

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**Rubens de Souza Cabral Junior**

**Abordagem das Noções Iniciais de Probabilidade em  
uma Perspectiva Construtivista**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**São Paulo  
2009**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC/SP**

**Rubens de Souza Cabral Junior**

**Abordagem das Noções Iniciais de Probabilidade em  
uma Perspectiva Construtivista**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como  
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE  
PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a  
orientação do **Professor Doutor Armando Traldi Junior**.*

**São Paulo**

**2009**

***Banca Examinadora***

---

---

---

*Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.*

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

# *Agradecimentos*

---

---

*Ao CRIADOR, pelo dom da vida.*

*Ao PROF. DR. ARMANDO TRALDI JUNIOR, pelas orientações, paciência e ensinamentos ao longo desta pesquisa.*

*ÀS PROFESSORAS DOUTORAS CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO E CELI APARECIDA ESPASANDIN LOPES, que, no exame de qualificação, contribuíram com sugestões imprescindíveis para o aprimoramento deste trabalho.*

*À PROFA. DRA. CÉLIA MARIA CAROLINO PIRES E AO PROF. DR. ARMANDO TRALDI JUNIOR, pela coordenação do grupo de pesquisa responsável pela inserção da minha pesquisa no projeto em andamento: construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio.*

*Aos colegas do curso de mestrado ANA PAULA LEITE, MARIA DE FÁTIMA ALEIXO DE LUNA, ROGÉRIO FERNANDO PIRES, SILVÉRIO DOMINGOS RIBEIRO, MARIA ADRIANA PAGAN e AMÉRICO AUGUSTO BARBOSA, pelo incentivo nos momentos mais difíceis.*

*Aos professores do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: DR. BENEDITO ANTONIO DA SILVA, DRA. SANDRA MARIA PINTO MAGINA, DR. VINCENZO BONGIOVANNI, DRA. CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO, DR. ANTONIO CARLOS BROLEZZI, DRA. SONIA PITTA COELHO, DRA. MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA, DR. ARMANDO TRALDI JUNIOR, DRA. CELINA APARECIDA ALMEIDA ABAR, que ministraram as disciplinas por mim cursadas.*

*À SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, pela bolsa de estudos concedida pelo Programa Bolsa Mestrado.*

## *Resumo*

---

A investigação realizada teve como objetivo verificar quais são as contribuições e dificuldades dos professores em planejar e desenvolver uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) sobre noções iniciais de probabilidade para alunos do Ensino Médio. A justificativa da nossa pesquisa do tipo qualitativa vai ao encontro do que afirma Simon (1995), de que existem muitos trabalhos na área de aprendizagem com abordagem construtivista, porém muito pouco dos seus resultados está incorporado nas elaborações de aulas dos professores. Sendo assim, efetuamos, inicialmente, uma revisão bibliográfica dos trabalhos que têm como tema o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade. A partir desses resultados, elaboramos uma sequência de ensino de probabilidade, que foi apresentada para três professores desenvolverem com os alunos, na expectativa de avaliar a THA e ao mesmo tempo elaborar novas hipóteses sobre o processo de ensino e aprendizagem de probabilidades. A pesquisa nos mostra que os professores que participaram do estudo têm conhecimento da abordagem laplaciana na introdução do conceito de probabilidade, no entanto carecem de embasamento teórico sobre a possibilidade de apreensão da noção de probabilidade utilizando-se da confrontação dos enfoques frequentista e laplaciano. Este fato limitou as suas contribuições na elaboração e desenvolvimento da THA, conduzindo os professores a uma atitude mais contemplativa do que crítica em relação às atividades apresentadas.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Currículo de Matemática no Ensino Médio. Educação Matemática. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

## *Abstract*

---

The research had as objective to check what are the contributions and difficulties of teachers in planning and developing a hypothetical learning trajectory (HLT) about basic knowledge of probability for high school students. The justification of our research agrees with Simon's statement (1995) that there are a lot of researches in the area of learning with constructivists approach, but very little of their results are incorporated in the classes of teachers. Initially, we did a bibliographic review of the works whose theme is the process of teaching and learning of probability. From these results we made a sequence of teaching probability which we show for three teachers develop with their students, being on tenterhooks to consider the HLT and, at the same time, create new hypotheses about the process of teaching and learning of probabilities. The research shows that teachers who took part in the study have knowledge about the Laplace's approach in introduction of the concept of probability, however they need theoretical support about the possibility of learning basic knowledge of probability using the differences of frequentist and Laplace focus. This fact limited their contributions in the elaboration and development of HLT, leading teachers to a more contemplative than criticism attitude in relation to activities presented.

**Keywords:** Probability. Mathematics curriculum at high school. Mathematics education. Hypothetical learning trajectory.

## Sumário

---

---

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	7
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	9
<b>FUNDAMENTAÇÃO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS</b> .....	9
1.1 Noções elementares de probabilidade .....	9
1.2 O ensino e aprendizagem de probabilidade .....	15
1.3 Justaposição histórica entre os jogos de azar e o cálculo de probabilidades .	19
1.4 Trajetória hipotética de aprendizagem (THA) .....	27
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	37
<b>METODOLOGIA DE PESQUISA</b> .....	37
2.1 Metodologia e procedimentos metodológicos .....	37
2.2 Cenário de pesquisa .....	38
2.3 Definições para a análise de dados .....	42
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	43
<b>RELATÓRIOS DAS AULAS E RECONSTRUÇÃO DA THA</b> .....	43
3.1 Primeira versão da THA desenvolvida em sala de aula .....	43
3.2 Síntese da análise dos dados .....	74
3.3 Segunda versão da THA após alterações sugeridas pelos professores .....	77
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	89
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	97
<b>ANEXO</b> .....	101
Questionário sobre o perfil dos professores .....	101



## *Introdução*

---

Nesta introdução vamos expor nossa trajetória profissional, que nos aproximou do tema pesquisado, o objetivo e a questão de pesquisa.

### **Trajетória acadêmica profissional**

Atuando como professor da Educação Básica, constatamos que um dos assuntos mais recorrentes, que apresentavam o maior número de questionamentos e resoluções equivocadas por parte dos alunos, era o relacionado à Probabilidade.

Ao participarmos do curso de especialização em Educação Matemática oferecido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), em parceria com a Secretaria Estadual da Educação de São Paulo, em 2006, levantamos diferentes hipóteses sobre alguns aspectos didáticos no processo de ensino e de aprendizagem sobre o tema Probabilidade.

Sendo assim, respaldados por diferentes teorias, nos sentimos motivados a aprofundar nossos estudos sobre o tema. Isso foi possível em razão do ingresso no curso de mestrado dessa mesma instituição.

O grupo de pesquisa que mais se aproximou dos nossos propósitos foi o denominado “Organização e Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores”, coordenado pela Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires e pelo Prof. Dr. Armando Traldi Junior, que tem por finalidade desenvolver pesquisas sobre o processo de organização, desenvolvimento e implementação de currículos e sua

relação com o processo de formação e de atuação de professores. Focaliza currículos de Matemática da Educação Básica e da Educação Superior e procura contribuir para a construção de conhecimentos nesta área de grande relevância na Educação Matemática.

Esse grupo desenvolve, atualmente, o projeto de pesquisa “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores”, que tem como uma de suas principais propostas desenvolver dissertações de mestrado sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA), que segundo Simon (1995) são compostas por três elementos: objetivos, atividades matemáticas e hipóteses sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Em particular, nosso interesse de pesquisa foi investigar sobre a construção da THA relacionada com as ideias iniciais sobre probabilidade. A ênfase das atividades propostas está na resolução de problemas utilizando jogos e experimentos aleatórios que estimulem a investigação por parte dos alunos para a apreensão das noções elementares da teoria das probabilidades no Ensino Médio.

A primeira versão da THA foi apresentada a três professores para sua análise e, se necessário, propor alterações. Após o desenvolvimento das atividades com os alunos foram realizadas adequações visando seu aprimoramento.

Temos, assim, como objetivo de pesquisa:

Verificar quais são as contribuições e dificuldades dos professores em planejar e desenvolver uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) sobre noções iniciais de probabilidade para alunos do Ensino Médio.

Esse objetivo se desdobrou na seguinte questão de pesquisa:

Quais as dificuldades e contribuições do professor no planejamento e desenvolvimento de uma THA sobre noções iniciais de probabilidade?

# Capítulo 1

---

## FUNDAMENTAÇÃO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Neste capítulo apresentaremos algumas noções elementares de probabilidade, pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio, a proximidade histórica entre os jogos de azar e o cálculo de probabilidade e, finalmente, a trajetória hipotética de aprendizagem como alternativa prática e teórica na elaboração de uma proposta pedagógica.

### 1.1 Noções elementares de probabilidade

De acordo com Novaes & Coutinho (2009), as leis do acaso influenciam o dia a dia de todas as pessoas, especialmente aquelas que necessitam tomar decisões nas empresas, nas indústrias ou mesmo num estabelecimento comercial. As decisões carregam intrinsecamente os riscos que devemos considerar nas mais diferentes áreas profissionais: saúde, comércio, indústria e setor de serviços.

A teoria que abarca a aleatoriedade (ação do acaso) é denominada probabilidade. Podem-se classificar alguns desses fenômenos em duas categorias: os experimentos aleatórios (desenvolvidos a partir de uma intenção humana) e os fenômenos aleatórios que possuem uma evolução que não depende da intencionalidade humana (tais como os fenômenos meteorológicos).

Ainda, segundo as autoras, um experimento aleatório é caracterizado por sua repetibilidade, ou seja, poderá ser repetido quantas vezes se queira, desde que seja sob as mesmas condições; todos os seus resultados são conhecidos de antemão, sem necessidade da realização da experiência; é impossível prever ou calcular o evento resultante do experimento antes da conclusão do processo.

O trecho, a seguir, exemplifica um experimento aleatório:

[...] no lançamento de uma moeda sabemos que a face voltada para cima pode ser cara ou coroa, mas não se será cara na primeira jogada. Podemos ainda reproduzir esse experimento tantas vezes quantas se desejar, sempre nas mesmas condições, ainda que mentalmente. Nesse caso, não podemos calcular esses resultados com precisão, mas podemos determinar o grau de incerteza na sua ocorrência, ao qual chamamos de probabilidade: medida de incerteza na ocorrência de um evento resultante de uma experiência aleatória (NOVAES & COUTINHO, 2009, p. 131-132).

Podem-se adotar três diferentes enfoques para a determinação de uma probabilidade: o enfoque combinatório, o enfoque frequentista e o enfoque subjetivo. Novaes & Coutinho (2009) afirmam que:

A probabilidade subjetiva é determinada por especialistas, que analisam todo o contexto e os resultados já conhecidos de experimentos ocorridos nas mesmas condições (série histórica de resultados) para então estimar um valor a ser adotado. Tal valor é testado no final do processo, para avaliar sua adequação. Este tipo de enfoque está na base do que se chama Métodos Bayesianos (p. 132).

## **Enfoque combinatório**

A probabilidade combinatória é a mais conhecida e estudada na Educação Básica. O enfoque clássico ou combinatório é aquele em que a probabilidade é expressa como a razão entre o número de sucessos que realizam o evento que se quer estudar e o número total de resultados possíveis do experimento aleatório (LOPES & COUTINHO, 2009).

Esta definição foi realizada por Pierre Simon Laplace, em 1814:

A teoria do acaso consiste em reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que sejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao evento do qual procuramos a probabilidade. A razão entre este número e aquele de todos os casos possíveis é medida desta probabilidade, que desta forma não é mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de todos os casos possíveis (LAPLACE, 1985, p. 38, apud LOPES & COUTINHO, 2009, p. 64-65).

Segundo Godino, Batanero & Cañizares (1996), a probabilidade dos eventos poderia ser obtida apenas revolvendo-se questões concernentes à análise combinatória. No entanto, esta definição clássica já apresentava, na época de sua elaboração, inadequações, principalmente por ser restritiva e circular. Além disso, não respondeu a contento o que era probabilidade, proporcionando somente uma forma prática de cálculo de alguns acontecimentos simples. Laplace, como já havia sido feito por Bernoulli, utilizou o princípio da razão insuficiente, que considera que todos os resultados possíveis possuem a mesma probabilidade de ocorrer, por não haver nenhuma razão conhecida para esperar o contrário. Posteriormente, adotou-se o princípio da indiferença que justifica a equiprobabilidade pela homogeneidade e simetria da situação experimental.

A utilização da linguagem atual da teoria dos conjuntos adota como pressuposto que o espaço amostral associado a um experimento aleatório apresenta um conjunto de eventos elementares que satisfazem as condições de simetria indispensáveis para garantir a equiprobabilidade. Entretanto, em geral, o princípio da indiferença não pode ser utilizado em numerosos acontecimentos, tornando-se inviável quando se carece de razões para que se admita a homogeneização de cada resultado ou também quando a variável que se queira determinar é contínua (GODINO, BATANERO, CAÑIZARES, 1996).

É importante observar que todos os eventos elementares do espaço amostral devem ser equiprováveis. Outro ponto a salientar é que neste tipo de abordagem as probabilidades são calculadas antes da realização do experimento, podendo, assim, ser denominada probabilidade *a priori* (FERNANDES, 1999).

## Enfoque frequentista

De acordo com Godino, Batanero & Cañizares (1996), a ausência de fatores pessoais e a demonstração prática por meio da experimentação são os principais elementos neste enfoque, denotando seu caráter objetivo. O enfoque frequentista está alicerçado em duas características observáveis do comportamento após serem efetuadas repetições:

- os resultados variam a cada repetição de uma maneira imprevisível;
- os resultados com pequeno número de repetições podem ser desordenados, mas, quando esses números de repetições aumentam bastante, passa a surgir certa regularidade.

Pode-se exemplificar uma aplicação desse enfoque no seguinte exemplo: existem jogos que para o participante iniciar a partida é necessário que saia o número 6 no lançamento de um dado. Este fato pode induzir determinadas crianças a pensar que ele seja mais difícil de obter que os demais números, pois muitas vezes demora-se um tempo relativamente grande para que ocorra o número 6. Ao afirmarmos que simplesmente a probabilidade de cada face é 1/6 tende-se a sofrer resistência para sua aceitação; a abordagem frequentista possibilita um questionamento e superação de concepções errôneas de crianças em aceitar a mesma probabilidade de ocorrência dos números das faces de um dado (HAWKINS & KAPADIA, 1984, apud FERNANDES, 1999).

De acordo com Ara (2006), a probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  pode ser definida como o limite da frequência relativa do evento  $A$ , quando o número de repetições do experimento, sob as mesmas condições, tende ao infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} fr(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Em que,

$P(A)$ : probabilidade de ocorrência do evento  $A$

$fr(A)$ : frequência relativa do evento  $A$

$n_A$  : número de vezes que o evento  $A$  ocorreu em  $n$  idênticos e independentes ensaios experimentais

$n$ : número de repetições do experimento

Na prática, podemos aproximar o valor da probabilidade de ocorrência de um evento  $A$  realizando um grande número de ensaios idênticos e independentes. Então, podemos considerar, segundo Ara (2006), que:

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

Em 1713, Bernoulli justificou este processo por uma forma fraca da “Lei dos Grandes Números” que foi enunciada em sua obra *Ars Conjectandi*:

Para evitar a fadiga de uma exposição sem que se aborde diretamente o assunto, chamarei de “fecundos” ou “férteis” os casos nos quais um evento pode se produzir, e “estéreis” aqueles nos quais o mesmo evento não pode se produzir; da mesma forma, chamarei experiências “fecundas” ou “férteis” aquelas nas quais constata-se que um dos casos férteis pode ocorrer, e “infecundas” ou “estéreis” aquelas para as quais observa-se que um dos casos estéreis se produz. Seja então o número de casos férteis em relação ao número de casos estéreis, precisamente ou aproximadamente na razão  $r/s$ , e que seja, em consequência, em relação ao número total na razão  $r/(r+s)$  ou  $r/t$ , admitindo os limites  $(r+1)/t$  e  $(r-1)/t$ . É necessário mostrar que se pode conceber experiências em tal número que as tornem mais verossímeis quantas vezes se quiser que o número de observações férteis seja, em comparação ao número de todas as observações, uma razão nem maior que  $(r+1)/t$  nem que  $(r-1)/t$  (BERNOULLI, 1987, apud COUTINHO, 1996, p. 13).

Consoante Smole & Diniz (2003), pode-se, assim, que no lançamento de moeda faz-se uma aproximação da probabilidade de ocorrência da face cara após um grande número de repetições do experimento calculando a frequência relativa do resultado cara. Tornaram-se famosas as experimentações realizadas por:

- Georges-Louis Leclerc Buffon (1707-1788), nobre francês, lançou uma moeda 4040 vezes e observou 2048 caras em seu experimento.  $F_r =$

$$\frac{2048}{4040} \cong 0,5069.$$

- John Kerrich, matemático sul-africano, durante o tempo que esteve preso na Segunda Guerra Mundial, obteve 5067 caras em 10000 lançamentos.  $F_r = \frac{5067}{10000} = 0,5067$ .
- Karl Pearson (1857-1936), um estatístico inglês, lançou uma moeda 24000 vezes, obtendo 12012 caras.  $F_r = \frac{12012}{24000} = 0,5005$ .

Pode-se, também, estimar a probabilidade de um fenômeno aleatório, por exemplo, o nascimento de meninos numa comunidade após a contagem de um grande número de nascimentos de crianças (ARA, 2006).

Apesar de a probabilidade frequentista ser baseada em resultados experimentais, o que não ocorre na definição clássica, e aparentar ser mais objetiva, possui as mesmas limitações, de cunho subjetivo, no que se refere ao aspecto de precisar ser realizada em condições idênticas e independentes. Além do mais, é calculada com aproximação, pois o número de experimentos realizados é finito. Caso o experimento admita infinitos resultados possíveis, deverá ser feita uma adaptação, pois esta definição a princípio foi estabelecida para espaços amostrais finitos (ARA, 2006).

## **Definição axiomática de probabilidade**

Ara (2006) faz uma analogia da probabilidade axiomática com a geometria euclidiana que possui um conjunto de axiomas e entes matemáticos (conceitos primitivos) como ponto, reta e plano, porém nem por isso deixa de ter aplicações no mundo real.

A teoria axiomática de Kolmogorov surgiu como consequência das restrições que o conceito clássico laplaciano impunha sobre a equiprobabilidade dos eventos elementares inseridos em um espaço amostral finito. Houve uma primeira expansão da definição de Laplace que consistia no cálculo de probabilidades de eventos com resultados infinitos. Este desenvolvimento permitiu



que, se  $E$  é alguma região com uma medida conhecida (comprimento, área, volume), a probabilidade de que um ponto escolhido aleatoriamente pertença a um subconjunto  $A$  de  $E$  é calculada como o quociente entre a medida de  $A$  e a medida de  $E$  (GODINO, BATANERO & CAÑIZARES, 1996).

Ainda de acordo com os autores, a teoria matemática de probabilidade, como é conhecida atualmente, é relativamente recente. Coube a Andrei Kolmogorov (1903-1987) a sua axiomatização em seu trabalho publicado em 1933 e traduzido posteriormente, em 1956, para o inglês com o título *Foundations of theory of probability*. Os eventos são representados por conjuntos e a probabilidade é uma medida definida sobre estes conjuntos. Este desenvolvimento, baseado na teoria da medida, não só proporcionou um fundamento lógico e consistente para o Cálculo de Probabilidades, como também a integrou com a corrente principal da Matemática contemporânea.

Segundo Novaes & Coutinho (2009), seus axiomas podem ser enunciados da seguinte forma:

Dados dois eventos  $A$  e  $B$  resultantes de um mesmo experimento aleatório, ou seja, contidos em um mesmo espaço amostral  $\Omega$ , sendo  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ , temos:

Axioma I:  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

Axioma II: Se  $A = \Omega$ , então  $P(A) = 1$ , e nesse caso  $A$  é chamado evento certo.

Axioma II - A: Se  $A = \emptyset$ , então  $P(A) = 0$ , e nesse caso  $A$  é chamado evento impossível.

