AGUINALDO JOSÉ RAMA

NÚMEROS INTEIROS NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2005

AGUINALDO JOSÉ RAMA

NÚMEROS INTEIROS NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profa. Dra. Sônia Pitta Coelho.***

PUC/SP
São Paulo
2005

Banca Examinadora

Profa. Dra. Sônia Pitta Coelho (orientadora)

Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni

Profa. Dra. Ana Catarina P. Hellmeister

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

RESUMO

Apresentamos uma análise de três coleções de livros de matemática do ensino fundamental. Tomamos como referência para a escolha dos livros as sínteses constantes no guia do Plano Nacional do Livro Didático. O objetivo dessa análise é verificar a forma como os autores abordam os números inteiros, em particular o conceito de divisibilidade. Damos maior atenção para dois aspectos: as estratégias adotadas para demonstrações referentes ao assunto, e o uso de situações-problema desafiadoras. Também consideramos dois outros aspectos: articulações entre números inteiros e as demais áreas da matemática, em particular a álgebra e a geometria; articulações entre conteúdos novos e já conhecidos, e as conseqüentes retomadas de temas, nas quais espera-se que o suposto amadurecimento dos estudantes seja considerado.

Constatamos que uma das coleções apresenta boas provas informais, adequadas para esse estágio de aprendizagem, usando métodos variados; também explora de modo conveniente o potencial de problemas envolvendo números inteiros. A segunda coleção apresenta algumas demonstrações convincentes, e outras inadequadas; a terceira enuncia diversas propriedades sem preocupação com justificativas. Nessas duas últimas, poucos problemas exigem maior sofisticação de raciocínio. Nas três coleções o assunto é enfocado quase exclusivamente na 5º e na 6º série, no âmbito dos números naturais, não sendo retomado no contexto dos inteiros, após a introdução dos negativos.

A segunda parte do trabalho é dedicada ao ensino médio. Consultamos as onze coleções recomendas pelo guia do Plano Nacional do Livro do Ensino Médio. Analisamos a revisão dos inteiros feita no início dos primeiros livros dessas coleções. De modo geral, essa retomada é superficial; o conceito de divisibilidade entre inteiros, incluindo os negativos, pode ser apreciado somente em uns poucos exercícios. Poucos problemas mais elaborados são propostos.

Finalizamos com sugestões de atividades para o ensino médio envolvendo números inteiros, em conexão com assuntos variados, tais como: geometria, números complexos, polinômios, análise combinatória.

Palavras-chave: Números inteiros, divisibilidade, provas e conjecturas, situações-problema, ensino básico.

ABSTRACT

We present an analysis of three collections of mathematics text books for primary school. The choice of the collections is oriented by the synthesis presented in the guidebook of the Plano Nacional do Livro Didático. The goal of the analysis is to investigate the way the authors approach the integers, mainly the concept of divisibility. Our main focus concerns proof strategies and the use of challenging problem situations. Two other aspects are considered: relations between integers and other mathematical subjects, particularly álgebra and geometry; articulations between old and new contents, and the resulting review of subjects, during which it is expectec that the learners' growing maturity is taken into consideration.

We verify that one of the collections presents good informal proofs, suitable for this learning level, using a variety of methods; it also properly explores the potencial of problems related to integers. The second collection presents some convincing proofs together with unsuitable ones, while the third one states several properties without exibiting explanation concerns. The last ones provide few problems demanding a greater sophistication of reasoning. The three collections present the subject in 5^{th} and 6^{th} grades, in the context of natural numbers, and no overview is provided after the introduction of negative numbers.

The second part of the work is dedicated to middle school. We examine the eleven collections recomended by the guidebook of the Plano Nacional do Livro do Ensino Médio. We analyse the review of the integers at the beggining of the first books of the collections. Generally speaking, the review is superficial; divisibility concepts including negatives is explored only in the context of exercises. Few more elaborated problems are proposed

Finally, we suggest actitities for middle scholl relating integers to a variety of themes, as geometry, complex number, polynomials, combinatorial analysis.

Key-words: integers, divisibility, proofs and conjectures, problem situations, basic school.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O objetivo deste trabalho é investigar a abordagem conferida aos números inteiros nos ensinos fundamental e médio. Interessa-nos particularmente a forma como é enfocado o conceito da divisibilidade. Para tal, analisamos o tratamento dado ao tema em livros didáticos referendados por guias oficiais, elaborados por iniciativa do MEC. No capítulo 1 fazemos uma breve descrição desses documentos.

O capítulo 3 é uma análise sobre algumas coleções do ensino fundamental. A nossa escolha dos livros foi feita com base em critérios que esclarecemos no capítulo 2.

Os três últimos capítulos são dedicados ao ensino médio. Iniciamos com algumas considerações sobre os livros dessa fase de escolarização. Em seguida tecemos alguns comentários sobre a abordagem aos conjuntos numéricos nos livros selecionados pelos especialistas que redigiram o guia do ensino médio. Finalmente, acrescentamos algumas sugestões de atividades referentes aos números inteiros.

Esta investigação visa a contribuir com o projeto de pesquisa: “Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?”, desenvolvido pelo Grupo G5: Educação Algébrica, do Programa de Estudo de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP. O projeto parte do princípio de que, para ensinar, é preciso que tenhamos “entendimento sobre como o estudante constrói o conhecimento e como o professor pode favorecer esse processo” (COELHO et al, 2003 B, p. 1).

O projeto busca obter informações dessa natureza para sugerir quais mudanças são adequadas para tornar a álgebra acessível a mais estudantes. Inclui considerações referentes à formação dos futuros professores,

O projeto ressalta que o desempenho de alunos em álgebra nas avaliações oficiais deixa muito a desejar, o que é confirmado pelos porcentuais de acerto do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Ainda que tais avaliações sejam discutíveis, presumivelmente indicam a existência de um certo descompasso entre o que se espera que estudantes do ensino básico saibam e o que eles realmente conhecem de matemática.

Uma preocupação explícita dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), citada no Projeto, é a dimensão pragmática dos conhecimentos a serem ensinados; estes devem constituir um conjunto de referências capaz de orientar o aluno a tomar decisões em sua vida prática e como membro consciente de uma coletividade. Muito se tem feito com relação a esta última recomendação, e seus reflexos estão presentes nas salas de aula de matemática. Em contrapartida, vem-se dando menos atenção a contextos formais concernentes a propriedades e estruturas de números propriamente ditos. No entanto, o entendimento matemático não é apenas uma questão de fundar conceitos em experiências familiares do dia-a-dia, ele também exige desenvolver fundamentos conceituais para fazer distinções abstratas gerais e claras. Este trabalho explora o potencial dos números inteiros para desenvolver essas habilidades junto aos alunos, em especial as capacidades de generalizar, conjeturar e argumentar. Paralelamente, explora-se a rica variedade de situações-problema que o assunto propicia, explicitando suas potencialidades didáticas para a educação básica (ou: os ensinos fundamental e médio) conforme o texto do Projeto. Uma leitura dos títulos das dissertações e teses em Educação Matemática produzidas no Brasil, de 1998 a 2001, mostra que a produção científica que segue essa orientação é incipiente.

CAPÍTULO I

PLANOS NACIONAIS DO LIVRO DIDÁTICO

1.1 – GUIAS OFICIAIS.

Nosso objetivo maior é compreender o papel específico do estudo dos inteiros na formação dos nossos alunos nos ensinos fundamental e médio, através de uma análise desse conteúdo em alguns livros didáticos. Para realizar essa análise, iniciamos por consultar duas referências: o Guia Nacional de Livros Didáticos de 5ª a 8ª série: Matemática, editado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM): Matemática, ambos nas versões de 2005. No que segue, iremos nos referir aos textos acima, respectivamente, como GNLD e CNLEM.

Este capítulo é dedicado a tais documentos, que usamos como referência para a nossa seleção de livros analisados. Entre os parâmetros usados pelos elaboradores do GNLD e do CNLEM estão alguns que nos interessam particularmente. Estão relacionados, na nossa visão, com as possíveis vantagens, nos ensinos fundamental e médio, do uso de situações-problema envolvendo propriedades de números inteiros.

Façamos uma breve descrição do histórico dessas Guias. O MEC passou a distribuir livros didáticos para alunos do ensino fundamental de escolas públicas a partir de 1985. Nessa época, foi criado o PNLD, que inicialmente previa somente a distribuição de livros conforme as escolhas feitas pelo professores. O projeto teve um grande impulso em 1995, quando foi publicado o primeiro GNLD. Trata-se de um texto elaborado por especialistas das diversas áreas referentes ao ensino fundamental, cujo objetivo é auxiliar os professores na escolha do material a ser adotado. Encontramos nesse guia resenhas críticas das coleções escolhidas, além dos critérios que nortearam a seleção. As sínteses são suficientemente minuciosas para orientar os educadores na escolha dos livros em suas escolas, conforme o plano pedagógico que estes julgarem adequado para as especificidades de seu trabalho. Para nosso trabalho, consultamos a terceira versão do GNLD, editada em 2005.

No ano de 2005, o MEC, por intermédio da Secretaria da Educação Média e Tecnológica (SEMTEC), começou a implantação do PNLEM; trata-se de uma parceria entre a SEMTEC e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Nesse primeiro estágio, estão sendo distribuídos livros de matemática e língua portuguesa para alunos de escolas públicas das regiões norte e nordeste. Espera-se que em mais alguns anos o movimento alcance todo o território nacional, e inclua as demais disciplinas. Simultaneamente à implantação do projeto, foi elaborado um guia similar ao do ensino fundamental, que também usamos como referencial; trata-se do CNLEM, texto mencionado acima.

1.2 – ALGUMAS DISTINÇÕES ENTRE O ENSINO FUNDAMENTAL E O MÉDIO.

Os critérios utilizados pelos pareceristas do GNLD e os do CNLEM foram basicamente os mesmos, respeitando os objetivos distintos do ensino de matemática nos dois níveis de escolaridade. Como exemplo, citamos a atenção dada à forma pela qual se dá a sistematização dos conhecimentos. O assunto nos é particularmente caro, pois procuramos, em nosso trabalho, enfatizar o papel dos números inteiros nesse processo.

No entender dos redatores do GNLD, no ensino fundamental o excesso de formalização pode ser um obstáculo para o entendimento das idéias. Para os autores do CNLEM ocorre o mesmo no ensino médio, mas com uma variação de intensidade. Nessa fase espera-se que os alunos tenham um contato mais explícito com conceitos sistematizados, e assim compreender a importância do caráter generalizador da matemática. Mas este tipo de estratégia não pode ser utilizado de forma abusiva. Deve também ser, preferencialmente, antecedido por situações-problema que estimulem a investigação do conceito, que será formalizado somente após esta etapa. A esse respeito, transcrevemos aqui um parágrafo do GNLD que consta na descrição dos critérios considerados:

> "O período de escolaridade da 5ª a 8ª séries caracteriza-se pela solidificação e ampliação dos conhecimentos adquiridos nos quatro primeiros anos de escolaridade, pela apresentação de novos conceitos, pelo início da sistematização dos conhecimentos matemáticos do aluno e pela aplicação da Matemática a situações-problema mais complexas. Pode-se dizer que é nesse período que começa, para o aluno, a explicitação da estruturação da Matemática. Não com a apresentação sistemática e excessiva de demonstrações rigorosas, mas pela

> organização do assunto de maneira a respeitar uma lógica interna, suas grandes linhas de desenvolvimento, a interdependência entre suas diversas partes, o relacionamento entre a teoria e a prática e entre a intuição e os raciocínios abstratos". (PNLD, 2005, p. 199).

Esse trecho foi parcialmente reaproveitado no CNLEM, mas observações anteriores e posteriores reforçam as diferentes expectativas em relação ao aprendizado no ensino médio:

> "Invocam-se, especialmente, a ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática, para o aluno, nesse período da escolarização. O livro-texto deve valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática". (PNLEM, 2005, p.80).

Nota-se que a sistematização dos conceitos nos livros didáticos foi avaliada pelas duas equipes sob diferentes pontos de vista; foram devidamente consideradas as características próprias de cada série. Etapas distintas do aprendizado e da maturidade dos estudantes requerem estratégias distintas. Vale o mesmo para outros aspectos considerados na análise dos livros. Assim, quando mencionamos que os critérios usados no GLND e no CNLEM foram os mesmos, o leitor deve ter em mente que não estamos afirmando que as avaliações se basearam nas mesmas exigências.

Ilustramos essas diferenças com mais um dos critérios utilizados pelas equipes de pareceristas: a contextualização. O GNLD enfatiza certas interpretações errôneas a esse respeito, que podem levar à formulação de problemas artificiais, na tentativa de vincular cada conceito com situações do dia-a-dia dos estudantes. Evidentemente trata-se de um recurso muito forte, mas não é aplicável para todos os temas matemáticos, qualquer que seja o nível de ensino considerado. Contudo, a contextualização no ensino básico permite outras correlações, além das cotidianas. Recorremos novamente ao GNLD:

> "Não se deve esquecer que, em muitos casos, para apresentar alguns conceitos é possível recorrer a situações significativas para o aluno no âmbito da própria Matemática. Um exemplo é a ampliação dos conjuntos numéricos, que pode ser justificada matematicamente pela necessidade de se poder resolver, sem restrições, certas equações algébricas". (PNLD, 2005, p. 205).

Esse nos parece um dos eixos apropriados para justificar a utilização de problemas que reforcem as diferenças da natureza dos números inteiros com a de outros conjuntos numéricos. No âmbito do ensino fundamental, o texto acima sugere uma atenção maior ao conceito de divisibilidade, pois uma equação do tipo $ax = b$, com a e b inteiros, $a \neq 0$, pode não ter solução se o contexto impõe x também inteiro. A mesma equação sempre terá uma raiz entre os racionas, indicação de que, no novo conjunto, não há sentido em se falar em múltiplos de *a*. Já no ensino médio, é recomendável uma releitura das ampliações de todos os conjuntos numéricos, justificadas matematicamente.

1.3 - CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE MATEMÁTICA

Certamente existem fatores que são comuns para uma boa formação escolar, independentemente da fase em que se encontra o aluno e sequer da ciência que é o objeto de estudo. Não surpreende, portanto, que os critérios eliminatórios sejam os mesmos nos dois guias, não apenas para as coleções de matemática, mas de todas as disciplinas que integram a grade curricular. Para os elaboradores desses documentos, um livro não pode ser recomendado para uso em sala de aula se:

A. Contém erros conceituais ou colocações que possam induzir o estudante ao erro.

B. Desfavorece a construção da cidadania, veiculando preconceitos que levem a discriminações de qualquer tipo, ou funcionando como instrumento de propagandas de doutrinas religiosas, ou violando preceitos legais dos estatutos da criança e do adolescente.

C. Encontramos nele algum tipo de inadequação metodológica. O livro didático deve permitir o desenvolvimento equilibrado de várias habilidades e competências, e deve ser coerente com a proposta pedagógica a que se propõe.

As coleções de matemática que passaram por esse crivo foram resenhadas com base em critérios específicos, estabelecidos pelos pareceristas, que os dividiram em quatro grandes grupos:

A. Aspectos teórico-metodológicos.
B. Manual do professor.
C. Construção da cidadania.
D. Estrutura editorial.

Demos maior atenção ao primeiro grupo, pois os critérios que o compõem estão diretamente relacionados com as vantagens provenientes de situações-problema envolvendo números inteiros. Os redatores dos guias subdividiram o grupo dos aspectos teórico-metodológicos da seguinte forma:

1. Conteúdo matemático.
2. Formação de conceitos, habilidades e atitudes.
3. Linguagem.

Os pareceristas também estabeleceram critérios pertinentes a cada uma dessas três subdivisões. Especificamos abaixo tais critérios:

1. **Critérios referentes ao conteúdo matemático. O livro didático deve:**

1.1. Apresentar adequadamente os conhecimentos relativos aos campos de conteúdos (aritmética, álgebra, geometria, estatística, probabilidades e combinatória) no que se refere à seleção apropriada de tópicos; distribuição adequada dos conteúdos, tanto internamente (em cada volume) como ao longo da coleção; articulação entre os campos; articulação entre conteúdos novos e já abordados; diversidade e articulação de enfoques; diversidade e articulação de representações; equilíbrio e articulação entre conceitos, algoritmos e procedimentos.

1.2. Conter também referências aos processos históricos de produção do conhecimento matemático que contribuam para a aprendizagem, favorecer a compreensão das relações da matemática com outras práticas e necessidades sociais, e apresentar articulações da matemática com outras áreas do conhecimento.

2. **Critérios específicos da formação de conceitos, habilidades e atitudes. O livro didático deve:**

2.1. Contribuir para a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, favorecendo a atribuição de significados aos conteúdos.

2.2. Estimular a utilização dos vários processos envolvidos no pensamento matemático, tais como: intuição, visualização, indução, dedução e a distinção entre validação matemática e validação empírica.

2.3. Valorizar o papel do aluno na construção do conhecimento matemático levando em conta, inclusive, seus conhecimentos prévios e extra-escolares.

2.4. Apresentar situações que envolvem desafios, problemas com nenhuma solução ou com várias soluções, cálculo mental e por estimativa, utilização e comparação de diferentes estratégias na resolução de problemas, verificação de processos e resultados pelo aluno, formulação de problemas pelo aluno.

2.5. Favorecer o desenvolvimento de competências complexas, tais como: explorar, estabelecer relações e generalizar, conjecturar, argumentar, provar, tomar decisões e criticar, utilizar a imaginação e a criatividade, expressar e registrar idéias e procedimentos.

2.6. Incentivar a interação entre alunos.

2.7. Estimular a utilização de outros recursos didáticos (recursos tecnológicos ou materiais concretos).

2.8. Apresentar sugestões de leituras complementares para o aluno.

3. **Critérios referentes à linguagem. O livro didático deve:**

3.1. Utilizar linguagem adequada ao aluno a que se destina no que se refere ao vocabulário, à clareza na apresentação dos conteúdos e na formulação das instruções.

3.2. Adotar o emprego de vários tipos de texto e representações.

O papel dos números inteiros na formação matemática dos alunos dos ensinos fundamental e médio será, em nosso trabalho, enfocado com base no potencial dessa área para favorecer o aprendizado no que se refere aos critérios descritos acima. Alguns terão um peso maior para nós, conforme esclareceremos na próxima seção.

1.4 – PRELIMINARES DA ANÁLISE.

Existe um repertório considerável de problemas envolvendo os inteiros, e em particular o conceito de divisibilidade, que podem enriquecer os conhecimentos e a desenvoltura em matemática de nossos estudantes. Um dos objetivos de nossa análise é verificar se esse campo é explorado adequadamente em livros didáticos.

Deve-se reconhecer que o uso de situações-problema em sala de aula parece ganhar mais adeptos entre teóricos da educação, o que é, sem dúvida, extremamente salutar. Defender essa estratégia é algo que pode ser apoiado em várias justificativas. Uma delas é que trabalhar com problemas que exijam métodos não convencionais consiste num poderoso instrumento para desenvolver autonomia intelectual no estudante. Recordamos também que os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam a resolução de problemas como ponto de partida para a introdução de conceitos, um ponto de vista defendido por Alciléa Augusto. Ela define um *disparador* como "um problema que pode ser enunciado e resolvido com elementos já conhecidos pelo estudante e que propicie a introdução de um novo tema". (AUGUSTO, 1991, p. 45).

A utilização de situações-problema no ensino da matemática é um tema também explorado Aline Robert, ao abordar o caráter ferramenta / objeto para analisar conteúdos a ensinar. Resumimos aqui, de forma extremamente sucinta, essa noção, introduzida por (DOUADY, 1986), e retomada por (ROBERT, 1998). A idéia permite distinguir, do ponto de vista didático, dois aspectos de um conceito: a sua natureza teórica propriamente dita (objeto) e suas ocorrências contextualizadas, isto é, em situações-problema (ferramenta). A compreensão do conceito não pode ser considerada satisfatória sem que o estudante o tenha aplicado na resolução de problemas, nos quais não é necessariamente explicitado no enunciado o seu papel de ferramenta. Robert também classifica as atividades propostas aos alunos em três níveis: técnico, mobilizável e disponível; faremos aqui uma breve descrição de tais definições. Uma atividade no nível técnico exige somente a aplicação pura e simples do conceito introduzido. No nível mobilizável o aluno deve manipular o conceito de forma pouco mais elaborada; um caso típico é o da inversão de papéis entre incógnita e informação, numa comparação com a atividade do nível técnico. Um exemplo seria utilizar o teorema de Pitágoras para determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos conhecidos (técnico) ou para obter um dos catetos, se o outro é dado, bem como a hipotenusa (mobilizável). Problemas mais sofisticados, em que a aplicação do conceito não é explícita na leitura do enunciado, caracterizam o terceiro nível; portanto nesse estágio o estudante consegue resolver os problemas sem outras indicações, além das presentes nos enunciados; isto é, a ferramenta está disponível para ele. Robert sugere que nenhum dos três seja negligenciado no ensino da matemática.

Da mesma forma, não acreditamos que todo problema deve oferecer um alto grau de dificuldade para que possa ser aplicado; em muitas ocasiões, uma questão relativamente fácil pode permitir explorações profundas, ou funcionar para a elucidação de aspectos delicados da teoria. Mas também não nos parece que seja boa idéia evitar determinados problemas apenas pela sua suposta complexidade. A esse respeito, citamos aqui um trecho extraído do CNLEM, parcialmente transcrito no item 2.4 dos critérios descritos acima:

> "Tem sido indicado, como um dos instrumentos para uma formação mais interativa do aluno, que o livro didático proponha questões instigantes, desafiadoras ou questões abertas, estas últimas opondo-se às questões em que o enunciado dê margem apenas a uma interpretação ou só haja uma maneira de resolver o problema. O livro didático deve, igualmente, propor questões em que haja mais de

> uma solução correta, ou não exista nenhuma solução que atenda ao que se pede no enunciado”. (PNLEM, 2005, p. 82).

É evidente que existem questões que cabem na descrição acima em todas as áreas da matemática, e um livro de boa qualidade pode propor várias, sem recorrer às propriedades específicas dos inteiros. Mas desta forma estaria sendo criada uma lacuna desnecessária, em face da variedade disponível de problemas dessa natureza.

Além disso, há uma grande quantidade de situações em que devemos lidar com números inteiros e que estão de acordo com a segunda parte da citação acima: problemas que não tenham solução, ou que apresentem mais de uma. Exercícios com essa característica podem evitar uma visão demasiado simplista da matemática.

Gostaríamos de ressaltar também a existência de diversos problemas com números inteiros que merecem atenção por outra característica: a necessidade de argumentações. Muitas vezes elas podem, e devem, ser expressas por intermédio de linguagens mais próximas do coloquial, oralmente inclusive, sem o uso carregado de simbolismos. Atividades com esse caráter podem ajudar na formação do pensamento matemático, e auxiliar a compreensão do aluno no que tange à importância das demonstrações nessa ciência. Estamos nos referindo, pois, a problemas que podem estimular o desenvolvimento das competências complexas mencionadas em 2.5 (provar, argumentar, conjecturar), e que envolvem diferentes processos descritos em 2.2 (intuição, dedução, distinção entre validação empírica e matemática).

A partir dos anos 90, tem se intensificado a pesquisa sobre as possibilidades do trabalho na Educação Básica com o que caracteriza o pensamento matemático. A presença desse tipo de pesquisa em Educação Matemática pode ser constatada consultando-se manuais da área, como (BISHOP, 1996), em que figuram artigos sobre argumentações rigorosas e mesmo demonstrações, e, de modo mais abrangente, sobre o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Outra evidência dessa preocupação pode ser constatada com as discussões sobre o tema ocorridas em dois grupos de trabalho do 10º International Congress of Mathematical Education, realizado em Copenhague, em 2004.

Nossa investigação priorizou o potencial da, assim chamada, teoria dos números, para a criação de uma atitude crítica nos alunos. Assim, nossa análise se direcionou para as argumentações utilizadas pelos autores na abordagem dos números inteiros. Estamos aqui nos referindo não somente a justificativas apresentadas na resolução de problemas, mas também no desenvolvimento teórico do conteúdo.

CAPÍTULO II

CRITÉRIOS PARA ESCOLHA DOS LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Apresentamos, inicialmente, nossos critérios para escolher algumas coleções de 5ª a 8ª série, dentre as vinte e três recomendadas pelo GNLD. Cada uma delas é descrita a partir de seus pontos positivos e negativos, e assim a leitura das resenhas orientou nossa escolha. As obras aqui selecionadas serão objeto de análise no próximo capítulo.

A forma como o estudo dos inteiros é distribuído nos quatro livros de uma coleção é um aspecto que não pode ser ignorado. Efetivamente, houve uma preocupação considerável, por parte dos pareceristas, sobre a distribuição de um tema em cada coleção avaliada. A esse respeito, observamos o seguinte questionamento, descrito no GNLD:

> "Muitos dos conteúdos de cada um dos campos temáticos estão concentrados em blocos, com a intenção de se esgotar o assunto numa mesma série. Essa distribuição caracteriza uma concepção de currículo linear, questionada nos estudos e nas pesquisas mais recentes". (PNLD, 2005, p. 204).

Em particular, foram tecidas críticas às coleções que concentraram a abordagem aos números naturais e inteiros na 5º e 6º séries. Concordamos com esse ponto de vista, pois acreditamos que uma distribuição equilibrada nos quatro volumes de uma mesma coleção favorece articulações do tema com outros conteúdos. Além disso, como o assunto não é usualmente incluído entre os componentes curriculares posteriores à 6ª série, as retomadas seriam bem-vindas, em estágios nos quais, supostamente, houve um amadurecimento intelectual dos estudantes. Uma distribuição com esse caráter está de acordo com a definição de currículo em espiral, conforme Bruner estabelece. Não temos a pretensão de descrever com precisão o trabalho desse pesquisador; a profundidade do tema tem merecido inúmeros estudos, e não temos razões para duvidar que os redatores do GNLD estavam se referindo à tais pesquisas na citação acima. Mencionamos brevemente a teoria de Bruner porque concordamos que “o currículo em espiral permite que o aluno veja o mesmo tópico em diferentes níveis de profundidade e modos de representação”. (SANTOS, 1997)

Em nossos comentários do final do capítulo anterior, listamos certas características que despertam nosso interesse, destacando a resolução de problemas e o desenvolvimento do hábito de tecer argumentações. Outros aspectos que julgamos relevantes são as articulações entre números inteiros e outros conteúdos, bem como as relações entre conhecimentos anteriores e tópicos novos. Assim, detivemo-nos nos comentários dos resenhistas sobre tais aspectos.

Afirmamos no capítulo anterior que muitos teóricos defendem a utilização de situações-problema, mencionando brevemente os nomes de Alciléa Augusto e

Aline Robert. Vimos também que a mesma situação ocorre no caso particular das provas e argumentações; vários pesquisadores em Educação Matemática apontam a importância de justificar conclusões adequadamente, e criar nos estudantes os hábitos de formular e testar conjecturas. Entre os argumentos a favor do trabalho com provas na educação básica destacamos os formulados por Ball, Dreyfus e Parsysz (o último atua basicamente no domínio da geometria). Reproduzimos abaixo traduções nossas de trechos de artigos dos dois primeiros pesquisadores, que explicitam seu ponto de vista:

"Prova é central em matemática, e como tal deveria ser uma componente essencial da educação matemática". (Ball et al, 2000),

“Provas estão no coração da matemática, e são consideradas centrais em muitos currículos". (Dreyfus, 2000).

Para o leitor interessado em pesquisas de educação matemáticas referentes às articulações entre as áreas da matemática, recomendamos a leitura de (DOUADY, 1986). Sugerimos também a leitura de (CHEVALLARD, 1991) como um interessante referencial sobre articulações entre conhecimentos novos e antigos.

No que se refere ao tema, uma ressalva feita pelos pareceristas do GNLD para vários livros foi a utilização desse recurso quase exclusivamente na abordagem da geometria. Destacamos um trecho na descrição dos critérios específicos de matemática do CNLEM que comenta tal situação muito apropriadamente:

> “Possivelmente por sua história, a geometria tem sido vista, em muitas das atuais propostas de ensino, como o único campo em que são pertinentes as demonstrações do método lógico-dedutivo. Esse não é um ponto de vista correto, pois o método dedutivo é fundamental nos demais campos da Matemática”. (PNLEM, 2005, p. 78)

Não encontramos, no GNLD, menções específicas de um bom uso das demonstrações na abordagem dos inteiros por parte de algum autor. Procuramos, então, evitar as coleções em que esse método, no entender dos resenhistas, era delineado de forma mais eficaz, ou quase exclusiva, em geometria. Desta forma acreditamos ser maior a possibilidade de nos depararmos com boas argumentações no campo de nosso interesse.

Também evitamos as coleções em que as articulações elogiadas restringiam-se àquelas efetuadas entre álgebra e geometria. Tal comentário foi feito a respeito de vários livros. Nossa opção deve-se à ausência de comentários explícitos, por parte dos resenhistas, sobre boas inter-relações entre aritmética e álgebra ou entre aritmética e geometria.

Baseando-se nas explanações acima, procuramos escolher coleções que contemplassem as seguintes características:

1. O uso freqüente e adequado de situações-problema, inclusive para introduzir um assunto. Para nós, essa característica deve ser uma constante na coleção, e não especificamente com relação a números naturais e inteiros. Uma boa

variação no grau de dificuldade dos problemas propostos também é recomendável.

2. O hábito de se trabalhar com demonstrações, respeitando os conhecimentos e a experiência dos alunos, e, portanto, sem o uso carregado de formalizações.

3. Boa articulação entre os campos da matemática.

4. Boa articulação entre conteúdos novos e outros já abordados.

5. Retomadas de um mesmo assunto em momentos distintos.

Quer nos parecer que os três últimos critérios indicam uma chance respeitável de observar aplicações do conceito de número inteiro em situações diversas. Existe uma aparente ambigüidade no fato de uma coleção ter, como ponto positivo, boa articulação entre os campos, ou entre conteúdos novos e já conhecidos, e, no entanto, concentrar o estudo dos inteiros nas duas primeiras séries. Não evitamos livros que apresentassem esta suposta dicotomia, pois ela poderia ser útil em nosso trabalho. Poderia sugerir, por exemplo, que mesmo o hábito do autor de aprofundar sua visão de certos temas já estudados, por alguma razão, não foi suficiente para fazê-lo retomar propriedades dos inteiros.

Convém esclarecer que não procuramos selecionar livros que apresentassem todas essas qualidades, na opinião dos especialistas que redigiram o documento. Assim teríamos uma possibilidade maior de obter uma certa diversidade entre os textos, e desta forma nos confrontarmos com uma variedade maior de enfoques e opções pedagógicas.

Com esses referenciais, a leitura do guia nos levou às três seguintes coleções:

A. GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. *A conquista da matemática, a + nova*.
B. LOPES BIGODE, Antônio José. *Matemática hoje é feita assim.*
C. DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é matemática.*

Doravante iremos nos referir a estas coleções simplesmente por FA, FB e FC.

Na coleção FA, foi destacado como principal ponto positivo o tratamento dispensado às demonstrações, de uso freqüente e bem conduzido. Também se ressaltou a boa articulação entre o conhecimento novo e o já adquirido, mas foi criticada a falta de uma maior articulação entre os campos. É também um exemplo do caso já descrito em que os inteiros são estudados quase exclusivamente nos dois primeiros volumes.

O mesmo tipo de ambigüidade nos chamou a atenção para a coleção FB, particularmente notável, segundo os avaliadores, exatamente pela boa articulação, tanto entre campos, quanto entre o novo e o já conhecido.

Finalmente, a coleção FC é indicada como um exemplo feliz de boas articulações, das duas naturezas descritas acima. Também se menciona a distribuição equilibrada dos conteúdos, sem casos gritantes de concentração de um determinado assunto em umas poucas séries. O parecer dos redatores do

GNLD nos deixou a impressão de ser esta, entre as coleções recomendadas, uma das que mais se aproxima do currículo em espiral de Bruner; convém mencionar que dedica um capítulo aos números inteiros no livro da 7ª série. Mas destaca-se, sobretudo, “pelo emprego bem-sucedido da metodologia de resolução de problemas e pelo estímulo à participação dos alunos na construção de seus conhecimentos”. (PNLD, 2005, p. 188).

CAPÍTULO III

ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL

3.1 – NÚMEROS NATURAIS.

3.1.1 – Abordagens iniciais.

As três coleções apresentam as idéias fundamentais relacionadas aos números naturais na 5ª série. Entre elas, a questão da divisibilidade, que contemplaremos com uma seção própria, mais adiante.

Os inteiros não negativos são introduzidos como uma solução para o problema da contagem de objetos. Dessa forma, também são apresentados os números ordinais. Códigos como números de telefone, documentos e endereços são mencionados como exemplos de aplicações.

Os três livros da 5ª série iniciam o enfoque sobre os números com relatos históricos, nos quais são descritos antigos sistemas de numeração. Uma das vantagens desse processo é esclarecer a superioridade do sistema indo-arábico sobre os demais; ele prevaleceu exatamente pela maior facilidade oferecida ao se efetuarem cálculos com as quatro operações fundamentais. A notação posicional é, então, explorada, com exemplos e exercícios envolvendo a decomposição decimal.

As três coleções, também na 5ª série, dedicam um capítulo à resolução de problemas. O objetivo principal é estudar, de forma contextualizada, as idéias associadas às quatro operações fundamentais, dando ênfase no conceito de operação inversa. As situações-problema trabalhadas são, em geral, muito simples, mesmo para este estágio; a maior parte envolve somente um tipo de operação. Em FB encontramos alguns exercícios nos quais pede-se ao aluno que crie um problema a partir de alguma instrução, como por exemplo "deve ser resolvido com uma subtração".

Os autores de FA e FC incluem nessa abordagem inicial sobre problemas uma discussão sobre as etapas envolvidas no processo de resolução (compreender, planejar, executar, verificar, responder), o que será feito por FB na 7ª série. Todos mencionam explicitamente algumas sugestões de George Polya, apresentadas em *A arte de resolver problemas.*

Em FC, na introdução desse capítulo, há outra particularidade digna de nota: são exibidas e comentadas duas resoluções de um mesmo problema, utilizando estratégias diferentes. Trata-se de descobrir a quantidade de figurinhas de duas crianças, Beto e Carla, a partir de duas informações: elas possuem, juntas, 36 figurinhas; Beto possui 6 a mais do que Carla. Na primeira solução, usando o método de tentativa e erro, construiu-se uma tabela com números naturais cuja soma seja igual a 36, anotando as diferenças entre ambos. Na segunda, observa-se que $36 - 6 = 30$ forneceria o total das figurinhas, se Beto tivesse a mesma quantidade que Carla; fazendo $30 \div 2 = 15$ obtemos tal quantidade, e finalmente $15 + 6 = 21$ é o total de figurinhas de Beto.

