PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ROSANIA MARIA DA SILVA

Diferentes usos da variável por alunos do Ensino Fundamental

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ROSANIA MARIA DA SILVA

Diferentes usos da variável por alunos do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Doutor Benedito Antonio da Silva.***

SÃO PAULO
2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: __________________________________Local e Data: ______________

Dedico este trabalho
aos meus pais,
Manoel e **Maria Hosana**,
pelo carinho, incentivo e
preocupação constantes.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força e coragem que me proporcionou para enfrentar todas as barreiras e conseguir realizar esse estudo.

À minha grande família, pelo incentivo, por entender a minha ausência, apoiar minhas decisões e pela excitação e orgulho com que sempre reagiu aos resultados que tive na vida acadêmica. Em especial, aos meus pais, Manoel e Maria Hosana; aos meus irmãos: Ozenira, Marcio, Márcia, Juliana e Marcos; aos meus sobrinhos Gabriel e Fellipe; e também aos meus cunhados Alex e Jocélia.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, por aceitar a orientação dessa pesquisa. Pelas críticas, discussões e sugestões que tanto contribuíram para o meu amadurecimento profissional. Pela paciência, atenção e confiança reveladas ao longo do curso.

Aos professores participantes da banca examinadora:

à Profª Dra. Silvia Dias de Alcântara Machado pela divulgação dos trabalhos sobre o Modelo 3UV, pelas valiosas sugestões e apontamentos feitos à época do exame de qualificação e durante o curso de Didática II, que favoreceram minhas reflexões e crescimento como professora e pesquisadora e também a tentativa de melhorar este relatório.

ao Prof. Dr. Geraldo Pompeu Júnior, pelo aceite em participar da banca, pelas valiosas críticas, comentários, sugestões e questionamentos feitos no momento do exame de qualificação, que me fizeram refletir sobre aspectos que não havia pensado antes e tentar melhorar o relatório.

À Secretaria Estadual de Educação do Governo do Estado de São Paulo pelo incentivo concedido por meio do Programa Bolsa Mestrado.

Aos professores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da PUC/SP, com quem tive o prazer de conviver, pelas contribuições para o meu crescimento profissional.

Aos alunos, professores e equipe gestora da Escola Estadual em que apliquei o questionário de pesquisa, pelo aceite em participar desse trabalho, pela organização, incentivo, companheirismo e confiança prestados.

Às minhas queridas amigas: Ana Nunes, Ana Sarmento, Adriana, Michele, Ruth, Sarah e Valnide, que acompanharam as dificuldades dessa trajetória, mostrando sempre apoio e admiração.

Ao meu amigão Milton, pela amizade preciosa, pelas dicas, por além de me incentivar a entrar no Programa, sempre se mostrar presente em minha vida para tudo que precise. Também por aceitar participar como observador no momento da aplicação do questionário.

A Dani, pelas discussões sobre o Modelo 3UV, pelas sugestões, pelo incentivo e pela excelente relação de amizade que criamos e que espero sempre ter.

Ao Paulo, que me apresentou o material sobre o Modelo 3UV.

Aos amigos Cleber e Juliana, pelo apoio, incentivo, troca de experiências e pela amizade e carinho que conquistamos uns dos outros.

Ao pessoal da Diretoria de Ensino de Diadema; aos colegas do Grupo de pesquisa *O elementar e o superior em matemática* da PUC-SP; aos colegas de trabalho; aos meus alunos; e, enfim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

A Autora

RESUMO

Este relatório se refere a um estudo de caso que teve por objetivo verificar a compreensão e os usos da variável por alunos de oitava série, em questões que envolvem sua simbolização, interpretação e manipulação. Para tal, foi utilizada uma ferramenta teórico-metodológica denominada Modelo dos três usos da variável (3UV), apresentada por Trigueros e Ursini (2001). Tal modelo relaciona as habilidades necessárias ao entendimento dos três principais usos da variável na álgebra escolar: incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional. Como ferramenta metodológica foi utilizado na elaboração de um questionário para identificar os significados e usos da variável por dezessete alunos de uma escola da rede estadual da grande São Paulo. Além da aplicação do questionário, que contou com a presença de um observador, foram utilizadas gravações em áudio e entrevistas semi-estruturadas como instrumentos de coleta de informações. O conjunto de dados obtido foi analisado tomando como referências o Modelo 3UV e os aspectos que, segundo Caraça (1954) sintetizam o conceito de variável: o simbólico e o substancial. Os resultados mostram a dificuldade de simbolização, principalmente quando deve ser por variáveis nos papéis de número genérico ou em relacionamento funcional. Quanto à interpretação, esses alunos, quando questionados, citam a variável como representante de quaisquer valores, porém, nem sempre se referindo ao conjunto que ela representa, mas também ao seu coeficiente. Em procedimentos de manipulação, indicam a falta de interpretação da variável nas sentenças algébricas, mostrando o predomínio do uso de algoritmos para a resolução e a falta de entendimento das soluções obtidas, mesmo quando foram utilizados corretamente. Os resultados também apontam que os aspectos simbólico e substancial se destacam, separadamente, dependendo do que requer a questão.

Palavras-chave: variável; incógnita; número genérico; simbolização, interpretação; manipulação; relação funcional; conceito de variável

ABSTRACT

This report refers to a case study that aimed to check the understanding and usage of the variable for students of eighth grade, in questions that involving their symbolization, interpretation and manipulation. Thus, we used a tool called the theoretical and methodological the three uses of variable model (3UV), presented by Trigueros and Ursini (2001). This model relates the skills necessary to understanding the three main uses of the variable in school algebra: unknown number, general number and variables in functional relationship. As a methodological tool it was used to design a questionnaire to identify the meanings and uses of the variable by seventeen students of a public school in the city of São Paulo. Besides the application of the questionnaire, which was attended by an observer, were used in audio recordings and semi-structured interviews as tools for collecting information. The set of data was analyzed taking as references the Model 3UV and aspects that, according Caraça (1954) summarize the concept of variable: the symbolic and substantial. The results show the difficulty of symbolization, especially when it should be variable of roles in general number or functional relationship. The interpretation, these students, when questioned, citing the variable as a representative of any values, but not always referring to all that it represents, but also its coefficient. In procedures for manipulation, indicating a lack of interpretation of the variable in algebraic sentences, showing the predominance of the use of algorithms for the resolution and lack of understanding of the solutions obtained, even when used correctly. The results also show that the symbolic and substantive issues stand out, separately, depending on what the question requires.

Keywords: variable; unknown number, general number, symbolization, interpretation, manipulation, functional relationship, concept of variable

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O relatório que aqui apresentamos mostra o desenvolvimento de um estudo que teve por objetivo verificar os significados que uma amostra de alunos de oitava série atribui à variável e a forma com que utilizam esses significados no seu tratamento.

No primeiro capítulo, intitulado PROBLEMÁTICA, descrevemos o percurso que nos levou a esse estudo e algumas leituras que mostram a relevância da abordagem do conceito de variável em investigações. Destacamos também a necessidade de abordagem desse conceito no ensino de forma significativa, de modo a contribuir para o entendimento de conteúdos do Cálculo e da Álgebra.

No capítulo 2, REFERENCIAL TEÓRICO, apresentamos as considerações de Caraça sobre o conceito de variável; o estudo sobre os diferentes usos da letra na análise de Küchemann e alguns trabalhos que desencadearam a construção do Modelo dos três usos da variável, ou simplesmente, Modelo 3UV, apresentado pelas pesquisadoras Trigueros e Ursini (2001).

O referido Modelo consiste numa detalhada descrição dos aspectos que envolvem a compreensão da variável em seus três principais usos na álgebra escolar: incógnita, número genérico e variáveis relacionadas, no que se refere às habilidades de simbolização, manipulação e interpretação. Dentre outras finalidades, pode ser utilizado como ferramenta de análise e diagnóstico de dados a respeito da concepção de alunos e professores sobre o conceito de variável e também para elaborar atividades que explorem os três principais usos da variável. Como tal, foi utilizado para a elaboração do questionário de pesquisa e análise dos dados obtidos da sua aplicação.

No capítulo 3 – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS, além de justificar nossas escolhas, expomos as questões utilizadas e as habilidades necessárias à resolução. Apresentamos também algumas características da metodologia estudo de caso e a trajetória de elaboração do questionário de pesquisa, explicitando as mudanças feitas nesse percurso e as decisões tomadas quanto às formas de coleta de dados.

No capítulo 4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS – apresentamos a análise dos dados obtidos com a aplicação das questões, utilizando o conjunto de dados obtidos dos registros de observação, áudio, entrevista e a própria produção escrita das equipes participantes.

Na última seção - CONSIDERAÇÕES FINAIS - destacamos algumas reflexões quanto à idéia de variável apresentada pelos alunos e a abordagem do conceito de variável no ensino.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

As lembranças de algumas dúvidas que tivemos durante a escolarização básica e na graduação nos fizeram refletir sobre as dificuldades apresentadas e processos mentais envolvidos no entendimento do conceito de função. Em específico, a diferença entre equação do 2º grau e função quadrática era algo que nos inquietava muito, porque pensávamos, erroneamente, que se tratava do mesmo conteúdo com nomes diferentes.

Essa confusão reflete como resultado da ênfase em procedimentos algorítmicos no ensino, sem a exploração da variação e dependência das variáveis e, no caso das equações de 2º grau, a falta de interpretação da incógnita. No caso da função quadrática, algumas práticas pedagógicas acabam privilegiando as maneiras mais rápidas de esboçar o gráfico, incentivando a obtenção das coordenadas do vértice e os zeros da função, ou seja, a recair numa equação do 2º grau. Esta que muitas vezes é também abordada como se a única coisa que se possa fazer seja o calculo dos valores da incógnita utilizando, geralmente, a fórmula de Bhaskara.

Na prática docente também nos preocupam erros cometidos pelos alunos, principalmente pela falta de interpretação das letras contidas em expressões. É comum observar eles escreverem ou falarem que "$2 + x = 2x$". O que pensam sobre x quando dão respostas dessa forma? Estariam apenas agregando os dois termos para obter apenas um termo como resultado? Que interpretação fazem do sinal de igual?

Para Souza e Diniz (2003) uma das causas para a falta de interpretação das letras pelos alunos é a forma com que tradicionalmente elas são abordadas no ensino. De acordo com as autoras, na 6ª série, elas são apreendidas pelos alunos como um valor numérico que é desconhecido e que deve ser determinado após alguns cálculos. Na série seguinte muda-se o enfoque e as letras passam a ser consideradas marcas no papel, pois o objetivo é ensinar regras que permitam a manipulação dos símbolos algébricos. Na seqüência, se retoma o trabalho com incógnitas em equações do 2ºgrau para a idéia de função ser apresentada ao final da oitava série. Só neste momento a variável é apresentada com toda a sua força, isto é, como substituta de vários possíveis valores de uma grandeza relacionada com outra. No entanto, isto também passa despercebido pelos alunos que apresentam grande dificuldade em aceitar expressões da forma $y = 2x + 3$ ou $y = x^2 - 5x + 6$, pois, após o trabalho insistente com incógnitas, elas parecem a muitos deles como uma equação literal ou apenas uma equação em que se apressam a calcular o discriminante. (p. 1)

Como se pode observar o trabalho com álgebra é apresentado de forma fragmentada, enfatizando ora um aspecto, ora outro, sem se preocupar com a ligação entre eles e com sua contextualização, ignorando totalmente a formação da idéia básica da álgebra que é o conceito de variável em suas múltiplas formas: incógnita, parâmetro e variável propriamente dita. (SOUZA e DINIZ, 2003, p. 3)

No grupo de pesquisa, *O elementar e o superior em Matemática* da PUC-SP, discutimos sobre diversos fatores que indicam o sucesso e as dificuldades encontradas por alunos de diferentes níveis escolares na abordagem de temas como os conceitos de Função, Limite, Derivada e Integral. A partir dessas discussões percebemos o conceito de função como tema central, pois, se o aluno não o desenvolveu satisfatoriamente, dificilmente conseguirá entender as outras noções do Cálculo.

Braga (2006) reforça as conclusões a que chegamos. Para ele "o sucesso no ensino do Cálculo estaria intimamente ligado a um bom domínio de função por parte do aluno (...) tanto do ponto de vista psicológico, como do cultural, a inclusão de noções de Cálculo prende-se intimamente ao desenvolvimento da idéia de função".(p. 51)

As discussões desencadeadas no grupo de pesquisa, aliadas às nossas inquietações, nos permitiram compreender a importância da interpretação das variáveis para o entendimento do conceito de função.

A necessidade de trabalhar tais conteúdos com os alunos nos impulsionou a um estudo sobre as interpretações das letras na matemática e a sua relação com o desenvolvimento do conceito de função.

Demana e Leitzel respaldam essa idéia: "Em particular, podem-se estabelecer as idéias de variável e função, lançando as bases para o sucesso no curso de álgebra e, conseqüentemente, nos futuros cursos preparatórios para a faculdade."(1995, p. 78)

Com o interesse de um estudo mais aprofundado especificamente sobre o conceito de variável, três integrantes do referido grupo de pesquisa formaram um subgrupo para pesquisar e discutir sobre a sua importância no ensino da matemática. Cada integrante desse subgrupo optou por um enfoque diferente. Dessas escolhas nasceram as dissertações de Queiroz (2008), cujo objetivo foi verificar os conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica; o de Rodrigues (2008) sobre as concepções de variável mobilizadas por alunos ao final do Ensino Médio e; por fim, a que apresentamos nesse relatório, cujo objetivo foi verificar os significados e usos da variável por alunos de oitava série do Ensino Fundamental.

As primeiras atividades dos componentes desse subgrupo foram as de procura e leitura de textos que abordassem o tema. Nessa busca encontramos trabalhos que mostram a necessidade da compreensão do conceito de variável para um bom desempenho na álgebra.

Malisani (2002) aponta que muitas das dificuldades que os alunos encontram no estudo da álgebra podem ser conseqüência da construção inadequada do conceito de variável. Esta construção deve incluir suas principais concepções e a possibilidade para passar de uma à outra com flexibilidade, em relação as exigências para a resolução do problema." (p. 245)

De acordo com House (1995) é de importância primordial a compreensão de conceitos como o de variável e o de função para conceber a habilidade algébrica básica como algo que ultrapasse a pura manipulação de símbolos. (p. 5)

Nas orientações do caderno do gestor da proposta curricular da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo indica-se que o estudo das variáveis é um dos componentes que estão na base dos conceitos algébricos. (São Paulo, 2008, p. 40)

Em outros trabalhos encontramos autores que se reportam aos significados e à necessidade de exploração dos diferentes usos das variáveis.

Dos Parâmetros Curriculares Nacionais destacamos:

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. (Brasil, PCN – Ensino Fundamental - Matemática, 1998, p.121)

Ainda de acordo com essa fonte "é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função (...) a generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos" (Brasil, 1998, p.84)

Alguns outros resultados de pesquisas também sugerem a necessidade de explorar, através de situações-problema diversas, a familiarização com os diferentes usos da variável, posto que essas experiências propiciam a construção do conceito de variável, como os mencionados por Caraça (1984), Sierpinska (1992) e Tinoco (1996) (apud, TINOCO, 2007) e Trigueros e Ursini (2001).

Os resultados apresentados por Booth (1995), em entrevistas com alunos de 13 a 16 anos, mostraram que alguns erros comumente cometidos na álgebra podem ter origem, entre outros aspectos, nas idéias dos alunos sobre o significado das letras[1] e das variáveis (p. 24).

Para ela, quando se trabalha com a álgebra, as situações-problema são traduzidas para a linguagem algébrica e, assim, a letra, que pode representar uma incógnita, um termo genérico ou uma variável em relação funcional, deveria continuar sendo interpretada como valor ou valores que devem satisfazer a expressão. Porém, nesse campo, o foco é o estabelecimento, a expressão e a manipulação da própria expressão geral, e não apenas uma resposta numérica como geralmente esperam os alunos. (Booth, p. 24)

De acordo com Trigueros e Ursini (2001), os três principais usos da variável são: incógnita (unknown number), número genérico (general number) e variáveis relacionadas (related variables). Para as autoras, esses diferentes usos aparecem, freqüentemente, no mesmo problema e desconsiderá-los pode ser a causa de algumas dificuldades apresentadas pelos alunos quando trabalham com álgebra. (p. 327)

Elas explicitam a necessidade de englobar cada um desses usos, ou facetas da variável, em um único conceito:

> os diferentes usos do conceito de variável estão na base das dificuldades que os alunos encontram ao tentar aprender a álgebra [...] a possibilidade de integrar um conjunto de idéias relacionadas em um único conceito pode ajudá-los a focalizar a atenção nele. (URSINI E TRIGUEROS, 2001, p. 333).

