

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Cristiane Regina de Moura Ferreira

OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO E OS PADRÕES:
Observação, Realização e Compreensão.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Cristiane Regina de Moura Ferreira

**OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO E OS PADRÕES:
Observação, Realização e Compreensão.**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do Prof^a. Dr^a Silvia Dias Alcântara Machado.*

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Apesar de, aparentemente, todos sabermos o que estamos a falar quando mencionamos o termo padrões, temos constatado que é um termo com uma multiplicidade de sentidos, mesmo quando restringimos apenas ao campo da matemática. Este é, para nós, um sinal da riqueza do conceito, que não deve ser esvaziado através de definições restritivas, mas deve antes ser explorado na sua multiplicidade. (Vale et al, 2005)

Dedico este trabalho

aos meus pais Dirceu e Therezinha como forma de agradecimento, pelo exemplo de luta constante, apoio e dedicação o que tornou possível a concretização deste sonho;

ao meu marido Edenilson, que sempre esteve a meu lado, incentivando-me nesta caminhada que muito me fez crescer;

ao meu filho Murilo que, mesmo sem entender minhas longas ausências, sempre foi muito carinhoso.

A AUTORA

Agradecimentos

A Deus, por me conceder saúde, força, perseverança, paciência e sabedoria durante essa trajetória, em busca da realização deste sonho que tanto desejei.

À Profa Dra Silvia Dias Alcântara Machado, mais do que orientadora, apontou caminhos, guiou passos, transformando este sonho em realidade. Minha profunda gratidão pela sua amizade, dedicação, paciência, competência durante nossos encontros, ensinando-me a amar a educação e a amar a matemática.

Aos professores Sergio Cobianchi e Gerson Pastre de Oliveira, membros da banca de qualificação, pela leitura detalhada, pelas valiosas sugestões que contribuíram para a conclusão desta pesquisa.

Aos professores da PUC, por terem contribuído na minha formação.

Aos colegas de mestrado, que sempre torceram pelo sucesso desse trabalho e muitas vezes deram contribuições valiosas.

Aos alunos, sujeitos desta pesquisa, que me possibilitaram momentos preciosos de investigação.

A Secretaria do Estado da Educação de São Paulo, pelo apoio financeiro, a qual possibilitou mais esse passo em minha formação.

A todos os membros da minha família, que sempre incentivaram e me apoiaram para a conclusão desta etapa.

Resumo

O presente estudo relata uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi investigar como o aluno que terminou o Primeiro ano do Ensino Médio, em 2008 observa, realiza e compreende as atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões. A relevância dessa pesquisa se justifica pela importância do tema “Observação de Regularidades e Generalização de Padrões”, apontado por pesquisadores como: Stenn (1990), Orton e Orton (1999), Vale e Pimentel (2005) e Vale et al (2005), que afirmam que esse recurso auxilia o aluno a aprender uma matemática significativa, além de manifestar seu pensamento algébrico. Para a coleta de dados elaborei e apliquei um instrumento diagnóstico, inspirado nas ideias da Engenharia Didática, conforme Machado (2003). As análises dos dados indicam que os alunos realizam observações pertinentes às regularidades presentes nas sequências e realizam algumas generalizações de padrões, utilizando diferentes estratégias de resolução e diferentes tipos de registros de representação semiótica (Duval, 2003). Com relação à compreensão posso afirmar que os alunos se encontram em fase de desenvolvimento, pois necessitam ainda de outras experiências, para aperfeiçoarem a fluência algébrica e manifestar seu pensamento algébrico de maneira mais eficaz.

Palavras-Chave: Observar, realizar, compreender, regularidades, generalização de padrões, alunos do EM.

Abstract

The present study relates a qualitative research that aims to investigate as the student, which one was concluded the 2008 High School first year, observes, realizes and understands the activities observation of regularities and generalization of patterns. This research relevance justifies itself for the subject importance "Observation of Regularities and Generalization of Patterns", pointed for researchers as Stenn (1990), Orton and Orton (1999), Vale and Pimentel (2005) and Valle et al (2005), where they affirm that this resource assists the student to learn a relevant mathematics, besides revealing his algebraic comprehension. For the data collection I elaborated and I applied a diagnostic technique, inspired in the Didactic Engineering ideas, as seen in Machado (2003). The data analyses indicate that students realize pertinent observations to the regularities in the sequences and realize some generalizations of patterns, using different resolution strategies and types of semiotics representation (Duval, 2003). With regard to the understanding I can affirm that the pupils if find in development phase, therefore still need other experiences, to perfect the algebraic fluency and to reveal its thought algebraic in more efficient way.

Key-words: Observe, Realize, Understand, Regularities, Generalization of Patterns, Students High School.

Lista de Figuras

<i>Figura1: Conteúdos de Matemática por série/bimestre do EM (São Paulo: SEE, 2008c)</i>	<i>48</i>
<i>Figura 2: Gr. de Competências Avaliadas no Saresp e as funções valorizadas</i>	<i>51</i>
<i>Figura 3: Protocolo extraído da atividade 1, item 1e, dupla D_1.....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 4: Protocolo extraído da atividade 2, item 1a, dupla D_1</i>	<i>85</i>
<i>Figura 5: Protocolo extraído da atividade 2, item 1b, dupla D_1</i>	<i>88</i>
<i>Figura 6: Protocolo extraído da atividade 2, item 1e, dupla D_1</i>	<i>89</i>
<i>Figuras 7 e 8: Protocolos extraídos da atividade 3, item 1a, dupla D_1.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 9: Protocolo extraído da atividade 3, item 1a, dupla D_1</i>	<i>90</i>
<i>Figura10: Protocolo extraído da atividade 1, item 1d, dupla D_2</i>	<i>92</i>
<i>Figura11: Protocolo extraído da atividade 1, item 1d, dupla D_2</i>	<i>92</i>
<i>Figura 12: Protocolo extraído da atividade da aluna Daiane</i>	<i>94</i>
<i>Figura 13: Protocolo extraído da atividade da aluna Alice</i>	<i>96</i>
<i>Figura 14: Protocolo extraído da atividade 1, item 1d, dupla D_3</i>	<i>99</i>
<i>Figura 15: Protocolo extraído da atividade 2, item 1a, dupla D_3</i>	<i>99</i>
<i>Figura 16: Protocolo extraído da atividade 2, item 1b, dupla D_3</i>	<i>101</i>
<i>Figura 17: Protocolo extraído da atividade 2, item 1b, dupla D_3</i>	<i>102</i>
<i>Figura 18: Protocolo extraído da atividade da aluna Glória</i>	<i>104</i>
<i>Figura 19: Protocolo extraído da atividade 1, questão 2, dupla D_4.....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 20: Protocolo extraído da atividade da aluna Glória</i>	<i>115</i>
<i>Figura 21: Protocolo extraído da atividade do aluno Davi.....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 22: Protocolo extraído da atividade 2, item 1a, dupla D_4</i>	<i>117</i>
<i>Figura 23: Protocolo extraído da atividade 2, item 2b, dupla D_4</i>	<i>118</i>
<i>Figura 24: Protocolo extraído da atividade 2, item 2a, dupla D_4</i>	<i>118</i>
<i>Figura 25: Protocolo extraído da atividade da aluna Daiane</i>	<i>121</i>
<i>Figura 26: Protocolo extraído da atividade da aluna Daiane</i>	<i>121</i>
<i>Figura 27: Protocolo extraído da atividade da aluna Alice</i>	<i>122</i>
<i>Figura 28: Protocolo extraído da atividade da aluna Alice</i>	<i>122</i>

Lista de Tabelas

Tabela 1: Desempenho dos alunos na atividade 1, 1ª sessão.....	126
Tabela 2: Desempenho das duplas de alunos na atividade 2, 1ª questão.....	128
Tabela 3: Desempenho dos alunos na entrevista, sequências b e e da at. 2, 1ª sessão.....	129
Tabela 4: Desempenho dos alunos na entrevista, sequências a e b da at. 1, 2ª sessão.....	139

Sumário

INTRODUÇÃO.....	13
CAPÍTULO I - PROBLEMÁTICA E OBJETIVO	17
MINHA TRAJETÓRIA E MOTIVAÇÃO	17
QUESTÃO DE PESQUISA	18
CAPÍTULO II - LEITURAS E ESCOLHAS TEÓRICAS	23
A ÁLGEBRA NA MATEMÁTICA ESCOLAR	23
A MATEMÁTICA COMO A CIÊNCIA DOS PADRÕES	27
O ESTUDO DE PADRÕES	28
OS PADRÕES E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	38
OS PADRÕES E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	41
OS DOCUMENTOS OFICIAIS NACIONAIS E OS PADRÕES	42
OS DOCUMENTOS OFICIAIS DO ESTADO DE SÃO PAULO	44
CAPÍTULO III - ESCOLHAS METODOLÓGICAS.....	57
BASE TEÓRICA METODOLÓGICA.....	57
CAPÍTULO IV- A EXPERIMENTAÇÃO.....	61
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	61
INSTRUMENTO DE PESQUISA	64
1ª SESSÃO	65
ANÁLISE <i>A PRIORI</i>	65
DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO.....	81
DESCRIÇÃO E ANÁLISES DOS RESULTADOS	83
2ª SESSÃO	106
ANÁLISE <i>A PRIORI</i>	106
DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO DO EXPERIMENTO	112
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	113
ANÁLISE POR QUESTÃO.....	124
CAPÍTULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	135
REFERÊNCIAS.....	145
ANEXOS.....	149

Introdução

Consciente de que hoje há um consenso que a Matemática é a ciência dos padrões, Devlin (2002) esclarece ao final de seu livro que:

[...] esses padrões podem ser encontrados em qualquer parte onde esteja interessado em procurá-los: no universo físico, no mundo vivo ou mesmo nas nossas próprias mentes. (Devlin, 2002, p.216)

Preocupada com o processo de aprendizagem de meus alunos em álgebra e atenta as dificuldades expostas por eles durante dez anos de docência, entendi após alguns estudos direcionados pelo grupo GPEA, que compreender a Matemática como a ciência dos padrões (Steen, 1990; Devlin, 2002), poderia auxiliar-me no processo de ensino de diferentes conteúdos, onde quer que esteja interessada, além de permitir aos alunos desenvolver o pensamento algébrico de maneira significativa.

Ao mesmo tempo, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, em 2008, traz uma Nova Proposta Curricular denominada - São Paulo faz escola - para os níveis de Ensino Fundamental Ciclo II (EF) e Médio (EM).

Sabendo que essa proposta contempla conteúdos e ideias fundamentais para orientar o professor sobre o foco principal a ser considerado em cada bimestre, procurei dentre os subsídios específicos para o professor um material que privilegiasse a observação de regularidades e a generalização de padrões. Após uma análise preliminar do material descobri que no Caderno do Professor do 1º Bimestre de 2008 da 1ª série do EM, os conteúdos tratados faziam referência às regularidades numéricas apresentadas por seqüências e Progressões Aritméticas e Geométricas (PA e PG).

Assim, esses fatos me levaram a pesquisar: *Como o aluno que terminou o 1º ano do EM de 2008, observa, realiza e compreende atividades de observação de regularidades e a generalização de padrões?*

Para tanto esta pesquisa ficou com a seguinte organização:

No capítulo 1, procuro situar o interesse pelo tema dentro da minha trajetória profissional além de descrever a problemática e o objetivo desta pesquisa, ressaltando a importância dos estudos realizados pelo Grupo - GPEA - do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Há também a justificativa da relevância desse estudo presente na Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008a) e em um relatório divulgado em 2007.

No capítulo 2, apresento as leituras e escolhas teóricas que guiaram essa pesquisa que originaram contribuições valiosas sobre: a álgebra na matemática escolar (McCallum et al, 2007), a matemática como a ciência dos padrões (Stenn,1990; Devlin, 2002), o estudo de padrões (Orton e Orton, 1990), os padrões e a resolução de problemas (Onuchic e Allevato, 2004; Vale et al, 2005; Herbert e Brown,1997) e os registros de representação semiótica (Duval, 2003). Comento também sobre os Documentos Oficiais Nacionais: PCN do EM (1999), PCN⁺ (2002), Orientações Curriculares para o EM (2006), e a Nova Proposta da SEE/SP (2008) e suas Matrizes de Referência para a Avaliação da SEE/SP (2008).

No capítulo 3, apresento a metodologia de pesquisa qualitativa de Bogdan e Biklen (1994) e Ludke e André (1986), a Engenharia Didática (Machado, 2008), bem como os procedimentos utilizados para realizar as entrevistas semi-estruturadas.

No capítulo 4, descrevo a experimentação: procedimentos metodológicos, instrumento de pesquisa, a análise *a priori*, as possíveis estratégias de resolução, as considerações sobre as sessões, descrição da aplicação, descrição e análise das duplas, entrevistas realizadas seguida de uma análise por questão.

No capítulo 5, faço minhas considerações finais, baseadas nas conclusões que permearam essa investigação. Apresento uma síntese das principais constatações obtidas entrelaçando-as com as pesquisas realizadas, que constam

nesta pesquisa, bem como destaco a importância da transversalidade do tema para a educação matemática.

Capítulo I - Problemática e Objetivo

Minha trajetória e motivação

Sempre interessada na área da educação, estudei no antigo 2º grau o Magistério e, na graduação, a Matemática. A partir do meu trabalho com alunos do Ensino Fundamental, desde 1993, pude perceber uma grande dificuldade na assimilação e acomodação dos diferentes conceitos matemáticos, por parte dos mesmos, nas diferentes séries.

Preocupada em melhorar a compreensão e o desempenho dos alunos, bem como a possibilidade de me aperfeiçoar na área da educação, em 2003, iniciei um curso de especialização em Educação Matemática, em Taubaté.

A partir desse curso, dentre as diversas possibilidades de pesquisas, interessei-me pela Educação Algébrica, mais especificamente nas dificuldades encontradas pelos alunos em efetuar os cálculos algébricos, o que me direcionou a escolher esse assunto.

Nesse primeiro encontro com a Educação Matemática, abordei em minha monografia o assunto que, na época, considerava como a transição da linguagem aritmética para a linguagem algébrica e suas dificuldades, com a temática “Introdução à Álgebra a partir de Generalização de Sequências de Padrões Geométricos e Fatos Históricos”. Neste estudo, tive a oportunidade de verificar a importância de o aluno dar significado ao estudo, partindo de fatos históricos e da construção de uma engenharia didática que os auxiliassem na introdução da Álgebra.

Resolvi continuar, motivada por esses estudos preliminares, ingressando no mestrado acadêmico, para aprofundar meus conhecimentos sobre a Educação Matemática. No mestrado, entrei em contato com o GPEA, “Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica”, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que apresenta como problemática de projeto a questão: “Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores?”. Desta, surgem diversos ramos que se enquadram em duas diferentes linhas de pesquisa: 1ª) “História, Epistemologia e Didática da Matemática” e 2ª) “Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores”.

Dentre os projetos desenvolvidos pelo grupo, identifiquei-me com o denominado “*Sobre observação e generalização de padrões: uma atividade matemática transversal*”, cujo projeto veio ao encontro de meus interesses, já despertado há algum tempo, conforme descrito anteriormente.

Questão de pesquisa

Pensando em prosseguir com o estudo que iniciei na especialização dentro da Educação Algébrica, procurei na bibliografia básica do grupo de pesquisa GPEA e em outras fontes, trabalhos de pesquisadores sobre o tema: observação de regularidades e generalização de padrões.

Tive a oportunidade de analisar relatórios de pesquisas recentes, que me trouxeram algumas conclusões importantes para fundamentar o meu estudo, e me auxiliaram a enfocar minha questão de pesquisa.

Primeiramente, realizei uma análise do relatório divulgado em 2007, denominado “*Álgebra: Passagem para um futuro tecnológico*¹” (2007). Nele encontrei diferentes trabalhos desenvolvidos por diversos pesquisadores matemáticos e educadores matemáticos para os cinco diferentes níveis de instrução algébrica: Álgebra precoce, Álgebra introdutória, Álgebra intermediária, Álgebra para os futuros professores e Álgebra do início da Universidade.

Nesse documento os pesquisadores procuraram identificar os princípios comuns que poderiam servir de modelos para a melhoria do ensino da álgebra, e

¹ Álgebra: Gateway to a Technological Future.

apresentaram sugestões para futuras pesquisas, considerando que a educação algébrica deve ter seu início na pré-escola, até alcançar níveis de ensino mais elevados.

Os pesquisadores sugeriram um plano de ação para identificar e executar uma melhor abordagem, com o objetivo de preparar os alunos ao longo de seus estudos. Dentro deste plano de ação, estão previstos:

- Identificar as ideias básicas da álgebra
- Desenvolver a capacidade de focar a instrução algébrica sobre estas ideias
- Advertir as autoridades educacionais sobre as barreiras e caminhos para uma implementação com sucesso de práticas instrucionais confiáveis (MCCALLUN et al, 2007 p.19, tradução própria)².

É possível observar que esses pesquisadores não pretendem apenas identificar as ideias da álgebra, como também desenvolver a capacidade dos professores para que estes consigam promover condições favoráveis, que permitam aos alunos diferentes modos de pensar em matemática.

Outro item enfatizado nesse plano de ação é a orientação política do conhecimento, identificando as estruturas organizacionais que efetivamente, influenciam a educação, como: autoridades educacionais, pesquisadores, professores, matemáticos, administradores, pais, livros. A finalidade alegada para identificar essas estruturas é criar um senso de responsabilidade compartilhada, cuja colaboração de todos os envolvidos nesse processo é indispensável para a melhoria da qualidade do ensino.

Como exemplo para as ideias da Álgebra na Álgebra Intermediária, que corresponde ao Ensino Médio do Brasil, McCallum et al (2007) destacam que abstrair regularidades de cálculos repetidos inclui o desenvolvimento, tanto de expressões ou equações para representar quantidades, quanto para representar relações quantitativas a partir de uma reflexão sobre o raciocínio numérico (grifo meu). Para esses autores as situações de aprendizagem, no EM, têm que ser

² • Identify the basic ideas of algebra
 • Build capacity to focus algebra instruction on these ideas
 • Advise policy makers on barriers and avenues to successful implementation of sound instructional practices.

uma continuação do trabalho realizado anteriormente e, ressaltam que esse tipo de trabalho deve ser iniciado desde a pré-escola.

É importante destacar que o subprojeto de que faço parte iniciou-se em 2005, e em seu título, já apresentava a importância da transversalidade do assunto durante todo o ensino básico.

A demonstração da importância dessa visão pode ser analisada a partir da produção dos colegas de projeto, que desde o início de sua elaboração em 2004 apontam para essa perspectiva na educação matemática. Como exemplos dessa produção, posso citar os trabalhos de Perez (2006), de Almeida (2006), de Carvalho (2008), de Archilia (2008) e de Silva (2009).

A pesquisa de Perez (2006) aponta que alunos do EM resolvem questões que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões, utilizando estratégias diversificadas, expressadas através de diferentes linguagens: oral, aritmética, geométrica e algébrica.

A pesquisa de Almeida (2006) aponta que professores trabalham com generalização de padrões, de maneira esporádica e não incentivam seus alunos a uma formalização algébrica para as generalizações.

As pesquisas de Carvalho (2008) e Archilia (2008) realizadas, desde 2006, apontam as dificuldades dos alunos do EM na generalização de padrões a partir da observação quando se trata de PA (Progressão Aritmética).

A pesquisa de Silva (2009) aponta que os professores trabalham esporadicamente com atividades envolvendo observação de regularidades e generalização de padrões não por desaprovação em relação a essas atividades, mas por desconhecimento do assunto.

Sincronicamente a essa preocupação demonstrada por pesquisadores em Educação Algébrica a SEE/SP³, em 2008, enviou aos professores de matemática do Ensino Fundamental Ciclo II e do 1º ano do EM da rede estadual de Ensino um material que reflete essa questão.

³ SEE/SP - sigla utilizada para designar a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

O “Caderno do Professor” de Matemática referente ao 1º bimestre do 1º ano do EM trata de conjuntos numéricos e sequências numéricas, em particular, da progressão aritmética e da geométrica. Em sua introdução consta:

O estudo das sequências é importante, pois, além da larga aplicação em problemas (em contextos matemáticos e de outras áreas do conhecimento), pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que ao identificar regularidades o aluno pode generalizá-las e expressá-las por meio de sentenças algébricas. (S. PAULO, 2008c, p.8)

Assim, a convergência do interesse do projeto em que me inseri em 2008, com o novo cenário proposto pela SEE/SP, que indicava logo no 1º bimestre o tratamento do tema desse projeto, levou o grupo a formular as seguintes questões:

- Como o professor do 1º ano do EM considera e aborda as atividades que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões em suas aulas?
- Como o aluno que terminou o 1º ano do EM, em 2008, observa, realiza e compreende atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões?

Dada a atualidade das questões formuladas e a coincidência com a pesquisa que se iniciou no ano de 2008, julguei oportuno coletar dados para responder uma delas: a última questão.

Com relação à primeira questão formulada pelo grupo, uma colega do mesmo subprojeto do qual participo, Marcelly Mingorancia de Carvalho dirigiu sua pesquisa no sentido de responder uma questão análoga a esta.

Capítulo II - Leituras e Escolhas Teóricas

Diversos pesquisadores de Educação Matemática como Ponte (2005), Stenn (1990), Vale e Pimentel (2005), Vale et al (2005), Orton e Orton (1999) entre outros, sugerem em suas pesquisas que devemos propiciar aos alunos a observação de regularidades e a exploração de padrões desde as idades mais tenras. Segundo esses autores, esse tipo de atividade permite ao aluno construir estratégias de resolução a partir da investigação matemática, o que contribui para o aperfeiçoamento de habilidades como: conjecturar, generalizar, testar e validar suas conjecturas, habilidades necessárias para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Interessada no desenvolvimento desse tipo de pensamento matemático e considerando a Matemática como a ciência dos padrões, procurei fazer uma leitura mais meticulosa sobre a Álgebra, a Educação Algébrica e a utilização da observação de regularidades e a generalização de padrões nesse ramo da Matemática.

A Álgebra na Matemática Escolar

Nas últimas décadas, uma boa parte das investigações dentro da educação matemática tem se preocupado com o ensino e a aprendizagem da álgebra, tendo como exemplos alguns títulos que tratam sobre esse assunto: *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI* de Lins e Gimenez (1998); *As Ideias da Álgebra*, organizado por Coxford e Shulte e traduzido por Domingues (1995); *Enseñanza Del Álgebra Elementar - Uma propuesta alternativa* de Ursini et al (2005).

Nos Estados Unidos, diversos pesquisadores matemáticos e educadores matemáticos, interessados em melhorar o ensino da álgebra, realizaram, em novembro de 2006, uma conferência e desenvolveram um relatório divulgado em 2007, denominado *Álgebra: Passagem para um futuro tecnológico*⁴ (2007). Nesse relatório, esses pesquisadores procuraram identificar os princípios comuns que poderiam servir de modelos para a melhoria do ensino da álgebra, e apresentaram sugestões para futuras pesquisas, considerando que a educação algébrica tem que ter seu início na pré-escola até alcançar níveis de ensino mais elevados.

Nele, McCallum et al (2007) argumentam que a frágil coerência no currículo de álgebra, por ser segmentada, resulta em parte, da ausência da essência da matéria, e para sanar isso propõem um foco nas ideias que classificaram como ideias subjacentes à álgebra:

Expressão algébrica,

Equação,

Relação entre a forma e a função de uma expressão algébrica,

Resolver equações como processo de raciocínio,

O hábito de encontrar representações algébricas,

Antecipar os resultados de um cálculo sem fazê-lo,

Abstrair regularidades de cálculos repetidos,

Fazer conexões entre representações,

Descontextualizar expressões algébricas.

Levando em conta a classificação elaborada pelos autores, inicio minha reflexão sobre a ideia de abstrair regularidade de cálculos repetidos, por acreditar que esta abarca outras ideias por eles relacionadas.

Como exemplo para as ideias da Álgebra, McCallum et al (2007) destacam que abstrair regularidades de cálculos repetidos:

⁴ *Álgebra: Gateway to a Technological Future*

[...] inclui o desenvolvimento de expressões ou equações que representem quantidades ou relações quantitativas pela reflexão sobre o raciocínio numérico no qual alguém se dedica a entender a situação e a responder questões sobre ela. Este tipo de trabalho pode começar antes da álgebra. (MCCALLUM ET AL, 2007, p.22, tradução própria)⁵

Uma afirmação importante observada nesse trecho é que, para os autores, as situações de aprendizagem devem favorecer a reflexão sobre o cálculo com números, o cálculo mental e a estimativa (cálculo aproximado), proporcionando a compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações. Essa reflexão promove o desenvolvimento de expressões ou equações que podem representar as quantidades ou relações quantitativas inseridas na resolução, afirmando que esse tipo de trabalho deve ser iniciado antes da álgebra.

Nesse mesmo relatório, Blanton et al (2007) também falam sobre esse trabalho que deve ser iniciado antes da álgebra. Essa fase escolar, denominada por eles como “Álgebra Precoce”⁶ apresenta como aspecto fundamental o desenvolvimento profundo do entendimento conceitual das operações e suas conexões. Nesse nível de ensino, os alunos devem ser expostos a explorar situações matemáticas que requeiram uma ativa reflexão, envolvendo construção de argumentos, justificativas e explanação das ideias.

Assim, a “Álgebra Precoce” deve desenvolver nos alunos, segundo Blanton et al (2007), elementos da proficiência em matemática, identificados pelo National Research Council (KILPATRICK et al, 2001), que corresponde a: *“compreensão conceitual, fluência procedimental, competência estratégica, raciocínio adaptativo e disposição produtiva”*.

De acordo com Kilpatrick et al (2001), esses elementos são interligados e interdependentes e representam diferentes aspectos de um conjunto complexo. Os autores explicitando o que corresponde cada item descrevem:

Compreensão conceitual – compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações;

⁵ ... includes developing expressions or equations that represent quantities or quantitative relationships by reflecting on the numerical reasoning in which one engages to understand a situation and to answer questions about it. This sort of work should start before algebra.

⁶ Early Algebra.

Fluência processual – habilidade na realização de procedimentos de forma flexível, com precisão, de forma eficiente e de maneira adequada;

Competência estratégica – habilidade em formular, representar e resolver problemas matemáticos;

Raciocínio adaptativo – capacidade de raciocínio lógico, de reflexão, de explicação e de justificação;

Disposição produtiva – inclinação habitual para ver a matemática como sensata, útil e proveitosa, junto com uma crença na diligência e na sua própria eficácia. (KILPATRICK ET AL, 2001, p. 116 – tradução própria)⁷

A partir dessa descrição é possível perceber que para o desenvolvimento da proficiência matemática torna-se necessário interligar e relacionar vários elementos citados anteriormente. O importante é “como” os alunos apresentam e relacionam os conhecimentos envolvidos na resolução de um problema, pois é a partir dessa reflexão que se pode constatar a compreensão (compreensão conceitual) que tiveram da situação. Essa interligação, segundo Kilpatrick et al (2001), é um fator chave para saber se eles sabem usar seus conhecimentos na resolução (fluência procedimental) e se são capazes de adaptá-los. Essas ideias contribuem para o desenvolvimento de um raciocínio adaptativo das competências estratégicas e da disposição produtiva de ver sentido em matemática, percebendo que ela é compreensível, útil e proveitosa.

Ao tratar sobre a Álgebra, Ponte (2005) reconhece que ela é vista atualmente de uma maneira redutora, pois no ensino básico, ela é tratada como regras de transformação de expressões e processos de resolução de equações. Essa visão, segundo o autor, desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer seja em relação à resolução de problemas, relações, estruturas algébricas, estudos das funções ou das variáveis em geral.

Segundo Ponte (2005):

Podemos então dizer que o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No

⁷ Conceptual understanding – comprehension of mathematical concepts, operations, and relations;

Procedural fluency – skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately;

Strategic competence – ability to formulate, represent, and solve mathematical problems;

Adaptive reasoning – capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification;

Productive disposition – habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one's own efficacy.

entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o “sentido do símbolo” (symbol sense), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Ou seja, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades. (PONTE, 2005, p.7)

De acordo com esse autor, o estudo de padrões e regularidades é uma das vias privilegiadas para promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico por proporcionar a capacidade de interpretar e usar, de forma criativa, os símbolos matemáticos na descrição da situação e na resolução de problemas.

À medida que o pensamento algébrico se desenvolve, a partir da observação de regularidades e da generalização de padrões, é possível observar o desenvolvimento da capacidade de encontrar relações existentes entre os objetos matemáticos e de representar essas relações usando, criativamente, os símbolos matemáticos para descrever e resolver problemas.

A Matemática como a Ciência dos Padrões

Segundo Stenn (1990), a matemática continua, hoje em dia, crescendo a um ritmo rápido devido à busca de padrões. A procura de padrões, onde quer que eles surjam, transformou a matemática em uma ferramenta essencial em diversas áreas da sociedade: bancos, indústrias, medicina, ciência social, etc.

Muitas pessoas, segundo Devlin (2002):

[...] não fazem a menor idéia como a investigação matemática se tem mantido, a nível mundial, como uma atividade em franco desenvolvimento, ou aceitem a idéia de que a matemática interfere, muitas vezes de forma significativa, na maior parte das atividades do nosso cotidiano e da sociedade moderna. (DEVLIN, 2002, p.7)

Devlin (2002) ressalta ainda, que o significado de padrões é amplo e esclarece:

Foi só nos últimos vinte anos, mais ou menos, que surgiu a definição de matemática que é hoje consensual entre a maioria

dos matemáticos: a matemática é a ciência dos padrões. O que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. (DEVLIN, 2002, p.9)

Sendo assim, Stenn (1990) afirma que, graças à computação gráfica, grande parte da pesquisa matemática realizada com padrões tem sido guiada por aquilo que realmente se pode “ver com os olhos”, enquanto que, na história da Matemática, grandes matemáticos como Gauss e Poincaré, conseguiam ver com “os olhos da mente”.