Os três autores abordam, ainda na seção sobre problemas, a questão do cálculo mental. Para tal, FB e FC exploram informalmente, mas de modo eficaz, propriedades operatórias dos naturais: distributiva, associativa, lei do cancelamento da soma e sua recíproca. Vejamos alguns exemplos resolvidos e comentados em FC:

$57 + 32 = (57 + 30) + 2 = 87 + 2 = 89.$

$564 - 99 = (564 + 1) - (99 + 1) = 565 - 100 = 465.$

$3 \times 24 = 3 \times (20 + 4) = 3 \times 20 + 3 \times 4 = 60 + 12 = 72.$

Em FB e FC, a distributiva é vista, também, sob o ponto de vista geométrico, com atividades resolvidas e propostas nas quais deve ser usado papel quadriculado. Apresenta-se uma justificativa geométrica para essa propriedade, que faz uso da noção de área de retângulos.

Em FC encontramos ainda boas justificativas para os algoritmos usuais da multiplicação e da divisão, que recorrem à representação decimal. As propriedades operatórias são enunciadas de modo mais formal pelos autores de FA. As atividades propostas no livro do aluno dessa coleção, referentes ao cálculo mental, não apresentam grandes desafios. Mais interessantes são as sugeridas no manual do professor.

3.1.2 – Seqüências: números figurados.

As coleções FB e FC, ainda na 5ª série, incluem seções em que são estudadas seqüências. Essas seções podem ser descritas como uma forma de iniciar os alunos em habilidades de generalização.

De início, é examinada a própria seqüência dos números naturais. O autor de FC opta por apresentar informalmente os axiomas de Peano, exceto o que introduz a idéia de indução. Os demais compõem um exercício no qual o aluno deve decidir se algumas afirmações são verdadeiras ou falsas. Dessa forma tornam-se motivos de reflexão as seguintes propriedades:

a) Todo natural tem um sucessor.

b) Todo natural diferente do zero é sucessor de outro natural.

c) Números diferentes têm sucessores diferentes.

Em FB, esse mesmo tema é tratado de uma forma mais convencional, com exemplos específicos de sucessores e antecessores. Não é conferido nenhum destaque ao fato de o zero ser o único natural que não é sucessor de outro. Uma vez que o assunto foi posto em evidência, espera-se que o aluno reflita sobre a posição peculiar do primeiro termo da seqüência. Ainda que tenhamos a preocupação de evitar simbolismos carregados nesse estágio de aprendizado, a precisão da linguagem não pode ser negligenciada, e na frase “o antecessor de um número natural” deve ficar claro que está subentendido que tal número não pode ser zero. Preferencialmente, isso deve ser deduzido pelo aluno, uma possibilidade que em FC é mais concreta, pela metodologia de sua exposição.

Nas coleções FB e FC, os capítulos da 5ª série em que são enfocadas as seqüências destacam particularmente os números quadrados e triangulares, com explanações similares e de ótima qualidade. Nesta seção daremos destaque a tais abordagens, pois nelas encontramos as primeiras leis de formação envolvendo números inteiros.

Convém salientar que na coleção FA as seqüências não são contempladas com uma seção própria, e as noções de sucessor e antecessor são apresentadas na introdução dos números naturais. A afirmação de que zero é o único número natural que não é sucessor de outro é feita ao leitor. Nessa coleção, somente na 8ª série encontramos uma menção rápida à relação entre os quadrados perfeitos e a soma dos ímpares, mas sem qualquer tipo de justificativa.

Em FB e FC, a lógica que rege as séries de números figurados é justificada, principalmente, por meio de desenhos. Os números quadrados, por exemplo, são introduzidos com figuras de quadrados formados por pontos. Sua lei de formação, $Q_n = n^2$, é explicitada sem a necessidade da linguagem algébrica. Além disso, explora-se também, com pouco formalismo, o fato de que o enésimo termo, Q_n, é igual à soma dos n primeiros ímpares. Isto é deduzido a partir de observações sobre a regularidade no acréscimo de pontos de uma figura para outra. Assim, Q_1 é representado por um ponto; para se obter Q_2 são desenhados três novos pontos e para Q_3 mais cinco. Trata-se de um recurso interessante, que pode ser convincente para um estudante da faixa etária a que se destina o livro. O professor pode reforçar a argumentação com desenhos de quadrados formados por uma quantidade maior de pontos, destacando a repetição dos dois padrões: $Q_n = n.n$ e $Q_{n+1} = Q_n + (2n + 1)$. São os primeiros indícios de esboços de uma demonstração nessas duas coleções, e, portanto, constituem um momento de fundamental importância.

É também justificado informalmente o fato de o enésimo número triangular ser a soma dos *n* primeiros naturais positivos, novamente com o auxílio de figuras. Cada triângulo é representado por pontos dispostos em fileiras horizontais, cada uma com um ponto a menos do que a fileira imediatamente abaixo. Por exemplo: T_3 tem seis pontos, dispostos em três fileiras, a de baixo com três pontos, a do meio com dois e a de cima com um. O desenho deve indicar, em sua simplicidade, que T_4 é obtido com quatro novos pontos em uma nova fileira, que será a inferior. A conclusão de que $T_4 = T_3 + 4$ é um passo na direção da desejada generalização $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$. Como no caso dos números quadrados, utiliza-se uma indução informal, adequadamente reforçada pelas figuras.

Evita-se a relação $T_n = n. (n + 1) / 2$ nesta primeira abordagem; ela não é mencionada sequer em linguagem coloquial. Mas, em FC, um recurso bem aproveitado, e que aproxima o aluno dessa lei, é a observação de casos particulares do somatório $1 + 2 + 3 + ... + (n – 1) + n$, em que a soma da primeira e da última parcela é igual à soma da segunda e da penúltima, da terceira e da antepenúltima, e assim sucessivamente. Nos exemplos estudados enfatiza-se a diferença entre os casos *n* par e *n* ímpar. Assim, o autor mostra que:

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 4) + (2 + 3) = 5.2 = 10$

$T_5 = T_4 + 5 = 10 + 5 = 15$

$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (1 + 5) + (2 + 4) + 3 = 6.2 + 3 = 15$

Pede-se, então, ao aluno que calcule os dois termos seguintes. O livro do professor recomenda que sejam aceitas respostas obtidas com a soma, termo a termo, para T_6 e T_7. Cabe ao professor, se necessário, chamar a atenção para:

$T_6 = T_5 + 6 = 15 + 6 = 21$

$T_7 = T_6 + 7 = 21 + 7 = 28$

Ou, ainda, para:

$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 7 \times 3$

$T_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 8 \times 3 + 4$

Os autores de FB e FC irão retomar o assunto ao longo das coleções. FC volta aos números quadrados ainda na 5º série, para introduzir o conceito de potenciação. No capítulo que trata desse tema, em que a notação usual é introduzida, também são revistos os números cúbicos, outra seqüência mencionada anteriormente nesse livro.

A coleção FC é a única que dedica um capítulo no livro da 6ª série aos naturais. Trata-se não somente de uma revisão, mas em certos casos de um aprofundamento. Um exemplo digno de atenção é a retomada dos números figurados. A lei de formação dos números triangulares é mais detalhada, novamente com uma indução bastante primária, com poucos exemplos, porém bem descritos. A conclusão é que, se n é par, T_n pode ser obtido com o produto da metade de n pelo sucessor do próprio n. A argumentação é alicerçada nas observações sobre o somatório dos n primeiros naturais positivos. Como n é par, podemos separar as parcelas em pares cuja soma é $n + 1$, tomando a primeira e a última, a segunda e a penúltima e assim sucessivamente. Um dos exercícios propostos pede que se calcule T_{21}, e espera-se que o aluno, baseado em exercício similar resolvido anteriormente, faça $T_{20} + 21 = 10 \times 21 + 21 = 231$. O simples fato de calcular um termo desta série sem ter que recorrer aos anteriores já significa um avanço considerável.

O uso de letras para representar números é incomum, em FB e FC, antes da 7ª série. Quando a nova linguagem se torna mais freqüente, ambos os autores recorrem a situações estudadas anteriormente para procurar exemplos, e então os números figurados reaparecem. A coleção FB explora mais insistentemente o assunto. Destacamos um capítulo sobre variáveis, na 7º série, que pode ser interpretado como uma (boa) preparação para o estudo das funções. Os números quadrados fornecem um exemplo do poder de síntese da simbologia algébrica, com a igualdade $Q_n = 1 + 3 + ... (2n – 1)$. Até esse momento, essa relação era enunciada de forma coloquial para casos particulares. A demonstração não apresenta grandes novidades em relação ao que foi observado na 5ª série: é feita uma indução incompleta, até o sétimo termo, acompanhada de um desenho, no qual um quadrado formado por 49 quadrados menores é decomposto em sete figuras, formadas por 1, 3, 5, 7, 9, 11 e 13 quadradinhos.

Nessa seção de FB, os números triangulares também são retomados, e é demonstrada a fórmula do termo geral para a soma dos primeiros n inteiros positivos, $T_n = n.(n + 1) / 2$. A prova é reforçada pelo relato da clássica história de como Gauss teria, quando criança, surpreendido seu professor ao calcular correta e rapidamente a soma dos primeiros 100 inteiros positivos, $T_{100} = 50 \times 101 = 5050$. A demonstração do caso geral é precedida por exemplos em que é adotada a mesma estratégia. No primeiro, T_{10} é calculado da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
\boldsymbol{T_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10} \\
\boldsymbol{T_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} \\
\text{---} \quad \boldsymbol{+} \\
\boldsymbol{2T_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 10.11 \Rightarrow T_{10} = 55}
\end{array}$$

Em seguida, T_{100} é calculado de forma análoga, com o uso de reticências. Esse processo é usado em outros exemplos, em que as parcelas não são números consecutivos, mas a diferença entre os termos é constante. Num deles, pede-se as soma S dos primeiros trinta números pares positivos, e o procedimento se repete:

$$\begin{array}{l}
\boldsymbol{S = 2 + 4 + 6 + ... + 58 + 60} \\
\boldsymbol{S = 60 + 58 + ... + 6 + 4 + 2} \\
\text{------------------------------------} \quad \boldsymbol{+} \\
\boldsymbol{2S = 62 + 62 + ... + 62 + 62,} \textbf{ com trinta parcelas, logo } \boldsymbol{S = 62.30 / 2 = 930.}
\end{array}$$

Na lista de exercícios subseqüente, pede-se a soma dos primeiros 60 inteiros positivos, dos primeiros 20 pares positivos, dos 10 primeiros múltiplos de

10 positivos e dos 10 primeiros ímpares positivos. Só então é demonstrado o caso geral:

$$\mathbf{T_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n}$$
$$\mathbf{T_n = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1}$$
------------------------------------ +
$$\mathbf{2T_n = (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) = n.\,(n + 1) \Rightarrow T_n = n.\,(n + 1) / 2.}$$

Nota-se a preocupação com o estudo de casos particulares, o que constitui uma preparação adequada para a prova, sem a qual o entendimento do caso geral poderia ser comprometido.

Voltando ao capítulo sobre seqüências, 5º série em FB, o manual do professor sugere uma atividade em que o aluno deva contar o total de cumprimentos dados em um grupo de *n* pessoas, sendo que cada uma cumprimenta todas as demais. Nesse estágio, o autor pondera que é recomendável trabalhar somente com exemplos específicos nos quais *n* é um número razoavelmente “pequeno”. Mas a sugestão é suficiente para levar o aluno a constatar que, em todos os casos considerados, esse total coincide com T_n. Além disso, o autor observa que é possível argumentar, sem recorrer a notações explicitamente algébricas, que o mesmo vale para qualquer quantidade de pessoas. Sugere também que seja feito um paralelo entre este caso e o da quantidade de diagonais de um polígono convexo de *n* lados, que é dado por $n.\,(n - 3) / 2$. Trata-se, efetivamente, de casos similares, pois o mesmo método de contagem pode ser aplicado. Cada uma das *n* pessoas cumprimenta outras $n - 1$, mas o produto de *n* e seu antecessor fornece o dobro da resposta correta, pois estaríamos assim contando cada saudação duas vezes (*A* cumprimenta *B* é o mesmo que *B* cumprimenta *A*); de forma análoga, cada um dos *n* vértices do polígono é extremidade de (n – 3) diagonais, e se AB é uma diagonal, BA é a mesma.

A conexão entre esses dois problemas é feita no livro da 8º série, pouco depois de ter sido estudada a resolução geral da equação de segundo grau; os estudantes, de posse da fórmula adequada, podem determinar a quantidade de pessoas quando o número de apertos de mão é conhecido, ou então o número de lados do polígono a partir do total de diagonais.

Nas coleções FB e FC, o capítulo sobre seqüências da 5º série também enfoca a conhecida relação $T_n + T_{n+1} = Q_{n+1}$. A prova informal é feita de forma simples e elegante, usando desenhos. Tomando, por exemplo, um quadrado formado por 100 pontos dispostos em 10 fileiras, separamos por meio de uma linha, traçada ao longo de uma diagonal, todos os pontos em dois grupos: o primeiro formado pelos que estão abaixo do traço, e o segundo pelos de cima, mais os da diagonal. O primeiro grupo corresponde ao nono número triangular, e o segundo ao décimo. Desta forma, temos que $T_9 + T_{10} = Q_{10}$. A coleção FB aborda novamente esta relação no já mencionado capítulo sobre variáveis da 7º série, com atividades que visam, segundo o próprio autor, torná-la aceitável. Na primeira, devem-se calcular as somas de dois números triangulares consecutivos, e constatar que em todos os casos foi obtido um quadrado perfeito. Na segunda, quadrados perfeitos devem ser decompostos na soma de dois números triangulares consecutivos. Finalmente deve-se usar papel quadriculado, para se desenhar um quadrado, e recortá-lo de modo a formar as representações de dois números triangulares consecutivos. A demonstração geral é feita nesse mesmo livro, porém em outro capítulo. Comentaremos isso mais detalhadamente na seção sobre demonstrações.

Os números quadrados e triangulares ocupam boa parte das seções sobre seqüências nos livros da 5ª série das duas coleções, mas outras também são abordadas, como a seqüência de Fibonacci ou progressões aritméticas. FC dá maior atenção às seqüências formadas pelos múltiplos de um determinado número. Antecipa o uso da simbologia algébrica ao generalizar como *2n* e *3n* os múltiplos de 2 e 3. FB fará o mesmo no capítulo sobre divisibilidade.

No espaço dedicado às seqüências dos pares e dos ímpares em FC, há um exercício em que os alunos devem decidir se são verdadeiras ou falsas afirmações feitas sobre a paridade de um número natural obtido como soma ou produto, de outros dois naturais; todos os casos possíveis são considerados: par com par, ímpar com ímpar, e par com ímpar. Se a proposição for falsa, deve ser feita a justificativa da resposta. Trata-se do primeiro caso em que contra-exemplos devem ser mencionados pelo aluno. Para as afirmações verdadeiras, o autor fará demonstrações convincentes noutra série. Também reservamos nossos comentários relativos a esse momento para a seção sobre demonstrações.

3.1.3 – Brincando com números.

O título desta seção é o mesmo de um capítulo do livro da 5ª série de FB, que será analisado aqui. Pode ser dividido em duas partes, sendo que na primeira são apresentados os quadrados mágicos e outras formações semelhantes.

Problemas desse tipo são propostos ao longo das três coleções, alguns abrangendo números não inteiros.

Para nós, a segunda parte de “Brincando com números” apresenta maior interesse. Ela é composta por cinco atividades, numeradas por nós de 1 a 5, em que se notam certas regularidades numéricas. A formulação das três primeiras é basicamente a mesma: o estudante deve efetuar alguns cálculos, com papel e lápis ou calculadora, e pela observação de padrões, pede-se que responda uma última pergunta “sem fazer contas”.

Atividade 1 - Pede-se ao aluno que multiplique 37 por 3, 6, 9, 12 e 15. Os resultados obtidos serão respectivamente: 111, 222, 333, 444 e 555. Em seguida, pede-se o número cujo produto por 37 resulta 777. O aluno é levado a suspeitar da resposta 21, e de fato $37 \times (3 \times 7) = 37 \times 21 = 777$.

Atividade 2 – Calcular 11×11, 111×111, 1.111×1.111, 11.111×11.111, e escrever o resultado de 111.111×111.111. Como as quatro primeiras operações resultam, respectivamente, em 121, 12.321, 1.234.321 e 123.454.321, o aluno é induzido a responder corretamente 12.345.654.321.

Atividade 3 – O aluno deve efetuar os cálculos abaixo, nos quais já indicamos as respostas:

$9 \times 1 + 2 = 11$

$9 \times 12 + 3 = 111$

$9 \times 123 + 4 = 1.111$

$9 \times 1.234 + 5 = 11.111$

$9 \times 12.345 + 6 = 111.111$

$9 \times 123.456 + 7 = 1.111.111$

Em seguida, pede-se o resultado de $9 \times 1.234.567 + 8$, que é 11.111.111.

Atividade 4 – Pensar num número de três algarismos, com a unidade diferente da centena; inverter a ordem dos algarismos do número pensado e subtrair o menor do maior; somar o resultado da subtração com o número que se obtém invertendo a ordem dos seus algarismos. O autor observa, então, que "não importa o número que você pensou: o resultado é 1089" (LOPES BIGODE, 2005)[1]. Fornece a seguir um exemplo: número pensado = 734; invertido = 437; resultado da subtração = 297; invertido = 792; resultado da adição = 1089. Finalmente, propõe uma pesquisa: o que acontece se o número inicial tiver dois ou quatro algarismos diferentes e os mesmos passos forem seguidos?

Atividade 5 – Escolher um numero *ABC* de três algarismos; escrever o número *ABCABC* de seis algarismos e dividi-lo por 13; em seguida dividir o resultado por 11; dividir o novo resultado por 7. O aluno deve observar que as três divisões efetuadas são exatas e que o resultado final será *ABC*. O exemplo dado pelo autor se inicia com o número 147, e de fato:

$147.147 \div 13 = 11.319$

$11.319 \div 11 = 1.029$

[1] Neste capítulo incluiremos diversas citações dos autores das três coleções analisadas, explicitando tal fato no texto. Em função disso, mencionaremos a referência somente na primeira citação de cada autor.

$1.029 \div 7 = 147$

Trata-se da única atividade em que o aluno não deve somente observar um padrão, mas também explicar “porque a brincadeira funciona”. O autor espera que o estudante perceba que o resultado da última conta, que chamaremos de *X*, foi obtido a partir do número de seis algarismos, que chamaremos de *Y,* por meio de três divisões sucessivas; portanto, com a operação inversa obtém-se *Y* a partir de *X*, isto é: $X = ((Y \div 13) \div 11) \div 7 \Rightarrow Y = (13 \times 11 \times 7).\, X = 1001.\, X.$ Como *Y* é da forma *ABCABC*, devemos ter *X* = *ABC*, pois 1001.*ABC* = *ABCABC*. Embora isto não seja explicitado na resolução descrita no livro, gostaríamos de observar que o algoritmo da multiplicação pode ser útil nesta conclusão final:

$$
\begin{array}{r}
ABC \\
\times\ 1001 \\
\hline
ABC \\
ABC+ \\
\hline
ABCABC
\end{array}
$$

O livro do professor sugere que seja aplicada uma sexta atividade, similar a essa última, com um número de seis algarismos da forma *ABABAB*, e divisões sucessivas por 3, 7, 13 e 37. O resultado final será *AB*, pois o produto deste quatro números é 10.101. Novamente o algoritmo da multiplicação é um recurso a ser considerado:

$$
\begin{array}{r}
10101 \\
\times\ AB \\
\hline
B0B0B \\
A0A0A+ \\
\hline
ABABAB
\end{array}
$$

O aspecto lúdico desses problemas é, certamente, um recurso didático muito forte. Pode servir de estímulo, e também despertar a curiosidade dos alunos para as justificativas das regularidades observadas. O professor, ao aplicar atividades dessa natureza, deve estar atento para perceber se manifestações de curiosidade efetivamente ocorrem, e, se necessário, deve enriquecer o problema com a solicitação de uma explicação convincente. Pode, assim, contribuir para a formação do espírito crítico de seus alunos. Se a tarefa se revelar complexa demais, sugestões podem ser dadas, mas preferencialmente deve-se evitar explicitar as respostas sem que aconteçam tentativas de provas por parte dos alunos. Não se pode ignorar também o significado que tais "brincadeiras" podem acrescentar a certas propriedades. No caso da atividade 5, observamos uma aplicação da expressão decimal dos naturais, e também do conceito de operação inversa. Por essas razões, julgamos inadequado que nas quatro primeiras atividades não tenham sido solicitadas justificativas.

Uma crítica deve ser feita à atividade 4. Para esclarecê-la, usaremos as seguintes notações: sejam X o número pensado inicialmente, Y o número que se obtém com a inversão dos algarismos de X, $Z = | X - Y |$, e W o número que se obtém com a inversão dos algarismos de Z. Recordemos que X deve ser um número de três algarismos, com a restrição adicional de que o primeiro e o terceiro devem ser diferentes. Por exemplo:

Se $X = 153$, então $Y = 351$, logo $Z = 351 - 153 = 198$, portanto $W = 891$, e assim $Z + W = 1089$, conforme o esperado.

Entretanto, observamos que a seqüência de passos não fornece necessariamente $Z + W = 1089$. O autor parece ter desconsiderado o caso em que a diferença entre o primeiro e o último algarismo em X é igual a um. De fato:

$X = 253 \Rightarrow Y = 352 \Rightarrow Z = 352 - 253 = 99$.

Se as instruções forem seguidas literalmente, a inversão dos algarismos agora nos dá $W = 99$ também, portanto $Z + W = 198$, ao contrário do que afirma o enunciado. O padrão somente será mantido se escrevermos $Z = 099 \Rightarrow W = 990$, e, portanto, temos novamente $Z + W = 1089$. Mas aqui foi tomada uma certa liberdade que não nos parece adequada. O ideal seria que esta situação fosse excluída no enunciado, ou então que o aluno fosse instruído, nesse caso, para escrever o resultado da subtração usando sempre três algarismos, com a colocação do zero à esquerda, se necessário.

Reiteramos que neste problema a justificativa não foi pedida. Cabe ao professor estimular os alunos a procurar uma causa para a obtenção do mesmo número após várias operações, bastando que X satisfaça poucas condições, que devem ser devidamente esclarecidas. A prova de que $Z + W = 1089$, consideravelmente mais elaborada, permite o entendimento do caso em que a diferença dos algarismos da centena e da unidade é igual a um. Vejamos inicialmente uma demonstração redigida com os recursos da linguagem algébrica.

Sejam a, b e c os algarismos de X, de modo que $X = 100a + 10b + c$, logo $Y = 100c + 10b + a$. Podemos supor $a > c$, portanto $X > Y$, e dessa forma temos que $Z = X - Y = 99.(a - c)$, com $1 \leq (a - c) \leq 9$. Mas note que se $a - c = 1$, então temos Z = 99, acarretando no problema descrito acima; do contrário, Z é um número natural de três algarismos. Agora repare que podemos escrever:

$X = 100.\ (a - 1) + 100 + 10.\ (b - 1) + 10 + c$

$Z = X - Y = (100.\ (a - 1) + 10.\ (10 + b - 1) + (10 + c)) - (100c + 10\ b + a).$

$Z = 100.(a - 1 - c) + 10.(9 + b - b) + (10 + c - a)$

Se chamarmos $n = a - c \leq 9$, temos:

$Z = 100.(n - 1) + 10.9 + (10 - n)$

Supondo $n > 1$, estão determinados os três algarismos de Z. Invertendo-os temos:

$W = 100.(10 - n) + 10.9 + (n - 1)$

Por fim $Z + W = (100n - 100 + 90 + 10 - n) + (1000 - 100n + 90 + n - 1)$, e então $Z + W = 1089$.

Agora vejamos uma justificativa, que pode ser aceitável para alunos de 5ª série. Ela será aplicada em dois casos particulares aqui apresentados: números pensados iguais a 734 e 153. Usaremos mais uma vez os algoritmos usuais, nesse caso o da adição e o da subtração. Antes, façamos algumas observações gerais: como o número pensado deve ter três algarismos, com a centena diferente da unidade, ao invertê-lo obteremos um número com mesmo algarismo das dezenas, e o maior dos dois números (o pensado e o obtido com a inversão) terá algarismo das unidades menor. Essas características asseguram algumas conseqüências na subtração.

734
– 437

297

Sempre será preciso que, no número maior, ocorra o “empréstimo” das dezenas para a unidade, o que garante que, no resultado, o algarismo das dezenas seja 9. Na conta acima, 7 – 4 = 3 não é o algarismo das centenas no resultado, pois o “empréstimo” também foi necessário da casa das centenas para as dezenas; isto também acontecerá sempre. Em suma, o algarismo das centenas será sempre uma unidade inferior em relação à diferença entre os algarismos da centena e da unidade no número pensado. Portanto, esta diferença deve ser maior do que 1, se quisermos que o resultado da subtração tenha três dígitos. Observe novamente essas características no outro exemplo:

$$\begin{array}{r} \mathbf{351} \\ \mathbf{-\ 153} \\ \text{-------} \\ \mathbf{198} \end{array}$$

Note que nos dois casos a soma dos algarismos da centena e da unidade, no resultado, é igual a 9*.* Comparando os cálculos, as operações efetuadas foram:

(7 – 4) – 1 = 2 e (10 + 4) – 7 = 10 – (7 – 4) = 7

(3 – 1) – 1 = 1 e (10 + 1) – 3 = 10 – (3 – 1) = 8

O valor do qual se subtrai 1 para que tenhamos o algarismo das centenas, deve ser subtraído de 10 para que resulte a unidade. A tradução algébrica dessa frase pode ser observada na demonstração mais formal que fizemos acima. Verifique que *Z* tem (*n* – 1) centenas e *(10 – n*) unidades. Assim o número obtido é da forma *A9B*, sendo $A + B = 9$. No último passo, efetuamos a seguinte adição:

$$\begin{array}{r} \boldsymbol{A9B} \\ \boldsymbol{+\ B9A} \\ \text{------} \\ \boldsymbol{C89} \end{array}$$

Sendo $C = (A + B) + 1$, pois a soma das dezenas é 18. Portanto $C = 10$, e o número obtido foi 1089.

As atividades descritas caracterizam um interessante uso dos três níveis propostos por Robert, no que se refere aos algoritmos usuais das operações. Eles são diretamente aplicados quando se solicita ao aluno que efetue contas (nível técnico). Também são exigidos com operações envolvendo números que devem ser obtidos com inversão de algarismos ou resultados anteriores (nível mobilizável). Não é evidente que, usando os algoritmos, podem-se justificar as afirmações envolvidas nos problemas. Quando procedemos dessa forma, os algoritmos tornam-se ferramentas *disponíveis,* que auxiliam a resolução de um problema mais complexo, envolvendo provas; estamos, portanto, no terceiro nível.

O manual do professor não fornece nenhuma orientação sobre as quatro primeiras atividades; isto é particularmente frustrante no quarto problema, pois as mudanças de hipóteses sugeridas pelo autor permitem inúmeras observações. O que se pede é somente a verificação de exemplos; talvez o aluno faça, então, algumas conjecturas. Se X tem dois algarismos distintos, então $W + Z = 99$, desde que a diferença entre estes algarismos seja superior a um. Exemplo:

Se X = 25, então Y = 52, donde Z = 52 – 25 = 27, logo W = 72, e, portanto, $W + Z = 99$.

Mas se a diferença entre estes algarismos for novamente um, temos uma incoerência semelhante à que verificamos acima. Vejamos outro exemplo:

$X = 32 \Rightarrow Y = 23 \Rightarrow Z = 32 - 23 = 9$.

Algumas dúvidas podem ser colocadas neste momento. Há sentido na frase “inverter os algarismos” para em número que tenha somente um? Este inverso seria ele próprio? (e neste caso, $W + Z = 9 + 9 = 18$). É permitido escrever Z = 09, e então concluir que W = 90? (assim, novamente $W + Z = 99$).

Se X tem quatro algarismos, existe um número ainda maior de variações. Talvez fosse melhor idéia colocar a sugestão apenas no manual, acompanhada de uma discussão detalhada, para que o professor decida se é válido ou não explorar todo, ou parte do potencial deste problema.

A aplicação de atividades dessa natureza requer certos cuidados por parte do professor. Elas apresentam resultados curiosos, sem dúvida, e não estamos questionando a importância do aspecto recreativo desses problemas, além da sua importância na observação de regularidades. Mas é também um bom momento para, informalmente, destacar a importância das demonstrações na matemática. Parece-nos natural, então, que o professor retome os três exercícios anteriores para proceder da mesma forma que nos dois últimos, caso ainda não o tenha feito. No livro isso não é solicitado, assim, são necessárias certas precauções, da parte do professor para evitar que o estudante seja levado a acreditar que, eventualmente, as explicações simplesmente não existem.

Voltando, por exemplo, para a atividade 1, observamos que se n é natural e menor do que 10, então $(3n) \times 37 = n. (3 \times 37)$. Obtemos assim $111.n$, um número natural de três dígitos, todos iguais a n.

O segundo e o terceiro problemas também podem ser interpretados com o auxílio do algoritmo da multiplicação e da decomposição decimal. Constituem novos exemplos de esboços de provas matemáticas para alunos deste nível de escolaridade, ainda que com problemas pouco mais complexos.

3.2 – DIVISIBILIDADE.

3.2.1 – Componentes curriculares.

3.2.1.1 – Primeiras definições.

Reservamos o termo “componentes curriculares” para temas comuns às três coleções no livro da 5ª série, quando conceitos referentes à divisibilidade são introduzidos. Nas subseções 3.2.1.1 a 3.2.1.7, se não houver menção em contrário, estaremos nos referindo aos livros dessa série. Convém salientar que o contato inicial dos alunos com a divisão entre inteiros (com resto) é anterior, portanto pertencente a um período que não foi considerado em nossa análise.

A divisão foi enfocada de forma adequada pelos três autores no capítulo sobre resolução de problemas e cálculo mental. Em FB encontramos algumas aplicações interessantes, como solicitar ao aluno que escreva todos os restos possíveis com um divisor conhecido, ou obter o resto da divisão de 72.893 por 7, sabendo que a divisão de 72.896 por *7* fornece resto 5. Em FA encontramos, novamente, uma linguagem mais formal, ao mencionar a existência de valores únicos de q e r, dados a e $b \neq 0$, satisfazendo $a = b.q + r$, com $r < b$.

Nas três coleções, o resto de uma divisão é pouco aplicado, principalmente a partir da 6ª série. Na 5ª ela reaparece na abordagem sobre números mistos nas três coleções, mas essa forma de representação quase não é explorada nos livros seguintes. Em FB e FC encontramos atividades no capítulo sobre potências, no livro da 5ª série, em que o aluno deve escrever certos números naturais como soma de potências de base 2. Trata-se, portanto, de uma apresentação informal da base binária. Representar números naturais em outras bases, que não a decimal, é um exemplo de aplicação dos restos de uma divisão entre inteiros. Mas o assunto não é retomado nos outros livros, quando poderiam ser solicitadas decomposições mais complexas.

Todos os autores introduzem o conceito de divisor d de um natural n fazendo a relação com o caso em que o resto da divisão de n por d é 0. Todas dão o devido destaque ao zero como múltiplo de todo natural, e ao fato de não ser divisor de nenhum (diferente de 0). Um aspecto positivo em FC que não ocorre nas outras coleções é reforçar o uso de várias formas equivalentes de enunciar a mesma propriedade: A é múltiplo de B; B divide A; a divisão de A por B é exata; a divisão de A por B tem resto zero; exibir o produto $A = B.Q$.

Nas três coleções o tema da divisibilidade é introduzido por meio de situações-problema, principalmente em FB e FC. Todos exploram a regularidade dos anos bissextos, e nas duas coleções mencionadas acima encontramos explicações convenientes sobre o fato de os anos múltiplos de 100, mas não de 400, não serem bissextos. Em FC há uma interessante comparação entre os anos em que são disputados os jogos olímpicos (bissextos), e aqueles em que ocorre a copa do mundo de futebol (que são da forma $4.q + 2$). O autor aproveita o fato como ponto de partida para uma discussão sobre afirmação e recíproca: todo múltiplo de quatro é par, mas nem todo par é múltiplo de quatro.

3.2.1.2 – Múltiplos e divisores.

Merece destaque, por fugir às formas usuais, a apresentação, observada nas coleções FB e FC, de todos os divisores de um número *n* utilizando um recurso geométrico. Os alunos são orientados a fazer atividades em papel quadriculado, desenhando todos os retângulos com lados medindo valores inteiros, e cujas áreas sejam iguais a *n*. É importante notar que, em capítulos anteriores, os estudantes já tiveram contato com o conceito de área; também já foram definidos os quadriláteros notáveis, e os textos recordam ao estudante que o quadrado é um caso particular de retângulo. O caso *n* primo é bem explorado, com a observação de que, nestas condições, somente uma figura pode ser feita. Isto foi aproveitado por FB para introduzir o tema “números primos”. Veremos mais adiante que essa representação geométrica dos divisores pode produzir argumentos para várias propriedades de números inteiros, e pode também ser utilizada para resolver problemas.

Outro ponto comum às coleções FB e FC é o bom uso de certas decomposições para decidir se um número é múltiplo de outro. Citamos um exemplo extraído de FB: para determinar se 847 é múltiplo de 9, ele é decomposto como 810 + 37; a primeira parcela é, claramente, divisível por 9*,* mas a segunda não, donde 847 também não é. Em seguida, são propostos problemas análogos que o aluno deve resolver mentalmente, para em seguida fazer a conferência com papel e lápis ou calculadora.

No exemplo acima foi usada a seguinte propriedade: se a, b, c e m são números naturais tais que a e c são múltiplos de m, e $a + b = c$, então b é múltiplo de m. Assim como outras propriedades dos inteiros, ela foi apresentada em FB e FC sem a necessidade de enunciados mais rigorosos. Foram feitas justificativas informais com boas argumentações, e ilustradas com vários exemplos. Vejamos outros fatos importantes da divisibilidade discutidos nessas duas coleções:

Se a e b são múltiplos de m, então $(a + b)$ é múltiplo de m.

Se a divide b, e b divide c, então a divide c.

Destacamos a apresentação em FC de duas outras estratégias para a determinação dos divisores de um número natural n. Mostra que se os divisores são escritos em ordem crescente, o produto do primeiro pelo último, que é $1.n$, é igual ao produto do segundo pelo penúltimo, do terceiro pelo antepenúltimo, e assim sucessivamente. Essa propriedade pode ser constatada informalmente na atividade descrita acima, com desenhos de retângulos. Pede-se ao aluno, então, que resolva este problema: a seqüência crescente abaixo é formada por todos os divisores de um número natural; preencha as lacunas, e descubra este número.

