticos, pois como foi apresentado na pesquisa bibliográfica sobre livros indicados nos PCNs (1998) , a maioria deles , não apresenta atividades em que haja necessidade de o aluno efetuar demonstrações , dificultando com isto estabelecimento e um contrato didático no ensino da Geometria, que privilegie a participação e a argumentação dos alunos.

5) O uso das demonstrações pode facilitar a formação de atitudes científicas nos alunos , na medida em que a construção e utilização de sistemas de validação aceitos pela comunidade de matemáticos favorece a aproximação entre o saber produzidos por eles ao saber escolar. Na terceira atividade , por exemplo , os alunos do primeiro grupo utilizaram-se de operações lógicas como análise e síntese para elaborar uma demonstração inédita para eles.

Os alunos do segundo grupo não tinham elementos para elaborar a generalização ampla, possível na segunda atividade, já que no contrato didático estipulado no curso desenvolvido na unidade a que eles pertencem não são utilizados mecanismos de prova que validasse sua conjectura. Apesar deles terem levantado a hipótese da generalização ampla sentiram-se impossibilitados de argumentar a favor de sua validade.

Os alunos do primeiro grupo conseguiram elaborar a demonstração da conjectura elaborada por eles próprios, pois puderam disponibilizar os conhecimentos científicos necessários (como a introdução de uma variável auxiliar para representar a razão de proporcionalidade entre os lados de triângulos semelhantes).

A formação de atitudes científicas nos alunos, pode ser revelada em suas falas (pág. 49) quando em discussão, um deles questionou um outro sobre o fato de estar utilizando a tese como hipótese. Nessa discussão, o segundo aluno disse que , o que ele estava fazendo não era usar a tese como hipótese , mas sim , negando a tese para verificar se com isto , contrariaria a hipótese. Neste caso, o que os alunos estavam discutindo era a utilização de um mecanismo de validação aceito pela lógica formal (demonstração por absurdo).

Segunda questão da pesquisa:

Um sistema de validação que utiliza demonstração pode ser utilizado no ensino de Geometria Plana, no nível fundamental, favorecendo a aproximação do saber produzido pelos alunos e o saber escolar?

Conclusões:

1) Este trabalhou teve como resultado a indicação da viabilidade de poder utilizar com sucesso um sistema de validação por meio de demonstrações.

Analisando as respostas dos dois grupos quanto à possibilidade de se generalizar o que haviam obtido na parte 2 da segunda atividade , notamos que somente o primeiro grupo conseguiu produzir a generalização ampla e que o segundo grupo produziu somente e a generalização restrita, por não dispor de mecanismos de demonstração que validassem sua conjectura.

Podemos , então , inferir que o abandono das demonstrações em detrimento `a utilização de exemplos como mecanismos de validação pode dificultar que os alunos produzam generalizações .

2) Em nossa pesquisa pudemos verificar que a prioridade dada à Álgebra, pode provocar nos alunos, o entendimento que mesmo as situações no quadro da Geometria são aplicações da Álgebra. As demonstrações de propriedades geométricas são entendidas como meros procedimentos algébricos dificultando a produção de generalizações geométricas.

Na primeira atividade, quando se pede a generalização da propriedade obtida mediante aplicação do Teorema de Pitágoras na figura construída por eles, os alunos do primeiro grupo entenderam que houve uma generalização, afirmando que, a propriedade deve *ser provada para sempre* (para todas as figuras geométricas semelhantes à proposta no problema). E os alunos do segundo grupo entenderam a atividade somente como meros cálculos algébricos afirmando *tem que mexer com letras* (ou seja , um problema característico da álgebra).

Nesse mesmo sentido encontramos as respostas dos dois grupos quando perguntados sobre o que é uma questão teórica. O primeiro grupo afirmou que : *É um que vale para muitas figuras . O da diagonal do quadrado vale para todos os quadrados , não só para um quadrado*. O segundo grupo, em contrapartida, respondeu , *é aquele que mexe com letras*.

Para o primeiro grupo exercício teórico é o que permite generalização e para o segundo grupo é aquele que se refere à Álgebra

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Anais do IV Encontro Paulista de Educação Matemática – 1996

ARSAC, G. Les Recherches Actuelles sur L'apprentissage de la Démonstration et les Phénomènes de Validation en France *- Recherches en Didactique Mathématiques , Vol.9 , n^0 3 , pp.247-280 ,1988*

BALACHEFF N. Processus de Preuve et Situations de validation*, Educational Studies in Mathematics, vol.18, n.2, p.147-176, 1987*

—*Es la Argumentación un obstáculo? Invitación a un debate*. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Laboratoire Leibniz Grenoble. 1999

BASTIAN I.V. *O Teorema de Pitágoras*. *Dissertação de Mestrado* PUCSP, 2000.

BICUDO, V. M. A (org.).*Pesquisa em Educação Matemática*: *Concepções e Perspectivas.* Rio Claro: Unesp, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura*. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental: Terceiro e Quartos Ciclos (PCNs) 1998*

BROUSSEAU, G. Fondementes et méthodes de la didactique des mathématiques *Recherches en Didactique des mathématiques v.7, n^o 2, pp.33-116. Grenoble, 1986.*

CHEVALLARD Y. e BOSCH M.e GASCÓN J. *Estudar Matemática – o Elo Perdido Entre o Ensino e a Aprendizagem*, Arimed, 2001.