A noção de incógnita é abordada no ensino desde as séries iniciais, quando se deparam com situações em que precisam descobrir o número que satisfaz a igualdade de uma expressão numérica. Este número desconhecido é muitas vezes representado por uma lacuna, um triângulo, um quadrado ou outro símbolo qualquer. Quanto a isso, Kieran (1995) alerta

---

[1] Booth distingue letra de variável relacionando uma à aritmética e, a outra, à álgebra. A primeira pode ser utilizada em aritmética como abreviação de uma palavra. Por exemplo, “m” para designar “metros”. Na álgebra, a letra é representante de valores, portanto, variável.(p. 30)

que, muitas vezes, o que é explorado em equações ou sentenças, tais como $\square + 3 = 7$ ou $n + 3 = 7$, é a igualdade inversa correspondente: $7 - 3 = ?$, o que pode levar a uma visão da letra em álgebra como sendo resultado de um conjunto de operações inversas, ao contrário de uma abordagem conceitual das equações, em que é dado significado à letra como um número, pelo método da substituição. (p. 109)

Além disso, é comum pensar na variável como ente que pode assumir um único valor, como ilustra Kuchemann (1981):

> mesmo quando as crianças interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em "$x + 3 = 8$", e não números genéricos ou variáveis como em "$x + y = y + x$" ou "$A = b \cdot a$". (apud Booth, 1995, p. 31)

Para Souza e Diniz (2003) a idéia de função está presente nas fórmulas trabalhadas desde as séries iniciais. As autoras defendem que a álgebra deveria ser apresentada inicialmente através da relação entre grandezas, ou seja, a partir da idéia de função, em que o conceito de variável é absolutamente natural desde que não nos preocupemos com formalismos excessivos e sim com as idéias fundamentais. (...) "a idéia de função consta desde a sexta série quando trabalhamos razões, proporções e porcentagem." (p. 5)

Levando em consideração as leituras realizadas que mostram a necessidade da exploração dos diferentes usos da variável delimitamos como objetivo de pesquisa verificar como os alunos de oitava série do Ensino Fundamental utilizam a variável em questões que envolvem a interpretação, a manipulação e a simbolização de sentenças algébricas. Para atingir esse objetivo, pretendemos responder às seguintes questões:

- Que significados os alunos de oitava série atribuem à variável?
- Que conhecimentos explicitam ao manipular as variáveis?

Para tentar responder a esses questionamentos recorremos a um estudo mais aprofundado sobre as pesquisas que tratam dos diferentes usos da variável, sobre as quais apresentamos mais detalhes no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 2

REFERENCIAL TEÓRICO

Uma das primeiras indagações que as leituras das obras sobre os usos da variável nos despertaram foi 'o que é variável?'. Esse questionamento nos encaminhou a análise de obras de Caraça, dentre as quais uma noção de variável é explicitada.

Além das considerações do autor supracitado abordamos neste capítulo as pesquisas de Küchemann sobre os diferentes usos da letra na álgebra. Também apresentamos as pesquisas de Trigueros e Ursini que desencadearam a criação do Modelo 3UV, o Modelo dos três usos da variável - um referencial, dentre outras aplicações, para a análise e criação de questões que explorem o conceito de variável.

2.1 O conceito de variável por Caraça

Para Caraça (1954) as duas noções fundamentais que estão na base da definição de função são as idéias de variável e de correspondência entre duas variáveis. De acordo com o autor, toda idéia de correspondência implica na idéia de dependência e o conceito de função tem por objetivos a tradução, em termos do rigor matemático, dos conceitos de dependência e de lei. Porém, não se deve confundir os conceitos de dependência e de lei, pois se pode saber da dependência de dois fenômenos sem conhecer a lei que os relaciona. (p. 56)

Em sua obra de 2005 o autor esclarece o que denomina por lei da função começando por apresentar como exemplo uma tabela de correspondência entre tempo (*t*) e espaço (*e*):

tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
Espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Caraça prossegue explicando que não é nesta simples tabela que se encontra toda a regularidade, a lei quantitativa, mas ela dá uma primeira idéia dessa lei. A tabela apenas representa duas sucessões, dois conjuntos de números postos em correspondência. A lei está na forma como essa correspondência do conjunto *t* ao conjunto *e* se realiza, portanto, a lei consiste na forma de correspondência entre dois conjuntos. (p. 119)

Como já mencionado anteriormente, para Caraça o conceito de variável é uma das principais componentes da definição de função. No trecho a seguir o autor se refere à função como sendo um instrumento de estudo das leis quantitativas e apresenta o conceito de variável:

> O instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos; de contrário, teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente.
> Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da forma seguinte: Seja E um conjunto qualquer de números, finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: *x*. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto E, chamamos variável. (CARAÇA, 2005, p. 119)

Embora, para Caraça, o conceito de variável tenha surgido da necessidade de representar a generalidade dos elementos dos conjuntos que se correspondem em uma relação funcional, quando o autor expõe esse conceito, focaliza a atenção no significado que o símbolo tem, particularmente, como representante de todos os elementos de um conjunto numérico. O autor acrescenta: "a variável é e *não* é cada um dos elementos do conjunto". (idem, p. 120)

Em Caraça (1954) há outras considerações a respeito dessa noção: a variável apresenta um duplo aspecto – o simbólico e o substancial. O simbólico no que se refere à letra ou símbolo tomados; e o substancial, ao conjunto que esse símbolo representa. Esses dois aspectos são inseparáveis, e sua síntese é o conceito de variável. (p. 1)

Nesse sentido, pretendemos verificar como os alunos identificam e associam os aspectos simbólico e substancial. Assim, além da representação simbólica, investigaremos qual o conjunto numérico que tomam ao interpretar as variáveis e também, se mobilizam esses aspectos ao utilizá-las.

2.2 Os diferentes usos da letra na álgebra por Küchemann

Uma das primeiras investigações sobre os usos da letra na álgebra escolar foi apresentada por Küchemann (1987). Em sua pesquisa com alunos de 13 a 15 anos, a partir da análise das respostas obtidas da aplicação de um questionário com questões de álgebra, categorizou seis tipos de interpretações das letras. São eles: letra avaliada, letra não usada e letra usada como objeto, letra usada como incógnita, letra usada como número genérico e letra usada como variável.

Descrevemos a seguir cada um deles, apresentando alguns exemplos de questões que foram utilizadas pelo autor.

Para Küchemann, desses seis tipos de usos das letra, os três primeiros são elementares e consistem em formas de evitar as operações com letras.

A categoria **letra avaliada** se refere aos casos em que a letra é designada, desde o princípio, como um valor numérico. Os alunos atribuem um valor à incógnita evitando operar com ela.

Algumas das questões propostas em sua pesquisa, que desencadearam nessa classificação, foram: 1) "O que você pode dizer sobre ***a***, se ***a* + 5 = 8**?"; 2) "O que você pode dizer sobre ***m,*** se ***m = 3n + 1,*** e ***n = 4***?" (KÜCHEMANN, 1987, p. 105)

Nas respostas à questão 1) o autor percebeu que alguns alunos contaram do 5 até o 8 para obter a resposta: $a = 3$. Uma estratégia em que não operaram com a letra, porém encontraram o valor que ela representa interpretando a igualdade.

A questão 2) envolve a interpretação de mais de uma letra. Porém, quando a segunda igualdade é considerada, pode-se resolver por procedimentos de substituição. (idem, p. 105)

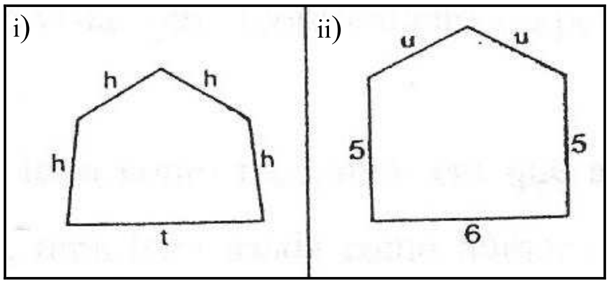
Küchemann classificou por **letra não usada** as respostas em que, segundo ele, a letra é ignorada, ou, quando muito, sua existência é reconhecida, mas não tem significado.

Alguns exemplos apresentados pelo autor, que mostraram esse tipo de resposta, foram: 1) "Se ***a + b = 43***, então ***a + b + 2 =*** *...";* 2) "Se ***n – 246 = 762***, então ***n -247 =*** *...".* (idem, p.106)".

Para o autor, na questão 1) dessa categoria, uma resolução que não envolva o uso da letra simplesmente focaliza a atenção na diferença entre a primeira e a segunda sentença, +2, que é aplicado também a 43. Assim, pode-se simplesmente realizar o cálculo ‘43 + 2 = 45’. Na questão 2) a letra também pode ser evitada combinando as duas sentenças, porém os números ‘grandes’ que a compõe podem conduzir a erros aritméticos. Os resultados do autor mostram que fato de 247 ser maior do que 246 levou alguns alunos a somar 1 a 762 ao invés de subtrair. (KÜCHEMANN, 1987, p.106)

Uma observação pode ser feita a respeito dessa classificação, visto que o raciocínio empregado na questão 1) pode ter sido que para qualquer que seja o valor de $a + b$, somando-se 2 a este, para a igualdade se manter, deve-se somar 2 também ao 43. E isso não quer dizer que a letra não foi usada, ou que não tenha significado para o aluno. A questão 2) também pode não representar um problema com a resolução da equação, mas de operacionalização com números inteiros.

Na categoria **letra usada como objeto**, a letra é vista como uma abreviação para o nome de um objeto ou como um objeto em si mesmo. Um exemplo em que as letras foram usadas dessa maneira foi: “Escreva a expressão do perímetro de cada uma das seguintes figuras:”



De acordo com o autor, para os alunos, nestes itens as letras podem significar apenas os nomes ou as etiquetas para os seus lados (e não os comprimentos desconhecidos dos lados) os quais simplesmente têm que ser somados. Dessa maneira, a letra não é vista como uma entidade numérica.

Küchemann explica que, para o item i) foram encontradas respostas como $4h + 1t$ em vez de $4h + t$ e outros só produziram uma lista de elementos dando respostas como $4h, t$ ou $4ht$ ou mesmo *hhhht*. Do mesmo modo, no item ii) alguns alunos escreveram $2u + 2.5 + 1.6$ em vez de $2u + 16$, que é muito mais um ato de reunião. (idem p. 107)

Observamos que não é possível determinar este tipo de classificação com base apenas em registros escritos, já que o registro, por si só, não revela a interpretação da letra, mas uma forma de simbolizar sua interpretação.

A categoria **letra usada como incógnita** se refere à utilização da letra como a representante de um número específico, mas desconhecido, com o qual é possível operar. Uma questão abordada foi a seguinte:

"O que você pode dizer sobre ***r***, se ***r = s + t;*** e ***r + s + t = 30?"*** (KÜCHEMANN, 1987, p.108)

Para Küchemann, esta questão pode ser resolvida substituindo $s + t$ por r na segunda equação, o que envolve tratar a letra que ainda é desconhecida (embora r possa agora ser avaliado de $r + r = 30$). " Os alunos apresentaram respostas como $r = 41$; $r = 39$; $r = 15$. (idem, p. 108)

Na categoria **letra usada como número genérico** a letra é vista como representante, ou pelo menos podendo representar, vários valores ao invés de um só. Uma questão aplicada pelo autor, foi: "O que você pode dizer sobre ***c***, se ***c + d = 10***; e ***c*** é menor do que ***d***?" (idem, p. 108)

Para essa questão foram obtidas respostas como: $c < 5$; $c = 1, 2, 3, 4$; $c = 10 – d$.

No trecho a seguir o autor explica a diferença entre os usos das letras como incógnita e como número genérico:

> Contrariamente a uma letra como incógnita, quando a letra é pensada como tendo valor particular (mas desconhecido), uma letra usada como número genérico pode tomar mais de um valor. (Uma distinção pode ser feita entre a idéia de uma letra tomando diversos valores e, por sua vez, de uma letra que representa um conjunto de valores simultaneamente. Entretanto, isto não é feito aqui, embora a segunda idéia pareça ser um pouco da primeira que mais tarde fará parte do conceito de variável). (KÜCHEMANN, 1987, p. 109)

Para Küchemann, o conceito de variável implica em algum tipo de entendimento de como valores desconhecidos mudam, o que vai além das idéias já apresentadas ao considerar uma letra como incógnita ou número genérico." (idem, p. 110)

A análise dessas explicações feitas pelo autor sugere que pode existir uma hierarquia nas três últimas categorias de uso das letras.

Uma crítica a respeito é apresentada por Lins e Gimenes (1997) (apud, Christo, 2006). Para esses autores, o método de estudo de Küchemann apóia-se na crença de que "seguir a trajetória do uso de letras permite, de algum modo, seguir a trajetória do desenvolvimento do pensamento algébrico."

> "A crítica mais contundente a estudos que seguem essa tradição, (…), é que ignoram o fato (…) de que a álgebra, incluindo aí qualquer tipo de 'cálculo com letras', é assunto praticamente exclusivo do domínio da escola, e que é provável, que estudos assim estejam investigando, na verdade, um efeito bastante particular: as crianças que já passaram por processo de ensino-aprendizagem ligado a um tema deveriam naturalmente ter mais sucesso em situações que envolvam esse tema. No entanto, a possibilidade de que os resultados indiquem não haver progresso em relação ao nível de escolarização impossibilita afirmar essa crítica de forma mais forte apenas com base numa consideração acerca do que se ensina na escola." (p. 95) (apud Christo, 2006, p. 25)

Para Küchemann o uso geral do termo 'variável' na aritmética generalizada é uma prática comum que serve para esconder o significado do próprio termo e as muitas diferenças no significado que pode ser dado às letras. (KÜCHEMANN, 1987, p.110)

A categoria **letra usada como variável** identifica-se quando a letra é vista como representante de um campo de valores não específicos e existe uma relação sistemática entre dois determinados conjuntos de valores. (idem, p. 111)

O autor utiliza como exemplo a relação $5b + 6r = 90$ para mostrar como seria a interpretação das letras como incógnitas, números genéricos e variáveis.

Se as letras forem consideradas como incógnitas, a relação será uma sentença verdadeira para um particular par de números. Assim, esta sentença é essencialmente estática, não envolve nenhuma idéia de mudança. Por outro lado, quando as letras são usadas como números genéricos, $5b + 6r = 90$ transforma-se numa sentença que é satisfeita por diversos pares de números, tais como: (0, 15), (6, 10), (12, 5), (18, 0). Esta visão envolve a idéia que os valores de b e de r podem mudar, mas não se indica como mudam, para o que é necessário comparar os valores, estabelecendo um relacionamento entre b e r. Tal relacionamento pode ser 'o aumento em b é maior do que a diminuição correspondente em r' , ou 'um aumento em b de 6 é 1 a mais do que a diminuição correspondente em r' , ou mesmo 'o aumento em b é 6/5 da diminuição em r' etc." (idem, p. 111)

Para Küchemann o significado a mais que os relacionamentos deste tipo dão a $5b + 6r = 90$ é um avanço sobre a interpretação das letras como incógnitas ou números genéricos. (KÜCHEMANN, 1987, p. 111)

2.3 O Modelo dos três usos da variável

Pesquisas a respeito dos usos da variável foram desenvolvidas no México, principalmente por Sonia Ursini e Maria Trigueros. Essas autoras, juntamente com Quintero e Reyes, no artigo *Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable em el algebra*, publicado em 1996, caracterizaram as três principais formas em que a variável pode ser usada na álgebra escolar, como sendo: a variável como incógnita, cujo valor pode ser determinado com exatidão levando em consideração as restrições do problema; a variável como número genérico, ou seja, aquela que aparece em generalizações, tautologias e métodos gerais; e a variável em uma relação de variação conjunta com outra variável, as quais denominaram de variáveis em relação funcional . (p. 352)

Quanto à terminologia "incógnita" também utilizada para designar um dos usos da variável Trigueros e Ursini explanam seus posicionamentos:

> Há quem considere inadequada a terminologia "variável como incógnita" pelo fato de que uma incógnita não é variável dado que representa um valor fixo. ...consideramos que a primeira percepção das letras ao trabalhar com um problema algébrico é, ou deveria ser, a de símbolos que representam qualquer valor e que é em um segundo momento que se define seu papel específico dentro da expressão ou problema em que aparecem. Assim, por exemplo, frente a uma equação, se toma consciência de que a variável representa valores específicos só depois de levar em consideração, de fato ou mentalmente, as operações necessárias que permitam dar-se conta de que se trata de uma equação e não, por exemplo, de uma tautologia. Por esta razão nos parece que o uso da terminologia "variável como incógnita" é adequada. (1998, p. 447)

Baseadas em seus estudos e pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de variável, Ursini e Trigueros apontam que a compreensão do conceito de variável, em nível elementar, pode ser descrita em termos das seguintes capacidades básicas:

- executar cálculos simples e operações com símbolos literais;
- desenvolver uma compreensão sobre a funcionalidade destas operações;
- prever as conseqüências de usar da variável;

- distinguir entre os diferentes usos da variável em determinados contextos de forma flexível,
- integrar esses diferentes usos como facetas do mesmo objeto matemático. (TRIGUEROS; URSINI, 2001, p. 328)

Para as autoras, os três principais usos da variável – incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional - estão fortemente inter-relacionados. Na maioria das questões abordadas na escola aparecem conjuntamente, ainda que um ou outro possa se sobressair nas etapas de resolução. (TRIGUEROS et al, 1996, p. 352)

Para mostrar essa idéia as autoras recorrem a um exemplo de Usiskin (1988, p. 14, apud TRIGUEROS et al, 1996, p.353): "Encontre a equação da reta que passa pelo ponto (6, 2) e cujo coeficiente angular é 11."