Axioma III: Se  $A \cap B = \emptyset$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

## 1.2 O ensino e aprendizagem de probabilidade

Consoante o tema escolhido e mais especificamente sobre as ideias iniciais na introdução do conceito de probabilidade no Ensino Médio, fizemos uma revisão bibliográfica auxiliados pelas publicações divulgadas no *site* <http://www.pucsp.br/~cileda/>, intitulado Educação Estatística, cujo objetivo é a divulgação e a troca de experiências sobre as pesquisas nessa área. Destacamos

duas pesquisas que abordam esse tema: a de Coutinho (1996) e a de Silva (2002).

Coutinho (1996) aplicou, em 1993, na França, um questionário para identificar concepções espontâneas sobre probabilidade em alunos da 2.<sup>a</sup> série do Ensino Médio e como trabalhar com estas concepções à luz dos resultados de pesquisas nacionais e internacionais, tanto na Educação Matemática como na Psicologia da Educação. A questão de pesquisa era: Quais as concepções espontâneas em alunos de 16-18 anos sobre probabilidade? Como trabalhar com estas concepções para que elas não se tornem um obstáculo epistemológico ou didático no decorrer do processo de aprendizagem?

Com a colaboração dos professores das classes participantes e também tomando como base os resultados obtidos pela aplicação do questionário, elaborou-se uma sequência de ensino para a aquisição dos primeiros conceitos de probabilidade utilizando-se a visão frequentista.

No Brasil, houve um questionário similar aplicado no primeiro ano do curso de Fonoaudiologia na Fundação Lusíada, em Santos (alunos entre 17 e 19 anos). A partir dos questionários aplicados nas duas escolas e valendo-se da experiência com estudantes franceses, foi elaborada outra sequência para ser aplicada em alunos brasileiros.

Após o desenvolvimento da sequência de ensino, um teste foi aplicado para averiguar se os alunos tanto franceses quanto brasileiros haviam corrigido suas concepções errôneas detectadas pelo questionário. Este teste era composto de cinco questões que visavam a verificação se o aluno conseguiria descrever uma experiência aleatória, bem como seu espaço amostral.

Um dos resultados deste estudo, realizado com alunos do Ensino Médio francês e alunos do primeiro ano do Ensino Superior brasileiro, foi a identificação do obstáculo da equiprobabilidade, que é aquele em que na ausência de informações se atribui a mesma probabilidade aos eventos elementares. Além da identificação deste tipo de obstáculo, foi constatado também que a resistência ao ensino formal de probabilidade aumenta proporcionalmente à idade dos alunos. As escolhas didáticas do professor podem influenciar na diminuição da resistência

ao ensino, caso se adote um enfoque frequentista para a introdução ao conceito de probabilidade e quando é feita por meio de problemas que envolvam situações de não equiprobabilidade.

Ainda, segundo Coutinho (1996), as ideias iniciais para a introdução dos conceitos de probabilidade por uma visão frequentista apresentam outras vantagens mostradas no decorrer da sua dissertação. Faz uma crítica ao programa utilizado no Brasil que salienta exclusivamente a visão clássica (também conhecida como pascaliana ou laplaciana), limitando seu aprendizado aos casos em que prevalece a hipótese de equiprobabilidade.

A autora salienta que determinadas concepções errôneas continuam existindo mesmo depois do suposto aprendizado das noções básicas de probabilidade, fato que ratifica a importância do seu estudo desde as séries iniciais. Coutinho (2001, 2002) mostra a necessidade de confrontar os dois enfoques para a construção do conceito.

O trabalho de Silva (2002) propõe uma integração das concepções frequentista e clássica de probabilidade com o intuito de tornar a aprendizagem significativa e abrangente no que tange aos seus conceitos iniciais. Elencou uma lista contendo os principais problemas referentes ao ensino e à aprendizagem do conceito de probabilidade no Ensino Médio, entre eles podemos citar:

- ausência de alguns tópicos importantes no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade, tais como: caracterização de experimentos aleatórios e determinísticos, noção de acaso e espaços amostrais não equiprováveis;
- exclusividade da perspectiva clássica de probabilidade;
- utilização do terno “definição-exemplo-exercício” para abordar as noções introdutórias do conceito de probabilidade (evento, espaço amostral e a própria definição de probabilidade que é realizada exclusivamente pela visão laplaciana), totalmente contrária a uma proposta que parta de uma situação-problema e que somente após algumas etapas se institucionalize o conceito;

- não consideração do caráter de uma formação em espiral que retome e aprofunde algumas noções trabalhadas, apenas definindo e dando exemplos de noções como: tipos de experimentos, experimentos aleatórios, tipos de eventos e história da teoria da probabilidade.

Assim sendo, o autor elaborou sua questão de pesquisa: “É possível organizar uma sequência de ensino que encaminhe uma apreensão de modo significativo e abrangente da noção de probabilidades?” (p. 21).

Silva (2002) enumera suas hipóteses de pesquisa da seguinte forma:

- a) Para que haja uma apreensão abrangente dos conceitos de probabilidade é necessário que sejam trabalhados os seguintes itens: experimentos aleatórios, experimentos determinísticos, noção de acaso, espaços amostrais equiprováveis e não equiprováveis e tipos de evento;
- b) Tendo como base o estudo histórico e epistemológico, o conceito de probabilidade foi se consolidando principalmente sobre duas óticas: a frequentista e a clássica. Caso se privilegie uma em detrimento da outra, estaríamos oferecendo ao aluno uma visão limitada do conceito de probabilidade;
- c) Os PCN recomendam que o aluno entenda a sociedade como algo em constante reconstrução, inserida num processo contínuo; portanto, o estudo da história torna-se um instrumento importante para o seu entendimento. Desse modo, a inserção do contexto histórico em que se desenvolveu a teoria das probabilidades auxilia numa apreensão mais significativa de seus conceitos;
- d) Os itens citados anteriormente só serão contemplados tendo como ponto de partida uma situação-problema que desencadeie uma série de questionamentos, culminando em última instância com a sua institucionalização.

Os seus dados foram coletados a partir de um teste aplicado em alunos da 3.<sup>a</sup> série do Ensino Médio, composto por 13 questões, com o intuito de diagnosticar as concepções dos estudantes sobre probabilidade. A seguir, foi

elaborada uma sequência didática constituída por 10 sessões, totalizando 14 aulas de 55 minutos. A sequência didática foi aplicada em outra turma de 3.<sup>a</sup> série do Ensino Médio da mesma escola, acompanhada pelo pesquisador na função de observador. Os alunos não haviam tido nenhum contato com a teoria de probabilidades, pois no programa de ensino da escola este tema deveria ser visto somente no último ano do Ensino Médio.

Ainda, segundo o autor, uma sequência de ensino deve conter os seguintes aspectos: introdução da situação-problema, leitura da atividade proposta, debate entre professor e alunos para incentivá-los a responder as questões propostas, “correção” da atividade, institucionalização do conceito, realização de uma “atividade complementar” para uma revisão, memorização e aprofundamento da ideia em estudo e, finalmente, correção dessa última atividade.

Partindo dos resultados das pesquisas de Coutinho (1996, 2001, 2002) e Silva (2002), acrescentamos a utilização de jogos entre os alunos para que tivessem o primeiro contato com a probabilidade por uma maneira lúdica e assim instigá-los a investigar propriedades matemáticas envolvidas nas jogadas.

### **1.3 Justaposição histórica entre os jogos de azar e o cálculo de probabilidades**

Consoante Miguel, Coutinho & Almouloud (2006), a tentativa de entender o que significa acaso provocou o desenvolvimento de um campo da Matemática denominado Teoria das Probabilidades. O acaso seria algo que interfere nos acontecimentos e que não podemos controlar ou o nome que damos ao desconhecimento das causas de um fenômeno.

Platão (427 a.C. – 347 a.C.) advoga que nada surge sem causa em razão do princípio da causalidade das coisas. Seu discípulo Aristóteles (385 a.C – 322 a.C.) propõe que o acaso é resultado da interação de diferentes causas, ou seja, do encontro do que não tem causa. Havia pessoas que discordavam, na época, de suas ideias e defendiam que todo efeito tinha uma causa bem determinada e,

portanto, era necessariamente decorrente dela. Para contrapor este pensamento, conta o caso de uma pessoa chamada Koriskos que foi assassinada por marginais porque saiu de casa à noite; saiu porque teve sede e precisava retirar água do poço; teve sede porque havia ingerido comida salgada; seria falso afirmar que em decorrência da comida salgada ingerida houve o assassinato. Aristóteles atribuía tudo o que existe a três causas: à natureza, à arte e ao acaso (MIGUEL, COUTINHO & ALMOULOU, 2006).

Ainda segundo os autores, Cícero (106 a.C – 43 a.C.) faz o seguinte questionamento: o que você entende quando diz que uma coisa aconteceu por acaso, a não ser que poderia ter ocorrido ou não? Sobre jogos com dados destaca: é impossível que alguém lançasse três dados várias vezes não consiga um terno de seis; é ingenuidade atrelar este acontecimento ao acaso.

Miguel, Coutinho & Almouloud (2006) apresentam um exemplo da atuação do acaso feita por São Tomás de Aquino (1227-1247): existe uma razão para abrir uma cova; da mesma forma há uma razão para enterrar um tesouro em determinado lugar; entretanto, um homem que, ao cavar uma cova, encontra um tesouro não tem uma razão, é sem dúvida obra do acaso.

Coutinho (2007) destaca que alguns povos da antiguidade como os mesopotâmios e os egípcios estabeleciam associações entre a noção de acaso com intervenções divinas ou sobrenaturais. Profetisas se utilizavam de práticas para fazer previsões do futuro ou até mesmo explicar a vontade dos deuses. Esse tipo de comportamento existe até hoje em algumas culturas que fazem uso da vidência. Os jogos de astrágalos<sup>1</sup> ou jogos com dados produzidos em barro cozido, apesar de serem utilizados para lazer, estavam inseridos em um contexto místico ou psicológico do acaso.

O cálculo de proporções e o raciocínio combinatório já existiam há muito tempo, no entanto apenas no século XVI são encontrados os primeiros trabalhos

---

<sup>1</sup> O astrágalo encontrado em civilizações egípcias, gregas e romanas provém da pata de animais dotados de cascos, tais como veados, bezeros, ovelhas ou cabras, e são chamados de *tali* (latim) ou *astragali* (grego). Esse osso tem quatro longas faces planas totalmente diferentes, as únicas em que ele pousaria quando jogado, e duas pequenas extremidades arredondadas. Das quatro faces planas, duas são estreitas e planas e duas são largas, com um lado largo ligeiramente convexo e outro ligeiramente côncavo. Como cada lado do astrágalo tinha um aspecto diferente, não era necessário marcar os lados. Quando eram marcados com pontos, os lados correspondiam a 1, 3, 4 e 6 (BENNETT, 2003, p. 22-23).

sobre combinatória com o intuito de analisar jogos, com destaque para Girolamo Cardano e, já no século XVII, com Galileu (COUTINHO, 2007).

Pichard atribui a demora pelo seu estudo a dois fatores:

[...] Uma primeira razão é que um tratado científico sobre os jogos de azar não seria, provavelmente, sério, pois os jogos eram coisas fúteis aos olhos dos sábios. Outra razão, certamente mais importante, é que o resultado de um sorteio “ao acaso” é a expressão da vontade divina, e como tal, não deveria ser calculada, pois não devemos desafiar Deus (ou o Diabo) [...] (1997, p. 107, apud COUTINHO, 2007, p. 3).

Sendo assim, o manuseio de moedas, dados, cartas de baralho, entre outros geradores de acaso, são exemplos apontados por Coutinho (2007) para que somente no século XVI houvesse uma preocupação com o cálculo do acaso para solucionar questões referentes a uma dimensão lúdica.

Vários jogos que se utilizam de dois dados têm como meta obter uma determinada soma. Na Europa, os jogos de dados mais requisitados eram aqueles em que se usavam três dados. As somas possíveis em jogadas com três dados variam de 3 a 18. No entanto, tais resultados podem ser obtidos de 216 formas distintas (BENNETT, 2003, p. 63-64).

Ainda, segundo o autor, tudo leva a crer que os matemáticos achavam que havia apenas 56 resultados possíveis, pois não consideravam a diferença entre conjunto e sequência. Em virtude desse engano, acabavam contando conjuntos deixando diversas sequências excluídas.

De acordo com Bennett (2003), desde o Império Romano os jogos com três dados faziam parte do cotidiano das pessoas, porém a primeira enumeração correta foi realizada somente entre 1220 e 1250 por Richard de Fournival em um poema intitulado *De Vetula*. De Fournival fez a descrição das 216 maneiras como três dados podem cair. Elaborou uma tabela sintetizando as possíveis somas de 3 a 18 e a quantidade de sequências que podem resultar nesses resultados.

Corroborando com os estudos de Bennett (2003), Miguel, Coutinho e Almouloud (2006) explicam que com o desenvolvimento do raciocínio combinatório houve a exploração de outra visão em relação ao cálculo do número

de chances, e o primeiro documento que mostra isso é um poema denominado *De Vetula*, escrito por Richard de Fournival, em 1250. A partir de três dados são descritas as suas combinações, na ocasião de seu lançamento. Assim diz Bellhouse:

Talvez, diremos que certos números são melhores  
 Do que outros para uso em jogos, pela razão que,  
 Desde que um dado tem seis faces e seis números simples,  
 Em três dados existem dezoito,  
 Dois quais apenas três podem estar nas faces superiores dos  
 dados. Eles variam em diferentes maneiras e deles,  
 Dezesesseis números compostos são produzidos. Eles não são,  
 porém, De igual valor, desde que o maior e o menor deles  
 Ocorrem raramente e os do meio mais frequentemente,  
 E o restante, o quanto mais próximo estão daqueles do meio,  
 Melhores são e mais frequentemente ocorrem.  
 Esses, quando ocorrem, têm apenas uma configuração de faces  
 nos dados,  
 Aqueles são seis, e os restantes têm configurações intermediárias  
 entre os dois,  
 Tal que existem dois números maiores e exatamente a mesma  
 quantidade de menores,  
 E esses têm uma configuração. Os dois seguintes,  
 O maior, e outro menos, têm duas configurações de faces nos  
 dados cada um.  
 Novamente, depois deles existem três cada um, então quatro  
 cada um.  
 E cinco cada um, como eles seguem em sucessão de  
 aproximação.  
 Os quatro números do meio têm seis configurações de faces nos  
 dados cada um.  
 O pequeno quadro, apresentado abaixo, torna as coisas mais  
 fáceis para você:

18	666						
17	665						
16	664	655					
15	663	654	555				
14	662	653	644	554			
13	661	652	643	553	445		
12	651	642	633	552	543	444	
11	641	632	551	542	533	443	
10	631	622	541	532	442	433	
9	621	531	522	441	432	333	
8	611	521	431	422	332		
7	511	421	331	223			
6	411	321	222				
5	311	221					
4	211						
3	111						

Existem 56 maneiras dos números ocorrerem  
 E os números podem não ser nem maior, nem menor.



Quando os três números que compõem o terno são iguais, desde que seis números podem ocorrer com outro, existem também seis configurações de faces nos dados, uma para cada número.

Mas, quando um deles é igual aos outros,

E dois são iguais, as configurações das faces nos dados podem variar de trinta maneiras,

Porque, se você duplica algum dos seis números,

Depois você tem acrescentado alguns dos números que restam, então

Você obterá trinta, como se você multiplicasse seis por cinco;

Mas, se os três números são diferentes,

Então você irá contar vinte configurações das faces nos dados

Por essa razão: Três números podem ser sucessivos

De quatro maneiras e não-sucessivos exatamente as mesmas, mas

Se dois são sucessivos e o terceiro é não-sucessivo,

Você irá descobrir de um lado duas vezes três maneiras e de outro

lado, três vezes duas maneiras.

A figura a seguir pode tornar as coisas mais claras:

três números iguais						
666	555	444	333	222	111	6
dois iguais e um diferente						
665	664	663	662	661	} 30	
556	554	553	552	551		
446	445	443	442	441		
336	335	334	332	331		
226	225	224	223	221		
116	115	114	113	112		
Os três sucessivos						
654	543	432	321			4
Os três não-sucessivos						
642	531	641	631			4
dois sucessivos e o terceiro não-sucessivo						
653	652	651	621	521	421	6
542	541	643	431	632	532	6
total						56

Novamente, se olharmos mais perto as configurações das faces nos dados,

Existem algumas que têm apenas uma maneira de sair,

E existem outras que têm três ou seis, desde que as maneiras de sair

Não podem ser diferentes quando os três números em questão

São os mesmos. Mas, se um deles pode ser diferente,

E os dois, três maneiras de cair emergem

Depois que um número diferente vem na face superior de alguns dos dados.

Mas, se eles são todos diferentes, você descobrirá

Que eles podem variar de seis maneiras, desde que,

Quando você dá alguma posição para um dos três, os dois restantes podem mudar de posição,

Exatamente como alternando a configuração das ternas mostradas. Então,

Eles variam em cinquenta e seis maneiras de sair,

Quando esses são divididos entre os números compostos, como usam os jogadores,

Como eles precisam ser distribuídos entre eles,  
 Você verá bem o quão grande ganho ou perda  
 Alguém pode ser capaz de ter.  
 A figura a seguir pode esclarecer isso para você:

Quantas configurações de faces e maneiras de sair números complexos poderiam ter:					
3	18	configurações de faces nos dados	1	modos de sair	1
4	17	configurações de faces nos dados	1	modos de sair	3
5	16	configurações de faces nos dados	2	modos de sair	6
6	15	configurações de faces nos dados	3	modos de sair	10
7	14	configurações de faces nos dados	4	modos de sair	15
8	13	configurações de faces nos dados	5	modos de sair	21
9	12	configurações de faces nos dados	6	modos de sair	25
10	11	configurações de faces nos dados	6	modos de sair	27
				total	2.(56)=216

(2000, p.123-136, apud MIGUEL, COUTINHO & ALMOULOU, 2006, p. 26-29).

Em 1665, foi publicada uma obra póstuma de Girolamo Cardano (1501-1576), que foi matemático, médico e jogador, denominada *Líber De Ludo Aleae* (*O livro dos jogos de azar*). Ela dava subsídios para que se pudessem tomar decisões favoráveis em problemas envolvendo jogos de azar (COUTINHO, 2007).

Pascal e Fermat, em 1654, na ocasião das trocas de correspondências, mostram que já havia uma compreensão do acaso com essa nova faceta, bem como a possibilidade de o acaso tornar-se “geometrizable”<sup>2</sup>. Podemos afirmar que Pascal e Fermat já consideravam que os jogos de azar eram fenômenos reprodutíveis com interferência do acaso e, portanto, passíveis de uma matematização.

<sup>2</sup> A expressão “a geometria do acaso”, segundo Coutinho (2007), proposta por Pascal em sua carta endereçada à Academia Parisiense, significa que podemos raciocinar, especular e fazer cálculos com o acaso, tal como se fazia com a Geometria. Hoje seria dito “a matemática do acaso”.

Jacob Bernoulli (1654-1705), em sua obra *Ars Conjectandi* (1713), foi um dos pioneiros em confrontar a noção de probabilidade com um raciocínio determinista. A racionalização do acaso toma uma direção importante, como mostra o texto seguir escrito por Bernoulli:

Tudo o que, sob o sol, se beneficia de ser ou de tornar-se, passado, presente ou futuro, possui sempre em si e objetivamente uma certeza total. É evidente do presente e do passado: o que é ou foi não pode não ser ou ter sido. Sobre o futuro nada a discutir; contudo não é pela necessidade de qualquer destino que não pode tornar-se, mas em razão seja da ciência seja da predeterminação divina; porque se não acontecesse com certeza tudo o que é futuro, não vemos como o Criador supremo poderia conservar inteira a glória de sua oniscência e sua onipotência (1713, p. 14, apud COUTINHO, 2007, p. 4).

Um século após, em sua obra *Essai Philosophique sur lês Probabilités* (1814), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) explicita de maneira mais radical o pensamento determinista que pode ser sintetizado em sua famosa frase: “o acaso não é nada além da expressão da nossa ignorância”.

Já no século XX Jules Henri Poincaré (1854-1912), em sua obra *Cálculo de probabilidades* (1912), apresenta uma evolução qualitativa na interpretação do acaso ampliando o seu conceito, como podemos observar no trecho abaixo:

É necessário que o acaso seja outra coisa que não o nome que damos à nossa ignorância, que entre os fenômenos dos quais ignoramos as causas, devemos distinguir os fenômenos fortuitos, sobre os quais o cálculo de probabilidades nos informará provisoriamente, daqueles que não são fortuitos, e sobre os quais nada podemos dizer, enquanto não determinarmos as leis que o regem (POINCARÉ, 1912, p. 3, apud COUTINHO, 2007, p. 6).