__ , __, 4, __ , 8, 14, __, __

A outra estratégia foi chamada pelo autor de “rede de divisores”. Trata-se de um recurso pictórico muito interessante. Iremos descrevê-lo na seção sobre o Teorema Fundamental da Aritmética, por estar conectado com a decomposição em primos.

3.2.1.3 – Critérios de divisibilidade.

A coleção FC é a que dedica menor espaço para critérios de divisibilidade, mas aproveita-o muito bem. Faz explanações simples sobre as observações necessárias para decidir se um número é múltiplo de 2, 5 e 10. As justificativa dos critérios de divisibilidade por 2 e por 5 utilizam a expressão decimal do número e são de fácil compreensão, mesmo para alunos do ensino fundamental. O método da soma dos algarismos para verificar se um número é divisível por 3 é justificado de forma convincente. O número 126 é decomposto em várias etapas, até que se obtenha $3 \times (1 \times 33 + 2 \times 3) + (1 + 2 + 6)$. Em seguida, pede-se ao aluno que use esse processo para mostrar que 3 divide 237. No manual, insiste-se sobre a importância de o professor, na conclusão final do problema, reforçar que, como a primeira parcela é um múltiplo de três, a segunda também deverá ser para que o mesmo ocorra com a soma. Recomenda-se que se proponha um exercício similar para um número natural de quatro algarismos, se o professor julgar relevante.

No manual de FB encontramos esse mesmo tipo de demonstração, mas o livro do aluno limita-se a enunciar o critério. O método da soma dos algarismos para decidir a divisibilidade por 9 foi mencionado superficialmente pelo autor, com o caráter de curiosidade, não sendo solicitado em exercícios. Nessa coleção são descritos processos para determinar se um número é múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10. As argumentações sobre os múltiplos de 4 foram particularmente felizes, pelo bom uso de decomposições; para afirmar, por exemplo, que 236 é divisível por 4, escreve 236 = 100 + 100 + 36. A conclusão final é bem justificada com as propriedades envolvidas.

Em FA são descritos os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. No entanto nenhuma justificativa é apresentada. Para decidir se um número com três ou mais algarismos é múltiplo de 4 o aluno recebe a informação de que os dois últimos algarismos devem ser ambos iguais a zero ou então formar um múltiplo de 4; o mesmo ocorre com o processo análogo para verificar se um número divide 8, verificando os três últimos algarismos. De modo geral, os autores de FA pouco se ocupam com justificativas envolvendo números inteiros, não somente na 5ª série. A leitura das resenhas constantes no GNLD parece indicar que essa lacuna é comum a vários livros didáticos.

Acrescentamos um comentário sobre a profusão de critérios apresentados pelos autores de FA. Julgamos discutível a apresentação de uma quantidade elevada de critérios de divisibilidade. Para decidir se um número é divisível por 8, por exemplo, o processo sugerido, em muitos casos, tem pouca serventia. Exige-se tão somente a memorização de um método, sem dar atenção a sua justificativa. Pensamos que um critério deve ser apresentado se for de simples aplicação, e principalmente, se for passível de uma demonstração compreensível para o aluno. A relevância do assunto está menos relacionada com sua aplicação do que com a possibilidade de exercitar a prática da argumentação matemática.

Adiantamos que uma boa demonstração do critério de divisibilidade por 9 pode ser apreciada em FA, mas não no livro da 5ª série; comentaremos o fato com maiores detalhes na seção sobre provas e conjecturas. Trata-se de uma exceção; retomadas desse tema parecem ser incomuns. Como os critérios de divisibilidade não são abordados novamente, perde-se uma excelente oportunidade de apresentar argumentos completos, compreensíveis para estudantes do ensino fundamental. Um currículo em espiral, como o proposto por Bruner, visa exatamente sanar essas deficiências.

3.2.1.4 – MMC e MDC.

As situações-problema são novamente bem aproveitadas pelos três autores para introduzir os conceitos de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, mais uma vez com destaque para FB e FC. São problemas simples, que caracterizam a idéia dos disparadores de Augusto. Em FC, o cálculo mental é privilegiado, principalmente para a obtenção do *mmc* de dois números, fazendo a pesquisa entre os múltiplos do maior.

Os casos particulares de *mmc(a,b)* e *mdc(a,b)*, quando *a* divide *b*, são pouco explicitados nas três coleções, mas podem ser vistos em vários exercícios. O mesmo ocorre com o caso em que *a* e *b* são primos entre si. A definição de números relativamente primos é dada por FA e FB já na 5º série, e é usada para definir frações irredutíveis. Em FC a formalização dos números relativamente primos é introduzida somente na 7º, mas sem que isto acarrete nenhum tipo de prejuízo. Quando necessário, o autor chama a atenção para o fato de que dois números naturais podem não ter divisores comuns além da unidade.

Os autores utilizam, ao longo das três coleções, o *mdc* e o *mmc*, respectivamente, para efetuar a simplificação e a adição de frações. A não ser nesses casos e em situações-problema propostas na introdução dos dois conceitos, não encontramos exemplos de aplicação que fossem dignos de nota. Usando a terminologia proposta por Robert, após a etapa em que o *mmc* e o *mdc* tiveram o papel de objetos, eles foram pouco aproveitados como ferramentas.

Existem ainda diferenças consideráveis nas três coleções sobre a forma e o momento em que são introduzidos os algoritmos para a obtenção do *mmc* e do *mdc*, que serão discutidas aqui em uma seção própria.

3.2.1.5 – Números primos.

Nas três coleções, encontramos algumas diferenças na definição de números primos e compostos, embora as formulações sejam equivalentes. A introdução dos dois conceitos se dá na 5ª série, mas em momentos distintos. Em FA ela ocorre ante das definições de *mmc* e *mdc*, e em FC posteriormente. Em FB, após a apresentação do *mmc*, encontramos as atividades em que se pede a relação dos divisores de um número natural conhecido. Com base nesses problemas, os números primos são introduzidos, e o *mdc* encerra o capítulo sobre divisibilidade. As razões para tais diferenças estão conectadas com as opções de cada autor referentes ao uso dos algoritmos, e serão esclarecidas mais adiante.

O leitor de FC é informado que “número primo é todo número natural maior do que 1, cujos divisores são apenas 1 e o próprio número” (DANTE, 2005 A), e posteriormente que “todo número natural maior que 1 que não é primo é chamado de composto”. Embora essas definições excluam a unidade, o autor procura reforçar esse fato com uma pergunta.

Em FA e FB foi adotado outro modelo; para seus autores, um número natural é primo caso tenha exatamente dois divisores, e composto se tem mais do que dois. A mesma reflexão sobre o caso particular do 1 é, então, colocada em FB, também na forma de uma pergunta, ao passo que FA o faz com uma simples observação. Outra questão trabalhada em problemas em FB e FC, e mencionada em FA, é a inexistência de outros primos pares além do dois. A esse respeito, eis um bom problema de argumentação encontrado em FB: porque não existem primos maiores do que dois cuja diferença seja igual a três?

Os autores de FB e FC pedem, na forma de atividade, a relação dos primos menores do que 100, depois de explicações convenientes sobre o crivo de Eratóstenes. Este método é citado em FA, que afirma que para se obter todos os primos menores do que 1.000, é suficiente eliminar os múltiplos de 2, 3, 5, ... 31; mas não justifica a afirmativa.

Mencionamos em 3.2.1.2 que o autor de FB introduz os números primos com retângulos de lados inteiros. Se a área da figura deve ser equivalente a um número primo, só há uma representação possível. Existe uma interessante idéia similar, descrita por Bruner, e envolvendo material concreto. Vejamos sua descrição:

> "O conceito de números primos parece ser mais prontamente compreendido quando a criança, através da construção, descobre que certos punhados de feijões não podem ser espalhados em linhas e colunas completas. Tais quantidades têm que ser colocadas em uma fila única ou em um modelo incompleto de linha-coluna no qual existe sempre um a mais, ou alguns a menos, para preencher o padrão. Estes padrões, que as crianças aprendem, são chamados de primos. É fácil para a criança ir desta etapa para o reconhecimento de que uma denominada tabela múltipla é uma folha-registro das quantidades em várias colunas e linhas completadas. Aqui está a fatoração, multiplicação e primos, em uma construção que pode ser visualizada". (BRUNER, apud PLANETA EDUCAÇÂO, 2005).

3.2.1.6 – Teorema Fundamental da Aritmética.

O teorema fundamental da aritmética é um tema que nos parece particularmente caro na formação matemática dos alunos. A unicidade da decomposição em fatores primos é apresentada, nos três livros, por meio de vários exemplos discutidos. Inicialmente, as fatorações são feitas, quando possível, de várias formas distintas, destacando o fato de que, independentemente dos passos escolhidos, a decomposição final, exclusivamente com fatores primos, é sempre a mesma. Por exemplo:

$$36 = 2 \times 18 = 2 \times (2 \times 9) = 2 \times 2 \times (3 \times 3) = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$36 = 2 \times 18 = 2 \times (3 \times 6) = 2 \times 3 \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$36 = 3 \times 12 = 3 \times (3 \times 4) = 3 \times 3 \times (2 \times 2) = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

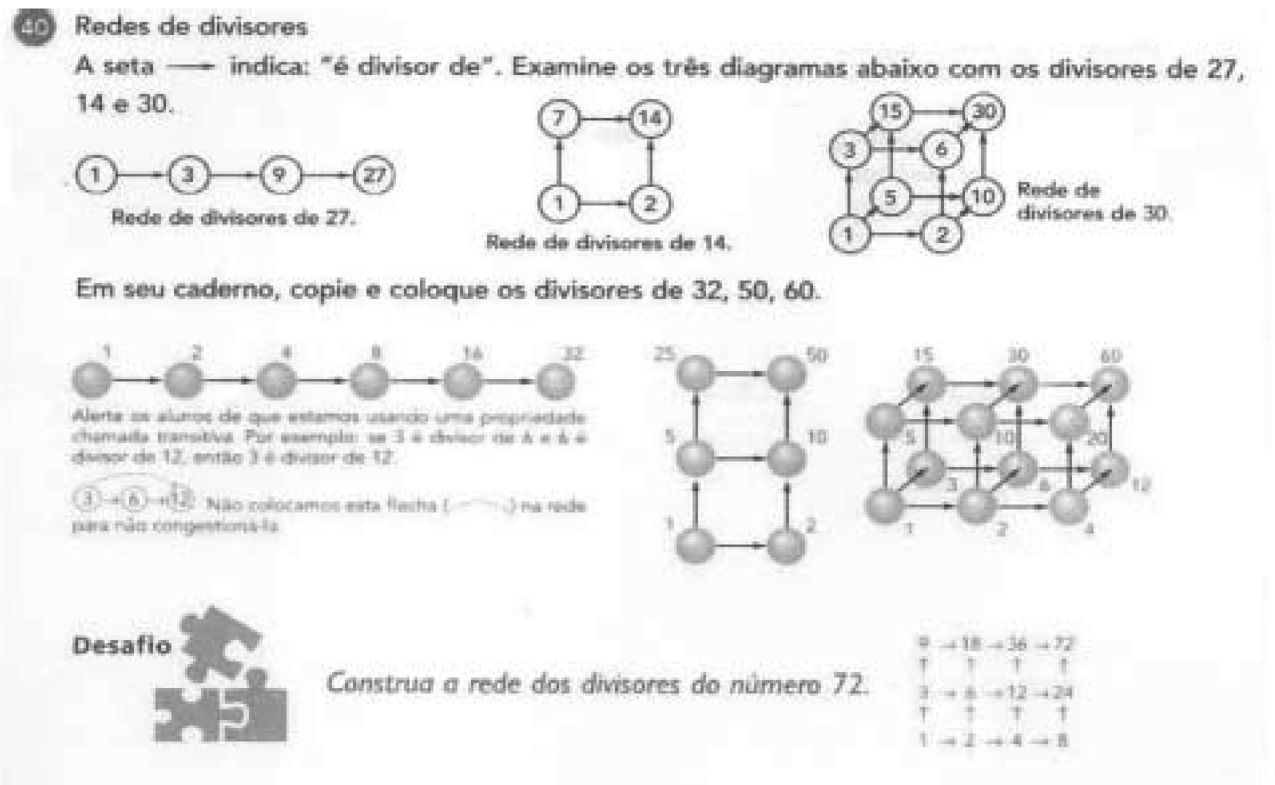
$$36 = 3 \times 12 = 3 \times (2 \times 6) = 3 \times 2 \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$36 = 6 \times 6 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Esquemas semelhantes ao da árvore das possibilidades são usados pelos autores para indicar o caminho usado na decomposição; após ser escolhido um produto inicial de dois naturais que resulte no número a ser decomposto, fazemos o mesmo para cada fator composto, e repete-se o processo até se obter a fatoração desejada.

Já mencionamos rapidamente, em 3.2.1.2, a “rede de divisores”, um método descrito em FC para a determinação de todos os divisores de um determinado número natural. A figura 1, na página seguinte, é uma reprodução extraída do livro do professor, volume referente à 5ª série dessa coleção. Trata-se da atividade em que o processo é descrito. Chamamos atenção para uma opção bastante apropriada do autor, que é exibir alguns exemplos, depois propor exercícios nos quais a representação é fornecida, mas não os divisores, para somente então solicitar a construção completa de uma rede. No manual do livro, é chamada a atenção do professor para os seguintes fatos: se o número tem um só fator primo, sua rede será linear; caso tenha exatamente dois fatores primos, o número tem uma rede plana; três fatores primos acarretam numa rede espacial. Sugere ainda uma atividade em que os alunos devam construir com bolas de isopor e espetos de churrasco as redes dos números 216 e 180.

Figura 1



A decomposição é revista posteriormente em FB e FC, ainda nos livros da 5º série, nos estudos sobre potenciação. Com a nova notação, o aluno passa a escrever $36 = 2^2 \times 3^2$. Convém notar que FA introduz a potenciação antes do conceito de divisibilidade, e assim seus primeiros exemplos de formas fatoradas já são escritos dessa forma.

3.2.1.7 – Algoritmos para decomposição em primos e cálculo do MMC e MDC.

Logo após os exemplos iniciais sobre a fatoração em primos, FA e FB apresentam o algoritmo usual da decomposição. Esse método é imediatamente adotado por estes autores, e será usado até o final da coleção na resolução de exercícios. A maior parte, conforme havíamos adiantado, envolve frações.

Antes de prosseguir, é necessária uma advertência sobre o uso do termo “fração”. Em FC o significado da palavra não é definido em termos rigorosos, e o autor utiliza-a livremente para expressar a razão entre dois números, quer estes sejam inteiros ou não. Os autores de FA e FB consideram o vocábulo de uso restrito ao caso em que numerador e denominador são inteiros, mas apresentaram certas incoerências em determinados momentos, principalmente na 7ª e 8ª série, ao usar a expressão para descrever números que fogem desse padrão. Em nosso texto usaremos a palavra exclusivamente para nos referirmos à razão entre dois inteiros. Esta linguagem nos parece aceitável, pois não enfocamos casos em que tal definição acarrete contradições.

Convém observar que o Teorema Fundamental da Aritmética, após ser o objeto de estudo, conforme a caracterização de Robert, é pouco utilizado como ferramenta. As situações que fogem à regra ocorrem, sobretudo, nos algoritmos para cálculo do *mmc* e *mdc,* e em simplificações que resultam de igualdades do tipo $\sqrt{n}$ = b × $\sqrt{a}$, sendo *a, b* e *n* inteiros. A aplicação da decomposição em primos nos algoritmos a que se refere esta seção é, sem dúvida, de grande relevância. Mas lamentamos que a decomposição não seja mais explorada em outras direções. Existem diversos problemas sobre números inteiros que se encaixam na definição de Robert do nível chamado disponível, que exige maior sofisticação de raciocínio. Dentre tais problemas, vários se valem do Teorema Fundamental da Aritmética.

Apresentamos a seguir um resumo do tratamento dado às frações, destacando o uso que é feito por cada coleção dos algoritmos para cálculo do *mdc* e do *mmc* dentro desse tema.

As frações são introduzidas na 5ª série nas três coleções, e somente em FB o mesmo não ocorre com as operações entre elas. O autor apresenta algumas comparações, quando os denominadores ou os numeradores são iguais, ou nos casos muito evidentes, quando uma é maior do que 1 e a outra é menor, ou ainda quando uma é claramente menor do que 1*/2,* e a outra é claramente maior, como, por exemplo, 5*/*12 *e* 9*/17*. O método mais abrangente, em que as frações são reescritas de modo que os novos denominadores sejam iguais, não é abordado nesse momento. As primeiras simplificações são feitas com divisões sucessivas, e frações irredutíveis são inicialmente definidas como aquelas que não podem ser simplificadas. Antes dos exercícios propostos, simplificações usando o *mdc* são exemplificadas, e observa-se que uma fração *a/b* é irredutível se *a* e *b* são primos entre si. As operações são introduzidas somente na 6ª série. Para efetuar a adição e a subtração quando os denominadores são diferentes, já nos primeiros exemplos são dadas orientações sobre o uso do *mmc*.

Somente depois dessas explanações são introduzidos algoritmos para calcular o *mmc* e o *mdc*. No livro da 6ª série de FB há um capítulo denominado "conexões matemáticas", cujo conteúdo sintetizamos neste parágrafo. As conexões a que o autor se refere são entre a fatoração em primos, *mmc*, *mdc*, simplificação e operações com frações. Inicialmente encontramos a descrição do algoritmo para a determinação do *mmc* de dois ou mais números, primeiro com as fatorações feitas separadamente, e logo após com o dispositivo prático da fatoração simultânea, ambos com boas explicações baseadas em poucos exemplos. A adição de frações é, então, retomada, e o dispositivo prático é recomendado. Em seguida temos o algoritmo para a obtenção do *mdc* de dois ou mais números, através das decomposições em primos, observando os fatores comuns. A argumentação sobre a validade do método é adequada, embora limitada a um exemplo, e ele passa a ser aplicado na simplificação de frações em exercícios resolvidos.

Em FA a exposição destes conhecimentos é integralmente feita na 5º série. Outras diferenças podem ser apreciadas. A decomposição em primos e o seu dispositivo prático foram introduzidos antes dos conceitos de *mmc* e *mdc*. Ambos são apresentados com um só exemplo que acompanha a definição, e logo a seguir os algoritmos são descritos. Nos dois casos, o autor utiliza somente as fatorações simultâneas, ao contrário do que verificamos em FB. As razões apresentadas para justificar a validade dos processos nos parecem insuficientes.

As frações são introduzidas em capítulo posterior, e o uso desses recursos para simplificação e adição de frações é adotado desde os primeiros exemplos.

Na coleção FC, o algoritmo da fatoração em primos faz sua primeira aparição na 7º série. Uma das possíveis vantagens dessa opção é que os estudantes, não conhecendo um dispositivo prático, são levados a refletir sobre maneiras mais econômicas para determinar os fatores primos de um determinado número natural. Quando o dispositivo é, finalmente, apresentado, o autor faz uma observação que não encontramos em FA e FB: não é necessário dividir o número pelos seus fatores primos na ordem crescente. Isto pode ser vantajoso por questões de organização, mas não deve ser tomado como uma regra.

O algoritmo para obtenção do *mmc* também é apresentado na 7ª série, em um capítulo que revisa e aprofunda conceitos sobre divisibilidade e frações. As justificativas para a validade do processo são bem fundamentadas. Vários exemplos são analisados, e em cada um deles os números são decompostos das duas formas possíveis: separada e simultaneamente.

Embora a adição de frações seja introduzida na 5ª série, o aluno, inicialmente, é instruído somente a procurar diferentes representações das frações recorrendo aos múltiplos do numerador e do denominador. A conexão entre o *mmc(b,d)* e o cálculo de *a/b* + *c/d,* com *b* e *d* não nulos, só é explicitada na 7º série. Novamente, os estudantes só tomam conhecimento da existência de um algoritmo depois que se acostumaram a resolver o problema, o que implica menor necessidade de memorizar uma cadeia de etapas. Uma atividade na 6ª série, no capítulo em que frações e números decimais são revistos e aprofundados, descreve o seguinte método: para determinar 2⁄3 + 4/5 obtém-se o numerador calculando $2 \times 5 + 3 \times 4$ e o denominador calculando 3×5; o aluno deve verificar a exatidão do resultado e justificar o processo. Espera-se que o aluno recorra aqui às várias representações de uma mesma fração.

FC também menciona na 5º série que a forma irredutível de *a/b* pode ser obtida com divisões sucessivas ou com o *mdc(a,b)*. O autor não descreve o algoritmo para o cálculo do *mdc* via decomposição em fatores primos. Entretanto, numa seção do livro da 7ª série de FC encontramos comentários sobre o algoritmo de Euclides. Reservamos uma seção exclusivamente para abordar esse fato.

De modo geral, o autor de FC parece menos preocupado com algoritmos, mas não os evita, e ao descrevê-los salienta a importância de tentar justificá-los. Julgamos essa postura extremamente saudável, e nos agradaria que ela fosse adotada com maior freqüência em livros didáticos. Antecipar o aprendizado de dispositivos práticos pode gerar maior rapidez ao efetuar cálculos, mas os alunos podem, dessa forma, perder de vista os conceitos envolvidos, que constituem a parte realmente relevante do aprendizado. Ao indicar o caminho mais econômico para resolver um problema somente depois que as idéias principais foram assimiladas, acreditamos que as justificativas de tais algoritmos tornam-se mais aceitáveis. E ao explicitar processos passíveis de entendimento claro, temos uma chance maior de que nossos alunos percebam com maior clareza a importância de uma argumentação bem fundamentada para o estudo da matemática.

3.2.2 – Assuntos não curriculares.

3.2.2.1 – Números perfeitos, deficientes, abundantes e amigos.

Nas três coleções, ao final de cada capítulo encontramos uma seção com curiosidades, desafios, enigmas e trechos de história da matemática, quase sempre referentes ao assunto estudado no capítulo: “Troque idéias com os colegas” em FA, “Revistinha” em FB e “Para ler, pensar e divertir-se” em FC. O professor pode optar por desenvolver ou não as atividades contidas nessas seções. Pela sua natureza informal, assumem um papel recreativo que pode motivar os estudantes, e em geral, permitem um aprofundamento de temas curriculares.

Em FB e FC, nos capítulos sobre divisibilidade, essas seções trazem textos sobre números perfeitos e amigos. Um número natural se diz perfeito se for igual à soma de seus divisores próprios (segundo os autores, o único divisor impróprio de um número natural é ele próprio). Dois números naturais são amigos se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro.

Em FC, o autor mostra que 6 é o primeiro número perfeito, pergunta qual é o segundo (afirmando que ele está entre 20 e 30), e pede também que se prove que 496 é perfeito. O leitor é informado que este é o terceiro número da seqüência dos perfeitos, e que o vigésimo, descoberto em 1961, tem 2663 algarismos. Em seguida, mostra que 220 e 284 são amigos.

Em FB encontramos outras definições. Um número é abundante se a soma de seus divisores próprios é maior do que ele próprio, e deficiente se a mesma soma é menor do ele. O autor mostra que 6 e 28 são perfeitos, 12 é abundante e 15 é deficiente. Sugere uma pesquisa com os 100 primeiros naturais, para saber em qual das três definições cada um deles se encaixa. Também usa 220 e 284 para exemplificar números amigos, deixando a verificação para o leitor.

Certas conseqüências das propriedades dos inteiros costumam surpreender leigos e até mesmo professores de matemática. Tal característica pode ter seu valor como recurso didático, no mínimo como uma forma de tornar essa disciplina mais atraente para algumas pessoas. A existência de uma quantidade pequena de números perfeitos conhecidos é suficientemente peculiar para se encaixar nessa categoria. A pesquisa proposta em FB exige uma grande quantidade de cálculos, que pode, entretanto, ser minimizada pelo professor. Se cada aluno for incumbido de uma parte da atividade, a classe, trabalhando como um só grupo, pode constatar o quão incomuns são os números que satisfazem uma definição tão simples. Tal trabalho pode ser aproveitado para outras finalidades; podem ser observados padrões gerais na quantidade de divisores de um número natural, ou casos específicos, relacionados, por exemplo, aos quadrados perfeitos ou aos primos.

Ainda em FB, no capítulo sobre variáveis, na 7ª série, um exercício proposto comenta uma interessante conjectura: todo número perfeito é triangular. Pede-se ao aluno que verifique a veracidade da afirmação para 6, 28 e 496. O autor foi muito feliz na escolha da atividade, entretanto criticamos um detalhe na sua exposição. Não fica claro que se trata de uma propriedade que ainda não sabemos se é verdadeira, devido à uma frase no enunciado: "Alguém afirmou que os números perfeitos também são números triangulares".

3.2.2.2 – Critérios para determinar se um número natural é primo.

Iniciamos esta seção com uma advertência. Em sua prática, os professores devem esclarecer que casos particulares não são suficientes para demonstrar um caso geral. No entanto, provas efetivas dependem, em geral, da utilização de uma linguagem que alunos da 5ª série dificilmente estarão aptos para compreender. O importante, então, não é somente exibir exemplos, mas comentar apropriadamente a abrangência dos processos envolvidos para tornar as generalizações aceitáveis. Voltaremos a esse assunto na seção sobre demonstrações.

Dito isso, chamamos atenção para um teorema simples, comentado nos três livros da 5ª série, fundamentado no estudo de casos particulares: se *a, b* e *c* são números naturais tais que *a* divide *b* e *b* divide *c*, então *a* divide *c*. Um bom exemplo de observação dessa propriedade está na atividade de FC comentada anteriormente, a rede de divisores. Reproduzimos em 3.2.1 a descrição encontrada no livro do professor, e repare que ali uma advertência é feita sobre a transitividade.

Recordamos que a construção da rede de divisores de um número natural tem como objetivo a determinação de todos os seus divisores através dos fatores primos desse natural. Permite observar que, se um fator primo não aparece na decomposição, então múltiplos desse fator não podem estar na lista de divisores.

Dessa forma pode-se constatar outro teorema de grande importância, que foi implicitamente aceito nas três coleções: se *n* e *p* são números naturais, *p* é primo, e *n* não tem divisores primos menores ou iguais a *p*, então *n* também não tem divisores compostos menores do que *p*. Talvez os autores tenham julgado o fato evidente, pois aplicaram-no em vários momentos, como na obtenção do *mdc* por meio da decomposição em fatores primos. Acreditamos que seja possível para um aluno concluir por si próprio a afirmação, mas colocamos em dúvida que ela seja óbvia para todos. No mínimo, uma observação a esse respeito seria prudente. Pensamos que a prova seja acessível para alunos de 5ª série, ainda que nessa fase ela também deva ser baseada no estudo de alguns exemplos. A demonstração geral também não envolve grande complexidade. De fato, supondo por absurdo que *n* tem um divisor composto *m* menor do que *p*, então *m* tem um fator primo *q* menor do que ele, portanto *q* é um primo menor do que *p*, além de ser divisor de *n*, e isso contradiz a hipótese. A argumentação usada aqui pode ser expressa em termos coloquiais; se for adequadamente reforçada por exemplos, pode haver a compreensão da sua validade, mesmo para essa faixa etária.

Já mencionamos que em FA, quando foi descrito o crivo de Eratóstenes, afirmou-se que se um número natural *n* é menor do que 1000, e não tem fatores primos até 31, isto é, menores do que 33, então ele é primo. Lembramos também que nenhuma tentativa de demonstração desse fato foi esboçada. Trata-se de uma conseqüência do teorema enunciado no parágrafo anterior. De fato, já sabemos que *n* também não tem divisores compostos menores do que 33. Agora suponhamos por absurdo que *n* é composto; logo é divisível por algum primo *p*, e nas condições do problema $p \geq 33$; segue que existe algum natural *x* satisfazendo

$n = x.p$, mas então devemos ter $x \geq 33$, logo $n = x.p \geq 33^2 > 1000$, o que é uma contradição, pois $n > 1000$. Portanto n é primo. A justificativa aqui exposta é consideravelmente elaborada. Porém pode ser expressa de forma mais próxima da linguagem cotidiana; se for ilustrada com outros exemplos, seu entendimento pode ser viável para alunos do ensino fundamental.

O enunciado geral do resultado que acabamos de obter é o seguinte:

Teorema 1. Se n e p são números naturais tais que p é primo, n não é divisível por nenhum primo menor ou igual a p, e $n < p^2$, então n é primo. A prova geral repete os argumentos usados no caso particular acima.

Em FA, ainda no livro da 5ª série, encontramos “uma regra que permitirá dizer se um número natural é ou não um número primo” (GIOVANNI, 2005). Segue a seguinte descrição: “Dividimos o número dado pelos primos menores do que ele, até obter um quociente menor ou igual ao divisor. Se nenhuma das divisões for exata, o número é primo”. O autor complementa a explicação com dois exemplos. No primeiro, 173 não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11 e 13; a ultima divisão tem quociente 13, igual ao divisor, portanto 173 é primo. No segundo, 401 não é divisível por nenhum primo até 23, sendo que nessa divisão o quociente é 17; como $17 < 23$, então 401 é primo. Finalmente, o aluno deve aplicar esse método para verificar quais números dentre 131, 253, 211 e 391 são primos. Novamente, nenhuma tentativa de prova foi feita.

A simples memorização desse processo não tem significado algum para a formação matemática do estudante. Em nossa opinião, o que torna válida a abordagem desse método, é, sobretudo, a possibilidade de apresentar um resultado que exige um certo refinamento de argumentações, pois raramente o aluno se defrontará com a necessidade de verificar se um número de mais de dois algarismos é primo ou composto, mesmo no contexto escolar.

No livro de FB da 5ª série encontramos uma boa justificativa para esse mesmo processo. A discussão é feita com base no número 127. Inicialmente, o autor observa que sua divisão não é exata por nenhum primo menor ou igual a 13. Mostra que a divisão de 127 por 13 tem quociente 9, portanto menor do que o divisor, ao contrário dos casos anteriores. Conclui que 127 é primo, pois "se o divisor aumentar, o quociente vai diminuir, portanto se houvesse algum fator primo ele já teria sido descoberto nos passos anteriores". Faltou a observação sobre a ausência de divisores compostos menores do que *17*, o próximo primo. Mas a conclusão, colocada em termos simples, está correta, e nos parece de fácil entendimento. Se 127 fosse divisível por 17 ou algum primo maior, o quociente, também um divisor de 127, teria que ser ainda menor do que 9, o que é impossível. Em seguida faz a pesquisa com 353; efetua as divisões por 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 19 (a última com o auxílio da calculadora), e pede ao aluno que responda porque podemos concluir que 353 é primo; segundo o livro do professor, espera-se que ele responda que a razão reside em dois fatos: nenhuma dessas divisões é exata, e na última delas o quociente obtido é menor do que 19, o divisor.

A regra geral pode ser assim descrita:

Teorema 2. Sejam p um primo e n um inteiro não divisível por nenhum primo menor ou igual a p; se na divisão de n por p o quociente é menor ou igual ao divisor, então n é primo. Para demonstrar tal fato, chamemos de q e r o quociente e o resto dessa divisão, isto é, $n = p.q + r$, satisfazendo $r < p$ e $p \geq q$. Agora suponha por absurdo que n tenha um divisor primo p_1. Então existe q_1 tal que $n = p_1.q_1 = p.q + r$, logo $p_1.q_1 < p.q + p = p.(q + 1)$ o que obriga $q_1 < q + 1$, uma vez que $p_1 > p$ por hipótese; mas então $q_1 \leq q \leq p$, o que é uma contradição, pois n não tem divisores primos nem compostos menores do que p. Não estamos propondo uma prova com tal rigor para alunos de 5ª série, mas algumas das idéias contidas no seu desenvolvimento podem ser apreciadas na justificativa do caso particular analisado em FB.

Apenas um exercício proposto em FB exige a aplicação desse algoritmo: para determinar se 197 é primo, a atividade foi dividida em etapas. Primeiro devem ser feitas todas as divisões pelos primos até 13; depois se deve verificar se 197 é maior ou menor do que 17^2, para que finalmente possamos responder a pergunta inicial. A conclusão poderia ser obtida sem a comparação $197 < 17^2$, bastando observar que na divisão não exata de 197 por 17 o quociente é 11, portanto *197* é primo. Aparentemente o autor quis estabelecer uma relação entre os dois critérios, mas não o fez de forma clara.

Provemos agora que tal conexão efetivamente existe. Para tal, partiremos do segundo critério. Suponha que as hipóteses do teorema 2 se verificam, isto é: n é um número natural, p' é primo, n não é divisível por nenhum primo menor ou igual a p', e $n = p'.q + r$, satisfazendo $r < p'$ e $p' \geq q$. Seja então p o sucessor de p' na seqüência dos primos; $n = p'.q + r < p^2 + r$, pois $p > p'$, portanto $p > q$, e assim concluímos que o primeiro critério também se verifica: *p* é primo, *n* não é divisível por nenhum primo menor do que *p* e $n < p^2$; essas são as hipóteses do teorema 1.

Estabelecer a conexão entre os dois critérios parece-nos demasiado profundo para alunos de 5ª série. Trata-se de um tema que exige diversas considerações e uma preparação adequada. A retomada do assunto em outras séries talvez fosse recomendável, o que também não ocorre em FB. Trata-se de mais um caso em que o princípio do currículo em espiral de Bruner caberia perfeitamente. Outra opção interessante seria introduzir o critério noutra época, que poderia ser ainda no ensino fundamental, mas quando houver maior amadurecimento intelectual dos educandos.

3.2.2.3 – Uma proposta de apresentação do algoritmo de Euclides.

No capítulo sobre divisibilidade da 7º série de FC, há uma descrição do algoritmo de Euclides para a obtenção do *mdc(a,b)*: sendo $a > b$, se *a* é divisível por *b*, é evidente que o próprio *b* é o número procurado; do contrário, tomamos r_1, resto de $a \div b$, e se r_1 é divisor de *b*, então $mdc(a,b) = r_1$; se r_1 não divide *b*, tomamos r_2, resto de $b \div r_1$, e se r_2 divide r_1, então $mdc(a,b) = r_2$; do contrário, tomamos o resto de $r_1 \div r_2$. O processo se repete até que tenhamos uma divisão exata. O *mdc(a,b)* será o último resto não nulo.