A mudança na prática da matemática e a ampliação de suas aplicações, de acordo com Stenn (1990), forçam-nos a um reexame da educação matemática com o objetivo de preparar adequadamente os alunos para as necessidades do século XXI. As deficiências apresentadas no atual desempenho da educação matemática, também reforçam a necessidade para essas mudanças. A questão chave para a educação matemática é descobrir “que fundamentos ensinar e como ensiná-los”.

Segundo Stenn (1990):

Para preparar um currículo matemático eficaz para o futuro, devemos olhar para os padrões na matemática de hoje para projetar, o melhor que pudermos o que é e o que não é verdadeiramente fundamental.⁸(STENN, 1990, p.3, tradução própria)

O Estudo de Padrões

Na tentativa de realizar um reexame da educação matemática, como proposto por Stenn (1990); elaborei uma análise de diversos artigos da educação matemática que envolvesse a observação e a generalização de padrões.

Nessa análise, encontrei diferentes pesquisadores como Vale e Pimentel (2005); Vale et al (2005); Resende (2007); Zaskis e Liljedahl (2002), Orton e Orton

⁸ To prepare effective mathematics curricula for the future, we must look to patterns in the mathematics of today to project, as best we can, just what is and what is not truly fundamental

(1999) que, em suas pesquisas, sugerem que devemos incentivar os alunos a explorar padrões a partir da sua observação e generalização, oportunizando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Segundo Vale e Pimentel (2005, p.14), “o uso de padrões é uma componente poderosa da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar”.

Nessa pesquisa, as autoras descrevem que:

A procura e identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjecturas e prova, desafiando os alunos a recorrer as suas destrezas de pensamento de ordem superior. (VALE E PIMENTEL, 2005, p.15)

Segundo as autoras, o trabalho com padrões pode auxiliar os alunos a dar significado à introdução de conceitos algébricos elementares, porém elas advertem que é preciso haver um trabalho prévio de reconhecimento de padrões de diversas naturezas. O objetivo desse trabalho, segundo elas, é promover a resolução de problemas que envolvam a descoberta e a generalização, bem como a observação de regularidades, propriedades e relações numéricas com o propósito de facilitar o progresso dos alunos no estudo da álgebra.

Outro autor que também faz referência a variedades de padrões na matemática é Stenn (1990), ao apontar que:

O que os seres humanos fazem com a linguagem da matemática é descrever padrões. Matemática é uma ciência exploratória que visa compreender todo o tipo de padrão - padrões que ocorrem na natureza, padrões inventados pela mente humana, e mesmo padrões criados por outros padrões. Para produzir matematicamente, as crianças devem ser expostas a uma rica variedade de padrões adequada às suas próprias vidas através da qual eles possam ver: variedade, regularidade e interconexões.⁹ (STENN, 1990, p.8, tradução própria)

Dentre os exemplos relacionados a esses diferentes tipos de padrões que as crianças devem ser expostas, descrito por Stenn (1990), destaco:

⁹ What humans do with the language of mathematics is to describe patterns. Mathematics is an exploratory science that seeks to understand every kind of pattern—patterns that occur in nature, patterns invented by the human mind, and even patterns created by other patterns. To grow mathematically, children must be exposed to a rich variety of patterns appropriate to their own lives through which they can see variety, regularity, and interconnections.

- Padrões que ocorrem na natureza: dia-noite, estações do ano, épocas de chuva ou seca nas mais diversas regiões, padrões das marés, asas das borboletas, células de uma colméia, entre outros;
- Padrões inventados pela mente humana: azulejos, formas geométricas, sistemas numéricos, jogos, desenhos etc;
- Padrões criados por outros padrões: unidades de medidas (anos-luz-metros, polegada-centímetro) etc.

Um trabalho prévio, utilizando esses diferentes tipos de padrões (que ocorrem na natureza ou inventados pelos homens), proporciona o desenvolvimento dos alunos a partir da observação das regularidades, propriedades e relações, promovendo a descoberta e a generalização, bem como a interconexão existente entre eles.

De acordo com Frobisher e Threlfall (1999) as competências envolvidas no trabalho com padrões incluem diferentes habilidades como:

- descrever um padrão que seja visto ou utilizado; • operar sobre um conjunto de números para encontrar um padrão; • terminar um padrão; • estender um padrão ao caso seguinte, ou um caso próximo; • calcular o valor de casos específicos em um padrão; • estender um padrão para responder a um problema; • criar um padrão com uma estrutura dada; • usar a regra de um padrão para caracterizar um caso específico; • localizar o número em uma situação e caracterizá-lo como um padrão numérico; • Passar da escrita para uma expressão simbólica da percepção do padrão, e vice-versa; • explicar a estrutura que causou um padrão; • usar o padrão para expressar relações. (FROBISHER e THRELFALL, 1999, p.93, tradução própria)¹⁰

Essas habilidades, segundo os autores, devem ser exploradas em avaliações, no trabalho que o aluno fez ou fará com padrões, como parte da investigação ou da resolução de um problema.

Ao fazerem referências à utilização de padrões numéricos, Orton e Orton (1999), consideram essa utilização um caminho possível para se introduzir a

¹⁰ - describe a pattern that has been seen or used; - operate on a set of numbers to find a pattern; - complete a pattern; -extend a pattern to the next case, or a near case; - calculate the value of specified cases in a pattern; - extend a pattern to answer a problem; -create a pattern with a given structure; use the rule for a pattern to characterize a specific case; - locate the numbers in the situation and give them as a number pattern; - move from a written to a symbolic expression of the perception of the pattern, or vice versa; - explain the structure which has given rise to a pattern; - use pattern to express relationships.

álgebra. Eles esclarecem que essa trajetória não remove todas as dificuldades a respeito da introdução a álgebra, mas apresentam-na como uma melhor aproximação para alguns (ou para todos) os alunos do que outros métodos de ensino. De acordo com os autores, se aceitarmos as dificuldades e limitações que esse caminho possui, poderemos fazer melhorias consideráveis que auxiliarão os alunos durante o processo ensino-aprendizagem.

Ao tratar sobre a capacidade dos alunos de observar regularidades e a generalizar de padrões, Orton e Orton (1999) descrevem que:

Encontrar termos em padrões numéricos se torna tão mais difícil quanto mais distante o termo requerido está do último termo dado.

Mais alunos podem continuar um padrão do que explicar esta situação,

As regras de padrão numérico são descritas por uma grande proporção de alunos com relação às diferenças entre termos,

Geralmente, as explicações orais das regras... são dadas por mais alunos do que podem fornecer a explicação por escrito. (ORTON E ORTON, 1999, p.105, tradução própria)¹¹

Esses autores ressaltam, ainda, os obstáculos encontrados ao longo da rota para a generalização:

Quatro grandes obstáculos ao longo da rota de uma generalização bem sucedida estão também claros. Primeiro, há um consenso entre muitos matemáticos, que a incompetência aritmética algumas vezes impede o progresso. Segundo, a fixação por uma abordagem recursiva pode obstruir seriamente o progresso na direção de uma regra universal. Em terceiro lugar, um número considerável de estudantes são levados a métodos impróprios, tais como o produto da diferença e o atalho. Finalmente, não podemos nunca ignorar o fato de que alguns alunos adotam métodos idiossincráticos¹² de formas imprevisíveis. (ORTON E ORTON, 1999, p. 120, tradução própria).¹³

¹¹ Finding terms in number patterns gets progressively more difficult the further the terms are from those given in the question,

More pupils can continue a pattern than can explain it,

Number pattern rules are described by a large proportion of pupils in relation to differences between terms,

Generally, oral explanations of rules ... are given by more pupils than can write an explanation.

¹² Relativo à disposição do temperamento do indivíduo, que faz com que ele sinta de um modo peculiar a influência de diversos agentes; maneiras de ser, sentir, reagir, própria, especial, de cada pessoa.

¹³ Four major obstacles along the road to successful generalization are also clear. First, in common with much mathematics, arithmetical incompetence sometimes prevents progress.

Assim sendo, o professor precisa estar atento às táticas que seus alunos utilizam para a resolução das atividades. Se o objetivo de determinada atividade for o de encontrar o termo geral, o uso das diferenças ou o atalho, segundo os autores, não contribuirá para a obtenção de uma fórmula algébrica, pois conduziria a uma compreensão recursiva de padrões numéricos. Essa tática deve ser desencorajada e substituída pelo incentivo de olhar para todas as propriedades da sequência numérica considerada.

Com relação às dificuldades que o aluno pode encontrar em atividades de generalização de padrões, Zazkis e Liljedahl (2002, p.400) afirmam que “*existe um vão entre a capacidade de expressar a generalidade verbalmente e a capacidade de empregar a notação algébrica confortavelmente*¹⁴”. Esclarecem também que a capacidade de expressar verbalmente a generalidade nem sempre é acompanhada pela notação algébrica e independe dela.

Dessa forma, afirmam que, esse “vão” existente entre pensamento algébrico e escrita algébrica:

[...] deveria ser aceito e utilizado como um local para os estudantes praticarem seus pensamentos algébricos. Eles deveriam ter a oportunidade de engajar em situações que promovem esse pensamento sem as limitações formais do simbolismo¹⁵. (ZAZKIS e LILJEDHAL, 2002, p. 400).

Outros autores, como Vale et al (2005), também constataram em suas pesquisas que:

Quando apelamos aos padrões no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. (VALE ET AL, 2005, p.5)

Esses autores sugerem que o estudo de padrões apóia a aprendizagem dos alunos, propiciando-lhes a descoberta de relações, o encontro de conexões, bem como, de generalizações e previsões.

Second, the fixation with a recursive approach can seriously obstruct progress towards the universal rule. Third, a considerable number of students are tempted into inappropriate methods, such as difference product and short-cut. Finally, we can never ignore the fact that idiosyncratic methods are adopted by individual pupils in unpredictable ways.

¹⁴ There is a gap between students' ability to express generality verbally and their ability to employ algebraic notation comfortably.

¹⁵ [...] should be accepted and used as a venue for students to practice their algebraic thinking. They should have the opportunity to engage in situations that promote such thinking without the constraints of formal symbolism.

Em sua tese de doutorado, Resende (2007) faz alusão à exploração de padrões e de relações numéricas, e entre outros assuntos, afirma que esse tipo de atividade tem como campo natural a Teoria Elementar dos Números. Segundo a autora, esse tipo de atividade propicia a investigação matemática e oportuniza o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar suas conjecturas.

Os conteúdos essenciais abordados na Teoria Elementar dos Números, segundo Resende (2007), são constituídos por:

Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências nos números naturais, sequências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e princípio da indução finita; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade; Teorema Fundamental da Aritmética; Introdução à congruência de módulo m : definição, propriedades e algumas aplicações; Equações diofantinas lineares. (RESENDE, 2007, p.228)

Dentre os diferentes conteúdos que podem ser envolvidos na abstração de regularidades, resalto: números primos; decomposição em fatores primos; fatoração; reconhecimento de que os símbolos representam números e cálculos numéricos; igualdade; pensamento aditivo em que as estruturas aditivas e multiplicativas são utilizadas para generalizar; antecipação de resultados de cálculos (sem fazê-los), utilizando as invariantes multiplicativas (essência de ser múltiplo) e as invariantes aditivas (constante da diferença); entre outros. Diante disso, presumo que a ideia de abstrair regularidades contempla vários conteúdos relacionados acima por Resende (2007), inseridos na Teoria Elementar dos Números.

Nas pesquisas realizadas por Modanez (2003) e Andrezzo (2005), encontrei a utilização de sequências em seus experimentos de estudo.

O objetivo de Modanez (2003) era investigar se o trabalho com padrões geométricos poderia contribuir de maneira significativa para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Para isso, ela desenvolveu uma sequência didática, contendo oito atividades envolvendo a observação de regularidades e a generalização de padrões.

Destaco quatro das sequências utilizadas por Modanez (2003): as sequências das atividades 1 e 2, que proporcionaram aos alunos a observação de regularidades e a generalização em uma sequência cíclica e as sequências das atividades 4 e 5 que propiciaram o mesmo trabalho em sequências, apresentando características de uma progressão aritmética.

A autora concluiu que a sequência didática, por engajar os alunos em atividades de investigação de padrões, contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do pensamento algébrico destes, bem como, de sua autonomia em realizar atividades, observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar respostas.

O objetivo de Andrezzo (2005) foi investigar a compreensão dos objetos algébricos, utilizando sequências de padrões figurativo-numéricos para alunos do EM sem acuidade visual e, elaborar atividades que facilitem a participação destes em atividades de generalização.

Segundo a autora, estes alunos foram beneficiados pelos padrões, pelas suas representações figurativas e pelas relações permissíveis: relação entre os termos, relação entre a organização e a posição da figura e, a construção de expressões numéricas. Esses fatores contribuíram para que estes alunos, na trajetória, chegassem à regra de generalidade.

A construção de expressões numéricas, antes das expressões algébricas, foi considerada um fator relevante e facilitador desde a trajetória até a regra geral. Porém, a passagem da expressão numérica para a algébrica, em que a variável não era diretamente substituível, não ocorreu de forma espontânea para todos os alunos, sendo necessária a intervenção da professora pesquisadora em algumas situações.

Dentre as pesquisas do GPEA sobre o tema, farei alusão às que foram desenvolvidas por Almeida (2005), Perez (2005), Carvalho (2008), Archilia (2008) e Silva (2009), por tratarem, direta ou indiretamente, em suas pesquisas sobre o EM.

Ao realizar uma pesquisa diagnóstica, Almeida (2006) procurou investigar **se e como** professores do Ensino Fundamental de escolas públicas estaduais de uma cidade do interior do Estado de São Paulo trabalhavam as atividades de

observação de regularidades e generalização de padrão e, caso trabalhassem, quais estratégias de resolução previa que seus alunos utilizariam.

A coleta de dados se deu a partir de entrevistas semi-estruturadas com cinco professores da rede estadual, e as análises desses dados indicaram que os professores trabalhavam esporadicamente com atividades desse tipo em sala de aula. Com relação aos alunos, os professores julgavam que eles utilizariam estratégias de desenho e contagem, sem chegar a uma estratégia de generalização.

De acordo com a autora, existe a necessidade de sensibilizar professores tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, sobre a importância de atividades que envolvam observação de regularidades e generalização de padrões, que é considerada um tema transversal.

Outra pesquisa diagnóstica realizada por Perez (2006) tinha como objetivo investigar **se** e **como** alunos do EM resolvem situações-problema envolvendo observação de regularidades e generalização de padrões.

Para a coleta de dados, utilizou uma sequência com cinco atividades aplicadas em duas sessões para nove alunos de três séries do EM, em uma Escola Estadual do interior de São Paulo.

Dentre as atividades aplicadas por Perez (2005) observei que:

- As atividades 1 e 2 proporcionaram aos alunos a observação de regularidades e a generalização de padrões em sequências cíclicas;
- As atividades 3 e 4 propiciaram o mesmo trabalho em sequências que apresentavam características de uma progressão aritmética ,e
- A atividade 5 apresentava uma sequência que permitia diferentes formas de se observar a regularidade e de generalizar o padrão dado.

Os resultados obtidos nesta pesquisa levaram-na a concluir que os alunos, embora alegassem não terem trabalhado com aquele tipo de atividade anteriormente, não só resolveram atividades envolvendo a observação de regularidades e generalização de padrões, como também utilizaram diferentes estratégias para generalizar.

O objetivo de Carvalho (2008) era de verificar se era possível criar condições para que os alunos de uma 1ª série do EM, generalizassem termos de progressões aritméticas e se esta generalização conduzir-lhes-ia à construção da fórmula do termo geral da PA.

Para a coleta dos dados, ele desenvolveu uma sequência didática contendo nove atividades aplicadas em três sessões para a 1ª série do EM, em uma Escola Estadual do interior de São Paulo.

De acordo com o autor, os alunos participantes conseguiram generalizar termos de uma PA após a observação, entretanto, isso não os levou à construção da fórmula do termo geral devido à dificuldade deles em utilizar a notação algébrica formal.

Sobre as contribuições que essa sequência didática trouxe aos alunos, o pesquisador pôde fazer constatações em uma conversa mantida com a professora da classe, após a realização de toda a experimentação. Nesse diálogo, ela destacou que, quando trabalhava com PA e PG, percebeu que esses seus alunos:

[...] não somente compreenderam o processo de construção da fórmula do termo geral como também se empenharam mais no estudo das progressões em comparação com outras classes da mesma série em que ela lecionava. (CARVALHO, 2008, p.112)

Os resultados obtidos nesta pesquisa levaram-no a concluir que o trabalho com observação de regularidades e generalização de padrões pode ser benéfico tanto para a aprendizagem quanto para a autonomia dos alunos no ensino da Matemática.

O objetivo de Archilia (2008) era investigar se alunos da 2ª série do EM conseguiam construir uma fórmula para o termo genérico de uma progressão aritmética.

Para a coleta dos dados, ele desenvolveu uma sequência didática contendo 10 atividades, aplicadas em três sessões, em uma das turmas da 2ª série do EM, período noturno, em uma Escola Estadual de São Paulo, onde o pesquisador lecionava.

De acordo com o autor, os alunos não conseguiram construir a fórmula para o termo geral de uma PA utilizando a linguagem algébrica, apesar de terem

feito em linguagem natural. Isso o levou a concluir que falta um trabalho constante e competente envolvendo observação de regularidades e generalização de padrões em toda a trajetória escolar dos alunos.

Ao realizar uma pesquisa diagnóstica, Silva (2009) procurou investigar a prática educacional de professores das oficinas “Experiências Matemática” em relação às atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões.

Para a coleta de dados, ele realizou entrevistas semi-estruturadas com professores de matemática que lecionavam as Oficinas “Experiências Matemáticas” nas escolas de Tempo Integral da rede Estadual de Ensino, de uma determinada Diretoria de Ensino.

De acordo com o autor, as atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões são pouco trabalhadas nas oficinas “Experiências Matemáticas” não pela desaprovação dos professores nesse tipo de atividade, mas por desconhecimento do assunto.

A partir da leitura das pesquisas descritas acima, pude refletir sobre diferentes aspectos relevantes, envolvidos na utilização de sequências em experimentos de estudo. Dentre eles, cito:

- O engajamento e a autonomia dos alunos, em atividades de investigação de padrões em diferentes séries do Ensino Básico¹⁶;
- A relevância da construção de expressões numéricas, antes das expressões algébricas, como meio facilitador, na trajetória até a regra geral;
- A utilização, por parte dos alunos, de diferentes estratégias para generalizar;
- Os benefícios que esse tipo de trabalho contribui para a aprendizagem dos alunos;

¹⁶ Entende-se por Ensino Básico o Ensino Fundamental e Médio.

- A necessidade de sensibilizar os professores sobre a importância de atividades que envolvam a observação de regularidades e a generalização de padrões para que esse trabalho deixe de ser esporádico em sala de aula e possa ser utilizado como tema transversal.

Todos esses dados observados pelos diferentes autores em diversas pesquisas serão considerados neste estudo, uma vez que (esses dados) fazem parte de um subprojeto denominado “Sobre observação e generalização de padrões: uma atividade matemática transversal”.

Os Padrões e a Resolução de Problemas

Outro aspecto importante que deve ser considerado é a ligação entre padrões e a resolução de problemas. Segundo Vale et al (2005), a descoberta de um padrão é uma poderosa estratégia para a resolução de problemas.

Mas o que vem a ser um problema?

De acordo com Van de Walle (2001, apud Onuchic e Allevato, 2004), um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade ao qual o aluno não traz métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

Sendo assim, a Matemática, segundo Onuchic e Allevato (2004), deve ser trabalhada a partir da resolução de problemas, desde a elaboração das tarefas que possam ser o veículo pelo qual o currículo será desenvolvido até a aprendizagem do aluno, consequência desse processo de resolução de problemas.

Com relação às novas tendências de ensino da Matemática, Onuchic (1999) esclarece que:

Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas. O ensino da Resolução de Problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio da Resolução de Problemas. (ONUCHIC, 1999, p.210-211)

Considerando à comparação entre as atividades de exploração de padrões e a resolução de problemas, Barbosa et al (2008) afirmam que:

As tarefas que têm subjacente a exploração de padrões poderão contribuir de forma significativa para o desenvolvimento de capacidades próprias da resolução de problemas, já que implicam a análise de casos particulares, a organização de informação de forma sistemática, o estabelecimento de conjecturas e a generalização de resultados. (BARBOSA ET AL, 2008, p.1)

Com relação ao ensino da Matemática e a resolução de problemas, Onuchic e Allevato (2004) esclarecem que:

[...] ensinar matemática através da Resolução de Problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da Resolução de Problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em Resolução de problemas, e o trabalho de ensino de Matemática deve acontecer num ambiente de investigação orientada em Resolução de Problemas. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p.222)

De acordo com as indicações dos autores acima, há um paralelo entre padrões e resolução de problemas, e algumas das ideias sugeridas por Orton (1999) em relação aos padrões elucidam ainda mais essa relação. Segundo o autor, o trabalho com padrões permite que o aluno:

- Construa uma imagem mais positiva da Matemática;
- Estabeleça várias conexões entre diferentes temas matemáticos;
- Sinta-se atraído e motivado pelo forte apelo ao seu sentido estético e criativo;
- Promova e desenvolva suas habilidades e competências matemáticas;
- Desenvolva a capacidade de classificar e ordenar informações;
- Compreenda a ligação entre a matemática e o mundo em que vivem.

Dessa forma, o trabalho com padrões favorece o desenvolvimento do aluno conforme explicitado por todos esses autores anteriormente descritos, além de proporcionar um ambiente de investigação orientado pela resolução de problemas (Onuchic, 1999; Onuchic e Allevato, 2004).

O primeiro matemático que procurou organizar um pouco o processo de resolução de problemas foi George Polya (1945) em seu livro *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*.

A resolução de problemas segundo esse autor pode ser constituído em quatro etapas, que são:

1. Compreensão do problema - o primeiro passo é entender o problema, familiarizar-se com ele, gravando na mente o seu objetivo. É importante fazer perguntas e sempre que possível separar as condições em partes;
2. Construção de uma estratégia de resolução - considerar o problema sob diversos pontos de vista e procurar contatos com seus conhecimentos previamente adquiridos. Verificar como as diversas partes estão inter-relacionadas para se ter uma ideia de resolução ou para se estabelecer uma estratégia;
3. Executando a estratégia - ao executar a sua estratégia de resolução, verificar cada passo;
4. Examinando a solução obtida - a revisão da solução é a etapa mais importante. Segundo Polya é a etapa que propicia a reflexão da resolução completa, à qual será possível reconsiderar e reexaminar o resultado. É essa revisão que favorece aos alunos a consolidação do conhecimento e o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas.

Analizando as etapas descritas acima por Polya (1945), fica evidente a ligação entre padrões e resolução de problemas, pois a procura de padrões é uma parte crucial na resolução de problemas (Vale e Pimentel, 2005) ou, como descrito anteriormente: uma poderosa estratégia de resolução de problemas (Vale et al, 2005).

Ao pesquisar sobre atividades que envolvem a observação de regularidades e generalização de padrões também me deparei com sua natureza investigativa dentro da resolução de problemas, que segundo Vale et al (2005):

[...] é um modo promissor de exploração da álgebra, sobretudo se utilizarem problemas significativos para os alunos onde o uso da álgebra seja relevante (VALE ET AL, 2005, p. 7).

Esse processo investigativo com padrões, de acordo com Herbert e Brown (1997), envolve três fases:

1. Procura de padrões – momento de análise que tem por objetivo extrair a informação relevante;
2. Reconhecimento do padrão, descrevendo-o através de métodos diferentes – momento da análise dos aspectos matemáticos em que se pressupõe representar essa informação matematicamente em palavras, diagramas, tabelas, gráficos e equações, e
3. Generalização do padrão – momento da interpretação e aplicação dos conhecimentos matemáticos apreendidos.

Sendo assim, o trabalho com atividades que envolvam a observação de regularidades e a generalização de padrões pode contribuir para essa visão da natureza matemática, por proporcionar contextos interessantes de aprendizagem em que o aluno poderá realizar um trabalho investigativo durante o processo de resolução de problemas, além de desenvolver diferentes habilidades e competências matemáticas.

Os Padrões e os Registros de Representação Semiótica

Ao examinar padrões abstratos, conforme sugeridos por Devlin (2002) sejam eles padrões numéricos, padrões cíclicos, padrões constantes, padrões figurativos, entre outros, me defrontei com diferentes tipos de registros de representação, como: figuras, desenhos, números, gráficos, entre outros.

Para analisar essa grande variedade de registros de representação aplicada na matemática, utilizei os estudos feitos por Raymond Duval (2003).

Ensinar matemática, segundo Duval (2003), é antes de tudo, contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização do aluno. Já a atividade matemática, de acordo com o autor, citado por Flores e Moretti (2006):

[...] é caracterizada pela dependência das representações semióticas, bem como pela grande variedade dessas representações. Isso porque as representações semióticas, no domínio da matemática, assumem um papel considerável já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por suas representações, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. (FLORES, MORETTI, 2006, p. 28)

A importância das representações, segundo Duval (2003), deve-se a duas razões fundamentais: primeiro por possibilitar à mobilização do tratamento matemático que depende do sistema de representação que está sendo utilizado e segundo, pelo fato de que o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representação semiótica, uma vez que seus objetos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos.

Outro dado a ser analisado, segundo Duval (2003), é a compreensão em matemática que implica na capacidade de mudar de registro, o que supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica.

Dessa forma, as atividades que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões, por possibilitar a utilização de uma variedade de registros durante sua resolução (na linguagem natural, figural, numérica, algébrica ou simbólica), auxiliam os alunos a desenvolver diferentes estratégias de resolução, permite a eles analisarem as atividades sobre diferentes pontos de vista, proporcionando a compreensão tão necessária em matemática.

Os Documentos Oficiais Nacionais e os Padrões

O trabalho com atividades de observação de regularidades e a generalização de padrões vem sendo citado há, pelo menos, uma década pelos documentos oficiais de educação brasileiros.

Em diferentes trechos desses documentos, encontrei, recomendações relacionadas à observação de regularidades e à generalização de padrões na educação matemática, tanto para o Ensino Fundamental (Brasil,1998) quanto para o Ensino Médio (Brasil, 1999, 2002,2006).

No PCN do EM encontrei a seguinte recomendação para o Ensino da Matemática:

[...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação,

elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1999, p. 41-42)

Fica claro que aprender matemática está diretamente relacionado com o saber fazer matemática e o saber pensar matemático. Desse modo, as atividades de resolução de problemas devem estimular, entre outras características, a busca de regularidades e a generalização de padrões (elementos fundamentais para a compreensão do processo de formalização do conhecimento matemático).

As Orientações Curriculares Nacionais para o EM também aconselham para o ensino de Matemática o trabalho com a observação de regularidades. Citam aspectos que dão prioridade a uma ação investigativa no processo de ensino da referida disciplina:

Colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.70)

Para as Orientações Curriculares, esse processo de ensino deve valorizar tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto à apresentação de fórmulas acompanhadas de dedução, além de valorizar o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, sendo de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Com relação ao estudo das progressões aritméticas e geométricas, as Orientações Curriculares sugerem que:

Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”) (BRASIL, 2006, p.75)

De acordo com o PCN do EM, a situação-problema é uma importante estratégia de ensino, não somente em Matemática, pois com ela os alunos:

[...] aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua

capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1999, p.266)

Dessa forma, essa estratégia de ensino transmite, mais claramente, todas as etapas descritas por Polya (1945) para a resolução de problemas. Esse processo transfere para o aluno a responsabilidade de sua própria aprendizagem, à medida que evidencia a importância e os benefícios que a ele proporciona, tornando-o ator principal dessa ação.

Os Documentos Oficiais do Estado de São Paulo

Segundo SARESP: Matrizes de Referência para a Avaliação:

O currículo das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio foi estruturado a partir de agosto de 2007, com base em cinco princípios estruturais: currículo é cultura; currículo referido a competências; currículo que tem como prioridade a competência leitora e escritora; currículo que articula as competências para aprender; currículo contextualizado no mundo do trabalho. (S.PAULO, 2008b, p.5)

Os documentos estaduais analisados, encabeçados pela Secretaria de Educação e, portanto gerados a partir de uma mesma perspectiva, trazem em seus conteúdos a nova estrutura curricular. Assim, embora a “Nova Proposta Curricular” tenha vindo a público no início de 2008, juntamente com os “Cadernos do Professor”, e o “SARESP: Matrizes de Referência para a Avaliação” apenas em outubro de 2008, é este último documento que explicita a ideia de currículo exposta no primeiro.

A Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo

A rede pública de ensino do estado de São Paulo, após diagnosticar criticamente em 2007, a existência de muitos currículos praticados em suas escolas, tomou:

[...] uma firme decisão em favor do estabelecimento de um currículo mínimo comum a todas de forma explícita, para todo o sistema, em cujo contorno e definição deveriam estar configurados e indicados, as bases dos conhecimentos e das competências e habilidades a serem efetivamente desenvolvidas pelos alunos na escola e, com elas a indicação das expectativas de aprendizagem para cada série/ano e ciclo, possíveis de serem

avaliadas ao fim de cada um deles, com transparência e eficácia. (S.PAULO, 2008b, p.4)

Essa decisão, de estabelecer um currículo comum, tinha a intenção de:

[...] apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens de seus alunos. [...] a Secretaria procura também cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências, para que nossas escolas funcionem de fato como uma rede. (S. Paulo, 2008a, p.8)

Assim, a SEE/SP após realizar o diagnóstico e querendo por em prática a intenção exposta acima, apresentou uma Nova Proposta Curricular denominada - *São Paulo Faz Escola* - para os níveis de Ensino Fundamental Ciclo II e Médio, composta por diferentes subsídios que propõem os princípios orientadores para a prática educativa, atingindo todos os envolvidos no processo de ensino da rede: professores e gestores¹⁷.