A partir destas contribuições, podemos focar o acaso por um viés determinista, que segundo Coutinho (2007) é “o resultado de um processo aleatório devido a uma complexidade de causas imperceptíveis, complexidade esta que escapa à compreensão do homem e seus instrumentos”. O gerador de acaso (dados, moedas etc.) é um bom exemplo em que seus resultados possíveis são considerados neste contexto.

A história do ser humano é repleta de interesse pelos jogos de azar, supondo uma aposta inserida num jogo equilibrado. A noção de equiprobabilidade de certa forma já era evocada, como descreve Pichard:

Encontramos dados especialmente preparados para jogos nesta época, de onde a noção complementar de dado honesto, e podemos conjecturar que os jogadores tinham empiricamente percebido a frequência de aparição das diferentes faces, isto é, uma concepção intuitiva da lei dos grandes números (1997, p. 106, apud COUTINHO, 2007, p. 7).

Podemos imaginar que havia uma compreensão intuitiva das chances de conseguir o resultado esperado quando se utilizavam jogos que no seu desenrolar apresentava resultados distintos (COUTINHO, 2007, p. 8).

O problema considerado como fundador do Cálculo das Probabilidades é o elaborado por Luca Paccioli, apresentado em 1494, que questionava como fazer a repartição das apostas, tendo sido objeto de questionamento nas correspondências entre Pascal e Fermat em 1654. O problema requer que se atinjam 60 pontos para ganhar. Cada etapa do jogo vale 10 pontos. Um soldado atinge o valor de 50 pontos e outro, 20 pontos; o jogo é interrompido por um incidente. Fica a seguinte questão: Como será dividido o prêmio apostado no início do jogo? (COUTINHO, 2007, p. 9).

De acordo com Coutinho (2007), pode-se constatar que há uma troca de ponto de vista, de um modo intuitivo, para um princípio de teorização, ou seja, de uma avaliação ingênua das chances para uma enumeração dos resultados ocorridos em um evento.

Pascal e Fermat resolvem o problema por caminhos diferentes, mas ambos utilizam-se da ideia de que haveria a possibilidade da continuidade do jogo e se ele fosse equilibrado. Pascal encaminha uma carta à Academia Parisiense no final de 1654, salientando a importância da descoberta da “Geometria do Acaso” sem, contudo explicitar uma definição para probabilidade. Coutinho (2007) salienta a falta de descontextualização e teorização por parte de Fermat e Pascal, mesmo assim permite um grande passo para que um pouco mais adiante se chegasse à relação favorável e possível.

Uma obra que contribuiu de maneira importantíssima para a ampliação da concepção de probabilidade foi escrita por Jacob Bernoulli, intitulada *Ars Conjectandi*. É colocada em destaque a dualidade deste conceito: razão entre número de casos ou obtenção de uma estimativa de seu valor pela frequência

experimental. Publicada em 1713, esta obra é considerada a primeira etapa na teorização do Cálculo de Probabilidades. Ela resolve cinco problemas que Huygens propôs utilizando-se da combinatória, generalizando e aprofundando seu cálculo. Mas, talvez, sua maior contribuição seja o fato de vislumbrar uma aplicação em outros contextos, além dos usados em jogos de azar. A relação entre frequência e probabilidade é salientada na citação a seguir:

O progresso conceitual, no entanto, sustentando a justificação da relação entre as frequências relativas e as probabilidades não foi compreendido antes de Jacob Bernoulli. Ele trabalhou durante mais de 20 anos sobre a lei dos grandes números, a qual ele chamou de “teorema áureo”. Este teorema mostra que as frequências relativas, em certo sentido, convergem para a probabilidade subjacente, o que justifica a utilização da probabilidade em outros contextos além dos jogos de azar (BOROVNIK et al., 1991, p. 33, apud COUTINHO, 2007, p. 12).

#### **1.4 Trajetória hipotética de aprendizagem (THA)**

Simon (1995) sustenta que as reformas na Educação Matemática passam pelo construtivismo e que para tanto é imprescindível que se criem modelos de ensino baseados nele. A meta dos professores e o peso que se deve dar ao pensamento matemático dos alunos são outros pontos fundamentais nas preocupações do autor.

Há uma multiplicidade de significados diferentes para o “construtivismo”, porém destacaremos o *Construtivismo Radical* e o *Construtivismo Social*. O *Construtivismo Radical* tem como foco a construção individual, em que a criança em sua relação permanente com o objeto constrói seus caminhos pelas experiências vivenciadas. O *Construtivismo Social* salienta a influência da dimensão social no desenvolvimento individual, ocorrendo a apropriação de significados em consequência das experiências ocorridas em contextos sociais, pois o conhecimento encontra-se na cultura (SIMON, 1995).

Ainda, segundo o autor, saber qual o enfoque mais importante, o cognitivo ou social, não é a questão principal. Procurar a combinação de ambos os enfoques trará análises frutíferas para o processo de ensino e aprendizagem.

Para entender a importância de uma combinação, pode-se recorrer a uma analogia com a constituição física da luz. Há duas teorias, uma que afirma que a luz é uma partícula e a outra que a luz é uma onda, mas ambas não são suficientes para descrever os fenômenos físicos luminosos. Os físicos notaram que fazendo uma coordenação das duas visões ficam potencializadas as descobertas no campo da Óptica.

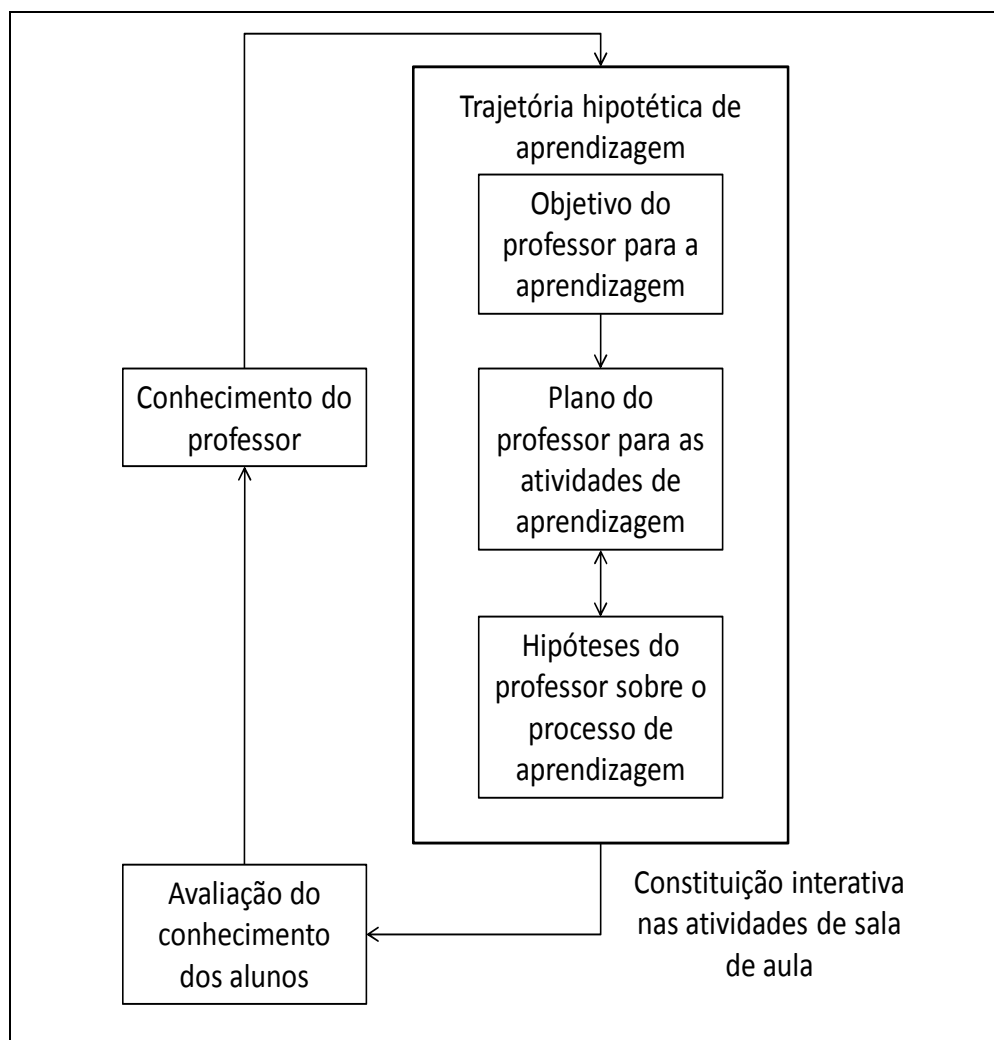
O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) tem se apropriado de diversos estudos empíricos e referências teóricas que têm como base uma perspectiva construtivista. Ainda, segundo Simon (1995), apesar de o construtivismo ter contribuído para a compreensão de como se processam as aprendizagens, defende a necessidade de uma reconstrução da “Pedagogia da Matemática”, apontando caminhos para o ensino da Matemática em sala de aula.

A expressão “Pedagogia da Matemática” abrange todos os fatores que auxiliam a Educação Matemática em sala de aula. Simon (1995) contempla em seus estudos o amplo espectro do trabalho do professor, o currículo em construção e os materiais destinados ao ensino. O seu foco se concentra no processo de tomada de decisão dos conteúdos matemáticos e nas atividades em sala de aula visando atingir essas metas.

Simon (1995) introduziu a noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) como parte de seu modelo do Ciclo de Ensino de Matemática. Este modelo, como o título de seu artigo indica, era a sua proposta para “reconstruir a pedagogia da Matemática a partir de uma perspectiva construtivista”, e aborda um dos paradoxos que foi introduzido com o movimento da reforma da Matemática: a tensão entre uma visão construtivista da aprendizagem que requer que o ensino considere e se adapte às ações dos alunos e uma ideia tradicional de planejamento do ensino que se baseia na busca dos objetivos predeterminados e na elaboração de tarefas para alcançá-los.

Simon (1995) coletou dados a partir de uma sala de aula composta por 25 alunos em que observou um professor de Matemática desenvolvendo atividades concernentes à construção do conceito de área. Concentrou esforços para formular uma “Pedagogia da Matemática” a partir de uma fundamentação teórica.

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon (1995) colaborou para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino de Matemática (Figura 1), como modelo esquemático de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, reflexão e tomada de decisão.



**Figura 1.** Ciclo de ensino de matemática abreviado (SIMON, 1995, p. 136).

De acordo com Simon (1995, p. 136), uma (THA) consiste de: “objetivos para a aprendizagem dos alunos, tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos e nas hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos”. Simon & Tzur (2004, p. 93) elucidam as principais características da noção de THA inseridas no ciclo de ensino de Matemática da seguinte forma:

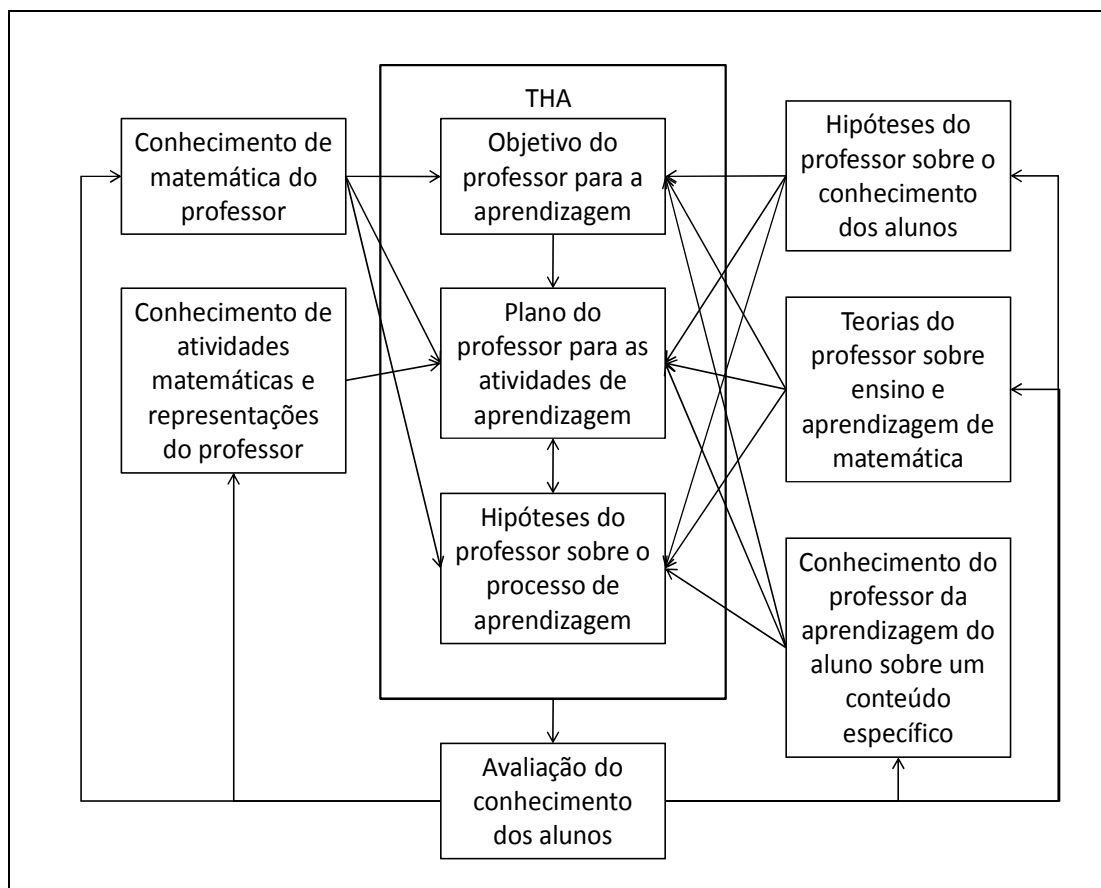
[...] enquanto o objetivo do professor para a aprendizagem dos alunos aponta uma direção para as outras componentes, a seleção de tarefas de aprendizagem e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos são interdependentes. As tarefas são selecionadas com hipóteses acerca do processo de aprendizagem; as hipóteses sobre o processo de aprendizagem se baseiam nas tarefas propostas. Este construto se fundamenta nos seguintes pressupostos:

- A construção de uma THA se baseia na compreensão do conhecimento atual dos alunos aos quais será oferecido um dado ensino;
- Uma THA é um veículo para planejar a aprendizagem de um determinado conceito matemático;
- As tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem de um determinado conceito matemático e, portanto, são um elemento-chave do processo de ensino;
- Dada à natureza hipotética e inerentemente incerta deste processo, o professor ver-se-á obrigado a modificar sistematicamente cada aspecto da THA.

A aprendizagem em sala de aula requer elementos das duas abordagens construtivistas como Cobb (1989, apud SIMON, 1995) faz referência em seus trabalhos, sugerindo uma associação entre a dimensão social e cognitiva usufruindo os benefícios de ambas.

O autor aponta no sentido de superar as contradições que surgiram com as tentativas de reforma do ensino de Matemática, pois de um lado temos a perspectiva construtivista de aprendizagem requerendo que o ensino se pautar por adaptações ao desempenho dos alunos, e de outro lado, o modelo tradicional que enxerga a planificação do ensino como elemento essencial para que se atinja um conjunto de objetivos preestabelecidos utilizando-se de atividades para esse intento. Propõe um Ciclo de Ensino de Matemática que inclui as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem valendo-se de inter-relações entre o construtivismo e a “Pedagogia da Matemática”, como especificado na figura a seguir:





**Figura 2.** Ciclo de ensino de Matemática. Os domínios do conhecimento do professor e avaliação do conhecimento dos alunos (SIMON, 1995, p. 137).

O ciclo de aprendizagem em Matemática descreve as relações de diversas áreas para a concepção do ensino, a saber: o conhecimento do professor de Matemática sobre teorias de ensino e aprendizagem geral e específica sobre um determinado conteúdo matemático (fruto da investigação na literatura ou de sua experiência em sala de aula), bem como o conhecimento das representações matemáticas, dos materiais e atividades e, finalmente, as suas hipóteses sobre a compreensão dos alunos.

O único fato que é certo no processo de ensino é que as atividades escolares não transcorrerão como previsto, apesar de o professor ter criado uma meta inicial com um plano de ensino, que normalmente será alterado diversas vezes (provavelmente de maneira permanente) durante todo o desenvolvimento do estudo conceitual em questão. Steffe (1990, apud SIMON, 1995) comenta o seguinte: um professor pode propor uma tarefa, no entanto é o que os alunos fazem dessa tarefa e as suas experiências com ela que determinam o potencial

de aprendizagem. Simon (1995) indica que deve haver uma mudança temporária de objetivo, caso se perceba uma compreensão equivocada do conteúdo que se pretendia ensinar.

Pires (2009) fala sobre a tentativa de Simon (1995) compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino e de que modo as pesquisas em Educação Matemática no que tange ao processo de aprendizagem colaboram para o desenvolvimento e organização de boas propostas didáticas que potencializem o ensino, otimizando a aprendizagem dos alunos. Baseada em Simon (1995), a autora considera dois elementos essenciais nessa busca:

- 1) Sua posição de afirmar que as visões construtivistas da aprendizagem têm dado sustentação a fundamentos teóricos na pesquisa no campo da Educação Matemática.
- 2) Dar pistas importantes para que os professores possam compreender e antecipar a forma de construção de conhecimentos matemáticos de seus alunos (PIRES, 2009, p. 87).

Ainda, segundo a autora, a Educação Matemática, valendo-se do construtivismo, precisa superar o embaraço de estabelecer modelos de ensino para a construção de conhecimentos de tal modo que sejam encarados de forma teórica. Entretanto, destaca que o objetivo não é produzir métodos embasados em ideias fixas para que o docente os siga, e sim modelos que poderão contribuir para transformações nas estruturas metodológicas.

Sendo assim, utilizaremos em nossa pesquisa um conjunto de atividades provido de objetivos de aprendizagem que consideram as hipóteses do professor de como se processará a construção dos conceitos iniciais de probabilidade. Para tanto, haverá debates antes, durante e após o desenvolvimento das aulas.

Os debates em sala de aula conduziram Simon (1995) a reexaminar vários conhecimentos e a um aprofundamento do seu “mapa conceitual”. Assim, o conhecimento do professor serve como um “mapa” que expressa como ele se dedica na compreensão do processo de construção do conhecimento por parte dos alunos identificando seu potencial de aprendizagem.

As observações feitas em seus alunos alteraram suas perspectivas sobre os conhecimentos dos alunos e os conceitos matemáticos envolvidos (seu mapa interno). Esta reorganização das perspectivas conduziu Simon (1995) para efetuar alterações em seus objetivos e planos para atividades de ensino e aprendizagem.

A meta de aprendizagem do professor para seus alunos aponta para uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Eu uso o termo “trajetória hipotética de aprendizagem” para fazer referência tanto ao prognóstico do professor como também ao caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque a própria trajetória de aprendizagem não é conhecida antecipadamente, sendo caracterizada por ser uma tendência esperada. A aprendizagem individual dos alunos ocorre de forma idiossincrática, embora muitas vezes por caminhos semelhantes (SIMON, 1995, p. 135).

Uma trajetória hipotética de aprendizagem é composta por três elementos: o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos, as atividades de aprendizagem e o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades) (SIMON, 1995).

A escolha da palavra “trajetória” refere-se a um caminho, que talvez possa ser esclarecida pela seguinte analogia:

Considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequência do seu destino. Você modifica a duração e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética” (SIMON, 1995, p. 136-137).

O autor refere-se às hipóteses do conhecimento dos alunos para evidenciar que não se tem acesso direto aos conhecimentos deles. E destaca (p. 135):

Como professor, minha percepção do conhecimento matemático dos alunos está estruturada pelo meu conhecimento da matemática em questão. Por outro lado, no sentido oposto, o que observei no pensamento matemático dos alunos afeta minha compreensão das idéias matemáticas envolvidas e suas interconexões. Estes dois fatores são esferas interativas no pensamento do professores. Ball (1993, apud SIMON, 1995) chama esse fenômeno de perspectiva bifocal.