É importante notar que o método é descrito na seção “Para ler, pensar e divertir-se”. Portanto assume o caráter de curiosidade histórica. Fica aberta a possibilidade para o professor trabalhar este conteúdo com mais detalhes, desde que ele julgue tal atividade relevante. Isso pode ter levado o autor a não apresentar nenhuma prova, o que não é usual nessa coleção, mas devemos considerar o caráter de curiosidade dos textos dessa seção; os conteúdos nela abordados não fazem parte da grade curricular. Talvez o método seja ignorado nas outras coleções devido ao recurso da decomposição em primos, já que ambos são igualmente eficazes.

A demonstração da validade desse algoritmo exige, em geral, argumentações mais elaboradas. Apresentaremos uma que nos parece viável para o ensino fundamental, utilizando um recurso geométrico. O essencial do argumento está apresentado no artigo “Uma interpretação geométrica do MDC”, de Zelci Classem de Oliveira, publicado na RPM. Uma observação inicial é necessária: se $d = mdc(a,b)$, então existem x e y naturais tais que $a = dx$ e $b = dy$, e além disso x e y são primos entre si. Do contrário, x e y teriam pelo menos um fator comum p, de modo que a e b seriam divisíveis por dp, que é maior do que d, e assim temos uma contradição. Essa propriedade está implícita nas três coleções, quando uma fração é simplificada com numerador e denominador divididos pelo *mdc* de ambos, o que resulta numa fração irredutível.

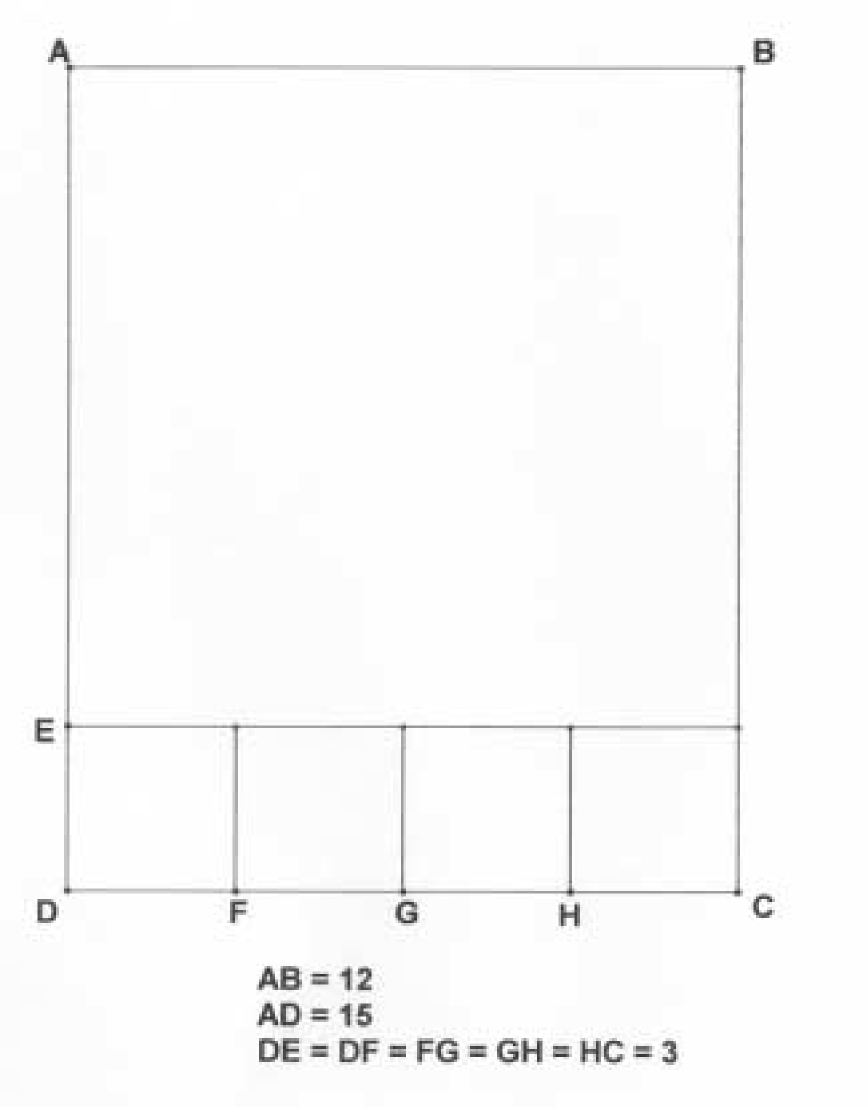
Também nas três coleções encontramos um tipo de situação-problema que faz uma articulação com a geometria. Um retângulo com lados medindo a e b, $a > b$, pode ser subdividido em quadrados de mesmo tamanho, se o lado de cada quadrado é um divisor de a e b. Sempre será possível fazer a subdivisão, pois 1 é divisor de a e b, e se queremos que estes tenham a maior dimensão possível, então devemos usar $d = mdc(a,b)$. É justamente essa interpretação geométrica que nos permite verificar o algoritmo de Euclides.

Se a é múltiplo de b, é evidente que o retângulo pode ser dividido em quadrados de lado b, o que pode ser tomado como justificativa adequada para o ensino fundamental do fato: se b divide a, $mdc(a,b) = b$. Do contrário, sabemos que $a = bq + r$, com $r < b$, e a figura pode ser decomposta em q quadrados de lado b, e um retângulo de lados b e r.

Se r é um divisor de b, esse novo retângulo pode ser subdividido em quadrados de lado r, e cada quadrado de lado b também. Sejam, então, x e y tais que $a = xr$ e $b = yr$, e, portanto, temos xy quadrados de lado r. Resta verificar que $mdc(x,y) = 1$ para que possamos concluir que $mdc(a,b) = r$. Isto realmente será verdadeiro, e geometricamente corresponde a afirmar que não é possível decompor o retângulo em quadrados maiores. Pode-se recorrer à análise da alguns casos particulares, para elaborar uma justificativa que é reforçada pelos desenhos. Isto será conseqüência de duas impossibilidades: subdividir o retângulo de lados b e r em quadrados de lados maiores do que r, e subdividir o retângulo de lados b e $b.q$ em quadrados de lados maiores do que b.

Vejamos um exemplo: na figura 2, na página seguinte, um retângulo de lados 15 e 12 é dividido em um quadrado de lado 12 e um retângulo de lados 12 *e* 3. Como esse pode ser decomposto em quadrados de lado 3, o mesmo acontece com o retângulo maior. Como $15 = 3 \times 5$ e $12 = 3 \times 4$, temos $5 \times 4 = 20$ quadrados de lado 3. Finalmente, 5 e 4 são primos entre si, o que confirma que $mdc(15,12) = 3$.

Figura 2



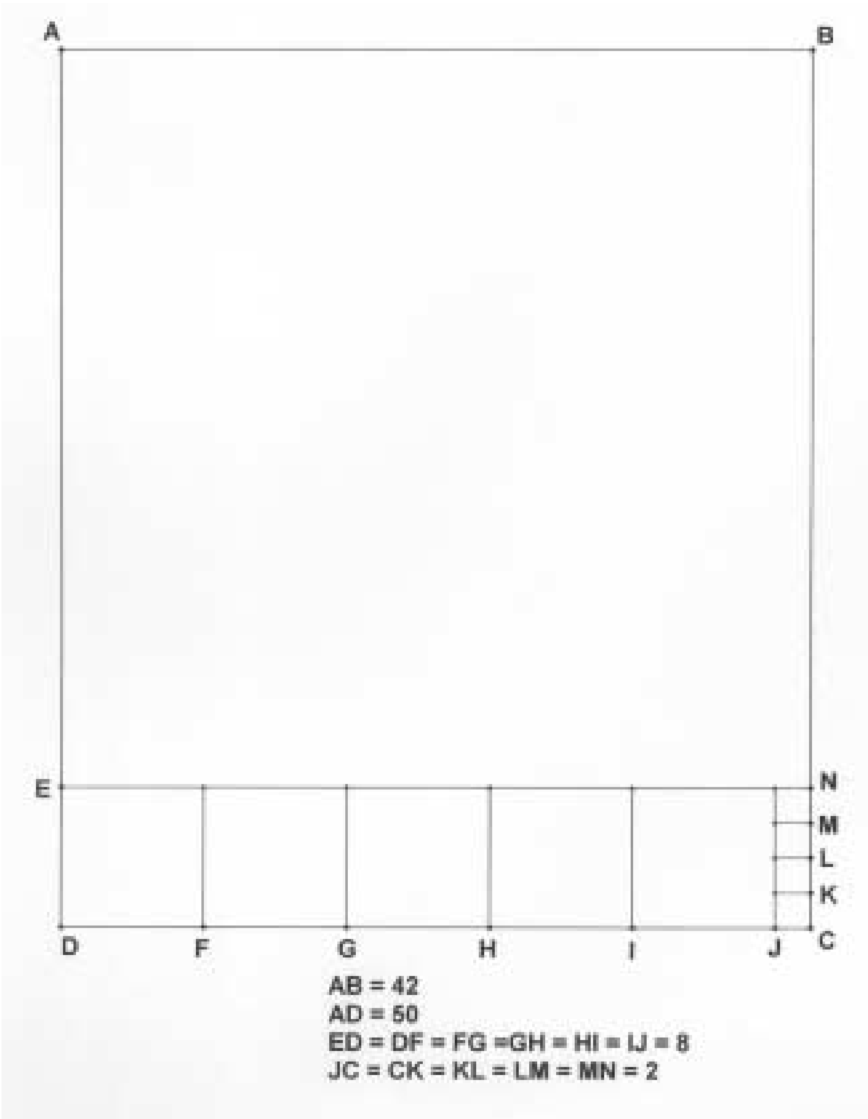
Note que se as dimensões do retângulo fossem 27 e 12, teríamos dois quadrados de lado 12 na primeira decomposição, mas o retângulo de lados 12 e 3 seria mantido, e teríamos, na seqüência, a mesma subdivisão da figura. Portanto foi o resto, e não o quociente que permitiu a resolução do problema.

Continuemos com mais um passo da argumentação geral. Se r não divide b, então $b = rq_1 + r_1$, e o retângulo de lados b e r pode ser decomposto em q_1 quadrados de lado r e um retângulo de lados r_1 e r; se r_1 é divisível por r então o retângulo menor pode ser subdividido em quadrados de lado r_1 e mesmo acontece com os retângulos maiores, isto é:

$r_1 = mdc(r,r_1) = mdc(b,r) = mdc(a,b).$

Exemplo: mdc(50,42) = mdc(42,8) = mdc(8,2) = 2

Figura 3



Repare que como a primeira divisão, $50 \div 42$, não é exata, usamos o mesmo método do primeiro exemplo, mas $42 \div 8$ tem resto diferente de zero também

Então o método foi aplicado com sucesso ao retângulo de lados 42 e 8, pois 8 é múltiplo de 2. Pode-se perceber que o processo é finito, pois na pior das hipóteses a figura original pode ser subdividida em quadrados de lado unitário.

3.2.2.4 – Relação entre o MMC e o MDC.

É digno de nota um exercício em FC, no livro da 5ª série, no qual se deve verificar a seguinte propriedade: se *a* e *b* são números naturais, *d* e *m* são, respectivamente, *mdc(a,b)* e *mmc(a,b)*, então *ab* = *dm*. Inicialmente deve ser analisado o caso particular *a* = 8 e *b* = 12. Depois o aluno deve investigar se a relação é válida para outros pares, que ele deve escolher aleatoriamente. Encerrando a atividade, deve dizer se ele acha que a igualdade é sempre verdadeira, ou seja, fazer uma conjectura.

No livro da 7º série, logo após a descrição do algoritmo de Euclides, a propriedade é mencionada novamente, e agora o estudante é informado que ela é efetivamente verdadeira; o autor usa-a para calcular o *mmc* de números cujo *mdc* foi obtido pelo método introduzido. Novamente, nenhuma justificativa é apresentada; provavelmente pelas mesmas razões expostas quando comentamos o algoritmo de Euclides, na subseção anterior, isto é: a inclusão do tópico numa seção destinada a comentar curiosidades. Mas as provas para os casos particulares em que *a* e *b* são primos entre si, ou em que um é múltiplo do outro, poderiam ter sido solicitadas já na 5º série.

Apresentamos aqui uma forma de constatar a veracidade da relação, que é outra interessante articulação entre geometria e propriedades de inteiros. Inicialmente, vamos nos valer de um resultado apresentado na nossa prova para o algoritmo de Euclides: se $d = mdc(a,b)$, $a = dx$ e $b = dy$, então $mdc(x,y) = 1$. Portanto podemos escrever $ab = xyd^2$. Recorde que a tradução geométrica dessa proposição é que um retângulo de lados *a* e *b* pode ser subdividido em *xy* quadrados de área d^2. Em exemplo citado anteriormente, vimos que um retângulo de lados 15 e 12 foi decomposto em $4 \times 5 = 20$ quadrados de área 3^2, uma vez que $15 \times 12 = 4 \times 5 \times 3^2$, sendo $mdc(15,12) = 3$

O problema de se obter o menor múltiplo comum de dois números naturais *u* e *v* é equivalente à seguinte formulação geométrica: dados dois segmentos de reta medindo *u* e *v*, encontrar o menor segmento que pode ser subdividido em uma quantidade inteira de segmentos de comprimento *u*, e outra quantidade inteira de segmentos de comprimento *v*. Se aumentarmos *p* vezes cada um desses segmentos, com *p* inteiro, a preservação das proporções nos mostra que $mmc(pu,pv) = p.mmc(u,v)$. Por exemplo, $mmc(4,6) = 12$, e pode-se verificar que $mmc(20,30) = mmc(5 \times 4, 5 \times 6) = 5 \times 12 = 60$.

Agora vamos aplicar essa propriedade na nossa demonstração. Observe inicialmente que, como *x* e *y* são primos entre si, $mmc(x,y) = xy$. Portanto podemos escrever $m = mmc(a,b) = mmc(dx,dy) = xyd$, e como $ab = xyd^2 = (xyd).d$, temos $ab = md$. No exemplo acima, $mmc(15,12) \times mdc(15,12) = 15 \times 12$. De fato, *mmc*(5,4) = 5×4, logo *mmc*(15,12) = $3 \times (5 \times 4)$; como $15 \times 12 = 5 \times 4 \times 3^2$, temos que $15 \times 12 = (5 \times 4 \times 3) \times 3$; a multiplicação entre parênteses corresponde ao *mmc*, e o valor fora do parênteses é o *mdc*.

3.2.2.5 – Problemas interessantes em FC.

Quando assuntos vistos em anos anteriores são retomados, é preciso levar em conta a suposta evolução dos estudantes no tempo decorrido. Além de maior profundidade de enfoque, problemas mais sofisticados devem ser aproveitados. É exatamente esta postura que notamos em FC, coerente com a idéia do currículo em espiral de Bruner. Selecionamos alguns problemas que envolvem conteúdos vistos em anos anteriores, mas que foram aplicados em momentos mais apropriados por este autor, seguindo o ponto-de-vista acima expresso.

No capítulo sobre números naturais, na 6º série:

- Determinar a quantidade de divisores de p^2, com p primo.

- Obter o algarismo a para que 1*aa*5 seja múltiplo de 45.

No capítulo sobre frações e divisibilidade, na 7º série:

- Encontre o menor inteiro positivo da forma $9.q + 3$ que seja múltiplo de 6 e 8, com q inteiro.

• Escreva os dois próximos termos da seqüência:

$a_1 = 1/3$

$a_2 = (1 + 3) / (5 + 7)$

$a_3 = (1 + 3 + 5) / (5 + 7 + 9)$

$a_4 = (1 + 3 + 5 + 7) / (9 + 11 + 13 + 15)$

Em seguida mostre que $a_n = 1/3$ sempre. Trata-se de uma retomada dos números quadrados; observe que a seqüência é $a_n = Q_n / (Q_{2n} - Q_n)$.

• Um teste de múltipla escolha que faz uma boa conexão com a geometria: a quantidade de arestas de um prisma é sempre um múltiplo de três? É sempre um múltiplo de quatro? É sempre par? Pode ser menor do que nove?

Outro aspecto positivo a ser ressaltado em FC é a “revisão cumulativa”, penúltima seção de cada capítulo. Nela encontramos exercícios sobre conteúdos abordados anteriormente (incluindo os que se encontram em livros das outras séries) em meio a outros sobre o tema recém-trabalhado. Eis um caso em que o autor nos pareceu extremamente feliz na seleção de problemas: logo após a introdução dos números decimais, há uma série de exercícios em que o aluno deve fazer uma divisão de inteiros e obter um decimal; mas também há uma pergunta sobre a duração em horas e minutos correspondente a um período de tempo dado apenas em minutos, e, portanto o resto da divisão faz parte da resposta. Na revisão cumulativa do capítulo seguinte, tem-se outro desafio em que o resto de uma divisão é a chave: obter o 35º termo da seqüência (*A, B, C, D, A, B,...*).

Anotamos abaixo outros bons problemas sobre inteiros que FC inclui nas revisões cumulativas do livro da 8º série:

- Dentre os números 25, 50, 64, 75 e 250, somente um não é divisor de 10^{15}. Determine qual deles. (proposto na Fuvest).

- Obter dois números naturais cuja soma dos quadrados é 520*,* sabendo que na divisão do maior pelo menor o quociente é 3 e o resto é 4.

- Se x é o maior inteiro de quatro algarismos divisível por 13, e y é o menor inteiro de quatro algarismos divisível por *17,* então ($x - y$) é primo, múltiplo de 6, divisível por 5 ou quadrado perfeito?

Em um capítulo sobre álgebra na 7º série em FC, na seção "Para ler, pensar e divertir-se", é descrito um método obtido por Gauss para determinar a data do domingo de Páscoa de cada ano, de seus dias (século XIX) até 2.020. Nenhum esboço de demonstração foi apresentado, pois a complexidade da demonstração não permite. Trata-se de uma atividade típica da seção que a contém, com o caráter de curiosidade. Optamos por descrevê-la aqui, por tratar-se de um caso em que são aplicados restos de divisões de inteiros. Se A é um ano do período mencionado acima, tomamos:

x = resto de $A \div 19$

y = resto de $A \div 4$

z = resto de $A \div 7$

u = resto de $(19x + 25) \div 30$

v = resto de $(2y + 4z + 6u + 5) \div 7$

A data da Páscoa em A será $(u + v + 22)$ de março, ou $(u + v – 9)$ de abril. Depois de fazer os cálculos para A = 2.004, o autor sugere que o aluno tente fazer o mesmo para A = 2.020.

Outros problemas de bom nível na coleção FC serão descritos na seção sobre demonstrações.

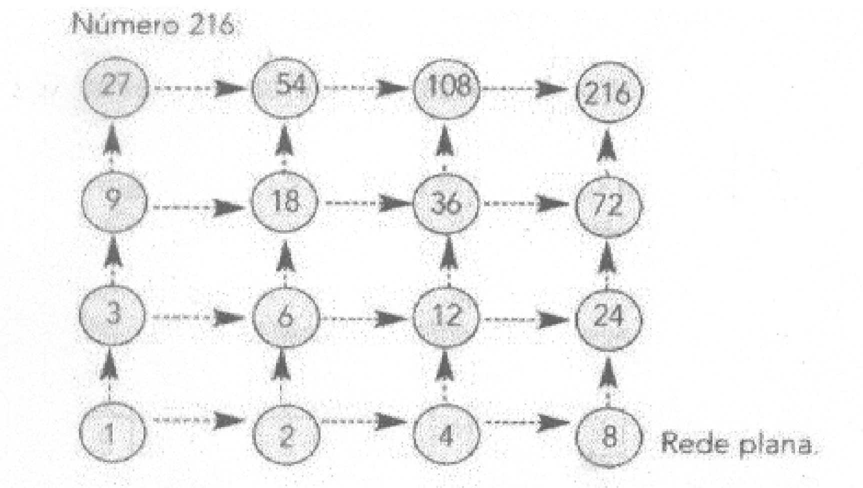
3.2.2.6 – Quantidade de divisores de um número natural.

Nos livros analisados, em poucas ocasiões o aluno deve determinar a quantidade de divisores de um número natural A, e na maioria das vezes em que isso ocorre A é suficientemente pequeno para que eles sejam encontrados um a um. A fórmula que fornece esse total não é explorada em nenhuma coleção. Não nos parece que seja tarefa fácil apresentá-la no ensino fundamental, com uma demonstração conveniente. No capítulo dedicado ao ensino médio veremos que nesse estágio de aprendizado uma prova viável pode ser apresentada em conexão com o estudo da análise combinatória.

Se os fatores primos de A são $p_1, p_2, \dots p_n$, com expoente iguais, respectivamente, a $e_1, e_2, \dots e_n$, então A tem $(e_1 + 1) . (e_2 + 1). \dots .(e_n + 1)$ divisores. Alguns casos particulares podem ser constatados. Se A tem somente um fator primo p, seus divisores são os termos da seqüência $1, p, p^2, \dots, p^e = A$, que tem $(e + 1)$ elementos.

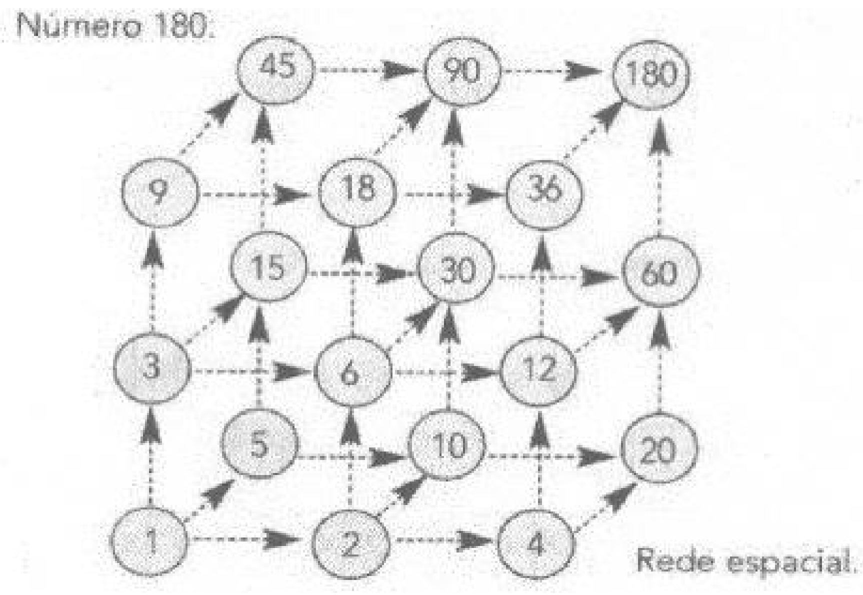
Acrescentamos aqui uma sugestão nossa, aproveitando um recurso utilizado em FC, e já mencionado aqui: a rede de divisores. Com ela, podemos observar que a quantidade de divisores de um número da forma $p^e.q^f$, com *p* e *q* primos, é igual a (*e* + 1).(*f* + 1). A representação (plana) da rede é equivalente a um retângulo cujos lados medem (*e* + 1) e (*f* + 1), e a sua área corresponde ao total procurado. Repare que, como 216 = $2^3 \times 3^3$, logo tem (3 + 1) $\times$ (3 + 1) = 16 divisores, que estão abaixo representados na figura 4, ilustração reproduzida do manual do professor no livro da 5ª série.

Figura 4



Analogamente, o total de divisores de um número natural que tenha exatamente três fatores primos corresponde ao volume do paralelepípedo que se obtém com a sua rede. Na página seguinte, figura 5, reproduzimos outro exemplo, extraído do mesmo manual; temos os divisores de 180 = $2^2 \times 3^2 \times 5^1$, num total de (2 + 1) $\times$ (2 + 1) $\times$ (1 + 1) = 18 números.

Figura 5



De modo geral, nas seções sobre assuntos não curriculares, procuramos privilegiar atividades que exigem maiores sutilezas de análise. São problemas que se situam no nível que Robert definiu como disponível. Os temas por nós descritos na seção sobre assuntos curriculares, após sua introdução, quando tinham o caráter de objeto, passam a ser as ferramentas necessárias.

No manual do professor do livro da 5ª série em FB, encontramos algumas ricas sugestões para atividades com números naturais. Destacamos uma que, além de ser compatível com a definição do terceiro nível de Robert, é também um belo exemplo de um disparador, conforme a concepção de Augusto. Nós a incluímos nesta seção por permitir observar uma interessante propriedade relativa a quantidade de divisores:

"Um canibal propôs a seu prisioneiro um jogo de par ou ímpar: ' Diga um número entre 901 e 1.000. Se ele tiver uma quantidade ímpar de divisores, você está livre. Caso contrário você será servido no jantar’. Em seguida o prisioneiro respondeu: ‘Entre 0 e 20 eu teria quatro chances de acertar; entre 901 e 1.000 só tenho uma’. Mesmo assim o prisioneiro acertou o número. Que número é esse?”

Eis um exemplo de um problema que exige considerações profundas, e que deve ser resolvido com argumentações convincentes. Parece-nos desafiador também para alunos de ensino médio. Da forma como foi enunciado, há uma conjectura sugerida. A pesquisa com os inteiros entre 0 e 20 revela que os quatro números que satisfazem as condições exigidas são 1, 4, 9 e 16, os quadrados perfeitos. De fato, o único quadrado perfeito entre 901 e 1.000 é $31^2 = 961$, que tem três divisores naturais. O problema seria consideravelmente mais complexo sem a informação de que existe somente um número com as hipóteses consideradas, e sem a sugestão da pesquisa entre números menores. Uma resolução possível seria recorrer aos retângulos com lados inteiros e área n, sendo n inteiro. Vimos que FB e FC usaram este recurso para obter os divisores de n. Cada retângulo fornece dois divisores, a não ser que n seja um quadrado perfeito, pois então um dos quadriláteros será um quadrado, e então o total de divisores será ímpar. Reciprocamente, se n tem uma quantidade ímpar de divisores, um dos retângulos deve ser um quadrado, logo n é um quadrado perfeito. Note a característica de um disparador. O problema do canibal nos conduz a um belo teorema: um número natural tem uma quantidade ímpar de divisores se, e somente se, ele for um quadrado perfeito.

A fórmula mencionada acima possibilita outra argumentação para esse teorema. Suponha que A seja um número natural com uma quantidade ímpar de divisores; sabemos que tal quantia é dada por $(e_1 + 1).(e_2 + 1). \ldots .(e_n + 1)$, sendo

e_1, e_2,..., e_n os expoentes dos divisores primos de *A* na sua decomposição em primos. Como o resultado da multiplicação é ímpar, todos os fatores também são, logo os expoentes na decomposição de *A* são pares, donde *A* é um quadrado perfeito. Reciprocamente, se *A* é um quadrado perfeito, todos os expoentes na sua decomposição em primos são pares, e quando adicionamos 1 a cada um deles, teremos somente ímpares, e segue que A tem um número ímpar de divisores.

3.3 – NÚMEROS NEGATIVOS.

3.3.1 – Introdução do conceito.

O conceito de número negativo é introduzido pelos três autores na 6º série, com base em situações concretas (temperaturas, saldo bancário, saldo de gols, calendário). Os exemplos escolhidos permitem a elaboração de situações que dão significado à adição e à subtração de inteiros. Novamente FA adota uma linguagem mais formal para apresentar as propriedades operatórias, enquanto em FB e FC elas são aproveitadas como suporte para o cálculo mental. As três coleções enfatizam adequadamente a nova característica, a existência do oposto, e a sua conseqüência, o fechamento da subtração.

A comutativa também ganha maior relevância em relação ao ano anterior. Operações como (*b* – *a*) entre os naturais auxiliam a compreensão de casos como (–*a*) + (+*b*). A notação – *a* + *b* é apresentada nas três coleções pouco depois dos primeiros exemplos e exercícios.

Outro ponto comum aos três livros é o uso da reta graduada para representar os inteiros. O módulo de um número é, então, definido geometricamente. Somente FC não utiliza a notação convencional, adotando as expressões “modulo de *a*” ou "valor absoluto de *a*“. O símbolo $|a|$ é introduzido por ele somente na série seguinte. Outra distinção digna de nota no tratamento desse autor são considerações sobre a seqüência dos inteiros; agora não há o menor elemento, e todos têm sucessor e antecessor.

Com a representação na reta, ganha sentido o conceito de números simétricos, como sinônimo de opostos. A comparação da distância entre dois pontos com a subtração de inteiros propicia as primeiras interpretações sobre o caso $a - (-b)$, com a e b positivos. Nesse caso particular, os três fazem observações sobre um aumento de temperatura, de um valor negativo para um positivo.

3.3.2 – Multiplicação com números negativos.

Um momento delicado na formação matemática do aluno é o primeiro contato com multiplicações envolvendo números negativos. A memorização das regras de sinais, embora seja útil, tem que ser antecedida por argumentações que as tornem minimamente plausíveis. Mas não é tarefa fácil conferir significado para expressões como $(-3) \times (-2) = +6$.

Existem mais semelhanças do que divergências entre os autores na exposição inicial dos negativos, porém para a multiplicação os enfoques escolhidos são bastante diversos. Já mencionamos, por exemplo, que FB optou por abordar o tema no último capítulo do livro, o que gerou uma certa limitação no primeiro estudo das equações de primeiro grau, ainda na 6ª série. A determinação da incógnita em $a.x = b$ só pode ser considerada se a e b são positivos. Este problema foi sanado no início da 7º série, com ponderações sobre as variações de sinal nesses coeficientes.

Mas parece-nos que a localização do assunto do livro não é tão relevante quanto a metodologia empregada. Vejamos como cada uma das coleções introduziu o conceito da multiplicação.

Os três autores estabelecem desde o princípio uma correlação entre os inteiros positivos e os naturais, mas FA adota uma postura pouco mais formal; isto pode ser notado no primeiro exemplo de sua abordagem sobre multiplicação:

$(+ 6) \times (+ 4) = 6 \times 4 = 24 = + 24.$

Enuncia a seguir: "A multiplicação de dois números inteiros positivos dá um número inteiro positivo".

Anteriormente já havia afirmado, apoiado em situações concretas (variações de temperatura, em particular), que "subtrair dois inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo". A seguir, através de exemplos e exercícios do tipo $0 - (-17)$ ou $0 - (+18)$, conclui, implicitamente, que $-(-a) = +a$, e também que $-(+a) = -a$. Propõe exercícios em que a é um inteiro conhecido.

Logo após sua consideração sobre o produto de dois positivos, analisa o caso:

$(+6) \times (-4) = 6 \times (-4)$.

Fica subentendida uma analogia com a multiplicação definida entre os naturais, ao calcular:

$(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24$.

Na seqüência, escreve:

$(-6) \times (+4) = -(+6) \times (4) = -(+24) = -24$.

Conclui que "a multiplicação de um número inteiro positivo por um inteiro negativo, em qualquer ordem, resulta em um inteiro negativo".

Para analisar o produto entre dois negativos, recorre à tabela abaixo:

×	**– 4**	**– 3**	**– 2**	**– 1**	**0**	**+ 1**	**+ 2**
– 6					0	– 6	– 12

O autor observa que, na linha inferior, quando adicionamos 6 a um dos dois últimos valores, obtém-se o anterior. Com essa relação, as lacunas são preenchidas. Segue a conclusão: "a multiplicação de dois números inteiros negativos resulta em número inteiro positivo".

Acrescenta uma observação: usando o oposto chega-se ao mesmo resultado, pois:

$(-6) \times (-4) = -(+6) \times (-4) = -(-24) = +24.$

Resume as conclusões estabelecendo a regra: calculamos o produto de dois inteiros (diferentes de zero) calculando o produto do módulo dos fatores; se ambos têm o mesmo sinal o resultado é positivo, e do contrário é negativo.

Há uma certa semelhança entre os argumentos do autor, com exceção do recurso da tabela, e as demonstrações formais desses resultados, encontradas em livros-texto de álgebra abstrata. Justificativas com tal caráter talvez aparentem uma certa artificialidade para alunos da 6ª série. Além disso, usar indução sobre um só caso parece-nos bastante temerário. Pode acostumar o aluno com a falsa idéia de que um exemplo é suficiente para aprovar uma conjectura. Entretanto uma análise cuidadosa do exemplo escolhido, no ensino fundamental, pode sanar o problema. O professor que optar pela metodologia adotada pelos autores de FA pode ter bons resultados, desde que reforce o caráter geral das características estudadas no caso particular apresentado.

A coleção FB recorre ao “método chinês”, ou método “das barras coloridas”, duas denominações empregadas pelo autor. Os alunos são informados que se trata de um processo que era usado por esse povo oriental há muitos séculos para calcular ganhos e perdas. Barras pretas eram usadas para indicar créditos, e vermelhas para os débitos. Para efetuar cálculos, aplica-se a seguinte regra: uma barra preta e uma vermelha se anulam. Assim, cada conjunto de barras equivale a um número inteiro. Se *n* e *m* são naturais quaisquer, (*n* + *m*) pretas e *m* vermelhas representam (+*n*), enquanto *m* pretas e (*n* + *m*) vermelhas representam *(– n).* Quantidades iguais são equivalentes ao zero.

A adição e a subtração de inteiros, introduzidas anteriormente, são revisadas com as barras. Na subtração, são supostas situações iniciais em que todas as barras sejam da mesma cor. Para fazer (+2) – (+3), como é impossível tirar 3 barras de um conjunto com 2, são acrescidas ao conjunto inicial 3 de cada cor. Em seguida eliminamos as 3 pretas, e agora restam 2 pretas e 3 vermelhas, o que nos permite concluir que o resultado é (– 1).

Desconsiderando a hipótese de que um fator seja zero, existem quatro casos possíveis de multiplicação quando fazemos variar os sinais dos fatores. Cada um é apresentado com um exemplo, com números iguais em valor absoluto. Para calcular primeiro (+2) × (+3), e depois (+2) × (– 3), a interpretação dada é que devemos formar dois grupos de 3 barras pretas no primeiro caso, e dois grupos de vermelhas no segundo; obtém-se dessa forma (+6) *e* (– 6), respectivamente. Quando as contas solicitadas são (– 2) × (+3) e (– 2) × (– 3), o autor afirma que devemos retirar dois grupos, o segundo termo indicando novamente qual a cor desses grupos; mas como é impossível retirar barras de um conjunto vazio, o zero é representado, nos dois casos, por um conjunto de doze barras, metade de cada cor. Agora, as retiradas fornecem, é claro, (– 6) e (+6).

Como a atividade envolve material concreto, pode haver menor dificuldade de entendimento. Imediatamente depois dos quatro exemplos, as regras dos sinais são apresentadas, com a advertência de que é "conveniente memorizá-las". Novamente a indução de um só termo foi usada, o que pode ser compensado pela boa análise dos casos estudados. Evidentemente o professor pode aplicar outras atividades similares, preferencialmente antes da memorização. No livro do aluno não encontramos sugestões explícitas de tarefas em que se devam resolver outros cálculos com o auxílio desse método. O texto, tal como está no livro, reforçado por desenhos, permite a compreensão do processo. Ao sugerir fichas coloridas no lugar das barras para acompanhar as operações descritas, o autor indica ao professor a possibilidade de novas atividades.