A Nova Proposta Curricular, referência comum a todas as escolas da rede, descreve:

[...] o elenco das metas de aprendizagens desejáveis em cada área, estabelecendo os conteúdos disciplinares a serem desenvolvidos em cada ano ou ciclo e o que se espera que os alunos sejam capazes de realizar com esses conteúdos, expresso na forma de competências e habilidades claramente avaliáveis. (S.PAULO, 2008b, p.6)

Assim, a SEE/SP após elencar as metas de aprendizagem desejadas, pôde estruturar as referências para a avaliação; denominado como “Saesp: Matrizes de Referência para a Avaliação”.

No documento básico desta proposta, está explícito que:

[...] a Matemática é apresentada como um sistema simbólico que se articula diretamente com a língua materna, nas formas: oral e escrita, bem como com outras linguagens e recursos de representação da realidade. (S. PAULO, 2008a, p.44)

De acordo com a *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática* (S. Paulo 2008a, p.44), “a Matemática, nos currículos, está longe de representar um conteúdo destinado apenas a especialistas ou a pessoas com dons especiais”; é considerada como indispensável a todas as pessoas e, por isso,

¹⁷ Diretores, assistentes técnico-pedagógicos, professores, professores coordenadores e supervisores.

juntamente com a língua materna constitui o eixo fundamental do currículo escolar.

Assim, segundo essa proposta, tanto a Matemática quanto a língua materna permitem o desenvolvimento de competências necessárias em diferentes situações do dia-a-dia, como: compreensão competente da realidade, argumentação consistente, enfrentamento assertivo de situações-problema desde sua análise, articulação de informações e relações disponíveis até as tomadas de decisões conscientes e refletidas que permitem a elaboração de sínteses dos resultados.

Em relação ao professor, a Nova Proposta prevê a elaboração de subsídios especialmente dirigidos a ele, denominados como “Caderno do Professor”, organizados por bimestre e por disciplina. Nesses documentos, de acordo com a Proposta:

[...] são apresentadas situações de aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série e acompanhados de orientações para a gestão da sala de aula, para a avaliação e a recuperação, bem como de sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares. (S. PAULO, 2008a, p.9)

Dessa forma, de acordo com a descrição dada acima, os Cadernos do Professor têm a função de um livro didático, pois apresentam conteúdos, habilidades e competências específicas para cada situação de aprendizagem orientando o professor na gestão da sala de aula.

Ao produzir esse material, a SEE/SP pretende garantir uma base comum de conhecimentos e competências; contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens de seus alunos, propiciando assim que as escolas funcionem de fato como uma rede.

A Nova Proposta expõe também, que a abordagem dos conteúdos disciplinares de Matemática, tanto para o EF quanto para o EM, serão sugeridos em uma grade bimestral, além de apresentar as ideias fundamentais que serão privilegiadas em cada bimestre.

Estas ideias, segundo esse texto, permitirão a escolha de um grande tema por bimestre. Esse tema gerador será importante para articular parte ou a

totalidade dos conteúdos dos bimestres, servindo de mediador na mobilização dos temas para o desenvolvimento das competências pessoais do aluno, bem como para a construção de significados dos conteúdos estudados.

Dentre as ideias fundamentais relatadas por esta Proposta Curricular, enfatizo a ideia de ordem, em relação à noção de número:

[...] A idéia de ordem, de organização sequencial, tem nos números naturais sua referência básica, podendo ser generalizada quando se pensa em hierarquias segundo outros critérios, como a ordem alfabética. Também está associada, de maneira geral, a prioridades e à construção de algoritmos. (S. PAULO, 2008a, p.50)

É importante destacar que a ideia de ordem, apresentada explicitamente como fundamental no texto, tem relação com a observação de regularidades e a generalização de padrões. Observar a organização da sequência e a ordem ocupada por cada elemento tem a finalidade de investigar a regularidade presente na problematização. Essa identificação da regularidade permite associá-la a uma lei de formação que admite a construção de diferentes algoritmos, e a construção de fórmulas que generalizam o padrão. Dessa forma, esse tema gerador favorece o estudo e o aprofundamento de diferentes assuntos, como: múltiplos e divisores, equações, cálculos de áreas, PA e PG entre outros.

Outro dado importante apresentado na proposta é que:

[...] A explicitação, em cada um dos bimestres, dos conteúdos e das idéias fundamentais, tem apenas o objetivo de destacar o foco principal das atenções, deixando-se subentendido que praticamente todos os outros conteúdos e idéias são coadjuvantes em todos os momentos. (S. PAULO, 2008a, p. 51)

Sabendo que essa proposta traz os conteúdos e as ideias fundamentais orientando o professor sobre o foco principal a ser abordado em cada bimestre, e esta pesquisa tem como público-alvo os alunos da 1ª série do EM, farei a seguir uma análise de um dos subsídios que compõem essa proposta: o **Caderno do Professor do 1º bimestre de 2008 da primeira série do Ensino Médio**.

De uma maneira geral, todos os Cadernos do Professor trazem orientações para a gestão da aprendizagem na sala de aula, estabelecendo os conteúdos a serem desenvolvidos em cada ano, juntamente com os temas geradores, o que se espera dos alunos após essa aprendizagem, bem como, sobre a avaliação e sugestões para projetos de recuperação bimestrais das aprendizagens.

A seguir apresento cópia da grade curricular conforme consta dos cadernos do professor das três séries do EM:

 CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO MÉDIO			
	1ª série	2ª série	3ª série
1º Bimestre	NÚMEROS E SEQUÊNCIAS - Conjuntos numéricos. - Regularidades numéricas: sequências. - Progressões aritméticas e progressões geométricas.	TRIGONOMETRIA - Fenômenos periódicos. - Funções trigonométricas. - Equações e inequações. - Adição de arcos.	GEOMETRIA ANALÍTICA - Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. - Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares - Ponto e reta: distância. - Circunferência: equação. - Reta e circunferência: posições relativas. - Cônicas: noções e aplicações
2º Bimestre	FUNÇÕES - Relação entre duas grandezas. - Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. - Função de 1º grau. - Função de 2º grau.	MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES - Matrizes: significado como tabelas, características e operações. - A noção de determinante de uma matriz quadrada. - Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E NÚMEROS COMPLEXOS - Equações polinomiais. - Números complexos: operações e representação geométrica. - Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial. - Relações de Girard.
3º Bimestre	FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA - Crescimento exponencial. - Função exponencial: equações e inequações. - Logaritmos: definição e propriedades. - Função logarítmica: equações e inequações.	ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE - Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. - Probabilidade simples. - Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. - Probabilidade da reunião e/ou da interseção de eventos. - Probabilidade condicional. - Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.	ESTUDO DAS FUNÇÕES - Qualidades das funções. - Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais. - Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. - Composição: translações e reflexões. - Inversão.
4º Bimestre	GEOMETRIA – TRIGONOMETRIA - Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. - Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. - Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos.	GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL - Elementos de geometria de posição. - Poliedros, prismas e pirâmides. - Cilindros, cones e esferas.	ESTATÍSTICA - Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. - Medidas de tendência central: média, mediana e moda. - Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. - Elementos de amostragem.

O sombreado assinala os conteúdos relacionados aos trabalhados neste bimestre.

Figura1: Conteúdos de Matemática por série/bimestre do EM (São Paulo: SEE, 2008c)

Verifiquei que os conteúdos tratados no 1º bimestre da 1ª série do EM fazem referência ao assunto que desejo investigar, bem como, pude visualizar o sombreado presente no documento, que assinala os conteúdos relacionados aos trabalhados nesse bimestre. Este último permite ao professor visualizar os

conteúdos favoráveis à retomada dos conceitos trabalhados neste bimestre, o que proporcionará a articulação necessária entre os conteúdos para um possível aprofundamento.

A ideia fundamental que norteia esse Caderno do Professor referente ao eixo “Números” é a sequência numérica, assunto que, segundo os autores da proposta, permitirá a articulação de todo o conteúdo trabalhado no bimestre.

De acordo com as Orientações¹⁸ contidas neste Caderno:

“O estudo das sequências é importante, pois, além da larga aplicação em problemas (em contextos matemáticos e de outras áreas do conhecimento), pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que ao identificar regularidades o aluno pode generalizá-las e expressá-las por meio de sentenças algébricas.” (S. PAULO, 2008c, p.8)

Assim, as orientações sugerem uma exploração de situações que envolvam sequências numéricas ou não, proporcionando ao aluno a oportunidade de observar, analisar, identificar regularidades presentes em cada sequência e perceber que, em alguns casos, é possível constituir uma lei de formação.

Esse trabalho inicial tem por objetivo tornar o aluno capaz de observar a regularidade e encontrar a generalização do padrão, além de saber identificar e calcular qualquer termo da sequência (fórmula do termo geral). Esse trabalho motivador, impulsionado pela investigação matemática e resolução de problemas, torna o ambiente propício para aprofundar as investigações sobre observação de regularidades e generalização de padrões, agora sob a perspectiva das progressões aritméticas e geométricas.

SARESP: Matrizes de Referência para a avaliação

Outro documento confeccionado pela SEE/SP em 2008 que trata sobre avaliação da Educação Básica do Estado de São Paulo é o *Saresp: Matrizes de Referência para a Avaliação*.

De acordo com esse documento, O Saresp a partir de 2008, passa a contar:

¹⁸ Ver anexos 1, 2 e 3.

[...] com uma base curricular comum a todos os alunos da educação básica de seu sistema de ensino como apoio às referências da avaliação, uma vez que na organização de um sistema de avaliação o principal problema é explicitar uma resposta a seguinte pergunta: **O que avaliar?** Pergunta para a qual a resposta mais significativa só pode ser: **Aquilo que o aluno deveria ter aprendido.** (S. PAULO, 2008b, p.3)

Sendo assim o Saresp, a partir de 2008, passou a fazer parte da base curricular comum da educação básica da rede estadual de ensino, após a definição clara das expectativas de aprendizagem a serem obtidas com a Nova Proposta Curricular.

Ainda de acordo com esse documento, as Matrizes de Referência para a Avaliação, foram estruturadas a partir da análise dos documentos que balizam as avaliações nacionais (Saeb) e internacionais (Pisa), bem como, as da Nova Proposta Curricular do Estado que:

[...] descreve as metas desejáveis em cada área, estabelecendo os conteúdos disciplinares a serem desenvolvidos em cada ano ou ciclo e o que se espera que os alunos sejam capazes de realizar com esses conteúdos, expresso na forma de competências e habilidades claramente avaliáveis. (S. PAULO, 2008b, p.6)

Dessa forma, o Saresp avalia a relação entre as habilidades, conteúdos e competências expressos nos níveis de desempenho da Escala de Proficiência nas disciplinas de Matemática, Língua Portuguesa, Ciências da Natureza e Ciências Humanas.

De acordo com o texto, a matriz de referência de avaliação pode ter muitas finalidades, mas a mais importante delas é:

[...] o seu poder de sinalização das estruturas básicas de conhecimentos a serem construídas por crianças e jovens por meio dos diferentes componentes curriculares em cada etapa da escolaridade básica. (S. PAULO, 2008b, p.8)

Assim, a matriz de referência além de avaliar a evolução da qualidade de ensino, indicar as competências e habilidades básicas a serem desenvolvidas pelos alunos em cada etapa da escolarização, poderá também, promover os ajustes necessários para que eles tenham acesso à construção de seus conhecimentos.

Os três aspectos fundamentais presentes na Matriz de Referência para a avaliação (conteúdos, competências e habilidades) também são apontadas pela

Proposta. As habilidades possibilitam inferir o nível em que os alunos dominam as *competências cognitivas*¹⁹ avaliadas, coerente aos conteúdos das disciplinas. Os conteúdos e as competências correspondem às diferentes habilidades a serem consideradas nas respostas para as diferentes questões ou tarefas nas provas. Em outras palavras, as *competências cognitivas* avaliadas no exame do Saresp acontecem por intermédio das habilidades associadas aos conteúdos em uma situação de prova. Os conteúdos avaliados retratam as estruturas conceituais mais abrangentes das disciplinas e as competências mais relevantes aos alunos, que se traduzem em habilidades específicas, responsáveis pela aprendizagem.

Segundo as Matrizes de Referência (S. Paulo: SEE, 2008b, p.16), há três grandes grupos de competências cognitivas que são avaliadas pelo Saresp:



Figura 2: Gr. de Competências Avaliadas no Saresp e as funções valorizadas
(S. Paulo: SEE, 2008b, p.16)

Dentre as competências mais relevantes apresentadas, encontrei as funções de observar, realizar e compreender que, conforme a figura sugere, implica na relação entre os grupos de esquemas encontrados nos vértices do triângulo.

As Matrizes de Referência (S. Paulo, 2008b) descrevem que o Grupo I, denominado “*Competências para observar*”, refere-se aos esquemas

¹⁹ Competências cognitivas são modalidades estruturais da inteligência. O conjunto de ações e operações mentais que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas que deseja conhecer. (SÃO PAULO, 2008b, p.14)

representativos, cujas competências permitem ao aluno: ler a prova registrando o que está sendo proposto e interpretar esses registros como informação que tornar possível decidir, qual alternativa pode ser considerada a mais correta para a questão.

As habilidades que correspondem a esse grupo possibilitam verificar o quanto e como o aluno pode considerar as informações propostas na pergunta, antes de decidir por uma melhor resposta.

De acordo com esse documento (S. PAULO, 2008b) as habilidades do Grupo I são:

- **Observar** para levantar dados, descobrir informações nos objetos, acontecimentos, situações etc., e suas representações;
- **Identificar, reconhecer, indicar, apontar**, dentre diversos objetos, aquele que corresponde a um conceito ou a uma descrição;
- **Identificar** uma descrição que corresponde a um conceito ou às características típicas de objetos, da fala, de diferentes tipos de texto;
- **Localizar** um objeto, descrevendo sua posição ou interpretando a descrição de sua localização, ou localizar uma informação em um texto;
- **Descrever** objetos, situações, fenômenos, acontecimentos etc., e interpretar as descrições correspondentes;
- **Discriminar**, estabelecer diferenciações entre objetos, situações e fenômenos com diferentes níveis de semelhança;
- **Constatar** alguma relação entre aspectos observáveis do objeto, semelhanças e diferenças, constâncias em situações, fenômenos, palavras, tipos de texto etc.;
- **Representar** graficamente (por gestos, palavras, objetos, desenhos, gráficos etc.) os objetos, situações, sequências, fenômenos, acontecimentos etc.;
- **Representar** quantidades através de estratégias pessoais, de números e de palavras. (S. PAULO, 2008b p.17)

Dentre as habilidades descritas por esse grupo, há algumas que permitem estabelecer um paralelo com atividades que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões. Dentre elas é possível relacionar:

- **Observar** um padrão e suas representações com a finalidade de levantar dados;
- **Identificar e reconhecer** conceitos correspondentes àquele padrão;

- **Descrever** um padrão e interpretar as descrições correspondentes;
- **Discriminar** estabelecendo diferenciações entre os termos de um padrão;
- **Constatar** alguma relação entre aspectos observáveis do padrão (semelhanças e diferenças);
- **Representar** o padrão através de estratégias pessoais, utilizando gestos, palavras, desenhos, gráficos, tabelas, números etc.

A descrição do Grupo II, denominada “*Competências para realizar*”, caracteriza-se pela capacidade de o aluno realizar os procedimentos necessários à sua tomada de decisão em relação à questão dada. São competências focadas nas atividades dos alunos, que avaliam “o que” e “como” fazem. As habilidades referentes a esse grupo implicam: procedimentos, modos de estabelecer relações que transformam os conteúdos inclusos na questão. As habilidades desse grupo são:

- Classificar** - organizar (separando) objetos, fatos, fenômenos, acontecimentos e suas representações, de acordo com um critério único, incluindo subclasses em classes de maior extensão;
- Seriar** - organizar objetos de acordo com suas diferenças, incluindo as relações de transitividade;
- Ordenar** objetos, fatos, acontecimentos, representações, de acordo com um critério;
- Conservar** algumas propriedades de objetos, figuras etc., quando o todo se modifica;
- Compor e decompor** figuras, objetos, palavras, fenômenos ou acontecimentos em seus fatores, elementos ou fases etc.;
- Fazer antecipações** sobre o resultado de experiências, sobre a continuidade de acontecimentos e sobre o produto de experiências;
- Calcular por estimativa** a grandeza ou a quantidade de objetos, o resultado de operações aritméticas etc.;
- Medir**, utilizando procedimentos pessoais ou convencionais;
- Interpretar** explicar o sentido que têm para nós acontecimentos, resultados de experiências, dados, gráficos, tabelas, figuras, desenhos, mapas, textos, descrições, poemas etc., e apreender este sentido para utilizá-lo na solução de problemas; (S. PAULO, 2008b, p. 18)

Das habilidades que podem ser consideradas nas atividades de observação de regularidades e generalização de padrões, descritas por esse Grupo, é possível relacionar:

- **Classificar**, organizando o padrão e suas representações, de acordo com um único critério, que pode variar de pessoa para pessoa;
- **Ordenar**, observando a organização sequencial de acordo com um critério adotado;
- **Compor e decompor** cada um dos elementos que fazem parte da sequência;
- **Fazer antecipações** sobre a continuidade do padrão;
- **Interpretar** os dados contidos na sequência a fim de apreender sua utilidade para elaborar uma generalização.

A descrição das Matrizes de Referência (S. PAULO, 2008b) para o Grupo III, denominada “*Competências para compreender*” deve ser analisada sob duas perspectivas: primeira, por estarem presentes e serem essenciais as competências cognitivas destacadas nos grupos anteriores; e segunda, por essas competências serem consideradas um meio ou uma condição que possibilita as realizações via esquemas procedimentais (Grupo II) ou as leituras via esquemas de representação (Grupo I).

São essas competências que correspondem às operações mentais mais complexas que permitem ao aluno a coordenação, planejamento e escolha de estratégias para resolver problemas ou realizar tarefas.

As habilidades que permitem inferir o domínio destas operações mentais de nível superior são:

- **Analisar** objetos, fatos, acontecimentos, situações, com base em princípios, padrões e valores;
- **Aplicar** relações já estabelecidas anteriormente ou conhecimentos já construídos a contextos e situações diferentes; aplicar fatos e princípios a novas situações, para tomar decisões, solucionar problemas, fazer prognósticos etc.;
- **Avaliar**, isto é, emitir julgamentos de valor referentes a acontecimentos, decisões, situações, grandezas, objetos, textos etc.;
- **Criticar, analisar e julgar**, com base em padrões e valores, opiniões, textos, situações, resultados de experiências, soluções para situações-problema, diferentes posições assumidas diante de uma situação etc.;
- **Explicar causas e efeitos** de uma determinada sequência de acontecimentos;

- **Apresentar conclusões** a respeito de ideias, textos, acontecimentos, situações etc.;
- **Levantar suposições** sobre as causas e efeitos de fenômenos, acontecimentos etc.;
- **Fazer prognósticos** com base em dados já obtidos sobre transformações em objetos, situações, acontecimentos, fenômenos etc.;
- **Fazer generalizações** (indutivas) a partir de leis ou de relações descobertas ou estabelecidas em situações diferentes, isto é, estender de alguns para todos os casos semelhantes;
- **Fazer generalizações** (construtivas) fundamentadas ou referentes às operações do sujeito, com produção de novas formas e de novos conteúdos;
- **Justificar acontecimentos**, resultados de experiências, opiniões, interpretações, decisões etc. (S. PAULO, 2008b, p. 20)

Das habilidades do Grupo III, denominado “*Competências para compreender*”, resalto:

- **Aplicar** relações já estabelecidas anteriormente ou conhecimentos já construídos em contextos e em situações diferentes, no âmbito de novas atividades (com padrões), para tomar decisões, solucionar problemas e fazer conjecturas;
- **Apresentar conclusões** a respeito dos padrões;
- **Fazer generalizações** indutivas a partir de leis e relações descobertas ou estabelecidas em diferentes situações, isto é, ampliar a generalização estabelecida para alguns casos, observando as leis e relações descobertas, para todas as situações semelhantes;
- **Fazer generalizações** construtivas fundamentadas nas operações do sujeito, com produção de novas formas e novos conteúdos, isto é, promover generalizações a partir das ações do sujeito, com a finalidade de aprofundar o conhecimento determinando novas formas de resolver a atividade, ou ainda, de produzir novos conteúdos;
- **Justificar acontecimentos**, resultados de experiências, interpretações, decisões tomadas durante a resolução do problema.

Essas habilidades explicitadas pelo documento elaborado pela SEE/SP, mantêm uma estreita relação com as competências envolvidas no trabalho com

padrões descritas por Frobisher e Threlfall (1999)²⁰. De acordo com esses autores as habilidades de observar, realizar e compreender fazem parte do trabalho de investigação que envolve a observação de regularidades e generalização de padrões.

Sendo assim, sabendo que as Matrizes de Referências para a avaliação apresenta como competências mais abrangentes: observar, realizar e compreender, e que meu objetivo é investigar como o aluno que terminou o 1º ano do EM, em 2008, observa, realiza e compreende atividades que envolvem a observação de regularidades e a generalização de padrões, utilizarei este documento também para embasar minhas análises.

²⁰ Ver página 23

Capítulo III - Escolhas Metodológicas

Base Teórica Metodológica

Para responder minha questão de pesquisa decidi realizar uma pesquisa qualitativa.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) e Ludke e André (1986), a pesquisa qualitativa apresenta as seguintes características que serão consideradas: a obtenção dos dados se dá a partir da inserção do investigador no ambiente a ser pesquisado; os dados coletados são predominantemente descritivos e sua análise deve favorecer a compreensão do objeto estudado; há um interesse pelo processo mais do que simplesmente pelo resultado obtido; a busca pelo significado é de importância fundamental, pois designa a perspectiva dos participantes.

Julguei mais apropriado elaborar um instrumento diagnóstico constante de atividades para serem realizadas pelos sujeitos da pesquisa. Para elaboração do instrumento utilizei algumas ideias da metodologia de pesquisa, denominada Engenharia Didática²¹.

O processo da engenharia didática, segundo Machado (2008), é composto por quatro etapas: análises preliminares, a concepção e análise *a priori* da situação, (que, neste caso é um instrumento diagnóstico) a experimentação e a análise *a posteriori*. A seguir, descrevo cada uma dessas etapas e sintetizo o que realizei em cada uma delas.

²¹ Para descrição pormenorizada de tal metodologia recorrer a Machado (2008)

É importante observar que essas etapas não acontecem obrigatoriamente nessa ordem e nem de forma disjunta, ocorrendo muitas vezes ao mesmo tempo.

As análises preliminares são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão. Tratam também sobre a análise do ensino atual e seus efeitos, das dificuldades e dos obstáculos que contribuem para a evolução dos alunos, dos objetivos específicos da pesquisa, oferecendo subsídios para o desenvolvimento da análise *a priori*.

Com relação às análises preliminares, fiz um estudo do quadro teórico didático geral e dos conhecimentos didáticos sobre a observação de regularidades e a generalização de padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico destacados por Orton e Orton (1999), Vale e Pimentel (2005), Vale et al (2005), Ponte (2005), dentre outros. Apresentei a análise do ensino atual visando vislumbrar seus efeitos ao considerar a Nova Proposta da SEE/SP e seus subsídios. Sobre as dificuldades e os obstáculos que contribuem para a evolução dos alunos, fiz uma análise dos dados obtidos nas pesquisas realizadas pelos colegas do grupo. Todos esses dados me trouxeram informações relevantes para o desenvolvimento da minha análise *a priori*.

A concepção e análise *a priori* da situação consistem na preparação do esquema experimental para a ação em classe. É nessa fase que o pesquisador, com base nos seus estudos anteriores, escolhe certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre o qual está pesquisando, que permite fazer uma retomada e aprofundar dados durante o desenvolvimento da pesquisa.

Com relação à concepção e análise *a priori* da situação fiz diversas considerações recorrendo às sugestões de atividades que constam no Caderno do Professor, para definir quais variáveis didáticas seriam abordadas, quais estratégias seriam previstas e esperadas, bem como seguir a ordem dos assuntos tratados. Esses assuntos foram divididos em duas sessões: na primeira, as atividades contemplavam a observação de regularidades e a generalização de padrões e as progressões aritméticas e na segunda, as atividades retomavam as progressões aritméticas e consideravam também as geométricas.

A experimentação consiste na execução dos processos desenvolvidos anteriormente. É a realização da engenharia didática em uma determinada população de alunos, tendo início no momento em que ocorre o contato pesquisador/professor com os alunos, objetos da investigação. Nessa fase devem-se respeitar ao máximo as escolhas feitas nas análises *a priori*, para evitar o fracasso da engenharia.

A experimentação ocorreu na escola estadual onde leciono, na região do Vale do Paraíba. Os alunos que participaram do experimento eram voluntários e não pertenciam a nenhuma das turmas às quais lecionava. O experimento ocorreu em duas sessões de aproximadamente 45 min, com duas semanas de distância entre elas. Após isso, houve a necessidade de se realizar entrevistas individuais com os alunos voluntários para esclarecer alguns pontos levantados pela análise dos protocolos, e obter dados não coletados na segunda sessão.

A análise *a posteriori* consiste na validação da engenharia; apoia-se sobre todos os dados colhidos durante a experimentação e nas produções dos alunos em classe para a compreensão e interpretação dos resultados da experimentação.

Essa fase foi iniciada a partir do final da primeira sessão da experimentação. A análise dos dados obtidos nessa sessão conduziu-me à revisão da segunda sessão tendo o tempo como principal fator a ser considerado nessa nova etapa. Após a análise dos protocolos dos alunos referente às duas sessões realizadas, levando em consideração os teóricos que fizeram parte das minhas análises preliminares, houve a necessidade de realizar entrevistas individuais com os sujeitos da pesquisa para que eu pudesse finalizar minhas análises.

Sobre as entrevistas individuais realizadas, dentre os três tipos descritos por Ludke e André (2001), optei pela semi-estruturada na qual o entrevistador usa um roteiro “guia” flexível, que pode ser adaptado no decorrer da entrevista ou em entrevistas subsequentes.

Para as entrevistas com os alunos (sujeitos desta pesquisa), elaborei o roteiro padrão que adaptei de acordo com as respostas de cada entrevistado, em seus protocolos da primeira e segunda sessões ou somente da primeira. O roteiro

adotado tinha quatro partes: duas contemplavam sequências abordadas na primeira sessão e, as outras duas, na segunda.

Capítulo IV- A Experimentação

Neste capítulo apresento a parte empírica da pesquisa, à qual descrevo sobre: os procedimentos metodológicos realizados, as atividades propostas nas duas sessões, suas respectivas análises *a priori* e considerações feitas sobre elas, e as análises *a posteriori* das atividades realizadas pelas duplas. As entrevistas realizadas com os alunos permeiam a análise *a posteriori* esclarecendo ou complementando os dados colhidos nas duas sessões. Em seguida, apresento parte das entrevistas realizadas após as duas sessões, às quais constam os dados dos alunos que não compareceram na segunda sessão; e finalizo esse capítulo com as análises *a posteriori* por questão.

Procedimentos Metodológicos

Para a coleta de dados decidi realizar a pesquisa de campo em uma escola da rede estadual de São Paulo, situada em uma cidade do vale do Paraíba em que leciono.

Das seis primeiras séries do EM que a escola comportava no ano de 2008, três funcionavam no período na manhã. Por lecionar em uma delas, preferi não convidar meus alunos, para participarem do experimento para não haver confusão entre alunos e voluntários. Dessa forma, preferi convidar os alunos das turmas as quais outros professores lecionavam para encontrar os voluntários necessários a essa pesquisa, uma vez que o experimento se deu fora do horário de aula.

Solicitei uma autorização (por escrito) à direção da escola para realizar minha pesquisa junto aos alunos da 1ª série, quando também entreguei uma cópia da carta aos pais e de um possível certificado a ser entregue aos alunos. A

diretora da escola autorizou a realização do trabalho, pedindo apenas que acrescentasse na carta aos pais, esclarecendo que o resultado dessa pesquisa faria parte de uma dissertação de mestrado. Porém, ela concordou com a entrega de certificado aos alunos que participassem do experimento como voluntários.

Conversei com o professor de Matemática que lecionava para as turmas com as quais pretendia obter voluntários, pedindo sua autorização para convidar os alunos. O professor não se opôs; apenas se interessou em saber como é que eu obteria informações sobre os alunos voluntários em relação a seu rendimento com a Matemática. Nessa conversa, disse-lhe que após a devolução da autorização assinada pelos pais, conversaria com ele a respeito dos alunos voluntários, para saber a sua opinião.

No primeiro contato com os, aproximadamente, sessenta alunos desse professor, expliquei-lhes o objetivo de minha pesquisa e convidei-os para participar de minha experiência. Ao todo, quinze alunos se prontificaram como voluntários.

Decidi realizar meu experimento em duas sessões de, aproximadamente, quarenta minutos cada uma, separadas uma da outra, no mínimo, por uma semana e, no máximo, por duas. A necessidade das duas sessões se fez presente devido à extensa gama de conteúdos que pretendia aplicar, sendo: observação de regularidades e consequente generalização de padrões e progressões aritméticas e geométricas.

A distância requerida entre a primeira e a segunda sessão ocorreu devido ao fato de possibilitar uma primeira análise dos resultados da primeira sessão e eventualmente incorporar algo ou alterar o instrumento da segunda sessão. Julguei que para manter a mobilização dos estudantes era preciso não espaçar demais uma sessão da outra.

As atividades foram previstas para serem realizadas em duplas com a intenção de provocar o diálogo entre os alunos. O objetivo destes diálogos era de propiciar a gravação e fornecer outros dados, além dos registrados nos protocolos, permitindo conhecer como estes alunos pensaram as resoluções. É provável que a audiogravação também capte, não só as discussões sobre a

resolução das atividades, como também questões sobre “se já haviam ou não trabalhado com aquele tipo de atividade”.

Para a elaboração do experimento dessa pesquisa, fiz uma análise das atividades propostas no Caderno do Professor, de forma a verificar que tipo de atividades contemplaria em cada sessão.

Para a elaboração da primeira sessão e sua respectiva análise *a priori*, escolhi atividades referentes a quatro das oito unidades do Caderno do Professor. Nessa sessão, as atividades que considerei referem-se à observação de regularidades e à generalização de padrões e progressões aritméticas focando sobre a fórmula do termo geral e a soma da PA.