O ciclo de ensino de Matemática sugere que os professores de Matemática se empenhem para serem propositais no planejamento e ações, mas flexíveis nos objetivos e expectativas (STEFFE, 1991, apud SIMON, 1995, p. 141).

Outros autores têm mostrado a relevância do estudo de THA, tais como Gómez & Lupiáñez (2007), que fazem uma análise sobre o interesse de diferentes pesquisadores sobre a noção deste construto, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores.

Steffe ressalta a relevância desta noção dentro da Educação Matemática da seguinte forma:

A construção de THA dos alunos é um dos desafios mais urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da matemática dos alunos e, de que forma, nós professores, podemos influir nessa matemática (apud GOMEZ & LUPIÁÑEZ, 2004, p. 130).

Não obstante, revelam, mesmo que os diversos investigadores reconheçam os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemáticas e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitem os quatro pressupostos mencionados anteriormente (no presente trabalho, página 34) por Simon & Tzur (2004, p. 93), cada um interpreta e usa a noção com maneiras e propósitos distintos. Para Gomez & Lupiáñez (2007) são perceptíveis dois usos claramente diferenciados: ferramenta de investigação e ferramenta para planejamento.

Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh & Yoon (2004) e Clements, Wilson & Sarama (2004) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos. Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon & Tzur (2004), mesmo explorando também THA, preocupam-se com maior ênfase por seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Battista (2004) centra-se na avaliação (p. 81).

Gómez & Lupiáñez (2007) apontam que em todos os trabalhos desenvolveram-se exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais.

Mesmo que haja professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações. De fato, alguns destes trabalhos, como o de Steffe (2004) e de Gravemeijer (2004), vêem a construção de THA como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor (p. 82).

E destacam que uma das principais diferenças de interpretação da noção entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planejamento de várias aulas até o trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula. Vejamos algumas análises feitas por Gómez & Lupiáñez (2007) sobre alguns autores:

Gravemeijer (2004) indica que sua proposta de *teorias locais de ensino* é a “descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação a uma coleção de atividades de ensino para um tema” (p. 107). Steffe (2004), Lesh & Yoon (2004) também utilizam a noção para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões nas quais se trabalha um tema. Simon & Tzur (2004) vêem a THA como uma ferramenta para o planejamento de atividades matemáticas no dia a dia de uma aula. Finalmente Barody, Cibulskis, Lai & Li (2004) sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o “desenvolvimento micro-conceitual”, sendo esta a atividade central do ensino na aula (p. 82).

Uma questão importante discutida por Gómez & Lupiáñez (2007) indaga sobre a relação que existe entre a atividade diária do professor e a noção de THA. Um aspecto ligado à atuação do professor tem a ver com o caráter reflexivo inerente à noção de THA: “há uma relação reflexiva em que a THA é o subsídio de juízos e decisões locais que, por sua vez, modificam a THA (GRAVEMEIJER et al., 2000, p. 249-250, apud GÓMEZ & LUPIÁÑEZ, p. 82).

Simon & Tzur (2004, p. 93) também enfatizam o papel do professor na construção e revisão permanente da THA. Mas colocam um desafio: Como fazer compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA com o fato de que a totalidade dos exemplos que se têm de THA foi desenvolvida por investigadores que assumiram o papel de professor?

Para Gómez & Lupiáñez (2007), “propostas como as desenvolvidas por Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) são tão complexas e técnicas que acabam sendo pouco prático para os professores” (p. 82). Por outro lado, as propostas de Simon & Tzur (2004) e Gravemeijer (2004, apud GÓMEZ & LUPIÁÑEZ 2007) têm um caráter essencialmente prático.

Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004, p. 233, apud GÓMEZ & LUPIÁÑEZ, 2007) nos alertam para o fato de que a validade ecológica se conquista à custa da falta de universalidade: se é comprovado que uma THA é válida em uma circunstância particular (em um contexto e com alguns estudantes e um professor particular), isto não quer dizer que essa THA tenha sentido em outras circunstâncias.

Gravemeijer (2004, apud GÓMEZ & LUPIÁÑEZ, 2007) reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir uma THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras sequências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) sequências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: Que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos em uma situação concreta de sala de aula?

Os professores que tiverem acesso a uma THA poderão, ao menos, apropriar-se indiretamente de resultados de pesquisas incorporadas em sua elaboração, colaborando com seu aprimoramento profissional.

No próximo capítulo, comentaremos sobre a metodologia de pesquisa utilizada, o cenário de pesquisa, o perfil dos professores e as categorias para análise de dados.

## Capítulo 2

---

### METODOLOGIA DE PESQUISA

Partindo do nosso objetivo de pesquisa – verificar quais as contribuições e dificuldades dos professores ao planejarem atividades de maneira a estimular o processo na construção do conceito de probabilidade –, e apoiados na nossa fundamentação teórica, vamos descrever, neste capítulo, a fundamentação metodológica em que nos embasamos e os procedimentos metodológicos para a coleta de dados.

#### 2.1 Metodologia e procedimentos metodológicos

A metodologia de pesquisa do tipo qualitativa descrita por Bogdan e Biklen (1994) contempla alguns aspectos que podem compô-la e que consideramos que estão próximos da investigação realizada. São eles:

- O ambiente natural é aquele em que serão retirados os dados pelo pesquisador. No caso da investigação que realizamos, foi na escola que os professores atuam que coletamos os dados.
- As aulas foram acompanhadas pelo pesquisador para elaboração de relatórios, e o foco principal foi a análise do desenvolvimento da THA em sala de aula caracterizando assim a nossa preocupação com o processo, e não com o produto.

Nessa investigação as propostas didáticas foram submetidas à análise dos professores antes e após seu desenvolvimento em sala de aula com o objetivo de incitarem reflexões que possam resultar em sugestões de mudança tanto na primeira versão da THA como em sua prática de ensino.

Os professores responderam a um questionário com o propósito de traçar um perfil em seus aspectos acadêmico e profissional, quais as metodologias empregadas em suas aulas e também as noções concebidas sobre o processo de ensino e aprendizagem. Posteriormente, para esclarecimentos sobre as respostas contidas nos questionários, realizamos entrevistas semi-estruturadas (BOGDAN & BIKLEN, 1994). Após o desenvolvimento das atividades, também foram arguidos sobre procedimentos e atitudes realizados no desenvolvimento das aulas.

A pesquisa foi realizada com três professores da rede pública estadual (SP), em uma escola de Ensino Médio no período da manhã, contando com um total de 96 alunos, que desenvolveram as THA acompanhadas pelo pesquisador. Foram elaborados relatórios das oito aulas (de cinquenta minutos cada) baseados em observações efetuadas durante as aulas, denominada por Bogdan & Biklen (1994) como “observação participante”, pois o investigador inseriu-se no universo das pessoas (professores e alunos) a fim de conhecê-las, documentando por escrito suas constatações.

## **2.2 Cenário de pesquisa**

A escola escolhida para o desenvolvimento da THA foi da rede pública estadual (SP) localizada na zona sul da cidade de São Paulo.

Sua estrutura física é composta de dois prédios, um contendo toda a parte administrativa, 14 salas, uma sala de leitura, cantina, anfiteatro, laboratórios de química e biologia, sala de artes, projeção e cozinha. O outro prédio dispõe de oito salas de aula, quadra coberta, sala de informática, que se encontra desativada, pátio coberto, descoberto e jardim. Toda a estrutura física apresenta condições razoáveis de utilização.



Conhecida como escola de passagem,<sup>3</sup> atende, hoje, aproximadamente 2789 alunos exclusivamente do Ensino Médio. Seus alunos são oriundos tanto das proximidades quanto de toda a zona sul de São Paulo. A faixa etária dos alunos do período diurno é de 14 a 19 anos de idade e do período noturno, de 14 a 35 anos de idade. Atualmente, temos 21 salas por período funcionando, no máximo, com 47 alunos por sala.

Além de todos os objetivos que sempre pretendeu alcançar ao longo de seus 60 anos, expressos em seu regimento interno, a escola tenciona analisar e solucionar os fatores que desencadeiam o excesso de faltas e a evasão escolar, que comprometem o rendimento escolar, e o alto índice de retenção, por meio de relações democráticas no interior da escola, mediante a participação de todos os segmentos na gestão escolar, a integração real entre escola e comunidade e da transparência dos procedimentos pedagógicos, administrativos e financeiros.

## **Perfil dos professores**

### **Professor – P1**

Gênero masculino, 40 anos de idade, 12 anos de magistério, licenciado em Matemática, professor efetivo da rede pública estadual (SP), participa atualmente de um curso de mestrado em Educação Matemática. Atua somente com o Ensino Médio em escola pública do Estado de São Paulo.

Segundo relato pessoal, afirma que sempre participa de cursos complementares oferecidos pela Secretaria de Educação e por outras instituições de ensino, visando o aprimoramento em sua prática. Destaca que a Educação Matemática oferece em suas pesquisas subsídios que contribuem para uma atitude crítica e reflexiva na educação, favorecendo uma ampla visão sobre os aspectos que envolvem o processo ensino e aprendizagem, o que inclui a tomada de consciência sobre a relevância do educador em propiciar situações de aprendizagem desafiadoras.

---

<sup>3</sup> Escola de passagem é aquela onde seus alunos não moram próximos a ela. Apenas a utilizam por sua localização estar entre sua casa e o local onde trabalham.

Apesar de uma visão teórica fundamentalmente construtivista, o professor comenta que não participa de trabalhos colaborativos em sua escola. Quanto a sua metodologia, deixa claro uma prática concentrada no perfil tradicionalista (definição, exemplo e exercício), e raramente utiliza-se de situações-problema para introduzir e desenvolver um conceito matemático. Apoia-se em livros didáticos disponibilizados aos alunos pela rede estadual e dificilmente usa recursos diversificados e tecnológicos.

Em relação aos conteúdos que envolvem a ideia de probabilidade, faz uso apenas de sequências didáticas que estimulam a memorização de procedimentos para resolução de exercícios.

### **Professor – P2**

Gênero feminino, 49 anos de idade, 20 anos de magistério, professora efetiva da rede pública estadual (SP) e municipal (cidade de São Paulo), licenciada em Matemática. Leciona, atualmente, para o Ensino Fundamental (rede municipal) e Ensino Médio (rede estadual).

Quanto a complementações e especializações em sua área profissional, afirma que participou de cursos oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEESP) com a finalidade de aprimorar a sua formação inicial. Em relação ao percurso acadêmico, não frequentou cursos de pós-graduação *stricto sensu* (mestrado ou doutorado).

Ao ser questionada sobre o que representava a Educação Matemática, assevera que é um conjunto de técnicas para sala de aula, considerando-se as diferentes formas dos alunos construírem novos conhecimentos.

Nas aulas adota essencialmente a forma expositiva, recorrendo em alguns momentos a metodologias que utilizam resolução de problemas e jogos. Apoia-se nas sequências propostas em livros didáticos fornecidos aos alunos, não procurando outras fontes de material didático.

Afirma que, para introduzir novas aprendizagens, procura abordar os assuntos como probabilidade, a partir de situações do cotidiano, propondo problemas para depois construir os conceitos. Constata que alguns alunos

compreendem os conteúdos a partir dessa abordagem. Não deixa claro de que maneira auxilia os alunos que não assimilaram satisfatoriamente os conceitos básicos em Matemática.

Em geral, não participa de trabalhos colaborativos com professores de outras disciplinas na escola.

### **Professor – P3**

Gênero feminino, 23 anos de idade, 5 meses de magistério, professora temporária, na rede pública estadual (SP) denominada Ocupante de Função Atividade (OFA), licenciada em Matemática. Atua somente com o Ensino Médio em escola pública do Estado de São Paulo.

Destaca que ainda não teve oportunidade de se inserir em cursos de formação continuada, oferecida pela SEESP.

Sobre a Educação Matemática afirma que é um conjunto de práticas em sala de aula, o que lhe ajuda a refletir e melhorar a cada dia. No que tange à metodologia, não utiliza nenhuma específica, faz a opção conforme o momento e a necessidade.

Apoia-se em diferentes recursos, além do livro didático, procurando introduzir o uso de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC), como vídeos e *softwares*.

O docente, ao abordar o tema probabilidade, comenta que faz uso das orientações contidas no livro didático adotado pela escola. Também menciona que os alunos desenvolvem uma ideia intuitiva sobre o assunto. Acredita que, ao apoiar-se em materiais diversificados como os jogos e a resolução de problemas, poderá facilitar a vida dos alunos em relação à aprendizagem dos conceitos estruturais da probabilidade.

## 2.3 Definições para a análise de dados

Iniciar a análise de dados é começar o processo de busca e organização sistemática dos dados coletados por meio das entrevistas semi-estruturadas, observações em sala de aula e análise de documentos (BOGDAN & BIKLEN, 1994). O objetivo desta etapa da pesquisa é compreender o material que temos coletado, perante o quadro teórico para melhor compreensão do problema de pesquisa e responder as questões de investigação.

Essa análise pode acontecer em diferentes momentos do estudo, isto é, concomitantemente com a coleta de dados, ou após a mesma (BOGDAN & BIKLEN, 1994). No estudo que realizamos, os dados foram na sua maioria coletados antes da análise.

Partindo do objetivo de estudo e do quadro teórico de referência, elegemos como unidade de análise: o professor no processo de (re)elaboração da trajetória hipotética de aprendizagem e o desenvolvimento da THA em sala de aula.

Em relação à unidade de análise, definimos as seguintes categorias, que foram observadas em dois momentos distintos:

1. No momento da (re)elaboração da THA:
  - a. Conhecimentos e dificuldades dos professores em relação ao conteúdo matemático proposto.
  - b. Conhecimentos e dificuldades dos professores em relação à metodologia recomendada para a abordagem dos conceitos propostos.
  - c. Sugestões dos professores na ampliação e modificação da THA.
2. No momento do desenvolvimento em sala de aula:
  - a. Abordagem da THA com os alunos.
  - b. A interação entre professor-aluno-conhecimento.
  - c. Sequência de desenvolvimento escolhida pelo professor.

Tendo em vista a análise de dados, passaremos aos relatórios das aulas e a reconstrução da THA no capítulo subsequente.

## Capítulo 3

---

### RELATÓRIOS DAS AULAS E RECONSTRUÇÃO DA THA

Foram relatados conjuntamente os principais acontecimentos ocorridos durante as aulas abrangendo atitudes tomadas tanto por professores como por alunos no desenvolvimento das atividades e também sugestões dos professores para alterações na composição da THA.

#### 3.1 Primeira versão da THA desenvolvida em sala de aula

##### AULA 1 – JOGO DA DIFERENÇA (parte 1)<sup>4</sup>

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** Primeiros contatos com a frequência relativa, para possíveis conjecturas sobre sua estabilização ou não.

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** Inseridos em uma situação contextualizada, os estudantes deverão observar e construir os eventos possíveis, mediante uma experimentação concreta, tornando-a significativa por meio de investigações e análises (LOPES, 2008). Julgamos que para tal seja necessário um primeiro contato das

<sup>4</sup> Atividade baseada em Godino, Batanero & Cañizares (1996, p. 100) e Smole & Diniz (2005, p. 434).



- a) O vencedor ganhou apenas por ter mais sorte? Justifique sua resposta. Verifique com as outras duplas da turma se há alguma tendência de apenas um jogador ganhar.

*Acredita-se que o aluno responda afirmativamente, pois existem poucas jogadas para se inferir algo; no entanto, quando confrontado com todas as duplas da sala, pode haver uma tendência maior de o jogador A ganhar.*

- b) Por que você escolheu ser o jogador A ou B?

*O objetivo dessa pergunta é saber se houve algum critério para a escolha ou foi somente palpite.*

- c) A que você atribui o fato de o jogador A ou B ter ganhado? Como saber se o jogo é justo? Sugira maneiras de tornar o jogo justo.

*Levantar hipóteses sobre os resultados e a possível vitória de A e debatê-las. Sugestão ao professor: solicitar a um aluno que coloque os valores obtidos pelas duplas na lousa, conforme mostra a tabela a seguir. Os alunos devem plotar os pontos num gráfico milimetrado e fazer uma estimativa da probabilidade pelo gráfico.*

- d) Copie da lousa o resultado de todas as duplas e sua frequência relativa para fazer um gráfico com esses pontos, de tal forma que o eixo das abscissas seja o número de jogadas e o eixo das ordenadas, a frequência relativa. Observando as frequências relativas acumuladas, o que se pode afirmar.

<b>N.º de lançamentos dos dois dados</b>	<b>N.º de pontos do jogador A</b> (frequência absoluta acumulada)	<b><math>F_A = \frac{\text{n.º de pontos de A}}{\text{n.º de lançamentos}}</math></b> (frequência relativa acumulada)
20		
40		
60		
80		
100		
120		
140		
160		
180		
200		
220		
240		
260		
280		
300		
320		
340		
360		
380		
400		

Segundo Lopes & Coutinho (2009) a probabilidade frequentista é:

[...] expressa como o valor ao redor do qual a frequência relativa do evento "A" se estabiliza ao repetirmos o experimento aleatório um número suficientemente grande de vezes. Logicamente, quando falarmos do ponto de vista do experimental concreto, essa estabilização fornece apenas uma estimativa de probabilidade, pois, de forma sintética, a definição de probabilidade por meio da estabilização de frequências envolve o conceito de limite, sendo que o número de repetições do experimento  $n$  tende ao infinito (p. 65).

d) Qual o valor aproximado da probabilidade de o jogador A ganhar? (veja em que ponto a reta paralela ao eixo das abscissas intersecta o eixo das ordenadas).

*A probabilidade clássica, que será discutida posteriormente, nos fornece um valor de aproximadamente 67%. No entanto, neste momento estamos preocupados em procurar uma possível estabilização da frequência relativa.*



## **Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 1**

Inicialmente, os professores esclareceram que em oito aulas seriam feitas atividades diferentes das habituais. Utilizando-se de duplas para realizar as seis primeiras aulas, a sétima, individualmente, e a oitava seria uma mescla entre individual e em dupla. Em todas as aulas seriam fornecidos cópias e todo o material necessário para a execução das atividades propostas.

Para começar a primeira atividade os professores solicitaram aos alunos que formassem duplas e distribuíram as folhas de questões, uma folha de papel milimetrado A4 e dois dados. Os professores indicaram que os alunos lessem as instruções e disponibilizaram-se para esclarecimentos no caso de dúvidas.

O professor P1 realizou a leitura em voz alta, simulando uma jogada para que os alunos compreendessem melhor as indicações. Utilizou a lousa para anotar uma jogada que no caso foi 4, pois em um dos dados a face voltada para cima foi o número 6 e no outro dado o número 2. Isto foi importante para ajudar inclusive uma dupla que não havia entendido o significado da palavra diferença (com o sentido de resultado da subtração entre dois valores).

Já os professores P2 e P3 realizaram a leitura em voz alta, não se utilizando de exemplificações para orientar diretamente os alunos.

Durante as jogadas, os estudantes iniciaram uma interação espontânea, diversas duplas circulavam entre os colegas para verificar o desenvolvimento da atividade. Observou-se que os três professores não interferiram nessa dinâmica, deixando os lançamentos a critério dos alunos.

Encerrados os lançamentos, os alunos receberam a indicação dos professores para que respondessem aos questionamentos na ficha recebida pela dupla, no início da atividade.

Pôde-se perceber que grande parte dos alunos, nas três salas analisadas, associou a vitória do jogador A apenas ao acaso.

Referente às possibilidades de vitória, os alunos destacaram em suas respostas que o jogo oferece chances iguais aos dois jogadores sem indicar propostas de novas regras, pois consideravam as jogadas justas.

O professor P3 construiu na lousa a tabela, conforme consta na cópia da aula 1 entregue aos alunos: (número de lançamentos dos dois dados) / (números de pontos do jogador A), ressaltando que todos os valores são acumulados. Cada dupla foi ditando os resultados obtidos e o professor efetuou os cálculos para encontrar a frequência relativa acumulada, com duas casas decimais, em cada grupo de 20 jogadas.

Para a construção do gráfico, ao notar que os alunos apresentavam dúvidas sobre as nomenclaturas (eixo das abscissas e eixo das ordenadas), o professor decidiu construir o gráfico na lousa e os alunos no papel milimetrado.