Apesar da sua explanação ter sido mais teórica do que a observada em FB, o autor de FA, no manual, também recomenda o uso de um jogo similar, com uso de fichas coloridas. A leitura dos manuais, a respeito da multiplicação e divisão de inteiros, revelou-se particularmente recomendável. No manual de FA, por exemplo, foi citado um trecho de *O fracasso da matemática moderna* de Morris Kline, em que é feita uma sugestão para se dar significado ao tópico em questão. Nós o transcrevemos abaixo:

> "Uma apresentação bem conhecida, baseada em perdas e danos, pode convencer os estudantes. Concordamos que, se um homem lida com dinheiro, um ganho será representado por um número positivo e a perda por um número negativo. Igualmente, o tempo no futuro será representado por um número positivo e no passado por um número negativo. Podemos agora usar números negativos para calcular o aumento ou a diminuição na riqueza de um

> homem. Assim, se ele ganha cinco dólares por dia, daí a três dias estará com quinze dólares. Em símbolos $(+5) \times (+3) = 15$. Se perde cinco dólares, então daí a três dias estará com uma perda de quinze dólares. Em símbolos $(–5) \times (+3) = –15$. Se ganha cinco dólares por dia, então três dias atrás estava quinze dólares mais pobre. Em símbolos $(+5) \times (– 3) = –15$. Finalmente, se perde cinco dólares por dia, então três dias atrás estava quinze dólares mais rico. Em símbolos $(–5) \times (–3) = +15$". (KLINE, apud Giovanni, 2005).

No manual de FB lê-se, "... tais operações são de difícil compreensão pelos alunos nessa faixa etária. Não se trata de operações nas quais podemos fazer o uso da intuição". Mais adiante: "As escolhas aqui feitas não dão conta de uma incorporação definitiva dos algoritmos e regras. É possível que os alunos ainda carreguem alguma dificuldade para o ano seguinte. Trata-se de uma dificuldade natural e foi detectada em estudos realizados em vários países".

Finalmente, vejamos a metodologia empregada por FC. Com a operação $3 \times (– 50)$ é resolvido um problema, no qual se pede o total retirado por uma pessoa que fez três retiradas sucessivas de R$ 50,00 em um banco. Outro problema análogo é proposto, com duas retiradas de R$ 100,00. Em seguida utiliza retas graduadas para atividades (propostas e resolvidas), sempre com cálculos do tipo $(+a) \times (–b)$ e $(+a) \times (+b)$, em que devem ser realizados, a partir da origem, "*a*" percursos de "*b*" unidades cada, para a direta ou para a esquerda, conforme o sinal de *b* seja positivo ou negativo. Nota-se que a introdução foi feita com uma situação-problema simples, e em seguida criou-se um modelo geométrico associado à operação. Parece-nos que o mérito maior reside na utilização de duas estratégias, e do estudo de vários exemplos.

Em seguida, o autor toma a comutatividade da multiplicação de inteiros como axioma (sem mencionar a palavra), lembrando ao aluno que esta propriedade é evidente entre os positivos. Depois de solicitar algumas multiplicações nas quais um número positivo é o primeiro fator e um negativo é o segundo, propõe uma série de atividades, que sintetizamos abaixo.

1) Deve-se completar a tabela abaixo, e em seguida responder se há algum tipo de simetria em relação à diagonal, do canto superior esquerdo para o inferior direito. Convém destacar que o assunto simetria foi introduzido na série anterior, e os exemplos não se limitaram às figuras geométricas. Tabelas simétricas já foram vistas pelos estudantes.

×	**+1**	**+2**	**+3**	**+4**	**+5**
– 1	– 1	– 2	– 3		
– 2	– 2	– 4			
– 3	– 3	– 6			
– 4					
– 5					

2) A tabela reproduzida abaixo deve ser completada a partir de algumas informações.

×	**+3**	**+2**	**+1**	**0**	**– 1**	**– 2**	**– 3**
+3	+9	+6	+3	0			
+2	+6	+4	+2	0			
+1	+3	+2	+1	0			
0	0	0	0	0			
– 1							
– 2							
– 3							

O autor chama a atenção do aluno para certas regularidades. Observa que na primeira linha os números decrescem de 3 em 3, da esquerda para a direita; em seguida, completa-a.

+9	+6	+3	0	– 3	– 6	– 9

Faz uma observação análoga sobre a terceira coluna, reproduzida na página seguinte, em os números decrescem de 1 em 1, de cima para baixo.

+3
+2
+1
0
– 1
– 2
– 3

Os comentários poderiam ser omitidos para o preenchimento dessas fileiras, pois a multiplicação entre inteiros com sinais opostos já foi introduzida. Mas reforçam a questão da regularidade, e o autor espera que o aluno utilize esta idéia para completar o quadro nos casos em que dois números negativos são multiplicados. O método aplicado é semelhante ao da tabela de FA, mas sem limitar-se a um caso.

Na terceira atividade pede-se aos estudantes que escrevam as regras de sinal, explicitadas em seguida. Segue-se uma série de exercícios propostos, quase sempre pedindo um produto de inteiros (em FA e FB também encontramos exercícios dessa natureza logo após as regras serem enunciadas). Finalmente, propõe um trabalho a ser realizado em dupla: tentar descobrir algumas propriedades mais na tabela completa; o livro do professor indica que as respostas de cada grupo estão em aberto, mas se espera que seja observada a simetria em relação à mesma diagonal da tabela da atividade 1.

No manual de FC, é feita uma recomendação. Se o professor julgar conveniente, pode “apresentar aos alunos um enfoque matemático”, assim exemplificado:

$(-3) \times 0 = 0$ (o produto é zero, quando um dos fatores é zero)

$(-3) \times ((+4) + (-4)) = 0$ (zero é a soma de dois números opostos)

$(-3) \times (+4) + (-3) \times (-4) = 0$ (distributiva)

$(-12) + ? = 0$

E a frase só pode ser completada corretamente com (+12).

Reforçamos que o autor apresenta essa demonstração somente no manual, deixando o professor com a liberdade para usar, ou não, mais este recurso. Chamamos atenção para o fato de que, se no lugar de 3 e 4 escrevermos *a* e *b*, teremos a prova formal de textos de ensino superior. Deixamos mais alguns comentários a esse respeito para a seção sobre demonstrações.

3.3.3 – Divisibilidade de inteiros.

As três coleções usaram o conceito de operação inversa para concluir que na divisão valem as mesmas regras de sinais da multiplicação. FC aproveitou a ocasião para reforçar a inexistência da divisão por zero. Detiveram-se exclusivamente nas divisões exatas, e usaram o fato de nem toda divisão entre inteiros ser possível para dar significado aos racionais.

Não há nenhum tipo de comentário nas coleções sobre a possibilidade de estender a divisão não exata, usualmente introduzida antes da 5ª série, aos inteiros, e não somente aos naturais. Nenhuma explanação é fornecida que possibilite ao estudante reconhecer que, na divisão entre inteiros, ainda é possível obter quociente e resto únicos. Para que isso seja possível, basta impor condições adicionais sobre o resto, que deve ser menor do que o módulo do divisor, e não pode ser negativo.

Este fato permite observações profundas sobre a preservação de uma propriedade com a ampliação da estrutura. Não estamos criticando os autores por não mencionarem a existência e unicidade do quociente e do resto na divisão de inteiros. Porém, atividades interessantes poderiam ser propostas para alunos de 6º ou 7º série, tendo a divisão como pano de fundo. Na 5º, encontramos exercícios em que se pedem, com o emprego de diferentes tipos de linguagem, naturais q e r satisfazendo $13 = 5.q + r$, com $r < 5$. Não nos parece inviável que agora sejam pedidos inteiros q e r tais que $(-13) = 5.q + r$, $13 = (-5).q + r$, e $(-13) = (-5).q + r$, sempre exigindo $0 \leq r < |5|$. Não se trata de definir a divisão entre inteiros; problemas dessa natureza podem ser úteis na compreensão dos números negativos.

Há um outro aspecto que nos parece grave. Nas três coleções, não há uma discussão sobre o conceito de divisibilidade na nova estrutura algébrica. Conceitos como *mmc, mdc,* ou números primos não foram retomados após a introdução dos inteiros. O estudante simplesmente não tem como saber, por exemplo, que (– 2) é primo, ou que (– 1) não é. Não se trata somente de transmitir ao aluno uma informação; entre outras conseqüências, certos enunciados perdem clareza ou precisão. Citamos um exemplo: no capítulo sobre equações de FC, na 6º série, pede-se, em exercício resolvido, a soma dos “dez primeiros ímpares”. Mas os negativos já foram introduzidos, e a pergunta pode induzir o aluno a acreditar que números negativos não podem ser classificados como pares ou ímpares. O autor de FB comete o mesmo equívoco na 7º série. Os autores de FA, na 8º, mostram maior cuidado ao falar nos “primeiros ímpares naturais”, mas a expressão “ímpares positivos” teria a vantagem de induzir possíveis reflexões sobre a existência dessa propriedade também entre negativos. Destacamos um caso raro, em que fica subentendido que a definição de múltiplo entre naturais também vale para inteiros: em exercício resolvido, no livro da 7ª série de FC, afirma-se que (– 21) é múltiplo de 3, pois pode ser escrito na forma $3 \times (-7)$. Mas pensamos que teria sido melhor explicitar, em algum momento, que a definição é conservada.

Enunciados imprecisos que sugerem a inexistência da divisibilidade entre inteiros, com a introdução dos negativos, representam uma desatenção. Mas nossa crítica maior refere-se a outro aspecto: uma lacuna foi criada no edifício teórico. Quando uma estrutura algébrica é ampliada, é necessário que se verifiquem se antigas propriedades e definições continuam válidas.

A coleção FC é a única a abordar novamente a divisibilidade na 7º série, mas continua atendo-se somente aos naturais. Uma retomada no assunto que inclua os negativos pode apresentar algumas vantagens. Esta releitura pode ser acompanhada de novos problemas, que exijam um grau de maturidade intelectual compatível com o estágio dos educandos. As novas definições de *mmc*, *mdc* e números primos são consistentes com a nova estrutura algébrica, apenas com pequenas alterações. Redefinir um conceito em um novo contexto, preservando propriedades antigas, é um processo comum, porém fundamental, na matemática. Situações em que tal fato ocorre podem permitir ao aluno uma percepção mais nítida dessa ciência, como um corpo organizado de conhecimentos.

3.4 – DEMONSTRAÇÕES E CONJECTURAS.

3.4.1 – Observações gerais.

Uma boa formação matemática não pode ser concretizada sem que os estudantes tenham contato com processos que envolvam conjecturas e provas. Esperamos que nossos alunos tenham discernimento para perceber a diferença entre conclusões apenas aparentemente plausíveis e afirmações já comprovadas. Também se espera que eles sejam capazes de tecer suas próprias conjecturas, testá-las e até mesmo, quando possível, comprová-las. Esperamos, finalmente, que tenham senso crítico para perceber que uma explanação matemática não pode estar completa sem que sejam apresentadas razões que tornem os resultados minimamente aceitáveis, ou, preferencialmente, que tais resultados sejam efetivamente demonstrados, quando eles próprios não tiverem condições de cumprir tal tarefa.

Criar nos alunos, senão o prazer, ao menos o hábito de argumentar, é um dos frutos que a matemática pode ajudar a colher. E as propriedades básicas dos números inteiros têm, ou deveriam ter um papel destacado nessa formação de atitude. Inúmeras afirmações e problemas relacionados com o tema permitem justificativas razoavelmente simples, que podem fortalecer nos estudantes a percepção da necessidade das demonstrações no desenvolvimento matemático.

No ensino fundamental são abordados certos teoremas sobre números inteiros cujas demonstrações podem ser feitas sem o uso de uma linguagem especificamente matemática, o que é uma vantagem adicional; uma simbologia excessivamente carregada pode ser um entrave desnecessário nessa fase. Vimos, por exemplo, que FC recomenda o cálculo mental para a determinação do *mmc* de dois naturais a e b, com $a > b$, relacionando em ordem crescente os múltiplos positivos de a até encontrar um que também seja múltiplo de b. A justificativa deste processo pode ser feita com termos coloquiais. Voltamos a insistir na importância de estender sempre as considerações aos inteiros negativos, e chamamos a atenção para um simples corolário obtido desse método para determinação do *mmc*, que pode ser assim enunciado: se a e b são inteiros tais que $| a | > | b |$, e b divide a, então $mmc\ (a, b) = | a |$. Parece-nos que um aluno do ensino fundamental pode descrever esse resultado, e, mais importante, justificá-lo, sem recorrer à linguagem algébrica.

Uma demonstração matemática pode ser apresentada de várias formas. Um julgamento sobre a validação do resultado obtido, em função da forma escolhida, não pode desconsiderar a maturidade do público que se espera convencer. Acreditamos que provas apresentadas nos ensinos fundamental e médio não carecem do rigor formal que caracteriza a matemática em estágios mais avançados. Isto não significa que estejamos dispensados de cuidados com a lógica empregada. Vejamos um exemplo.

Conforme relatamos em 3.3.2, para mostrar que (– 3) × (– 4) = (+12), o autor de FC sugere, no manual do livro da 6º serie, os mesmos passos da prova encontrada em textos de álgebra para ensino superior para *(– a).(– b) = (+ab).* Nesse último caso, a generalidade do resultado é obtida com fatos anteriormente demonstrados, ou inicialmente tomados como axiomas: se um dos fatores é zero o produto também é zero; a soma de dois opostos é zero; a lei distributiva. Para um aluno do ensino fundamental as mesmas três propriedades podem ser plausíveis, por razões diferentes. Vimos que os três autores usam recursos variados para conferir credibilidade a elas, tais como atividades com papel quadriculado, no caso da distributiva, ou estudo de situações concretas para a soma de opostos. Mas tanto para o aluno da 6º série, como para o estudante de álgebra do ensino superior, a questão essencial é que os argumentos usados na demonstração sejam previamente aceitos como verdadeiros.

Também não podemos perder de vista que em FC é demonstrado um caso particular, estratégia utilizada pelos três autores em diversos momentos ao longo das coleções. Trata-se de uma metodologia válida para esse estágio de ensino, mas também requer certos cuidados; não se pode criar nos alunos a falsa impressão de que exemplos são suficientes para que aceitemos uma conjectura. Criticamos FA e FB em seção anterior por terem analisado poucos casos, eventualmente apenas um, para deduzir cada uma das regras de sinais na multiplicação de dois inteiros. Tal inconveniente pode ser percebido em outras ocasiões, principalmente em FA. Esclarecemos que, em nossa opinião, um número reduzido de exemplos utilizados para sustentar uma afirmação não implica necessariamente numa argumentação incompleta. Qualquer que seja a quantidade de casos estudados, é preciso salientar o caráter geral do processo adotado.

Como exemplo, recordamos que na situação específica da multiplicação de dois negativos, o ideal seria, talvez, que os próprios alunos efetuassem algumas multiplicações usando um método que lhes pareça aceitável. Caberia, então, ao professor, não somente incentivá-los a expressar suas suspeitas em relação à regra dos sinais, antes que ela seja explicitada, como também estimulá-los a encontrar razões suficientemente fortes para apoiar a tese.

Para estágios mais avançados de aprendizagem, a linguagem algébrica pode fornecer essas razões. A compreensão da generalidade obtida quando usamos uma letra para representar um inteiro qualquer depende de um nível de maturidade que não pode ser esperada de estudantes das séries iniciais do ensino fundamental. O que não significa que estejamos desobrigados de apresentar motivos convincentes para as afirmações.

3.4.2 – Propriedades operatórias da potenciação.

Para exemplificar certas diferenças de postura de cada autor em relação às demonstrações, descreveremos as seqüências adotadas por eles para justificar propriedades operatórias da potenciação. O tema oferece bom material para discussão por mais de um aspecto. As propriedades podem ser facilmente verificadas em casos particulares, que auxiliam a dedução das generalizações. As definições para os expoentes 0 e (– 1) foram estabelecidas para que as propriedades fossem preservadas, o que, nos parece, deve ser explicitado para os alunos. Não somente por ser o correto, mas porque permite uma visão mais profunda do desenvolvimento matemático.

Em FA a potenciação é introduzida na 5ª série, e as propriedades na 6ª, inicialmente para expoentes naturais. Cada caso é apresentado com dois exemplos, sem justificativas. O aluno é apenas informado que $5^3 . 5^6 = 5^{3+6} = 5^9$, sem que a contagem dos fatores seja exibida. Também na 6ª série, introduz os expoentes inteiros negativos. Inicialmente, aplica a já estudada propriedade da divisão de potências de mesma base para escrever $10^2 \div 10^3 = 10^{2-3} = 10^{-1}$; em seguida considera a fração $10^2 / 10^3$, e como $(10 \times 10) / (10 \times 10 \times 10) = 1/10$; conclui que $10^{-1} = 1/10$; finalmente, afirma que para todo racional $a \neq 0$, $a^{-1} = 1/a$. A generalização é feita a partir de um só caso, e note que uma propriedade apresentada em um contexto (expoentes naturais) foi tomada livremente em outro. O aluno também não é informado que se trata de uma definição, como já havia ocorrido na 5ª série, com a afirmação que, para todo $a \neq 0$, vale $a^0 = 1$. Na 8ª série, considera um caso particular, calculando $2^5 \div 2^5 = 32 \div 32 = 1$, e em seguida escreve $2^{5-5} = 2^0$, concluindo que a afirmação geral enunciada na 5º série é, de fato, válida. Parece-nos discutível a opção de tornar conhecido um fato, e somente após um longo período de tempo propiciar aos estudantes uma discussão sobre sua veracidade. As propriedades operatórias com expoentes inteiros são apresentadas na 8ª série; o aluno é inicialmente informado que são preservadas as propriedades conhecidas para expoentes positivos; a quantidade de exemplos aumenta em decorrência das possíveis variações de sinais da base e do expoente, e novamente não há justificativas.

Em FB a potenciação com os naturais e suas propriedades são introduzidas na 5º série. Cada caso é apresentado com três exemplos, sendo que os dois primeiros casos particulares são demonstrados, e no último a regra é aplicada diretamente. A abordagem sobre expoentes nulos é anterior, e se inicia com a frase "os matemáticos inventaram uma regra especial para a^0. Decidiram estabelecer que $a^0 = 1$". A colocação está correta, mas para o aluno poderia haver nela uma certa artificialidade. O problema é sanado pelo autor com a afirmação: "deste modo, as regras sobre potências, que vocês vão estudar neste capítulo, continuam válidas". A frase não é esclarecida logo a seguir, porém sua releitura será útil após alguns exercícios propostos mais adiante; o aluno deve resolver operações como $7^4 \div 7^4$ depois que as propriedades operatórias foram apresentadas. Já foi afirmado que $a^m \div a^n = a^{m-n}$, mas somente quando $m > n$; mas a resposta obtida pela definição de potência é 1, o que está de acordo com a definição feita no caso do expoente zero. Temos então um exemplo de preservação de uma propriedade em decorrência da regra imposta. A coleção aborda a questão sob este ponto de vista novamente, na 7ª série. Ocorre então uma discussão detalhada sobre a importância de se atribuir às potências de expoente zero um valor que seja coerente com as propriedades conhecidas. A conclusão final é que "para qualquer racional *a*, $a^0 = 1$", Não é mencionado que devemos ter $a \neq 0$, ao contrário do que foi feito na 5ª série. Expoentes inteiros negativos são introduzidos posteriormente, ainda na 7ª série. Os alunos são alertados previamente que a definição será, mais uma vez, criada de tal modo que as propriedades já conhecidas sejam preservadas. Dessa forma, quando admite $2^2 \div 2^3 = 2^{-1}$, o autor não está simplesmente utilizando um fato que sabíamos verdadeiro no contexto anterior, quando todos os expoentes eram naturais. Parece-nos que o caráter estrutural da matemática fica mais evidente com tal seqüência.

Um dos méritos da seqüência adotada pelo autor de FC é possibilitar ao estudante fazer inferências antes que as conclusões sejam explicitadas no livro. A potenciação é introduzida na 5ª série, e suas propriedades operatórias são inicialmente sugeridas em exercícios propostos, o que irá se repetir na 6ª série. Somente na 7ª é feita a introdução formal. Exemplos das propriedades com expoentes naturais são apresentados, e em seguida alguns exercícios similares são propostos. As regras gerais não são apresentadas antes dos casos particulares, nem imediatamente depois. Pede-se ao aluno que faça uma conjectura sobre qual o processo “mais rápido e prático”, e só então a generalização é feita. Tal metodologia é de uso corrente na coleção FC, e pode estimular uma atitude menos passiva no que se refere às demonstrações, que muitas vezes podem ser feitas pelos próprios estudantes. Outra estratégia usual do autor é encerrar as listas de exercícios com generalizações usando a notação algébrica. Nesse caso, os estudantes devem completar frases como $a^n. a^m = ?$, em que a é racional e m,n são naturais. Não há menção às potências de expoente zero antes da 7ª série. O assunto é introduzido com uma atividade em que são calculados 5^4, 5^3, 5^2, 5^1 e 5^0. Os quatros primeiros são obtidos pela definição, e o último pela observação de um padrão: cada termo da seqüência, a partir do segundo, é igual ao quociente do anterior por 5. Em seguida, pede-se ao aluno que faça as mesmas operações em outros três casos, com alterações somente na base, inclusive de sinal. Uma advertência é feita a seguir: seqüências desse tipo podem ser construídas com qualquer número na base, exceto o zero. Antes de fazer mais alguns exercícios, agora somente com expoente zero, o aluno é incitado a escrever sua conjectura, e só então o autor afirma que $x^0 = 1$, para todo $x \neq 0$. Essas atividades são anteriores ao estudo das propriedades. Depois que elas são introduzidas, é dada uma nova justificativa para $a^0 = 1$, $a \neq 0$. Se n é um natural qualquer, então $a^n \div a^n = 1$, mas $a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0$. Os expoentes inteiros negativos são enfocados logo a seguir. A introdução é feita com atividades similares à que foi utilizada no caso do expoente zero, observando o padrão de seqüências como 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, para obter 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}. Novamente o aluno é solicitado a escrever sua conjectura depois de exercícios propostos e antes da definição. A preservação das propriedades é afirmada com a análise de casos nos quais a base não nula é genérica, mas os expoentes são conhecidos. Por exemplo, $a^2 \div a^4 = a^{-2}$ e $(a^{-2})^3 = a^{-6}$. É importante salientar que é feita a distinção entre definições (expoentes 0 e – 1) e conseqüências.

Muitos recursos que julgamos essenciais nos ensinos fundamental e médio podem ser verificados nessa metodologia: estimular os alunos a conjecturar, e em certos casos, demonstrar; evitar a limitação de um só exemplo para enunciar uma generalização; bom estudo de casos particulares; estender definições anteriores apresentando justificativas compreensíveis ao aluno; uso de mais de uma estratégia na abordagem; introduzir progressivamente a linguagem simbólica.

3.4.3 – Rever e aprofundar.

Demonstrações no ensino fundamental não devem, em geral, obedecer ao rigor estabelecido na matemática. Isso pode ser compensado com o aproveitamento de recursos como argumentações adequadas sobre casos particulares, desenhos, observação de regularidades, tabelas. Quando possível, o ideal é que se recorra a mais de uma estratégia. A linguagem algébrica é, em geral, uma ferramenta indispensável para provas irrefutáveis, e deve ser introduzida de forma bem dosada. Pensamos que numa formação ideal, os alunos, ao concluírem o ensino médio, não deveriam sentir maiores embaraços com as notações usuais da matemática.

No que diz respeito aos comentários do parágrafo anterior, uma situação de grande potencial é a retomada de conceitos das séries anteriores. Além do aprofundamento do tema e do estudo de problemas mais sofisticados, outra vantagem é a possibilidade de apresentar formas mais elaboradas de demonstrações de teoremas conhecidos, com a adoção de uma linguagem propícia para generalizações. Defendemos a importância de um currículo em espiral, de acordo com o estabelecido por Bruner, por propiciar abordagens dessa natureza. Vejamos alguns exemplos:

Em FC, a seqüência dos pares que não são múltiplos de 4 recebe atenção na 5º série, e na 7º estes números são descritos na forma $4n + 2$. Em FB, na 5º série discute-se a paridade da soma e do produto de dois naturais cuja paridade é conhecida, e as demonstrações formais são feitas na 7ª, no mesmo capítulo em que encontra-se a prova para a propriedade envolvendo números triangulares e quadrados, $T_n + T_{n+1} = Q_n$. Algumas dessas provas poderiam ser propostas para os alunos; entretanto, as listas de exercícios desse capítulo são mais voltadas para a fixação. Destacamos, no entanto, um bom problema em que é aplicado um produto notável: mostre que o sucessor do produto de dois pares (ou ímpares) consecutivos é um quadrado perfeito.

O conteúdo que recebeu maior atenção em nossa análise é o da divisibilidade. A abordagem das coleções sobre o assunto foi comentada na seção 3.2. Gostaríamos de reforçar algumas considerações sobre o papel das demonstrações no enfoque dado em FA. Criticamos a ausência de qualquer tipo de justificativa para alguns critérios de divisibilidade, dos algoritmos para determinação do *mmc* e do *mdc*, do método para decidir se um número é primo. No manual, o autor faz boas sugestões de atividades que podem compensar essa falha, mas no nosso entendimento elas deveriam constar no livro do aluno. De modo geral, um livro didático deve permitir um certo grau de liberdade ao professor, para que ele enfatize ou releve certos fatos conforme as especificidades de seu trabalho e as dificuldades apresentadas pelos educandos. Mas o livro não pode deixar lacunas em excesso, esperando que o professor preencha a maioria. Os manuais de FA, nos quatro volumes, são de muito boa qualidade, mas o ideal seria que boa parte do material neles contido estivesse no exemplar do aluno. Já comentamos também que foi feita uma boa prova para o critério de divisibilidade por 9 no livro da 7º série. Isto foi feito na seção "troque idéias com os colegas". Inicialmente, o número 4725 é decomposto em várias passagens até que se obtenha $9 \times (4 \times 111 + 7 \times 11 + 2) + (4 + 7 + 2 + 5)$, e os autores afirmam:" a primeira parcela é um múltiplo de 9; então, dizer que 4725 é divisível por 9 equivale a dizer que a segunda parcela também o é". Em seguida faz-se a prova para um número qualquer de quatro algarismos, da forma *abcd;* como sua decomposição resulta em $9 \times (111a + 11b + c) + (a + b + c + d)$, conclui-se que todo número inteiro de quatro algarismos é divisível por 9 se a soma de seus algarismos for divisível por 9. Finalmente, solicita-se ao aluno que demonstre que se $x + y$ é divisível por 9, o número de dois algarismos *xy* também é. A atividade é enriquecedora, e nossa crítica não se refere ao fato de que o aluno tome contato tardiamente com a justificativa. Criticamos que na apresentação do critério não tenha sido sequer comentado que tal justificativa existe.

A exposição do assunto divisibilidade nos naturais, por parte de FB e, principalmente, FC, nos pareceu adequada no que se refere às demonstrações, conforme relatamos em 3.2. Entretanto, voltamos a insistir na relevância do currículo em espiral e de uma abordagem do tema no contexto dos inteiros. Ela permitiria, inclusive, a releitura de alguns teoremas, utilizando provas compatíveis com a evolução dos estudantes desde a 5ª série, quando fizeram seus primeiros estudos sobre a divisibilidade. Citamos alguns casos abaixo:

- *a* é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é divisível por 3.

- Se *a* divide *b*, e *b* divide *c*, então *a* divide *c*.

- Se *c* divide *a*, e *c* divide *b*, então *c* divide (*a* + *b*).

- Se *c* divide *a* e *c* divide (*a* + *b*), então *c* divide *b*.

- Se *p* é primo e *a* não tem fatores primos positivos menores do que | *p* |, então *a* não tem divisores positivos compostos menores do que | *a* |.

• Se *p* é um primo tal que $p^2 > | a |$, e *a* não tem fatores primos positivos menores do que $| p |$, então *a* é primo.

• Se $d = mdc(a,b)$, $a = d.x$ e $b = d.y$, então $mdc(x,y) = 1$.

• Se $d = mdc(a,b)$ e $m = mmc(a,b)$ então $d.m = |a|.|b|$.

Acreditamos que essas afirmações poderiam ser novamente estudadas, não apenas para verificar a sua preservação após a estrutura algébrica ter sido ampliada com a introdução dos negativos. Provas mais consistentes poderiam ser acrescentadas, não com o rigor formal exigido de um estudante de álgebra, mas com um caráter mais geral. Além disso, a retomada do assunto também possibilitaria o estudo de novos teoremas sobre inteiros, que não são sequer mencionados.

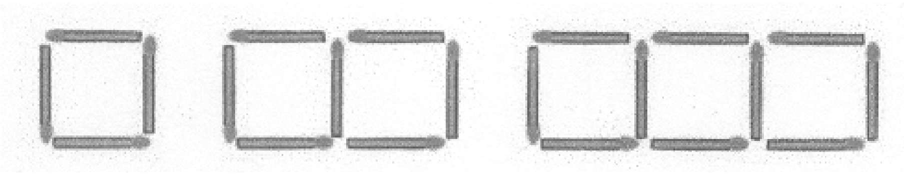
3.4.4 – Observações dos autores sobre demonstrações.

As três coleções dedicam algumas palavras à importância das conjecturas e das demonstrações em uma abordagem matemática. Em FA isto é feito em conexão com a geometria. Em FB lemos: “A teoria dos números é um dos campos mais férteis para explorar regularidades e fazer conjecturas”. A frase foi extraída do manual do professor, 5º série; vejamos algumas considerações sobre provas e conjeturas feitas pelo mesmo autor diretamente aos alunos, e suas relações com os inteiros.

No livro da 7ª série da coleção FB encontramos um capítulo denominado “A arte de argumentar”. Trata-se do único capítulo dedicado especificamente ao assunto nas três coleções. Apresenta vários problemas de lógica, e pode ser interpretado como uma preparação para o capítulo imediatamente posterior: “Demonstrações em geometria”. Em "A arte de argumentar" não encontramos problemas diretamente relacionados a números inteiros. Entretanto, ao final do capítulo sobre demonstrações em geometria, são descritos dois problemas clássicos da teoria dos números, para exemplificar casos de conjecturas ainda não demonstradas e teoremas de enorme complexidade, apesar da simplicidade aparente em seu enunciado. Descreve a conjectura de Goldbach, um dos mais célebres problemas em aberto da matemática: todo número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois primos. Em seguida, enuncia o chamado Teorema de Fermat, que garante que não existem inteiros não nulos *a, b, c* tais que $a^n = b^n + c^n$, com *n* inteiro maior do que 2; menciona o inglês Andrew Willes, que demonstrou o teorema em 1994, mais de três séculos depois da conjectura ser explicitada. No livro da 5º série, no capítulo sobre números primos, FB já havia citado a conjectura de Goldbach; propôs, então, que os alunos verificassem se a proposição é verdadeira para os pares até 100. Parece-nos uma boa forma de discutir a limitação do estudo de casos particulares.

No livro da 7º série, FB também faz comentários apropriados sobre conjecturas e provas, relacionando-as com inteiros. No capítulo sobre variáveis, faz boas conexões com geometria, e salienta a importância de testar certas fórmulas obtidas com o auxílio de desenhos. Vejamos um exemplo. Um quadrado é construído com 4 palitos; outro quadrado é formado usando um lado do primeiro; em seguida acrescentamos um novo quadrado adjacente ao segundo, conforme a figura 6, que reproduz a ilustração do livro.

Figura 6



Deve-se determinar a quantidade p_n de palitos em função da quantidade n de quadrados; da expressão $p_{n+1} = p_n + 3$, para $n > 1$, com $p_1 = 4$, usando indução informal sobre alguns termos, obtém $p_n = 4 + (n - 1).\ 3$. A indução, usada de uma forma primária, é outro recurso que pode ser aproveitado para tornar certas proposições aceitáveis no ensino fundamental e no médio. Mas o autor chama corretamente atenção para o risco de uma inferência falsa com tal método. Reflexões dessa natureza motivam, em seu texto, a demonstração algumas propriedades sobre números figurados vistas na 5º série, e obtidas por indução sobre alguns termos.

Ainda no livro da 7º série de FB, em um capítulo sobre álgebra, o autor discorre sobre o uso da linguagem algébrica para obter generalizações. A conseqüência é a já mencionada série de demonstrações sobre a paridade da soma e do produto de inteiros, e, novamente, números figurados. Também nesse capítulo, o aluno é desafiado a encontrar o erro na seguinte “prova” para 1 = 2. Considere $x = y = 1$; como $1^2 - 1 \times 1 = 1^2 - 1^2$ temos que $x^2 - xy = x^2 - y^2$, *portanto*

x. $(x - y) = (x + y).(x - y)$, e dividindo os dois lados da equação por $(x - y)$ obtemos $x = x + y$, logo 1 = 1 + 1, e assim 1 = 2.

As principais discussões promovidas em FC sobre demonstrações e sua relação com os inteiros também podem ser encontradas no livro da 7º série, no capítulo sobre divisibilidade e também nas abordagens sobre álgebra.

Na parte dedicada à divisibilidade, um exercício proposto pede uma investigação: se n é primo, $2n + 1$ também é? Se o aluno fizer n assumir os valores dos primos na seqüência crescente, observará que a afirmação é verdadeira para n = 2, 3 e 5, mas é falsa para n = 7. O livro do professor recomenda que se chame a atenção dos alunos para o "perigo de verificar a veracidade para alguns casos e concluir a partir disso que a afirmação é verdadeira". Outro problema de investigação foi dividido em dois itens. No primeiro, deve-se verificar se entre um natural maior do 1 e seu dobro há pelo menos um primo, fazendo alguns testes com números escolhidos aleatoriamente. O exercício é ilustrado com um exemplo, em que se constata que a validade para 23, pois entre este e 46 existem cinco primos. O livro do professor traz a mesma advertência do problema anterior, porém com maior veemência: "Deixe claro para os alunos que verificar que dá certo para alguns casos não é provar. Isso permite apenas conjecturar que pode ser sempre verdadeiro. Veremos o que é provar posteriormente". A última frase é uma referência à discussão encontrada posteriormente nos capítulos sobre álgebra. O segundo item desse exercício pede que se verifique se os pares até 30 podem ser decompostos na soma de dois primos. Logo abaixo lemos que essa é a conjectura de Goldbach, formulada em 1742, e que ainda não sabemos se é verdadeira para todos os pares. Na atividade seguinte solicita-se, apenas, que um dicionário seja consultado para descobrir o significado da palavra “conjecturar”. Investigações dessa natureza são outra constante na coleção FC.