Para a segunda sessão, considerei a análise de cinco unidades do Caderno do Professor que tratavam sobre PA e PG e suas respectivas fórmulas do termo geral e soma de termos. Nessa sessão, a retomada dos conceitos envolvidos em PA teve o objetivo de propiciar aos alunos a possibilidade de começarem a resolver a atividade com situações já consideradas na sessão anterior.

Com relação à análise *a priori*, elaborei a princípio apenas a da primeira sessão, por saber que após a análise *a posteriori* desta, ela poderia trazer aspectos não considerados durante a elaboração, conduzindo a uma reestruturação da segunda sessão para atingir os objetivos desse experimento.

As sessões aconteceram nas dependências da escola, no período da tarde, em uma sala onde as carteiras estavam organizadas em duplas.

Com o propósito de preparar um ambiente tranquilo e propício para a concentração dos alunos, solicitei que chegassem dez minutos antes do início da sessão, às 16h20min, pois começaria a entrega das atividades às 16h30min, e as atividades realizadas poderiam ser entregues até as 17h10 min.

A primeira sessão ocorreu em 28 de outubro de 2008 e, a segunda, em 11 de novembro do mesmo ano.

Os nomes apresentados neste trabalho são fictícios com o intuito de preservar o anonimato dos participantes.

Conforme previsto, a segunda sessão foi modificada após a análise *a posteriori* da primeira sessão a fim de atingir os objetivos propostos para essa pesquisa.

As análises *a posteriori* dos protocolos, foram realizadas primeiramente por dupla e depois por questão. Tendo em vista a necessidade de esclarecer alguns pontos levantados por essa análise realizada, e obter dados não coletados na segunda sessão pela ausência de duas duplas, decidi realizar entrevistas individuais com alguns dos sujeitos da pesquisa.

Para obter esses dados, elaborei um roteiro padrão para essas entrevistas o qual adaptei conforme as respostas dadas pelos alunos em seus protocolos.

Embora seis voluntários tenham participado do experimento, no final de 2008, e após a realização das sessões, quando tentei contatar cada um dos seis para lhes dizer que talvez houvesse necessidade de conversar com eles sobre a análise do que haviam feito, apenas um deles se recusou. E então, respeitando sua decisão, resolvi não lhe entrevistar. As entrevistas ocorreram em 2009, tendo em vista que as duas sessões ocorreram no final do ano de 2008.

As entrevistas realizadas foram semi-estruturadas por permitir um roteiro flexível, que pôde ser adaptado durante o seu transcorrer e de acordo com as respostas dadas pelos alunos nas sessões.

Após obter todos esses dados, e realizar as análises, produzi minhas considerações finais levando em conta todo o trabalho realizado: estudos preliminares e as análises *a priori* e *a posteriori*.

Instrumento de Pesquisa

A coleta de dados foi realizada em duas sessões através dos instrumentos de pesquisa e complementada com entrevistas semi-estruturadas para esclarecer alguns pontos levantados pela análise dos protocolos e para obter dados não coletados na segunda sessão.

A primeira sessão era composta de três atividades envolvendo a observação de regularidades e a generalização de padrões e progressões aritméticas focando sobre a fórmula do termo geral e a soma da PA.

A segunda sessão continha três atividades envolvendo PA e PG e suas respectivas fórmulas do termo geral e soma de termos.

Para a elaboração deste instrumento de pesquisa, analisei as atividades propostas pelo Caderno do Professor que favoreceram detectar respostas para as questões: “Quais variáveis didáticas seriam consideradas no experimento?” e “Quais estratégias de resolução poderiam ser esperadas por esses alunos?”.

Dentre as sequências consideradas, utilizei algumas que constantes nas sugestões de atividades do Caderno do Professor e adaptei outras para compor esse experimento.

1ª sessão

Análise *a priori*

O objetivo da 1ª sessão é verificar o desempenho dos alunos nas questões envolvendo: “sequências: padrões e regularidades, generalização e fórmula do termo geral, termo geral da Progressão Aritmética e a soma dos termos de uma Progressão Aritmética”, assuntos esses sugeridos pelo Caderno do Professor a ser tratado no 1º bimestre, em 26 aulas.

Elaborei três atividades que contemplam as unidades expostas acima. A seguir, apresento cada uma delas designando seus objetivos específicos e a descrição das estratégias de resolução esperadas em ordem decrescente da probabilidade de ocorrências. Estas estratégias de resolução foram identificadas como E_1 , E_2 , e assim por diante.

Atividade 1

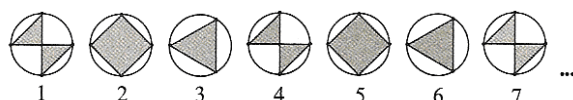
O objetivo desta atividade é de verificar **se** e **como** o aluno percebe a regularidade e expressa-a designando o próximo termo em diferentes sequências.

João e Natalia da 1ª série M observando essas sequências conseguiram descrever o termo que vinha a seguir em **quatro das cinco** sequências abaixo:

a) 7, 7, 7, 7, 7, 7, ...

b) 8, 10, 12, 14, 16, 18...

c)



d) 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4,...

e) 911, 971, 1033, 1097, 1163,...

Vocês também conseguem identificar nessas sequências, qual o próximo termo?

As variáveis didáticas enfocadas foram:

a) Tipos de sequências:

Decidi propor sequências regulares, todas apresentando regularidades, sendo a maioria delas do mesmo tipo das que foram sugeridas pelo Caderno do Professor:

- Monótona: é a sequência em que a razão entre seus termos é sempre nula (~p.11);
- Cíclica: é a sequência conhecida como figurativo-numérica e numérica que apresenta um ciclo que se repete constantemente (~p. 12);
- Crescente: é a sequência em que a razão entre os termos é um valor positivo (~p.13, p.14,...);

- Decrescente: é a sequência em que a razão entre seus termos é um valor negativo (~p.18);
 - Alguma sequência que apresente regularidade, diferente das sequências propostas no Caderno do Professor, cuja lei de formação permita a generalização.
- b) Forma de apresentação das sequências, ou registros de representação semiótica das sequências:
- Numéricas;
 - Figurativas.
- c) Conjunto dos números:
- Somente envolvendo números inteiros para facilitar os cálculos dos alunos.
- d) Número de termos das sequências:

Na atividade, apresento uma quantidade de termos nas sequências, variando entre cinco e sete elementos, por considerar essa faixa de números suficiente para que o aluno possa perceber a regularidade e indicar o próximo termo.

As estratégias de resolução previstas e esperadas para cada item são:

Sequência a

E₁ – O aluno percebe que os termos se repetem de forma constante, concluindo que o próximo termo será igual a todos os outros, 7.

Sequência b

E₁ – O aluno percebe que cada termo equivale à soma de seu anterior com o número 2, calcula $18+2$ e afirma que o próximo termo é 20.

E₂ – O aluno identifica que os termos da sequência são múltiplos de 2 ou números pares. O próximo múltiplo de 2, que também é par, após o número 18 é o número 20.

E₃ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão 2, e calcula o próximo termo utilizando a fórmula geral da PA. Calcula $8+2.(7-1) = 20$ e responde que o próximo termo será 20.

E₄ – O aluno identifica que a sequência pode ser generalizada, encontra a generalização $y = 6+2x$ ou simplesmente $6+2x$, e calcula o 7º termo da sequência, $6+2.7=20$.

Sequência c

E₁ – O aluno percebe que a sequência possui termos que se repetem ciclicamente e identifica que, pela ordem apresentada, o próximo termo será a figura equivalente ao termo 2, o círculo com o quadrado dentro.

E₂ – O aluno percebe que a sequência possui termos que se repetem. Que esse ciclo é de três elementos, observa que o próximo elemento será o oitavo, efetua a divisão de 8 por 3, descobre que o resto é 2 e conclui que o oitavo termo será igual ao segundo que também apresenta resto 2 na divisão por 3²².

Sequência d

E₁ – O aluno identifica que cada termo pode ser calculado pela diferença do termo anterior que é 2, e efetua $-4-2=-6$, concluindo que o próximo termo é o número -6.

E₂ – O aluno identifica que os termos da sequência são múltiplos de 2 e decrescente. O próximo múltiplo de 2 menor que -4 é o -6, afirmando que o próximo termo será -6.

E₃ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão negativa (-2), e calcula o próximo termo utilizando a fórmula geral da PA. Calcula $8-2.(8-1)=-6$ e responde que o próximo termo será -6.

E₄ – O aluno identifica que a sequência pode ser generalizada, encontra a generalização $y=10-2x$ ou simplesmente $10-2x$, e calcula o 8º termo da sequência, $10-2.8=-6$.

²² Estratégia sugerida pelo Caderno do Professor em sequência semelhante na p. 12

Sequência e

E₁ – O aluno observa a sequência e encontra a regularidade: $971-911 = 60$, $1033-971=62$, $1097-1033=64$, $1163-1097=66$, isto é, o próximo termo é $1163+68=1231$.

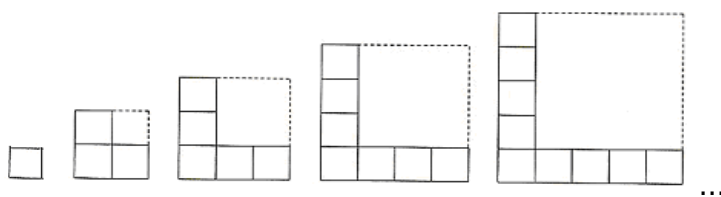
Atividade 2

O objetivo dessa atividade é de verificar **se** e **como** o aluno generaliza os padrões das sequências dadas e se reconhece a sequência que é uma progressão aritmética e utiliza as fórmulas desenvolvidas quando do estudo de PA e PG.²³

2. Observem as seguintes sequências:

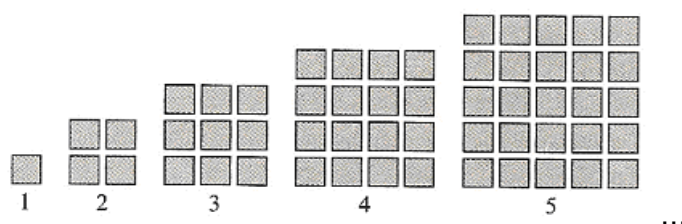
a) 1, 11, 111, 1111, 11111,...

b)



c) 1, 3, 7, 13, 21, 31,...

d)



e) 7, 5, 3, 1, -1, -3,...

1) Qual será o 145º termo de cada uma das sequências?

2) Considerando a sequência “e”, em qual posição estará o n° - 145?

3) Qual a fórmula do termo geral de cada uma das sequências dadas?

²³ PA e PG: símbolos de progressão aritmética e de progressão geométrica utilizados habitualmente por professores e alunos e também pelo Caderno do Professor

Para a escolha dos problemas, considere as seguintes variáveis didáticas:

a) Tipos de sequências:

Decidi propor sequências regulares, sendo:

- Quatro crescentes das quais uma PA (PA ~ p. 14, 18,...);
- Uma PA decrescente (~p.18).

b) Forma de apresentação das sequências, ou registros de representação semiótica das sequências:

- Numéricas;
- Figurativas (~p.16 e constam no Caderno do Professor p.19).

c) Conjunto dos números:

- Somente envolvendo números inteiros, justificativa igual à da atividade anterior.

d) Número de termos das sequências:

Apresento, na atividade, cinco ou seis termos em todas as sequências, por considerar esses números suficientes para que o aluno possa perceber a regularidade.

Apresento também, sequências em contexto numérico e figural, por considerar importante perceber, como o aluno observa e generaliza padrões com esses dois tipos de registro de representação. Dessa forma, essa atividade é uma boa oportunidade de verificar quais conversões e tratamentos de registro de representação semiótica²⁴ os alunos fazem uso ao tentar resolvê-las.

²⁴ Termos entendidos no sentido de Duval (2003)

A seguir as estratégias de resolução esperadas para cada item em cada questão (a, b, c, d, e):

Sequência a

Pergunta 1

E₁ – O aluno percebe que a quantidade de algarismos 1 está diretamente relacionada com a posição que o valor ocupa. Logo, na 145ª posição haverá cento e quarenta e cinco algarismos 1. A resposta será expressa através de uma representação discursiva em língua natural.

E₂ – O aluno identifica que os termos da sequência são múltiplos do somatório de potências de 10. E descreve que na 145ª posição será o somatório de $10^{144} + 10^{143} + 10^{142} + \dots + 10^2 + 10^1 + 10^0$.

Pergunta 3

E₁ – O aluno expressa a fórmula do termo geral utilizando a representação discursiva em língua natural.

E₂ – O aluno expressa a fórmula do termo geral utilizando língua natural, o resultado será igual ao somatório de 10^{n-1} para n-1 maior ou igual a 0. Ou utilizando símbolos matemáticos $y = \sum_{1}^n 10^{n-1}$.

Sequência b

Pergunta 1

E₁ – O aluno identifica a sequência como a sequência dos números ímpares e encontra o 145º termo por contagem.

E₂ – O aluno percebe que a sequência tem razão (2) ou que seus termos vão de dois em dois, e calcula o 145º termo utilizando a generalização $2 \cdot 145 - 1 = 289$.

E₃ – O aluno percebe que os números são ímpares a serem somados termo a termo pelo número 2. Faz ou imagina as relações de uma tabela semelhante à apresentada abaixo²⁵:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Percebe que o 2º termo é $1+2$; o 3º termo é $(1+2)+2$ ou $1+2.2$, o 4º termo é $(1+2+2)+2$ ou $1+2.3$ e assim por diante. Utiliza a fórmula da PA para calcular o valor do 145º termo $a_{145} = 1 + 2.144 = 289$.

Pergunta 3

E₁ – O aluno identifica a sequência como a sequência dos números ímpares, percebe que é uma PA de razão positiva (2), e usa a fórmula do termo geral da PA qual seja: $a_n = 2.(n-1) + 1$.

Sequência c

Pergunta 1

E₁ – O aluno identifica a regularidade da sequência numérica: números ímpares, iniciados pelo número 1, e para obter o 2º termo, soma-se 2; para obter o terceiro termo, soma-se 4; para obter-se o 4º termo, soma-se 6; e assim por diante. Desse modo, cada termo equivale à soma de seu anterior com um múltiplo de 2. Para calcular o 45º termo, o aluno, por contagem, encontra o valor desejado, afirmando que o valor do 45º termo é 20881.

E₂ – O aluno identifica que a sequência numérica é crescente e que cada termo equivale a um somatório. Dessa forma, ele observa que o 2º termo é a soma de $1+2.1=3$; o 3º termo é a soma de $1+2.1+2.2=7$; o 4º é a soma de $1+2.1+2.2+2.3=1+2.(1+2+3)=13$. Sendo assim, o 145º termo será a soma de

²⁵ Tabelas semelhantes constam no Caderno do Professor em diferentes atividades como, por exemplo, nas páginas 13, 15, 16...

$1 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 143 + 144) = 20881$. O aluno poderá deixar essa soma apenas indicada ou efetuar o cálculo.

E₃ – O aluno percebe que os números múltiplos de 2 a serem somados aos termos da sequência estão em PA de razão 2. Faz ou imagina as relações de uma tabela semelhante à apresentada abaixo:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	+2	+2.2	+2.3	+2.4	+2.5	+2.6	+2.7	+2.8	+2.9...
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91

Percebe também que 2º termo é $1+2$; o 3º termo é $(1+2)+2.2$, o 4º termo é $(1+2+2.2)+2.3$ e assim por diante utiliza a soma da PA para calcular o valor do 145º termo $a_{145} = 144^\circ + 2.144 = 1 + (2 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + \dots + 2.143 + 2.144)$

$$a_{145} = S_{145} = 1 + \frac{2 \cdot (1 + 144) \cdot 144}{2} = 1 + 145 \cdot 144 = 20881.$$

Pergunta 3

E₁ – O aluno que já fez o item anterior percebe que o termo geral é $a_n = 1 + n \cdot (n - 1)$.

Sequência d

Pergunta 1

E₁ – O aluno identifica a sequência dos números quadrados e afirma que o 145º termo será $145^2 = 21025$.

Pergunta 3

E₁ – A fórmula do termo geral será: $a_n = n^2$.

Sequência e

Pergunta 1

E₁ – O aluno identifica que esta sequência é a sequência dos números ímpares decrescentes e para encontrar o 145º termo ele realiza uma contagem (escrita ou “de cabeça”); encontra todos os valores até o número desejado -281.

E₂– O aluno identifica a sequência como uma PA de razão -2 e calcula o 145º termo utilizando a fórmula $a_{145} = (-2).(145 - 1) + 7 = -281$.

Pergunta 2

E₁ – O aluno que no item anterior identificou a sequência como uma PA de razão (-2), calcula em que posição estará o termo -145 utilizando a fórmula $-145 = (-2).(n - 1) + 7$, e encontra que $n = 77$.

Pergunta 3

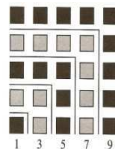
E₁ – O aluno que identificou a sequência como uma PA de razão (-2), identifica o termo geral como $a_n = (-2).(n - 1) + 7$.

Atividade 3

O objetivo desta atividade é verificar **se** e **como** o aluno encontra a soma de n termos de progressões aritméticas.

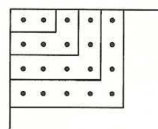
Observe as sequências:

a)



b) $3, 8/3, 7/3, 2, 5/3, \dots$

c)



d) $7, 3, -1, -5, -9, \dots$

- 1) Qual a soma dos 10 primeiros termos dessas sequências?
- 2) Qual a soma dos 100 primeiros termos dessas sequências?
- 3) Qual a fórmula geral para a soma de qualquer quantidade de termos desse tipo de sequência?

Para a escolha dos problemas são consideradas as seguintes variáveis didáticas:

- Progressões aritméticas em registro figurativo e numérico;
- Progressões aritméticas com razão positiva e negativa;
- Progressões aritméticas com razão inteira e racional;
- Das quatro PA, três constam no Caderno do Professor: a (p.16); b (p.18) e d (p. 26).

As estratégias esperadas para cada questão são as seguintes:

Questão 1

Sequência a

E₁ – O aluno percebe que esta sequência figurativa corresponde à sequência dos números ímpares e para encontrar o valor do 10º termo ele usa contagem (registrada no papel ou “de cabeça”) chegando ao número 19 que ocupa a 10ª posição. O aluno utiliza os valores encontrados dos 10 primeiros termos da sequência e efetua a soma dando como resposta, $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$.

E₂ – O aluno identifica a sequência com a sequência dos números ímpares e, implícita ou explicitamente percebe que

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
	2.2-1	2.3-1	2.4-1	...							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

para encontrar o valor do 10º termo ele utiliza a fórmula $2 \cdot 10 - 1 = 19$. O aluno calcula o valor pedido, utilizando o seguinte raciocínio se $19+1=17+3=15+5=13+7=11+9$ então a soma desses termos será igual a $S_{10} = 20 \cdot 5 = 100$.

E₃ – O aluno identifica a sequência com uma PA de razão positiva (+2), e para encontrar o valor do 10º termo ele calcula o valor utilizando a fórmula da PA $a_{10} = 2 \cdot (10 - 1) + 1 = 19$. O aluno calcula o valor pedido utilizando a fórmula da soma de uma PA, $S_{10} = \frac{(19+1) \cdot 10}{2} = 100$.

E₄ – O aluno identifica pela disposição do desenho que a sequência dada é a sequência dos números quadrados, e afirma que a soma dos 10 primeiros termos pode ser encontrada considerando a formação do desenho. Dessa forma o valor da soma pode ser calculado por $10^2 = 100$.

Sequência b

E₁ – O aluno identifica a sequência como decrescente de razão $\left(\frac{1}{3}\right)$ e afirma que para encontrar o valor da soma dos 10 primeiros termos ele encontra o valor dos termos que estão faltando $\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0$. Após encontrar os valores efetua a soma $3 + \frac{8}{3} + \frac{7}{3} + 2 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 15$.

E₂ - O aluno identifica a sequência como uma PA de razão negativa $\left(-\frac{1}{3}\right)$ e afirma que para encontrar o valor da soma dos 10 primeiros termos ele encontra o valor do 10º termo que é 0 e calcula o valor utilizando a fórmula da soma de uma PA $(0 + 3) \cdot \frac{10}{2} = 15$.

Sequência c

E₁ – O aluno identifica que esta sequência é a sequência dos números pares, encontra o valor da soma dos 10 primeiros termos após escrever os 10 primeiros números pares e efetuar a soma dando como resposta, $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110$.

E₂ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão positiva (+2), encontra o valor do 10º termo que é 20 e calcula o valor da soma utilizando a fórmula da soma de uma PA $(20 + 2) \cdot \frac{10}{2} = 110$.

E₃– O aluno identifica que a sequência pode ser generalizada, encontra a generalização $y = x \cdot (x + 1)$ e calcula o 10º termo que será $y = 10 \cdot (10 + 1), y = 110$.

Sequência d

E₁ – O aluno identifica a sequência com a sequência regular dos números ímpares e por contagem chega que o 10º termo é o número -29. Ele escreve os 10 termos da sequência, efetua a soma e dá como resposta, $7 + 3 + (-1) + (-5) + (-9) + (-13) + (-17) + (-21) + (-25) + (-29) = -110$.

E₂ – O aluno identifica a sequência e percebe a correspondência representada pela seguinte tabela:

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	-4	-4	-4	...					
7	3	-1	-5	-9	-13	-17	-21	-24	-29

e nota que o 10º termo é -29. Ele efetua a soma dos termos e dá como resposta $7 + 3 + (-1) + (-5) + (-9) + (-13) + (-17) + (-21) + (-25) + (-29) = -110$.

E₃ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão (-4), e encontra o 10º termo utilizando a fórmula $a_{10} = -4 \cdot (10 - 1) + 7, a_{10} = -29$. Calcula o valor da soma utilizando a fórmula da soma de uma PA $(-29 + 7) \cdot \frac{10}{2} = -110$.

E₄ – O aluno identifica que a sequência pode ser generalizada, encontra a generalização $y = 11 - 4x$, calcula o 10º termo que será $y = 11 - 4 \cdot (10), y = -29$. Calcula o valor da soma utilizando a fórmula da soma de uma PA $(-29 + 7) \cdot \frac{10}{2} = -110$.

Questão 2

Sequências a

E₁ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão positiva (+2), encontra o valor do 100º termo; calcula o valor utilizando a fórmula da PA $a_{100} = 2 \cdot (100 - 1) + 1 = 199$; e chega ao valor da soma, utilizando a fórmula da soma de uma PA $S_{100} = \frac{(199 + 1) \cdot 100}{2} = 10000$.

E₂ – O aluno identifica, pela disposição do desenho, que a sequência dada é a dos números quadrados, e afirma que a soma dos cem primeiros termos pode ser encontrada considerando a formação do desenho. Dessa forma o valor da soma pode ser calculado por $S_{100} = 100^2 = 10000$.

Sequência b

E₁ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão negativa $\left(-\frac{1}{3}\right)$ e afirma que para encontrar o valor da soma dos 100 primeiros termos, ele encontra o valor do 100º termo, que é $a_{100} = 3 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (100 - 1)$, $a_{100} = -30$, e calcula o valor da soma utilizando a fórmula da soma de uma PA $S_{100} = (-30 + 3) \cdot \frac{100}{2} = -1350$.

Sequência c

E₁ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão positiva (+2); encontra o valor do 100º termo, que é 200; e calcula o valor da soma utilizando a fórmula da soma de uma PA $S_{100} = (200 + 2) \cdot \frac{100}{2} = 10100$.

E₂ – O aluno identifica que a sequência pode ser generalizada; encontra a generalização $y = x \cdot (x + 1)$; e calcula o 100º termo que será $y = 100 \cdot (100 + 1)$, $y = 10100$.

Sequência d

E₁ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão negativa (-4); calcula o valor do 100º termo, que é -389; e calcula o valor da soma utilizando a fórmula da soma de uma PA $S_{100} = (-389 + 7) \cdot \frac{100}{2} = -19100$.

Questão 3

Sequência a

E₁ – O aluno considera a formação do desenho e afirma que o valor da soma de qualquer quantidade de termos pode ser calculado a partir da fórmula $a_n = n^2$.

E₂ – O aluno considera que a sequência é uma PA e afirma que o valor da soma de qualquer quantidade de termos pode ser calculado a partir da fórmula

$$S_n = \frac{(a_n + 1) \cdot n}{2}.$$

Sequência b

E₁ – O aluno considera que a sequência é uma PA e afirma que o valor da soma de qualquer quantidade de termos pode ser calculado a partir da fórmula

$$S_n = \frac{(a_n + 3).n}{2}.$$

Sequência c

E₁ – O aluno considera que a sequência é uma PA e afirma que o valor da soma de qualquer quantidade de termos pode ser calculado a partir da fórmula

$$S_n = \frac{(a_n + 2).n}{2}.$$

E₂ – O aluno considera a formação do desenho e afirma que o valor da soma de qualquer quantidade de termos pode ser calculado a partir da fórmula $y = x.(x + 1).$

Sequência d

E₁ – O aluno considera que a sequência é uma PA e afirma que o valor da soma de qualquer quantidade de termos pode ser calculado a partir da fórmula

$$S_n = \frac{(a_n + 7).n}{2}.$$

Considerações sobre a 1ª sessão

Procuro, com as atividades propostas nessa 1ª sessão da sequência didática, contemplar parte do conteúdo abordado no Caderno do Professor 1º bimestre do 1º ano do EM.

De acordo com o exposto na análise *a priori*, na atividade 1; considero que os diversos tipos de sequências adotados nos diferentes registros de representação semiótica, conforme é sugerido pelo Caderno do Professor, favorecerá a resolução das atividades pelos alunos.

Dentre as sequências propostas, a não contemplada pelo Caderno do Professor é justificada, pois beneficia a análise ao apresentar uma oportunidade de olhar sobre como os alunos observam algo novo que possui regularidade e permite generalização.

Na atividade 2, novamente, há uma mescla entre as sequências sugeridas pelo Caderno do Professor e outras que considerei como exploratórias. A ligação entre as atividades 1 e 2 dessa seção se deu nos tipos de sequências contempladas pelas atividades. Nelas, encontrei três muito semelhantes: PA crescente, PA decrescente e uma sequência crescente que permite generalização. Dessa forma, ao propor sequências semelhantes da atividade 1, procurei levar o aluno a um trabalho investigativo, no qual ele teve a oportunidade de observar, organizar seu raciocínio, fazer comparações, encontrar uma possível generalização e verificar o que foi feito.

Nesse conjunto de ações, pretendi que esse aluno vivenciasse as etapas de resolução de problemas, proposto por Polya (1945), com o objetivo de consolidar conhecimentos e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas.

Na atividade 3, propus, novamente, sequências indicadas pelo Caderno do Professor, privilegiando as sugestões deste. Ao selecioná-las, esperava que o aluno procurasse utilizar diferentes estratégias para realizar o cálculo da soma dos termos das sequências e encontrasse a fórmula geral para a soma de qualquer quantidade de termos.

Dessa forma, as chances de os alunos realizassem todas as atividades propostas nessa 1ª sessão eram imensas, uma vez que grande parte dessas sequências fazia conexão com o que foi proposto pelo Caderno do Professor conforme citado na análise *a priori*.

Descrição da aplicação do Experimento

A sessão ocorreu no dia 28 de outubro de 2008.

O local escolhido para o experimento foi a “sala suporte” da escola, cuja sala estava preparada para a realização de trabalhos em duplas, com duas carteiras agrupadas. Acrescentei um gravador a cada dupla de carteiras. O ambiente interno da sala estava tranquilo, sem interferência de outros elementos da comunidade escolar, a não ser o barulho incessante do trânsito de uma rua movimentada.

Esperei os alunos na entrada da escola no horário combinado com os quinze voluntários para a realização do experimento. Até a hora marcada haviam

chegado cinco alunos. Dei mais um tempo para ver se chegava mais alguns e, após cinco minutos, encaminhei os seis alunos presentes à sala. Já instalados, eles se organizaram em duplas de livre escolha.

Iniciei a realização do experimento às 16h30min. Estavam presentes na sala a pesquisadora e os seis alunos dos quinze que se apresentaram como voluntários do 1º ano do EM matutino.

Os alunos se organizaram em três duplas.

Logo no início, antes de entregar as atividades previstas, a pesquisadora agradeceu a presença de todos, ressaltando a importância da participação deles na pesquisa e orientou-os sobre a resolução das atividades informando que:

- Cada dupla deveria permanecer, no mínimo, 30 minutos na sala de aula;
- As conversas deveriam acontecer apenas entre cada dupla;
- As atividades deveriam ser registradas a caneta nas folhas que seriam entregues;
- Não seria permitido o uso de calculadora;
- Não deveriam apagar as tentativas de resolução, mesmo aquelas que eles julgassem erradas, pois isso era importante para meu entendimento sobre como eles pensavam.

Perguntei-lhes se a gravação das conversas durante a resolução das atividades poderia lhes incomodar, e como nenhum aluno se opôs, pedi auxílio a quem soubesse ligar o gravador enquanto distribuía as atividades.

Entreguei as três atividades dessa sessão. Enquanto as distribuía expliquei-lhes que estas formavam uma sequência crescente de dificuldades e gostaria que eles seguissem por ordem para a resolução das questões.

Às 17h20min avisei-lhes que o tempo previsto já havia encerrado e que eles tinham mais alguns minutos para a conclusão. Às 17h25min, recolhi as atividades.

Os alunos se retiraram, dizendo que retornariam no dia combinado, isto é, no dia 11 de novembro.

Descrição e Análises dos Resultados

Para a descrição, utilizei os protocolos dos sujeitos, as observações anotadas por mim durante a sessão, a transcrição das três gravações obtidas e as entrevistas realizadas para esclarecimento das dúvidas que ficaram da sessão.

As duplas participantes serão indicadas por D_1 , D_2 e D_3 .

O que segue em *itálico* faz referência à fala dos alunos.