Para resolver essa questão, deve-se partir da relação geral que existe entre os pontos de uma reta e sua inclinação, ou seja: $y = mx + b$. Esta expressão descreve uma reta qualquer e as variáveis envolvidas representam números genéricos que podem, portanto, assumir qualquer valor. Para uma reta particular, m e b não representam números genéricos, mas constantes. No exemplo mencionado o valor do coeficiente angular está dado e tem que substituir-se por m ;e b é uma incógnita que se pode determinar usando os dados do enunciado. As letras x e y são duas variáveis vinculadas por uma relação funcional: x pode ser considerado como um argumento que pode assumir qualquer valor e os valores de y mudam em correspondência com os de x.

Quer dizer, para resolver essa questão, os estudantes devem ser capazes de trabalhar com números genéricos ($y = mx + b$), com constantes (m e b), com incógnitas (b), com variáveis em uma relação funcional (x e y) e poder passar de uma a outra interpretação, mesmo quando estas diferentes caracterizações da variável tenham a mesma representação simbólica. (TRIGUEROS et al, 1996, p.353)

No artigo *Understanding of different uses of variable: a study with starting college students,* publicado em 1997, as autoras relatam como obtiveram a decomposição do conceito de variável. Elas especificaram as capacidades necessárias para tratar cada uma das caracterizações da variável através de uma análise do seu conceito.

A primeira análise ou decomposição do conceito se baseou na forma como as próprias pesquisadoras o compreendiam, tomando como referencial a experiência como docentes e as construções mentais que consideravam necessárias para o desenvolvimento do mesmo. (TRIGUEROS e URSINI, 1997, p. 4-255)

Para o tratamento da variável as autoras consideram os aspectos da interpretação, da manipulação e da simbolização de suas diferentes caracterizações. O quadro a seguir apresenta as habilidades envolvidas no tratamento da variável em seus três principais usos:

	Simbolização	**Interpretação**	**Manipulação**
Incógnita	Simbolização de um termo desconhecido em uma situação particular e/ou em uma equação.	Interpretação de um símbolo como uma incógnita presente em equações nas quais ele aparece uma ou mais vezes.	Fatorar, simplificar, desenvolver, balancear uma equação para tornar a variável o sujeito dessa equação.
Número genérico	Simbolização de um objeto genérico envolvido em métodos ou regras gerais, deduzidos de padrões numéricos e/ou geométricos, ou em famílias de problemas similares.	Interpretação de um símbolo como um objeto genérico presente em expressões algébricas ou em regras gerais.	Fatorar, simplificar e desenvolver para reorganizar uma expressão.
Variáveis em relação funcional	Simbolização de relações funcionais a partir de uma tabela, um gráfico ou um problema em língua natural.	Interpretação da correspondência entre variáveis e da variação conjunta em expressões algébricas, tabelas e gráficos.	Fatorar, simplificar, desenvolver para reorganizar uma expressão; substituir valores para determinar intervalos de variação, valores de máximo e mínimo ou para analisar o comportamento global da relação.

Quadro 1: Decomposição do conceito de variável.
Fonte: REYES; TRIGUEROS; URSINI, 1996, p. 317.

Essas capacidades que as pesquisadoras classificaram, usadas como indicadores, permitiu a elaboração de questões precisas, cujos resultados foram analisados por métodos quantitativos. Como parte de um projeto cujo objetivo era diagnosticar como estudantes iniciantes no ensino superior interpretam, manipulam e simbolizam cada uma das caracterizações da variável, essas pesquisadoras elaboraram um questionário para obter um perfil inicial desses alunos quanto a seus desempenhos na resolução de problemas em que essas caracterizações ou facetas da variável estavam enfatizadas separadamente. (idem, p. 351)

No artigo *Diseño de un Cuestionario de Diagnóstico Acerca del Manejo del Concepto de Variable en el Álgebra*, de 1996, as autoras apresentam a elaboração de uma primeira versão desse questionário, tal como a análise de sua confiabilidade nos termos da Teoria clássica dos testes. Elas relatam que para aprofundar na compreensão das concepções dos estudantes, o projeto global incluiu também uma análise do tipo qualitativa e que consideram que um questionário que satisfaça algum critério de confiabilidade pode proporcionar os primeiros elementos para orientar um estudo aprofundado. (p. 352)

Os resultados desse projeto desencadearam outras pesquisas acerca do conceito de variável. As pesquisadoras aplicaram um questionário a alunos de diferentes faixas etárias – de 12 a 18 anos de idade – a professores e também utilizaram essas capacidades envolvidas no entendimento do conceito para a análise de livros didáticos. Como resultante dessas pesquisas, obtiveram um refinamento dessas capacidades, que foi denominada de Modelo dos três usos da variável - *the three uses of variable model.* (TRIGUEROS e URSINI, 2001, p. 328)

Apresentamos, no quadro a seguir, uma síntese dos aspectos que caracterizam cada um dos três usos da variável, ou, em outras palavras, o denominado Modelo 3UV.

Incógnita	Número genérico	Variáveis em relação funcional
I1- reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema;	**G1-** reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas;	**F1-** reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas);
I2- interpretar o símbolo que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos;	**G2-** interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor;	**F2-** determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente; **F3-** determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente;
I3- substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação uma sentença verdadeira;	**G3-** deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas;	**F4-** reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas);
I4- determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas;	**G4-** manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica;	**F5-** determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra;
I5- simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação.	**G5-** simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos.	**F6-** expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema.

Quadro 2: Habilidades necessárias à compreensão da variável como incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional.
Fonte: TRIGUEROS; URSINI, 2001, p. 328-329.

A decomposição do conceito de variável, apresentada pelas pesquisadoras, enfatiza apenas os aspectos que parecem ser relevantes, sob o ponto de vista de um especialista, para a construção desse conceito. As autoras esclarecem que todos têm a mesma hierarquia:

> É importante observar que nós não pretendemos estabelecer estágios para a aprendizagem deste conceito, nós preferimos indicar diferentes características que podem ser construídas pelos estudantes de uma forma não linear e que são importantes para se alcançar uma visão global do conceito de variável. (REYES; TRIGUEROS; URSINI; 1996, p. 316)

De acordo com Rodrigues (2008) podemos relacionar essas habilidades descritas no Modelo 3UV com as capacidades de interpretação, simbolização e manipulação destacadas na decomposição do conceito de variável. O quadro abaixo representa este relacionamento.

	Simbolização	**Interpretação**	**Manipulação**
Variável como incógnita	I5	I1 e I2	I3 e I4
Variável como número genérico	G5	G1, G2 e G3	G4
Variável em relação funcional	F6	F1 e F4	F2, F3 e F5

Quadro 3: Relacionamento entre as habilidades descritas pelo Modelo 3UV e as capacidades de simbolização, interpretação e manipulação da variável em seus três usos.
Fonte: RODRIGUES, 2008, p. 34

Na obra *Enseñanza del álgebra elemental***.** *Una propuesta alternativa,* Ursini et al. (2005) fornecem mais detalhes sobre cada um desses aspectos descritos no Modelo 3UV. De acordo com as autoras, para compreender o uso da **variável como incógnita** e resolver corretamente os exercícios ou problemas que a envolva, os alunos devem ser capazes de reconhecer que em certa situação está envolvida uma quantidade cujo valor não se conhece, mas que é possível determinar considerando os dados disponíveis. Além disso, é necessário poder distinguir entre estas situações e as que envolvem quantidades desconhecidas, mas não proporcionam elementos que permitam determiná-las. Eles devem ter a capacidade de representar simbolicamente uma quantidade desconhecida relacionando-a com os dados do problema, para desenvolver uma expressão algébrica que mostre esta relação. Diante de uma equação, dada ou construída pelo próprio aluno, é necessário realizar as operações aritméticas ou algébricas que permitam obter o valor ou valores que satisfazem a equação. Também é importante substituir os valores obtidos na equação para verificar se são corretos, satisfazem a equação e, portanto, se resolvem o problema. (URSINI et al., 2005, p. 27)

Para compreender o uso da **variável como número genérico** e poder trabalhar com ela é necessário desenvolver a capacidade para reconhecer padrões, observar regras, deduzir métodos gerais e descrevê-los. Para isso, é necessário distinguir entre os aspectos invariantes e os que variam em uma multiplicidade de situações, que podem envolver seqüências geométricas ou numéricas. (idem, p. 31)

O trabalho com a variável como número genérico requer também a capacidade de usar símbolos para representar uma situação genérica, uma regra ou um método, ou relacionar expressões genéricas entre si. Diante de uma expressão genérica, dada ou construída pelo próprio aluno, este tem que interpretar os símbolos envolvidos como números genéricos, os quais representam quantidades indeterminadas que não se pode nem é necessário determinar. Deve saber manipular este tipo de expressões (por exemplo, fatorar ou simplificar) quando o problema pedir, sem necessidade de atribuir valores específicos às variáveis. (idem, p. 31)

Os números genéricos aparecem em expressões abertas (por exemplo, $4x + 7$), em tautologias ($3 + x = x + 3$), em fórmulas gerais ($A = b \times h$), como parâmetros nas equações ($x^2 + 5mx + 7 = 0$) e nas equações genéricas ($ax + b = cx + d$). É necessário que o aluno os interprete como quantidades genéricas e consigam distinguí-los das variáveis no papel de incógnita. (idem, p. 31)

Para trabalhar com as **variáveis em relação funcional** é necessário ser capaz de reconhecer, em primeiro lugar, que em certas situações estão envolvidas quantidades cujos valores estão relacionados; e, em segundo lugar, que em tais situações, a variação de uma quantidade afeta a variação da outra. (URSINI et al., 2005, p. 34)

Estes tipos de situações podem envolver informações que se apresentem nas formas verbal, tabular, gráfica ou analítica. Para cada uma destas representações é importante que o aluno reconheça que existe uma correspondência entre duas variáveis e que estas variam de forma relacionada. Reconhecer a relação entre duas variáveis implica, além disso, perceber que cada uma pode tomar distintos valores dentro do intervalo no qual está definida a relação. (URSINI et al., 2005, p. 34)

Para compreender a correspondência deve-se atribuir valores a uma das variáveis e determinar o valor da outra. Trabalhar com a variação implica: desenvolver a capacidade para determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dados os da outra; determinar donde uma função cresce ou decresce; determinar os pontos em que alcança um valor de máximo ou de mínimo; quando seus valores são positivos ou negativos, e quando seu valor permanece constante. Também é necessário que o aluno possa representar uma relação funcional de distintas maneiras e passar de uma para outra forma. Em cada uma das representações em que estão envolvidas as variáveis relacionadas é necessário que os alunos possam interpretá-las de maneira adequada. É importante que simbolizem uma relação funcional de maneira analítica, estabelecendo uma relação simbólica entre as variáveis envolvidas, independentemente de como seja dada a informação (linguagem natural, tabela, gráfico). Finalmente, que diferenciem entre uma expressão simbólica que representa uma relação funcional, e outras que representem, por exemplo, uma equação ou uma tautologia. (idem, p. 35)

Segundo Ursini e Trigueros (2001), o modelo 3UV pode ser usado como referencial na elaboração de ferramentas para investigar a concepção de variável apresentada tanto por alunos, quanto por professores; elaborar atividades de ensino, relacionadas ao conceito de variável; analisar livros didáticos e outros materiais de ensino com relação ao conceito.

Utilizamos o Modelo 3UV em nossa pesquisa para elaborar um questionário diagnóstico dos significados e usos da variável por alunos de oitavas séries, e também, como ferramenta de análise dos resultados obtidos da aplicação desse questionário, juntamente com as considerações de Caraça sobre o duplo aspecto da variável.

2.4 Algumas considerações sobre o significado e os diferentes usos da variável

É de nosso conhecimento a inexistência de uma definição de variável que abranja todos os seus usos na matemática, portanto, se faz necessário, num primeiro momento, esclarecer ao leitor o sentido em que abordamos tal conceito nessa pesquisa. Para isso, estabelecemos uma relação entre o conceito de variável apresentado por Caraça e a idéia de variável empregada pelas autoras do Modelo 3UV.

Caraça (2005) apresenta o conceito de variável que, em suma, pode ser entendido como “o símbolo representativo de qualquer dos elementos de um conjunto”, partindo da necessidade de generalização para a introdução do conceito de função.

Trigueros e Ursini (1998) mostram essa idéia explicando: “(...) a primeira percepção das letras ao trabalhar com um problema algébrico é, ou deveria ser, a de símbolos que representam qualquer valor (...)”. (p. 447)

Ou seja, para elas, antes da identificação do papel que desempenha em determinado problema, a variável deve ser entendida como um símbolo que representa qualquer valor.

Acreditamos que a idéia de variável apresentada por essas pesquisadoras vão ao encontro da apresentada por Caraça, uma vez que “qualquer valor” pode ser identificado como um conjunto. E é nesse sentido que utilizamos o termo variável, ou letra, nesta pesquisa.

Observamos ainda para o caráter pessoal que o conjunto que representa “qualquer valor” passa a ter, quando toma como referencial o conjunto numérico considerado por cada indivíduo.

Quando se identifica o status da variável na situação em que foi apresentada ela pode ser classificada, considerando os três principais usos, destacados nas pesquisas de Ursini e Trigueros como “variável como incógnita”, “variável como número genérico” ou “variável em relacionamento funcional com outra variável”.

Assim, se Caraça parte da simbolização da variável como uma generalização necessária para a introdução do conceito de função, as pesquisadoras mostram que a partir dessa generalização pode-se abordar não só as variáveis em relação funcional, mas também como número genérico e incógnita, considerando os diferentes usos da variável na matemática.

Para Caraça (1954), há que se considerar ainda o duplo aspecto da variável: o simbólico, no que se refere a letra tomada e, o substancial, o conjunto que ela representa, que são inseparáveis.

Trigueros e Ursini mostram que a simbolização, a interpretação e a manipulação são as formas de tratamento da variável na álgebra. Logo, podemos considerar que o duplo aspecto da variável se revela em cada um desses tipos de tratamento.

Nessa perspectiva, nosso objetivo de pesquisa foi identificar como os alunos associam os aspectos simbólico e substancial na simbolização, interpretação e manipulação de sentenças algébricas.

Quanto aos diferentes usos da variável, focalizamos nossa análise nos propostos pelas pesquisadoras Ursini e Trigueros, que propõem uma descrição detalhada dos aspectos que permeiam a compreensão dos três principais usos da variável na álgebra escolar: incógnita, número genérico e variáveis relacionadas.

No capítulo a seguir mostramos como o Modelo 3UV foi utilizado como guia na elaboração do questionário de pesquisa.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos as questões elaboradas para o diagnóstico dos significados atribuídos à variável e seus usos pelos participantes da pesquisa, explicitando as habilidades necessárias para responder a cada um dos itens.

Além disso, abordamos a trajetória de elaboração e aplicação dessa ferramenta, explicitando as mudanças feitas nesse percurso e as decisões tomadas quanto às formas de coleta de dados, que encontram respaldo teórico na metodologia de estudo de caso, sobre a qual apresentamos algumas características na seção a seguir.

3.1 O estudo de caso

Nesta seção apresentamos algumas características da metodologia estudo de caso, relativas aos aspectos que caracterizam sua abordagem nesta pesquisa. Tomamos como referencial os apontamentos de Ponte (2006) e de Laville e Dionne (1999). Como o estudo de caso a que nos reportamos é de natureza qualitativa, começamos por apresentar algumas características desse tipo de pesquisa.

Para Bogdan e Biklen (apud LÜDKE e ANDRÉ, 2003, p. 11) existem cinco características que configuram o conceito de pesquisa qualitativa: 1) *A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento*; 2) *Os dados coletados são predominantemente descritivos*; 3) *A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto*; 4) *O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador*; 5) *A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.*

Para os referidos autores a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (BOGDAN e BIKLEN, apud LÜDKE e ANDRÉ, 2003, p. 13)

Laville e Dionne (1999) discutem que a metodologia estudo de caso é preferencialmente usada com a finalidade de precisar os conhecimentos adquiridos, esclarecê-los ou aprofundá-los. "Inicialmente, tal investigação permitirá fornecer explicações no que tange diretamente ao caso considerado e elementos que lhe marcam o contexto". (p. 155)

Nossa investigação teve por objetivo verificar que significados os alunos participantes da pesquisa atribuiriam à variável e como ela seria utilizada por eles. Nas palavras de Ponte (2006) "o objetivo do estudo de caso é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade (...)". (p. 2)

Para o referido autor, usa-se este tipo de investigação quando o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é. (idem, p. 8)

Ponte (2006) expõe que na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, etc. (p. 3)

Assim, apresentamos nesse relatório o estudo do caso *dos significados atribuídos à variável em seus diferentes usos por alunos de oitava série*. Os 17 alunos que compuseram essa população eram estudantes de uma escola da rede estadual da grande São Paulo. Eles se dispuseram a participar dos procedimentos de coleta de dados, os quais incluíram responder a um questionário e fornecer entrevistas. Além disso, autorizaram as gravações em áudio de suas falas ao responder às questões e a presença de um observador que, juntamente à pesquisadora, pudesse registrar as ocorrências de interesse da pesquisa.