A mesma razão motivou os autores de FB e FC a redigirem comentários a respeito das demonstrações nos capítulos sobre álgebra: o poder de generalização da nova linguagem. Ambos explicitam o fato para o leitor. Logo após a observação, o autor de FC volta a chamar atenção para o risco de conclusões precipitadas devido à análise de casos particulares. Recorre novamente a um exemplo, usando uma expressão bem conhecida da história da matemática. Supondo $p = n^2 + n + 41$, a questão é saber se p é primo para todo n natural. O aluno deve fazer os cálculos para $n = 0, 1, 2, 3$, 4 e 5. Em seguida é informado que p é primo sempre que $n \leq 39$. Finalmente, mostra que se $n = 40$, então $p = 1681 = 41^2$.

Já vimos que em FC podem ser encontrados bons problemas com inteiros, nos quais argumentações consistentes são necessárias. Atividades em que os estudantes devem decidir se uma afirmação é verdadeira ou falsa devem ser respondidas, em geral, com justificativas. Em alguns casos, um exemplo, ou um contra-exemplo, é suficiente. Por exemplo, no livro da 6º série, há um exercício proposto em que *a, b, c, d* são naturais não nulos distintos tais que $a + b + c < d$. O aluno deve responder se é possível $d = 10$ ou 6, e apresentar justificativas. No primeiro caso, basta exibir uma solução para mostrar que a frase é verdadeira. No segundo, espera-se que o aluno esclareça os motivos pelos quais ela é falsa. Exercícios com esse caráter evidenciam as diferenças entre situações nas quais um exemplo é suficiente para que se estabeleça uma conclusão, e aqueles em que é necessária uma justificativa mais refinada.

Destacamos ainda alguns exercícios em FC, nos capítulos sobre álgebra da 7º série. São eles:

- Provar que a soma de três inteiros consecutivos é um múltiplo de 3 (é feita uma sugestão: representar esses números por $n - 1$, n e $n + 1$).

- Provar que a soma de cinco inteiros consecutivos é um múltiplo de 5 (mais uma vez, com a sugestão: usar $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$).

- Provar que a soma de dois inteiros consecutivos é igual à diferença de seus quadrados.

- Provar que a soma de dois pares é par (resolvido) e que a soma de dois ímpares é par (proposto).

- Provar que o produto de dois ímpares é ímpar (resolvido) e que o produto de dois pares é par (proposto).

3.5 – OUTRAS ARTICULAÇOES COM ÁLGEBRA.

3.5.1 – Equações.

3.5.1.1 – Equações de 1º grau.

Os três autores destacaram adequadamente o fechamento da subtração entre os inteiros, o que não acontecia entre os naturais. Analogamente, todos chamaram atenção para a mesma propriedade na divisão, inexistente entre os inteiros, mas válida para os racionais, salientando a exceção do caso em que o divisor é zero.

São conseqüências desses fatos que nem toda equação do tipo $x + a = b$, com a e b naturais, tem solução natural, e que nem toda equação do tipo $a.x = b$, com a e b inteiros, tem solução inteira. O último caso nos interessa particularmente, por sua conexão com a divisibilidade.

A abordagem inicial dos três autores sobre as equações acontece na 6ª série. Em FA e FC ela é posterior à introdução dos negativos com suas operações. O autor de FB optou por fazer uma primeira exposição sobre o tema equações antes de enfocar a multiplicação e a divisão. No início da 7ª série retomou-o, em um capítulo denominado "a linguagem da matemática". Nas três coleções enfatizou-se a impossibilidade de resolver certas equações de primeiro grau se restrições são impostas sobre a incógnita, em particular se o valor procurado deve ser natural ou inteiro. Mas notamos uma carência de exemplos nos quais possamos verificar efetivamente a ausência de solução como decorrência de alguma restrição do gênero.

Em FA o aspecto teórico é privilegiado, e o autor usa o conceito de conjunto-universo. Nos exemplos e exercícios em que se recai no caso $a.x = b$, com $a \neq 0$, o universo considerado é o dos racionais até a 7ª série, e o dos reais a partir da 8ª, e assim chega-se sempre a uma solução. Nessa coleção, mesmo nas situações-problema em que o contexto exige que a solução seja um número inteiro, não observamos casos sem solução por obtermos $a.x = b$, com b não divisível por a.

Situações-problema nos parecem mais indicadas para se evitar uma dose de artificialidade. Se o aluno deve resolver, por exemplo, $3.x = 10$, e o conjunto-universo é o dos inteiros, pode ficar com a impressão que não existe solução por um capricho do livro ou do professor. Mas se deve descobrir uma quantidade de pessoas ou objetos, a mesma equação exige interpretação; talvez a resposta procurada necessite de uma adaptação, como um arredondamento, por exemplo, ou talvez ela simplesmente não exista.

Nas coleções FB e FC, as situações-problema são mais freqüentes. Em FB o já mencionado capítulo sobre linguagem matemática, 7º série, é ilustrado com dois interessantes exemplos resolvidos. Em ambos, o processo utilizado é, aparentemente, correto. Mas a análise do resultado encontrado mostra discrepâncias, consideradas as informações do enunciado. No primeiro, devemos encontrar três números pares consecutivos cuja soma seja 57. Do enunciado, conclui-se que $3x + 6 = 57$, sendo x o primeiro par da seqüência, e assim obtemos

17, 19 e 21. Obviamente essa não pode ser a solução, pois os números obtidos são ímpares. O autor faz a releitura do problema, e constata que, de fato, ele não pode ser resolvido, pois a soma de três pares não resulta em um ímpar.

No segundo, pede-se um natural cujo triplo, adicionado ao seu antecessor, resulta no seu dobro. A equação correspondente é $3x + (x - 1) = 2x$, logo $x = 1/2$. É feita uma verificação, com x sendo substituído pelo valor encontrado nos dois membros da equação, o que produz uma igualdade, mas evidentemente o problema não tem solução. Uma observação feliz conclui o caso: não poderíamos apenas trocar a palavra “natural” do enunciado por “racional”, pois números dessa classe não têm antecessores.

Está implícita a questão da divisibilidade nos dois problemas. A argumentação usada no primeiro caso deixa o fato mais evidente; o problema poderia ser explorado em outra direção da seguinte forma: três pares consecutivos podem ser escritos como $2a$, $2a + 2$ e $2a + 4$; a soma dos três deve ser 57, logo $6a + 6 = 57 \Rightarrow 6a = 51$, mas a é inteiro e 51 não é múltiplo de 6.

Entretanto, não encontramos, em FB, problemas propostos ao aluno com o mesmo tipo de conclusão. Situação semelhante ocorre em FC, embora essa coleção se destaque pela variedade de problemas, em outros campos, com nenhuma, ou várias soluções.

O autor de FC também é particularmente feliz nas conexões com a geometria. No livro da 8º série, por exemplo, propõe, como desafio, que sejam encontradas ternas pitagóricas a partir de alguns exemplos. Mas problemas de geometria também não foram aproveitados para se rejeitar soluções devido à ausência da divisibilidade. No livro da 7º série, introduz a fórmula para calcular a medida α do ângulo interno de um polígono regular de n lados, $\alpha = 180.(n - 2) / n$. Propõe exercícios em que α é dado e n é a incógnita; como $n\alpha = 180n - 360$, temos que $n = 360 / (180 - \alpha)$, logo se α é inteiro, mas $(180 - \alpha)$ não divide 360, a conclusão é que não existe um polígono regular cuja medida do ângulo interno é α. Nenhum dos exercícios tem esse desfecho.

3.5.1.2 – Sistemas lineares.

Sistemas de equações são introduzidos na 7º série pelos três autores. Novamente nos defrontamos com várias situações-problema cujo contexto exige raízes inteiras, mas nenhuma insolúvel em face dessa limitação.

Também não notamos casos com mais de uma resposta, mas numa quantidade finita, como conseqüência do contexto impor soluções inteiras, dentro de determinados intervalos. Problemas assim se caracterizam, em geral, por uma quantidade de equações menor do que a de incógnitas. As três coleções enfatizaram sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, mas existe um repertório considerável de problemas que fogem desta categoria e podem ser aproveitados em sala de aula.

Citamos aqui um exemplo extraído de *O livro dos desafios* de Charles Barry Townsead, que contém problemas, charadas, enigmas. Pertence a um gênero de literatura que se destina ao lazer, mas que pode fornecer um rico material para uso em sala de aula. No caso em apreço, até a infelicidade do julgamento do autor pode motivar reflexões necessárias.

Um zoológico tem gorilas, chimpanzés e lêmures, num total de cem macacos, que devem ser alimentados com cem bananas. Cada gorila come três bananas, cada chimpanzé come duas e cada lêmure come meia banana. Quantos macacos de cada tipo há nesse zoológico?

Sejam *G, C* e *L* as quantidades de gorilas, chimpanzés e lêmures, respectivamente. As equações do sistema correspondente são: $G + C + L = 100$, e $6G + 4C + L = 200$. Mas, além disso, devemos ter $G < 34$, $C < 50$ e $L < 100$. Das duas equações acima obtemos $5G + 3C = 100$, logo $3C = 5. (20 - G)$, e agora as restrições são maiores: $G < 20$ e $(20 - G)$ é múltiplo de 3. Tais hipóteses obrigam $G = 2, 5, 8, 11, 14$ e 17; para cada uma dessas opções, os valores obtidos para *L* e *M* satisfazem as exigências do problema, que tem, portanto, seis soluções distintas. Infelizmente, o livro fornece somente uma, sem justificativas. O leitor pode encontrar uma resposta diferente, por tentativa e erro; mas poderá encontrar a mesma, e talvez não perceba a negligência do autor. Gostaríamos de apreciar mais problemas com esse caráter em nossos livros didáticos, mas, evidentemente, com as respostas corretas. O método da tentativa e erro é adequado em várias circunstâncias, e pode até ser encorajado; mas problemas com mais de uma solução têm um papel importante: são fundamentais para se discutir o alcance da estratégia.

3.5.1.3 – Equações de 2º grau.

O estudo das equações de segundo grau é feito na 8ª série, nas três coleções. Novamente temos diversas situações-problema entre os exercícios propostos; ocorrem alguns poucos casos sem solução porque o contexto exige raízes reais, e o discriminante Δ é negativo. Em alguns problemas um dos valores obtidos é descartado por ser negativo, mas nenhum em que o descarte ocorra por serem as soluções racionais não inteiros. Poderíamos ter verificado tal situação, por exemplo, quando se pede a quantidade de lados de um polígono cujo número de diagonais é conhecido. Mas todas as equações correspondentes aos casos dessa natureza fornecem uma raiz positiva inteira e outra negativa.

Mais interessante é o caso da pesquisa de soluções inteiras em equações cujos coeficientes também são inteiros, usando a soma e o produto das raízes. A coleção que faz uma análise mais completa desse recurso é FC. Em sua resolução, o autor utiliza, sem mencionar explicitamente, a decomposição em fatores primos de p, quando $x^2 - sx + p = 0$, priorizando números que podem ser decompostos mentalmente com facilidade; considerações sobre o sinal de s e p são utilizadas. Vejamos um exemplo resolvido: na equação $x^2 - 2x - 8 = 0$, observa-se que as raízes têm sinais diferentes, pois seu produto (–8) é negativo, e a de maior valor absoluto é a positiva, pois a soma (+2) das duas é positiva; as possibilidades são (+8) e (– 1), ou então (+ 4) e (– 2), que é a correta. Foi a não mencionada fatoração em primos que permitiu concluir que as únicas multiplicações de dois naturais que resultam em 8 são 2×4 e 1×8; assim obtivemos as únicas multiplicações de inteiros que resultam em (– 8). Faltaram, talvez, casos em que a fatoração explicitada de p traz vantagens, devido a uma maior quantidade de possibilidades. Também não encontramos contra-exemplos, isto é, pesquisas que revelem a inexistência de raízes inteiras.

Em FA e FB não encontramos esse tipo de estratégia. A soma e o produto das raízes são relacionados com os coeficientes apenas em exercícios em que se pede ao aluno que escreva a equação, conhecidas suas soluções, ou para determinar dois números cuja soma e cujo produto são dados, através da equação. Nesse último caso, mencionamos dois exercícios propostos em FB que poderiam ser resolvidos pelo método da pesquisa das raízes inteiras. No primeiro, a soma é 60 e o produto 611, cuja fatoração em primos fornece 13×47; e como $13 + 47 = 60$, o problema está resolvido. No segundo, o produto é (– 25) e a soma é 0, e como 25 é o quadrado do primo 5*,* é imediato que os números procurados são (+ 5) e (– 5). Em suma, não foi convenientemente aproveitada a ocasião para explicitar o caráter de ferramenta, segundo a concepção de Robert, para o Teorema Fundamental da Álgebra.

3.5.2 – Conjuntos numéricos.

3.5.2.1 – Primeiras definições de números racionais.

Comentamos em seção anterior que a ampliação de uma estrutura algébrica, como ocorre na introdução dos negativos, exige atenção redobrada por parte do professor, especialmente na verificação das propriedades que são preservadas e das que deixam de ser válidas. Processos semelhantes são necessários com a apresentação dos números racionais e reais. Evidentemente os números inteiros têm um papel essencial no estudo desses conceitos, que estão entre os mais importantes na formação matemática dos ensinos fundamental e médio.

O primeiro capítulo da 7ª série de FA introduz os números irracionais e os reais, a partir de uma revisão dos racionais. O livro de FB da 8ª série se inicia com uma revisão dos naturais, inteiros e racionais, para então introduzir os reais. Em FC encontramos o mesmo desenvolvimento, também no início da 8ª, com pelo menos uma diferença marcante: os irracionais são definidos na 7ª. Nota-se que os três optaram por um modelo similar, enfatizando a formação de novas estruturas algébricas com base em outras conhecidas. Nosso objetivo principal nesta seção é a análise dos três capítulos mencionados acima, que chamaremos de "conjuntos numéricos", embora não tenha sido exatamente essa a nomenclatura adotada pelos autores. Antes de nos dedicarmos à comparação entre os textos, destacamos algumas diferenças observadas nos livros que antecedem tais capítulos, em cada coleção.

As primeiras definições de número racional podem ser encontradas na 5ª série, em FA, e na 6ª em FB. As duas coleções não mencionam os irracionais antes do capítulo sobre conjuntos numéricos. O autor de FC definiu os racionais somente na 7ª; mas logo em seguida introduz os irracionais; duas escolhas que nos parecem adequadas. Já mencionamos que em FC foram evitadas certas inconsistências entre os conceitos de "fração" e "número racional". Acreditamos que isso se deve, sobretudo, ao fato de ter dispensado certas formalidades. Não vemos vantagem em definir os racionais de forma rigorosa, porém apressada; o que se espera numa primeira etapa é que as frações com numeradores e denominadores inteiros sejam aplicadas de forma conveniente.

Julgamos mais relevante a outra opção do autor de FC mencionada no parágrafo anterior. Em FA e FB, uma classe numérica é explicitada, mas somente após um longo período de tempo o aluno toma conhecimento da existência de números que não pertencem a ela. Corre-se o risco de induzir o aluno a acreditar na superficialidade do termo “racional” para rotular os únicos números que ele conheça até aquele momento. Definir os racionais, e logo em seguida os irracionais, é uma forma de tornar significativas as duas classes, pela oposição entre ambas.

No livro da 7ª série de FC, o leitor é informado que “qualquer número que pode ser escrito como quociente de dois inteiros, sendo o divisor diferente de zero, é chamado de número racional”.

Basicamente o mesmo texto pode ser lido no livro de FA da 6ª série. Seus autores, na 5ª, afirmam que “a expressão *a/b*, sendo *a* e *b* números naturais, com $b \neq 0$, é chamada de fração e representa um número racional escrito na forma fracionária”. Note o emprego parcial da linguagem algébrica. Uma característica dessa coleção é o uso mais acentuado do simbolismo; exemplo disso é a utilização da linguagem dos conjuntos desde a 5ª série. Sua definição de número racional na 6ª é enunciada exclusivamente com a língua portuguesa, como a de FC reproduzida acima, mas logo a seguir reforça a descrição com o uso de símbolos, ao escrever: $Q = \{x \mid x = a/b,$ com $a \in Z,\ b \in Z$ e $b \neq 0\}$. Em FC, notações envolvendo conjuntos são introduzidas somente na 8ª série.

O autor de FB faz pouco uso da notação dos conjuntos nos livros da 6ª e 7ª séries; a linguagem nessa coleção é bem dosada, com o aumento gradativo do uso de símbolos. Entretanto, a primeira definição de número racional observada em FB, na 6ª série, nos parece desajeitada: “A cada fração corresponde uma divisão e vice-versa. O resultado da divisão é chamado de número racional”. Bem mais simples, além de correta, é uma definição dada pelo mesmo autor na 7ª série. A frase “Um número racional é a razão entre dois inteiros” se encontra em meio a um exercício resolvido, com pouco destaque.

3.5.2.2 – Revisão de naturais e inteiros.

Como já observamos, em FA não foi feita a revisão dos números naturais e inteiros no capítulo sobre conjuntos numéricos, ao contrário do que observamos em FB e FC. Nas duas últimas coleções, tais capítulos têm um formato semelhante ao de seções encontradas freqüentemente em livros do ensino médio, usualmente inseridas no início das coleções. Em nosso trabalho, nos capítulos dedicados ao ensino médio, daremos atenção especial a essas abordagens. O objetivo é propiciar ao aluno uma visão nítida do conceito de número real, através de uma retomada dos conjuntos conhecidos, e do estudo das conseqüências da ampliação em cada estrutura algébrica.

Trata-se de uma boa oportunidade para aprofundar os conhecimentos dos estudantes referentes aos inteiros. Parece-nos que a ocasião raramente é bem aproveitada, em particular no que diz respeito à divisibilidade. Foi o que constatamos em FB e FC.

Uma vez que se pretende investigar a preservação de propriedades com a introdução de novas classes numéricas, esse seria um bom momento para observar a consistência de certas definições em *N* e em *Z*, tais como número primo, múltiplos, divisores, *mmc* e *mdc*. Alguns conceitos referentes à divisibilidade foram retomados na revisão dos naturais, mas novamente nenhuma correlação do foi estabelecida entre os inteiros. O aspecto que mereceu maior atenção dos dois autores, com a inclusão dos números negativos, foi o fechamento da subtração, e a conseqüente existência de soluções para toda equação do tipo $x + a = b$. Não estamos discutindo a enorme relevância do fato; apenas lamentamos que os estudantes possam ficar com a falsa impressão de que a divisibilidade diz respeito somente aos naturais.

Destacamos alguns aspectos positivos na revisão de *N*, observados nas duas coleções. Os alunos devem decidir se são verdadeiras ou falsas certas afirmações, entre as quais encontramos os axiomas de Peano, exceto o axioma da indução. Recordamos que em FC a mesma atividade já havia sido proposta na 5 ª série. A segunda exposição do tema ocorre num momento mais apropriado, devido à comparação com os inteiros feita logo a seguir; os autores salientam a inexistência do antecessor do zero no primeiro contexto, e a existência no segundo. Ao comentar as definições de múltiplos e divisores, reforçam duas importantes propriedades: a transitiva da divisibilidade e o fechamento da adição entre os múltiplos de um mesmo número. Mas poderiam ter reservado esse enfoque para a revisão de *Z.*

3.5.2.3 – Representação decimal dos racionais e irracionais.

Ao abordar os números racionais nos capítulos sobre conjuntos numéricos, as três coleções priorizaram dois aspectos. O primeiro foi a existência de uma raiz em Q para toda equação do tipo *a.x* = *b*, com $a \neq 0$, o que não se verifica em *Z*. Comentamos o estudo dessas equações anteriormente. Agora vamos nos deter no segundo aspecto, que é a representação decimal; ela foi abordada pelos autores devido à comparação que se segue, com a representação dos irracionais. O assunto desperta nosso interesse por sua conexão com a divisão de inteiros.

Em FA, os números irracionais são introduzidos logo após exercícios nos quais se pede a forma decimal de uma série de números racionais. Em alguns casos tal representação é finita, e em outros se obtém uma dízima periódica. Na seqüência, o texto propõe a determinação de $\sqrt{3}$; apresenta alguns cálculos, e mostra que;

$1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$

$1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2$

$1{,}732^2 < 3 < 1{,}733^2$

O leitor é informado que, se prosseguir com esse método, não obterá um valor exato em nenhum dos passos, e que a representação decimal do número $\sqrt{3}$, além de ser infinita, não é periódica. Tal definição é adotada pelos autores dessa coleção para número irracional. A sua equivalente é fornecida posteriormente, na forma de uma observação: “um número irracional nunca pode ser escrito na forma de fração” (lembramos que em FA o termo fração exige numerador e denominador inteiros). Antes, nos deparamos com a seguinte afirmação: “número racional é todo número cuja representação decimal é sempre finita ou infinita e periódica”. Ora, essa frase não pode ser tomada como definição, uma vez que outra formulação já vinha sendo utilizada. Não fica claro que se trata, na verdade, de um teorema: um número é igual à razão entre dois inteiros, com o divisor não nulo, se, e somente se, a sua representação decimal é finita ou infinita e periódica. No lugar de uma demonstração, ou ao menos uma discussão sobre a veracidade do fato, temos a apresentação de vários exemplos, nos quais novamente são explicitadas as formas decimais obtidas com divisões de dois inteiros. Dessa forma, apenas podemos considerar evidente que em Q existem números com representações decimais finitas, e existem números com representações infinitas e periódicas. Assim, a interpretação do enunciado do nosso teorema revela que três proposições devem ser provadas:

(1) Se a representação decimal de uma fração de inteiros não é finita, então ela apresenta periodicidade.

(2) Se um número tem representação decimal finita, ele pode ser escrito com uma fração de inteiros.

(3) Se a representação decimal de um número é infinita e periódica, ele pode ser escrito como uma fração de inteiros.

Antes de comentar como cada autor enfocou os três teoremas, vejamos a metodologia empregada por FB e FC na introdução dos irracionais. Adiantamos que um ponto comum as três coleções é a preparação do assunto com o estudo das representações decimais em *Q*.

Em FB lemos o seguinte: “há números cuja representação é um decimal infinito e não periódico”. O exemplo fornecido é $\sqrt{2}$, e posteriormente ele será escrito numa cadeia de desigualdades, similar à que vimos em FA para estimar $\sqrt{3}$. Como o teorema de Pitágoras foi apresentado na 7ª série, o autor de FB pôde comprovar que $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal do quadrado de lado unitário. O texto também informa que matemáticos da Grécia antiga demonstraram que esse número não corresponde à razão entre dois inteiros. Transcrevemos literalmente o trecho final da explanação: “Hoje, sabe-se que $\sqrt{2}$ é um exemplo de um número cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Como esse número não pode ser representado por uma razão de números inteiros, ele não é um número racional. Dizemos então que $\sqrt{2}$ é um número irracional”.

Não fica clara a intenção do autor. Admitindo que seus leitores já tenham compreendido o que é um número racional, por razões etimológicas poderão deduzir que um irracional não é uma razão entre inteiros. O número apresentado como exemplo tem, de fato, tal característica. O que foi colocado em termos vagos foi a correlação entre a inexistência de inteiros *a* e *b* tais que *a/b* = $\sqrt{2}$, e a representação decimal desse número. Ela será esclarecida logo a seguir, com um quadro que faz o seguinte resumo: uma representação decimal pode ser finita ou infinita; se for infinita pode ser periódica ou não-periódica; se a representação for finita, ou infinita e periódica, o número é racional; se for infinita e não-periódica, o número é irracional. A confusão pode ter sido desfeita, mas ainda não se justifica a imprecisão do texto citado. Além disso, como ocorreu em FA, o aluno dificilmente perceberá que certos fatos precisam ser provados.

Já dissemos que em FC, na 7ª série, os irracionais são definidos logo após os racionais. Uma pergunta introduz o assunto: "existe algum número que não seja racional?". A resposta é respondida afirmativamente no livro, e fica implícito que tais números, chamados de irracionais, não podem ser escritos como quociente de dois inteiros. O primeiro exemplo, fornecido logo a seguir, foi apresentado anteriormente, em um capítulo sobre geometria: π = 3,141592... . O segundo é $\sqrt{2}$, e o autor mostra que ele está entre 1,41 e 1,42. Afirma que sua representação decimal não é finita, e nem é uma dízima periódica.

A exposição apreciada na coleção FC na 8ª série se destaca em relação às demais. Por razões que esclareceremos em breve, a retomada sobre a representação decimal em *Q* foi mais cuidadosa, o que possibilitou uma observação inicial na seção sobre os irracionais: números cuja representação decimal é infinita e não-periódica não podem ser racionais, isto é, não podem ser escritos na forma de fração de inteiros. E é simplesmente por esse motivo que números assim são chamados de irracionais. Noutras palavras, o enunciado do teorema citado acima, com justificativas informais, antecede a definição de número irracional. Vejamos, enfim, justificativas para as três proposições enunciadas anteriormente, e que caracterizam a forma decimal dos elementos de *Q*, bem como a forma como elas foram abordadas em cada coleção.

(1) Se a representação decimal de uma fração de inteiros não é finita, então ela apresenta periodicidade.

Foi apenas enunciada nas três coleções, com a intenção de torná-la aceitável em face da profusão de exemplos. Mas existe uma argumentação compreensível para alunos do ensino fundamental, talvez com o auxílio de exemplos. Vamos considerar, inicialmente, um caso particular. Se o número inteiro *a* não é múltiplo de 6, então o racional *a/*6 não é inteiro; para obter sua forma decimal, calculamos $a \div 6$, e sabemos que, após a colocação da vírgula no quociente, devemos efetuar outras divisões, sempre com divisor igual a *6*. Suponha que a representação de *a/*6 não seja finita, o que significa que jamais teremos um resto zero. Então os restos possíveis são 1, 2, 3, 4, e 5. Em alguma etapa, um dos restos será repetido; na pior das hipóteses, as cinco primeiras divisões podem ter restos distintos, mas então o 6º resto será, inevitavelmente, igual a um dos cinco anteriores; quando houver repetição no resto, o mesmo ocorrerá no resultado, e conseqüentemente as divisões serão as mesmas feitas anteriormente, de modo que a partir de então um determinado ciclo se reinicia no quociente. Se uma situação análoga se verificasse para *a/*37, por exemplo, os restos possíveis são 1, 2, ... , 36. É impossível que até a 37ª divisão, após a colocação da vírgula no quociente, não tenhamos um resto repetido, e, portanto, uma dízima periódica. O argumento pode ser generalizado, pois se *b* não divide *a*, então *b* é igual à quantidade de restos possíveis de $a \div b$.

(2) Se um número tem representação decimal finita, ele pode ser escrito com uma fração de inteiros.

Foi aceito implicitamente nas três coleções. Supostamente o leitor é convencido da veracidade da afirmação com exercícios propostos e resolvidos nos quais um número *r*, cuja quantidade de casas decimais é finita, deve ser escrito na forma *a/b*, com *a* e *b* inteiros. Mais do que a quantidade de casos particulares analisados, a generalidade do processo é decisiva para que a afirmação seja aceita. Uma prova geral razoavelmente simples é a seguinte: se *r* tem *n* casas decimais, então $r = (10^n.\ r) / 10^n$ é claramente racional. Eis um exemplo de um teorema cuja demonstração é orientada pelos passos de uma aplicação. Para escrever um número com representação decimal finita na forma de uma fração de inteiros, basta multiplicar numerador e denominador, que é igual à 1, por uma potência de dez de expoente igual à quantidade de casas decimais do número, pois assim numerador e denominador serão inteiros. É importante observar que sempre é possível proceder dessa forma.

(3) Se a representação decimal de um número é infinita e periódica, ele pode ser escrito como uma fração de inteiros.

Em FA não foi mencionado. Em FB, foi sugerido, primeiro com observações sobre 1 ÷ 3 = 0,333... e 2 ÷ 3 = 0.666... ; depois por uma atividade em que se pede “a menor seqüência de teclas da calculadora que se deve acionar para obter os seguintes números no visor: 0,444...; 0,999..; 0,1666.... Nessas duas coleções foi aceito, sem maiores explicações, que todo número com representação decimal infinita e periódica é igual à razão entre dois inteiros. A superioridade da exposição em FC deve-se, principalmente, ao fato de ter tornado tal fato aceitável. Não apresentou uma prova geral, mas forneceu um método que pode ser aplicado em qualquer caso em que se queira escrever uma dízima periódica na forma de uma fração de inteiros. Inicialmente obteve as frações geratrizes de 0,777... e 0,131313... da seguinte forma:

$x = 0{,}777... \Rightarrow 10x = 7{,}777... = 7 + x \Rightarrow x = 7/9.$

$x = 0,131313,,, \Rightarrow 100x = 13,131313... = 13 + x \Rightarrow x = 13/99$

Após alguns exercícios propostos similares, o aluno deve fazer uma conjectura sobre a regularidade dos resultados obtidos. Espera-se que ele perceba que em todos os casos o numerador é formado pela parte que se repete e o denominador é o número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do numerador. A regra deve ser então verificada em novos exercícios. Não é explicitado no livro, mas o uso da calculadora pode ser útil. Em seguida obtém-se a fração geratriz em outros casos, com uma adaptação do método inicial:

$x = 0,2555... \Rightarrow 10x = 2 + 0,555... = 2 + 5/9 \Rightarrow x = 23/90$

$x = 0,31222... \Rightarrow 100x = 31,222... = 31 + 2/9 \Rightarrow x = 281/900$

O autor encerra a abordagem com novos exercícios propostos. A demonstração geral exige uma certa sofisticação no uso da linguagem algébrica, que nos parece inadequada para esse estágio dos estudantes. Mas esse é outro caso em que o caráter geral do procedimento adotado deve ser ressaltado. Não é mera coincidência que a demonstração rigorosa siga os mesmos passos da resolução de casos particulares, como ocorre com a prova da proposição (2), descrita anteriormente.

3.5.2.4 – Uma condição necessária e suficiente para verificar a finitude da representação decimal de um número racional.

Consideremos o seguinte critério: sejam *a* e *b* inteiros e relativamente primos, com $b \neq 0$. O número racional *a/b* tem representação decimal finita se, e somente se, *b* não tem fatores primos diferentes de *2* e *5*.

Não nos parece que a demonstração desse critério seja inviável para alunos da última série do ensino fundamental. Pode ser feita em termos ainda mais informais do que os que usaremos aqui.

Primeiro, repetimos o argumento apresentado quando comentamos a proposição 2 da seção anterior: suponha que a forma decimal do número tem *n* casas decimais; multiplicando-o e dividindo-o por $10^n = 2^n.\ 5^n$ temos uma fração de inteiros, e na sua forma irredutível o denominador não pode ter fatores primos diferentes de 2 e 5, pois novos fatores não podem "aparecer" numa eventual simplificação.

Para provar a recíproca, inicialmente observe que $b = 1$ não contradiz o enunciado, e nesse caso não há o que demonstrar. Se $b \neq 1$, temos $b = 2^m.\ 5^n$, com *m* e *n* naturais. Se $m = n \neq 0$, portanto $b = 10^n$; logo, a representação decimal de *a/b* tem *n* casas decimais. Se $m > n$, devemos tomar $p = m - n$, e então temos $a/b = (a.5^p) / (b.5^p) = (a.5^p) / (2^m.\ 5^n.\ 5^p) = (a.5^p) / (2^m.\ 5^{n+p}) = (a.5^p) / (2^m.\ 5^m)$; como o numerador é inteiro, e o denominador é 10^m, a forma decimal de *a/b* terá *m* casas. A idéia de "completar" o denominador para que esse seja uma potência de 10 também pode ser usada se $m < n$, mas agora fixamos $p = n - m$, e então

$a/b = (a.2^p) / (b.2^p)$, o que fornece $a/b = (a.2^p) / (10^n)$, cuja representação decimal tem n casas.

A única coleção que abordou esse teorema foi FB, mas não nos parece que seu autor tenha escolhido a melhor ocasião para tal. Ele o fez no capítulo sobre frações, da 5ª série. Foi dispensada uma atenção particular às frações decimais, isto é, aquelas cujos denominadores são potências de 10; trata-se de uma preparação para introduzir o conceito de número decimal, uma estratégia comum às três coleções. Após algumas considerações sobre a decomposição em primos das potências de 10, o autor conclui que “é possível encontrar frações decimais equivalentes quando satisfizer a qualquer uma das seguintes condições: o denominador for potência de 2 ou de 5 ou um produto dos fatores 2 e 5”. Merece menção o fato de que o enunciado é confuso. Presumimos que o autor refere-se a “frações decimais equivalentes a uma dada fração”. Esclarecemos que o termo “frações equivalentes” é utilizado em todas as coleções para denotar representações diferentes da mesma fração.

De todo modo, a inferência em FB não nos parece ter sido justificada adequadamente. As considerações anteriores permitem concluir que os únicos divisores primos de um número da forma 10^n são 2 e 5, mas a relação entre esse fato e a conclusão sobre frações decimais não está clara. A seguir, uma atividade pede, inicialmente, que se escreva, se possível, frações decimais equivalentes às frações 3⁄4, 7⁄20, 9⁄40, 11⁄80, 3⁄5, 1⁄14, 1⁄3, 11⁄20. Um exemplo resolvido teria sido útil; supondo que o aluno entenda o que se pede, ainda assim parece-nos duvidoso que perceba como deverá resolver o problema. Trata-se, na verdade, de aplicar o método descrito na nossa demonstração, em que numerador e denominador devem ser multiplicados por um número escolhido convenientemente. A escolha é feita em função da forma fatorada do denominador original, e de modo que o novo seja uma potência de 10. Por exemplo:

$3/4 = (3 \times 25) / (4 \times 25) = 75/100$

$7/20 = (7 \times 5) / (20 \times 5) = 140/100$

$3/5 = (3 \times 2) / (5 \times 2) = 6/10$.

Na segunda parte da atividade, o aluno deve justificar porque não é possível encontrar uma fração decimal equivalente a 1/3 ou 1/14. Note que são os únicos casos, na primeira parte, em que a transformação solicitada não pode ser feita. O livro do professor traz como resposta o seguinte: "o denominador, em cada caso, tem fator diferente de 2 e 5".

A atividade tem seu mérito, mas criticamos o fato de não haver nenhuma retomada do assunto. Não é sequer feita a articulação com a representação decimal. O momento que nos parece o mais apropriado para explorar essa propriedade seria justamente no capítulo sobre conjuntos numéricos, quando a questão da representação finita ganha relevo. Trata-se de um belo exemplo do uso da decomposição em primos como ferramenta.