Descrição e análise das duplas

Dupla D_1 : Fernando e Davi

Dupla de alunos do 1º ano do turno matutino, de classes diferentes, mas tendo o mesmo professor de matemática. Segundo o professor de matemática da dupla: Fernando é um aluno **esforçado** e Davi é aluno **aplicado**.

O protocolo dos alunos consta das três folhas de atividades mais duas folhas de rascunhos solicitadas e entregues a eles durante a resolução da 2ª atividade.

Além dos protocolos elaborados pela dupla, os que fizeram parte da entrevista de Davi também foram analisados.

Atividade 1

A dupla explicitou ter utilizado as seguintes estratégias:

Nas sequências numéricas “7,7,7,7,...”, “8,10,12,14,...”, “8,6,4,2,...”, “911,971,1033,1097,...”, a estratégia utilizada foi a denominada como E_1 .

Para a sequência figurativa “c”, aponto o diálogo realizado pela dupla:

Davi: - [...] Depois desse aqui (apontando para a 7ª figura) vai ser esse aqui (apontando para a 2ª figura) porque esse aqui ó... (apontando para a 1ª figura)... está indo de quatro em quatro.

Fernando: - Aham...!

Terminando por colocar que a próxima figura era o .

Para a sequência “911, 971, 1033, 1097,...”, Davi e Fernando estabeleceram uma longa conversa até obterem a resposta. Das sequências dadas, essa foi à única à qual a dupla efetuou registros em seu protocolo, antes de chegar à conclusão para dar a resposta final.

$$\begin{array}{r}
 1097 \\
 - 1033 \\
 \hline
 64
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1033 \\
 - 971 \\
 \hline
 62
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1097 \\
 - 971 \\
 \hline
 66
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1163 \\
 + 68 \\
 \hline
 1231
 \end{array}$$

Figura 3: Protocolo extraído da atividade 1, item 1e, dupla D₁

A partir da observação dos registros e da transcrição da gravação, deduzi que a dupla utilizou a estratégia denominada como E₁ para a sequência e.

Das cinco sequências, apenas as quatro primeiras eram similares ao Caderno do Professor, conforme explicado na escolha das variáveis didáticas, apesar de isso não ter sido um empecilho para a dupla descobrir a regularidade da sequência numérica “911, 971, 1033, 1097,...”.

A sequência figurativa semelhante (não igual à que foi submetida aos alunos nesta sessão), no Caderno do Professor aparece na p. 12 com um ciclo de quatro figuras; portanto, uma figura a mais do que a apresentada aos alunos. Talvez isso tenha influenciado a percepção de Davi ao afirmar que o ciclo era de quatro elementos e não de três. Outra suposição para a afirmação de Davi é que por ser o quarto elemento da sequência igual ao primeiro, ele tenha concluído que o ciclo era de quatro e não de três elementos. De qualquer forma, eles deram a resposta correta.

Atividade 2

Os alunos, provavelmente, antes mesmo de terem lido as questões da atividade, iniciaram-na encontrando o próximo termo de todas as cinco sequências existentes. Essa atitude sugere que esses alunos estejam habituados

a listas de exercícios com o mesmo enunciado. Somente após terem encontrado os “próximos termos” é que perceberam que a atividade requeria outras soluções.

Questão 1: Qual será o 145º termo de cada uma das sequências?

Para a sequência: “1, 11, 111,...” observe o que o diálogo revela:

Fernando: - Cento e quarenta e cinco. Essa aqui dá para fazer, eu acho né? (apontando para os termos da sequência) Primeira, segunda, terceira, quarta, quinta. É só fazer cento e quarenta e cinco disso (algarismo hum).

Davi: - Legal!

[...]

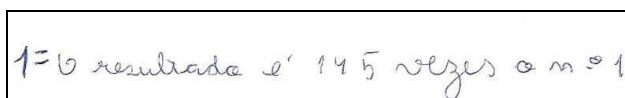
Fernando: - Faz cento e quarenta e cinco números **um**.

Davi: - Aham?

Fernando: - Faz cento e quarenta e cinco números um.

Davi: - Caraca! Cento e quarenta e cinco vai atravessar isso aqui.

Está explícito que a dupla percebeu a regularidade, associando a ordem do termo ao número da posição. A cópia do protocolo da dupla D₁, abaixo,



1 = 145 resultado e 145 vezes o n = 1

Figura 4: Protocolo extraído da atividade 2, item 1a, dupla D₁

revela a dificuldade dos alunos de expressar matematicamente o pensamento, pois é possível perceber que eles queriam dizer que a resposta a questão 1, relativa ao item **a** é (símbolo utilizado =) o número que possui 145 algarismos 1 (o resultado é 145 vezes o número 1).

Embora a ideia de generalização do padrão esteja correta, o registro de representação semiótica utilizado por eles é inadequado, pois: o sinal de igual (=) não representa uma equivalência entre expressões; os alunos empregam o termo “número” referindo-se a algarismo, e também utilizam o termo “vezes” com o sentido de repetição de algarismos, em vez de multiplicação (conforme a nomenclatura matemática). Assim, é possível afirmar que o pensamento algébrico se fez presente no raciocínio da dupla, apesar de não conseguirem expressar de maneira eficiente o esquema generalizador encontrado.

Na sequência figurativa **b** dessa atividade, os alunos expressaram verbalmente a regularidade observada, conforme segue:

Fernando: - *Tem que ser por número e aí você multiplica por 145... (E conta em voz alta)... Quatro, seis...*

Davi (Intervém contando alto): - *Um, três, cinco, sete, nove...*

Fernando (Continua): - *Sete. Aqui está indo de dois em dois, parece... quatro, cinco...*

Davi: - *Aqui não é quatro, é um (quadrado) em branco.*

Nota-se neste diálogo que Fernando está preocupado em resolver o problema se inspirando no anterior e parte do princípio que algo deve ser multiplicado por 145. Ele interpreta a regularidade contando todos os “quadrados”, a partir da 2ª figura. Mesmo quando Davi afirma que a sequência de quadrados é 1, 3, 5, 7..., pareceu-me que Fernando não percebeu ou não ouviu, pois continuou insistindo em 4, 5 (quatro, cinco). Somente quando Davi apontou os quadrados que deveriam ser considerados é que Fernando compreendeu a forma pela qual Davi estava observando a regularidade.

Em outro trecho da conversa, pode-se observar:

Davi: – *É de dois em dois. Eu não lembro a fórmula! (E voltando-se para a pesquisadora, continua:) - E quando a gente não lembra a fórmula?*

Pesquisadora: - *Faz de outro jeito!*

[...]

Fernando: - *É o dobro de cento e quarenta e cinco. Duzentos e noventa vezes dois. Será?*

Davi: - *Acho que está pedindo o desenho, não é?*

Fernando: - *Cento e quarenta e cinco vezes dois é que vai dar duzentos e noventa. É... Cento e quarenta e cinco vezes dois. Será que é?*

Davi: - *Esse aqui? Dá duzentos e noventa?*

Fernando: - *Dá duzentos e noventa. Porque (apontando a sequência) está aumentando de dois em dois, não é? Vezes dois.*

Em relação à observação de Davi que não se lembrava da fórmula durante a entrevista que concedeu à pesquisadora, esse assunto ficou mais claro quando o aluno, após indicar que o próximo termo da sequência era o número 11 e que o vigésimo termo era o número 39, explicou que chegou a esses resultados por contagem. No entanto, quando foi argüido pela pesquisadora “qual seria o centésimo termo?” Davi respondeu:

Davi: - *É...! Complica! É que eu não lembro como é direito a fórmula pra fazer.*

Pesquisadora: - *Você consegue bolar uma fórmula?*

Davi: - *Seria, por exemplo: o valor é um, mais dois, daí, o resultado mais dois, seria mais ou menos assim, só que...*

(após uma pausa)

Pesquisadora: - *Mas se eu quisesse a posição número cem?*

Davi: - *É, uma fórmula. $x+2=y$. Acho que seria essa mesma a fórmula $x+2=y$. O xis seria o meu primeiro termo, mais dois porque está aumentando e o ípsilon é o meu resultado.*

Pesquisadora: *Mas se eu fizer $x+2=y$ quem que é o xis?*

Davi: - *O xis seria a posição. Por exemplo: a quinta posição, aqui é 9, $9+2$ o ípsilon seria o resultado. O problema é saber o nonagésimo, o noventa e nove. Agora pra fazer uma fórmula assim...*

Davi observou a regularidade, isto é, que a sequência evoluía de 2 em 2, sem expressar a nomenclatura adequada, as Progressões, isto é, que 2 é a razão da progressão aritmética dada.

É possível perceber, também, que ele detectou que há uma variável dependente e uma independente, apresentando como uma possível fórmula de generalização, uma relação de função. Porém, essa fórmula não apresenta eficácia para encontrar os termos da sequência por necessitar do valor do termo anterior.

Quando foi apresentado ao aluno o protocolo do que havia feito na 1ª sessão, Davi sugeriu uma nova fórmula: $x = 2^2$ vezes a posição, e ao ser instigado a verificar a validade da fórmula para a 20ª posição acrescentou:

Davi: - *Xis igual a dois vezes dois, vezes (o número a ser usado) seria vinte, que seria quatro vezes vinte. Oitenta?*

(A partir do resultado encontrado Davi conclui:) - Não porque o valor é ímpar, de número ímpar. (e completa) Não sei.

Na fala do aluno, se percebe que ele chega à conclusão de que a fórmula encontrada não é adequada, pois o resultado obtido é um número par e a sequência só apresenta números ímpares. Novamente, o aluno detectou mais uma característica relevante do padrão, demonstrando que sua observação da regularidade inclui fragmentos de diferentes habilidades descritas por Frobisher e Threlfall (1999).

Para a sequência figurativa **d**, a estratégia utilizada pela dupla foi a denominada como E_1 . É importante ressaltar que cada aluno percebeu a sequência de uma maneira diferente de seu parceiro.

Observe trechos do diálogo:

Davi: - Três, cinco, sete, nove, esta indo em sequência dos números ímpares.

[...]

Fernando: - Ah, acho que eu já sei: um, dois aqui oh! Um, dois. Um, dois, três. Aqui vai ser cento e quarenta e cinco, cento e quarenta e cinco.

Davi: - Isso. Foi o que eu falei aqui.

Fernando: - Não, mais, é só multiplicar também por dois. Cento e quarenta e cinco, cento e quarenta e cinco, cento e quarenta e cinco, cento e quarenta e cinco. Vai dar um número gigante. Cento e quarenta e cinco vezes cento e quarenta e cinco. Acho que é esse o resultado. (E começam a efetuar os cálculos).

Davi percebeu que a diferença entre os termos eram os números ímpares, e Fernando percebeu o todo: os números quadrados.

The image shows handwritten mathematical work. At the top, the numbers 1, 4, 9, 16, 25 are written in a vertical column. Below them, the sum 20825 is calculated. There are some corrections and a checkmark. The work is as follows:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 4 \\
 9 \\
 16 \\
 25 \\
 \hline
 5604 \checkmark \\
 145 + \\
 \hline
 20825
 \end{array}$$

Figura 5: Protocolo extraído da atividade 2, item 1b, dupla D_1

No registro apresentado pela dupla, notei erros no cálculo, mas ficou evidente que conseguiram chegar a um esquema de generalização e, com ele são capazes de encontrar o valor de qualquer termo da sequência dada.

Na sequência numérica “7, 5, 3, 1, -1, -3,...” a dupla deixou expressa uma tentativa de resolução, encontrando termo a termo. Essa estratégia foi abandonada, mas, apesar de incompleta, se enquadra na E_1 .

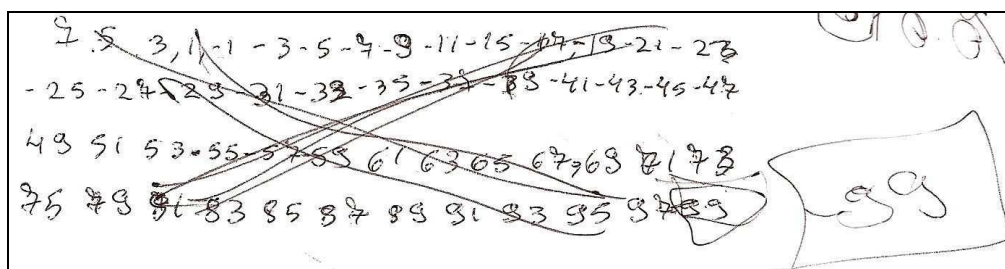


Figura 6: Protocolo extraído da atividade 2, item 1e, dupla D₁

Das cinco sequências propostas, duas delas eram similares ao Caderno do Professor e outra constava no mesmo.

A lembrança da existência de uma fórmula não impediu a dupla de continuar as resoluções. As estratégias utilizadas foram previstas na análise *a priori*.

As sequências em contexto figural proporcionaram a articulação dos registros, conforme previsto na análise *a priori*. Nelas, os alunos apresentaram certa compreensão matemática²⁶, pois conseguiram coordenar, pelo menos, dois registros de representação semiótica. Essa compreensão foi contemplada quando a dupla explicitou que uma mesma sequência poderia ser analisada a partir da diferença entre os termos, formando a sequências dos números ímpares, ou ser analisada como um todo, formando a sequência dos números quadrados.

A dupla considerou a atividade concluída antes de responderem a questão 1 da sequência “1, 3, 7, 13, 21, 31,...” e as questões 2 e 3 da mesma.

Esse dado demonstra que a atividade apresentava muitas questões e que os alunos ao responderem a primeira de cada sequência consideraram a atividade toda como concluída.

Atividade 3

A dupla explicitou ter utilizado mais de uma estratégia para resolver a sequência figurativa **a**.

²⁶ Termo entendido no sentido de Duval (2003)

A partir da análise do primeiro trecho do diálogo da resolução dessa sequência, obtive a informação de que a estratégia utilizada foi denominada como E₄, conforme demonstra o diálogo a seguir:

Davi: - Então, qual que é a posição? Qual que é a soma? Qual que é o primeiro termo? Seria esse aqui, não seria? Então vai aumentando o quadrado, certo?

Fernando: - Certo.

Davi: - Então precisa aumentar dez pra cima e dez pro lado. Seria cem.

Fernando: - Não, não vai aumentar tudo isso não! Vai aumentar um só. (após compreender o que o colega disse, reformula) - Ah é!

Davi: - É a décima posição! Dez pra cá e dez pra cá. Dez vezes dez dá cem.

Porém observando os registros e outro trecho desse mesmo diálogo, não só encontrei a multiplicação como também a soma dos números ímpares; estratégia denominada como E₁.

Figuras 7 e 8: Protocolos extraídos da atividade 3, item 1a, dupla D₁

Figura 9: Protocolo extraído da atividade 3, item 1a, dupla D₁

As diferentes estratégias utilizadas pela dupla para encontrar a resposta correta causaram uma grande agitação, pois de acordo com o diálogo, eles sabiam que a resposta correta era 100, porém, quando efetuaram a soma dos dez primeiros números ímpares, outros valores foram encontrados:

Davi: - *Um, três, cinco, sete, nove,(quinta posição), onze, treze, quinze, dezessete, dezenove.*

Fernando: - *Isso, daqui é fácil.*

Davi: - *Cento e oito.*

Fernando: - *Quanto deu o seu?*

Davi: - *Cento e oito.*

Fernando: - *Você somou tudo isso? (Não confiando no valor encontrado, realizou a soma novamente). Dá cento e dois.*

Davi: *tem que dar cem, tem que dar cem. Está errado.*

A dupla, apesar de estar convicta da generalização realizada e de ser 100 a resposta correta para a questão, quis efetuar a soma termo a termo para dar a resposta. Essa atitude demonstra que os alunos viram a necessidade de expressar a resposta utilizando uma “soma” conforme solicitado no enunciado da questão, não percebendo que a generalização realizada satisfazia o enunciado dado.

Essa dupla não deixou traços de que tentou realizar as demais questões.

Dupla D2: Daiane e Alice

Dupla de alunos do 1º ano do EM do período matutino, colegas da mesma classe. Segundo o professor de matemática, Alice é uma aluna aplicada e Daiane é uma aluna esforçada, pois durante o ano foi superando suas dificuldades e se aprimorando.

O protocolo dessa dupla consta das três folhas de atividade, mais uma folha de rascunho solicitada e entregue a dupla ao tentarem resolver a atividade 2.

Além dos protocolos elaborados pela dupla na sessão, os protocolos de cada entrevista que realizei com as alunas dessa dupla, separadamente, e as correspondentes audiografações foram levados em consideração em minhas análises.

Atividade 1

Essa dupla deixou explícita em seu protocolo que a estratégia utilizada em todas as sequências desta foi a denominada E_1 .

Convêm ressaltar que a dupla, ao responder cada item, fez dois tipos de registros: o numérico e o multifuncional em linguagem natural. Corresponderam às expectativas de encontrar o próximo termo e deixaram claro, em seus registros, as estratégias utilizadas durante a resolução.

A única sequência que não apresentou registro em linguagem natural foi à sequência numérica “911, 971, 1033, 1097,...”, na qual a dupla utilizou um raciocínio diferente das demais sequências, resultando um registro numérico mais elaborado necessário para a busca da regularidade. Observe os protocolos da resolução e da resposta:

$$\begin{array}{r} 971 \\ - 911 \\ \hline 060 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1033 \\ - 971 \\ \hline 062 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1097 \\ - 1033 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1163 \\ + 68 \\ \hline 1231 \end{array}$$

Figura10: Protocolo extraído da atividade 1, item 1d, dupla D₂

e) 1097, 1163, 1231 ~~1000~~

Figura11: Protocolo extraído da atividade 1, item 1d, dupla D₂

Essa dupla não demonstrou dificuldades em encontrar o próximo termo das sequências dessa atividade, e apresentou as respostas usando dois tipos de registro, o que facilitou a compreensão do raciocínio utilizado para responder a questão.

Atividade 2

No protocolo dessa atividade, a dupla registrou o próximo termo das duas primeiras sequências antes de encontrar as respostas para as questões propostas nessa atividade.

Encontrei também diferentes registros que apontam as diferentes tentativas de resolução da sequência a. Apesar de a resposta correta ter sido encontrada pela aluna que, segundo a professora, é esforçada (Daiane); esta não foi aceita

pela aluna considerada boa (Alice). A seguir, um trecho do diálogo que evidencia este fato:

Alice: - Qual a fórmula do termo geral de cada uma dessas sequências? Aumenta dez, aumenta cem, aumenta mil depois aumenta...

Daiane: - Eu acho que você deve colocar cento e quarenta e cinco “um” e pronto.

[...]

Daiane: - O primeiro termo aumentou um; o segundo termo aumentou dois; o terceiro, três; o quarto, quatro; o quinto, cinco. Então cento e quarenta e cinco vai dar cento e quarenta e cinco “um”. Só que daí você não coloca cento e quarenta e cinco “um”.

(Tentando generalizar diz:) - Você coloca “um” elevado a cento e quarenta e cinco.

Alice: - Daiane criatura! Daí vai ficar um vezes cento e quarenta e cinco, entendeu? Aí vai ficar um vezes um, vezes um, vezes um, vezes um. Não é isso que eles estão pedindo!

Daiane: - Um vezes um “um, um vezes um “um”, um vezes um “um”, um, um, um, o resultado é cento e onze.

Alice: - Um mais um, mais um, mais um. Como é que vai ser cento e quarenta e cinco lá na frente se aqui já deu onze mil cento e onze.

Daiane: - Não, mas é cento e quarenta e cinco “um”, entendeu?

Alice: - Está louca?! Eu não vou por isso aqui, não.

Daiane: - Como que você chegou naquele negócio?

Alice: - Não, deve ter outro jeito! Ah, não, Daiane! Ai como eu sou...! Não aprendi isso direito.

A busca por uma fórmula comprometeu toda a resolução da atividade, pois as alunas fixaram a atenção na obtenção da fórmula e não conseguiram procurar outra forma para resolver este item. Esse comportamento não propiciou à dupla, tempo necessário para observar os demais itens que constava na atividade.

Na entrevista dada à pesquisadora, essas alunas, em momentos diferentes, puderam analisar duas sequências inseridas nesta atividade que não puderam ser observadas na primeira sessão, a sequência **b** e a sequência **e**.

Para a sequência figurativa **b**, as alunas encontraram o próximo termo e o 20º, desenhando a quantidade de quadradinhos correspondentes.

Quando Daiane foi questionada se haveria um jeito mais fácil de encontrar os termos da sequência, ela fez uma representação figural tentando responder como ficaria o 100º termo, empregando o mesmo registro de representação

semiótica utilizado pela sequência. Observe os registros apresentados pela aluna na entrevista:

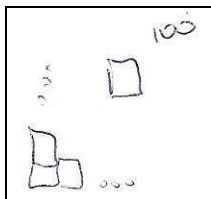


Figura 12: Protocolo extraído da atividade da aluna Daiane

Observando o trecho do diálogo em que questiono sobre como ficaria o 100º termo da sequência, a representação acima tornou-se mais clara.

Daiane: - *Tipo se eu colocasse assim (Desenhou um quadradinho) e cem (escreveu o número) daria ou não?* (Questionou à pesquisadora e tentou justificar o desenho e o número utilizado completando:) - *Que quer dizer que é cem quadradinhos.*

Pesquisadora: - *Você acha que assim responde à pergunta?*

Daiane: - *Eu acho. Ou não?*

Pesquisadora: - *Não sei, eu que estou perguntando.*

Daiane: - *Ou tipo, assim, assim, assim...* (Desenhou os três quadradinhos) *Aqui e aqui.* (Acrescentou as reticências em cima e ao lado dos quadradinhos).

Pesquisadora: - *Mas aí respondeu que é o centésimo termo?*

Daiane: - *Não. Eu acho que assim responderia.* (Voltou a apontar o primeiro desenho seguido do número).

É possível perceber, tanto na fala da aluna quanto no protocolo apresentado, que ela não fez a conversão de registro de representação semiótica, que, segundo Duval (2003), é essencial para a compreensão em matemática. De acordo com o autor, a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação semiótica e a capacidade de mudar de registro é que auxilia a compreensão matemática.

Sua colega Alice, por sua vez, quando argüida se haveria outro jeito mais fácil de encontrar os termos da sequência, respondeu:

Alice: - *Tem. Eu sei que tem uma conta. Mais eu não lembro como é que faz a conta.*

A lembrança da existência de uma conta (fórmula) é mencionada pela aluna, mas mesmo assim, insisto novamente:

Pesquisadora: - *Esquece a fórmula. Como poderia ser esse outro jeito? Tenta fazer uma fórmula, você.*

Alice: - *Eu não sei.*

Pesquisadora: - *Pensa assim: vamos deixar um pouquinho de lado a fórmula! E se fosse à posição número cem?*

Alice: - *Não iria dar para desenhar.* (A aluna apresenta uma conclusão adequada.)

Pesquisadora: - *Tudo bem. Será que não tem como descobrir qual seria a centésima figura?*

Alice: - *Tem, porque eu sei como é que é que está aqui.* (A aluna então aponta para o formato da sequência.)

Pesquisadora: - *E como é que é?*

Alice: - *A gente sabe que aumenta de acordo com a sequência da numeração.*

Pesquisadora: - *Então... e o centésimo? Como é que ficaria, então?*

Alice: - *Vai ficar cem e cem.*

Pesquisadora: - *O total vai ser cem e cem?*

Alice: - *Não! Daria noventa e nove mais cem.*

Ao final desse trecho, a aluna, após ser motivada a revisar o que havia dito, finalmente, aparenta dar indícios de uma compreensão. De acordo com Polya (1945), é a revisão da solução obtida à etapa mais importante da resolução de um problema, pois ela permite reconsiderar e reexaminar o resultado.

A partir desse fato, ao perguntar a aluna como ela escreveria isso (relembrando que se tratava da 100^a posição), ela ficou muda. Após alguns instantes, questionei com relação à 145^a posição, e Alice respondeu:

Alice: - *Eu faria 145 vezes dois menos “um”...*

A aluna, ao ser motivada a revisar a solução obtida, pôde aprimorar sua resolução, encontrando uma nova forma de expressar o mesmo resultado utilizando operações diferentes, porém equivalentes. É uma revisão que, de acordo com Polya (1945), favorece a consolidação do conhecimento e o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas, sendo esta uma das vantagens de assim proceder.

Alice, ao ser interrogada sobre a enésima posição, aparentou estranhar, demonstrando insegurança do que havia dito, em como encontrar o termo solicitado:

Pesquisadora: - Pra eu achar uma posição “n” qualquer como é que ficaria?

Alice: - Como assim?

Pesquisadora: - Ó, aqui é a posição um, posição dois, três, e assim por diante. Eu perguntei pra você na posição vinte. Você me disse o quê?

(Alice aponta para o desenho no protocolo e a pesquisadora completa:)

- Que era esse desenho que você fez. Na posição cem, o que você falou pra mim?

Alice: - Que iria ficar assim. (Apontando novamente para o protocolo.)

Pesquisadora: - E se fosse, na posição 145ª como que ficaria?

(Alice aponta novamente para o seu protocolo)

Pesquisadora: - Isso na posição cento e quarenta e cinco. E se fosse numa posição qualquer?

Alice: - Sei lá! Xis vezes dois menos um.

No protocolo da aluna é possível verificar os registros utilizados por ela durante a entrevista para representar a 100ª posição, a posição 145ª e a fórmula para uma posição qualquer.

$$100 \cdot 2 - 1$$

$$145 \cdot 2 - 1$$

$$n \cdot 2 - 1$$

Figura 13: Protocolo extraído da atividade da aluna Alice

Na análise global do diálogo é possível perceber que a aluna não está convicta da generalização que fez. Sua insegurança demonstrada ao dizer “sei lá!”, evidencia que ela teve pouco ou nenhum contato com atividades onde incluía a construção de algo, mas quais ela tivesse a oportunidade de encontrar uma generalização qualquer que correspondesse a resposta desejada.

Nesse caso é possível perceber a tensão existente entre o pensamento algébrico e a notação algébrica apontada por Zazkis e Liljedahl (2002), pois após a aluna esboçar a expressão algébrica correta, ela não acredita que aquela expressão possa ser a resposta.

Para a sequência “7, 5, 3, 1, -1, -3,...”, que também constava no roteiro das entrevistas, as duas alunas encontraram os dois próximos termos “-5, -7” sem

apresentarem dificuldades. Porém, quando questionadas sobre os próximos termos, Daiane citou que a sequência retornaria novamente em 7, apresentando uma compreensão cíclica da sequência (estratégia não prevista para essa atividade).

Quando questionada sobre a soma dos vinte primeiros termos, Daiane, após realizar uma breve análise do seu protocolo (que demonstrava uma sequência cíclica), respondeu: “Zero”. Essa resposta dada demonstra que ela percebeu que para cada número havia o seu oposto; porém, não levou em consideração que o ciclo que ela apresentou havia oito termos, o que impossibilitaria que o resultado da soma de vinte termos fosse zero.

Alice, por sua vez, percebeu que para se encontrar os termos da sequência bastava subtrair dois, prosseguindo a resolução da sequência sem dificuldades.

Alice, ao ser arguida sobre a soma dos vinte primeiros termos da sequência, fez a seguinte consideração:

Alice: [...] - *Eu sei que tem a ver com menos dois. Nossa! Não sei, não lembro.* (após refletir um pouco questiona:) *O que você quer é a soma?*
Pesquisadora: - *É a soma dos 20 primeiros números dessa sequência.*
Alice: - *Somando todos vai dar um resultado, é isso?*
Pesquisadora: - *É. Somando todos qual é o resultado?*
Alice: - *Mas aqui você não quer uma posição certa?*
Pesquisadora: - *Eu quero até a vinte.*
Alice: - *Não sei. Não sei.* (E após uma tentativa de formulação usando os valores que sabia perguntou:) - *É isso?*

Alice observou a regularidade apresentada na sequência, isto é, que o valor -2 tinha relação com a sequência dada, porém, não evidenciou que esse valor correspondia à razão da progressão aritmética dada.

Atividade 3

Na folha dessa atividade foram encontrados registros, mas eles faziam apenas alusão às possíveis comparações que a dupla fez entre as sequências ali apresentadas.

Dupla D₃: Glória e Bete

Dupla do 1º ano do EM do período matutino, colegas da mesma classe. Segundo o professor de matemática, ambas são boas.

O protocolo analisado consta de três folhas de atividades, mais uma folha de rascunho.

Além dos protocolos elaborados pela dupla na sessão, os protocolos de cada entrevista que realizei com as alunas dessa dupla, separadamente, e as correspondentes audiografações foram levados em consideração em minhas análises.

Atividade 1

A dupla explicitou ter utilizado nas sequências numéricas “7,7,7,7,...”, “8,10,12,14,...”, “911,971,1033,1097,...” a estratégia denominada como E₁. Para a sequência “8,6,4,2,0,-2,...” a estratégia utilizada foi a denominada como E₂.

Para a sequência figurativa “c” a dupla não deixou indícios muito claros sobre a estratégia utilizada. De acordo com o diálogo, acredito que a estratégia E₂ tenha sido utilizada. Observe:

Glória: - *Tem algum problema aí.*

Bete: - *Tem aquele negocio de dividi, não lembra?*

Glória: - *Do quê?*

Bete: - *De dividi ele por um número. Lembra quando a gente fez na sala, do desenhinho.*

Glória: - *A gente tem que dividir ele por quanto?*

Bete: - *Tem uma fórmula pra poder fazer isso. Tem que dividi por alguma coisa. Lembra que tem que dividi?*

Essa estratégia explicitada é sugerida pelo Caderno do Professor, p.12 e, de acordo com a transcrição do diálogo, foi trabalhado em sala pelo professor.

A ordem que a dupla resolveu os itens foi: “7, 7, 7, 7,...”, “8, 10, 12, 14,...”, “8, 6, 4, 2, 0, -2,...”, figurativa “c”, “911, 971, 1033, 1097,...”, o que revelou que os membros da dupla se sentiram mais à vontade ou mais familiarizados com as três progressões aritméticas: a sequência “7, 7, 7, 7,...” uma PA constante; a

sequência “8, 10, 12, 14,...” uma PA crescente e a sequência “8, 6, 4, 2, 0, -2,...” uma PA decrescente.