Nesse item o professor P3 fez algumas intervenções na lousa após verificar que muitas duplas estavam tendo dificuldades na sua elaboração. Esclareceu que uma das formas seria dividir uma dimensão pelo número de jogadas; por exemplo, na sala houve 340 jogadas e temos disponível 280 mm, assim  $280/340 = 0,8$ , ou seja, 0,8 mm por jogada, e seria conveniente então adotar 0,5 mm/jogada ou seu equivalente 1mm / 2 jogadas. A maioria das duplas escolheu para cada 10 mm no eixo das abscissas 20 jogadas e no eixo das ordenadas para cada 10 mm seria correspondente a 0,1 de probabilidade.

Os professores P1 e P2 deixaram os alunos calcular a frequência relativa acumulada, após anotarem o número de pontos do jogador A na lousa. Observou-se que algumas duplas se equivocaram ao registrar no gráfico alguns valores, por exemplo, acreditavam que 0,6 fosse o mesmo que 0,06. Houve intervenção dos professores esclarecendo esta dúvida utilizando-se de frações equivalentes  $0,6 = 6/10 = 60/100$ , a partir daí pôde-se comparar facilmente com  $0,06 = 6/100$ , verificando assim que  $0,60 > 0,06$  e, portanto,  $0,6 > 0,06$ .

A partir dos cálculos, os alunos construíram a tabela após orientação dos professores sobre os eixos e suas localizações.

Encerrando as atividades, os professores P1, P2 e P3 retomaram a proposta estimulando que os alunos observassem e refletissem sobre o que se

pode afirmar com respeito à frequência relativa de um evento a partir de um experimento aleatório.

## **AULA 2 – JOGO DA DIFERENÇA** (parte 2)

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivos:** *Identificar e resolver uma situação-problema com a apropriação dos seguintes conceitos: evento simples, evento composto, evento certo, evento impossível e espaço amostral equiprovável e não equiprovável.*

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** *Os alunos deverão começar a perceber que para enumerar o espaço amostral corretamente devemos considerar cada elemento considerando a ordem em que aparecem, ou seja, cada par ordenado é um ponto amostral distinto.*

### **Jogadas e diferenças**

-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
0																						
1																						
2																						
3																						
4																						
5																						

O jogo é o mesmo da aula 1. Preencha uma nova tabela, com os pares ordenados correspondentes a cada jogada, correspondendo o primeiro número ao valor apresentado pelo dado do jogador A e o segundo, pelo dado do jogador B. Por exemplo: na primeira jogada obteve-se o seguinte resultado: no dado do jogador A ocorreu a face 6 e no dado do jogador B, a face 4. Deve-se colocar esse par ordenado na coluna correspondente a jogada 1 e na linha correspondente a diferença 2 entre parênteses: (6,4)

d) Para que a diferença seja 5 é necessário que os dados tenham as faces 1 e 6, ou seja, o dado do jogador A tenha saído 6 e o dado do jogador B tenha saído 1 ou vice-versa. Podemos representar esse acontecimento por um conjunto A.

A: a diferença é 5.  $A = \{(6,1), (1,6)\}$ , portanto possui dois elementos,  $n(A) = 2$ . Enumere os seguintes acontecimentos e diga quantos elementos possui:

B: a diferença é 4

$B = \{(1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}$  e  $n(B) = 4$

C: a diferença é 3

$C = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3)\}$  e  $n(C) = 6$

D: a diferença é 2

$D = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$  e  $n(D) = 8$

E: a diferença é 1

$E = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)\}$  e  $n(E) = 10$

F: a diferença é 0

$F = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$  e  $n(F) = 6$

*Caso os alunos não estejam conseguindo visualizar todas as possibilidades, sugerir a construção da tabela de dupla entrada (ou de contingência).*

<i>dado</i> A \ <i>dado</i> B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

e) Quantos elementos têm no total? Quantos favorecem ao jogador A?

No total temos  $n(\Omega) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) + n(F) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 6 = 36$ . Do total, 24 elementos ( $n(D) + n(E) + n(F) = 8 + 10 + 6 = 24$ ) favorecem o jogador A. Momento do professor comentar sobre eventos.

### **EVENTO COMPOSTO**

Os conjuntos A, B, C, D, E e F são exemplos, pois são formados por mais de um elemento.

### **EVENTO SIMPLES OU UNITÁRIO**

O conjunto A é formado por dois pares ordenados (6,1) e (1,6). Cada um desses pares é denominado evento simples.

O conjunto formado por todos os elementos do experimento é chamado **espaço amostral**.

- f) De quantas formas podemos obter a diferença 6 entre os dados? E de quantas maneiras podemos obter diferença menor do que 6?

*Não existe nenhuma possibilidade de obter 6 como diferença entre os dados. O evento que não possui nenhum elemento é denominado **evento impossível**. Sempre é possível obter diferença entre os dados menor do que 6; esse tipo de evento é chamado **evento certo**.*

- g) Encontre uma forma de tornar o jogo com o mesmo número de possibilidades favoráveis tanto para o jogador A como para o jogador B.

*Caso os alunos não estejam conseguindo, sugira que “o jogador A ganha quando a diferença for par e o jogador B, quando for ímpar”.*

Jogue novamente, preenchendo a tabela com a nova regra:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
A																					
B																					

- h) Qual foi o vencedor desta vez? Compare com o resultado das outras duplas e explique por que houve resultados diferentes.

*Espera-se que os alunos constatem que em algumas duplas podem ter ocorrido os três resultados possíveis: o jogador A ganha, o jogador B ganha ou haja empate. Também que exista compreensão de que a probabilidade não é uma*

*garantia, mais uma quantificação da expectativa que um acontecimento se realize.*

- i) Encontre a razão entre os resultados favoráveis ao jogador A e o total de jogadas (no nosso caso 20), nos dois casos, ou seja, no primeiro jogo e depois quando foram alteradas as regras.

*Essa razão encontrada é chamada de probabilidade de o jogador A ganhar e pode ser definida como  $P(A) = n(A)/n(\Omega)$ , em que:*

*$P(A)$  é a probabilidade de o evento A ocorrer*

*$n(A)$  é o número de elementos do evento A*

*$n(\Omega)$  é o número de elementos do espaço amostral, ou seja, todos os resultados possíveis*

*Restrições: o espaço amostral deve ser finito e não vazio e os eventos elementares devem ser equiprováveis.*

## **Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 2**

Os alunos voltaram a se organizar em duplas. Os professores P1, P2 e P3 distribuíram as fichas de orientação indicando que os alunos lessem as comandas. Os professores exemplificaram a proposta na lousa.

Houve nova interação dos alunos a partir dos lançamentos dos dados, algumas duplas encerraram as jogadas rapidamente e passaram a auxiliar aqueles que estavam em dúvida quanto às regras de registro.

Encerrada essa etapa, os alunos começaram a responder as questões da ficha. Para tanto, leram o exemplo a ser representado por um conjunto cujo acontecimento é a diferença 5,  $A = \{(1,6), (6,1)\}$  e, portanto  $n(A) = 2$ . Ao registrarem os conjuntos indicados pelas diferenças 4, 3, 2, 1 e 0, os alunos utilizaram-se dos lançamentos registrados na tabela. Os professores precisaram intervir explicando que os valores dos lançamentos não representavam todos os resultados possíveis, mas apenas alguns deles.

Apesar de o exemplo estar bem explícito de como deve ser a notação de conjuntos e seu respectivo número de elementos, nota-se que os alunos não

apresentaram uma familiaridade ao utilizar-se de símbolos matemáticos para representarem os pares ordenados e de sua quantidade de elementos. O professor também reforçou a praticidade (ideia de padronização) de utilizar os símbolos matemáticos para representar os pares ordenados com seus respectivos números de elementos, pois os alunos responderam de muitas formas distintas. Eis algumas delas, quando, por exemplo, foi solicitado a eles que enumerassem todas as possibilidades de a diferença entre os dados ser 4 (com as duplas sendo representadas por E1, E2, ... ,E8):

$$E1: 5,1 / 6,2 / 2,6 / 1,5$$

$$E2: 5,1 - 1,5 - 6,2 - 2,6$$

$$E3: (1,5) (5,1) (2,6) (6,2)$$

$$E4: 5,1 \text{ e } 1,5 \text{ e } 2,6 \text{ e } 6,2$$

$$E5: \{(1,5), (5,1), (6,2), (2,6)\}$$

$$E6: (6,2) (1,5) (5,1) (2,6) = 4$$

$$E7: \left. \begin{array}{l} 6,2 - 2,6 \\ 5,1 - 1,5 \end{array} \right\} 4$$

$$E8: = \{5,1\}, \{1,5\}, \{2,6\}, \{6,2\}$$

Caso fosse seguido o padrão do exemplo, o resultado deveria ter sido apresentado assim:  $B = \{(1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}$  e  $n(B) = 4$ .

Os professores também construíram na lousa uma tabela de dupla entrada para que os alunos visualisassem todas as possibilidades na construção dos conjuntos. Reforçaram a ideia da necessidade de saber a quantidade de elementos dos conjuntos que representam as diferenças indicadas, destacando quantos elementos totalizam os conjuntos e quais favorecem o jogador A, explicando os diferentes tipos de eventos: evento composto, eventos simples, espaço amostral, evento impossível e evento certo. Durante essa etapa, os alunos pediram mais exemplos para compreenderem melhor as diferenças entre os eventos.

Encerrando a atividade, os professores sugeriram que os alunos criassem uma nova regra para que os jogadores A e B tivessem o mesmo número de possibilidades favoráveis.





- a) Os tempos foram semelhantes? Você acha possível os tempos serem os mesmos? E como isso poderia ser feito?

*Os tempos de queda foram muito próximos. Existem fatores que influenciaram no experimento que podem ter causado diferenças nos tempos: reflexo para soltar a moeda e cronometrar seu tempo até chegar ao chão, diferença entre o barulho da moeda ao tocar o chão e parada do cronômetro. Sim, é possível serem os mesmos em determinadas condições. Deveria ser feito, por exemplo, em laboratório. O tempo pode ser calculado utilizando a função  $h = g t^2 / 2$  (queda livre) ou aproximadamente  $h = 5 t^2$  (considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ), como  $h = 2\text{m}$ , temos  $t = \sqrt{2/5} \rightarrow t = 0,632 \text{ s}$  (aproximadamente).*

- b) Anotem quantas caras foram obtidas. É possível saber qual face será obtida na décima primeira jogada?

*Não é possível saber qual face será obtida na décima primeira jogada por se tratar de um experimento aleatório.*

- c) Quando observamos somente o tempo da queda da moeda, estamos realizando um tipo de experimento denominado determinístico. Você seria capaz de dizer quais são as suas características?

*Em cada experimento pode-se determinar efetivamente seu resultado, caso seja realizado nas mesmas condições.*

- d) Quando observamos a face da moeda voltada para cima, estamos realizando um tipo de experimento denominado aleatório. Você seria capaz de dizer quais são as suas características?

*O experimento aleatório é aquele em que, mesmo repetido sob as mesmas condições e diversas vezes, gera resultados distintos, que não podem ser determinados previamente antes da conclusão do processo, entretanto sabemos de antemão quais são todos os resultados possíveis.*

- e) Dê exemplos de experimentos ou fenômenos aleatórios e experimentos determinísticos.

*Exemplos de experimentos aleatórios: lançamento de uma moeda e leitura da figura voltada para cima, lançamento de um dado e leitura do número voltado para cima, determinação da vida útil de uma lâmpada, previsão do tempo, nascimento de uma criança e observação do seu sexo.*

*Exemplos de experimentos determinísticos: temperatura de ebulição da água, queda livre dos corpos.*

- f) Descreva um evento que poderia ser observado. Qual a relação entre evento e espaço amostral?

*Um evento poderia ser a observação da face cara no lançamento de uma moeda. O espaço amostral poderia ser os resultados possíveis, ou seja, cara ou coroa. O aluno deve perceber que todos os eventos estão incluídos no espaço amostral, mesmo que tenhamos casos extremos: nenhum elemento (evento impossível) ou todos os elementos (evento certo). Isso caracteriza o **evento** como um **subconjunto do espaço amostral**.*

### **Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 3**

O professor forneceu uma moeda de R\$ 1,00 e uma trena para cada dupla e pediu que lessem as instruções e começassem a atividade proposta na aula 3. A cronometragem foi realizada por celular; caso alguma dupla não possuísse, seria fornecido um cronômetro.

Os alunos marcaram com uma pequena marca de giz a altura de 2 metros na parede. E um deles subia na cadeira e soltava a moeda enquanto o outro cronometrava o tempo que era iniciado após um sinal de que ia soltar a moeda (que normalmente era a palavra “já”), e o término da contagem do tempo se dava após o barulho que a moeda fazia ao tocar o chão.

Os alunos se mostraram eufóricos para realizar o experimento, acarretando em algumas duplas números extremamente discrepantes em cada uma das dez medições. No entanto, o professor percebeu que não foi suficiente essa atividade para que eles conseguissem caracterizar os experimentos aleatórios e determinísticos. Houve uma melhor compreensão quando o professor deu vários



a) Qual foi o critério utilizado para a escolha de cada jogador?

*Acredita-se que os alunos respondam que haja mais chance de o jogador A vencer, pois faces iguais podem acontecer em dois casos: cara-cara e coroa-coroa e o jogador B ganha em apenas um caso: coroa-cara.*

b) Quem foi vencedor nesses dez lançamentos?

*Seja K = cara e C = coroa. Estima-se que haja predominância do empate em um grande número de jogadas, pois dois casos favorecem o jogador A (K, K) e (C, C) e dois o jogador B (K, C) e (C, K)*

Juntando todos os resultados da sala, qual seria o vencedor?

*Acredita-se que com os resultados da sala reforça-se a ideia de que haja equilíbrio nos ganhadores, pois a probabilidade de o jogador A vencer é a mesma da do jogador B. Jogador A:  $A = \{(K,K), (C,C)\}$ ,  $n(A) = 2$ . Jogador B:  $B = \{(C,K), (K,C)\}$ ,  $n(B) = 2$ .*

*$\Omega = \{(K,C), (C,K), (K,K), (C,C)\}$ ,  $n(\Omega) = 4$ . Portanto,  $P(A) = n(A) / n(\Omega) = 2/4 = 1/2$  e  $P(B) = n(B) / n(\Omega) = 2/4 = 1/2$ .*

Realize o jogo novamente agora anotando primeiro o resultado da moeda dourada e depois o da moeda prateada.

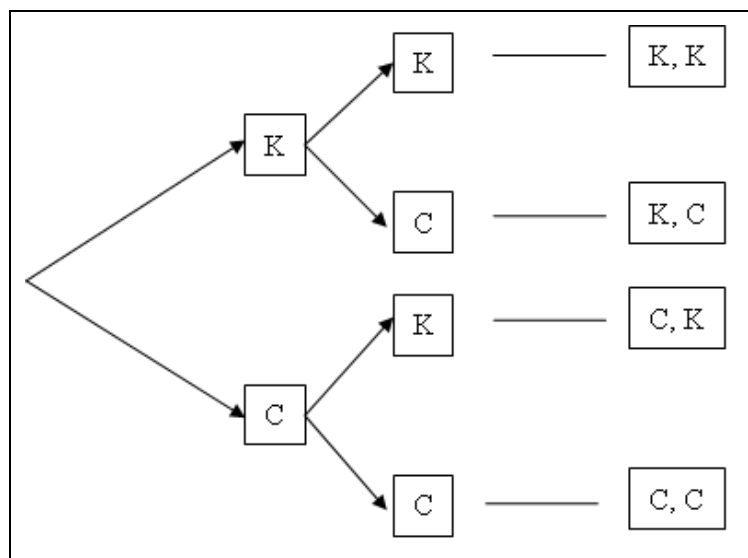
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
A(d,p)											
B(d,p)											

c) Faça uma tabela de dupla entrada e um diagrama de árvores com os resultados desse experimento.

Tabela de dupla entrada

	Cara (K)	Coroa (C)
Cara (K)	(K, K)	(K, C)
Coroa (C)	(C, K)	(C, C)

## Diagrama de árvore



*Uma das dificuldades que o aluno poderá apresentar será compreender que o par “cara, coroa” é diferente do par “coroa, cara”, mas ambos os pares ordenados são favoráveis ao jogador C que escolheu como resultado as faces diferentes.*

*O conjunto formado por todos os pares possíveis é o espaço amostral que nesse caso é  $\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$ .*

*O aluno deve verificar que tanto as faces distintas como as faces iguais têm a mesma frequência relativa para um grande número de jogadas, pois do espaço amostral constituído por quatro elementos metade favorece a um deles. Considerando as moedas simétricas, tem-se um **espaço amostral equiprovável**, pois os seus eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrer.*

*A probabilidade clássica é definida como a razão entre o número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis.*

#### **Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 4**

Ao serem divididos em duplas foi possível observar que os alunos preferiam ser o jogador A, pois acreditavam que as faces iguais (cara-cara ou coroa-coroa) teriam mais chances de ocorrer do que as faces distintas (coroa-cara). Ignoraram, novamente, o fato de que os pares ordenados “cara, coroa” e “coroa, cara” devam compor o total de possibilidades como jogadas distintas.

Após as jogadas e o preenchimento da tabela, os professores P1, P2 e P3 pediram que os alunos respondessem as questões da ficha. A partir das respostas dos alunos, o professor P1 iniciou um debate para que os alunos pudessem perceber e confrontar suas hipóteses e os resultados obtidos em todas as duplas.

Foi possível observar que os alunos conseguiram construir a tabela de dupla entrada, necessitando, porém, da intervenção dos professores que, utilizando das anotações dos dados na lousa, puderam lembrar as duas abordagens de probabilidade vistas até o momento (clássica e frequentista).

### **AULA 5 – JOGO DA TAMPA**

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** *Verificar concretamente por meio de um experimento aleatório a existência de um espaço amostral não equiprovável.*

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** *A diferenciação de espaço amostral equiprovável e espaço amostral não equiprovável auxilia a compreensão desse conceito.*

1. Os participantes decidem quem será o jogador A e quem será o jogador B.
2. Os jogadores realizam dez jogadas. (Cada jogada é composta pelo lançamento da tampa do tubo do creme dental e a observação se caiu “em pé” ou “deitada”).
3. O jogador A marca um ponto se a tampa do creme dental cair “em pé”, ou seja, a circunferência maior voltada para cima ou para baixo. O jogador B marca um ponto se a tampa cair “deitada”, isto é, as suas circunferências tangenciarem a superfície do chão. Vence o jogador com maior número de pontos ao final das dez jogadas.

Jogador A: tampa “em pé”

Jogador B: tampa “deitada”

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
A											
B											

a) Esse espaço amostral é equiprovável?

*Provavelmente não, pois a tampa do tubo do creme dental tem uma estrutura física irregular.*

b) Encontre a frequência relativa da tampa “em pé” que favorece o jogador A e também a frequência relativa da tampa “deitada” que favorece o jogador B.

*Jogador que escolheu a posição A:  $f_A = n_A / n$ , sendo  $n = 10$ , temos  $f_A = n_A / 10$ .*

*Jogador que escolheu a posição B:  $f_B = n_B / n$ , sendo  $n = 10$ , temos  $f_B = n_B / 10$ .*

c) Cada grupo deve ir à lousa colocar seus resultados para posteriormente calcular a frequência relativa acumulada que favorece cada jogador.

*Semelhante ao item b, apenas com variação do valor de  $n$ .*

d) É possível calcular sua probabilidade *a priori*?

*Sim. Estudando as características físicas da tampa do tubo do creme dental.*

### Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 5

As duplas de alunos receberam tampinhas de embalagem de creme dental. Os professores P1, P2 e P3 optaram por ler as regras em voz alta registrando na lousa a tabela a ser preenchida pelos jogadores e a regra de pontuação (tampa em pé reverte em ponto para o jogador A e tampa deitada reverte em ponto para o jogador B).

Encerradas as jogadas, os professores pediram que os alunos respondessem as questões da ficha. Os professores P1 e P2 decidiram que as questões a e b seriam respondidas coletivamente, para que pudessem estabelecer uma sequência reflexiva sobre espaço amostral equiprovável.

Os professores comentaram novamente o que significa espaço amostral equiprovável, ou seja, disseram que é aquele em que os seus pontos amostrais têm a mesma probabilidade de ocorrer. Também salientaram que sem uma análise das características físicas das tampinhas é impossível calcular sua probabilidade *a priori*.