Encontramos em Ponte (2006) um respaldo para esses procedimentos:

> (...) um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo (...) Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações (...) e tem sempre forte cunho descritivo. (PONTE, 2006, p. 7)

O referido autor mostra também a importância da orientação teórica dos estudos de caso e como ela pode nortear o trabalho do pesquisador. Os estudos de caso podem ter uma orientação teórica bem vincada, que sirva de suporte à formulação das respectivas questões e seleção de instrumentos de recolha de dados e constitua um guia na análise dos resultados. A teoria é necessária para orientar a investigação, tanto em termos da recolha de dados como da sua análise. Ajuda a responder a questões como: Que coisas observar? Que dados colher? Que perguntas fazer? Que categorias construir? (PONTE, 2006, p. 12)

De um modo geral, um estudo de caso começa por ter hipóteses de trabalho preliminares, que vão sendo reformuladas à medida que a investigação avança. Como refere Merriam (1988) (apud PONTE, 2006, p.12), o enquadramento teórico de um estudo é de tal modo importante que o seu valor global deriva tanto das suas propriedades intrínsecas como da forma como ele se situa em relação a estudos anteriores e expande os seus resultados.

Para Laville e Dionne, a vantagem mais marcante dessa estratégia de pesquisa repousa na possibilidade de aprofundamento que oferece. Os elementos imprevistos e os detalhes, melhor conhecidos, podem obrigar a reexaminar alguns aspectos da teoria que sustenta a investigação (...). (p. 156)

Ponte dispõe também que os estudos de caso produzem conhecimento acerca de objetos particulares, que vai pouco a pouco acrescentando novos elementos que enriquecem o nosso conhecimento coletivo acerca de certos problemas e fenômenos. (PONTE, 2006, p. 16)

3.2 A trajetória de elaboração do questionário de pesquisa

Para Trigueros et al (1996) um passo importante para a compreensão da forma que se aprende o conceito de variável é indagar como os estudantes usam e interpretam cada uma de suas caracterizações. (p. 352)

Utilizamos o Modelo 3UV para elaborar uma ferramenta de diagnóstico dos significados atribuídos à variável por alunos de oitavas séries e os conhecimentos que emergem no seu uso.

Encontramos em Ursini et al. (2005) um respaldo para a utilização desse instrumento de diagnóstico que, em nosso caso, se deu por meio de um questionário: “sem dúvida, as atividades de avaliação podem constituir oportunidades para conhecer com maior profundidade os conhecimentos de cada um dos alunos do grupo e as características deste como um todo.” (p. 129)

O primeiro passo para a elaboração desse questionário foi criar e testar duas questões abordando a interpretação das variáveis como número genérico e em relação funcional. Essas questões foram denominadas como Parte I do questionário piloto, o qual consta, na íntegra, no Apêndice A.

Aplicamos essa parte do questionário a 52 alunos de duas oitavas séries de uma escola pública estadual, que, à época, meados do ano de 2007, eram alunos da pesquisadora. O questionário foi aplicado durante o período regular de aulas no início do mês de julho. Os alunos tiveram a liberdade de formar duplas para responder as questões. Enquanto as respondiam assumimos também a postura de observador, procurando anotar os comentários que surgiam no diálogo entre as duplas e responder e/ou questioná-las quando necessário.

Utilizamos duas sessões de aproximadamente 45 minutos para a aplicação dessa primeira parte.

A questão 1 foi criada com o objetivo de verificar como é feita a interpretação de um símbolo no papel de número genérico. Considerando a afirmação dada de quadrado mágico a questão poderia ser simbolizada assim: “- 8 + 46 + ☺ = 25 + 13 + ☺”, o que indicaria a mobilização da habilidade **G5** – “simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos”. Manipulando essa expressão, ou ainda, utilizando a habilidade **G4** – “simplificar, desenvolver a variável simbólica” – era possível obter “38 + ☺ = 38 + ☺”, ou “☺ = ☺” e verificar que, nesse caso, substituindo o símbolo por qualquer valor, a igualdade não se alteraria: **G2** – “interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor”.

Uma das estratégias de resolução apresentadas pelos alunos nessa questão foi a tentativa de preenchimento do quadrado mágico. A partir dessa estratégia pudemos verificar que o símbolo não poderia representar infinitos valores, como queríamos abordar. Sendo assim, optamos por descartar essa questão da versão final.

A questão 2 tinha por objetivo verificar como os alunos interpretariam as variáveis relacionadas x e y. Uma análise das habilidades envolvidas na sua resolução será apresentada no desenvolvimento desta seção, quando nos referirmos às questões que compuseram o questionário de pesquisa.

As conclusões escritas apresentadas pelas duplas em seus protocolos e o registro de nossas observações no momento da aplicação nos levou a classificar as respostas em relação a interpretação a essas variáveis como sendo: incógnita, número genérico ou variáveis relacionadas. Em seguida explicamos os procedimentos que nos levaram a essa classificação.

As 24 duplas que responderam a essa questão procederam basicamente de duas maneiras: substituindo as letras por números escolhidos aleatoriamente para obter um valor como soma e então calcular o valor da outra variável; ou atribuindo um valor para a soma e encontrando os valores das variáveis.

Do total de participantes, 10 duplas apresentaram conclusões que nos fizeram entender que interpretaram as letras como incógnita. Elas apresentaram as estratégias que descrevemos anteriormente e concluíram que as letras só podem ser substituídas pelos valores que validaram, não houve generalização em suas conclusões.

As respostas que nos levaram a concluir que as letras tinham sido interpretadas como números genéricos foram aquelas que apresentaram explicações dizendo que as letras poderiam representar quaisquer valores, pois poderiam sempre escolher números diferentes para as variáveis; ou que poderiam mudar o valor da soma. Doze duplas apresentaram respostas desse tipo.

As duas duplas que interpretaram as variáveis como presentes numa relação funcional apresentaram conclusões que mostraram a percepção da correspondência entre as variáveis, descrevendo a regra que relaciona as variáveis.

Nessa primeira parte do questionário todas as duplas apresentaram procedimentos aritméticos para responder às questões e não simbolizaram os dados por uma expressão algébrica.

O segundo passo para a elaboração do questionário de pesquisa foi a elaboração de uma questão que requeria a interpretação de variáveis nos papéis de incógnita, número genérico e em relação funcional, dadas na notação algébrica. Essa questão foi denominada como Parte II do questionário piloto. Nosso objetivo era verificar como os alunos interpretariam as varáveis em cada item e que estratégias utilizariam para tal e, posteriormente, comparar aos resultados da primeira parte.

A Parte II foi aplicada a esses mesmos alunos, cerca de uma semana após a Parte I.

Os alunos utilizaram na Parte II tanto procedimentos algébricos quanto aritméticos para responder aos itens da questão, mostrando que o contexto de apresentação da questão pode influenciar na forma de resolução a ser adotada pelos alunos e na identificação do papel que a variável pode assumir.

Ao tomar procedimentos algébricos percebemos a utilização de diversos critérios para a resolução das questões, alguns erros na aplicação de técnicas de manipulação e a falta de validação das soluções obtidas, o que acarretou na falta de identificação do papel das variáveis.

A comparação entre as conclusões a que chegaram os alunos nas partes I e II do questionário piloto nos fez concluir que, na maioria das questões em que os alunos optaram por procedimentos algébricos, não evocaram o conjunto numérico que a variável representa, nem mesmo para testar a validade do resultado encontrado, o que gerou a hipótese de que os aspectos simbólico e substancial são utilizados separadamente.

Outro resultado dessa análise foi o entendimento das variáveis nos papéis de número genérico e variáveis relacionadas, como representantes de quaisquer números, referindo-se ao conjunto dos números inteiros positivos.

Ao analisar os dados percebemos que a falta de mais detalhes nos fez apresentar uma análise sucinta dos resultados. Por isso, tomamos a decisão de gravar os diálogos de alguns alunos no momento da aplicação do questionário e durante as entrevistas. Além disso, no intuito de não perder informações e termos mais detalhes dos procedimentos adotados por eles, decidimos pela presença de um observador nos dias de aplicação do questionário "definitivo", para anotar suas estratégias. Anotações que seriam feitas também pela pesquisadora, que poderia, em alguns momentos, interagir com os participantes.

A partir dos resultados obtidos da aplicação do questionário piloto elaboramos a versão final que consta, da forma como foi apresentado aos alunos, no Apêndice B.

O questionário de investigação foi elaborado de forma a explorar os três principais usos da variável descritos pelo Modelo 3UV - incógnita, número genérico e variáveis relacionadas -, nos aspectos da simbolização, interpretação e manipulação. Ele é composto por seis questões, incluindo as do questionário piloto com algumas modificações, as quais citaremos no desenvolvimento do texto. Decidimos por incluir mais questões para abranger não só a interpretação das variáveis, mas focalizar também os aspectos da simbolização e da manipulação, pois de acordo com Trigueros e Ursini (2001) nenhum dos aspectos deve se sobressair em relação ao outro.

Das seis questões que compuseram nosso questionário final, as de número 1, 2 e 3 foram inspiradas no questionário utilizado pelas autoras do Modelo 3UV, que pode ser consultado no Anexo A. Em especial, dessas três, a segunda questão foi a única que também foi utilizada no questionário piloto e sofreu modificações, que explicitaremos mais adiante, para sua versão final. A questão 2 da Parte I do questionário piloto resultou na nossa questão 4.

Por sua vez, a quinta é uma questão clássica que envolve a observação e generalização de um padrão composto por figuras. Ela foi incluída para substituir a questão 1 da Parte I do questionário piloto.

E, por fim, a sexta questão foi criada com base em um item utilizado por Küchemann - Anexo B, tendo como um dos propósitos verificar o conjunto numérico tomado ao interpretar as variáveis, considerando as restrições impostas pela pergunta.

Transcrevemos, a seguir, cada uma das questões que compuseram o questionário de pesquisa, destacando as habilidades necessárias para a resolução de cada uma delas, em algumas possíveis estratégias que poderiam ser tomadas.

Com a questão 1, transcrita a seguir, tínhamos por objetivo verificar a habilidade de simbolização de sentenças dadas em linguagem natural para a linguagem algébrica.

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica para representar:

a) Um número que multiplicado por 5 resulte em 0,5.

b) Um número somado a 2.

c) A subtração entre dois números que resulte em 2,5.

De acordo com o Modelo 3UV, para responder ao item a) é necessário reconhecer a existência de algo desconhecido, que se pode determinar. É preciso também simbolizar o termo desconhecido, o que pode ser feito utilizando a letra x, por exemplo. E, além disso, relacionar os dados da questão e usar a incógnita para escrever a equação $5x = 0,5$. Esses procedimentos requerem a mobilização das habilidades **I1** - “reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema”; e **I5** – “simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação”.

Para responder a essa questão os alunos poderiam escrever a equação de outras maneiras, tais como: '*x*.5 = 0,5'; '*x*5 = 0,5'; '*x* X 5 = 0,5', as quais conservam a ordem do enunciado, enquanto que '5*x* = 0,5' mostra uma forma usual de escrita, com o coeficiente escrito antes da parte literal.

Para responder ao item b) é necessário reconhecer e identificar o valor mencionado como número genérico, ou seja, como representante de quantidades indeterminadas que não se pode, nem é necessário, determinar (**G2** – **"**interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor"). Usar um símbolo para representar esse "número", o que pode ser feito utilizando a letra *n*, por exemplo; e utilizá-lo para escrever uma expressão que atenda ao enunciado, no caso: "*n* + 2", o que requer a habilidade **G5** – "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos".

Ou ainda, escrever "*n* + 2 = *m*", representando também o valor da soma com uma outra variável, o que indica, em termos da simbolização, uma transformação de uma expressão algébrica aberta em uma relação funcional, ou seja, **G5** transformado em **F6** – "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema".

Para responder ao item c) é necessário reconhecer que dois "valores" precisam ser representados e que existe uma correspondência entre eles; simbolizar esses valores por letras, por exemplo, com *x* e *y*; e utilizar esses símbolos para a escrita de uma expressão que atenda ao enunciado: $x - y = 2{,}5$. Tais procedimentos decorreriam da mobilização das habilidades **F1** – "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)" e **F6** - "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema".

Com a questão 2, transcrita a seguir, tínhamos como objetivo verificar a habilidade de interpretação das letras nos papéis de incógnita, número genérico e variáveis relacionadas. Ela se apresenta como uma reformulação da parte II do questionário piloto, pois dois itens que a compõe foram modificados.

Decidimos mudar as expressões dos itens b) e c), que constavam no questionário piloto como "$-5-a=-a-2-3$" e "$\frac{x}{2}+12=-2$", respectivamente, por outras que "aparentassem" com equações do 2º grau.

Questão 2: Escreva por quantos valores as letras podem ser substituídas em cada uma das expressões abaixo. Dê exemplos.

a) $x = 10 + y$
b) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$
c) $x(x + 1) = -3 + x^2$

Com isso, pretendíamos verificar se haveria influência na forma como os alunos iriam respondê-la, considerando os resultados de Ursini e Trigueros sobre a influência dos conteúdos que estão sendo estudados. Em ambos os questionários as letras têm status de número genérico e incógnita, nessa ordem.

Antes de proceder com a análise das habilidades necessárias para a resolução desta questão, informamos que utilizamos o termo "expressões" em nosso questionário para designar tanto equações, como tautologias, expressões abertas e expressões analíticas, assim como as pesquisadoras Trigueros e Ursini utilizaram em seu questionário, o qual pode ser consultado no Anexo A.

O item a) requer a interpretação de variáveis presentes numa relação funcional, em que x está escrita de modo a sugerir que é uma variável dependente e y, independente. Para responder a esse item é necessário reconhecer a correspondência entre as variáveis x e y (**F1** – "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas")). Para isso, os alunos poderiam atribuir valores para a variável que considerarem independente e encontrar os correspondentes valores da dependente, o que indicaria a mobilização de **F2** – "determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente". Ou atribuir valores para a variável considerada dependente e encontrar os correspondentes valores da independente, mobilizando a habilidade "**F3 -** determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente". A partir desses procedimentos poderiam concluir que cada uma das variáveis representa infinitos valores, obedecendo a uma relação de dependência entre elas que pode ser descrita das seguintes maneiras: 'x é dez unidades maior do que y'; ou 'y é dez unidades menor do que x'; ou ainda, 'a diferença entre x e y é igual a 10'.

O item b) requer a interpretação da variável n, que assume o papel de número genérico na expressão dada. Para responder a esse item poderiam ser utilizadas duas estratégias: 1) atribuir diferentes valores para n e verificar que sempre se mantém uma igualdade, independentemente do valor que se substitua a variável; 2) utilizar procedimentos algébricos (desenvolvendo o quadrado do primeiro membro ou fatorando o segundo membro da expressão, por exemplo), o que indicaria a mobilização da habilidade **G4** – "manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica".

A partir de alguma dessas estratégias os alunos poderiam concluir que *n* pode representar qualquer número, o que indicaria a mobilização da habilidade **G2** – "interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor".

O item c) envolve a interpretação da variável x que, na equação dada, tem status de incógnita.

Ao efetuar as operações algébricas necessárias os alunos poderiam determinar o valor da variável. Somando '$-x^2$', por exemplo, aos dois membros da igualdade obteriam "$x = -3$", o que indicaria a mobilização de **I4** – "determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas"; e de **I2** – "interpretar o símbolo que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos";

Com a questão 3, apresentada a seguir, pretendíamos verificar que conhecimentos os alunos utilizariam para representar expressões algébricas de forma diferente da apresentada e, logo, que significados dariam às variáveis nas representações produzidas por eles.

Questão 3: Represente de uma outra maneira cada uma das expressões:

a) $(x^2 + 1)(x - 2)$
b) $-6 - 5a + 3a$
c) $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8$

Havíamos pensado em escrever no enunciado "Escreva uma expressão equivalente para:", porém, mudamos para deixar os alunos mais à vontade quanto às possíveis estratégias a tomar.

Sabemos que o enunciado não pede a manipulação das variáveis e que essas expressões poderiam ser representadas graficamente ou, por exemplo, os binômios do item a) poderiam representar as medidas da altura e da base de uma região poligonal retangular, assim como as dos itens b) e c) poderiam representar o perímetro de regiões poligonais. Porém, acreditávamos que o mais provável era que utilizassem seus conhecimentos de manipulação algébrica para escrever outras expressões, o que implicaria a mobilização da habilidade **G4** – "manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica"

Com base nessa hipótese, no item a) os alunos poderiam identificar a operação de multiplicação de dois fatores e aplicar a propriedade distributiva, obtendo $x^3 - 2x^2 + x - 2$. No item b) poderiam somar os termos semelhantes e obter "$8a - 6$". No item c) poderiam realizar o agrupamento e a soma de termos semelhantes e obter a expressão "$5y^2 - 3y - 8$".

Ressaltamos que, independentemente da representação utilizada, as variáveis de cada item da questão 3 precisam ser interpretadas como números genéricos que podem assumir, portanto, quaisquer valores (**G2**- interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor).

A questão 4, transcrita a seguir, foi uma das que compuseram o questionário piloto. Porém nele, o que representamos por *m* e *n* aqui, foi representado por *x* e *y*.

Questão 4: Um quadrado, como o que está representado abaixo, é chamado Quadrado Mágico quando a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal resulta sempre no mesmo número.

Que valores *m* e *n* podem representar para que este seja um quadrado mágico?