Um momento que chamou a atenção na resolução dessa atividade foi na sequência numérica “8, 6, 4, 2, 0, -2,...”, quando a dupla utilizou como recurso a reta numerada para justificar o resultado encontrado. Observe um trecho do diálogo e parte do protocolo:

Glória: - Agora é “menos” seis. É tipo de uma reta aqui, né? Como se fosse uma reta.

Bete: - Oito, seis. Vamos fazer aqui mesmo!

Glória: - É uma reta que está numerada. Pra cá negativo; pra cá positivo. Daí dá zero.

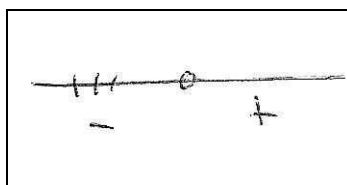


Figura 14: Protocolo extraído da atividade 1, item 1d, dupla D₃

A dupla, ao apontar a reta numerada para elucidar suas conclusões e justificar o valor negativo apresentado na resposta, apresenta em sua resolução um aspecto que ultrapassou as expectativas previstas em nossas estratégias.

Atividade 2

Para a questão 1: “Qual será o 145º termo de cada uma das sequências?”, apresento as estratégias de acordo com a ordem de resolução explicitada pela dupla.

Para as sequências “1, 11, 111, 1111,...” e figurativa **d**, a dupla utilizou a estratégia denominada como E₁.

A dupla não apresentou dificuldades em expressar sua resposta em linguagem natural para a primeira sequência dada, conforme protocolo.

Figura 15: Protocolo extraído da atividade 2, item 1a, dupla D₃

Novamente, percebe-se a utilização do termo “número” em vez de “algarismo”, o que vem confirmar a dificuldade dos alunos com a nomenclatura matemática. Embora demonstrem tal dificuldade, é possível afirmar que essa dupla alcançou um esquema generalizador, cujo pensamento algébrico se fez presente.

Na sequência figurativa **d**, a dupla (mesmo considerando o valor encontrado “grande”) apresentava certeza de que este valor estava correto. Utilizaram um processo de raciocínio convincente, onde é possível perceber o pensamento algébrico utilizado, que pode ser verificado no diálogo:

Glória: - *Esse outro aqui, eu já sei. Aqui é um vezes um “um”, dois vezes dois “quatro”, três vezes três “nove”, quatro vezes quatro “dezesesseis”, cinco vezes cinco “vinte e cinco”. Então, eu tenho que fazer cento e quarenta e cinco vezes cento e quarenta e cinco, que daria o tanto de quadradinhos.*
[...]
Bete: - *Que horror!!!! Deu um número muito grande!*
(Glória continua em voz alta a realizar sua conta:) - *Com dois, dezoito,... catorze, quinze vinte.*
Bete: - *Deu tudo isso aqui: vinte e um mil e vinte e cinco.*
Glória: - *Então, aqui é vinte e um mil e vinte e cinco.*
Bete: - *Calma aí! Não é assim, não!*
Glória: - *Oh! Um vezes um “um”, dois vezes dois “quatro”, três vezes três “nove”, quatro vezes quatro “dezesesseis”, então cento e quarenta e cinco vezes cento e quarenta e cinco “vinte e um mil e vinte e cinco”.*

Para a sequência figurativa **b**, encontrei diversas tentativas de resolução, em diferentes trechos do diálogo.

Na primeira tentativa, é possível perceber que uma das alunas ao tentar observar a sequência dada, citando posição por posição, logo é desmotivada, enquanto que a outra tenta empregar o método recursivo. Isso demonstra que essas alunas não estão habituadas ao trabalho em dupla, no qual é possível analisar todas as ideias propostas e verificar qual é a mais adequada para cada uma das situações.

Glória: - Um mais dois... Ah aprendi. Um mais dois “três”, três mais dois “cinco”, cinco mais dois “sete”, sete mais dois “nove”.

Bete: - Então é. Aqui é posição “um”, a posição “dois”, a posição “três”.

Glória: - Aqui não tem nada a ver a posição com o resultado. (E continua a contar:) Nove mais dois “onze”. Agora vamos contando até cento e quarenta e cinco.

Bete: - Ah, tá!

A partir desse diálogo, ambas começaram a encontrar todos os termos da sequência, porém, se desanimam quando chegaram ao 40º.

Em relação à observação de Bete sobre as posições “um”, “dois”, “três” citadas durante a resolução, na entrevista que concedeu à pesquisadora, esse assunto fica mais claro quando a aluna, ao observar o protocolo abaixo da atividade realizada,

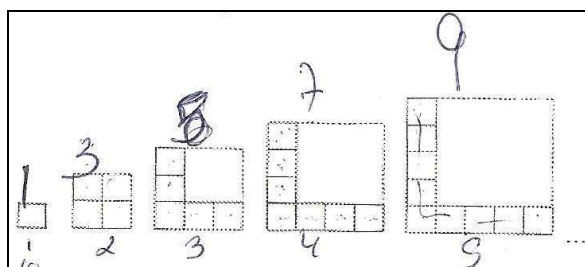


Figura 16: Protocolo extraído da atividade 2, item 1b, dupla D₃

relata:

Bete: Quando a professora tinha passado (atividades envolvendo padrões), ela passou um esquema, depois quando eu cheguei em casa eu olhei no caderno, só que eu ainda não lembro. A gente tentou (justificando as notações presentes no protocolo) preencher que seria, um, primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto.

Este relato deixa claro que o professor apresentou aos seus alunos um esquema para resolver esse tipo de atividade e, a eles, restaram apenas aplicá-lo em outras situações propostas, o que evidencia que esses alunos tiveram pouco ou nenhum contato com atividades onde incluía a construção de algo em que pudessem encontrar uma generalização que correspondesse à resposta desejada.

Em outra tentativa de resolução, a dupla lembrou da existência de uma conta (fórmula) para realizar a resolução.

Bete: - Tem conta pra fazer, cara! Mas eu não lembro a conta.

Glória: - Pra gente saber o resultado tem que fazer o resultado de cento e quarenta e quatro dividido por dois.

Bete: - Direto? Ou...?

Glória: - Cento e quarenta e cinco vezes dois, legal, né? Agora tem que fazer: cento e quarenta e cinco vezes dois dá... (Após uma pausa responde:) "duzentos e noventa". Cento e quarenta e cinco vezes dois dá "duzentos e noventa". Eu tenho duzentos e noventa mais dois aqui.

Numa terceira tentativa de resolução, a dupla nota que todos os termos da sequência são ímpares:

Glória: - Só tem ímpar, só tem ímpar no meio.[...]

Porém, essa informação não foi levada em consideração pela dupla que apresentou em seu protocolo a seguinte tentativa de resolução:

Figura 17: Protocolo extraído da atividade 2, item 1b, dupla D₃

A partir dos dados obtidos é possível perceber que a dupla confundiu o número da posição com o termo que ocupa tal posição. Tal fato também foi observado por Carvalho (2008) em uma de suas duplas pesquisadas. Esse autor também cita que o fato de se confundir os papéis das variáveis dependentes e independentes foi observado também por Becker e Rivera (2005, apud Carvalho 2008) em suas pesquisas.

Em relação à existência de uma conta ou fórmula, Glória (na entrevista que concedeu à pesquisadora) após indicar que o próximo termo da sequência era 11 e que o 20º termo era o número 39 (respostas dadas através do registro figural), completou dizendo: "vinte e vinte", apontando no registro que apresentava os vinte quadradinhos da vertical e os vinte, na horizontal. Quando questionada sobre a existência de um jeito mais fácil de fazer, Glória respondeu:

Glória: - *Fazer uma fórmula?*

Pesquisadora: - *Não sei.*

Glória: - *Se fizer uma fórmula assim, é. Por exemplo: o número achado mais um, que daí dá para fazer.*

A partir do questionamento da pesquisadora, a aluna empenhou-se a procurar uma fórmula que lhe auxiliasse a encontrar qualquer termo da sequência.

Observe:

Pesquisadora: - *Se eu quisesse o vigésimo, como é que ficaria?*

Glória: - *Dezenove mais um, daí fica os vinte quadradinhos, ou, uma vez um número.*

Pesquisadora: - *E qual que é a quantidade de quadradinhos?*

Glória: - *Tem vinte aqui e... Então, na verdade, são trinta e nove quadradinhos. Eu tenho que fazer, por exemplo: (após uma pausa) Ah, tá! Entendi! Eu posso fazer vinte, seria quarenta. Então eu posso fazer quarenta menos um e acho o resultado.*

Pesquisadora: - *E a centésima posição?*

Glória: *seriam duzentos menos um, cento e noventa e nove.*

Como se pode perceber, a aluna conseguiu explicar oralmente a regra para essa sequência que, de acordo com Orton e Orton (1999), esse fato ocorre com uma quantidade maior de alunos do que com aqueles que podem escrever uma explicação.

Ao prosseguir com os questionamentos, a pesquisadora observou outros dados:

Pesquisadora: - E para qualquer número, para qualquer posição, um “n”, uma posição “n” qualquer? Como é que eu faria?

Glória: - Acho que é, um vezes a posição que quer achar. (Após a pesquisadora demonstrar que estava acompanhando o seu raciocínio, a aluna continua:) - Um vezes, vamos por “n”, daí dá o resultado. Põe “n” no resultado? Pode ser ou não? Tem que ser outra letra?

Pesquisadora: - Não sei. Faz aí depois a gente vê.

Glória: - O resultado menos um.

Pesquisadora: - Então você acha que fazendo isso, dá certo?

Glória: - Aham!

Pesquisadora: - Então se fosse cem, ficaria como?

Glória: - Ficaria um vezes cem igual a... Ah, não dá certo. Tem que ser dois aqui, então. É igual a duzentos menos um cento e noventa e nove.

Pesquisadora: - E se eu quisesse a posição cento e quarenta e cinco?

Glória: - Duas vezes cento e quarenta e cinco dá trezentos e noventa. Ah, daí eu já não sei.

Pesquisadora: - Se fizer do mesmo jeito que você estava fazendo aí não dá?

Glória: - Eu acho que dá sim, daí vai seguir a fórmula.

Pesquisadora: - Então daria quanto?

Glória: - Trezentos e oitenta e nove quadradinhos.

A aluna Glória conseguiu generalizar o padrão dado, conforme pode ser observado no diálogo entre a pesquisadora e a aluna, entretanto, ao analisar seu protocolo apresentado abaixo, parte integrante da entrevista, é possível perceber que a aluna não apresenta nenhuma intimidade com a construção de uma escrita algébrica, o que, mais uma vez, demonstra que esses alunos não tiveram a oportunidade de encontrar uma fórmula que generalizasse o padrão.

Handwritten mathematical protocol by Glória:

$$\begin{array}{l}
 1 \cdot N = N - 1 \\
 1 \cdot 100 = 100 - 1 \\
 2 \cdot 145 = 390 - 1 \\
 \quad 389
 \end{array}$$

Figura 18: Protocolo extraído da atividade da aluna Glória

Outro dado a ser observado é que, para essa aluna, as letras iguais não devem, necessariamente, corresponder ao mesmo valor.

Num primeiro momento, a aluna ao dizer “um vezes ‘n’ dá o resultado e só depois faz o resultado menos um”, vem demonstrar, passo a passo, todo o raciocínio utilizado no procedimento a ser feito. Porém, quando ela escrever isso

em seu protocolo não percebe que, na escrita, alguns passos estão subentendidos.

Assim, Glória chegou a um esquema generalizador, após ser motivada a revisar o que havia escrito que, de acordo com Polya (1945), é a etapa mais importante da resolução de um problema, pois propicia a reconsiderar e reexaminar o resultado com o objetivo de consolidar o conhecimento e aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas.

Com relação à sequência “7, 5, 3, 1, -1, -3...” que foi considerada pela dupla como cíclica (conforme observação da pesquisadora na hora da aplicação durante a entrevista), novamente as duas alunas, em momentos diferentes, consideraram a sequência cíclica afirmando que os próximos termos seriam “-5 e -7” e a sequência para Glória, retornaria em 7 e, para Bete, retornaria em -1. Essa dificuldade apresentada pela dupla em observar sequências decrescentes, cuja razão corresponde a um número inteiro negativo, também foi observado por Carvalho (2008) e Archilia (2008).

Para essa sequência, na entrevista, acrescentei a pergunta sobre a soma dos vinte primeiros termos. Levando em consideração que Glória considerou essa sequência como cíclica, ela respondeu:

Glória: - *Ah, eu acho que iria dar uhm.*

Pesquisadora: - *Uhm? Mas o que você fez pra chegar a esse uhm?*

Glória: - *Porque é tudo repetitivo. Esse menos esse (apontando para os valores 7 e -7), vai dar sempre um; esse com esse (apontando para os valores 5 e -5); a sequência sempre dá um, então seria um.*

Como se pode notar a aluna apresentou uma observação válida para uma sequência cíclica quando disse que “é tudo repetitivo”, porém, não conseguiu encontrar uma resposta satisfatória para a questão dada.

2ª sessão

Análise *a priori*

A análise *a posteriori* da 1ª sessão indicou a necessidade de uma revisão das atividades previstas para a 2ª. Assim, diminuí o número de atividades a serem realizadas pelos alunos e retomei o assunto tratado em atividades não realizadas ou não concluídas pelos alunos na 1ª sessão.

O objetivo da 2ª sessão foi de retomar alguns aspectos que não foram atingidos na 1ª e introduzir questões sobre as Progressões Geométricas. Assim, essa sessão apresentava duas atividades com o objetivo de contemplar a fórmula do termo geral e a soma dos termos tanto da PA quanto da PG e oportunizar um tempo maior, que julguei necessário para dar aos alunos condições de pensar com maior profundidade sobre tais sequências - objeto de estudo desse instrumento.

Atividade 1

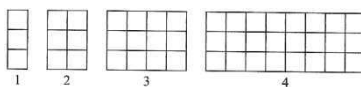
O objetivo desta atividade é de verificar se os alunos conseguem encontrar o próximo termo, tanto de progressões aritméticas quanto geométricas, e obter-se o termo genérico de cada uma delas.

Parte A.

Observe as sequências:

a) 1, - 2, 4, - 8, 16, ...

b)



c) 68, 136, 204, 272, 340,...

Nataly e André da 1ª série J, observando as sequências dadas, conseguiram descrever o termo que vinha a seguir.

1. Vocês também conseguem descrever o próximo termo?

Parte B

A Nataly e o André conseguiram encontrar a fórmula geral dos termos da sequência “a” acima. Disseram que é assim:

$$a_1 = 1$$

$$-2 = a_2 = a_1(-2)$$

$$4 = a_3 = a_2(-2) = a_1(-2)(-2) = a_1(-2)^2$$

$$-8 = a_4 = a_3(-2) = a_1(-2)^3$$

$$16 = a_5 = a_1(-2)^4$$

E descobriram que o termo geral é:

$$a_n = (-2)^{n-1}$$

2. Vocês conseguem descrever os termos gerais das sequências **b** e **c**?

Para a escolha dos problemas, considere as seguintes variáveis didáticas:

- Progressões geométricas em registro figurativo e numérico;
- Progressão aritmética numérica;
- Progressão aritmética começando por um número diferente de 1, e cuja razão não “saltasse aos olhos”, forçando o aluno a calculá-la para verificar qual o tipo da sequência;
- Progressões geométricas com razões positivas e negativas;
- As duas PG (a, b) constam no Caderno do Professor, p. 26.

As estratégias esperadas para cada questão são as seguintes:

Questão 1

Sequência a

E₁ – O aluno identifica a sequência como progressão geométrica de razão -2, e encontra o próximo termo - 32.

E₂ – O aluno olha a parte B, e percebe que basta multiplicar -2 pelo último termo explícito da sequência e encontra -32.

Sequência b

E₁ – O aluno identifica a sequência figurativo-numérica; transforma-a, explícita ou implicitamente, em sua forma numérica; e encontra o próximo termo que será 48.

E₂ – O aluno percebe que, a cada nova figura da sequência figurativa, dobra-se o número de quadradinhos; faz duas vezes vinte e quatro quadradinhos, encontrando 48.

Sequência c

E₁ – O aluno realiza a divisão entre cada termo da sequência e seu antecessor; percebendo a razão não é constante; opera a subtração de cada termo da sequência e de seu antecessor; verifica que a razão é constante e igual a 68; e assim, encontra o próximo termo fazendo a conta de $340+68= 408$.

Questão 2

Sequência b

E₁ – O aluno identifica a sequência figurativo-numérica; transforma-a explicitamente em sua forma numérica; observa o que é apresentado na atividade como resolução do termo geral da progressão geométrica; segue passo a passo o exemplo dado e chega à fórmula que expressa o termo geral dado por $a_n = 3.2^{n-1}$.

E₂– O aluno percebe a sequência figurativo-numérica e transforma-a explicitamente em sua forma numérica. Faz ou imagina as relações de uma tabela semelhante à apresentada abaixo:

1º	2º	3º	4º	5º
	3.2	3.2.2	3.2.2.2	3.2.2.2.2
3	6	12	24	48

Percebe que o 2º termo é 3.2; o 3º termo é (3.2).2 ou 3.2^2 , o 4º termo é (3.2.2).2 ou 3.2^3 e assim por diante. Utiliza essa generalização e chega a fórmula para essa PG $a_n = 3.2^{n-1}$.

E₃– O aluno identifica a sequência figurativo-numérica; transforma-a explicitamente em sua forma numérica; lembra da fórmula do termo genérico de uma PG e aplica $a_n = 3.2^{n-1}$.

Sequência c

E₁ – O aluno identifica os termos da sequência, faz ou imagina as relações em uma tabela semelhante à apresentada abaixo:

1º	2º	3º	4º	5º
	68.2	68.3	68.4	68.5
68	136	204	272	340

Percebe que o 2º termo é 68.2; o 3º termo é 68.3, o 4º termo é 272 e assim por diante. Utiliza essa generalização e chega à fórmula $a_n = 68.n$.

E₂ – O aluno identifica a sequência como uma PA de razão 68 e aplica a fórmula do termo geral $a_n = 68.(n-1) + 68$.

Atividade 2

O objetivo desta atividade é de verificar se e como os alunos encontram a soma dos termos tanto de uma PA quanto de uma PG.

Observe as sequências:

a) 8, 6, 4, 2, 0, -2,...

b) 1, 5, 25, 125, 625,...

c) 162, 54, 18, 6, 2, 2/3,...

1) Qual o valor da soma dos 10 primeiros termos das sequências “a”?

2) Qual o valor da soma dos 100 primeiros termos de cada sequência?

Para as seguintes variáveis didáticas foram considerados:

- O registro das progressões: só numérico;
- O número de progressões: duas PG e uma PA;
- Progressões que não se iniciam por 1: uma aritmética e uma geométrica;
- Progressões geométricas com razões inteira e fracionária.

Seguem as estratégias de resolução esperadas:

Questão 1

Sequência a

E₁ – O aluno percebe que se trata de uma PA, de razão -2 e por contagem faz a soma $8 + 6 + 4 + 2 + 0 + (-2) + (-4) + (-6) + (-8) + (-10) = -10$.

E₂ – O aluno identifica a sequência como uma PA, de razão -2 e, lembrando da fórmula da soma de uma PA, calcula: $S_{10} = \frac{(-10 + 8).10}{2} = -10$.

E₃ - O aluno identifica a sequência como uma PA, de razão -2 e, sem se lembrar da fórmula do termo geral, calcula por contagem, o 10º termo da sequência, lembra da fórmula da soma de uma PA, e calcula: $S_{10} = \frac{(-10+8).10}{2} = -10$.

Questão 2

Sequência a

E₁ - Para encontrar o valor da soma dos cem primeiros termos da progressão aritmética, o aluno encontra o valor do 100º termo $a_{100} = -2(100-1)+8 = -190$ e calcula o valor da soma efetuando $S_{100} = \frac{(-190+8).100}{2} = -9100$.

Sequência b

E₁ - Para encontrar o valor da soma dos cem primeiros termos da PG, o aluno calcula o valor do 100º termo e aplica na fórmula da soma $S_{100} = \frac{1.(5^{100}-1)}{5-1}$, simplificando ou não esse resultado.

Sequência c

E₁ - Para encontrar a soma dos cem primeiros termos da sequência, o aluno calcula o valor do 100º termo da PG e aplica a fórmula da soma

$$S_{100} = \frac{162.\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{100} - 1\right]}{\frac{1}{3}-1}, \text{ simplificando ou não esse resultado.}$$

E₂ - O aluno identifica a sequência como uma PG de razão $\left(\frac{1}{3}\right)$ e para encontrar o valor da soma dos cem primeiros termos, ele calcula a soma desprezando o valor de $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ e calculando que a soma é $\frac{162.(-1)}{\frac{(-2)}{3}} = \frac{162.3}{2} = 243$.

Considerações sobre a 2ª sessão

Procurei contemplar, nesta segunda sessão, atividades que envolvessem os conteúdos relacionados às progressões aritméticas e geométricas, abordados no Caderno do Professor 1º bimestre do 1º ano do EM.

Nessa sessão, privilegiei o tempo que julguei necessário aos alunos para mobilizar seus conhecimentos, escolher a estratégia, executá-la e posteriormente analisar os dados obtidos. Esses passos descritos fazem parte da resolução de problemas e necessitam de um tempo didático que nem sempre o professor dispõe em sala de aula, devido à quantidade de conteúdos a serem privilegiados em cada bimestre.

Na atividade 1, propus três sequências: duas PG que são sugeridas pelo Caderno do Professor (p.26) e uma PA semelhante às que são encontradas no mesmo. O foco dessa atividade, dividida em duas partes, visa priorizar a atenção do aluno sobre cada item solicitado, orientando e oferecendo-lhe condições para continuar a resolver a atividade.

Na atividade 2, na qual o nível de dificuldade se apresenta, espero que após esse longo trabalho com sequências, o aluno possa lembrar ou, pelo menos, tente desenvolver de alguma maneira a fórmula, tanto da soma de uma PA quanto de uma PG.

Partindo do pressuposto de que as sequências propostas nessa 2ª sessão são semelhantes ou constam no Caderno do Professor, as chances de os alunos realizarem tais atividades são grandes, visto que a SEE-SP orientou os professores para trabalhar com esse material.

Descrição da aplicação do experimento

Esta sessão de aplicação ocorreu dia 11 de novembro de 2008, duas semanas após a aplicação da 1ª sessão, às 16h30min.

Para esta sessão, apareceram dois alunos que participaram da 1ª sessão e outros dois justificaram suas ausências.

Assim como na primeira sessão, agradei a presença de todos e ressaltei a importância da participação deles em minha pesquisa.

Inicialmente, optei por entregar as atividades separadamente.

Distribui a primeira folha de atividades às 16h35min e informei-lhes que, assim que terminassem a segunda folha seria entregue.

Às 17h20min, informei-lhes que o tempo previsto já havia terminado. A dupla aparentando cansaço entregou a atividade sem nenhum comentário.

Descrição e Análise dos Resultados

Para desenvolver a análise, baseei-me nos protocolos recolhidos, nas notas da sessão, na transcrição das gravações obtidas e nas entrevistas realizadas.

O que segue em itálico faz referência a fala dos alunos.

Descrição e Análise da dupla

Dupla 4: Glória e Davi

Atividade 1

Mais familiarizados com atividades de observação de sequências, essa dupla realizou a questão 1: “Vocês também conseguem descrever o próximo termo?”, dessa atividade, utilizando a estratégia denominada como E_1 , para todas as sequências.

Na questão 2: “Vocês conseguem descrever os termos gerais das sequências **b** e **c**?”, dessa mesma atividade, não foi observado pela dupla todo o enunciado que estava antes da questão apresentada e devido a isso, responderam parte dela seguindo as sugestões dadas, porém não descreveram os termos gerais, conforme solicitado. Assim, não chegaram à generalização desejada.

b) $a_1 = 3$
 $a_2 = 6 = a_1 + 2$
 $a_3 = 12 = a_2 + 2$
 $a_4 = 24 = a_3 + 2$
 $a_5 = 48 = a_4 + 2$

c) $a_1 = 68$
 $a_2 = 136 = a_1 + 68$
 $a_3 = 204 = a_2 + 68$
 $a_4 = 272 = a_3 + 68$
 $a_5 = 340 = a_4 + 68$
 $a_6 = 408 = a_5 + 68$

Figura 19: Protocolo extraído da atividade 1, questão 2, dupla D₄

Como se pode observar, a dupla fixou-se no método recursivo, não observando todos os passos existentes na sugestão. Assim, considerou a questão respondida para os dois itens e pediu para passar para a outra atividade.

Na entrevista concedida à pesquisadora, nem Davi nem Glória conseguiram avançar na resolução dessa atividade em relação à sequência figurativa **b**.

Com relação à sequência “1, -2, 4, -8, 16, ...”, durante a entrevista foi solicitado para os alunos encontrar o 14º termo. Davi encontrou todos os termos até o décimo quarto, utilizando o método recursivo que, segundo Orton e Orton (1999), não favorece a generalização. Ao ser questionado sobre a existência de um jeito mais fácil de resolver, Davi respondeu:

Davi: - Deve ter um jeito mais fácil, mas eu, no momento, não me lembro como é que faz. Desse jeito, se pedir um valor muito alto, uma posição muito alta não acha tão fácil.

Dessa forma, a partir da transcrição da fala de Davi, pressupõe-se que ele sabe das limitações do método recursivo utilizado, entretanto, por não ter sido estimulado a realizar generalizações, não soube que atitude tomar e preferiu concluir, não se lembrar.

Glória, por sua vez, utilizou o termo geral dado na atividade para encontrar o valor do décimo quarto termo solicitado, o que demonstra que para ela aquela

fórmula apresentada tinha um significado. Observe o protocolo parte integrante da entrevista:

$$a_n = (-2)^n$$

$$a_{14} = 8256$$

$$\begin{array}{r} 1032 \\ 2064 \\ 4128 \\ 8256 \end{array}$$

Figura 20: Protocolo extraído da atividade da aluna Glória

Apesar da aluna utilizar a fórmula corretamente, é possível verificar erros de cálculo enquadrados na incompetência aritmética apontada, por Orton e Orton (1999), como um dos grandes obstáculos que impedem, muitas vezes, o progresso em atividades de generalização.

Outra questão formulada para a entrevista com relação à sequência figurativa **b** solicitava a soma dos quinze primeiros termos. Após Davi ter encontrado catorze números da sequência, termo a termo, observe o raciocínio utilizado e a conclusão a qual chegou sobre a questão dada:

Pesquisadora: - *E qual é a soma dos quinze primeiros números, os quinze primeiros termos da sequência b ?*

Davi: - *Nossa!!! (Começa a escrever os termos no protocolo)*

Davi: - *Nossa! Vai dar um valor alto, desse jeito. É, espera aí! Está dando um valor ípsilon (valor encontrado), que somando eles, dá três abaixo desse. Somando eles dá três abaixo desse, que dá três abaixo desse, que vai dando três abaixo. É assim mesmo? (Questiona a pesquisadora, mas continua:) Três mais seis, nove; três abaixo do doze, nove mais doze, vinte e um; três abaixo do vinte e quatro, vinte e quatro mais vinte e um, quarenta e cinco; três abaixo do quarenta e oito, quarenta e cinco mais quarenta e oito, dá noventa e três, noventa e três mais esse valor sempre está dando um abaixo. Então, sei lá! O valor seria dezoito mil e noventa e três?*

Pesquisadora: - *Somando todos os valores? (Davi observando novamente seus registros completa)*

Davi: - *Eu errei. Errei aqui. Apesar de que tem uma sequência: dois, quatro, oito, seis daí dois, quatro, oito, seis. Acho que essa forma seria mais fácil que só vai. Se pedir o último valor dois, quatro, oito seis; dois, quatro, oito, seis. Dá pra saber que o último valor vai dar dois porque a sequência que segue aqui, ó, dois, quatro, oito seis, dois, quatro, oito, seis. Aqui tem alguma coisa errada, que eu confundi. Uhm mil cento e trinta e seis, não trinta e dois. Então o seguinte: seria dois e daí eu errei. Daqui pra cá, eu errei. Eu sei que depois do seis volta pro dois. Eu sei que tem um jeito de fazer com essa sequência que é mais fácil pra encontrar o valor, mas eu não me lembro.*

Como pode ser observado no diálogo, Davi percebeu duas regularidades presentes nessa sequência:

1ª) O resultado da soma dos valores da sequência era sempre igual ao próximo termo menos três. Em linguagem algébrica pode ser representado por:

$$S_n = a_{n+1} - 3 \text{ (onde S é a soma)}$$

que, para esse caso específico, o valor 3 corresponde ao primeiro elemento da sequência, podendo então ser escrito em linguagem algébrica da seguinte maneira:

$$S_n = a_{n+1} - a_1$$

Sendo assim, de acordo com a observação de Davi, pode-se entender que ele encontrou um esquema de generalização para chegar à soma de uma determinada quantidade de termos de uma sequência, porém esse esquema ainda está preso ao processo recursivo, pois o aluno sentiu necessidade de encontrar todos os termos. Observe parte do protocolo da entrevista desse aluno:

Handwritten calculation protocol showing the sum of an arithmetic sequence. The sequence is $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30$. The student uses the formula for the sum of an arithmetic sequence, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, where $n=10$, $a_1=3$, and $a_n=30$. The calculation is as follows:

$$\begin{aligned}
 &3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30 \\
 &= \frac{10}{2} (3 + 30) \\
 &= 5 (33) \\
 &= 165
 \end{aligned}$$

Figura 21: Protocolo extraído da atividade do aluno Davi

2ª) Se o primeiro termo da sequência não for considerado, há uma sequência cíclica no último algarismo de cada termo e, devido a essa percepção, ele pôde concluir que a partir de um determinado número, os valores escritos a seguir estavam errados.

Atividade 2

Quando leu as sequências da atividade 2, a dupla conseguiu observar e descrever verbalmente as regularidades presentes em cada uma. Também conseguiu resolver a questão 1: “Qual o valor da soma dos 10 primeiros termos da sequência **a**?”, utilizando a estratégia denominada como E_1 , considerada a mais provável, sem demonstrar dificuldades.