DAVŸDOV.V.V. *Tipos de generalización en la Ensenanza*, Havana: Pueblo e Educación, 1982

Dicionários e Enciclopédias

—Kluwer Academic Publishers *Encyclopaedia of Mathematics, 1989*

—D.Van Nortrand Company *Mathematics Dictionary: James &James, 1968*

—WILDER, R.L.*Introduction to the Foudations of Mathematics, John Wiley and Sons Ltda, 1965*

GOULART L. J*.* O que é geometria? Porque ensiná-la? *.* Dissertação de Mestrado *Unesp, 1989.*

GOUVEA, F. A T. Aprendendo e Ensinando Geometria com Demonstração – Uma Contribuição Para a Prática Pedagógica do Professor de Matemática do Ensino Fundamental. *.* Dissertação de Mestrado *PUC/SP, 1998.*

GOUVEA F.A.T. e ALMOULOUD S. Ag*.*– Demonstração – Aspectos Epistemológicos e de ensino/aprendizagem, *IV EPEM.São Paulo: Atual 1996*

HARUNA, N.C.A*.* Teorema de Thales: Uma Abordagem do Ensino-Aprendizagem, *.* Dissertação de Mestrado *PUC/SP 2000.*

GIOVANNI, J R. e PARENTE*, E.* Aprendendo Matemática*. São Paulo:FTD, 1999.*

GRASSESCHI, M. C.C*. e outros* Projeto Oficina de Matemática *São Paulo:FTD, 1999.*

IEZZI, G*. e outros* Matemática e Realidade *São Paulo :Atual. 2000*

IMENES, L.M.P. *Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem de Matemática* . Dissertação de Mestrado Unesp: 1989.

KUHN, T.S*. A Estrutura das Revoluções Cientificas*. São Paulo: Perspectiva, 2000.

LEFEBVRE, H. *Lógica Formal / Lógica Dialéctica* Rio de Janeiro: :Civilização Brasileira, 1979.

LOPES, A J. *Matemática Hoje É Feita Assim.* São Paulo :FTD 2000

MEISSNER H. Encapsulation of a Process in Geometry*, pag.359 vol3 dointernational Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht. The Netherlands, 2001.*

MELLO, E*.* Demonstração : Uma Seqüência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino de Geometria *. Dissertação de Mestrado PUC/SP, 1999.*

MURARI, C. *Ensino e Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª série via Caleidoscópio.* . Dissertação de Mestrado Unesp/RC: 1999

PAVANELLO, R. M. *O Abandono do Ensino de Geometria : Uma Visão Histórica.*. *Dissertação de Mestrado* Unicamp:1989

PEREIRA M.R. O *A Geometria Escolar :Uma Análise dos Estudos Sobre o Abandono de seu Ensino* . *Dissertação de Mestrado* PUC/SP 2001.

POLYA, G. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princenton : University Press, 1954

—*A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciencia, 1978.

REGO, A L.G.B*.* e Outros Matemática na Vida e na Escola *São Paulo:Editora do Brasil, 1999.*

SACRISTÁN J.G., GÓMEZ A L*.* Compreender e Transformar o Ensino, *4ª edição. São Paulo :ARTMED, 2000 - Tradução Ernani F. da Fonseca.*

SPINELLI, W*.* MATEMÁTICA *São Paulo :Ática, 2000.*

SILVA, M. C. L. *Teorema de Tales: Uma Engenharia Didática Utilizando o Cabri-Geometre,* . *Dissertação de Mestrado PUC/SP 1997.*

.

Sites

—Dicionário Universal da Língua Portuguesa, Portugal: Texto
www.priberam.pt/DLPO

—Dicionário da Língua Portuguesa, Portugal: Porto.
www.portoeditora.pt/dol

—Michaelis: Moderno Dicionário da Língua Portuguesa, Brasil: Melhoramentos.
www.uol.com.br/bibliot/dicionar/

—Associação de Professores de Matemática, Portugal:
www.apm.pt/

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ANEXO 1 ATIVIDADES

ANEXO 1

ATIVIDADES

A) Primeira Atividade

Parte 1 Considere um quadrado ABCD, de lados medindo 8cm. Sobre o lado AB, tome o ponto médio O e sobre o lado AD, considere o ponto E satisfazendo:

AE = $\frac{AD}{4}$. Prove que o ΔOEC é retângulo.

Parte 2 Segunda Atividade Considere um quadrado ABCD. Sobre o lado AB, tome o ponto médio O e sobre o lado AD, considere o ponto E satisfazendo

AE = $\frac{AD}{4}$. Prove que o ΔOEC é retângulo.

B) Segunda Atividade

Parte 1. Dado que um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 cm, então ele é retângulo. Esta afirmação é verdadeira ou falsa?Por que?

Parte 2. Obtenha as medidas dos lados de três triângulos, semelhantes ao triângulo cujos lados medem 3, 4 e 5 cm. (parte1). Estes triângulos são retângulos? Por que?

Parte 3. O que você encontrou na questão anterior (parte 2) permite tirar alguma conclusão?

Parte 4. Como comprovar se o que você concluiu na questão anterior (parte 3) é verdadeiro?

C) Terceira Atividade

Obtenha a fórmula para o cálculo da área do trapézio, em função das medidas de suas bases e de sua altura.