		-2	
m	**16**	**-18**	**28**
		n	
		56	

Explique como você pensou.

O objetivo dessa questão foi verificar como os alunos interpretariam as variáveis relacionadas *m* e *n*, num contexto puramente numérico, explorando o que se afirma por quadrado mágico.

Uma possível forma de resolução seria a simbolização dos dados da questão pela expressão "$m + 16 - 18 + 28 = -2 + n - 18 + 56$", o que indicaria a mobilização da habilidade **F6** – "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema".

Depois, realizando as operações cabíveis era possível chegar em $m = n + 10$, ou $n = m - 10$ ou $m - n = 10$.

Utilizando uma dessas expressões ou mesmo substituindo as variáveis por diferentes valores no próprio quadrado mágico em que se apresentam, o que revelaria as habilidades **F2**[1] e/ou **F3**[2], os alunos poderiam concluir que m e n podem representar infinitos valores, respeitada uma relação de dependência: sendo m igual a 10 unidades a mais do que o número atribuído a n; ou n igual a 10 unidades a menos do que o número atribuído a m , ou seja, reconheceriam o relacionamento funcional entre as variáveis, mobilizando a habilidade **F1** – "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)".

A seguir apresentamos a questão 5. A partir de uma seqüência de figuras pretendíamos verificar como os alunos expressariam uma regra geral para a contagem de quadradinhos correspondentes a posição de cada figura na seqüência.

Questão 5: Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:

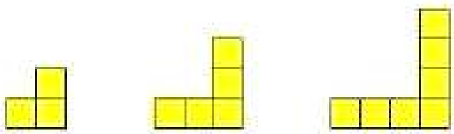


figura 1 figura 2 figura 3

a) Desenhe a próxima figura. Quantos quadradinhos ela tem?

b) Desenhe a 5ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos?

e) E a 17ª?

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura dessa seqüência? Escreva uma regra.

Os itens a) e b), especificamente, foram formulados na intenção de fazer os alunos observarem o que muda de uma figura para a outra, ou a percepção de um padrão. O que requer a mobilização da habilidade **G1** – "reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas"

[1] **F2**- "determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente".

[2] **F3**- "determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente".

O item c) para que tenham um outro recurso para a observação da variação da posição da figura com sua quantidade de quadradinhos, do que apenas as figuras, uma forma de instigar a interpretação da relação existente entre as grandezas envolvidas. Os itens d) e e), verificar como os alunos calculam o total de quadradinhos de figuras numa posição que seria difícil representar por meio de desenhos. É uma forma de instigá-los a pensar numa regra que associe a posição da figura com o seu total de quadradinhos. Ou ainda de deduzir um padrão, o que implica a mobilização de **G3** – "deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas". E, por fim, no item f) ,tínhamos como objetivo verificar como essa regra seria descrita. Caso fosse simbolizada, mostraria a mobilização da habilidade **G5** – "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos".

Para deduzir a regra que rege o padrão é necessário, de acordo com Ursini et al. (2005), a distinção entre o que varia e o que não varia na seqüência de figuras. Neste caso, o que varia é o número de quadradinhos, e uma percepção do que não varia pode ser descrita como a multiplicação do que varia (número de quadradinhos) por 2 e a soma do resultado obtido, com 1.

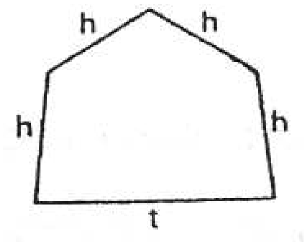
Para a simbolização da regra é preciso representar o que varia por uma letra, n por exemplo, e escrever a expressão que a representa: $2.n + 1$ (**G5**).

A regra também poderia ser simbolizada expressando a relação entre a posição da figura e o número de quadradinhos por uma expressão analítica. Identificando a grandeza posição da figura por p, por exemplo, a relação poderia ser apresentada como $p = 2.n + 1$. Assim, seria mobilizada a habilidade **F6** - "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema".

A seguir apresentamos a questão 6, cujo objetivo foi verificar se os alunos reconheceriam a variação conjunta das variáveis h e t, a partir da análise da figura e da expressão do seu perímetro. Além disso, verificar que conjunto numérico seria tomado como representante das variáveis, respeitada a condição de existência da figura.

Optamos por apresentar um intervalo restrito para que os alunos pudessem nos fornecer mais dados quanto ao conjunto numérico tomado.

Questão 6: Considere a seguinte figura:



a) Escreva a expressão do perímetro dessa figura.

b) Se $h = 3$, qual é o valor do perímetro?

c) Quais os valores de t e h para que o perímetro dessa figura seja igual a 4?

O item a) requeria a simbolização de uma sentença que representasse o perímetro da figura, o que poderia ser feito em termos de **G5**[1] ou de **F6**[2], em uma das seguintes maneiras: somando as variáveis que representam as medidas dos lados da figura e obter: $4h + t$; ou $h + h + h + h + t$; ou $4h + 1t$; ou $P = 4h + t$;

No item b), dado que $h = 3$, tem-se $p = 12 + t$. Para $h = 3$, como $t < 4h$ para a existência da figura; temos que $0 < t < 12$. Com t nessas condições, temos: $12 < p < 24$. Portanto, para responder a esse item é necessária a mobilização das habilidades **F4** – "reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas)" e **F5**- "determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra".

Os alunos poderiam também não se atentar às especificidades das medidas da figura e apresentar uma das seguintes expressões: $12 + t$ (**G5**) ou $P = 12 + t$; (**F6**), resultantes da substituição de h por 3 na expressão obtida no item a).

No item c) provavelmente o fator de maior dificuldade seja considerar a condição de existência da figura, visto que, dependendo das medidas representadas por h e t, não é possível formar o polígono. A condição de existência da figura faz com que a medida h tenha que ser maior do que a quarta parte da medida de t, o que leva a ter que considerar t no intervalo]0,2[e h em]0,5; 1[para o que é preciso mobilizar as habilidades **F4** – "reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas)" e **F5** - "determinar o

[1] **G5** - "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos".
[2] **F6** - "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema".

intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra". Os alunos poderiam reconhecer o relacionamento funcional entre as variáveis *h* e *t*, na atribuição de valores para elas, o que indicaria mobilização das habilidades **F2**[1] ou **F3**[2] e **F1** – "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)".

Após a formulação das questões e análise das capacidades envolvidas na resolução de cada uma delas, restou-nos aplicar o questionário. A seguir relatamos algumas atitudes que tomamos antes e durante a aplicação do mesmo.

3.3 A Aplicação do questionário

No início do ano de 2008 procuramos os membros da equipe gestora de uma escola estadual da grande São Paulo e falamos do nosso projeto de pesquisa e do interesse em realizá-la naquela instituição. Tivemos total apoio da equipe.

No dia 02 de setembro do mesmo ano, no horário do HTPC – Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo – procuramos as duas professoras de Matemática das oitavas séries dessa escola. Informamos a elas sobre essa etapa da pesquisa e solicitamos a colaboração no sentido de convidar alguns de seus alunos que tivessem interesse em participar da mesma.

Escolhemos este caminho porque acreditamos que o convite feito pelo próprio professor fosse uma maneira de incentivar a participação e proporcionar mais confiança e seriedade no trabalho. As professoras se prontificaram a colaborar. Informamos também que seria aplicado um questionário em período posterior ao período letivo, provavelmente em duas sessões de 1h 40 min cada e que depois seriam marcados outros horários para as entrevistas. As professoras sugeriram que fosse no próprio horário de aula, alegando que muitos alunos têm cursos extra-curriculares e esse seria um motivo para o impedimento na participação na pesquisa ou para a ausência em algum dia de aplicação. Pensando no que foi apontado por elas achamos melhor acatar a sugestão.

[1] **F2** - "determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente".
[2] **F3** – "determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente".

Como os alunos teriam que se ausentar da sala de aula no período da realização do questionário, aproveitamos a reunião de HTPC, em que estavam reunidos a maioria dos professores desses alunos e, com a autorização da professora coordenadora, perguntamos se consentiam a saída de alguns alunos nos dias de aplicação do questionário.

Com o aval dos professores e da coordenação, elaboramos um modelo de termo de consentimento para a participação na pesquisa, o qual consta no Apêndice C, para que os alunos concordassem em participar dos procedimentos do trabalho e os pais autorizassem tal participação.

Como as professoras de Matemática se responsabilizaram por convidar os alunos, conversamos mais com elas sobre o projeto e explicamos a importância da participação dos alunos pelo próprio interesse.

A professora coordenadora fez a reserva de uma sala disponível para os dois dias de aplicação, que foram agendados para 08 e 10 de setembro de 2008, das 7:00 às 8:40. Porém, no segundo dia tivemos que utilizar a sala de estudos da biblioteca da escola, pois outros alunos teriam utilizado a sala anteriormente designada para a montagem de uma peça teatral.

Os alunos que espontaneamente manifestaram seu interesse quando as docentes convidaram foram relacionados por elas em uma lista que nos foi entregue e uma cópia anexada no mural da sala dos professores para que soubessem quem participaria dessas atividades.

Os estudantes dessa escola nunca foram alunos da pesquisadora.

No primeiro dia os alunos, conforme combinado com suas professoras, nos esperavam em frente à sala reservada. Chegamos, pesquisadora e observador, os cumprimentamos e perguntamos se eram eles que iriam participar da pesquisa. Responderam que sim e então os convidamos para entrar e nos apresentamos. Na tentativa de uma maior aproximação aos alunos, explicamos de uma forma geral o objetivo da pesquisa, dizendo que a partir da análise dos resultados que obtivéssemos com aquela amostra poderíamos contribuir para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem em matemática. Expomos também que eram muito importantes as suas colaborações respondendo a todas as questões e posteriormente participando da entrevista. Explicamos que nós teríamos que observá-los e anotaríamos algumas informações que acreditássemos ser relevantes e que eles tentassem não se sentir incomodados por isso. Além disso, algumas duplas seriam escolhidas, aleatoriamente, para terem suas falas gravadas, conforme constava na autorização.

Depois dessa conversa pedimos aos alunos que se organizassem em duplas e que se acomodassem de forma a não ficar muito próximas uma dupla da outra, por conta da gravação. Como estavam presentes 17 alunos, decidimos pela formação de um trio.

Distribuímos as folhas com a questão 1 para cada uma das equipes e identificamos as duplas por D1, D2, D3, D4, D5, D6 e D7; e o trio como T. Pensamos nisso como uma forma de agilizar a escrita de nossas observações e a posterior organização dos dados. Escolhemos as duplas 4, 6 e 7 e também o trio para serem gravados nessa sessão.

Conforme as duplas terminavam fornecíamos a folha com a questão 2. A sessão durou uma hora e quarenta minutos e os alunos que terminaram antes desse horário foram dispensados para voltar à sala de aula.

No decorrer da primeira sessão percebemos o uso de folhas para rascunho por algumas equipes e então combinamos que elas também deveriam ser entregues, pois poderiam nos fornecer mais dados quanto ao procedimento adotado por eles.

O questionário consta de 6 perguntas. Na primeira sessão foram trabalhadas as questões 1 e 2. Nesse dia havíamos previsto que não seria possível responder as outras quatro na próxima sessão, então tratamos de combinar uma outra data com as professoras e com os alunos.

A segunda sessão teve também a duração de 1h e 40 min. Foram gravadas as falas das duplas 1, 2, 3 e 5. Nesse dia, e também na última sessão, estavam presentes os dezessete alunos que participaram da primeira etapa. Como já tínhamos ouvido as gravações e lido suas respostas e os registros de observação, como forma também de incentivá-los, falamos para os alunos o quanto estavam contribuindo para o desenvolvimento dessa pesquisa, pois suas estratégias e discussões durante a resolução das questões mostravam o que pensam diante delas, o que nos faz entender melhor o porquê de certas respostas.

No segundo dia de aplicação as equipes conseguiram responder as questões 3, 4 e 5. Os alunos que terminaram primeiro, empolgados para terminar logo, queriam responder a sexta questão também. Porém, decidimos deixar para fazerem na última sessão, visto que não daria tempo para algumas equipes responderem naquele dia.

A terceira sessão ocorreu no dia 16 de setembro, no mesmo horário dos dias anteriores e se encerrou em cerca de 30 minutos. Nesta, apenas as duplas 4 e 6 foram gravadas.

Aproveitamos o tempo restante para dar início às entrevistas.

Utilizamos a técnica de entrevista semi-estruturada que, de acordo com Laville e Dionne (1999), por sua flexibilidade, possibilita um contato mais íntimo entre o entrevistador e o entrevistado, favorecendo assim a exploração em profundidade de seus saberes, bem como de suas representações. (p. 189)

Esse tipo de entrevista consiste numa série de perguntas abertas, feitas verbalmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador pode acrescentar perguntas de esclarecimento e é encontrada sobretudo nas pesquisas de natureza antropológica ou nos estudos de caso. (LAVILLE e DIONNE, 1999, p. 189)

As perguntas das entrevistas tomaram por base o conjunto de dados coletados através dos registros de áudio e de observação e produção escrita dos alunos em cada questão. Em relação à sexta questão, os questionamentos foram inspirados nos protocolos apresentados pelos alunos e observações durante a execução das mesmas.

Nesse dia foram entrevistadas as equipes D1, D4, D5, D7 e T.

Quanto às três duplas restantes ficou combinado, com a anuência das professoras, que seriam entrevistadas no dia 18/09/2008.

Apresentamos em seguida a análise dos dados obtidos, questão a questão. Para facilitar a escrita utilizaremos a identificação das equipes anteriormente citadas: D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e T. Para diferenciar os integrantes da mesma equipe, quando formos reproduzir suas falas, utilizaremos D1-1 e D1-2, por exemplo, para os integrantes da dupla 1; T1, T2 e T3 para as componentes do trio e assim por diante. Quando nos referirmos às nossas falas nos identificaremos com P. Quanto aos registros de observação, serão descritos conforme anotações da pesquisadora e do observador.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos a análise dos resultados obtidos com a aplicação do questionário de pesquisa. Para tal, utilizamos o conjunto de dados obtidos dos registros de observação, áudio, entrevista e a própria produção escrita das duplas.

Considerando a característica de cunho descritivo dos estudos de caso apontada por Ponte (2006), optamos por apresentar os resultados, primeiramente, agrupando as respostas aos itens de cada questão por alguma similaridade, seja no procedimento de resolução ou na forma de apresentação da resposta. Descrevemos o critério a medida em que cada uma é apresentada. Na seqüência reportamos a análise dos resultados das duplas no desenvolvimento das questões, analisando suas respostas quanto aos aspectos da simbolização, da manipulação e da interpretação das variáveis.

4.1 Questão 1

A primeira questão, reproduzida abaixo, tinha por objetivo verificar a habilidade de simbolização de valores desconhecidos, na tradução de sentenças dadas em linguagem natural para a linguagem algébrica.

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica para representar:

a) Um número que multiplicado por 5 resulte em 0,5.
b) Um número somado a 2.
c) A subtração de dois números que resulte em 2,5.

Com o item a) tínhamos como objetivo verificar como os alunos simbolizariam a variável no papel de incógnita. Para respondê-lo, todas as equipes calcularam o número desconhecido, seja por manipulação da incógnita na equação escrita ou por procedimentos aritméticos. Ou ainda, utilizaram essas duas estratégias.

De acordo com nossos registros de observação a dupla 1 calculou esse número e depois representou a multiplicação que pede a sentença utilizando o valor encontrado. Em seguida, na tentativa de verificar se o resultado estava correto, fez a divisão de 5 por 0,5 (ao invés de 0,5 ÷ 5), obtendo 0,1 erroneamente, como pode ser observado na figura 1.

Após responder a essa questão representando os valores de cada um dos três itens por exemplos numéricos, a dupla 1 foi questionada sobre o que entendem por expressão algébrica. Diante da resposta dada pelos componentes de que não lembravam do que se tratava, perguntamos o que estavam estudando em matemática. A dupla citou as equações do 2º grau e então exemplificamos as equações como um dos tipos de expressão algébrica. Quando questionados sobre os elementos que as compõem citaram a presença de variáveis. Insatisfeitos com as respostas que apresentaram nessa questão, após esses questionamentos, decidiram revê-las.

Após essa conversa e possivelmente também por influência do estudo das equações do 2º grau, em que precisam identificar os coeficientes *a*, *b* e *c* como uma das formas de resolução**,** esses alunos representaram todos os valores de cada item por essas letras. Assim, a resposta ao item a) foi apresentada como mostra a figura a seguir:

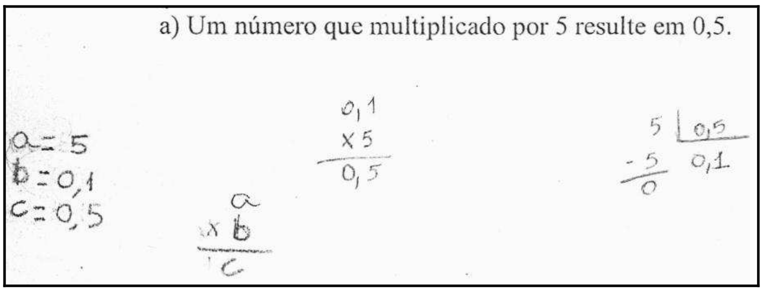
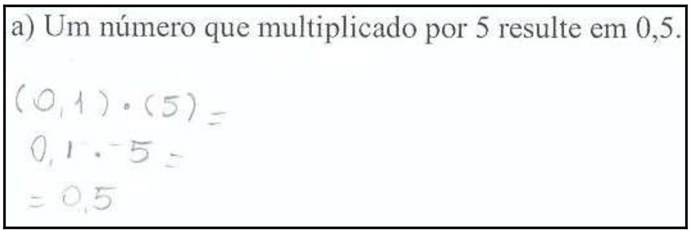


Figura 1: Protocolo da dupla 1 – Questão 1. a)

Nesse caso podemos perceber que essa dupla apresentou primeiramente um procedimento de representação do termo desconhecido pelo próprio número. Com a escrita da expressão "*a* x *b* = *c*", que poderia ser interpretada como expressão genérica, a dupla mostra, ao atribuir valores para *a*, *b* e *c*, que cada letra tem valor específico e, portanto, mantém a representação da multiplicação requerida pelos números que a compõe.