Já a segunda questão, cujo grau de dificuldade era maior, foi possível perceber que a dupla deixou em suas resoluções indícios da utilização do método recursivo para as duas primeiras sequências encontradas termo a termo. Observe os protocolos:

Handwritten calculation protocol showing the sum of an arithmetic sequence. The sequence is $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$. The student uses the formula for the sum of an arithmetic sequence, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, where $n=10$, $a_1=2$, and $a_n=20$. The calculation is as follows:

$$\begin{aligned}
 &2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\
 &= \frac{10}{2} (2 + 20) \\
 &= 5 (22) \\
 &= 110
 \end{aligned}$$

Figura 22: Protocolo extraído da atividade 2, item 1a, dupla D₄

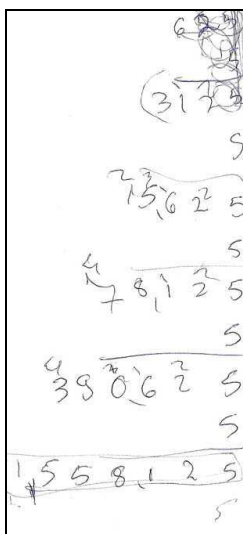


Figura 23: Protocolo extraído da atividade 2, item 2b, dupla D₄

De acordo com Orton e Orton (1999), essa compreensão recursiva da sequência não favorece a criação de uma regra geral e deve ser desestimulada pelo professor.

A dupla também tentou encontrar uma fórmula que os auxiliasse na resolução da sequência “8, 6, 4, 2, 0, -2,...”. De acordo com o protocolo,

Figura 24: Protocolo extraído da atividade 2, item 2a, dupla D₄

é possível notar que dentre as diversas variáveis consideradas pela dupla, encontram-se a razão e o primeiro termo da sequência, cujos valores foram considerados importantes para uma tentativa de fórmula.

Em trechos do diálogo, outra informação é revelada:

Glória: - A professora falava que a gente tinha que fazer o termo número cem. Mas como é que a gente vai achar o termo cem? Se a gente achasse ele, daí... Será que a gente tem que fazer tudo? Será?

Davi: - Nossa! Se eu lembrasse a fórmula que a professora passou. Que ela estava passando quando ela ensinou isso aqui.

[...]

Davi: Eu nunca mais usei essa fórmula.

Glória: - Mas como é que eu resolvo essa fórmula?

Davi: - Eu acho que é. Se fosse “menos” duzentos vezes oito, “menos” mil e seiscentos. Daí não seria dois elevado a ípsilon e sim dois vezes cem. Será que é isso? Oito vezes “menos” dois vezes o número ali. Você não lembra aqui?

Glória: - Eu não lembro nada.

Davi: - a_1 é igual a duas vezes não sei o que lá, mais não sei o que lá. Eu não lembro essa fórmula.

De acordo com esse diálogo, é possível perceber que a professora passou aos alunos uma fórmula (um esquema generalizador), conforme o processo de ensino tradicional. Eles, por sua vez, realizaram apenas sua aplicação em atividades semelhantes, o que evidencia que esses alunos tiveram pouco ou nenhum contato com atividades onde incluía a construção de algo em que pudessem encontrar uma generalização que correspondesse à resposta desejada.

Mesmo não se lembrando da fórmula dada pela professora, a dupla conseguiu encontrar o 100º termo da sequência “8,6,4,2,0,-2,...”, cujo termo foi mencionado no início do diálogo descrito anteriormente. Observe a explicação dada por Davi:

Glória: - Fez os cem primeiros?

Davi: - Não. Mais cheguei perto.

Glória: - O último termo desse aqui seria noventa e oito?

Davi: - Eu acho que seria noventa.

Glória: - Não... sim. Noventa?

Davi: - Cento e noventa.

Glória: - Achei que fosse noventa e oito.

Davi: - Não. Cento e noventa, porque cem vezes “menos” dois dá “menos” duzentos, certo?

Glória: - Ahm!

Davi: - Isso são os cem primeiros termos. Esse seria o último. Mas só como tem cinco (números) positivos, então é dez porque é cinco termos, cinco vezes dois dá dez; dez “menos” duzentos, dá “menos” cento e noventa.

Davi, apesar de não se lembrar da fórmula dada pela professora, conseguiu encontrar o 100º termo e, de acordo com a explicação dada, seria capaz de encontrar o valor de qualquer termo da sequência.

As Entrevistas

Tendo em vista a necessidade de esclarecer alguns pontos levantados pela análise dos protocolos e obter dados não coletados na segunda sessão pela ausência de duas duplas, decidi realizar entrevistas individuais com alguns dos sujeitos da pesquisa.

As entrevistas foram realizadas em dois dias, 10 e 15 de junho de 2009, e os alunos foram retirados da classe por um período de, aproximadamente, 30 minutos, com a autorização da direção da escola e dos professores que estavam ministrando aulas.

Para as entrevistas com os alunos voluntários (sujeitos desta pesquisa), elaborei um roteiro padrão que foi adaptado de acordo com as respostas de cada aluno entrevistado, em seus protocolos da primeira e segunda sessão ou somente da primeira. O roteiro adotado tinha quatro partes: duas contemplavam sequências abordadas na primeira sessão e, as outras duas, na segunda.

Segue abaixo, duas partes finais das entrevistas ainda não descritas nas resoluções anteriores.

Entrevista com Daiane

Após apresentar a terceira parte do roteiro da entrevista à aluna, perguntei-lhe sobre o próximo termo que constava nas sequências. Ela demonstrou ter observado a oscilação da sequência **a**, considerando o próximo termo negativo, porém, o valor -96 encontrado não fazia parte da sequência.

Com relação ao valor do décimo quarto termo essa sequência **a**, a aluna encontrou os termos utilizando uma forma de operar os números como eu nunca tinha me deparado anteriormente. De acordo com Orton e Orton (1999), essa constatação é um dos grandes obstáculos que impede, às vezes, o progresso, enquadrados na incompetência aritmética.

Observe a sequência no protocolo parte integrante da entrevista:

as sequências

1, -2, 4, -8, 16, ... -96, 96, -182, 364, -1277, 1942, -10267, 10802, 22870, -16407, 33652, -102857, 110452, 111857, 228702

Figura 25: Protocolo extraído da atividade da aluna Daiane

Para chegar a esses valores, a aluna encontrou alguns termos multiplicando apenas a unidade; para outros, efetuou a soma de parcelas iguais e, finalmente, realizou a multiplicação de unidade por unidade, dezena por dezena e assim por diante, conforme protocolo abaixo parte da entrevista:

Figura 26: Protocolo extraído da atividade da aluna Daiane

Na sequência figurativa **b**, a aluna utilizou o registro na forma figural para encontrar o próximo termo; não realizou a conversão de registro esperada para essa atividade, o que favoreceria a compreensão matemática envolvida na sequência apresentada.

Sobre o termo geral da sequência figurativa **b**, após analisar a quarta parte da entrevista, em que havia uma sugestão de resolução para a sequência **a**, a aluna alegou não saber como montar.

Entrevista com Alice

Quando perguntei para Alice sobre o próximo termo das sequências **a** e **b**, ela, após fazer uma análise, disse:

Alice: - Quando penso que estou entendendo, confunde. Nossa, que complicado!

Ao declarar que achou complicado pensar sobre a sequência dada, a aluna demonstra não entender a regularidade presente e, ao ser argüida sobre outra maneira de pensar sobre a sequência, ela respondeu:

Alice: - Mas eu preciso saber de quanto em quanto está aumentando pra em fazer a conta.

Dessa forma, tornou-se evidente que ela não percebeu a regularidade presente na sequência, deixando-a sem resposta.

Com relação ao valor do décimo quarto termo da sequência **a**, a aluna utilizou o termo geral dado na quarta parte do roteiro para encontrá-lo, o que demonstra que, para ela, aquela fórmula apresentada tinha algum significado. Observe os protocolos da aluna Alice, parte integrante da entrevista:

$$a_n = (-2)^{n-1}$$

$$a_{14} = (-2)^{13}$$

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$$

$$= 1902$$

Figura 27: Protocolo extraído da atividade da aluna Alice

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 2 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ \times 2 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 624 \\ \times 2 \\ \hline 1248 \end{array}$$

Figura 28: Protocolo extraído da atividade da aluna Alice

Novamente, constatei erros de cálculo, que podem ser enquadrados na incompetência aritmética mencionada por Orton e Orton (1999), como um dos grandes obstáculos, o que, muitas vezes, impede o progresso em atividades de generalização.

Para a sequência **b**, o valor encontrado pela aluna foi 36, o que demonstra que ela considerou apenas os dois últimos termos para chegar a sua resposta.

Sobre o termo geral da sequência **b**, após analisar a quarta parte na qual havia uma sugestão de resolução para a sequência **a**, a aluna elaborou uma fórmula que não descrevia o termo geral.

Entrevista com Bete

Ao perguntar para Bete sobre qual seria o próximo termo das sequências **a** e **b**, ela respondeu o próximo da sequência **a**, sem apresentar dificuldades; entretanto, em relação ao décimo quarto termo da sequência, disse:

Bete: - *Ficou difícil porque se eu não achar essa fórmula, não dá.*

Assim, constatei que o termo geral explicitado na atividade ainda não tinha nenhum significado para ela.

Com relação à sequência **b**, a aluna considerou apenas os dois primeiros valores da sequência para dar sua resposta, apresentando o número 27 como o próximo termo.

Sobre o termo geral dessa sequência, ela, após fazer uma análise da última folha apresentada, disse:

Bete: - *Se eu fosse fazer o cálculo aqui, iria demorar muito.*

Pesquisadora: - *Nem observando o que está pronto, não dá?*

Bete: - *Não sei qual é.*

Dessa forma, torna-se claro que essa aluna não teve a oportunidade de realizar cálculos para descobrir uma fórmula ou de realizar uma generalização. Seu conformismo demonstrado durante a entrevista é o resultado de um ensino ao qual o aluno não passa de um mero espectador.

Análise por questão

1ª Sessão

Atividade 1

Essa atividade teve a finalidade de verificar **se** e **como** o aluno percebe a regularidade, uma vez que esse assunto já havia sido proposto pelo Caderno do Professor para ser trabalhado em sala de aula durante o ano letivo.

Na tabela a seguir, apresento o resumo do desempenho das duplas de alunos nesta atividade e descrevo abaixo as estratégias utilizadas e minhas considerações parciais:

Sequência	Resposta correta	Dupla D1 Davi e Fernando	Dupla D2 Alice e Daiane	Dupla D3 Glória e Bete
a	7	7	7, 7, 7	7
b	20	20	20, 22, 24,...	20
c				
d	-6	-6	-6, -8,...	-6
e	1231	1231	1231,...	1231

Tabela 1: Desempenho dos alunos na atividade 1, 1ª sessão

Sequência a

Observando a tabela, é possível perceber que todos os alunos chegaram facilmente à resposta dessa sequência, utilizando a estratégia indicada por mim (E_1), como a mais provável, o que denota que a regularidade foi percebida por eles.

Sequência b

Para esta sequência, todos os alunos chegaram facilmente à resposta, utilizando a estratégia indicada por mim (E_1), como a mais provável. Eles explicitaram a presença do número 2 na regularidade e, para indicar o próximo termo somaram 2.

Sequência c

Nessa sequência, todos os alunos chegaram à resposta correta. Daiane e Alice utilizaram a estratégia indicada como a mais provável, Bete e Glória mencionaram que a atividade realizada em sala de aula parecia-se com esta e utilizaram a estratégia que consta no Caderno do Professor. Acredito que Davi e Fernando também deram indícios da atividade realizada em sala de aula quando afirmaram que o ciclo era de quatro elementos (segundo consta no Caderno do Professor) e não de três, conforme proposto.

Dessa forma, pude inferir que os alunos perceberam que havia regularidade nessa sequência e conseguiram expressar o próximo termo de maneira correta.

Sequência d

Todos os alunos chegaram facilmente à resposta dessa sequência, utilizando a estratégia indicada por mim (E_1), como a mais provável. Eles explicitaram a presença do número 2 na regularidade e para indicar o próximo termo subtraíram 2.

Glória e Bete, ao utilizarem a reta numerada para explicar suas conclusões e justificar o valor negativo na resposta, apresentaram um aspecto não previsto nas estratégias. Conforme estudos de Vale e Pimentel (2005), verifiquei que a procura e a identificação de padrões desafiam os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento de ordem superior para justificar suas explorações, investigações e conjecturas necessárias.

Sequência e

Todos os alunos chegaram à resposta dessa sequência utilizando a estratégia indicada por mim (E_1), como a mais provável. Eles corresponderam às expectativas, demonstrando que encontrar o próximo termo em uma sequência que apresenta regularidade traz menor dificuldade do que encontrar termos mais distantes do último apresentado explicitamente na questão, como já foi apontado por Orton e Orton (1999).

Atividade 2

Essa atividade teve a finalidade de verificar **se** e **como** o aluno generaliza padrões de sequências dadas, se reconhece as PA e utiliza as fórmulas desenvolvidas quando estudaram PA e PG.

Questão 1

Na tabela a seguir, apresento o resumo do desempenho das duplas de alunos nesta questão e abaixo descrevo as estratégias utilizadas e minhas considerações parciais:

Sequência	Resposta correta da questão 1	Dupla D1 Davi e Fernando	Dupla D2 Alice e Daiane	Dupla D3 Glória e Bete
a	145 algarismos 1	O resultado é 145 vezes o nº 1	NR* (apesar de terem falado)	Teria 145 números 1
b	289	290	NR	72
c	20881	NR	NR	NR*
d	21025	20825	NR	21025
e	-281	A diferença dos termos mais 2	NR	-3

*NR- nenhum registro

Tabela 2: Desempenho das duplas de alunos na atividade 2, 1ª questão

Na tabela, a seguir, apresento o resumo do desempenho dos alunos na entrevista concedida à pesquisadora, com relação às sequências **b** e **e** desta atividade. Junto com as descrições das estratégias utilizadas pelas duplas relato as estratégias utilizadas por cada aluno e trago minhas considerações parciais:

Sequência	Resposta esperada	Davi	Daiane	Alice	Glória	Bete
b	Próximo = 11	11	Desenhou fig. com 11 quadrados	Desenhou fig. com 11 quadrados	Desenhou fig. com 11 quadrados	11
	$20^\circ = 39$	39	Desenhou fig. com 43 quadrados	Desenhou fig. com 39 quadrados	Desenhou fig. com 39 quadrados	NR
	$100^\circ = 199$	NR*	Desenhou fig. (ver p. 95)	$100.2-1$	$2.100=200-1$	NR
	$a_n = 2.(n-1)+1$	NR	NR	$x.2-1$	$2.N=N-1$	NR
e	Próximo = -5	-5	-5, -7, 7, 5, 3,...	-5, -7, -9, ...	-5, -7, 7	-5, -7, 1
	$S_{20} = -240$	-240	0	$20=x-2$	1	NR

NR* - nenhum registro

Tabela 3: Desempenho dos alunos na entrevista, sequências **b** e **e** da atividade 2, 1ª sessão

Sequência a

Observando a tabela 2, é possível perceber que todas as duplas conseguiram expressar de maneira verbal o 145º termo dessa sequência, porém o registro da resposta apresentou a grande dificuldade dos alunos em escreverem em linguagem natural suas respostas matemáticas. De acordo com Orton e Orton (1999), explicações orais das regras são dadas por uma quantidade maior de alunos do que aqueles que podem escrever uma explicação.

Foi observado outro aspecto em duas duplas, cujo um dos membros recusou-se a registrar a resposta em linguagem natural. Segundo Duval (2003), esse registro da resposta em linguagem natural é uma representação discursiva que faz parte dos registros multifuncionais que possuem tratamentos não algoritmizáveis.

Questões que permitem respostas como esta, que possuem uma representação não algoritmizável, nem sempre faz parte da prática utilizada por professores de matemática. Ao analisar, sobre esse ângulo, o comportamento dos alunos em se recusar a realizar esse tipo de registro torná-se compreensível, uma

vez que tal procedimento não faz parte do contrato didático²⁷ implícito, estabelecido entre professor e alunos.

Diante disso, todos os alunos utilizaram a estratégia E_1 em suas resoluções, o que pode ser confirmado na transcrição das gravações. Entretanto, os registros da resposta nos protocolos confirmam a dificuldade dos alunos em fazer a sua conversão. A conversão de registros, segundo Duval (2003), é a transformação que consiste em mudar a representação de um registro em outra representação (no nosso caso da língua materna falada para a linguagem escrita). Essa dificuldade foi explicitada em todas as duplas, pois uma não realizou registro algum; outra apresentou um registro inadequado e, apenas a terceira dupla fez um registro que, apesar de apresentar um erro de nomenclatura, pôde ser considerada como correta por não apresentar termos de duplo sentido.

Sequência b

Duas duplas perceberam que o número 2 fazia parte da regularidade e consideraram esse valor importante para encontrar o 145º termo. Uma dupla multiplicou 145 por 2 encontrando o valor 290 (valor este que não faz parte da sequência); e outra, dividiu por 2, encontrando o valor 72,5 e consideraram como resposta 72.

Outra estratégia utilizada também por uma dessas duplas foi à contagem, encontrando termo a termo, que logo foi abandonada. Essa compreensão recursiva dos padrões numéricos, em que o aluno faz uso da diferença entre os termos para resolver a atividade, segundo Orton e Orton (1999), cria obstáculos que podem interromper o progresso para a regra universal.

Durante as entrevistas foi possível observar que esses alunos apresentavam uma vaga lembrança sobre o assunto, porém conforme eles disseram “a professora passou um esquema”, esquema que não propiciava a

²⁷ A noção de contrato didático, segundo Almouloud (2007), foi introduzida por Guy Brousseau com o objetivo de se analisar as relações que se estabelecem, de maneira explícita e implícita, entre professor e alunos e como estas relações influenciam no processo ensino-aprendizagem da matemática.

construção de uma fórmula ou generalização, e sim a aplicação em situações semelhantes.

Nas entrevistas duas alunas apresentaram indícios de um esquema generalizador através da linguagem oral, utilizando a língua materna. A partir dos questionamentos feitos pela pesquisadora, as alunas puderam fazer uma revisão da resposta dada oralmente, reconsiderando e reexaminando sua resposta. Essa revisão, segundo Polya (1945), favorece a consolidação do conhecimento e o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas que, nesse caso, pode ser observado nos registros dos protocolos, nas quais é possível verificar o raciocínio algébrico inerente à resolução.

No protocolo da Glória, é possível perceber a fragilidade da notação algébrica utilizada, quando registra " $2.N=N-1$ ". Isso demonstra que a simbologia utilizada não tem muito significado para ela, a letra N representa um número a ser utilizado, mas não necessariamente o mesmo número. Com relação ao registro utilizado por Alice, não há indícios da utilização da letra "n" para representar enésimo termo, o que demonstra também que a simbologia própria utilizada para as progressões não tem significado para ela.

Ainda com relação a Alice, também foi observado à tensão existente entre o pensamento algébrico e a notação algébrica, apontada por Zazkis e Liljedhal (2002), pois ela mesmo conseguindo encontrar o esquema generalizador a partir dos questionamentos feitos pela pesquisadora, deixou indícios de que tinha dúvidas sobre a validade da expressão encontrada.

Sequência c

Conforme apresentado pela tabela 2, nenhuma dupla apresentou resolução para esta sequência.

Sequência d

Duas duplas conseguiram realizar a generalização dessa sequência e utilizaram a conversão de registro: do registro figural para o numérico. A dupla ,Fernando e Davi, apesar de terem realizado a generalização de maneira correta, em seu protocolo apresentam erros de cálculo. Dentro do registro numérico, eles

também perceberam que a diferença entre os termos da sequência eram números ímpares (característica não prevista nas estratégias).

Segundo Duval (2003), a compreensão em matemática supõe a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação semiótica. Neste caso, a sequência proposta favoreceu a análise feita por mim, pois propiciou a compreensão matemática desses alunos ao apontarem características da sequência que não levadas em consideração na análise *a priori* e que, durante a resolução, foram consideradas pelos alunos.

Sequência e

Duas duplas apresentaram alguma resolução para esta sequência. A estratégia utilizada por uma delas (E_1) foi abandonada quando chegaram ao 50º termo. Eles utilizaram a compreensão recursiva, empregando a diferença entre os termos que, segundo Orton e Orton (1999), não favorece a criação de uma regra geral.

A outra dupla considerou essa sequência como cíclica (estratégia não prevista na análise *a priori*).

Nas entrevistas, às quais os alunos puderam analisar individualmente essa sequência, dos cinco entrevistados, três deram indícios de que a sequência era cíclica e dois entenderam a sequência como decrescente.

A dificuldade em observar sequências decrescentes, onde a razão corresponde a um número inteiro negativo, também foi observado por Carvalho (2008) e Archilia (2008).

Dos dois alunos que perceberam a regularidade presente nesta sequência, apenas um conseguiu descobrir o valor da soma dos vinte primeiros termos solicitado, encontrando todos os termos e efetuando a soma. Dessa forma, esse aluno utilizou a compreensão recursiva que, segundo Orton e Orton (1999), pode obstruir seriamente o progresso na direção de uma regra universal.

Questão 2

Essa questão, por apresentar erros de digitação, prejudicou a compreensão e análise dos alunos. Sendo assim, a análise não será realizada.

Questão 3

Não foi realizada por nenhuma dupla.

Atividade 3

Essa atividade teve a finalidade de verificar **se** e **como** o aluno encontra a soma de “n” termos de uma progressão aritmética.

Questão 1

Essa questão, apenas uma dupla teve chance de realizá-la. De acordo com a transcrição do diálogo, essa dupla utilizou a estratégia denominada por mim como E_4 , que permitia encontrar a resposta observando a figura toda. Porém, ao observar o protocolo, a estratégia E_1 também foi detectada, isto é, a soma dos números ímpares. Isso demonstra que a sequência selecionada proporcionava aos alunos a oportunidade de utilizar diferentes estratégias para encontrar a resposta, auxiliando a dupla a reconsiderar e reexaminar o resultado obtido que, segundo Polya (1945), favorece a consolidação do conhecimento e o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas.

As demais sequências e questões da atividade 3 não foram respondidas por nenhuma dupla, o que me levou à necessidade de reformular a segunda sessão.

2ª Sessão

Atividade 1

Essa atividade teve como objetivo verificar se o aluno encontra o próximo termo tanto de progressões aritméticas quanto geométricas, e se obtém o termo genérico de cada uma delas.

Na tabela, a seguir, apresento o resumo do desempenho dos alunos na entrevista concedida à pesquisadora e descrevo abaixo as estratégias utilizadas. Faço minhas considerações sobre o desempenho deles, juntamente com a descrição do desempenho da dupla que participou dessa sessão:

Sequência	Resposta correta	Davi	Daiane	Alice	Glória	Bete
a	Próximo=-32	-32	-96	- (sinal negativo)	32	-32
	$14^0 = -8192$	-8032	2287026	$(-2)^{(14-1)} = -1902$	$(-2)^{(14-1)} = 8256$	NR*
b	Próximo= 48	48	Desenhou fig. com 48 quadrados	36	Desenhou fig. com 48 quadrados	3, 6, 12, 24, 36
	$a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$	NR	NR	$a_n = x + 4 \cdot 3$	$a_n \cdot 2$	NR
	$S_{15} = 65536$ ou $2^{16} - 3$	18093	NR	NR	NR	NR

*NR - nenhum registro

Tabela 4: Desempenho dos alunos na entrevista, sequências **a** e **b** da atividade 1, 2ª sessão

Questão 1

A dupla conseguiu expressar o próximo termo de maneira correta, sem apresentar dificuldades em descrever oralmente aspectos observados nas diferentes sequências apresentadas.

Nas entrevistas às quais os alunos tiveram a oportunidade de realizar a observação das sequências **a** e **b** dessa atividade, quatro alunos (dos cinco que dela participaram) perceberam a oscilação presente na sequência **a**, porém, apenas dois apresentaram resposta correta para o próximo termo. Estou certa de que essa dificuldade apresentada deve-se ao fato de a razão entre os termos ser um número negativo (fator que causa a oscilação verificada).

Para a sequência figurativa **b**, três alunos apresentaram resposta correta: dois utilizando registro figural, e um, registro numérico.

Questão 2

A dupla não realizou o que se esperava, deixando de expressar a generalização solicitada. Deixaram indícios de que estavam tentando seguir as orientações expressas no exemplo, porém, se fixaram no método recursivo que, segundo Orton e Orton (1999), não favorecem a descoberta da generalidade.

Nas entrevistas, nenhum dos alunos conseguiu expressar a generalização realizada, embora tenha acrescentado a última parte da entrevista uma tabela à qual acreditava que os auxiliaria na obtenção do termo geral. Esse fato levou-me a considerar as conversas com os alunos que, por diversas vezes, em diferentes sequências, relataram que não se lembravam da fórmula passada pelo professor (conta que solucionava o problema dado).

Outras questões foram formuladas para a entrevista, em relação ao valor do décimo quarto termo da sequência **a**. Dos cinco alunos entrevistados, um não respondeu essa questão; outro respondeu, mas apresentou a incompetência aritmética ressaltada por Orton e Orton (1999), durante a resolução; e três responderam de maneira satisfatória, apesar de apresentarem erros de cálculo. Destes três últimos, dois utilizaram o termo geral dado para encontrar o valor solicitado, o que demonstra que, para eles, a fórmula do termo geral descrito na atividade apresentava algum significado. O outro aluno que utilizou o método recursivo encontrando termo a termo (que segundo Orton e Orton (1999), não favorece a generalização), ao ser arguido apresentou suas considerações sobre as limitações do método utilizado, mas não soube expressar outra forma para resolver essa questão.

Com relação à soma dos quinze primeiros termos, apenas um aluno conseguiu expressar de maneira verbal um esquema generalizador, porém por não ter conseguido encontrar a generalização do termo geral, esse primeiro esquema com relação à soma, ainda estava preso ao método recursivo. Outro dado a ser considerado durante a resolução desse aluno é sua percepção em relação à sequência cíclica presente no último algarismo de cada termo, se não for considerado o primeiro termo da sequência.

A capacidade de expressar verbalmente a generalidade, de acordo com Zazkis e Leljedahl (2002), nem sempre é acompanhada pela notação algébrica e

independe dela. Dessa forma, o pensamento algébrico se fez presente durante a resolução.

Atividade 2

O objetivo desta atividade era de verificar se e como os alunos encontravam a soma dos termos tanto de uma PA quanto de uma PG.

Questão 1

Para a soma dos 10 primeiros termos de uma PA, a dupla encontrou todos os dez elementos e efetuou a soma. Não apresentaram conflitos, devido o grau de dificuldade ser mínimo.

Questão 2

É possível perceber que para resolver essa questão, a dupla sentiu a necessidade de uma fórmula. Colocaram-se à busca em diferentes tentativas, entretanto, não conseguiram desenvolvê-la de maneira satisfatória para as sequências dadas.

Na transcrição das conversas foi possível perceber que esses alunos não tiveram a oportunidade de desenvolver diferentes generalizações até chegarem à formalização do conhecimento. Coube ao professor apresentar as fórmulas, tanto da PA quanto da PG, e aos alunos restaram aplicá-las em situações semelhantes. Como esse trabalho com padrões, não foi mais verificado no decorrer do ano, conforme sugere o Caderno do Professor ao assinalar os conteúdos que são relacionados com o tema, esse conhecimento caiu em desuso e, conseqüentemente, ao esquecimento.

Capítulo V - Considerações Finais

A seguir, apresento minhas considerações finais, baseadas numa visão ampla do processo da pesquisa realizada, levando em consideração as análises já realizadas.

De acordo com a metodologia utilizada, e considerando o pequeno número de alunos que participou da pesquisa, enfatizo que este trabalho apresenta características de um estudo qualitativo que não possui caráter generalizador.

O objetivo desta pesquisa era de investigar “como o aluno que terminou o 1º Ano do EM, em 2008, observa, realiza e compreende atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões?”.

Este instrumento de pesquisa permitiu aos alunos, a observação de sequências diversas, conforme proposto pelo Caderno do Professor, além de possibilitar a observação de regularidades não propostas por esse documento, o que contribuiu para analisar como eles se comportam diante de novas situações-problema.

Na elaboração desse instrumento de pesquisa, as análises *a priori* contribuíram na escolha das variáveis didáticas a serem focadas e das atividades em ordem crescente de dificuldade.

Na primeira sessão, os alunos demonstraram facilidade para indicar o próximo termo das sequências propostas, conforme verificado em pesquisas similares, como na de Carvalho (2008).

Com relação ao encontro de um termo distante, foi possível observar e analisar vários aspectos. Dentre eles, cito: todas as duplas conseguiram

expressar verbalmente o termo solicitado para a primeira sequência, porém, o registro da resposta em linguagem natural demonstrou ser um grande problema para alguns alunos. Esse dado observado ratifica as observações de Orton e Orton (1999), quando esclarece que, explicações orais das regras são dadas por uma quantidade maior de alunos do que aqueles que podem escrever uma explicação.

Com relação à resistência de alguns alunos em realizar o registro em linguagem natural, acredito que isso seja reflexo da metodologia utilizada pelo professor. Porém, esse tipo de registro, segundo Duval (2003), é uma representação discursiva que faz parte dos registros de representação semiótica multifuncional, que possuem tratamentos não algoritmizáveis.

A Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo, ao declarar que “a *Matemática é representada como um sistema simbólico que se articula diretamente com a língua materna nas formas oral e escrita*” (S.Paulo, 2008a, p.44), também reforça a ideia presente na sequência proposta de articular a Matemática com a língua materna.

Ciente dessas informações, creio ser importante propor ao professor que, ao tratar de atividades envolvendo a observação de regularidades e a generalização de padrões, incentive seu aluno a dar respostas empregando diversos tipos de registros de representação semiótica, inclusive a linguagem natural, conforme proposto em algumas atividades constante do Caderno do Professor, ampliando assim, as possíveis análises e a compreensão das estratégias utilizadas pelos alunos.