Em relação à frequência relativa acumulada favorável ao jogador A e a frequência relativa favorável ao jogador B, os próprios alunos realizaram os cálculos após a orientação prévia dos professores.

### **AULA 6 – JOGO: PRODUTO PAR OU ÍMPAR**

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

***Objetivo:*** Obter o espaço amostral para o cálculo de probabilidades

***Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:*** A integração do princípio fundamental da contagem auxilia o cálculo da probabilidade *a priori* e a visão frequentista ratifica concretamente essa projeção.

1. Os participantes decidem quem será o jogador A e quem será o jogador B.
2. Os jogadores realizam oito jogadas ou partidas. (Cada partida é composta pelo lançamento simultâneo de três dados perfeitos (honestos ou não tendenciosos) e pela realização do produto das suas faces voltadas para cima).



3. O jogador A marca um ponto se o produto entre os três números que saírem nos dados for par. O jogador B marca 1 ponto se o produto entre os três números for ímpar. Após oito rodadas, vence o jogador com maior número de pontos.

Jogador A: produto par

Jogador B: produto ímpar

	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
A									
B									

- a) A vitória do jogador A ou do jogador B foi pura sorte?
- b) Faça um diagrama de árvore do experimento. Parta do pressuposto de que haja nos dados apenas dois resultados “par ou ímpar”. Calcule a probabilidade de o produto ser par e a de ser ímpar.

*O professor transcreve os resultados de toda a classe na lousa. Sabemos que só existe um caso dos oito que apareceram para o produto ser ímpar: ímpar. ímpar.ímpar, pois todo número ímpar pode ser escrito como  $n = 2k + 1$ , com  $n, k \in \mathbb{Z}$ ; sejam  $n_1 = 2k_1 + 1$ ,  $n_2 = 2k_2 + 1$  e  $n_3 = 2k_3 + 1$  com  $n_1, n_2, n_3, k_1, k_2$  e  $k_3 \in \mathbb{Z}$ , multiplicando  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$  temos:  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = (2k_1 + 1) \cdot (2k_2 + 1) \cdot (2k_3 + 1)$  que vai resultar em um número da forma:  $2k + 1$ , que é ímpar. Os demais casos são pares, demonstração análoga.*

- c) Utilize o espaço amostral como aquele em que lançamos os três dados e observamos todos os possíveis resultados dos ternos formados pelas suas faces voltadas para cima. Com base nisso, calcule, novamente, a probabilidade de o produto ser par e a de ser ímpar.

*Pelo princípio multiplicativo, temos: Total de resultados possíveis no lançamento de três dados:  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ . Total de casos ímpares:  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ . Portanto, temos 27 resultados que nos interessam em 216 possíveis, ou seja, de cada 8 resultados possíveis 1 nos interessa.  $P(\text{ímpar}) = 27/216 = 1/8$ .*

## Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 6

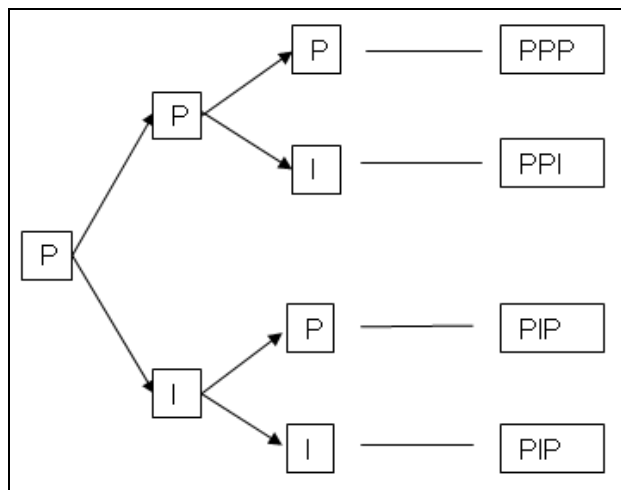
Nessa aula, os alunos dividiram-se novamente em duplas. Percebe-se que seguiram o mesmo critério das aulas anteriores tanto na subdivisão dos alunos quanto na escolha do jogador A ou B.

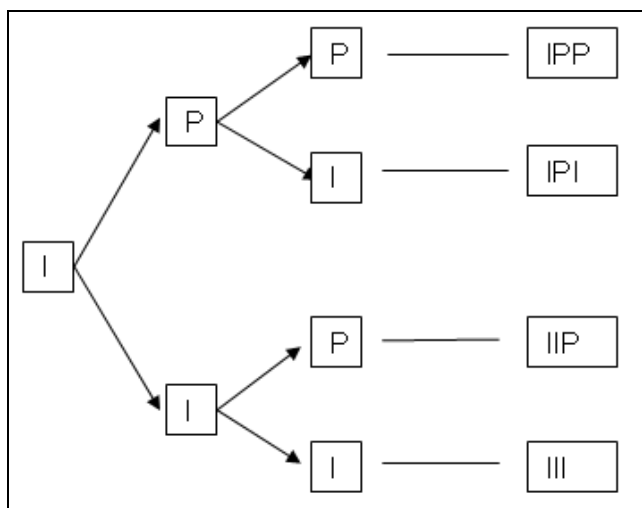
Após lerem as regras do jogo, nota-se que os professores P1, P2 e P3 necessitaram exemplificar a proposta descrita, considerando que parte dos alunos havia se esquecido o que significava produto. Como intervenção, os professores P2 e P3 realizaram a operação, registrando exemplos na lousa. O professor P1 decidiu usar a própria atividade para servir de exemplo concreto. Solicitou os três dados a uma dupla e realizou os lançamentos, anotando o produto. Por meio disso, os alunos puderam perceber a operação realizada.

Encerrada essa etapa, os alunos responderam as questões da ficha de atividades. Nota-se que, quando questionados a respeito da vitória de um dos jogadores, não mais atribuíram esse fato à sorte. Como exemplo, podemos citar a atitude do professor P1 que pediu que comentassem em voz alta a resposta do item a; alguns argumentaram que havia uma tendência ao jogador A ganhar e isso não era algo em virtude exclusivamente do acaso.

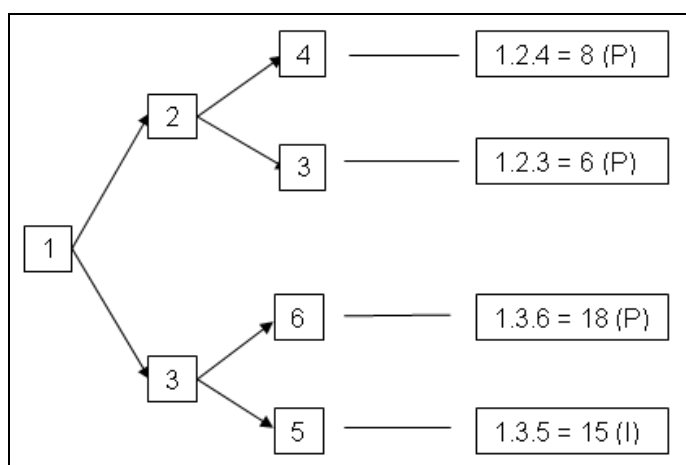
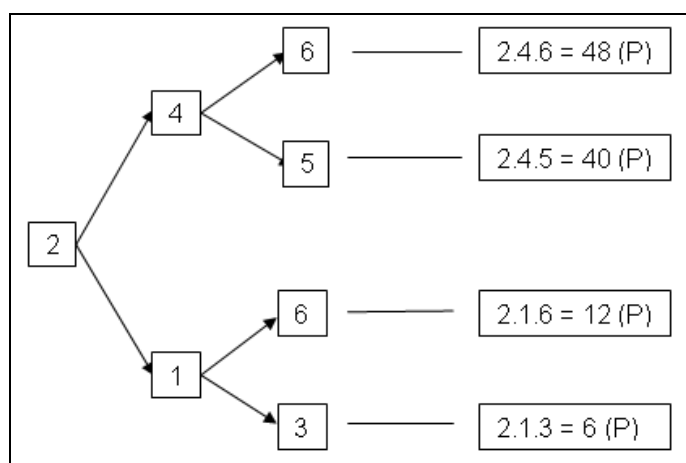
Na construção do diagrama de árvores, algumas duplas pediram auxílio ao professor, no entanto um número significativo de duplas conseguiu construir o diagrama com autonomia. Não estabeleceram a estrutura final das possibilidades.

Estrutura desenvolvida pelos alunos:





A partir desse ponto, os professores precisaram iniciar uma intervenção para que o diagrama fosse finalizado. Recorreram a uma simulação na lousa com números que correspondessem aos itens par e ímpar na árvore para que os alunos calculassem as possibilidades.



Tendo em vista que os próprios professores utilizaram alguns elementos do espaço amostral para que os alunos pudessem construir o diagrama de árvore, o exercício foi usado para uma reflexão coletiva sobre os resultados possíveis no lançamento dos três dados.

Os alunos mostraram-se, a princípio, muito admirados de como o jogador A (produto par entre os 3 dados) ganhava, na maioria dos casos, de uma forma tão arrasadora, e em várias duplas ocorreu ou o resultado de  $8 \times 0$  ou  $7 \times 1$  em favor do jogador A. Esse fato serviu como um “gancho” importante para o professor recorrer à primeira aula e lembrá-los que havia ocorrido uma situação análoga de espaço amostral não equiprovável.

Os professores também salientaram que, embora todos os jogadores A houvessem ganho, poderia suceder o contrário, ou seja, todos os jogadores B ganharem ou também ocorrer empates, porém a chance de isso ocorrer é bem mais reduzida.

As duplas, como já estavam se acostumando a observar seus vizinhos, verificaram prontamente que o produto par (jogador A) ganhava e com grande diferença, mesmo sendo realizado numa “pequena” quantidade de vezes. O professor foi obrigado a fazer uma intervenção no sentido de ajudá-los a analisar os casos em que o produto de três números inteiros positivos resulta em um número par ou ímpar, pois alguns alunos estavam testando alguns valores, mas não estavam conseguindo generalizar todos os resultados possíveis.

Algumas duplas conseguiram fazer o diagrama de árvore para representar o evento produto par ou ímpar, partindo do pressuposto de que o espaço amostral era composto por apenas números pares ou ímpares. Entretanto, quando foi solicitada a ampliação do espaço amostral para que observássemos as três faces dos dados e anotássemos seus valores, os alunos perceberam que tanto o diagrama de árvores ou a tabela de dupla entrada seriam inconvenientes em razão do grande número de elementos que esse experimento exige.

A ampliação do espaço amostral solicitada no item c foi importante para a reafirmação da importância do princípio multiplicativo, pois nesse caso sua enumeração seria trabalhosa e propícia a erros, contando com 216 elementos.

**AULA 7 – ENEM 2006**

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** *Identificar o problema como experimento aleatório e os seus eventos. Calcular e comparar as probabilidades desses eventos mutuamente exclusivos.*

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** *Desenvolvimento de competências e habilidades amplia o campo de visão do educando.*

(ENEM 2006 – adaptado) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer o campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para decidir quem ficaria com o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

**Pedro, camisa 6:** – Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces pode variar de 2 (1+1) a 12 (6+6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai ganhar a taça.

**Tadeu, camisa 2:** – Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

**Ricardo, camisa 12:** – Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Comente cada item a seguir, justificando-o matematicamente

- Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a taça era a mesma para todos.
- Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
- Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

- d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
- e) Não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

*Inicialmente, construiremos a tabela de dupla entrada*

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

*Com o auxílio da tabela de dupla entrada, iremos calcular as seguintes probabilidades:*

*Pedro, camisa n.º 6 (guardar a taça) = 5/36.*

*Tadeu, camisa n.º 2 (guardar a taça) = 1/36.*

*Ricardo, camisa n.º 12 (guardar a taça) = 1/36.*

- a) *Seja  $P(P)$  a probabilidade de Pedro guardar a taça,  $P(T)$  a probabilidade de Tadeu guardar a taça e  $P(R)$  a probabilidade de Ricardo guardar a taça, então:*

$$P(P) = n(P)/n(\Omega) = 5/36$$

$$P(T) = n(T)/n(\Omega) = 1/36$$

$$P(R) = n(R)/n(\Omega) = 1/36$$

*Portanto,  $P(T)+P(R) \neq P(P)$ . Item a é falso.*

*b)  $P(T) + P(R) = 1/36 + 1/36 = 2/36 \neq 5/36 = P(P)$ . Item b é falso.*

*c)  $P(T) + P(R) = 1/36 + 1/36 = 2/36 < 5/36 = P(P)$ . Item c é falso.*

*d)  $P(T) + P(R) = 1/36 + 1/36 = 2/36 < 5/36 = P(P)$ . Item d é verdadeiro.*

*e) Os resultados não dependem exclusivamente da sorte, mas sim de cálculos das probabilidades de cada um.*

## Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 7

Esta foi a primeira tarefa individual após seis aulas realizadas em dupla e não foi permitida a comunicação entre eles; os alunos receberam as folhas de exercício da aula 7. Foram orientados pelos professores P2 e P3 para que realizassem a leitura do enunciado e procurassem desenvolver uma justificativa matemática que atendesse a cada item proposto. O professor P1 optou por executar a leitura em voz alta do enunciado e dos itens, sugerindo que os alunos lessem o texto e indicassem soluções para os itens abordados.

Após algumas tentativas por parte dos alunos, os professores identificaram que se tornava necessário trabalhar cada enunciado individualmente, incentivando a interpretação e a reflexão dos dados descritos.

Tanto o professor P1 quanto os professores P2 e P3 iniciaram a mediação questionando os alunos sobre os dados relevantes que identificaram na leitura. Por exemplo: Quantas camisas teremos numeradas? Quais as possíveis combinações?

Por meio destes elementos, os professores construíram na lousa uma tabela de dupla entrada, com a finalidade de facilitar a identificação das possibilidades do resultado das somas coincidirem com o número da camisa de um dos jogadores.

Observa-se, a seguir, esta construção:

Pedro: camisa 6

Tadeu: camisa 2

Ricardo: camisa 12

Faces dos dados: 6

Total de pares ordenados possíveis com suas respectivas somas: 36

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Durante a organização dos dados, os professores incentivaram uma breve reflexão por parte dos alunos, destacando:

- a) Qual a probabilidade de o jogador camisa 6 levar a taça?
- b) Qual a probabilidade de o jogador camisa 2 levar a taça?
- c) Qual a probabilidade de o jogador camisa 12 levar a taça?

Os alunos registraram nas folhas:

- a) Camisa 6 =  $5/36$
- b) Camisa 2 =  $1/36$
- c) Camisa 12 =  $1/36$

Encerrada a verificação dos dados que compõem a situação-problema, os professores retomaram o enunciado dos itens, discutindo as possibilidades e estimulando os alunos a justificar matematicamente suas respostas. Exemplo: no item “d) Tadeu e Ricardo tinham razão pois os dois justos tinham menos chances de ganhar do que Pedro”, os alunos foram capazes de distinguir e associar que:

$$1/36 + 1/36 < 5/36 \text{ ou Tadeu + Ricardo} < \text{Pedro}$$

Nota-se que nesta aula 7 os alunos apresentaram dificuldades na interpretação do enunciado. Os professores comentaram que, somente por meio da visualização dos dados concretos, a partir do preenchimento da tabela de dupla entrada, a aprendizagem poderia ser facilitada, o que foi possível identificar no resultado final da aula, quando os alunos conseguiram estabelecer justificativas matemáticas para os itens indicados.

## **AULA 8 – ELABORAÇÃO DE UM JOGO DA SOMA**

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** *Avaliar se houve por parte dos alunos a apropriação de conhecimentos sobre eventos, espaço amostral e probabilidade.*



*Hipóteses sobre aprendizagem do aluno: Retorno para averiguação de uma competência fundamental das ideias iniciais de probabilidade*

Elabore um jogo utilizando-se da soma entre os números resultantes do lançamento simultâneo de dois dados. Você poderá ter como base o “jogo da diferença”, discutido inicialmente na primeira aula e descrito de novo a seguir.

O jogo deve ser elaborado individualmente por todos os alunos.

Após a sua elaboração com as regras e questionamentos, deve-se escolher um oponente para jogar.

Testar as regras juntando-se a um outro colega e disputar com ele o jogo elaborado por você e posteriormente o jogo elaborado por ele.

Como teremos dois jogos, as duplas devem disputar utilizando-se as regras ora elaboradas por um e, posteriormente, jogando-se novamente, mas agora com as regras feitas pelo concorrente.

### **JOGO DA DIFERENÇA** (Parte 1)

1. A partida será composta por 20 jogadas que serão disputadas por alunos organizados em duplas, de tal forma que os participantes decidem quem será o jogador A e quem será o jogador B.
2. Cada jogada é composta pelo lançamento de dois dados (um dado lançado pelo jogador A e o outro dado lançado pelo jogador B) e pela observação das suas faces voltadas para cima.
3. O jogador A marca um ponto se a diferença (sempre do maior para o menor valor) entre os números que saírem nos dados for 0, 1, ou 2. O jogador B marca 1 ponto se o valor da diferença for 3, 4, ou 5. Após 20 rodadas, vence o jogador com maior número de pontos.

Jogador A: diferenças (0, 1 ou 2)

Jogador B: diferenças (3, 4 ou 5)

Os pontos de cada participante serão assinalados com um X na tabela abaixo:

### Jogadas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
A																						
B																						

### Observações realizadas durante o desenvolvimento da aula 8

Os alunos foram orientados pelos professores, ressaltando-se que esta atividade seria realizada individualmente.

Após a distribuição da proposta de atividade, os professores P1 e P3 aguardaram a leitura por parte dos alunos, executando, em seguida, uma leitura em voz alta do enunciado.

Observa-se que muitos alunos demonstraram certa insegurança ou dúvida na realização do exercício, relendo o texto, escrevendo e apagando por diversas vezes suas ideias ou hipóteses iniciais. Alguns optaram por dialogar com os colegas que estavam ao seu redor, na tentativa de apoiar-se em um tipo de raciocínio que pudesse desenvolver o exercício.

Passado algum tempo, os professores pediram que os alunos se dividissem em duplas para realizarem as jogadas a partir de novas regras.

Analisando o preenchimento da tabela anexa ao exercício, os professores perceberam que muitos alunos executaram o jogo da diferença que constava como um exemplo.

Segundo o professor P1, esta confusão na interpretação do enunciado pode ter ocorrido porque na folha de exercício o enunciado foi sucedido pelo exemplo, sem apresentar uma proposta que sequenciasse com clareza a atividade que deveria ser desenvolvida. Sugeriu que no momento de elaboração escrita do exercício é preciso salientar com maior destaque o jogo da diferença (parte 1) para que os alunos relembrem a primeira aula dessa THA.

Como orientação, os professores se dispuseram a retomar o exercício, construindo coletivamente uma regra a partir da ideia de soma. Reescrevendo a tabela, podemos idealizar um jogo equitativo como o exemplo a seguir, no lançamento de dois dados e observação de sua face voltada para cima:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

**Vencedor: jogador A** (quando a soma for 7, 8, 9 ou 10)

Soma de pontos: 7. Enumerando o conjunto:

$$S_7 = \{(6,1), (5,2), (4,3), (1,6), (2,5), (3,4)\};$$

Total de elementos cuja soma seja 7:  $n(S_7) = 6$

Soma de pontos: 6. Enumerando o conjunto:

$$S_8 = \{(6,2), (5,3), (4,4), (2,6), (3,5)\};$$

Total de elementos cuja soma é 8:  $n(S_8) = 5$

Soma de pontos: 9. Enumerando o conjunto:

$$S_9 = \{(6,3), (5,4), (3,6), (4,5)\};$$

Total de elementos cuja soma seja 9:  $n(S_9) = 4$

Soma de pontos: 10. Enumerando o conjunto:  $S_{10} = \{(6,4), (5,5), (4,6)\};$

Total de elementos cuja soma seja 10:  $n(S_{10}) = 3$

Total de elementos cuja soma seja 7, 8, 9 ou 10:

$$n(S_A) = n(S_7) + n(S_8) + n(S_9) + n(S_{10}) = 6 + 5 + 4 + 3 = 18$$

**Vencedor: jogador B** (quando a soma for 2, 3, 4, 5, 6, 11 ou 12)

De maneira análoga podemos observar a tabela e calcular o número de elementos que favorecem o jogador B:

$$n(S_B) = n(S_2) + n(S_3) + n(S_4) + n(S_5) + n(S_6) + n(S_{11}) + n(S_{12})$$

$$n(S_B) = 18$$

Como  $n(S_A) = n(S_B)$ , então o jogo é justo.