As duplas 3 e 7 também calcularam o número desconhecido e escreveram uma sentença utilizando-o. Ambas fizeram uso de parênteses em suas expressões, conforme mostra o protocolo de D3:


a) Um número que multiplicado por 5 resulte em 0,5.

(0,1) · (5) =
0,1 · 5 =
= 0,5

Figura 2: Protocolo da dupla 3 – Questão 1. a)

No trecho a seguir, da entrevista com D3, as integrantes explicam o que pensam sobre expressões algébricas e o porquê do uso de parênteses:

P: “Do que vocês lembram quando pensam em expressão algébrica?”
D3-1: “De números, parênteses, colchetes.”
D3-2: “Letras!”
P: “O que vocês escreveram é uma expressão algébrica?”
D3-1: “Não, aqui é de números.”
D3-2: “Eu não coloquei com letra porque o primeiro número que eu pensei foi o 0,1.”

As integrantes de D3 mostram, por um lado, os elementos que consideram que deve ter em expressões algébricas, citando números, parênteses, colchetes e letras e; por outro, D3-2 revela a facilidade com que encontrou o número desconhecido. Essa justificativa mostra que um dos motivos para a não simbolização pode ter sido o fato de o número ter sido facilmente calculado, o que sugere uma reformulação da questão para o caso de uma outra aplicação.

Acreditamos que o procedimento utilizado pelas duplas D1, D3 e D7, ao representar um termo desconhecido numa sentença pelo número que ele representa, revela que a idéia de incógnita foi empregada, embora não tenham expressado a sua simbolização como tal, pois, para calcular seu valor foi preciso reconhecer a sua existência.

O procedimento de elaboração e resolução de uma equação foi realizado pelas duplas 2, 4 e 5 e pelo trio. Essas equipes fizeram cálculos para saber o valor do referido número para depois escrever a expressão correspondente e resolvê-la. Elas representaram o valor desconhecido pela letra x e escreveram a equação na ordem em que a sentença é apresentada em linguagem natural: “x . 5 = 0,5”.

A dupla 4 e o trio deixaram registrado a equação e a sua resolução, enquanto as duplas 2 e 5, além disso, também deixaram as contas que realizaram, como podemos observar na figura 3:

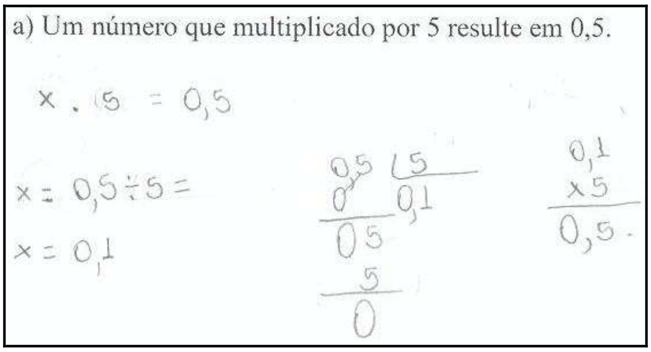


Figura 3: Protocolo da dupla 2 – Questão 1. a)

O procedimento utilizado por essas equipes - D2, D4, D5 e T - ao simbolizar o número desconhecido por uma variável indica a habilidade **I1**[1]; a utilização dessa variável para a escrita de uma equação, **I5**[2]; e a tarefa de calcular o valor do termo desconhecido indica a mobilização de **I4**[3].

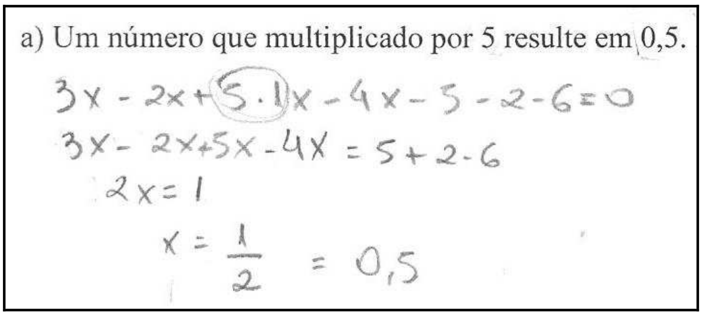
As duplas 2 e 5, em especial, que mostraram os cálculos realizados e argumentaram que era uma forma de verificar se a conta daria certo, mobilizaram também **I3** – “substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação uma sentença verdadeira.”

Ursini et al. (2005) apresentam uma possível justificativa para o cálculo do valor da incógnita apresentado por esses alunos, visto que o enunciado não o requeria: “o uso da variável em que se põe maior ênfase é o de incógnita, e repetidamente lhes pedem que encontrem seu valor.” (p. 16)

A dupla 6, de acordo com os registros de observação durante a aplicação do questionário e relato dos próprios componentes no momento da entrevista, primeiro tentaram

[1] **I1:** “reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema”.
[2] **I5:** “simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação.”
[3] **I4:** “determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas.”

escrever uma equação do segundo grau cuja raiz fosse 0,5. Desistindo dessa estratégia, elaboraram uma equação com vários termos que resultasse nesse valor. Quando questionados sobre onde representaram a multiplicação de um número por 5, a circularam na expressão, como pode ser visto na figura a seguir:



a) Um número que multiplicado por 5 resulte em 0,5.

$3x - 2x + 5.1x - 4x - 5 - 2 - 6 = 0$

$3x - 2x + 5x - 4x = 5 + 2 - 6$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2} = 0,5$

Figura 4: Protocolo da dupla 6 – Questão 1. a)

Os procedimentos utilizados por D6, também explicados a seguir em trechos da entrevista, mostram a tentativa de aplicação do conteúdo que estão estudando para resolver a questão proposta, mesmo que não atenda ao solicitado no enunciado.

D6-1: “A gente tentou escrever uma equação do 2º grau primeiro, porque a gente está trabalhando com isso.”

D6-2: “A gente tinha começado do final, fazendo a conta. Do resultado pra chegar na equação que desse 0,5.”

Podemos perceber, com as respostas apresentadas pelas equipes no item a), que esses alunos não sentiram a necessidade de simbolizar o número desconhecido e, mesmo os que o fizeram, se valeram de procedimentos aritméticos para testar a validade da sentença. O que pode indicar que não entendem a escrita algébrica como um caminho confiável para fazer cálculos e obter o resultado correto, ou o não uso da simbologia algébrica, exigida e esperada na escola.

De forma geral, as respostas apresentadas no item b), em que a pretendíamos verificar como as equipes representariam a variável no papel de número genérico, podem ser descritas das seguintes maneiras: 1) na escrita de uma sentença com um número escolhido aleatoriamente para somar com 2, que mostraram as duplas D1 e D7; 2) na representação de um relacionamento funcional, mostrada por D2 ; 3) na simbolização por uma incógnita numa equação, expostas por D3, D4 e D6; 4) na simbolização do termo genérico numa expressão aberta, expostos por T e D5;

A dupla 1 escolheu o número 5 para somar com 2 e apresentou a operação “5 + 2 = 7”. Em seguida, identificou cada um dos valores das parcelas e o da soma com as letras *a*, *b* e *c*, apresentando também “$a + b = c$”.

No momento da entrevista relemos o enunciado e perguntamos a eles:

P: “O enunciado diz: escreva uma expressão algébrica para representar um número somado a 2. Que número é esse?”
D1-1: “Mas aqui não está especificando o número. Poderia ser qualquer número.”
P: “Poderia ser qualquer um, então vocês escolheram um?”
D1-2: “É: o 5.”
P: “Temos como representar qualquer número?”
D1-1: “Tem, com *x*.”
P: “Como?”
[D1-1 escreve “$x + 2 = 7$”]
P: “Esse *x* está representando qualquer número?”
D1-1: “Está.”
P: “Qualquer número? Vamos ler o que você escreveu: qualquer número mais dois é igual a 7. É verdade?”
D1-2: “Não.”

A dupla identificou a variável *x* como representante de qualquer número, mas ao tentar escrevê-la numa expressão que atenda ao enunciado, apresentou uma equação, o que indica que o papel da variável não foi considerado para a construção da expressão. Quando pedimos que lessem-na com *x* como qualquer número, eles perceberam que erraram.

A dupla 7 simbolizou o número desconhecido por “14^2” e efetuou a soma. Durante a entrevista D7-1 esclareceu que poderia representar com qualquer número: “peguei o primeiro número que veio na cabeça. Poderia ser qualquer um.”

As falas “poderia ser qualquer um” e “poderia ser qualquer número”, das duplas 1 e 7, podem ser entendidas como uma interpretação em termos de número genérico (**G2**[1]), embora a sentença não tenha sido simbolizada dessa maneira.

As respostas apresentadas por D1 e D7, ao escolher um número para somar com 2, revelam a idéia de “qualquer um” citada por ambos: se é qualquer, pode-se escolher um.

---

[1] **G2:** “interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor.”

De acordo com nossas observações durante a aplicação, a dupla 2 primeiramente simbolizou a soma pedida escrevendo "1 + 2 = 3" e apagou; depois representou o número desconhecido por x e a soma de x com 2 pela letra y, indicando a mobilização da habilidade **F6** – "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema." Mesmo com essa representação a dupla voltou a exemplificar a soma que tinha pensado inicialmente, como podemos observar em seu protocolo:

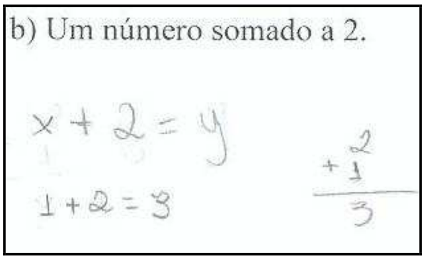


Figura 5: Protocolo da dupla 2 – Questão 1. b)

Durante a entrevista perguntamos o motivo das duas representações, como mostramos no seguinte diálogo:

P: "Primeiro vocês fizeram '2 + 1 = 3'. Por que quiseram representar com '$x + 2 = y$', depois?"

D2-2: "Porque a gente não sabia que número deveria ser somado."

P: "Por que igualaram a y?"

D2-2: "Porque algum resultado tinha que dar. A gente só não sabia qual."

P: "Por que vocês não sabiam?"

D2-2: "Porque a gente não sabia o valor de x."

P: "Mas vocês escreveram 1 no lugar do x. Por quê?"

D2-1: "Pra mostrar que era 1 + 2 = 3."

D2-2: "Pra mostrar que era um número somado a 2. Então a gente pegou qualquer número e somamos com 2."

P: "Poderia ser outro número?"

D2-1: "Poderia."

D2-2: "Poderia ser qualquer um."

Diferente da dupla 1 que atribuiu às letras a, b e c os números que tinham utilizado como exemplo, a dupla 2 entende que tanto x quanto y podem representar quaisquer valores. Quando as integrantes disseram que igualaram o resultado à y porque não sabiam o valor de x

mostraram o reconhecimento da dependência dessas variáveis, ou ainda, a mobilização de **F1** - "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada."

A dupla 6, mais uma vez, escreveu uma equação com vários termos, contendo entre eles '1*x* +2', e a igualou a zero. Questionados sobre os outros termos, D6-1 justificou: "Pra dar mais um sentido. Pra não ficar uma conta boba só com dois números."

A dupla 3 (figura 6) também simbolizou o termo desconhecido por *x* e escreveu uma equação com o zero depois do sinal de igual, realizando uma transformação de uma expressão aberta em uma equação, ou, de acordo com o Modelo 3UV, **G5**[1] em **I5**[2].

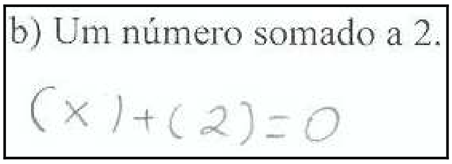


Figura 6: Protocolo da dupla 3 – Questão 1. b)

Na entrevista com essa equipe notamos as diferentes formas de pensar das componentes sobre a variável e a confusão sobre o valor da incógnita numa equação de 2º grau e o valor de seus coeficientes. Vejamos:

P: "O que é *x*?"

D3-1: "O *x* é um valor. O *x* é sempre 1 em qualquer expressão. A gente está vendo equações do 2º grau, aí é a mesma coisa que colocar um, porque as letras podem ser representações de números."

P: "Ah, as letras podem ser representações de números. Então aqui pode ser que seja 1?"

D3-2: "É, ou qualquer outro."

P: "Pode ser outro também?"

D3-2: "Acho que sim, porque está falando um número somado a 2. Então é qualquer número mais 2."

No diálogo com essa dupla percebemos que D3-1 se refere ao valor do coeficiente de *x*, enquanto D3-2 se refere aos possíveis valores que esta variável pode representar. Porém, ambas expressam que não utilizaram essas idéias ao escrever "$x + 2 = 0$", o que pode revelar a

---

[1] **G5:** "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos."

[2] **I5:** "simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação."

falta de interpretação da variável na equação que escreveram. Além disso, D3-1 fala sobre a forma usual de apresentação das questões que envolvem esse conteúdo:

D3-1: "Só que a gente colocou zero porque a conta não está resolvida ainda. Porque quando tem uma equação pra resolver sempre está terminada em zero, não está determinado o valor."

A dupla 4 apresentou a equação "$x + 2 = 59\ 846$" e a sua resolução. Durante a entrevista seus componentes disseram que poderiam igualar a equação a qualquer número e o porquê dessa escolha:

D4-1: "Do nada, um número complicado."
D4-2: "Um número grande pra confundir a cabeça."

A justificativa apresentada por D4 também mostra a idéia de que se pode ser qualquer número, pode-se escolher um valor para representar, como mostraram D1 e D7.

A dupla 5 e o trio simbolizaram a sentença com a escrita de uma expressão aberta, indicando a mobilização de **G5**[1], como podemos observar na figura a seguir:

Figura 7: Protocolo da dupla 5 – Questão 1. b)

Os trechos das entrevistas, reportados na seqüência, mostram a explicação desses alunos para esse tipo de simbolização.

D5-2: "Um número somado a dois. Não está falando o número, então é *x*."
D5-1: "É indeterminado, né. Quando a gente não sabe o valor tem que representar com *x*."

Uma das componentes do trio explica o porquê do uso da variável na resposta exposta pela equipe:

P: "Como pensaram para chegar nessa resposta?"
T1: "Um número qualquer? Qualquer número? Aí que entra a variável!"

Os argumentos apresentados por T e D5 mostram a interpretação de *x* como representante de um valor indeterminado, ou em outras palavras, como **G2**[2].

[1] **G5:** "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos."
[2] **G2:** "interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor."

As respostas apresentadas pelas duplas no item b) mostram que a idéia de termo genérico, ou seja, de algo que represente qualquer valor foi comum a todas as equipes, embora a sua simbolização não tenha ocorrido dessa maneira por todas elas. Se por um lado a idéia de qualquer número instigou ao uso de uma letra que o represente para a maioria desses alunos, por outro, a variável não apresenta esse status nas sentenças que a maioria escreveu, o que pode revelar a falta de interpretação da variável nas expressões ou a dificuldade em considerar o papel da variável na construção de expressões algébricas.

Com o item c) tínhamos por objetivo verificar como os alunos simbolizariam as variáveis presentes numa relação funcional.

As respostas a esse item mostraram a simbolização dos referidos números por variáveis pelas equipes D2 e T; a simbolização de apenas um deles por letra, como fizeram D3, D4 e D6; e a representação de ambos por números, apresentados pelas duplas D1, D5 e D7.

As equipes D1, D5 e D7 apresentaram a resposta a essa questão representando o minuendo e o subtraendo utilizando números cuja diferença fosse 2,5.

A dupla 1, como mostra a figura abaixo, escolheu os valores 7,5 e 5,0 e apresentou o registro de cálculo. Depois representaram os números presentes na subtração pelas letras *a*, *b* e *c*, como fizeram nos itens anteriores.