Outro aspecto observado refere-se à utilização da nomenclatura matemática de maneira inadequada, ao qual sugiro que se aconselhe o professor de, além da observação de uma grande variedade de sequências em diferentes registros de representação semiótica, o professor esteja atento a nomenclatura matemática empregada em sala de aula, de forma a caracterizar termos matemáticos como: algarismo, número, multiplicação, adição, subtração entre outros termos utilizados frequentemente por todos nas aulas de Matemática.

Outro dado observado em mais de uma resolução nos protocolos refere-se à compreensão recursiva dos padrões numéricos, em que o aluno faz uso da

diferença entre os termos para resolver a atividade, o que, segundo Orton e Orton (1999), pode seriamente obstruir o progresso em direção a uma regra universal. De acordo com esses autores, essa tática deve ser desencorajada pelo professor e ser substituída pelo incentivo, com relação, à apreciação de todas as propriedades da sequência numérica considerada.

Numa atividade que envolve sequência, o olhar sobre as propriedades matemáticas deve ser incentivado, à qual a relação existente (entre a ordem da posição e seu valor correspondente) seja considerada como ponto crucial para a retomada de conhecimentos já adquiridos e caminho para o avanço desse conhecimento. De acordo com Herbert e Brown (1997), o momento da análise matemática pressupõe representar, matematicamente, a informação presente no padrão, seja em palavras, diagramas, tabelas, gráficos e equações.

Dessa forma, ao considerar as observações dadas por Orton e Orton (1999) e por Herbert e Brown (1997) é possível perceber a grande importância do professor como mediador, orientando o processo de aprendizagem do aluno. Segundo Bloch (1999, apud Almouloud, 2007), o professor não deve ficar alheio em relação às formulações e validações propostas pelo aluno, sendo obrigado a agir sobre essas ações. Assim, cabe ao professor: observar enquanto o aluno age sobre as situações, agir sobre as ações do aluno, permitir e gerenciar as formulações, engajar a problemática de validação²⁸ e conduzi-la à obtenção ou reconhecimento de critérios de validade aceitáveis.

Ressalto, também, a importância das sequências figurativas propostas, pois permitiu que os alunos desenvolvessem diferentes estratégias para a mesma sequência, o que lhes possibilitaram reconsiderar e reexaminar seus resultados. Segundo Polya (1945), essa é a etapa mais importante da resolução de problemas, por favorecer a consolidação do conhecimento e o aperfeiçoamento da capacidade de resolver problemas.

As descrições dos protocolos da primeira sessão também evidenciam que a atividade 2 apresentava muitas sequências para serem observadas e também

²⁸ Como por exemplo: conduzir à socialização dos resultados, debates, confrontações de resultados dos alunos etc.

traziam muitas questões a serem analisadas, o que resultou na ausência de respostas de diversas questões, além de demonstrar a necessidade de proporcionar um tempo maior, a fim de que os alunos pudessem mobilizar seus conhecimentos prévios para identificar os padrões propostos.

Esses dados levaram-me a uma reorganização da segunda sessão, considerando o tempo um fator fundamental para que os alunos pudessem: ler toda a atividade, mobilizar seus conhecimentos, elaborar uma estratégia de resolução, executá-la e verificar os resultados obtidos, enfim, realizar todos os passos necessários para uma resolução de problemas.

Na segunda sessão e nas entrevistas, alguns alunos não demonstraram tanta facilidade em descrever o próximo termo das sequências contendo Progressão Geométrica.

De modo geral, os alunos apresentaram características pertinentes às sequências, porém não demonstraram habilidade em encontrar o próximo termo ou generalizar todas as sequências propostas. Este fato se deve a um dos dois grandes obstáculos que, segundo Orton e Orton (1999), impede, às vezes, o progresso dos alunos no desenvolvimento da regra geral, a incompetência aritmética e a utilização da abordagem recursiva.

Ao analisar os protocolos, foi possível notar que, para a sequência figurativa, nem todos os alunos realizaram a conversão de registro esperada. Isso me levou a perceber a dificuldade deles em compreender a matemática, pois, de acordo com Duval (2003), essa compreensão supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica.

Outro aspecto a ser considerado em relação às sequências figurativas é a relação que pode ser explorada entre a Geometria e a Álgebra, pois segundo Fainguernt (1995, apud Murari 2004):

A Geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização.

A Geometria também ativa as estruturas mentais possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para as operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas áreas da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender

a fazer, e aprender a pensar (FAINGUELERNT, 1995, p.46 apud MURARI, 2004, p. 200)

Sobre esse aspecto, sugiro que as atividades que envolvem sequências figurativas sejam aplicadas com uma maior frequência nas salas de aula, pois oferecem aos alunos: um campo vasto de ideias que permite desenvolver diferentes estratégias; propicia a passagem da intuição e dados experimentais coletados pela observação para processos de abstração e generalização; proporciona a coordenação de diferentes tipos de registros de representação semiótica, que auxilia na compreensão matemática conceitual dos objetos algébricos. Todos estes fatores apontados podem favorecer os alunos ao aperfeiçoamento da fluência algébrica.

Com relação ao encontro de um esquema generalizador para a soma de uma PG, apenas um aluno conseguiu verbalizar esse processo apresentando observações pertinentes à sequência. Porém, esse esquema apresentado pelo aluno estava preso ao método recursivo, pois ele não conseguiu encontrar a fórmula do termo geral da PG, necessária para a formalização dessa generalização.

De acordo com Zazkis e Liljedahl (2002), existe uma tensão entre o pensamento algébrico e a notação algébrica. Esta habilidade de expressar verbalmente a generalidade, nem sempre é acompanhada pela notação algébrica e independe dela. Dessa forma, o aluno utilizou-se do pensamento algébrico ao encontrar o esquema generalizador, apesar de não ter apresentado uma notação algébrica que expressasse essa generalização.

Dessa forma, pude constatar pelas análises *a posteriori* que os alunos conseguiram observar características importantes presentes nas regularidades necessárias para se obter o próximo termo; conseguiram realizar algumas generalizações de padrões descritos neste instrumento de pesquisa, apesar de não terem caracterizado nenhuma das sequências propostas como uma PA ou uma PG, o que me conduziu a analisar a fala dos alunos que por diversas vezes, em diferentes sequências, declararam não lembrar a fórmula passada pelo professor (a conta que solucionava o problema dado).

O professor, ao propor uma fórmula a seus alunos, de acordo com o ensino tradicional de ensino, não favoreceu a eles vivenciarem as quatro etapas

propostas por Polya (1945) para a resolução de problemas, que se encaixam perfeitamente em atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões. Dessa maneira, esses alunos perderam a oportunidade de: compreender o problema, construir, executar e examinar uma estratégia, e assim, construir seus conhecimentos, consolidando-os e aperfeiçoando sua capacidade de resolver problemas.

A análise desses dados conduziu-me as Matrizes de Referência para a Avaliação (São Paulo, 2008b). A partir dela foi possível considerar as funções valorizadas por esse instrumento nos protocolos, sendo elas: observar, realizar e compreender.

Com relação às *Competências para Observar*, considero que após a análise *a posteriori* de todo o processo, os alunos conseguiram atingir de maneira satisfatória todos os itens apontados: observaram em cada sequência dada um padrão e suas representações; interpretaram as informações expressas; identificaram e reconheceram conceitos correspondentes; estabeleceram diferenciações entre os termos; constataram diferenças e semelhanças, e representaram o padrão encontrado através de estratégias pessoais, usando diferentes recursos.

Com relação às *Competências para Realizar*, considero que os alunos conseguiram atingir de maneira satisfatória os seguintes itens apontados: classificaram e ordenaram, organizando o padrão e suas representações. De maneira parcialmente satisfatória, eles conseguiram, em algumas sequências, fazer antecipações sobre a continuidade do padrão; compor cada um dos elementos que fazem parte da sequência; interpretar os dados contidos nela para apreender sua utilidade para elaborar a generalização. Com relação a decomposição de cada elemento, essa competência não foi atingida ou não foi tão relevante a ponto de serem consideradas.

Com relação às *Competências para Compreender*, considero que os alunos conseguiram atingir, de maneira parcialmente satisfatória, poucos itens apontados: aplicaram relações com seus conhecimentos prévios em algumas sequências e apresentaram algumas conclusões a respeito dos padrões. Apenas um aluno conseguiu fazer algumas generalizações construtivas fundamentadas

nas operações realizadas por ele. Porém, as generalizações indutivas a partir de leis e relações descobertas ou estabelecidas em diferentes situações, estendendo de alguns para todos os casos semelhantes, e a justificativa de acontecimentos, resultados de experiências, interpretações, decisões tomadas durante a resolução não foram atingidas ou não foram tão relevantes a ponto de serem consideradas.

Dessa forma, posso afirmar que esses alunos encontram-se em processo de desenvolvimento das habilidades relacionadas, e que ainda há algumas etapas a serem cumpridas para atingir, de maneira satisfatória, as competências cognitivas avaliadas no exame Saresp e que também foram analisadas por esse instrumento de pesquisa.

Ao propor as atividades de investigação em dupla, tinha por objetivo de possibilitar: troca de informações; compartilhar ideias e dificuldades; provocar discussões positivas, além de explicitar pensamentos e dúvidas pertinentes a resolução de problemas.

De acordo com a transcrição das gravações, identifiquei trabalhos isolados decorrentes de diversas incapacidades como: ouvir atentamente o outro, aceitar as ideias do colega, construir sobre essas ideias, fazer perguntas relevantes etc., o que demonstra que esses alunos não estão acostumados a realizar trabalhos dessa natureza e não sabem aproveitar as vantagens proporcionadas por este durante o processo de aprendizagem.

Isso vem alertar sobre a necessidade de conscientizar o professor sobre a importância de se promover dentro de sua sala de aula um desenvolvimento integral do aluno, habilitando não só o desenvolvimento das competências individuais como: pensar, pesquisar, ter raciocínio lógico, fazer sínteses, dentre outros, como também desenvolver competências coletivas como: trabalhar em equipe, saber comunicar-se, participar e ter autonomia para planejar, executar e verificar o resultado encontrado coletivamente.

Dessa forma, sugiro que se esclareça ao professor seu papel de mediador entre o conhecimento e o aluno. Cabe a ele propor situações-problema nas quais o trabalho coletivo seja necessário e propício. Sugiro para este trabalho, as situações-problema que envolve padrões, pois além de promover o trabalho coletivo, elas também propiciam desenvolver algumas das ideias sugeridas por

Orton (1999) como: construir uma imagem mais positiva da Matemática; estabelecer várias conexões entre diferentes temas matemáticos; promover e desenvolver suas capacidades e competências matemáticas; ampliar sua capacidade de classificar e ordenar informações; bem como, compreender a ligação entre a matemática e o mundo em que vivemos.

Com relação ao trabalho a ser realizado a partir da observação de regularidades e da generalização de padrões, sugiro a interligação com as ideias subjacentes a álgebra proposto por McCallum et al (2007), como: expressão algébrica, equação, relação entre a forma e a função, resolver equações como processo de raciocínio, o hábito de encontrar representações algébricas, antecipar os resultados de um cálculo sem fazê-lo, abstrair regularidades de cálculos repetidos, fazer conexões entre representações e descontextualizar expressões algébricas.

Ao possibilitar a interligação e a interdependência entre essas ideias subjacentes a álgebra, à observação de regularidade e a generalização de padrões, será possível desenvolver nos alunos os elementos, classificados por Kilpatrick (2001), da proficiência matemática, tais como: compreensão conceitual, fluência procedimental, competência estratégica, raciocínio adaptativo e disposição produtiva. Outro dado, que acredito que essa interligação e interdependência propiciem, é favorecer elementos para que o aluno crie significado a escrita algébrica formal.

Ao sugerir esse tipo de trabalho, concordo com os termos utilizados por Ponte (2005), ao afirmar que o estudo de padrões e regularidades é uma das vias privilegiadas para promover o raciocínio algébrico, pois proporciona a interpretação e a resolução de problemas, bem como a utilização de forma criativa dos símbolos matemáticos na descrição de diferentes situações.

Sendo a Matemática definida como a ciência dos padrões (Stenn, 1990, Devlin, 2002), a atividade matemática a ser proposta deve examinar os diferentes tipos de padrões ocorridos na natureza, inventados pela mente humana e criados por outros padrões (Stenn, 1990) durante todo o processo de escolarização. A busca por essa variedade de padrões proporcionará a utilização desse tema de maneira transversal em todo currículo, conforme proposto pelo documento

Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), podendo ser tratado em contextos numéricos e geométricos, resolução de problemas, atividades investigativas, entre outros, além de propiciar a abordagem de diferentes conteúdos essenciais da Teoria Elementar dos Números, Álgebra e Geometria.

Ao sugerir a utilização da observação de regularidades e da generalização de padrões de maneira transversal, tento colocar em prática algumas ideias de Whitehead (1929/1967, apud Doll, 1997) sobre os objetivos da educação:

Não ensine assuntos demais... Aquilo que você ensinar, ensine cuidadosamente... Faça com que as idéias introduzidas na educação de uma criança sejam poucas e importantes, e faça com que elas sejam lançadas em todas as combinações possíveis. (WHITEHEAD, 1929/1967, apud DOLL, 1997, p. 158)

Dessa forma, para que a ideia de Whitehead seja aplicada no ensino da Matemática, proponha o emprego do tema, “observação de regularidades e a generalização de padrões”, de maneira cuidadosa, explorando ideias importantes, fazendo com que elas sejam lançadas em todas as combinações possíveis. De acordo com Doll Jr (1997), esse conceito de lançar ideias em todas as combinações possíveis é essencial, pois permite a professores e alunos, criar o significado a partir da experiência e da realidade.

Como perspectiva futura, tendo em vista todo o processo envolvido nesse instrumento diagnóstico, acredito que as questões a seguir, que surgiram ao longo da pesquisa instiguem novas investigações:

- Em quais conteúdos podemos utilizar atividades envolvendo observação de regularidades e generalização de padrões, de forma a beneficiar a aprendizagem dos alunos?
- Como os professores consideram a observação de regularidades e a generalização de padrões e como eles abordam esse assunto?
- Os professores são preparados para utilizar a observação e a generalização de padrões e permitir aos alunos uma apreensão significativa das ideias da álgebra?
- Uma proposta de ensino-aprendizagem utilizando a observação e generalização de padrões ao longo de todo o EF permitiria a esses

alunos uma maior fluência algébrica e uma apreensão significativa da notação algébrica formal?

Enfim, espero que a elaboração desse trabalho possa auxiliar e estimular novas pesquisas sobre o assunto, além de reforçar a importância da transversalidade das atividades que envolvem a observação de regularidades e generalização de padrões em todo o ensino básico.

Concluo meus comentários com frases de dois grandes estudiosos, que para mim se complementam dentro da perspectiva educacional à qual estou inserida. Elas me impulsionaram desde o início desse estudo e certamente continuarão a fazer parte de minha vida profissional:

“Se enxerguei mais longe foi porque me apoiei em ombro de gigantes.” (Isaac Newton)

“Ao incentivar os alunos a explorar padrões que têm dado provas da sua força e significado, oferecemos-lhes amplos ombros de que eles vão ver mais longe que purdemos²⁹” (Steen, 1990).

²⁹ By encouraging students to explore patterns that have proven their power and significance, we offer them broad shoulders from which they will see farther than we can.

Referências

ANDREZZO, K. L. *Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra por alunos sem acuidade visual*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

ARCHILIA, S. *Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões*. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ALMEIDA, M. M. M. de. *Estratégias de Generalização de padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus Professores*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARBOSA, A.; VALE, I.; PALHARES, P. *A Resolução de Problemas e a Generalização de Padrões: Estratégias e Dificuldades Emergentes*. Simpósio Sociedad Española de Investigación Matemática. Espanha: SEIEM, 2008.

Disponível em:

<<http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Apo02BarbosaVale.pdf>> Acesso em: 21/07/2009.

BLANTON et al. Early Algebra In: Katz, V. J. (Edited) *Gateway to a Technological Future* The Mathematical Association of America, 2007. Disponível em:

<www.maa.org/algebra-report/Algebra-Gateway-Tech-Future.pdf>. Acesso em: 07/02/2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental. *PCN: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN: Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

_____. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN⁺: Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

_____.Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, Departamento de Políticas do Ensino Médio. *Orientações Curriculares do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CARVALHO, C.A.S. *O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética*. Dissertação (Mestrado) PUC-SP: São Paulo, 2008.

DEVLIN, K. *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, 2002.

DOLL JR., W. E. *Currículo: uma perspectiva pós-moderna*. Tradução: Maria Adriana Veríssimo. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, p. 11-33, 2003.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O Funcionamento Cognitivo e Semiótico das Representações Gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. In: *REREMAT - Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática*. UFSC, p. 26-38, 2006. Disponível em :<<http://www.redemat.mtm.ufsc.br>> Acesso em: 03/06/2009.

FROBISHER, L.; THRELFALL, J. Teaching and Assessing Patterns in Number in the Primary Years. In: Orton, A. (Edited) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, London: Cassell, 1999.

HERBERT, K.; BROWN, R. *Patterns as tools for algebraic reasoning*. Teaching Children Mathematics, v. 3, p. 340-345, 1997.

KILPATRICK, J; SWAFFORD, J, & FINDELL, B. (Ed.) *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academies Press, 2001. Disponível em: <<http://www.nap.edu/openbook.php?isbn=0309069955>>. Acesso em: 21/06/2008.

LUDKE,M.; ANDRÉ M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 2003. (Coleção Temas Básicos e Ensino).

MACHADO, S. D. A. et al. *Educação Matemática: uma introdução*. 2.^a ed – São Paulo: EDUC, 2002.

MCCALLUM et al. Intermediate Algebra In: Katz, V. J. (Edited) *Gateway to a Technological Future*. The Mathematical Association of America, 2007. Disponível em: <www.maa.org/algebra-report/Algebra-Gateway-Tech-Future.pdf>. Acesso em: 07/02/2008.

ME-DEB. *Currículo nacional do ensino básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica. Disponível em: <<http://www.dgidc.min-edu.pt/public/cnebindex.asp>> Acesso em: 06/05/2007.

- MODANEZ, L. *Das sequencias de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.
- MURARI, C. Espelhos, caleidoscópios, simetria, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria. In: Bicudo, M. A. V.; Borba, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, p. 198-212, 2004.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M. A. V. (org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora da UNESP, cap. 12, p. 199-218, 1999.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Bicudo, M. A. V.; Borba, M. C. *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, p. 213-231, 2004.
- ORTON, A; ORTON J. Pattern and the Approach to Algebra. In: Orton, A. (Edited) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, London: Cassell, 1999.
- PEREZ, E. P. Z. *Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão*. Dissertação (Mestrado) PUC-SP: São Paulo, 2006.
- POLYA, G. *How to solve it*. Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/users/adam/Matematica/Textos/polya%202.pdf>> Acesso em: 20/05/2009.
- PONTE, J. P. *Números e álgebra no currículo escolar*. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE, 2005. Disponível em: <<http://www.spce.org.pt/sem/2jp.pdf>> Acesso em: 06/05/2007.
- RESENDE, M.R. *Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.
- SÃO PAULO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: SEE, 2008a. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/contents/SIGS-CURSO/sigsc/upload/br/site_25/File/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf> Acesso em 10/01/2008.
- _____. *Saresp: Matrizes de Referência para a Avaliação*. São Paulo: SEE, 2008b. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/contents/SIGS-CURSO/sigsc/upload/br/site_25/File/matr_2008_1.pdf> Acesso em: 10/01/2008.
- _____. *Caderno do professor. Matemática: Ensino Médio 1ª série 1º bimestre*. São Paulo: SEE, 2008c.

SILVA, R. S. *Oficina Experiências Matemáticas: Professores e a exploração de padrões*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

STEEN, L. A. Patterns. In: Steen, L. A. (Editor) *On the Shoulders of Gigants: New Approaches to Numeracy*. Washington: National Academy Press, 1990.
Disponível em: <http://www.nap.edu/catalog/1532.htm> Acesso em: 24/08/2007.

VALE, I.; FONSECA, L.; BARBOSA, A.; PIMENTEL, T.; BORRALHO, A.; CABRITA, I. *Padrões no Currículo de Matemática: presente e futuro*. Simpósio Sociedad Española de Investigación Matemática. Espanha: SEIEM, 2008.
Disponível em:
<<http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Apo02ValeFonseca.pdf>> Acesso em: 23/03/2009.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. *Os padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra*. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE, 2005. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/13iv.pdf>
Acesso em: 24/02/2008.

VALE, I.; PIMENTEL, T. *Padrões: um tema transversal do currículo*. Revista Educação e Matemática, nº 85, p. 14 –20. Lisboa: APM, nov-dez 2005.

ZAZKIS, R.; LILJEDHAL, P. *Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation*. Educational Studies in Mathematics Teaching Children Mathematics, v. 49, p. 379-403, 2002. Disponível em:
<<http://wikis.lib.ncsu.edu/images/archive/9/9e/20080902025601!PatternsESM.pdf>>
Acesso em: 16/03/2008.

ANEXOS

Anexo 1

ORIENTAÇÃO SOBRE OS CONTEÚDOS DO BIMESTRE

O conteúdo básico que servirá como objeto de estudo durante o primeiro bimestre da primeira série é referente ao eixo Números e está subdividido em conjuntos numéricos e seqüências numéricas, em particular, a progressão aritmética e a geométrica. Neste caderno vamos sugerir um estudo de seqüências por meio da análise de regularidades, antecedendo o estudo das progressões. O estudo das seqüências é importante, pois, além da larga aplicação em problemas (em contextos matemáticos e de outras áreas do conhecimento), pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que ao identificar regularidades o aluno pode generalizá-las e expressá-las por meio de sentenças algébricas.

Os conteúdos referentes a este bimestre estão organizados em oito unidades. As sugestões para a sala de aula, referentes aos assuntos dessas unidades e que estão distribuídas em quatro Situações de Aprendizagem (A, B, C e D), procuram contemplar diferentes contextos e estão em um nível possível de ser desenvolvido com alunos do 1ª série do Ensino Médio.

A **Unidade 1** está destinada aos conjuntos numéricos, com o objetivo de retomar as operações e destacar as relações de inclusão entre os conjuntos estudados em séries anteriores, acrescentando-se a esse estudo as representações de intervalos de números reais. É importante observar que, em relação

aos conjuntos numéricos, conquanto sejam revisitados no início do ano letivo, seu estudo deverá avançar ao longo do primeiro bimestre, permeando todo o trabalho com seqüências, quando os alunos terão oportunidade de discutir sobre as possibilidades de estabelecer a correspondência biunívoca entre os números naturais e o conjunto dos naturais pares, entre os números naturais não nulos e o conjunto dos números naturais ímpares, ou ainda entre os naturais não nulos e os inteiros (positivos ou negativos). Finalmente, dependendo do interesse e do desenvolvimento da classe, o professor poderá iniciar uma discussão a respeito da correspondência biunívoca entre os números naturais não nulos e os números racionais, auxiliando os alunos na construção de uma idéia inicial da enumerabilidade do conjunto dos números racionais.

Neste caderno são retomadas noções já estudadas anteriormente sobre números: durante o estudo de progressões geométricas, por exemplo, estuda-se a obtenção da geratriz de uma dízima periódica (Situação de Aprendizagem C).

A **Unidade 2** é dedicada à exploração de situações que envolvem seqüências, numéricas ou não, em que se solicita do estudante a identificação de regularidades e a generalização de padrões (Situação de Aprendizagem A).

Na **Unidade 3** há propostas de situações que apresentam seqüências definidas

Anexo 2

por recorrência, ou seja, define-se o primeiro termo a_1 juntamente com uma lei que permite determinar qualquer termo a_{k+1} a partir do termo precedente a_k para $k \geq 1$ e enfatiza-se a obtenção da expressão do termo geral da sequência (Situação de Aprendizagem A).

Após esse trabalho inicial com as seqüências, a **Unidade 4** destina-se ao desenvolvimento das noções relacionadas às progressões aritméticas (PA): sua identificação, obtenção de um termo a partir de um termo conhecido, determinação de um termo qualquer por meio de uma fórmula de recorrência e construção da fórmula do termo geral. Procura-se enfatizar, nas situações de aprendizagem apresentadas, o aspecto funcional da PA, colocando em destaque a associação de todo número inteiro positivo (índice de algum termo da progressão considerada) a um único número real. Sob essa perspectiva, os termos da seqüência $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ são os elementos do conjunto imagem. Ao se encarar a seqüência como uma função, convém destacar que os únicos pontos do gráfico cartesiano que a representam são $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots$ (Situação de Aprendizagem B).

A **Unidade 5** trata do desenvolvimento da fórmula da soma dos termos de uma PA e do trabalho de interpolação de meios aritméticos entre dois números reais dados (Situação de Aprendizagem B).

Para a **Unidade 6** são discutidas situações que envolvem progressões geométricas (PG): sua identificação, cálculo de um termo da PG a partir de um termo dado, determinação de um termo qualquer da PG por meio da fórmula

de recorrência e construção da fórmula do termo geral. Enfatiza-se também o aspecto funcional da PG, dando destaque à associação de todo número inteiro positivo (índice de algum termo da progressão considerada) a um único número real (termo da PG) (Situação de Aprendizagem C).

Para a **Unidade 7** são apresentadas sugestões para o desenvolvimento da fórmula da soma dos termos de uma PG (Situação de Aprendizagem C).

Finalmente, para a **Unidade 8**, sugere-se a proposição de novos problemas sobre progressões geométricas, enfatizando situações que envolvem o limite da soma de uma progressão geométrica infinita (Situação de Aprendizagem D).

Convém destacar que as situações de aprendizagem ou atividades deste Caderno devem ser consideradas não como uma mera lista de exercícios ou problemas cujo objetivo é o de simples uso de técnicas que devem ser transformadas em rotinas automatizadas, pelo contrário, as situações nelas propostas têm por finalidade apresentar contextos de modo que as noções estudadas tenham significado para o aluno. Muitas dessas situações podem ser encaradas como ponto de partida para o estudo de determinada noção ou propriedade. Essa consideração não significa que o professor não deva propor exercícios de síntese com a finalidade de organizar as conclusões e os resultados encontrados.

Cabe também ressaltar que em um trabalho de elaboração de sugestões como este é muito

Anexo 3

difícil prever todas as variáveis intervenientes e torná-las plenamente adequadas a uma diversidade muito grande de realidades. O papel do professor é, evidentemente, fundamental em todos os aspectos: na redução ou na ampliação da

abordagem sugerida, na ordenação das atividades, na seleção ou elaboração de novos problemas ou exercícios, na adequação das propostas à classe e no fato de não submeter todos os alunos ao mesmo ritmo.

Unidades do primeiro bimestre

Sinteticamente, as oito unidades que devem ser desenvolvidas no bimestre são apresentadas a seguir:

1. Conjuntos numéricos.
2. Sequências: padrões e regularidades.
3. Sequências: generalização e fórmula do termo geral.
4. Progressão aritmética: termo geral.
5. Progressão aritmética: interpolação e soma dos termos.
6. Progressão geométrica: fórmula do termo geral.
7. Progressão geométrica: soma dos termos.
8. Progressão geométrica: limite da soma e outros problemas.

Anexo 4**Solicitação de Autorização à Direção da Escola**

Senhora Diretora da E. E. Manuel Cabral

Eu, Cristiane Regina de Moura Ferreira, peço sua autorização para realizar uma atividade de pesquisa com a participação dos alunos das 1^{as} séries do Ensino Médio desta Unidade Escolar (UE).

A análise dos resultados dessa atividade contribuirá para melhor compreender as dificuldades dos alunos sobre o tema abordado. A divulgação de minha dissertação de mestrado possibilitará a outros professores do Ensino Médio a tomar conhecimento e a aproveitar as considerações feitas para a melhoria do ensino de Matemática nesse nível.

Todos os alunos das primeiras séries serão convidados a participar das atividades sem serem obrigados a, só participarão aqueles que se propuserem a ser voluntários. Entregarei um certificado de participação aos alunos voluntários que vierem a todas as sessões propostas.

As atividades serão desenvolvidas na própria escola em horário “contrário” às suas aulas.

Primeiramente conversaremos com os professores de matemática da 1^a série, e pediremos a eles que entreguem aos alunos voluntários carta de solicitação de autorização a seus responsáveis para participarem das atividades.

Em anexo cópia da carta endereçada aos pais.

As atividades ocorrerão em sessões de 40 minutos cada a serem realizadas em dias letivos de outubro e novembro de 2008.

Agradeço sua atenção, contando com sua compreensão.

Tremembé, 29 de setembro de 2008

Cristiane Regina de Moura Ferreira

Pesquisadora

Anexo 5**Carta aos pais**

Prezado responsável pelo aluno _____.

Vamos realizar nos dias _____ no horário das _____, atividades sobre assunto de matemática tratado neste ano de 2008, na 1ª série do EM.

Essas atividades têm o objetivo de avaliar a compreensão dos alunos sobre o tema, e os resultados servirão para uma dissertação de mestrado que pode beneficiar a melhoria do ensino de matemática do Ensino Médio.

Seu filho propôs ser voluntário nessa pesquisa, e sabe, que tal participação não valerá nota, as atividades serão desenvolvidas na própria escola em horários contrários as suas aulas e que receberá um Certificado de Participação se for a todas as sessões previstas.

Os nomes dos alunos voluntários, na divulgação dos resultados dessa pesquisa, serão mudados por nomes “fantasia” para preservar suas identidades. As possíveis gravações que houver serão utilizadas exclusivamente para fins acadêmicos.

Contando com sua compreensão, agradeço antecipadamente a atenção.

Tremembé, ____ de outubro de 2008.

Profa. Cristiane R. Moura Ferreira

Diretora da Escola

Autorizo o aluno(a) _____,
pelo qual sou responsável a participar das atividades de pesquisa proposta pela professora Cristiane Regina de Moura Ferreira nos termos da solicitação feita.

Assinatura de um dos responsáveis pelo(a) aluno(a)

Tremembé, ____ de outubro de 2008.