3.5.2.5 – Exemplos de números irracionais.

Vimos que uma metodologia viável para introduzir os irracionais é estabelecer as possíveis representações decimais em *Q*. Feito isso, será aceitável que números cuja forma decimal é infinita e não-periódica não podem ser expressos como razão de inteiros. O próximo passo é exibir números irracionais. A descrição da forma decimal, infinita e não periódica, talvez seja suficiente para que o aluno aceite a existência dos irracionais. Mas sempre haverá o problema de descrever um número que não pode ser escrito de modo preciso com a notação usual.

A alternativa usual é procurar exemplos entre números já conhecidos dos alunos. Em geral, recorre-se a medidas apresentadas nos capítulos sobre geometria. Os exemplos quase inevitáveis a que recorrem os autores são π e $\sqrt{2}$. O primeiro recebe a merecida atenção nas três coleções, por seu papel privilegiado na geometria. O segundo também, por ser a medida da diagonal do quadrado de lado unitário. Tal fato também é explorado por todos os autores. Um dos objetivos dos capítulos sobre conjuntos numéricos é estabelecer a correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais. Nessa abordagem, uma vez definidas as posições correspondentes ao zero e a unidade na reta, o número irracional $\sqrt{2}$ pode ser localizado facilmente com régua e compasso.

De modo mais geral, se o inteiro positivo n não é um quadrado perfeito, então na equação $x^2 = n$, x não é racional. As três coleções mencionam o fato, e os autores de FB e FC fizeram bom uso desse recurso, ao chamar atenção para o fato de que, em particular, se *n* é primo, então $\sqrt{n}$ é irracional, logo existem infinitos irracionais.

O problema mais delicado dessa exposição é pedir aos alunos que "acreditem" nessas afirmações. A prova de que $\pi \notin Q$ é extremamente complexa mesmo para estudantes do curso superior. A prova de que $\sqrt{n} \notin$ Q se *n* não é um quadrado perfeito é mais acessível. Porém mesmo para o caso $n = 2$, em tese o mais simples, uma certa sutileza de raciocínio é exigida. Acreditamos que ela seja mais adequada para o ensino médio, mas não descartamos a sua apresentação para alunos de 8ª série. Aparentemente, os autores de FB e FC também pensam assim, pois incluíram a demonstração em seus livros.

Convém notar que as provas foram inseridas nas seções "Revistinha" e "Para ler, pensar e divertir-se". Portanto estão fora do âmbito curricular, e o professor pode ignorar a abordagem, se achar conveniente. Mas pensamos que vale, ao menos, dedicar um espaço em nossas aulas para o tema, basicamente por duas razões: fornecer credibilidade à existência de irracionais, e apresentar um exemplo de prova que exige sofisticação de raciocínio. Nosso interesse na demonstração justifica-se pelo emprego de uma propriedade importante dos inteiros, discutida anteriormente; quaisquer que sejam os inteiros *a'* e *b'*, $b' \neq 0$, existem inteiros *a* e *b* tais que $a' / b' = a/b$ e $mdc(a,b) = 1$. É também um caso raro em que o máximo divisor comum se converte numa ferramenta.

A demonstração convencional de que $\sqrt{2} \notin Q$ é a que encontramos em FC. Suponha por absurdo que $\sqrt{2} \in Q$; isso é equivalente a dizer que existem inteiros *a, b*, primos entre si, tais que $(a/b)^2 = 2$, logo $2b^2 = a^2$, portanto a^2 é par, e segue que *a* é par. Então existe *c* inteiro tal que $a = 2c$, logo $a^2 = 4c^2 = 2b^2$, e assim $2c^2 = b^2$, logo b^2 é par, portanto *b* é par. Mas *a* e *b* não podem ser ambos pares, pois são relativamente primos, e assim a demonstração está concluída.

Apresentar a argumentação acima para alunos de 8ª série, ou mesmo de ensino médio, exige uma preparação cuidadosa. Note que uma propriedade usada foi a seguinte: se *n* é um inteiro tal que n^2 é par, então *n* é par. Ainda que tal fato seja, aparentemente, de fácil aceitação, pensamos que deve ser provado em sala de aula antes de ser utilizado. Outro fato digno de menção é que os autores foram muito cuidadosos ao esclarecer as idéias contidas em uma prova por absurdo. Esse recurso já havia sido utilizado de modo informal em outras ocasiões, algumas aqui mencionadas. Mas no caso em apreço o método deve ser explicitado para que haja entendimento, tanto do processo quanto da conclusão.

Encerramos com a demonstração apresentada em FB, menos conhecida, e um belo exemplo de aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética. Já vimos que se $\sqrt{2} \in Q$ existem inteiros *a* e *b* tais que $a^2 = 2b^2$. Observe que o primeiro membro da igualdade é um quadrado perfeito; portanto, tem uma quantidade par de fatores primos, distintos ou não. No segundo temos outro quadrado perfeito multiplicado por 2; portanto deve ter uma quantidade ímpar de fatores primos. Ora, isso contraria o T.F.A., pois um mesmo número não pode ter duas decomposições distintas em fatores primos, e assim chegamos, novamente, a um absurdo. Note que a nova argumentação dispensa considerações sobre o fato de *a* e *b* serem primos entre si. Mesmo assim, nas suas explanações iniciais da demonstração, o autor supõe *mdc(a,b)* = 1.

CAPÍTULO IV

LIVROS DO ENSINO MÉDIO

Nos programas convencionais de matemática para ensino médio no Brasil não encontramos um espaço destinado a estudar explicitamente as propriedades dos números inteiros; o assunto é abordado detalhadamente apenas no ensino fundamental. Entretanto não é incomum, em livros didáticos dessa fase, que uma seção seja dedicada aos conjuntos numéricos no início das coleções.

Em geral, a introdução ao estudo das funções ocupa boa parte do primeiro volume das coleções de ensino médio. Fica, assim, estabelecida uma conexão com os últimos passos do ensino fundamental. Um dos últimos componentes curriculares abordados na 8ª série é exatamente o conceito de função. Nas três coleções analisadas no capítulo anterior, por exemplo, isso também se verifica. A retomada do assunto se justifica, pois não podemos perder de vista que começa um novo estágio na vida escolar dos estudantes, e temas já conhecidos são revistos sob um novo prisma. As definições tornam-se mais rigorosas, e a estruturação geral da matemática ganha um peso maior.

Na 1ª série do ensino médio, o conceito de número real é, em geral, o foco inicial do professor de matemática. As primeiras funções que serão estudadas com maior profundidade (polinomiais de primeiro e segundo grau; exponencial) têm domínio igual a *R*, e os intervalos reais terão um papel predominante em vários momentos, como, por exemplo, na resolução de inequações de segundo grau. A preparação mais usual é a revisão dos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais e reais, como já ocorrera no ensino fundamental. A definição de cada uma dessas classes de números já foi trabalhada nos anos anteriores, mas o início do ensino médio parece ser outra boa ocasião para se retomar tais conceitos.

Parece-nos ser, também, o momento ideal para explorar as propriedades que caracterizam os números inteiros; elas já foram estudadas no ensino fundamental, mas a experiência adquirida pelos alunos nesse período pode justificar uma revisão. Deve-se, então, levar em consideração o estágio dos estudantes, que, supostamente, permite maior profundidade na abordagem. Possibilita também o aproveitamento de problemas mais desafiadores.

No entanto o que se verifica é, em geral, uma retomada do assunto feita de forma superficial. A descrição dos elementos do conjunto Z é acompanhada de algumas poucas propriedades. Um aspecto relevante como a unicidade da fatoração em primos é, normalmente, ignorado. A divisibilidade, quando mencionada, permanece restrita aos naturais. Em suma, é raro que sejam abordadas propriedades que reforçam as distinções entre a natureza dos inteiros, dos racionais e dos reais. Mesmo em coleções de bom nível a situação não é diferente. Parece ter se firmado uma tradição de que, embora os números inteiros sejam mencionados no início do primeiro livro do ensino médio, o assunto não deve ser estendido com maiores considerações.

Como não há uma seção especificamente voltada aos números inteiros nos livros didáticos do ensino médio, no próximo capítulo faremos uma análise da abordagem sobre os conjuntos numéricos em algumas coleções. Interessa-nos particularmente verificar como conceitos relacionados à questão da divisibilidade são explorados. Vimos que no ensino fundamental as definições referentes à divisibilidade entre os naturais não foram estendidas aos inteiros, e essa lacuna, acreditamos, bem poderia ser preenchida no ensino médio. Observamos também que algumas características dos números inteiros, como o algoritmo da divisão, foram usadas para a introdução dos números irracionais, nos livros do ensino fundamental. Pensamos que no ensino médio tal abordagem deveria ser feita com formulações mais precisas. De modo geral, na retomada dos inteiros, deveria ser considerado o suposto amadurecimento dos estudantes, conforme o modelo do currículo em espiral estabelecido por Bruner. Pode ser um bom momento para formulação de casos em que argumentações mais sofisticadas são apresentadas ou solicitadas. Finalmente, verificaremos se nas listas de exercício dessas seções encontram-se problemas desafiadores envolvendo números inteiros.

Nossa seleção de livros, para analisar a produção mais recente, valeu-se, novamente, do guia oficial. Dessa feita, não escolhemos algumas, mas todas as onze coleções recomendadas. Não vimos razão para excluir alguma, uma vez que pretendemos analisar somente uma seção muito particular de cada uma. As obras constantes no CNLEM foram editadas em 2005, e são compostas por três volumes cada. Segue a relação das coleções, com as siglas que adotaremos doravante:

- **MA**: IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações.*

- **MB**: STOCCO SMOLE, Kátia Cristina; VIEIRA, Maria Ignez de Souza; KIYUKAWA, Rokusaburo. *Matemática no Ensino Médio.*
- **MC**: DANTE, Luiz Roberto. *Matemática.*
- **MD**: ROQUE BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. *Matemática.*
- **ME**: RODRIGUES PAIVA, Manoel. *Matemática.*
- **MF**: ZAMPIROLO, Maria José Couto de Vasconcelos; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha; CÃNDIDO, Suzana Laino. *Matemática.*
- **MG**: GUELLI NETO, Oscar Augusto. *Matemática.*
- **MH**: SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. *Matemática Aula por Aula*.
- **MI**: GOULART, Marcio Cintra. *Matemática no Ensino Médio.*
- **MJ**: LONGEN, Adilson. *Matemática: Uma Atividade Humana.*
- **ML**: LONGEN, Adilson. *Matemática.*

Uma primeira constatação é a de que somente uma coleção, MF, não traz uma seção sobre conjuntos numéricos. Seus autores optaram por iniciar o livro do 1º ano com a abordagem sobre funções. Não temos crítica alguma a tecer referente à tal postura. Efetivamente, pode ser bom o enfoque sobre funções com tal estratégia, e uma retomada sobre números inteiros não precisa necessariamente ser feita em conexão com algum assunto particular.

Julgamos necessária uma advertência ao leitor antes de iniciar o próximo capítulo. Na sua denominação usamos o termo “conjuntos numéricos” por ser a nomenclatura mais usual entre os autores de livros didáticos para a seção que analisaremos. Mas estamos menos interessados em “conjuntos” do que em “números”. A forma como cada autor utiliza a linguagem dos conjuntos não estará sendo considerada. Mas não podemos ignorar que em algumas coleções esse tipo de notação recebeu uma atenção que nos parece excessiva. A esse respeito, os redatores do CNLEM observaram o seguinte:

> "Os conteúdos relativos a conjuntos devem ser reduzidos ao mínimo necessário nessa etapa do ensino, com uma apresentação intuitiva, não-formalizada, dos conceitos básicos, com economia no uso da simbologia específica do assunto e com emprego em aplicações nas quais esses conteúdos ajudem, de fato, na compreensão de outros conceitos e procedimentos matemáticos. Em contrapartida, o excesso desnecessário de tratamento desse assunto revela-se no esforço que se faz para utilizar a linguagem e a notação de conjuntos em situações em que aparecem de modo artificial e desnecessário". (PNLEM, 2005, p. 77).

Estamos de acordo com esse ponto de vista. Em particular, acreditamos que uma excessiva importância ao conceito de conjunto, em detrimento do conceito de número, deve ser evitada. Algumas coleções dedicam um capítulo, em geral o primeiro, especificamente para o estudo da linguagem de conjuntos, antes da retomada sobre as principais classes numéricas. Mesmo nas seções sobre números, encontramos em alguns livros uma quantidade que nos parece inadequada de exercícios nos quais o aluno deve verificar a inclusão de um conjunto em outro, a pertinência de um elemento, ou efetuar operações como união e intersecção.

CAPÍTULO V

CONJUNTOS NUMÉRICOS NO ENSINO MÉDIO

5.1 – NATURAIS E INTEIROS.

As explanações dos autores limitam-se, em geral, a relacionar os elementos dos dois conjuntos, com umas poucas observações sobre suas propriedades. São mencionadas com freqüência: a existência de sucessores e antecessores, ressaltando que zero não tem antecessor em *N*; o fechamento da adição e da multiplicação em *N* e *Z*, e da subtração no último; a definição do módulo em *Z*, com umas poucas propriedades.

A divisibilidade em *N* é um tema explorado somente em alguns exercícios, porém mesmo esse expediente é usado em poucas coleções. Destacamos três: MC, ML e, principalmente MI. Não se pode ignorar que os exercícios dessas seções têm como objetivo uma revisão, exceto talvez pelo uso mais acentuado da linguagem de conjuntos. Tendo em vista a suposta evolução dos estudantes, podem ser solicitados problemas de caráter mais geral. O autor de MI foi feliz nesse aspecto, ao indagar se as expressões $n.(n + 1)$ e $n.(n - 3)$ resultam em números pares ou ímpares, ou quantos são os naturais entre $a.b$ e $a.(b + 1)$. Outro bom problema selecionado pelo autor pede o número natural cuja divisão por 20 fornece quociente 7 e o maior resto possível. Em outra atividade recorda a definição de número primo, mencionada também em exercício proposto na coleção ML.

Destacamos um exercício resolvido em ME, que tem a vantagem adicional de ser apresentado na seção sobre inteiros; é feita a demonstração de que a soma de um número par e um ímpar é impar. No desfecho, o autor faz uma boa observação sobre as representações escolhidas, $2n$ e $2k + 1$: se a mesma letra fosse usada nos dois casos teria sido provado somente que a soma de um par com seu consecutivo é impar. Posteriormente, o aluno deve provar que o produto de um número par e um ímpar é ímpar. Reforçamos que n e k podem ser negativos. Trata-se, infelizmente, de uma exceção.

Uma de nossas maiores críticas aos livros didáticos no ensino fundamental foi direcionada à ausência de uma discussão sobre a divisibilidade entre os inteiros. Acreditamos que um bom curso de ensino médio deve preencher as lacunas da etapa anterior, mas nesse particular não houve grandes mudanças no panorama. Praticamente a questão não foi abordada em nenhuma coleção, a não ser em poucos exercícios. Em MB encontramos alguns problemas muito simples, em que se pede apenas a relação de múltiplos ou divisores de um certo número. Espera-se que os estudantes relacionem também os negativos que satisfazem a condição exigida; é uma rara ocasião em que eles têm contato com a extensão do conceito definido entre os naturais. Em MD encontramos um exercício resolvido, e outro proposto, em que se deve escrever a relação dos ímpares contidos em um certo intervalo; o objetivo é treinar a interpretação de uma frase escrita com a linguagem dos conjuntos, mas tem o mérito de incluir ímpares negativos. O autor de MI também inclui alguns problemas sobre o assunto, mas nenhum que represente grande desafio, ou que tenha o caráter geral dos problemas da seção sobre naturais, descritos no parágrafo anterior. Em ML, os alunos devem somente responder se certas equações de 2º grau admitem soluções inteiras; a estratégia mais óbvia é resolvê-las com a fórmula geral, mas o professor pode aproveitar a ocasião para recordar as relações entre as raízes e os coeficientes.

5.2 – PROPRIEDADES DOS INTEIROS APLICADAS NA INTRODUÇÃO DOS RACIONAIS E DOS REAIS.

Vimos que na breve revisão das coleções, de modo geral, o potencial dos números inteiros é pouco explorado. Ao abordar outras classes numéricas, os autores também deixam esse recurso em segundo plano. Na ampliação da estrutura algébrica, as diferenças salientadas entre Z e Q são o fechamento da divisão, exceto para zero como divisor, e a inexistência de sucessores e antecessores.

Não encontramos outras aplicações dos inteiros, além das que havíamos observado na análise dos livros do ensino fundamental. De modo geral, a introdução dos irracionais é adequada. Destacamos quatro coleções: MA, MB, MC e ME. Seus autores fazem uma boa caracterização da forma decimal dos números racionais. No entanto, nenhum deles demonstra explicitamente o teorema que garante que um número é racional se, e somente se, sua representação decimal é finita ou infinita e periódica, mencionado em 3.5.2.3. Somente em MA é afirmado que uma fração tem representação decimal finita se, e somente se, o denominador de sua forma irredutível não tem fatores primos diferentes de 2 e 5, mas não faz a prova. Duas das quatro coleções mencionadas acima, MB e MC, demonstram que $\sqrt{2}$ não é racional; entre as demais, somente MD faz o mesmo.

5.3 – UMA SELEÇÃO DE PROBLEMAS.

Os problemas sobre números inteiros mais interessantes que observamos foram propostos nas listas de exercício que encerram o capítulo, ou então em relações de testes de vestibular inseridas no final do livro. As exceções foram citadas em 5.1. Os autores de MA foram os que mais se preocuparam com o tema. Eis os problemas que destacamos dessa coleção:

- (UF-RJ) Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto somente pelo algarismo 1.

- (UF-AL) Assinale as afirmações verdadeiras (V) e as falsas (F), nas quais n é um número inteiro estritamente positivo.

a) O mínimo múltiplo comum entre $4n$ e $6n$ é $12n$.

b) O número $n^2 + 7n + 7$ é sempre ímpar.

c) O número $n.(n^2 – 1)$ é sempre divisível por 3.

- O novo Código de Trânsito de um país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas; em caso de infringência às leis de trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima.

a) Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes foi autuado por infração gravíssima?

b) Dentre todas as pontuações de 0 a 100 pontos, quantas delas não podem ocorrer? Quais são?

- Três números naturais e múltiplos consecutivos de 5 são tais que o triplo do menor é igual ao dobro do maior. Dentre esses números, o maior é:

a) Múltiplo de 3.

b) Ímpar.

c) Quadrado perfeito.

d) Divisor de 500.

e) Divisível por 4.

- (UF-MG) Todas as alternativas sobre números inteiros estão corretas, exceto:

a) Nem todo primo é ímpar.

b) Todo inteiro par pode ser escrito na forma $n^2 + 2$, $n \in Z$.

c) A soma de dois inteiros ímpares é sempre um inteiro par.

d) Todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n - 9$, $n \in Z$.

e) Se n é um inteiro ímpar, então n^2 também é ímpar.

O último foi aproveitado também por ML. Vejamos alguns problemas extraídos dos demais livros:

• (MB) (MACK-SP) Sabendo que $A = \{x \in N / x$ é múltiplo de $11\}$, e também que $B = \{x \in N / 15 \leq x \leq 187\}$, o número de elementos de $A \cap B$ é: 16, 17, 18, 19 ou 20?

• (MB) Considere $p, q \in N^*$ tais que p e q são números pares. Se $p > q$, pode-se afirmar que:

a) $pq + 1$ é múltiplo de 4
b) $p - q$ é ímpar.
c) $p + q$ é primo.
d) $p^2 - q^2$ é par.
e) $p(q + 1)$ é ímpar.

• (MD) (UFBH) Sobre números, é verdade afirmar que:

a) Todo número primo é ímpar.
b) Existe dízima periódica que não pode ser escrita como p/q, com $p,q \in Z$.
c) Se um número inteiro n é par, então n^2 é par.
d) Para todo $a \in N$, tem-se $\sqrt{a} \in Q$.
e) Existe um número real que é, ao mesmo tempo, racional e irracional.

• (ME) Classifique como par ou ímpar cada um dos números a seguir, considerando que a variável n pode assumir qualquer valor inteiro:

$2n$; $2n + 1$; $2n - 1$; $4n$; $4n + 1$; $6n + 2$; $8n + 3$.

- (ME) (Fuvest -SP) Um caixa automático de banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário fez um saque de R$ 100,00. Pode-se concluir que dentre as notas retiradas:

a) O número de notas de R$ 10,00 é par.
b) O número de notas de R$ 10,00 é ímpar.
c) O número de notas de R$ 5,00 é par.
d) O número de notas de R$ 5,00 é ímpar.
e) O número de notas de R$ 5,00 é par e o número de notas de R$ 10,00 é ímpar.

- (MH) (MACK-SP) Se da soma de todos os números ímpares positivos de 2 algarismos subtrairmos a soma de todos os pares positivos de 2 algarismos, o resultado será: 55, 51, 50, 45 ou 46?

CAPÍTULO VI

ALGUMAS SUGESTÕES PARA O ENSINO MÉDIO

6.1 – PROBLEMAS COM NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO MÉDIO.

As sugestões aqui apresentadas não são todas de nossa autoria. Elas vêm de várias fontes, inclusive dos autores das coleções recomendadas pelo PNLEM. Também deve ficar claro que não estamos propondo que seja inserido nos livros didáticos um capítulo específico sobre números inteiros. A quantidade de conteúdos usualmente abordados no curso de matemática do ensino médio é considerável, e com uma carga de quatro aulas semanais, ao fim de três anos dificilmente um professor terá conseguido trabalhar com todos os tópicos constantes em uma coleção. Quase sempre terá de selecionar os conhecimentos que ele julgar mais adequados ou relevantes para suas turmas. Acrescentar novos conteúdos é uma sugestão que professores e autores de livros didáticos dificilmente aprovarão.

Mas vários aspectos chamaram nossa atenção na análise dos livros do ensino médio. Inicialmente, observamos que há uma quantidade razoável de testes de vestibular sobre o assunto. Ao incluir alguns nas suas listas de exercícios, os autores possibilitam ao professor enfocar propriedades dos números inteiros em algumas aulas. A impressão após a análise, no entanto, é que há uma concepção entre os escritores dessas coleções de que o assunto é referente apenas ao ensino fundamental, no sentido de que não há conhecimentos exigidos nos problemas específicos do assunto que não tenham sido estudados até a 8ª série. Arriscamos um palpite que muitos professores pensam o mesmo. Isso é verdadeiro até um certo ponto. Não significa, no entanto, que deva ser considerado um tema que já está esgotado, e que para resolver tais problemas basta recordar alguns conceitos simples. Acreditamos que eles são compatíveis com a maturidade intelectual de um estudante do ensino médio, mas não do fundamental, o que justifica sua inclusão nos livros. A prática de resolvê-los parece-nos recomendável porque esse é um treinamento que pode fortalecer a formação matemática geral de nossos alunos. As exigências inerentes aos problemas com inteiros relacionam-se com a capacidade de argumentar e generalizar, fatores decisivos na educação matemática. A linguagem utilizada na resolução de certos problemas sobre inteiros aproxima-se muito da coloquial, o que também parece não ser explorado convenientemente nos cursos de ensino médio.

Citamos como exemplo um problema extraído do livro *Uma paródia matemática*, de Brian Bolt: encontre um número inteiro de três algarismos, todos primos, que é divisível pelos três. Existe mais de um? Convidamos o leitor a tentar resolvê-lo, e verificar a quantidade de argumentações necessárias, e como elas podem ser expressas com pouca necessidade de linguagem simbólica. A segunda parte do enunciado indica que obter uma solução não significa que a questão esteja finalizada. Antecipamos ao leitor que só existe um numero natural que satisfaz às condições necessárias, e, portanto, existem dois inteiros dessa forma. Esse problema apresenta outra característica que não é incomum em problemas da teoria dos números: pode ser explorado em várias faixas etárias.

Pode ser proposto tanto para alunos do ensino médio, quanto para os da 5ª série, que estão tomando o primeiro contato com critérios de divisibilidade.

A linguagem específica da matemática também deve ser aprimorada no ensino médio, mesmo porque em determinadas situações ela torna-se uma barreira para nossos alunos. Acreditamos que nesse particular, problemas com inteiros também podem fornecer um material rico. Citamos como exemplo o exercício da coleção ME descrito no capítulo anterior. Para provar que a soma de um número par com um ímpar é impar, houve a necessidade de recorrer à linguagem algébrica. O potencial dessa forma de escrita permite que o problema possa ser explorado em outras direções. Pode-se, por exemplo, pedir ao aluno que demonstre que ao dividir por quatro o número obtido com tal soma obtém-se resto 1 ou 3, isto é, ele é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$. Pode-se também investigar sob que condições temos uma situação ou a outra.

Não temos a pretensão de fazer aqui uma seleção de problemas dessa natureza. Mas o professor que achar atraente a idéia de aproveitar o potencial do tema pode encontrar farto material fora dos livros didáticos também. Na seção 6.10 relacionamos algumas fontes de consulta com problemas que podem ser explorados em sala de aula.

6.2 – A INCLUSÃO DOS NÚMEROS INTEIROS NOS PROGRAMAS DE ENSINO MÉDIO.

Uma vez que acreditamos no potencial dos problemas conectados com o assunto, devemos ponderar sobre a melhor ocasião para inseri-los no curso do ensino médio. Mas não acreditamos que algum espaço específico seja o ideal. A aplicação regular ao longo dos três anos nos parece mais adequada. A revisão cumulativa ao final de cada capítulo, conforme o modelo adotado na coleção FC, nos parece um ótimo recurso didático. Possibilita retomadas freqüentes dos vários conteúdos, com problemas de bom nível. A inclusão de problemas sobre a teoria dos números em seções dessa natureza é uma opção a ser considerada. Nada impede o professor de, eventualmente, elaborar listas de exercícios com o caráter de revisão cumulativa, caso o livro adotado não tenha tal característica.

Entretanto insistimos que a revisão sobre conjuntos numéricos, no início do 1º ano, oferece uma boa oportunidade para trabalhar com alguns problemas sobre números inteiros. O que nos parece mais produtivo do que o acúmulo de exercícios sobre conjuntos que encontramos em várias coleções. Vários exercícios referentes à notação de conjuntos têm como objetivo exclusivo exercitar a leitura e a escrita desse tipo de representação, o que pode perfeitamente ser feito de forma articulada com outros tópicos.

Por fim, não podemos ignorar a possibilidade de aplicar as propriedades dessa classe numérica no estudo de outros conteúdos. É sobre isso que falaremos a seguir.

6.3 – OBSERVAÇÕES SOBRE A NATUREZA DAS APLICAÇÕES DOS NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO MÉDIO.

Um rápido exame nas coleções revela que na grande maioria dos exercícios resolvidos e propostos, os números envolvidos, no enunciado ou na solução, são inteiros. Isso não significa que as propriedades básicas dos inteiros estejam sendo enfocadas. Os procedimentos adotados na resolução são, em diversos casos, os mesmos que seriam adotados se os números fossem de outra classe. Não estamos necessariamente abordando números inteiros apenas porque procuramos o ponto de intersecção de duas retas no plano cartesiano, e ambas têm somente coeficientes inteiros nas suas equações. Ou se estamos calculando o determinante de uma matriz cujos elementos são inteiros. Uma aplicação seria, por exemplo, provar que numa matriz de Vandermonde de ordem três, se os elementos da segunda linha são ímpares, então o determinante é um múltiplo de 8.

Sobre as equações de reta, algumas aplicações interessantes podem ser feitas. Podemos facilmente induzir os alunos a observar que certas retas, mesmo tendo os coeficientes inteiros em suas equações, não interceptam nenhum ponto com ambas as coordenas inteiras. Um caso simples é o da equação $2x + 4y = 5$, pois, se x e y são inteiros, as duas parcelas no primeiro membro são pares, portanto o mesmo ocorre com a soma, e o segundo membro da igualdade é ímpar. De modo mais geral, pode-se demonstrar que se a, b e c são inteiros, para que existam inteiros x e y também inteiros satisfazendo $ax + by = c$, é preciso que c seja um múltiplo de $mdc(a,b)$. Esse fato pode ser explorado não somente na geometria analítica, mas também no estudo de sistemas lineares.

As demais seções deste capítulo são dedicadas à descrição de outros exemplos de aplicações. Antes, gostaríamos de comentar a preferência pelo uso de números inteiros nos exercícios. Aparentemente está relacionada com a suposta facilidade oferecida. Talvez a impressão esteja correta no que se refere aos cálculos, mas não é verdadeiro que o problema se torne mais simples apenas porque nos limitamos a tais números. Pelo contrário, a restrição pode ser o fator que torna complexo o exercício. Vejamos um exemplo:

Considere $x^2 - y^2 = c$, com a constante *c* positiva. Essa equação admite infinitas soluções reais; basta atribuir um valor para *y* para que possamos determinar *x*. Se as variáveis podem ser complexas, qualquer valor pode ser atribuído para uma delas, o que nos permite calcular a outra. Mas se *x, y* e *c* devem ser inteiros, temos um problema interessante. Vamos analisá-lo considerando somente as soluções positivas; se as encontrarmos, as demais são obtidas facilmente com trocas de sinal. Note que temos então: $(x + y).(x - y) = c$. Os dois fatores do primeiro membro são inteiros, pois a adição e a subtração são fechadas em *Z.* Como é necessário $x > y > 0$, devemos ter $(x + y) > (x - y) > 0$. Feitas essas observações, a decomposição em primos de *c* fornece todas as multiplicações possíveis que satisfaçam as condições exigidas. Caracteriza-se, assim, uma aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética.

Trata-se de um problema que pode ser aplicado no ensino fundamental, se atribuirmos algum valor particular para *c*, e pode ser apresentado em conexão com o estudo de produtos notáveis. Ao contrário dos dois outros exemplos mencionados acima não possibilita, talvez, uma articulação clara com nenhum conteúdo usual do ensino médio. Mas se desejamos explorar todo o seu potencial, é outro problema mais compatível com o estágio de desenvolvimento intelectual de alunos do ensino médio. Convidamos o leitor a verificar que:

Se *c* é ímpar, quadrado perfeito, e tem *n* divisores, existem (*n* – 1) / 2 soluções.

Se *c* é ímpar, não é quadrado perfeito e tem *n* divisores, existem *n/2* soluções. Em particular, se *c* é primo e ímpar, existe solução única.

Se *c* é múltiplo de quatro, e $c \neq 4$, existe ao menos uma solução.

Se *c* é par, mas não é múltiplo de quatro, não existe solução.

6.4 – UMA ARTICULAÇÃO USANDO CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE.

Na síntese da coleção que aqui chamamos de MI, apresentada no CNLEM, os redatores chamaram atenção para o seguinte:

> "É interessante, também, o exercício resolvido que apresenta uma demonstração clara e acessível da regra de divisibilidade por três. A prova, além de ser um exemplo simples de desenvolvimento do raciocínio, liga o estudo dos números inteiros ao estudo de exponenciais". (PNLEM, 2005, p.68).

Destacamos também a boa preparação, iniciada com a prova de que todos os algarismos de um número da forma $10^n – 1$, com n inteiro e maior do que 1, são iguais a 9. Seja então $a_n a_{n-1} ... a_1 a$ a representação decimal de um número de *n* algarismos. O autor mostra que esse número pode ser decomposto em uma soma, na qual a ultima parcela é a soma de seus algarismos, e as primeiras são múltiplos de números da forma $10^k - 1$. As argumentações a partir desse ponto são simples, recorrendo às propriedades da divisibilidade.

Acrescentamos que a mesma demonstração pode ser usada para justificar o critério de divisibilidade por 9. Sugerimos também uma atividade mais elaborada, mas que nos parece viável para uso em sala de aula: a demonstração do critério de divisibilidade por 11, que é de fácil aplicação.

6.5 – SEQUÊNCIAS.

Eis um dos temas usuais do ensino médio que permite articulações mais claras com os números inteiros. Em todas as coleções, direta ou indiretamente, são abordados os números triangulares e quadrados. Algumas propriedades comentadas em 3.1.2 podem ser demonstradas formalmente nesse estágio.

Mas não somente com números figurados podemos fazer essas articulações. Apenas como exemplo, citamos um exercício encontrado em MB: calcule o n-ésimo número inteiro positivo que, dividido por 3, apresenta o maior resto possível. A fórmula que permite calcular a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica convergente é, com freqüência, aplicada na obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica. Problemas em que é a solicitada a quantidade de múltiplos de um certo número, num intervalo conhecido, são freqüentes nas coleções.

6.6 – ANÁLISE COMBINATÓRIA.

Outro conteúdo que permite explorar propriedades dos inteiros, pela sua própria natureza. Alguns problemas mencionados anteriormente pertencem tipicamente a esse domínio. Citamos como exemplos a determinação da quantidade de diagonais de um polígono ou de apertos de mão dados em um grupo de *n* pessoas, que como já vimos, está ligado aos números triangulares. Problemas em que se deve determinar a quantidade de múltiplos de 2, 5 ou 10 em um certo intervalo são freqüentes. A definição de *n!* também permite inúmeras aplicações. Destacamos um bom problema em MG: demonstrar que 101! + 19 não é primo.

Havíamos mencionado, em 3.2.2, que usando conceitos de análise combinatória pode-se obter a fórmula que fornece a quantidade de divisores positivos de um inteiro *A.* Recorde que se os fatores primos de *A* são $p_1, p_2,... p_n$, com expoente iguais, respectivamente, a e_1 ,e_2 ,...e_n , então a quantidade de divisores de *A* é dada por $(e_1 + 1) . (e_2 + 1). ... .(e_n + 1)$ divisores. Vejamos a prova: todo divisor de *A* é resultado da multiplicação desses fatores primos tomados com expoentes naturais, e que não podem ser maiores do que os expoentes verificados na decomposição de *A*. Repare que cada desses expoentes pode ser igual a zero. Portanto a escolha de um divisor de *A* é um processo que pode ser feito em *n* etapas independentes: o expoente de p_1 pode ser 0, 1,2,...,e_1, e temos $(e_1 + 1)$ opções; o expoente de p_2 pode ser 0, 1, 2, ... ,e_2 fornecendo um total de $(e_2 + 1)$ opções; o processo deve ser estendido até p_n. A tese agora é uma conseqüência do princípio fundamental da contagem. Antes da generalização, recomendamos alguns problemas em que se deve obter a quantidade de divisores em alguns casos particulares.

6.7 – NÚMEROS COMPLEXOS.

Podem ser introduzidos com equações de 2º grau, que é uma opção adotada por vários autores. Em MA, por exemplo, a primeira atividade proposta é a determinação de dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40, idealizada por Girolamo Cardano (1501-1576). Admitindo a existência da raiz quadrada de um número negativo, o autor mostra que o problema passa a ter solução. Dessa forma, justifica a definição da unidade imaginária. A atividade pode ser classificada como um disparador, conforme a definição de Alciléa Augusto.