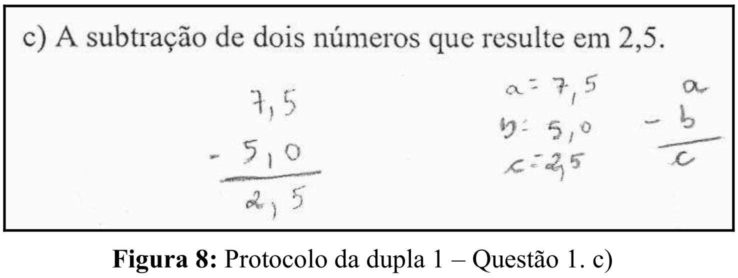


Figura 8: Protocolo da dupla 1 – Questão 1. c)

No decorrer da entrevista a dupla revelou o motivo da escolha desses números e fez uma revelação que não havíamos previsto: utilizaram os valores presentes no enunciado e na resposta do item anterior. A integrante D1-2 explicou que usou os números 5 e 2 dados na resposta ao item b): “5 + 2 = 7” e 0,5 presente no enunciado do item a).

Observamos que a dupla 7 utilizou os mesmos valores que a dupla 1: “7,5 e 5”, porém não se referiu à escolha desses valores por influência dos apresentados no enunciado da questão, mas argumentou que poderiam ser quaisquer dois valores cuja subtração resultasse em 2,5 e que simplesmente escolheu escrever esses. Ou seja, embora não tenha apresentando a simbolização em termos de número genérico, mostra a interpretação como tal.

De acordo com nossos registros de observação a dupla 5 havia escrito “$x - x$” e depois optaram por registrar a subtração de 5,5 por 3,0. No decorrer da entrevista os componentes explicaram que a primeira resposta não daria certo, pois resultaria em zero. Nesse caso, percebemos certa dificuldade na representação dos dois termos desconhecidos por variáveis, o que ocasionou o abandono da estratégia de representação por letras.

A dupla 2 e o trio simbolizaram o minuendo e o subtraendo pelas letras x e y, o que indica a habilidade **F6**[1]. Além disso, testaram o funcionamento da expressão apresentando um exemplo.

A dupla 2 (figura 9), antes da representação por letras, testou a subtração de alguns pares de números que resultasse em 2,5. Durante a entrevista as componentes revelaram como pensaram:

D2-1: “Dois números. A gente não sabia quais eram, daí “$x - y$”. E tinha que ser igual a 2,5.”
P: “Poderia ser outros números?”
D2-1: “Sim, mas não qualquer um. Tinha que fazer as contas.”
P: “O que tinha que acontecer então?”
D2- “A conta tinha que dar 2,5.”

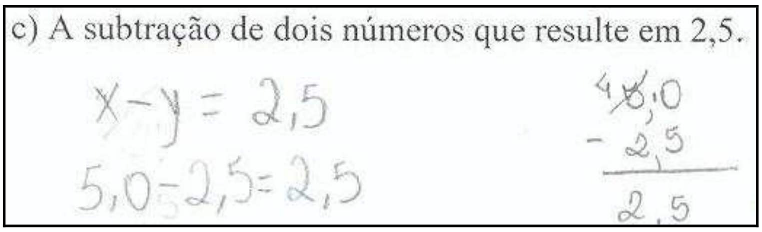


Figura 9: Protocolo da dupla 2 – Questão 1. c)

No diálogo que se deu com a dupla 2 percebemos o entendimento do símbolo pelas integrantes como representante de vários valores e, além disso, a percepção do relacionamento entre x e y, quando D2-1 disse que não poderia ser qualquer um.

De acordo com os registros de observação, o trio também havia escrito ‘$x - x$’ antes de ‘$x - y$’. Durante a entrevista as componentes deram explicações de por que mudaram essa estratégia:

[1] **F6:** “expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema.”

T2: “Porque esse *x* é um número e *y,* é outro. Se você fizer um número menos ele mesmo vai dar zero.”
T1: “Toda variável que não tem número na frente é igual a um. E um menos um é zero.”

Nesse diálogo percebemos que T2 apresenta um argumento diferente de T1 em relação a subtração ‘$x - x$’. Aquela se refere ao valor que x representa e esta ao coeficiente de x.

As duplas D3, D4 e D6 apresentaram equações que não atendem ao enunciado da questão. Talvez pela dificuldade em simbolizar os dois termos, essas equipes simplesmente focalizaram a atenção no resultado 2,5.

A dupla 6 elaborou e efetuou a equação “$5x - 1x - 5 - 2 - 3 = 0$”, obtendo $x = 2,5$. Quando questionados sobre onde estaria representada a subtração de dois números não souberam explicar.

Na produção escrita da dupla 3 (figura 10) podemos observar a elaboração de uma equação igualada a zero, como fez também no item b); e depois a desconsideração de zero e da própria igualdade ao realizar operações com os termos. Nas etapas de resolução da equação podemos verificar que as componentes também desconsideraram a letra x como se estivessem calculando apenas ‘20 – 17,5’:

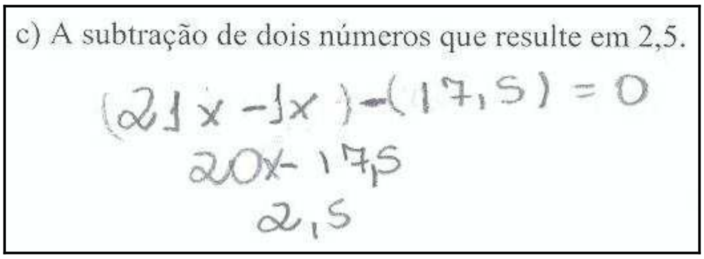

c) A subtração de dois números que resulte em 2,5.
(21x -1x)-(17,5) = 0
20x- 17,5
2,5

Figura 10: Protocolo da dupla 3 – Questão 1. c)

Na tentativa de entender o procedimento adotado pela dupla, questionamos:

P: “O enunciado pede a subtração de dois números que resulte em 2,5. Quais são esses dois números?”
D3-2: “Na minha opinião são o 20 e o 17,5. Só que aqui já tinha subtraído esse ($21x - 1x$).”
P: “Pelas minhas observações vocês, primeiramente, escreveram uma subtração de dois números. Por que mudaram a estratégia?”
D3-1: ‘É, só que não tinha colocado nem parênteses nem nada, tinha feito direto. Se tivesse colocado só número ia ficar estranho porque a gente está muito acostumada com letra.”

D3-2: “Aí a gente começou a colocar letra.”
D3-1: “Na verdade não precisava ter colocado.”

A dupla revela nesse diálogo a preocupação com a forma de apresentação da expressão, tendo que ter parênteses e letras, e tenta atender ao enunciado respeitando-a.

Na seqüência apresentamos o protocolo da dupla 4:

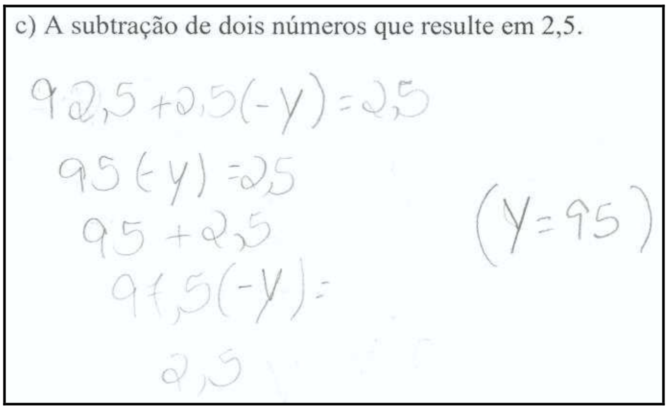


Figura 11: Protocolo da dupla 4 – Questão 1. c)

Nele podemos observar o uso da letra *y* como um dos termos da equação, designada a valer 95. Além disso, o não reconhecimento das operações de multiplicação que a forma de apresentação da equação revela em “2,5(-*y*)”, “95(-y)” e “97,5(-y)”. E ainda, a desconsideração da igualdade ao somar 95 com 2,5.

Os componentes da dupla revelaram no áudio que essa questão era a mais difícil e reafirmaram isso durante a entrevista. No decorrer desta, um deles explicou o procedimento tomado, enquanto o outro se opôs à resposta dada, como podemos observar no diálogo a seguir:

D4-1: “No caso aqui teve erros porque era pra fazer a subtração de dois números e não de uma incógnita.”
D4-2: “Mas uma incógnita pode ser um número. Qualquer número.”
P: “O que pede o enunciado? Onde está representada a subtração de dois números?”
D4-1: “Esse é o problema. Nós não subtraímos dois números, nós subtraímos uma incógnita.”
D4-2: “Uma incógnita que está representando um número, que no caso é 95. A gente somou um número pra depois de obter a resposta fazer a subtração pra chegar no resultado.”
P: “Ah, entendi. Então a subtração desses dois números está representada aqui [2ª linha: 95(-*y*) = 2,5]. E como *y* = 95, então 95 – 95 é igual a 2,5?”

D4-1: “95 + 2,5 pra dar 97,5 e depois tirar *y*. É o processo inverso para achar o valor de *y*.”

Os dados apresentados nas respostas ao item c) mostram que a simbolização de variáveis relacionadas foi mais difícil para esses alunos do que as de variável como incógnita ou número genérico. Mesmo as equipes que as representaram corretamente mostraram que antes de escrever ‘$x - y = 2{,}5$’, escreveram ‘$x - x = 2{,}5$’. Esses resultados também foram encontrados por Trigueros et al. (2000), as quais apontam que diante de problemas verbais, os alunos de todos os níveis mostram fortes dificuldades para simbolizar uma relação funcional. (p. 44)

Para as pesquisadoras tal resultado é um indicador de que os alunos precisam de apoio para reconhecer e expressar simbolicamente a relação entre duas variáveis. (URSINI e TRIGUEROS, 1998, p. 457)

Em suma, no desenvolvimento da questão 1, as equipes D2 e T foram as únicas que mantiveram a estratégia de simbolização dos valores desconhecidos por variáveis, atendendo corretamente a cada um dos enunciados. A dupla 5 que simbolizou por letras corretamente os itens a) e b), mostrou dificuldades para a simbolização de variáveis relacionadas, apresentando um exemplo de subtração que resultasse em 2,5 no item c).

A dupla 4 simbolizou corretamente a incógnita referente ao item a) e mostrou problemas para a simbolização de uma variável no papel de número genérico e de variáveis relacionadas.

As duplas 1 e 7 apresentaram a representação de cada sentença pelo número em questão, onde requeria uma incógnita; e por possíveis valores, nos itens que requeriam a simbolização de número genérico e variáveis relacionadas.

A dupla 3, que representou o valor da incógnita numa sentença no item a), mostrou que a simbolização por letra era necessária quando a sentença se referia a um número genérico ou a variáveis relacionadas, porém, as letras não foram representadas com esses papéis nas expressões elaboradas nos itens b) e c).

A dupla 6 apresentou estratégias que envolveram sempre procedimentos de simbolização e de manipulação de equações em todos os itens, mostrando formas de representação que não atendem ao enunciado.

Considerando os aspectos inseparáveis que sintetizam o conceito de variável, citados por Caraça (1954), ou seja, o simbólico: da letra ou símbolo tomados; e o substancial: do conjunto representado, percebemos, com os resultados obtidos da aplicação da questão 1, que na incerteza ou na dificuldade de simbolização da variável para atender ao enunciado é o aspecto substancial que se revela. Fato que levou algumas equipes a apresentar exemplos que validassem a expressão algébrica construída ou mesmo representasse a sentença do enunciado por possíveis valores que a atendesse.

Na seqüência apresentamos os resultados obtidos da aplicação da segunda questão.

4.2 Questão 2

Com a questão 2, transcrita abaixo, tínhamos por objetivo verificar a habilidade de interpretação das letras nos papéis de incógnita, número genérico e variáveis relacionadas.

> **Questão 2:** Escreva por quantos valores as letras podem ser substituídas em cada uma das expressões abaixo. Dê exemplos.
>
> **a)** $x = 10 + y$
> **b)** $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$
> **c)** $x(x + 1) = -3 + x^2$

As equipes utilizaram tanto procedimentos de substituição, quanto de manipulação das variáveis para chegar a suas conclusões.

O item a) requeria a interpretação de variáveis presentes em uma relação funcional.

A dupla 1 apresentou um procedimento incorreto, atribuindo valores aleatórios para x e para y sem respeitar a igualdade da sentença. Realizou operações no intuito de obter um resultado e concluiu que x e y podem representar os números que substituíram na sentença, como mostra seu protocolo:

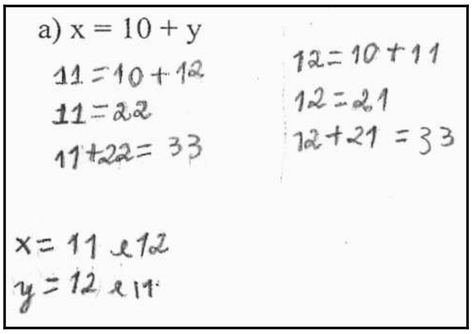


Figura 12: Protocolo da dupla 1 – Questão 2. a)

Aproveitamos o momento da entrevista para pedir explicações para a dupla sobre o procedimento que tomaram:

P: “11é igual a 22?”

D1-1: “Não. Mas a gente aprendeu que quando acontece isso tem que passar o número pro outro lado [1º membro] e mudar o sinal.”

P: “Foi isso o que vocês fizeram?”

D1-2: “Não. Eu tirei o sinal de igual e coloquei o de mais pra fazer uma conta.”

Percebemos pela fala de D1-1 a falta de entendimento da igualdade na sentença e a busca por um resultado, enquanto D1-2 parece se reportar aos procedimentos de resolução de equações.

A dupla 6 apresentou um procedimento de manipulação das variáveis *x* e *y* de modo a obter uma equação e poder encontrar sua solução. Vejamos seu protocolo:

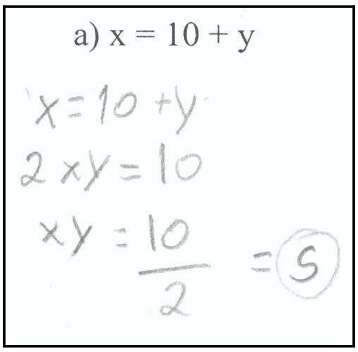


Figura 13: Protocolo da dupla 6 – Questão 2. a)

Na entrevista a equipe revela como procedeu:

P: “Como vocês chegaram em ‘2*xy* = 10’? O que fizeram?”

D6-2: “É que o *x* vale 1 e o *y* vale 1, então a gente somou e deu 2*xy*.”

D6-1: "É, acho que sim, a gente não lembra como resolver contas com duas letras."

P lê o restante da expressão: '$xy = 10/2 = 5$'. Lembra o enunciado e pergunta: vocês encontraram os valores que x e y podem ser substituídos? Quem é 5?

Os alunos ficaram em silêncio e não responderam.

Percebemos pelas justificativas apresentadas pela dupla que as variáveis foram avaliadas como se valessem 1, por considerar os valores de seus coeficientes. Além disso, os componentes de D6 mostraram o não entendimento do resultado a que chegaram, quando foram questionados sobre o mesmo.

Percebemos nas estratégias seguidas por D6, não apenas nesse item, mas adiantamos, nos itens b) e c) dessa questão, que os termos das expressões são organizados obedecendo ao critério de que os que apresentam parte variável fiquem no 1º membro e os que não têm, fiquem no 2º membro da sentença. Ou seja, a realização de operações na intenção de obter um resultado, mesmo que este não faça sentido para a dupla.

As duplas 2, 4 e 5 apresentaram procedimentos de substituição das variáveis por vários valores, respeitando a igualdade da sentença. Concluíram que as variáveis podem ser substituídas por infinitos números, indicando a mobilização da habilidade **G2**[1]. As respostas dessas duplas revelam que esses infinitos números a que se referem são os elementos do conjunto dos números inteiros positivos. Ilustramos essa estratégia com a figura a seguir:

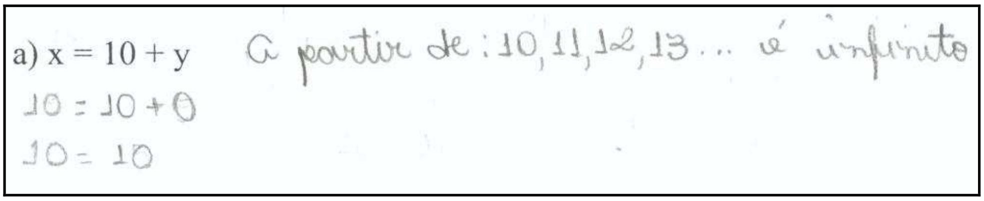


Figura 14: Protocolo da dupla 2 – Questão 2. a)

No decorrer da entrevista perguntamos a qual das variáveis se referiram na escrita da conclusão e as componentes de D2 responderam que falavam de x. Questionadas sobre os valores de y disseram que poderiam ser os valores maiores ou iguais a zero.

Durante a entrevista com a dupla 5 percebemos o motivo porque também não consideraram os valores de y menores do que zero e os de x maiores do que 10:

P: "Por que x tem que ser acima de 10?"

[1] **G2:** "interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor."

D5-1: “Só se pudesse mudar aqui [adição] pra fazer uma subtração.”

P: “E não dá pra mudar?”

D5-2: “Não.”

D5-1: “Não, a equação dada foi esta.”

Nesse caso a dupla revela a dificuldade em conceber a soma com os inteiros negativos, pois para esta a operação não poderia ser alterada.