## **3.2 Síntese da análise dos dados**

### **No momento da (re)elaboração da THA:**

#### **Conhecimentos e dificuldades dos professores em relação ao conteúdo matemático proposto**

Os professores tinham domínio sobre a introdução das ideias iniciais de probabilidade utilizando-se da abordagem laplaciana, mas não haviam ainda concebido uma tentativa de mudança de prática em sala de aula que combinasse o enfoque frequentista com o enfoque clássico na construção das noções elementares de probabilidade. O desconhecimento por parte dos professores da “lei dos grandes números” foi o principal fato que gerou as dificuldades iniciais no entendimento das atividades propostas na THA para desenvolvimento com os alunos.

#### **Conhecimento e dificuldades dos professores em relação à metodologia recomendada para a abordagem dos conceitos propostos**

Os professores tinham conhecimento da resolução de problemas como uma opção de metodologia para construção de conceitos, no entanto revelaram que não haviam elaborado ainda uma sequência de ensino que proporcionasse um ambiente de exploração e investigação para aprendizagem de probabilidade.

#### **Sugestões dos professores na ampliação e modificação da THA**

Não houve sugestões de ampliações e/ou modificações na primeira versão THA apresentada aos professores. Eles alegaram que, por ser uma experiência nova, gostariam de opinar após o término de seu desenvolvimento com os alunos.

Somente após a conclusão das atividades desenvolvidas com os alunos e o esclarecimento por parte do pesquisador de que para a frequência relativa ser considerada uma estimativa de probabilidade deve-se ter um grande número de experimentos foi proposto pelo professor P1 um aumento na quantidade de

partidas referentes à aula 1: jogo da diferença (parte 1) – passaria de uma partida de 20 jogadas realizadas por cada dupla para a realização de 10 partidas de 20 jogadas por dupla de alunos, aumentando de 340 para 3400 jogadas na sala de aula, pois a classe contou com 34 alunos. Isto permitiria aproximar os valores calculados pela probabilidade laplaciana e os obtidos pela probabilidade frequentista.

Na aula 2, ficaria suprimida a parte experimental, visto que foi aumentada consideravelmente a quantidade de jogadas na aula 1 de 340 para 3400, passando assim a constar apenas as perguntas teóricas.

Foi discutida também uma inversão na ordem das aulas, pois a ideia de experimento aleatório é prioritária no estudo de probabilidade. A aula 3 passaria a ser a primeira e vice-versa, ou seja, a aula 1 tornou-se a aula 3.

Nas atividades referentes às aulas 4 e 5, chegou-se a um consenso: a quantidade de jogadas passaria de 10 para 20 em cada partida, Sendo repetidas 10 partidas de 20 jogadas por dupla de alunos, como na aula 1.

As atividades referentes às aulas 6, 7 e 8 permaneceram inalteradas.

### **No momento do desenvolvimento em sala de aula:**

#### **Abordagem da THA com os alunos**

Os professores expuseram que seriam necessárias, aproximadamente, duas semanas (oito aulas) para que fosse apresentado um novo tema em Matemática, de uma forma diferente do que eles estavam acostumados. Inicialmente, não foi mencionado aos alunos que se tratava de noções elementares de probabilidade. As aulas seriam configuradas da seguinte forma:

- Nas seis primeiras aulas seriam solicitadas atividades utilizando-se de duplas;
- Na sétima aula uma atividade individual;

- Na primeira parte da oitava aula uma atividade individual que seria complementada, em seguida, pela mesma dupla utilizada anteriormente.

Todo o material necessário ao desenvolvimento das aulas também seria fornecido: cópias do texto, dados, moedas, trena, cronômetro, régua e papel milimetrado.

Os professores ressaltaram que eventuais esclarecimentos seriam feitos somente após a leitura cuidadosa por parte dos alunos das instruções contidas em cada xerox.

### **A interação entre professor-aluno-conhecimento**

Constatamos que os professores, no afã de atingir suas metas iniciais de aprendizagem das noções iniciais de probabilidade, pularam algumas etapas no processo de entendimento dos alunos. Ainda notamos a ênfase do professor ao se referir aos alunos quando se expressa dizendo que algum resultado está certo ou errado, sem se preocupar com o processo utilizado para sua obtenção.

Uma situação que exemplifica este fato ocorreu na aula 2, quando foi solicitado ao aluno que enumerasse e posteriormente contasse os elementos do espaço amostral referente ao lançamento de dois dados. Uma dupla apresentou como resposta 34, não atentando ao fato que deveria considerar os dois pares já apresentados no início como modelo. O professor não analisou a causa do engano, simplesmente disse que estava errado.

### **Sequência de desenvolvimento escolhida pelo professor**

Os professores seguiram a sequência preestabelecida na primeira versão apresentada a eles sem alterações, por se julgarem sem embasamento teórico e conhecimento prático sobre essa abordagem que lhes permitissem opinar com mais propriedade.

### 3.3 Segunda versão da THA após alterações sugeridas pelos professores

#### AULA 1 – EXPERIMENTO: QUEDA DA MOEDA

Nome: \_\_\_\_\_ nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** Reconhecer o experimento aleatório e experimento determinístico explicitando suas principais diferenças.

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** É essencial que os alunos constatem a existência de dois tipos distintos de experimentos e seu caráter de complementaridade.

Realize os seguintes experimentos:

1. Lançar uma moeda honesta 10 vezes de uma altura de 2 metros e cronometrar o tempo até que ela chegue ao chão.
2. Observar qual a face que ficou voltada para cima (cara ou coroa).

Utilize o tempo de queda em segundos e K para cara e C para coroa.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo										
Face										

- a) Os tempos foram semelhantes? Você acha possível os tempos serem os mesmos? E como isso poderia ser feito?

*Os tempos de queda foram muitos próximos. Existem fatores que influenciaram no experimento que podem ter causado diferenças nos tempos: reflexo para soltar a moeda e cronometrar seu tempo até chegar ao chão, diferença entre o barulho da moeda ao tocar o chão e parada do cronômetro. Sim, é possível serem os mesmos em determinadas condições. Deveria ser feito, por exemplo, em laboratório. O tempo pode ser calculado utilizando a função  $h = gt^2/2$  (queda livre) ou aproximadamente  $h = 5 t^2$  (considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ), como  $h = 2\text{m}$ , temos  $t = \sqrt{2/5} \rightarrow t = 0,632 \text{ s}$  (aproximadamente).*

- b) Anotem quantas caras foram obtidas. É possível saber qual face será obtida na décima primeira jogada?

*Não é possível saber qual face será obtida na décima primeira jogada por se tratar de um experimento aleatório.*

- c) Quando observamos somente o tempo da queda da moeda, estamos realizando um tipo de experimento denominado determinístico. Você seria capaz de dizer quais são as suas características?

*Em cada experimento pode-se prever seu resultado, caso seja realizado nas mesmas condições.*

- d) Quando observamos a face da moeda voltada para cima, estamos realizando um tipo de experimento denominado aleatório. Você seria capaz de dizer quais são as suas características?

*O experimento aleatório é aquele em que, mesmo repetido sob as mesmas condições e diversas vezes, gera resultados distintos, que não podem ser determinados previamente antes da conclusão do processo, entretanto sabemos de antemão quais são todos os resultados possíveis.*

- e) Dê exemplos de experimentos aleatórios e experimentos determinísticos.

*Exemplos de experimentos aleatórios: jogos de azar (lançamento de uma moeda e leitura da figura voltada para cima, lançamento de um dado e leitura do número voltado para cima, rifa, roleta, caça-níqueis, baralho etc.), determinação da vida útil de uma lâmpada, nascimento de uma criança e observação do seu sexo.*

*Exemplos de experimentos determinísticos: temperatura de ebulição da água e queda livre dos corpos.*

- f) Qual a relação entre evento e espaço amostral? Dê exemplos.

*Segundo Novaes & Coutinho (2009), o conjunto de todos os possíveis resultados para um experimento aleatório é denominado conjunto universo ou **espaço amostral** (notação:  $U$  ou  $\Omega$ ). Cada um desses possíveis resultados recebe o nome de **evento**.*



*Exemplo:*

1. No lançamento de uma moeda, observamos a face voltada para cima.

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\}.$$

2. No sorteio de uma peça em um lote para verificação de defeitos, os resultados possíveis podem ser identificados por:

$$\Omega = \{\text{defeituoso; não defeituoso}\}$$

## **AULA 2 – JOGO DA DIFERENÇA (parte 1)**<sup>5</sup>

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** Investigar uma possível estabilização da frequência relativa a um evento, repetindo-se o experimento aleatório um grande número de vezes, fazendo uma inferência sobre sua probabilidade.

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** Mediante uma situação contextualizada os estudantes deverão observar e construir os eventos possíveis, por meio uma experimentação concreta tornando-a significativa por intermédio de investigações e análises (LOPES, 2008). Julgamos que para tal seja necessário um primeiro contato das ideias iniciais de probabilidade por meio da observação de sua frequência relativa. A utilização de um gráfico ajuda a visualização de uma possível estabilização, visto que não se pode afirmar com rigor matemático que a probabilidade seja esta frequência relativa, em razão do baixo número de experimentações (340 jogadas). Para considerar-se como uma aproximação de probabilidade teríamos que efetuar algumas milhares de jogadas. Como ilustração pode-se citar o exemplo de Keirich, Buffon e Pearson, que lançaram uma moeda 10000, 4040 e 24000 vezes, respectivamente, e observam a frequência relativa referente à cara no seu lançamento resultando em: 0,5087; 0,5069 e 0,5005, respectivamente.

1. A partida será composta por 20 jogadas que serão disputadas por alunos organizados em duplas, de tal forma que os participantes decidem quem será o jogador A e quem será o jogador B.

<sup>5</sup> Atividade baseada em Godino, Batanero & Cañizares (1996, p.100) e Smole & Diniz (2003, p.434).

2. Cada jogada é composta pelo lançamento de dois dados (um dado pelo jogador A e o outro dado pelo jogador B) e pela observação das suas faces voltadas para cima.
3. O jogador A marca um ponto se a diferença entre os números que saírem nos dados for 0, 1, ou 2. O jogador B marca um ponto se o valor da diferença for 3, 4, ou 5. Após 20 rodadas, vence o jogador com maior número de pontos.

Jogador A: diferenças (0, 1 ou 2)

Jogador B: diferenças (3, 4 ou 5)

Os pontos de cada participante serão assinalados com um X na tabela abaixo:

#### Jogadas correspondentes a uma partida

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
A																						
B																						

4. Devem-se realizar, além desta primeira partida, mais nove vezes este jogo totalizando 200 jogadas de cada dupla.
  - a) Por que você escolheu ser o jogador A ou B? O vencedor das dez partidas ganhou apenas por ter mais sorte? Justifique sua resposta.

*Acredita-se que o aluno responda afirmativamente, pois existem poucas jogadas para se inferir algo; no entanto, quando confrontado com todas as duplas da sala, pode haver uma tendência maior ao jogador A ganhar.*

*O objetivo dessa pergunta é saber se houve algum critério para a escolha ou foi somente palpite.*

*Levantar hipóteses sobre os resultados e a possível vitória de A e debatê-las. Sugestão ao professor: solicitar a um aluno colocar os valores obtidos pelas duplas na lousa, conforme mostra tabela a seguir. Os alunos devem plotar os pontos num gráfico milimetrado e verificar se percebem ou não uma estabilização..*

*O professor deve familiarizar os alunos com os termos: frequência absoluta e frequência relativa.*<sup>6</sup>

- b) Copie da lousa o resultado de todas as duplas e sua frequência relativa para fazer um gráfico com esses pontos de tal forma que o eixo das abscissas seja o número de jogadas e o eixo das ordenadas, a frequência relativa. Observando as frequências relativas acumuladas, o que se pode afirmar:

<b>N.º de lançamentos dos dois dados</b>	<b>N.º de pontos do jogador A</b> (frequência absoluta acumulada)	<b><math>F_A = \frac{\text{n.º de pontos de A}}{\text{n.º de lançamentos}}</math></b> (frequência relativa acumulada)
200		
400		
600		
800		
1000		
1200		
1400		
1600		
1800		
2000		
2200		
2400		
2600		
2800		
3000		
3200		
3400		
3600		
3800		
4000		

<sup>6</sup> Frequência absoluta de um acontecimento é o número de vezes que ele é observado. Frequência relativa de um acontecimento é o quociente entre sua frequência absoluta e o número de elementos observados ou experimentados (SMOLE & DINIZ, 2003, p. 20).

- c) Qual o valor aproximado da probabilidade de o jogador A ganhar ? (veja em que ponto a reta paralela ao eixo das abscissas intersecta o eixo das ordenadas).

*O valor esperado deve estar entre 65% e 70 %. Apesar de os resultados do experimento apresentarem uma estabilidade de sua frequência relativa apenas para quando  $n$  cresce indefinidamente, é possível que os alunos apreciem uma certa regularidade ou tendência para o valor atribuído a priori, embora o número de experiências realizadas em sala de aula seja limitado.*

### **AULA 3 – JOGO DA DIFERENÇA (parte 2)**

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivos:** *Identificar e resolver uma situação-problema com a apropriação dos seguintes conceitos: evento simples, evento composto, evento certo, evento impossível e espaço amostral equiprovável.*

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** *Os alunos deverão começar a perceber que para enumerar o espaço amostral corretamente devemos considerar cada elemento considerando a ordem em que aparecem, ou seja, cada par ordenado é um ponto amostral distinto.*

- Após a observação dos resultados da aula 1 é possível manter a mesma opinião sobre se o jogo é justo ou não?
- Enumere todos os resultados possíveis (chamados de eventos simples ou eventos elementares) que podem ser obtidos ao lançarem-se dois dados simultaneamente.

*Caso os alunos não estejam conseguindo visualizar todas as possibilidades, sugerir a construção da tabela de dupla entrada (ou de contingência)*

dado A \ dado B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

c) Enumere e diga quantos elementos possuem os seguintes eventos, conforme foi realizado no conjunto A:

A: diferença é 5

$A = \{(6,1), (1,6)\}$  e  $n(A) = 2$ .

B: a diferença é 4

$B = \{(1,5), (2,6), (5,1), (6,2)\}$  e  $n(B) = 4$

C: a diferença é 3

$C = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3)\}$  e  $n(C) = 6$

D: a diferença é 2

$D = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$  e  $n(D) = 8$

E: a diferença é 1

$E = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)\}$  e  $n(E) = 10$

F: a diferença é 0

$F = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$  e  $n(F) = 6$

d) Quantos elementos têm no total? Quantos favorecem ao jogador A?

No total temos  $n(\Omega) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) + n(F) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 6 = 36$ . Do total, 24 elementos ( $n(D) + n(E) + n(F) = 8 + 10 + 6 = 24$ ) favorecem o jogador A.

e) Encontre a razão entre os resultados favoráveis ao jogador A e total de casos possíveis conforme determinado no item anterior.

Essa razão encontrada é chamada de probabilidade do jogador A ganhar e pode ser definida como  $P(A) = n(A)/n(\Omega)$ , em que:

$P(A)$  é a probabilidade de o evento A ocorrer

$n(A)$  é o número de elementos do evento A

$n(\Omega)$  é o número de elementos do espaço amostral

*Restrições: o espaço amostral deve ser finito e não vazio e os eventos elementares devem ser equiprováveis.*

### **EVENTO COMPOSTO**

*Os conjuntos A, B, C, D, E e F são exemplos, pois são formados por mais de um elemento.*

### **EVENTO SIMPLES OU ELEMENTAR**

*O conjunto A é formado por dois pares ordenados (6,1) e (1,6). Cada um desses pares é denominado evento simples.*

*O conjunto formado por todos os elementos do experimento é chamado **espaço amostral**.*

- e) De quantas formas podemos obter a diferença 6 entre os dados? E de quantas maneiras podemos obter diferença menor do que 6?

*Não existe nenhuma possibilidade de obter 6 como diferença entre os dados. O evento que não possui nenhum elemento é denominado **evento impossível**. Sempre é possível obter diferença entre os dados menor do que 6, e esse tipo de evento é chamado **evento certo**.*

- f) Encontre uma forma de tornar o jogo com o mesmo número de possibilidades favoráveis tanto para o jogador A como para o jogador B.

*Caso os alunos não estejam conseguindo, sugira que “o jogador A ganha quando a diferença for par e o jogador B, quando for ímpar”. Insista no fato de que a probabilidade não é uma garantia, mas uma quantificação da expectativa de que um acontecimento se realize.*

## AULA 4 – JOGO: FACES DA MOEDA

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Objetivo:** Verificar a importância do par ordenado para cálculo do número de possibilidades de um evento.

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** É necessária uma retomada da ideia de pares ordenados para auxiliar o educando na sua construção de espaço amostral.

1. Os participantes decidem quem será o jogador A e quem será o jogador B.
2. Os jogadores realizam 20 jogadas. (Cada jogada é composta pelo lançamento simultâneo de duas moedas perfeitas: uma dourada e outra prateada).
3. A cada jogada, os jogadores lançam sua moeda ao mesmo tempo.
4. O jogador A marca um ponto se as faces das moedas voltadas para cima forem as mesmas. O jogador B marca um ponto se as faces das moedas voltadas para cima forem distintas. Após 20 rodadas, vence o jogador com maior número de pontos.

Jogador A: faces iguais

Jogador B: faces distintas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
A																					
B																					

- a) Qual foi o critério utilizado para a escolha de cada jogador?

*Acredita-se que os alunos respondam que haja mais chance de o jogador A vencer, pois faces iguais podem acontecer em dois casos: cara-cara e coroa-coroa e o jogador B ganhe em apenas um caso: coroa-cara.*

b) Quem foi vencedor nesses 20 lançamentos?

Seja  $K = \text{cara}$  e  $C = \text{coroa}$ . Estima-se que haja predominância do empate em um grande número de jogadas, pois dois casos favorecem o jogador A ( $(K, K)$  e  $(C, C)$ ) e dois o jogador B ( $(K, C)$  e  $(C, K)$ )

Juntando todos os resultados da sala, qual seria o vencedor?

Acredita-se que com os resultados da sala reforça-se a ideia de que haja equilíbrio nos ganhadores, pois a probabilidade de o jogador A vencer é a mesma da do jogador B. Jogador A:  $A = \{(K, K), (C, C)\}$ ,  $n(A) = 2$ . Jogador B:  $B = \{(C, K), (K, C)\}$ ,  $n(B) = 2$ .

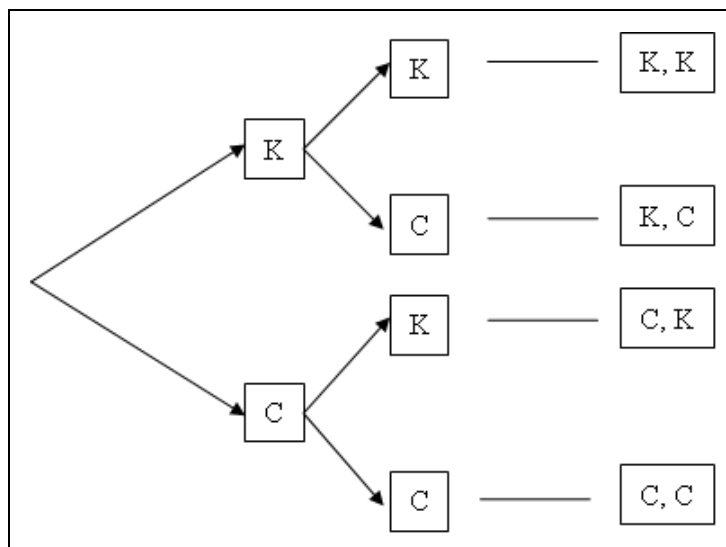
$\Omega = \{(K, C), (C, K), (K, K), (C, C)\}$ ,  $n(\Omega) = 4$ . Portanto,  $P(A) = n(A)/n(\Omega) = 2/4 = 1/2$  e  $P(B) = n(B)/n(\Omega) = 2/4 = 1/2$ .

c) Faça uma tabela de dupla entrada e um diagrama de árvores com os resultados desse experimento.