Todos os autores, em algum momento, recorrem ao argumento da resolução de equações como motivação para ampliações dos conjuntos numéricos. Acreditamos que o problema de se obter dois números a partir da soma e do produto também seja adequado para a finalidade em questão. Pensamos também que pode ser explorado o fato de que, entre os inteiros, um problema em que se pedem dois números, conhecendo a soma e o produto, pode ter solução ou não, e que a decomposição em primos fornece a resposta. E se devemos encontrar três ou mais números inteiros, nas mesmas circunstâncias, pode não haver solução, e pode haver mais de uma. Vejamos algumas possibilidades de explorar a comparação entre o mesmo problema no âmbito dos reais ou os complexos.

Suponha que desejamos encontrar três números inteiros, cujo produto seja 105, e cuja soma é *s.* A partir da fatoração 105 = 3.5.7, esses números, se existirem, podem ser determinados. O leitor pode verificar que existe solução única em alguns casos, como s = 15, –1, 39, –7. Fixemos então s = 15. Se os números procurados, que chamaremos de *a, b* e *c,* devem ser reais, podemos obter uma solução particular atribuído um valor para *a*, e assim recaímos no caso anterior, pois o problema passa a ter a seguinte formulação: encontre dois números cuja soma é (15 – *a*) e cujo produto é 105/*a.* Dependendo do valor adotado, o problema terá solução. Repare que *b* e *c* serão as raízes da seguinte equação: $x^2 - (15 - a).x + 105/a = 0$, com $\Delta = (15 - a)^2 - 420/a$. Note que se *a* é negativo, temos $\Delta > 0$, logo existem *b* e *c* reais, portanto o problema tem infinitas soluções. Pode-se verificar que a conclusão vale sempre que o produto dado (no caso, 105) é positivo. Finalmente, se *a, b* e *c* devem ser números complexos, não somente existem infinitas soluções, como, em particular, podemos encontrar uma para cada valor atribuído para *a.*

Façamos agora a descrição de uma atividade que resume nossas observações. Inicialmente os alunos devem encontrar três números inteiros cujo produto é 105 e cuja soma *s* também é conhecida. Fazendo variar s, podemos estudar casos com solução única e outros sem solução, utilizando a decomposição em primos de 105. Em seguida devem ser obtidos três números reais com produto 105 e soma 15, atribuindo valor a um deles. O professor pode orientar a escolha desse número, de modo que tenhamos casos com e sem solução. Finalmente, os alunos devem determinar três números complexos com mesma soma e produto, usando a mesma estratégia. Agora a solução sempre existirá. Se, por exemplo, assumirmos que um dos números deva ser 10, os outros serão ($5 \pm \sqrt{17}\,.\,i$) / 2. De fato:

$$10 + ((5 + \sqrt{17}\,.\,i) / 2) + ((5 - \sqrt{17}\,.\,i) / 2) = 15.$$

$$10 \times ((5 + \sqrt{17}\,.\,i) / 2) \times ((5 - \sqrt{17}\,.\,i) / 2) = 105.$$

Reforçamos que se os números procurados são inteiros, pode haver mais de uma solução. Tal fato não ocorre no caso particular que descrevemos, mas é a característica que fornece a chave, por exemplo, de um interessante problema, que descrevemos abaixo.

Um homem encontra seu ex-professor de matemática, depois de 20 anos sem que eles tenham se visto. Após dizer que tem três filhas, o homem propõe um desafio ao professor, para que ele descubra a idade das três: “O produto das idades das meninas dá 72, e a soma é o número daquela casa ali em frente”. O professor, ao ver o número, diz que ainda não é capaz de responder. O homem pede desculpas, e complementa a informação: “A mais velha toca piano”. Com esse dado, o velho mestre descobre a idade das três.

Existe uma quantidade limitada de números naturais menores do que *20* cujo produto é *72*. Entre as opções estão $6 \times 6 \times 2$ e $8 \times 3 \times 3$; nos dois casos a soma também é a mesma, e uma repetição assim não acontece nos outros casos. Sabemos, portanto, que o número da casa apontada foi 14, e podemos deduzir que as mais novas são gêmeas, com 3 anos cada, e a mais velha tem 8. A conclusão não decorre da condição de pianista dessa moça, mas do fato de uma delas ser a mais velha, o que não aconteceria se a mais nova tivesse 2 anos e as duas mais velhas fossem gêmeas, com 6 anos cada.

6.8 – POLINÔMIOS.

Talvez seja, dentre os conteúdos usualmente enfocados no ensino médio, o que mais pode se valer das propriedades dos números inteiros. A notável semelhança entre as duas estruturas algébricas, *Z* e o anel dos polinômios, permite ao professor ricas comparações. A divisão com resto é a chave do entendimento dessa possível analogia. Temos outro contexto em que o conceito de divisibilidade se faz presente, e propriedades conhecidas dos inteiros têm seus correspondentes entre os polinômios. Mesmo a semelhança entre os dois teoremas fundamentais, o da aritmética e o da álgebra, pode facilitar a compreensão de ambos por parte dos estudantes.

Eis um exemplo de analogia que pode ser utilizado em sala de aula. Sejam a, b, n inteiros, com $a \neq b$; nem sempre é verdade que, se a divide n e b divide n, então ab divide n. Mas a afirmação é verdadeira se $mdc(a,b) = 1$; em particular, se a e b são primos. Ora, o papel dos números primos em *Z* é similar ao dos polinômios de 1º grau na segunda estrutura. Não deve surpreender, portanto, a constatação de que, se $(x – a)$ divide $P(x)$, $(x – b)$ divide $P(x)$, e $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível por $(x – a).(x – b)$. Trata-se do teorema da divisão pelo produto, abordado no estudo dos polinômios pela sua aplicabilidade na resolução de certas equações.

Outro bom exemplo de articulação dos números inteiros com esse tema, que pode ser explorado na busca de raízes de polinômios, é a proposição: seja *f(x)* um polinômio de grau $n > 1$, com coeficientes inteiros, que admite uma raiz racional *a/b* (com *a* e *b* inteiros, *b* não nulo e *a,b* relativamente primos). Então *a* divide o termo constante de *f* e *b* divide o coeficiente de x^n.

Para a demonstração, basta escrever o polinômio na forma usual, como soma de monômios de graus decrescentes. Substituímos em seguida a variável *x* pelo racional *a/b*, obtendo $f(a/b) = 0$. Multiplicamos essa relação por b^n, obtendo no primeiro membro um número inteiro. Agora, basta observar que, das $(n + 1)$ parcelas obtidas, as *n* primeiras são divisíveis por *a.* Logo, *a* divide o produto do termo independente por b^n. Como *a* e b^n são primos entre si, seque que *a* divide o termo independente. Um argumento análogo mostra que *b* divide o coeficiente de x^n.

6.9 – GEOMETRIA.

6.9.1 – Considerações gerais.

Um dos campos mais férteis para o professor de matemática é o das articulações entre geometria e teoria dos números. No capítulo 3 vimos algumas atividades que estabelecem conexão entre as duas áreas, envolvendo assuntos como *mmc, mdc*, quantidade de divisores, entre outros. Foram descritas tendo em mente aplicações no ensino fundamental, mas várias atividades comentadas se prestam também ao ensino médio. Inúmeras outras relações dessa natureza podem ser feitas, e não temos aqui a pretensão de esgotar o assunto, que, aliás, nos parece inesgotável. Limitamo-nos a recordar umas poucas articulações, que representam recursos pedagógicos muito interessantes.

6.9.2 – A incomensurabilidade.

A demonstração de que $\sqrt{2} \notin Q$, apresentada em 3.5.2.5, tem o seguinte equivalente geométrico: se *l* e *d* são, respectivamente, as medidas do lado e da diagonal de um mesmo quadrado, não existe o número *c* tal que *l* e *d* possam ser subdivididos em quantidades inteiras de segmentos de comprimento *c*. A argumentação é similar à prova algébrica: suponha por absurdo que existem inteiros *a* e *b* tais que $d = a.c$ e $l = b.c$, logo $d/a = l/b \Rightarrow d/l = a/b$, e como $d = \sqrt{2}\,.l$, temos $a/b = \sqrt{2}$. Já vimos que se pode, então, concluir que *a* e *b* devam ser pares. Portanto as medidas da diagonal e do lado podem ser escritas como $d = (a/2).(2c)$ e $l = (b/2).(2c)$, com $a' = a/2$ e $b' = b/2$ naturais. Com as mesmas observações anteriores, pode-se verificar que *a'* e *b'* também são pares, e esse processo pode ser estendido infinitamente, sempre com a mesma conclusão. Portanto se *c* satisfaz as condições exigidas, o mesmo ocorre com $2c$, $4c$, $8c$, e assim sucessivamente, o que é um absurdo.

A prova tem a vantagem de tornar a contradição mais evidente, por meio de figuras. Se houver um segmento que subdivide o lado e a diagonal do quadrado em quantidades inteiras, o segmento obtido com a duplicação desse primeiro tem a mesma propriedade. Mas o mesmo acontece com um terceiro segmento, duas vezes maior do que o segundo; esse processo não tem fim, o que é impossível. Em algum passo a medida do novo segmento será maior do que o comprimento do lado do quadrado.

6.9.3 – Ladrilhamento.

Um problema bastante conhecido, mas que conserva seu interesse: devemos cobrir completamente uma parede usando ladrilhos que são polígonos regulares e congruentes, de modo que um vértice de um ladrilho nunca pode ser um ponto no interior de um lado de outro. Tal cobertura não é possível com qualquer polígono regular. Para apresentar um exemplo, usaremos a fórmula mencionada em 3.5.1.1, que relaciona a quantidade n de lados de um polígono regular e a medida α de seu ângulo interno, $\alpha = (n - 2).\ 180\ /\ n.$ Assim, um pentágono regular tem ângulos internos medindo 108º. Considere agora um ponto no plano que seja vértice de p polígonos. Se forem pentágonos, a justaposição de três deles deixará um espaço entre o primeiro e o último, e esse espaço é insuficiente para a colocação de um quarto ladrilho, pois $3 \times 108 < 360 < 4 \times 108$, logo não é possível usar ladrilhos com tal formato. Note que é necessário que tenhamos $p.\alpha = 360$, com p inteiro.

Das relações $\alpha = (n - 2).\ 180\ /\ n$ e $p.\alpha = 360$, podemos concluir que vale $360\ /\ p = (n - 2).\ 180\ /\ n$, portanto $p.\ (n - 2) = 2n$, com $n - 2 > 0$. Lembremo-nos agora que, se dois inteiros são múltiplos de um mesmo número, a soma e a diferença dos dois também é, e, além disso, todo inteiro é múltiplo de si próprio. Como $2n$ é múltiplo de $(n - 2)$, temos que $2n - (n - 2) = (n + 2)$ também é; portanto $(n - 2) - (n + 2) = 4$ é múltiplo de $(n - 2)$. Os únicos divisores positivos de

4 são 1, 2 e 4. Igualando (n – 2) a cada um desses números, obtemos n = 3, 4 e 6. Assim, os ladrilhos só podem ser triângulos eqüiláteros, quadrados ou hexágonos regulares.

Em geral, atividades envolvendo geometria podem permitir uma associação entre resultados formais e a interpretação com o uso de desenhos ou material concreto. O problema dos ladrilhos certamente tem essa característica.

6.9.4 – Ternas pitagóricas.

Grande parte do material contido nessa seção faz parte de um ótimo artigo, publicado na RPM, "Outro belo teorema de Fermat", do professor Gilberto Garbi. Recomendamos fortemente a sua leitura, por comentar outros resultados muito interessantes de teoria dos números.

É prática comum entre os autores de livros didáticos de matemática utilizar em exercícios o triângulo retângulo cujos lados medem 3, 4 e 5, ou então triângulos semelhantes, com lados medindo, por exemplo 6, 8 e 10, ou 18, 24 e 30. A terna 5, 12 e 13 também aparece em várias atividades ao longo das coleções, do fundamental e do médio. Não se pode ignorar que o teorema de Pitágoras permite a apresentação de uma infinidade de números irracionais. Também pode ser explorada a possibilidade de apresentar uma grande variedade de ternas pitagóricas, isto é, números inteiros positivos a, b e c que satisfaçam a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Não há grande dificuldade em descobrir novas ternas, uma vez que se toma contato com a seguinte estratégia: atribuir valores aos naturais não nulos m e n, e calcular $a = m^2 + n^2$, $b = m^2 - n^2$ e $c = 2mn$. A relação se verifica, pois então $b^2 + c^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^2 = (m^2 + n^2)^2 = a^2$. Vamos fixar a linguagem empregada, dizendo que o par (m,n) gera a terna (a,b,c), com $a > b$ e $a > c$. Note que a condição suficiente para que os números escolhidos sejam geradores de uma terna é $m > n$, pois assim a, b e c são positivos, e do contrário $m^2 - n^2 \leq 0$. O simples fato de propiciar ao aluno um método de descobrir ternas pitagóricas já nos parece ter um grande valor pedagógico. Mas o assunto ainda tem muito a oferecer.

Diremos que (a,b,c) é uma terna primitiva se seus três termos são primos entre si. Note que multiplicando cada um deles por um mesmo inteiro positivo, obtemos uma nova terna. O equivalente geométrico seria construir um triângulo retângulo semelhante a outro conhecido. Assim, a partir de uma primitiva, é possível obter tantas ternas quantas se queiram.

Observe agora que nem toda terna é gerada por um par (m,n) nas condições descritas acima. Um exemplo é (15,12,9), e isto pode ser facilmente verificado: como $a = 15$, se existissem geradores, deveríamos ter $m < 4$, pois do contrário $m^2 + n^2 > 16$. Assim as únicas possibilidades que precisamos considerar são (2,1), (3,1) e (3,2), e nenhuma delas gera (15,12,9).

O que queremos demonstrar é que toda terna pitagórica primitiva admite um par de geradores. Para tal, precisamos de uma série de resultados auxiliares.

Alguns são extremamente simples, e todos nos parecem adequados para abordar os números inteiros com alunos de ensino médio.

Lema 1: Se *(a,b,c)* é primitiva, *b* e *c* não são ambos pares. De fato, nesse caso b^2 e c^2 são pares; o mesmo acontece com a sua soma; segue que a^2 é par, logo *a* é par, e então os três termos têm *2* como fator comum, contrariando o fato de que a terna é primitiva.

Lema 2: Uma terna, primitiva ou não, tem ao menos um termo par. Se *b* e *c* são ímpares, existem inteiros *x* e *y* tais que $b^2 + c^2 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2$, portanto $b^2 + c^2 = 4.(x^2 + y^2 + x + y) + 2$, e como esse número deixa resto 2 na divisão por 4, o fator 2 só aparece uma vez na sua decomposição. Logo ele não pode ser um quadrado perfeito.

Lema 3: O maior número de uma terna primitiva é ímpar. Conseqüência dos lemas anteriores, pois *b* e *c* devem ter paridades diferentes; o mesmo ocorre com seus quadrados, e como a soma de par com ímpar é ímpar, a^2 é ímpar, logo *a* é ímpar.

Lema 4: Os geradores de uma primitiva têm paridades diferentes. Se não fosse assim, a soma de seus quadrados seria a soma de dois pares ou dois ímpares, e qualquer um desses casos resulta em *a* par, contrariando o lema 3.

Lema 5: Se *(m,n)* gera uma primitiva, então *m* e *n* são primos entre si. Suponha por absurdo que exista um inteiro $x > 1$ tal que $m = px$ e $n = qx$, com *p* e *q* inteiros. Portanto $a = (px)^2 + (qx)^2 = x^2. (p^2 + q^2)$; $b = (px)^2 – (qx)^2 = x^2. (p^2 – q^2)$;

c = 2. $(px).(qx) = x^2.(2pq)$. Os números que compõem a terna têm um fator comum, x^2, o que contraria a hipótese. Portanto um par de geradores deve ser formado por números relativamente primos. Note que, por exemplo, (2,1) gera (5,4,3) e (4,2) gera (20, 16,12); duplicamos os geradores, e a nova terna é formada por números 4 vezes maiores que os da primitiva.

Podemos concluir, de considerações feitas no início da seção, e dos lemas 4 e 5, que se m e n são naturais não nulos, com $m > n$, , então eles formam um par de geradores de alguma terna pitagórica. Além disso, se a terna é primitiva, então m e n são primos entre si, e somente um deles é ímpar.

Nesse ponto, gostaríamos de acrescentar uma impressão nossa. Os fatos comentados e provados até aqui nos parecem suficientes para justificar uma abordagem desse assunto, enriquecida com vários exemplos de ternas pitagóricas, o que significa apresentar vários exemplos de triângulos retângulos com medidas inteiras nos seus lados. Além disso, estamos investigando várias propriedades dos números inteiros, nossa proposta inicial. Mas lembramos que nosso objetivo nessa seção é provar um resultado ainda mais geral. As argumentações a partir desse ponto são mais elaboradas; entretanto, o resultado final justifica nossa intenção de prosseguir. Façamos isso, então:

Lema 6: A soma e a diferença dos dois termos ímpares de uma terna primitiva (a,b,c) não têm fatores primos ímpares comuns. Sabemos que a é ímpar e um dos outros, digamos b, também. Note que $c^2 = a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$. Supondo que $(a + b)$ e $(a - b)$ tenham um fator ímpar comum p, então ele também é fator da soma e da diferença de ambos, isto é, p é fator primo de $2a$ e de $2b$, portanto p é fator de a e b. Mas nessas condições p^2 é divisor de c^2, logo p também é fator de c, o que é um absurdo, pois a terna é primitiva.

Lema 7: Sejam p e q inteiros ímpares, $s = p + q$ e $d = p – q$. Nessas condições, s e d são pares, mas somente um deles é divisível por 4. Existem x e y inteiros tais que $p = 2x + 1$ e $q = 2y + 1$; então $s = (2x + 2y + 2) = 2.(x + y + 1)$, e além disso $d = (2x – 2y) = 2.(x – y)$. Se x e y são ambos pares ou ambos ímpares, $(x – y)$ é par, e $(x + y + 1)$ é ímpar, logo d é múltiplo de 4, mas s não é; se x e y têm paridades diferentes, a situação se inverte.

Agora já estamos em condições de provar o seguinte:

Teorema: Toda terna pitagórica primitiva tem um par de geradores.

Demonstração: Sejam a, b e c inteiros positivos, relativamente primos tais que $a^2 = b^2 + c^2$. Já sabemos que um dos dois números menores, digamos c, é par, e os outros dois são ímpares. Como c é par, podemos escrever $c^2 = 2^{2k}.P_c^2$, em que k é inteiro positivo e P_c é o produto dos fatores primos ímpares de c, ou então $P_c = 1$, caso c não tenha fatores primos ímpares.

Na igualdade $c^2 = (a + b).(a – b)$, escreveremos $s = (a + b)$ e $d = (a – b)$. Pelo lema 6, s e d não têm fatores primos ímpares comuns; além disso, os primos ímpares aparecem com expoentes pares em s e em d, pois $s.d$ é um quadrado perfeito. Com essas considerações, aplicando a unicidade da decomposição em primos, podemos concluir que $P_c^2 = P_s^2.P_d^2$, sendo P_s^2 o produto dos fatores primos ímpares de s, e P_d^2 o produto dos fatores primos ímpares de d; usaremos

$P_s = 1$, caso s não tenha fatores primos ímpares, e $P_d = 1$, caso d não tenha fatores primos ímpares.

Do lema 7, sabemos que s e d são pares, e somente um deles é divisível por 4. Novamente usamos a decomposição em primos de c^2, para afirmar que se s não é divisível por 4, então d é divisível por 2^{2k-1}, e vice-versa.

Existem agora duas possibilidades a se considerar. A primeira é:

$s = (a + b) = 2.\ P_s^2.$

$d = (a – b) = 2^{2k-1}.\ P_d^2.$

Na segunda, trocamos de posição as potências de base *2.* No primeiro caso, somando as duas equações temos:

$2a = 2.(P_s^2 + 2^{2k-2}.\ P_d^2) \Rightarrow a = P_s^2 + 2^{2k-2}.\ P_d^2.$

Subtraindo as equações, temos:

$b = P_s^2 – 2^{2k-2}.\ P_d^2.$

Agora, adotamos $m = P_s$ e $n = 2^{k-1}.\ Pd.$

Segue-se que $m^2 + n^2 = a$, e $m^2 – n^2 = b.$ Resta provar que $c = 2mn$. De fato:

$c^2 = a^2 - b^2 = (m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 \Rightarrow c^2 = 4m^2n^2.$

No segundo caso, usamos procedimentos análogos, e obtém-se a mesma conclusão. De todo modo, sempre existe um par *(m,n)* que gera a primitiva *(a,b,c).*

6.10 – LEITURAS PARA A CRIAÇÃO DE REPERTÓRIO.

Conforme já havíamos adiantado em 6.1, forneceremos nesta seção algumas indicações para professores interessados em ampliar seu repertório de problemas sobre números inteiros. Vimos que nos livros didáticos é possível encontrar um bom material sobre o assunto, mas aqui nos ocuparemos de outras fontes.

Uma observação inicial é que não temos conhecimento de livros que contenham exclusivamente problemas relacionados com números inteiros, e que possam ser aplicados na educação básica. Evidentemente, isso não significa que tal texto não exista. Mas numa boa coleção de problemas dificilmente não encontraremos alguns referentes ao tema, e a pesquisa será ainda mais proveitosa se dela resultar o conhecimento de atividades interessantes de outras áreas também.

Mencionamos em nosso trabalho dois textos de um gênero de literatura de entretenimento, voltado para desafios e enigmas: *O livro dos desafios* de Townsead, e *Uma paródia matemática* de Bolt. O último foi editado em Portugal, e faz parte de uma coleção com mais de 20 títulos, todos dedicados ao assunto. Outro livro dessa natureza que merece menção é de autoria de Ian Stewart, cuja coluna na Scientific American é voltada para a matemática recreativa. No primeiro capítulo de *Mania de matemática*, Stewart apresenta um problema que introduz informalmente o processo de indução. Foi traduzido recentemente para o português, assim como três livros de ótima qualidade, escritos por Smullyan: *Alice no país dos enigmas, O enigma de Sherazade e A dama ou o tigre?* Todos se destacam principalmente pelos bons problemas de lógica, mas também incluem material interessante sobre teoria dos números. De modo geral, há uma grande produção desse gênero de literatura, e pesquisar uma grande quantidade de referências foge ao nosso objetivo. Mencionamos somente mais um, escrito recentemente pelo brasileiro Dimas Monteiro de Barros: *Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos.*

A consulta aos livros não é a única opção para interessados em problemas de matemática, inclusive professores. Entre as fontes disponíveis, a Internet se destaca não somente para referências bibliográficas; existem diversos endereços específicos sobre o assunto que podem ser facilmente localizados com o auxílio de sites de busca.

Não podemos deixar de mencionar a Revista do Professor de Matemática, não somente pelas suas seções de problemas, mas também por ótimos artigos. Já existe uma versão em CD-Rom com todos os exemplares publicados até 2003. Dispõe de mecanismos de busca que facilitam a pesquisa. Maiores informações podem ser obtidas no site da Sociedade Brasileira de Matemática.

O tema de nosso trabalho tem merecido atenção considerável nas olimpíadas de matemática. Também no site da SBM podem ser obtidas as provas das várias edições da olimpíada nacional, bem como de outras olimpíadas, estaduais e internacionais, além de listas de treinamento. Já foram editados livros contendo parte desse material, ricos para consultas.

Nas seções de passatempo de determinados periódicos é comum encontrar atividades desafiadoras, eventualmente sobre números inteiros. O problema das idades das três filhas, que incluímos em 6.7, foi publicado na revista Superinteressante; integra uma edição especial constituída de problemas inseridos nos exemplares mensais. A revista Galileu também publicou recentemente uma edição especial, com biografias de alguns grandes matemáticos, e vários desafios, incluindo alguns sobre números inteiros.

Recomendamos a leitura de dois livros, não em função do acréscimo de repertório de problemas, mas pelas reflexões sobre o universo dos números inteiros: *O último Teorema de Fermat* de Simon Singh e *Tio Petrus e a conjectura de Goldbach* de Apóstolos Doxiadis. O primeiro conta a história do teorema desde a conjectura de Fermat até a demonstração de Willes, passando pelas várias tentativas de prova nesse intervalo. Foi escrito para leitores não familiarizados com a matemática em estágios mais avançados; traz boas descrições sobre a importância do processo dedutivo e esclarecimentos referentes à natureza da teoria dos números. O mesmo ocorre no segundo, uma obra de ficção que relata a história de um matemático que teria comprometido sua sanidade na busca da demonstração da conjectura de Goldbach.

A história da matemática fornece casos que propiciam atividades aplicáveis em sala de aula. O desenvolvimento histórico da teoria dos números também pode ser útil na formação do professor. Em particular, recomendamos as obras de Boyer, Eves e Struik.

Informações mais precisas sobre as fontes mencionadas nesta seção podem ser encontradas na bibliografia.

6.11 – TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA.

Todo inteiro maior do que a unidade ou é primo, ou pode ser escrito de forma única, a menos de ordem, como produto de primos positivos. A denominação escolhida pela comunidade matemática para designar essa afirmação revela sua enorme importância. No entanto, ele é praticamente ignorado em livros do ensino médio.

No ensino fundamental não é mencionada a nomenclatura, que escolhemos como título dessa seção. Não acreditamos que haja nenhum tipo de inconveniente nisso. Mas questionamos o hábito de não tornar conhecido dos estudantes de ensino médio ao menos esse fato. Em parte, por ser fundamental, mas também por ser um teorema. Queremos chamar atenção para o fato de que pode ser provado.

Existem diversas afirmações em matemática que são tão evidentes, que tentar demonstrá-las não costuma ser uma boa estratégia didática. Esse talvez seja o caso do T.F.A., pois, aparentemente, os alunos de 5º série costumam aceitá-lo sem traumas. A simplicidade do enunciado oculta a complexidade da prova. A segunda parte, que garante a unicidade da decomposição, exige argumentos consideravelmente elaborados. Na primeira parte, que garante a existência, uma certa sutileza de raciocínio é utilizada.

Somente a existência será demonstrada aqui. Usaremos uma adaptação dos argumentos encontrados no volume 1 da coleção *A matemática do ensino médio*, editada pela SBM. Não são livros destinados aos alunos; trata-se de material de suporte para o professor. A prova do T.F.A. elaborada por seus autores é um exemplo feliz de utilização da linguagem dos conjuntos, e também do princípio da boa ordem.

Fixemos a seguinte linguagem: chamaremos de composto um número inteiro que pode ser escrito como produto de primos. Suponha por absurdo que existem números inteiros maiores do que 1 que não sejam primos e nem compostos. Então tomamos o menor deles, que vamos chamar de n. Como n não é primo, tem outros divisores positivos além dele próprio e da unidade. Então existem inteiros positivos a e b tais que $n = ab$. Não podemos ter a e b primos, pois então n seria composto, e pela mesma razão não podem ser ambos compostos ou um primo e o outro composto. Logo pelo menos um deles não é primo nem composto. Mas a e b são menores do que n, e isso contradiz nossa hipótese de que n é o menor dos números com essa característica.

Ainda que um professor de ensino médio seja capaz de demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética, inclusive a unicidade, ele deve fazê-lo para seus alunos? Não temos a pretensão de responder essa pergunta. Apenas gostaríamos que nossos alunos compreendessem porque ele é, realmente, fundamental.

BIBLIOGRAFIA

AUGUSTO, Alciléa. *Os disparadores no ensino de alguns tópicos de matemática.* In: Boletim GEPEM, nº 29, pp. 45-47, 1991.

BALL et al. *Anais do 10º ICME.* Copenhague: International Congress of Mathematical Education, Disponível em: <http://www.icme-10.dk/>. Acesso em 03 set. 2005.

BARROS, Dimas Monteiro de. *Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos.* São Paulo: Nova Conquista São Paulo Ed., 2003.

BISHOP, A. J. et al. *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BOLT, Brian. *Uma paródia matemática.* Coleção o prazer da matemática. Tradução por Luiz Leitão. Lisboa: Ed. Gradiva, 1997.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* Tradução por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação / Plano Nacional do Livro Didático. *Guia do Plano Nacional do Livro Didático.* Brasília: MEC / PNLD, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria da Educação Média e Tecnológica / Plano Nacional do Livro do Ensino Médio. *Catálogo do Plano Nacional do Livro do Ensino Médio.* Brasília: MEC / SEMTEC / PNLEM, 2005.

CHEVALLARD, Y, JOHSUA, M. A. *La transposition didactique*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1991.

COELHO, Sônia Pitta; MARANHÃO, Maria Cristina; MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Qual a álgebra a ser ensinada em curso de formação de professores?* In: Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Santos, 2003 B.

COELHO, Sônia Pitta; POLCINO MILIES, César. *Números: uma introdução à matemática.* São Paulo: EDUSP, 2003 A.

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é matemática.* São Paulo: Ed. Ática, 2005 A. 4v.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática.* São Paulo: Ed. Ática, 2005 B. 3v.

DOUADY, R. *Jeux de cadre et dialectique outil-objet. Recherche en Didactique des Mathématiques.* La Pensée Sauvage, vol. 7.2, p. 5-31, 1986.

DOXIADIS, Apostolos. *Tio Petrus e a conjectura de Goldbach: um romance sobre os desafios da matemática.* Tradução por Cristiane Gomes de Riba. São Paulo: Ed. Trinta e quatro, 2001.

DREYFUS, T., *Some views on proofs by teachers and mathematicians.* In: Gagatsis, A. (Ed.), Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education, Cyprus: The University of Cyprus, v. 1, pp. 11-25, 2000.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da UNICAMP, 1997.

GARBI, Gilberto. *Outro belo teorema de Fermat.* In: Revista do Professor de Matemática, nº 38, pp. 1-8, 1998.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. *A conquista da matemática, a + nova*. São Paulo: Ed. FTD S.A., 2005. 4v.

GOULART, Marcio Cintra. *Matemática no Ensino Médio.* São Paulo: Ed. Scipione LTDA., 2005. 3v.

GUELLI NETO, Oscar Augusto. *Matemática.* São Paulo: Ed.Ática LTDA., 2005. 3v.

IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações.* São Paulo: Saraiva Livreiros Editores S.A., 2005. 3v.

KLINE, Morris. *O fracasso da matemática moderna.* Tradução por Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do ensino médio.* Coleção do professor de matemática, v. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

LONGEN, Adilson. *Matemática: Uma Atividade Humana.* Paraná: Base Editora e Gerenciamento Pedagógico, 2005. 3v.

LONGEN, Adilson. *Matemática.* Paraná: Editora Nova Didática Ltda., 2005. 3v.

LOPES BIGODE, Antônio José. *Matemática hoje é feita assim.* São Paulo: Editora FTD S.A., 2005. 4v.

NIVEN, Ivan. *Números: racionais e irracionais.* Tradução por Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA, 1ª. a 8ª. *Problemas e Soluções* Compilado por Élio Mega e Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA, 9ª a 16ª. *Problemas e Soluções* Organizadores: Carlos Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha, Paulo Rodrigues. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

OLIVEIRA, Zelci Clasen de. *Uma interpretação geométrica do MDC.* In: Revista do Professor de Matemática, nº 29, pp. 24-26. 1995.

PARZYSZ, B. *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1.* In Actes du colloque COPIRELEM de Tours, 1998.

PLANETA EDUCAÇÃO. Disponível em: <http://www.planetaeducacao.com.br/professores/suporteaoprof/pedagogia/teoria12construt.asp>. Acesso em 03 set. 2005.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas; um novo aspecto do método matemático.* Tradução por Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Conteúdo das revistas de 01 a 52, publicação quadrimestral. Rio de Janeiro: SBM, 2004. CD-Rom.

REVISTA SUPERINTERESSANTE. *Especial: Problemas de todo tipo para você resolver*. Edição especial. São Paulo: Ed. Abril, jun. 1990.

REVISTA GALILEU. *Eureca: a matemática divertida e emocionante.* Edição especial. Rio de Janeiro: Ed. Globo, maio 2003.

ROBERT, Aline. *Outils d' Analyse des Contenus Mathématiques á Enseigner au Lycée et á L' Université.* Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 18, nº 2, pp. 139-190, 1998.

RODRIGUES PAIVA, Manoel. *Matemática.* São Paulo: Ed. Moderna LTDA., 2005. 3v.

ROQUE BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. *Matemática.* São Paulo: Ed. Moderna LTDA., 2005. 3v.

SANTOS, Neide; COSTA, Rosa Maria E. Moreira da; ROCHA, Ana Regina C. da. *Diretrizes pedagógicas para modelagem de usuário em sistemas tutoriais inteligentes.* Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro / Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 1997. Disponível em: <http://www.c5.cl/tise97/trabajos/trabajo11/>. Acesso em 26 ago. 2005.

SMULLYAN, Raymond. *Alice no país dos enigmas: incríveis problemas lógicos no país das maravilhas.* Tradução por Luiz Carlos Pereira. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 2000.

SMULLYAN, Raymond. *O enigma de Sherazade e outro incríveis problemas das mil e uma noites à lógica moderna.* Tradução por Luiz Carlos Pereira. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1998.

SMULLYAN, Raymond. *A dama ou o tigre? E outro problemas lógicos (inclui um conto matemático sobre a grande descoberta de Godel).* Tradução por Luiz Carlos Pereira. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 2004.

SILVA, Cláudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. *Matemática Aula por Aula*. São Paulo: Ed. FTD S.A., 2005. 3v.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat: A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos.* Tradução por Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Ed. Record, 2004.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Site oficial da entidade. Rio de Janeiro. Disponível em <http://www.sbm.org.br/>. Acesso em 23 ago. 2005.

STEWART, Ian. *Mania de matemática: diversão e jogos de lógica e matemática.* Tradução por Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 2005.

STOCCO SMOLE, Kátia Cristina; VIEIRA, Maria Ignez de Souza; KIYUKAWA, Rokusaburo. *Matemática no Ensino Médio.* São Paulo: Saraiva Livreiros Editores S.A., 2005. 3v.

STRUIK, Dirk J. *História Concisa das Matemáticas.* Lisboa: Ed. Gradiva, 1998.

TOWNSEAD, Charles Barry. *O livro dos desafios.* Tradução por Vera Caputo e Ieda Moriya. São Paulo: Ediouro, 2004.

ZAMPIROLO, Maria José Couto de Vasconcelos; SCORDAMAGLIO, Maria Terezinha; CÃNDIDO, Suzana Laino. *Matemática.* São Paulo: Ed. do Brasil LTDA., 2005. 3v.