Tabela de dupla entrada

	Cara (K)	Coroa (C)
Cara (K)	(K, K)	(K, C)
Coroa (C)	(C, K)	(C, C)

Diagrama de árvore





*Uma das dificuldades que o aluno poderá apresentar será compreender que o par “cara, coroa” é diferente do par “coroa, cara”, mas ambos os pares ordenados são favoráveis ao jogador C que escolheu como resultado as faces diferentes.*

*O conjunto formado por todos os pares possíveis é o espaço amostral que nesse caso é  $\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$ .*

*O aluno deve verificar que tanto as faces distintas como as faces iguais têm a mesma frequência relativa para um grande número de jogadas, pois do espaço amostral constituído por quatro elementos metade favorece a um deles.*

*A probabilidade clássica é definida como a razão entre o número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis.*

## **AULA 5 – JOGO DA TAMPA**

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_ 2ª série \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_

**Objetivo:** *Determinação de uma estimativa de probabilidade por uma abordagem frequentista. Apresentar o espaço amostral com a possibilidade de não ser equiprovável.*

**Hipóteses sobre aprendizagem do aluno:** *A diferenciação de espaço amostral equiprovável e espaço amostral não equiprovável auxilia a compreensão desse conceito.*

1. Os participantes decidem quem será o jogador A e quem será o jogador B.
2. Os jogadores realizam dez jogadas. (Cada jogada é composta pelo lançamento de uma vez da tampa do tubo do creme dental.)
3. O jogador A marca um ponto se a tampa do creme dental cair “em pé”, ou seja, a circunferência maior voltada para cima ou para baixo. O jogador B marca um ponto se a tampa cair “deitada”, isto é, as suas circunferências tangenciarem a superfície do chão. Vence o jogador com maior número de pontos ao final das dez jogadas.
4. Realizar o jogo dez vezes.

Jogador A: tampa “em pé”

Jogador B: tampa “deitada”

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total	
A																						
B																						

a) Esse espaço amostral é equiprovável?

*Provavelmente não, pois, caso o seu centro de massa não seja o mesmo na posição “em pé” ou “deitada”, esta diferença geraria uma instabilidade maior mais em uma posição do que na outra.*

c) Cada grupo deve ir à lousa colocar seus resultados para posteriormente calcular uma estimativa de probabilidade com um erro menor.

d) É possível calcular sua probabilidade *a priori*?

*Sim. Mas não será objeto de nosso trabalho, pois envolveria noções de natureza física que fogem do objetivo do estudo em questão.*

**Observação:** as aulas 6, 7 e 8 não sofreram alterações, por isso não foram descritas novamente nesta segunda versão da THA.

## *Considerações Finais*

---

Com o propósito de responder a questão de pesquisa, “Quais as dificuldades e contribuições do professor no planejamento e desenvolvimento de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) sobre noções iniciais de probabilidade?”, nos deparamos com dois grandes desafios.

O primeiro desafio foi na própria elaboração da primeira versão da THA, pois devíamos constituí-la de forma a compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com um planejamento de ensino. Os trabalhos que mais se aproximaram do nosso objetivo foram os de Coutinho (1996, 2001, 2002), Lopes (1998, 2003, 2008), Lopes & Coutinho (2009), e Silva (2002), pois se preocuparam com sequências de ensino de probabilidade que confrontassem o enfoque frequentista com o clássico em uma perspectiva construtivista.

Consoante os autores, devem-se propor situações em que os estudantes realizem atividades, que considerem seus contextos, e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta. Concluem que para haver uma aprendizagem significativa é imprescindível considerar situações familiares a eles, que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas. Portanto, foram planejadas atividades que partissem de situações concretas (por exemplo: jogos de azar) para que os alunos observassem, registrassem e analisassem experimentos aleatórios, tendo em vista que muitos já brincavam com dados e moedas desde a infância.

Outro aspecto importante na elaboração das nossas atividades foi a preocupação em não limitar o contexto às situações equiprováveis, uma vez que

pode conduzir a certas concepções errôneas, como: “se existem dois resultados possíveis, então a ocorrência de cada um deles é 1/2” (COUTINHO, 2001).

O estudo da análise combinatória, na perspectiva formal, de acordo com os autores pesquisados, não é um pré-requisito para uma primeira familiarização com as ideias probabilísticas, podendo acrescentar dificuldades à aprendizagem da probabilidade. Sendo assim, evitamos situações que envolvessem cálculos complexos em análise combinatória.

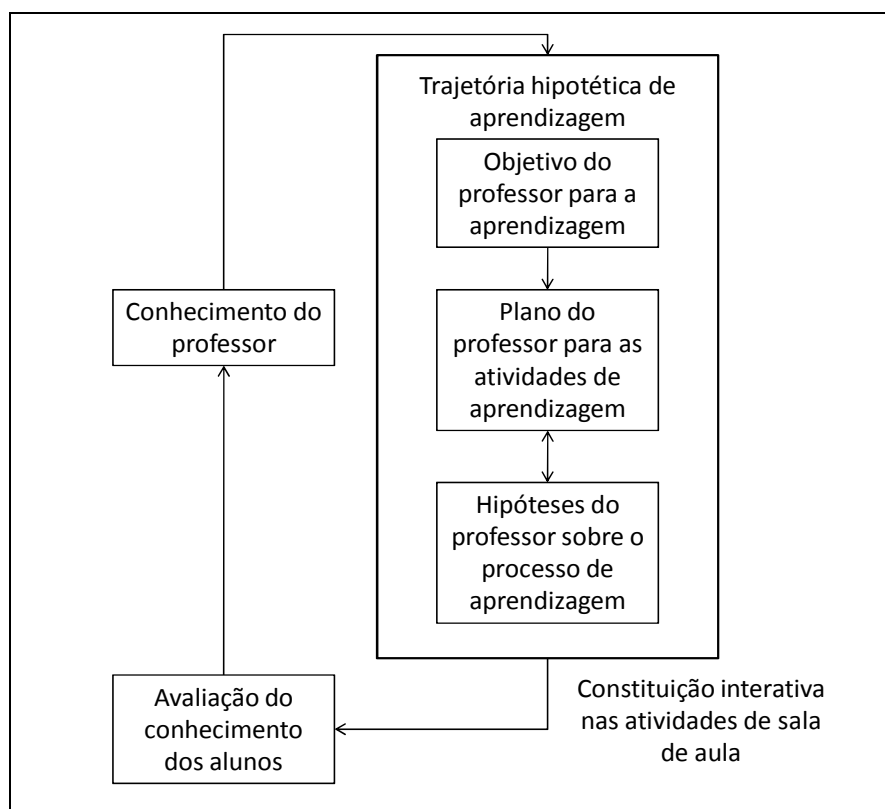
Esses autores deixaram clara a necessidade de os alunos da Educação Básica vivenciarem os processos de experimentação científica, permitindo-lhes desenvolver as bases do raciocínio probabilístico: a apreensão do acaso, a ideia de experiência aleatória e o conceito de probabilidade. A THA elaborada propôs atividades que permitiram distinguir um experimento determinístico de um experimento aleatório, bem como, por meio da frequência relativa acumulada de experimentos aleatórios, estimar a probabilidade de alguns eventos e compará-la com seu cálculo *a priori*.

O segundo grande desafio foi apresentar aos professores a primeira versão da THA e por meio de discussões fazê-los sentir como coautores na sua reelaboração e desenvolvimento. Neste caso, as pesquisas que fundamentaram nosso trabalho foram as de Simon (1995), Simon & Tzur (2004), Gómez & Lupiáñez (2007) e Pires (2009).

As pesquisas nos apontam que o ensino de probabilidade, em razão de sua complexidade, não deve ser assentado em um entendimento mais clássico e em uma visão determinista do mundo, compelindo os professores a investir no seu desenvolvimento pessoal e profissional.

O desenvolvimento profissional do professor acontece num contínuo movimento de dentro para fora, como afirma Ponte (1998), e considera a teoria e a prática de forma interligada, em que uma não se sobrepõe à outra e dependerá principalmente do próprio professor, do quanto sua insatisfação diante de seus conhecimentos e/ou prática de ensino atuais o inquieta e também de sua vontade e empenho em desenvolvê-los e aprimorá-los (LOPES, 2003, p. 31).

O “Ciclo de Ensino de Matemática” proposto por Simon (1995) vai ao encontro da perspectiva descrita anteriormente e torna-se vital no repensar do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, como destacado no esquema a seguir:



**Figura 1.** Ciclo de ensino de matemática abreviado (SIMON, 1995, p. 136).

O conhecimento do professor presente na figura 1 engloba vários domínios:

- Conhecimento matemático;
- Conhecimento sobre teorias de ensino e aprendizagem (em geral dentro da Matemática);
- Conhecimento da representação das atividades matemáticas;
- Conhecimento da aprendizagem dos alunos de um dado conteúdo.

Além disso, considerando-se que a aquisição do teor científico a esta área da educação estruturou-se recentemente, muitas situações de ensino e aprendizagem podem ser verificadas nas salas de aula, na qual os conceitos são

explicitados sem uma prévia reflexão por parte dos alunos. Os próprios livros didáticos, ao apresentarem os conteúdos de probabilidade, iniciam suas atividades a partir de noções básicas, que destacam poucas situações que ofereçam a construção gradual da aprendizagem a partir das vivências em sala de aula.

Os professores, considerados no estudo, tinham familiaridade com o desenvolvimento de jogos e experimentos nas aulas de Matemática somente quando realizados de maneira fictícia, simulando uma situação real. Segundo eles, nunca haviam propostos jogos e experimentos de maneira concreta, ou seja, os alunos participando de disputas com dados e moedas reais. Os professores mencionaram que, ao desenvolverem o conteúdo sobre probabilidade, utilizavam dados e moedas apenas como exemplo de geradores de acaso.

Nos questionários preenchidos pelos professores, citaram que a maior parte das aulas, ao abordarem este tema, era conduzida a partir das propostas dos livros didáticos, o que não salienta a diferenciação entre experimento determinístico e experimento aleatório, não se realizando uma confrontação do enfoque combinatório com o frequentista.

Surgiram alguns comentários que deixaram claro que o ensino de probabilidade é considerado de extrema complexidade, contribuindo e muito para que eles prescindissem desse conteúdo em seu planejamento de ensino, ou que o colocassem como o último tópico no seu planejamento anual, que só seria desenvolvido caso houvesse tempo.

Ao serem questionados a respeito de suas sequências de ensino sobre probabilidade, um dos professores citou que iniciava o assunto pela definição clássica ( $n.^{\circ}$  de casos favoráveis /  $n.^{\circ}$  de casos possíveis); relembra alguns tópicos de análise combinatória e utilizava os resultados possíveis das faces de um dado após seu lançamento, sem realizar o experimento concretamente, apenas em nível mental, para enumerar um espaço amostral.

Ao iniciarem a THA a partir das atividades com jogos, os professores se depararam com uma nova abordagem sobre o processo de aprendizagem. A participação dos alunos na construção dos conhecimentos matemáticos impôs um

novo ritmo às aulas. Percebemos que em algumas situações o professor acabou intervindo diretamente, atropelando o processo de construção do conhecimento por parte do aluno. Após a intervenção do professor, houve uma homogeneização, por parte dos alunos, na execução das atividades, que impossibilitou uma percepção efetiva sobre o que realmente foi apropriado por eles sobre o tópico em estudo naquele momento.

O motivo principal alegado pelos professores para não proporem alterações na primeira versão apresentada a eles foi que se sentiam inseguros ao elaborar atividades com a finalidade de construir as primeiras noções de probabilidade com abordagem frequentista, pelo fato de desconhcerem as pesquisas que se utilizam dessa visão e também por ignorarem a “Lei dos Grandes Números”, que é o suporte teórico para esta abordagem.

Outra constatação foi que os professores não trabalhavam com espaços amostrais não equiprováveis, privando assim os alunos de um contraponto importante na compreensão de espaços amostrais que estão presentes no cotidiano. Portanto, as contribuições dos professores, após o desenvolvimento da THA em sala de aula, se limitaram à adequação das atividades ao tempo de aula e à quantidade de vezes que deveríamos lançar os dados e as moedas nos jogos propostos.

Nosso intuito foi de que os professores utilizassem a THA sobre probabilidade, adequando-a a um contexto com alunos em uma situação concreta de sala de aula. Logo, a sequência de atividades da THA poderia servir como um exemplo ou um marco de referência, e não apenas como uma mera sequência de ensino.

Um aspecto que não foi explorado nesta pesquisa refere-se às condições de trabalho oferecidas aos professores, que servem como obstáculo ao seu desenvolvimento profissional, como descrito no trecho a seguir:

Um professor, que deve ensinar durante cinco ou seis horas por dia, tem pouco tempo para refletir, para preparar material didático, para experimentar abordagens alternativas ou para trabalhar com os colegas no projeto e na renovação de um programa coerente. Não se pode pretender que seja um “profissional reflexivo” um professor ao qual falta um espaço para trabalhar, uma infraestrutura adequada, dinheiro para comprar materiais e tempo à

disposição para trabalhar com os colegas e os estudantes. É importante que os administradores e os pesquisadores prestem mais atenção às motivações que conduzem os professores a fecharem em si mesmos, a não se aventurar em novas experiências e, portanto, a renunciar em dar outras explicações, exercícios etc. Até que ponto os professores hoje são sensíveis às dificuldades técnicas que são verificadas ao se trabalhar em classes heterogêneas, pela falta de uma preparação matemática suficiente, pela ênfase, hoje colocada, sobre os objetivos estimáveis obtidos pelos alunos, pelo medo de serem considerados responsáveis pelo fracasso dos estudantes e assim por diante? (HOWSON, 1995, apud D'AMORE, 2007, p. 239).

Para futuras pesquisas, sugerimos que se elaborem THA que abordem outros contextos matemáticos, conforme apontam Lopes & Coutinho (2009):

[...] As atividades em torno desse conceito de probabilidade têm o potencial de evidenciar diversas conexões matemáticas, permitindo que os alunos utilizem, entre outras, noções relativas a frações, porcentagens, proporções e números decimais (p. 73).

Apesar de o foco da investigação não ser os alunos, perante as atividades propostas, apresentamos alguns pontos que mereceram destaque:

- Na primeira aula, estranharam o fato de o professor não explicar nada sobre o assunto a ser desenvolvido, apenas esclareceu a dinâmica a ser realizada nas oito aulas seguintes;
- Durante as aulas, os alunos demonstraram grande curiosidade para saber como as outras duplas estavam enfrentando os desafios propostos nas atividades, promovendo assim uma grande integração na sala de aula;
- Dificuldade para elaboração de gráficos que representassem a frequência relativa acumulada em função do número de jogadas;
- Alguns alunos questionaram a validade deste tipo de abordagem que privilegiou experimentações concretas por meio de jogos para introdução das noções elementares de noções de probabilidade, pois, segundo eles, os vestibulares tradicionais requisitam outro tipo de conhecimento.



Como última sugestão para futuras pesquisas, propomos que sejam feitas análises do envolvimento e dificuldades apresentadas pelo aluno durante o desenvolvimento de THA e como a avaliação pode influenciar no processo de realimentação do Ciclo de Ensino de Matemática descrito por Simon (1995).

## Referências Bibliográficas

---

ARA, Amilton Braio. *O ensino de estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade*. 2006. 113 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BENNETT, Deborah J. *Aleatoriedade*. Tradução de Wáldea Barcelos. São Paulo: Martins Fontes, 2003. 239 p.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução às teorias e aos métodos*. Tradução de Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Batista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2000.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2002a.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2002b.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Parte II: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

CIRINO, Marcelo Maia. *A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no ensino médio*. 2007. 201 p. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências de Bauru, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. *Introdução ao conceito de probabilidade: uma visão freqüentista: estudo epistemológico e didático*. São Paulo: Educ, 1996. 101 p.

\_\_\_\_\_. *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. 2001. 338 p. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble I Grenoble.

\_\_\_\_\_. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. In: ANAIS DA REUNIÃO ANUAL DA ANPED, GT19, 2002, n. 25, Caxambu/MG. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/25/tp251.htm#gt19>>. Acesso em: 29 jun. 2009.

\_\_\_\_\_. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Disponível em <[http://www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2007\\_pdf/revista\\_2007\\_03\\_completo.PDF](http://www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat/2007_pdf/revista_2007_03_completo.PDF)>. Acesso em: 3 jul. 2009.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de didática da matemática*. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo : Editora Livraria da Física, 2007. 449 p.

FERNANDES, José António da Silva. *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º Ano de escolaridade*. 1999. 478 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Minho, Braga.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Maria del Carmen; CAÑIZARES, Maria Jesus. *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis, 1996. 187 p. (Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje.)

GÓMEZ, Pedro; LUPIÁÑEZ, José Luis. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje em la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), p. 79-98, 2007.

GONÇALVES, Mauro César. *Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica*. 2004. 133 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

IMENES, Luís Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. *Matemática para todos: 7.ª série – 8.º ano*. São Paulo: Scipione, 2002. 288 p.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental: uma análise curricular*. 1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

\_\_\_\_\_. *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. 2003. 281 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

\_\_\_\_\_. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cad. CEDES*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan.-abr. 2008. Disponível em: <<http://www.scielo.br/scielo.php?>>. Acesso em: 24 dez. 2008.

\_\_\_\_\_. COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Leitura e escrita em educação estatística. *Educação matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidade*. Campinas: Mercado de Letras, 2009. 280 p.

MIGUEL, Maria Inez Rodriguez; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva; ALMOULOUD, Saddo Ag. *Utilizando resultados de pesquisas sobre análise de dados*. São Paulo: Proem, 2006. 64 p.

NOVAES, Diva Valério; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. *Estatística para educação profissional*. São Paulo: Atlas, 2009. 186 p.

PIRES, Célia Maria Carolino. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 70-89, 2009.

PONTE, João Pedro Mendes da. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: ACTAS DO PROFMAT 98. Lisboa: APM, 1998. p. 27- 44.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 2.º Grau*. 2. ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

\_\_\_\_\_. *Proposta Curricular para o Ensino Fundamental: Ciclo II e Ensino Médio*. São Paulo: SEE/CENP, 2008.

SILVA, Ismael de Araújo. *Probabilidades: a visão laplaciana e a visão freqüentista na introdução do conceito*. 2002, 174 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SIMON, Martin A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), p. 114-145, 1995.

\_\_\_\_\_. TZUR, Ron. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 91-104, 2004.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. *Matemática – 2.ª série – Ensino Médio*. 3. ed. reform. São Paulo: Saraiva, 2003. v. 2, 479 p.

## *Anexo*

---

---

### Questionário sobre o perfil dos professores

1) Nome: \_\_\_\_\_

2) Formação

( ) Licenciatura Plena em Matemática    ( ) Complementação

3) Nome da escola em que leciona e sua localização

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4) Tempo de magistério: \_\_\_\_\_

5) Professor

( ) Efetivo                                    ( ) O.F.A. (temporário)

6) Segmento que leciona

( ) E.F. I                    ( ) E.F. II                    ( ) E.M.

7) Pós-graduação cursada e/ou em andamento

( ) Não

( ) Sim. Qual? \_\_\_\_\_

- 8) Já participou de cursos que a SEE-SP proporcionou para a formação continuada de professores, como Teia do Saber e Ensino Médio em Rede (EMR) ou oficinas, cursos e/ou palestras em outras instituições?
- 9) Comente sobre o que a Educação Matemática representa para você.
- 10) Já participou de algum trabalho colaborativo em sua escola? Qual?
- 11) Em suas aulas aborda alguma metodologia de trabalho?
- 12) Este ano o ensino da escola pública está passando por mudanças no qual o professor deve cumprir o conteúdo apresentado pela SEE-SP do respectivo bimestre e série utilizando uma apostila cedida ao professor que nesta surgem sugestões de abordagens do tema. Antes desse sistema e/ou dentro dele, utiliza recursos didáticos além do livro?
- 13) Em nossa pesquisa estamos desenvolvendo o conteúdo de probabilidades. Como você costuma abordar ou abordaria esse tema em sala de aula?
- 14) Os alunos compreendem o conceito de probabilidades?
- 15) Costuma trabalhar com resolução de problemas para desenvolver e/ou aplicar o conceito?