A dupla 4 apresentou a resposta se reportando aos nomes dos conjuntos numéricos. Foi a única dupla que mostrou que *y* pode representar um número negativo. Nesse caso, a própria escrita expressa o conjunto que considerou representar as variáveis. Vejamos seu protocolo:

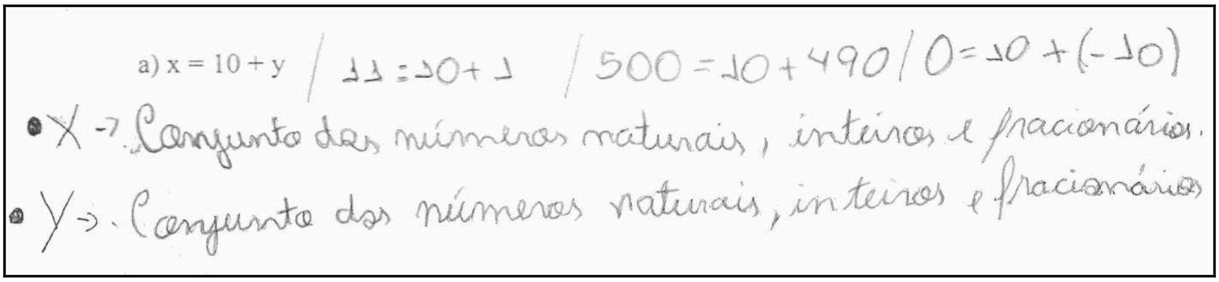


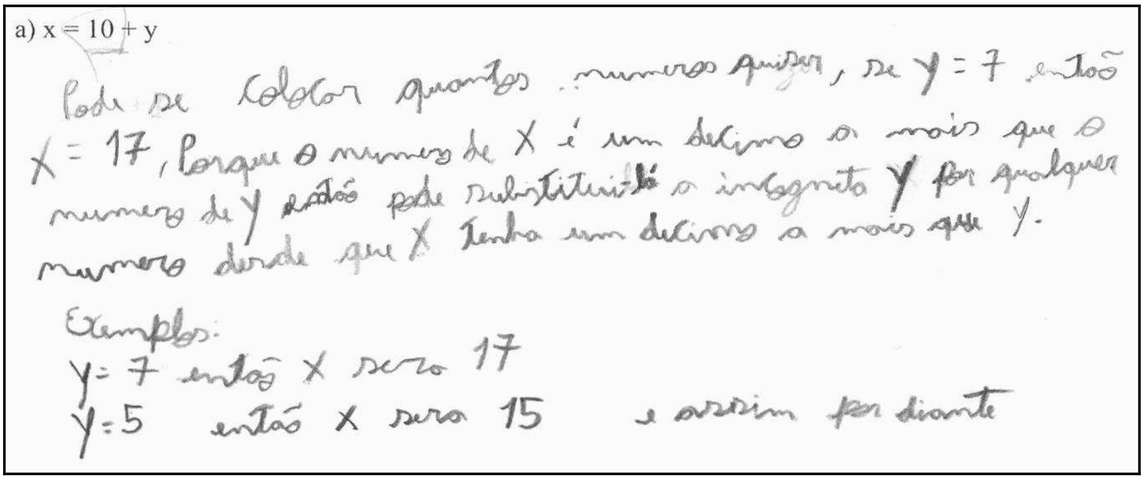
Figura 15: Protocolo da dupla 4 – Questão 2. a)

Perguntamos aos componentes de D4 se haviam testado alguma fração, pois isso não foi constatado nos registros de observações e de áudio. A integrante D4-2 respondeu que não, mas concluiu que poderia, porque a igualdade estava sempre dando certo com os números que testaram.

Podemos observar pelas respostas apresentadas pelas duplas 2, 4 e 5 que se referiram aos valores que as letras podem representar sem se reportar à relação existente entre elas, o que explica que não as interpretaram como variáveis relacionadas.

Os dados obtidos nas respostas a esse item mostram que apenas as equipes D3, D7 e T interpretaram as variáveis *x* e *y* como presentes em um relacionamento funcional.

As duplas D3 e D7 apresentaram procedimentos de substituição, atribuindo valores para *y* e encontrando os respectivos de *x*, mobilizando a habilidade **F2**- “determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente”. Ilustramos tal procedimento com o protocolo de D7:


a) x = 10 + y

Pode se colocar quantos numeros quiser, se y = 7 então x = 17, porque o numero de X é um decimo a mais que o numero de y então pode substituir a incognita y por qualquer numero desde que X tenha um decimo a mais que y.

Exemplos:
y = 7 então X sera 17
y = 5 então X sera 15 e assim por diante

Figura 16: Protocolo da dupla 7 – Questão 2. a)

Observamos na figura 16 que a dupla percebeu a relação existente entre as variáveis, mobilizando assim a habilidade **F1**[1]**,** e descreveram a regra que as associa.

Durante a entrevista os componentes da dupla 7 explicaram que queriam dizer "dez a mais" com "um décimo a mais".

Quanto ao conjunto tomado como 'qualquer número' a dupla exemplificou: "poderia ser número negativo, positivo, decimal."

A dupla 3 também mostrou a dificuldade em conceber a soma com número negativo. Disse em entrevista que as variáveis poderiam ser substituídas por quaisquer números e citou exemplos somente com inteiros positivos, alegando que a operação que se tinha era de adição e que não daria para somar com os negativos. Também mostraram o reconhecimento da dependência de x em relação a y, ou a mobilização de **F1**[2]:

D3-1: "É uma regra: acrescentando qualquer número em y vai dar o valor de x."

As componentes do trio manipularam a expressão dada, escrevendo "$x - y = 10$". Atribuíram valores para as variáveis e concluíram que poderiam ser substituídas por vários números. Os exemplos citados por T como 'vários valores' foram números inteiros e decimais positivos.

Durante a entrevista uma delas explicou o que quer dizer '$x - y = 10$':

[1] **F1:** "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)".
[2] **F1:** "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)".

T2: “Tem que substituir *x* e *y* contando que a diferença entre um e outro seja sempre 10.”

Nesse caso a equipe também explica como deve ser a correspondência entre as duas variáveis, mostrando a mobilização da habilidade **F1 -** “reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)”.

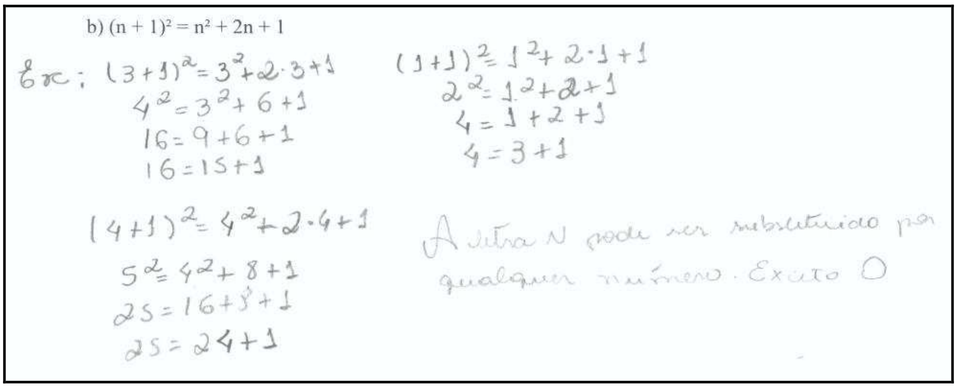
As respostas apresentadas no item a) dessa questão mostram que a maioria dos alunos interpretaram as variáveis *x* e *y* como entidades genéricas (D2, D4, D5) ou como variáveis relacionadas (D3, D7 e T). As equipes D1 e D6 apresentaram procedimentos que não favoreceram a identificação do papel das letras na referida expressão.

Para Ursini et al. (2005), interpretar as variáveis em relação funcional como números genéricos é importante, já que em uma relação funcional, as variáveis envolvidas, num primeiro momento, podem e devem ser vistas como números genéricos, pois realmente podem assumir, na forma independente, qualquer valor. (p. 54)

Com o item b) tínhamos por objetivo verificar como os alunos interpretariam a variável no papel de número genérico. As equipes apresentaram tanto procedimentos de substituição da letra *n* quanto de manipulação da expressão.

As duplas 2, 3 e 7 substituíram *n* por alguns valores, encontrando sempre uma igualdade, o que as fez concluir que a referida letra poderia representar infinitos valores. Mostraram assim a mobilização da habilidade **G2** – “interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor”.

O protocolo da equipe 3 ilustra esse procedimento:


b) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Ex: $(3+1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$
$4^2 = 3^2 + 6 + 1$
$16 = 9 + 6 + 1$
$16 = 15 + 1$

$(1+1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$
$2^2 = 1^2 + 2 + 1$
$4 = 1 + 2 + 1$
$4 = 3 + 1$

$(4+1)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$
$5^2 = 4^2 + 8 + 1$
$25 = 16 + 8 + 1$
$25 = 24 + 1$

A letra N pode ser substituido por qualquer número. Exceto 0

Figura 17: Protocolo da dupla 3 – Questão 2. b)

Durante a entrevista mostramos às componentes de D3 o rascunho que fizeram dessa questão e elas perceberam o erro que cometeram para concluir que zero não poderia ser utilizado. Elas haviam escrito “$0^2 = 0^2 + 2.0 + 1$” e na multiplicação de 2 por 0 colocaram como resultado o número 2, obtendo “$0 = 3$”. No trecho a seguir da entrevista a dupla também revela como procedeu:

P: “Vocês responderam qualquer número. Como assim?”

D3-2: “A gente colocou vários números e sempre dava certo. Então a gente concluiu que com todos daria certo.”

P: “E será que dá certo com número negativo? Vocês tentaram?”

D3-1: “Não, a gente não substituiu porque não era menos. A gente nem teve essa idéia, nem pensou.”

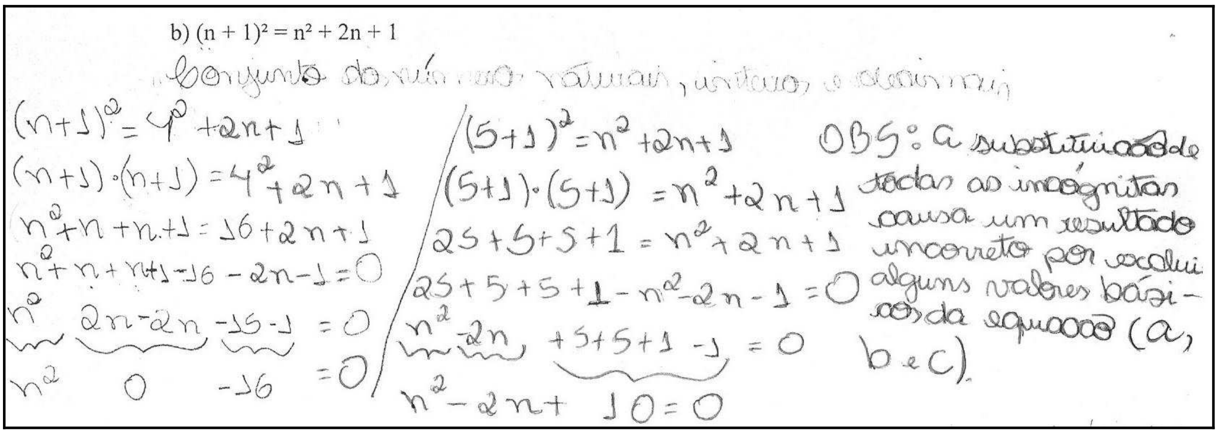
P: “E algum número decimal? Alguma fração?”

D3-2: “A gente não tentou.”

Percebemos com a fala de D3-1 “não era menos” a dificuldade em entender a soma com um número negativo.

Resolvemos também questionar se daria certo utilizando números decimais e frações para verificar a que números se referem com a expressão ‘qualquer número’. Pela resposta dada por uma das integrantes no diálogo apresentado podemos concluir que essa generalização se refere ao conjunto dos números inteiros positivos.

A dupla 4 (figura 18) misturou procedimentos de manipulação e de substituição na tentativa de resolução da questão por métodos de resolução de equações do 2º grau, conforme mostra a figura 19:



b) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

conjunto dos números naturais, inteiros e decimais

$(n+1)^2 = 4^2 + 2n + 1$

$(n+1)\cdot(n+1) = 4^2 + 2n + 1$

$n^2 + n + n + 1 = 16 + 2n + 1$

$n^2 + n + n + 1 - 16 - 2n - 1 = 0$

$\underbrace{n^2}\ \underbrace{2n - 2n}\ \underbrace{-15 - 1} = 0$

$n^2 \quad 0 \quad -16 = 0$

$(5+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$(5+1)\cdot(5+1) = n^2 + 2n + 1$

$25 + 5 + 5 + 1 = n^2 + 2n + 1$

$25 + 5 + 5 + 1 - n^2 - 2n - 1 = 0$

$\underbrace{n^2 - 2n}\ \underbrace{+ 5 + 5 + 1 - 1} = 0$

$n^2 - 2n + 10 = 0$

OBS: a substituição de todas as incógnitas causa um resultado incorreto por excluir alguns valores básicos da equação (a, b e c).

Figura 18: Protocolo da dupla 4 – Questão 2. b)

A gravação em áudio revelou a certeza mostrada por esta equipe de que nesse item se apresentava uma equação do 2º grau e que não estava conseguindo "encontrá-la" porque quando substituía as variáveis obtinha uma igualdade numérica. Essa certeza a conduziu a misturar os procedimentos de substituição e de manipulação a fim de encontrar equações do 2º grau como as mostradas em seu protocolo: "$n^2 - 16 = 0$" e "$n^2 + 2n + 10 = 0$". A observação escrita pela dupla apresenta a justificativa para esse procedimento.

No decorrer da entrevista questionamos:

P: "Por que incorreta?"
D4-1: "Porque senão fica sem x^2. Na equação do 2º grau tem que ter x^2. Não dá pra resolver assim."
D4-2: "Ela deixa de ser uma equação do 2º grau e se torna um outro tipo de equação com um resultado incorreto."
P: "Mas está escrito que é uma equação do 2º grau?"
D4-2: "Não, mas o modelo é de uma."

A expectativa de que se trata deste tipo de equação ocorreu pela presença do expoente 2 na expressão, como também mostraram alguns resultados apresentados por Ursini e Trigueros (1998): "a presença do expoente quadrático na equação parece conduzi-los automaticamente a considerar que se encontram frente a uma equação do 2º grau (...)". (p. 452)

A dupla 5 (figura 19) desenvolveu corretamente o 1º membro da igualdade e obteve a expressão do 2° membro, apresentando um procedimento em termos de **G4** – "manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica". Interpretou esse resultado como indicador de que n pode ser substituído por 1, pois havia escrito "$1n$" em vez de "n".

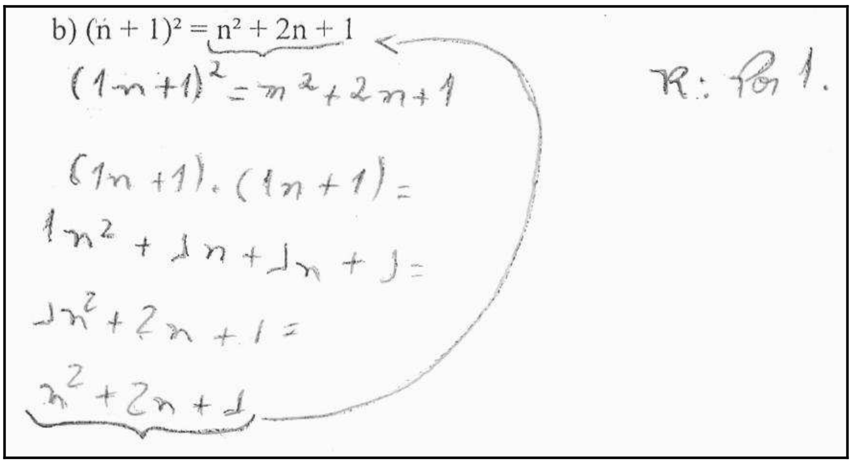


Figura 19: Protocolo da dupla 5 – Questão 2. b)

No diálogo com os componentes da dupla fica evidente que consideraram o valor que n representa pelo valor de seu coeficiente:

P: “Por que por 1? Como fizeram pra achar o 1?”
D5-2: “Uma equação do 2º grau.”
P: “Como assim? Vocês resolveram? Onde tem uma equação do 2º grau aqui?”
D5-2: “Tudo aqui é uma equação do 2º grau. Aqui é o primeiro ‘termo’ [se referindo a $(n + 1)^2$] e aqui [$(n^2 + 2n + 1)$], o segundo.”
D5-1: “A gente deixou de lado o segundo ‘termo’ e veio pro primeiro. Aí o primeiro resultou no segundo.”
P: “Com isso vocês concluíram que o n só pode ser 1? Como vocês chegaram nesse 1?”
D5-1: ‘A gente substituiu o n pelo número 1 no primeiro ‘termo’ de forma que no resultado a gente pudesse obter o que está no segundo ‘termo’.”
P: “Ah, entendi. Em vez de escrever n vocês escreveram $1n$. Assim vocês substituíram o n por 1?’
D5-1: “É.”

Percebemos pela fala dos componentes a influência do expoente quadrático para a conclusão de que se trata de uma equação do 2º grau, assim como mostrou a dupla 4. Após desenvolver o primeiro membro da expressão eles verificaram que obtiveram o que continha no segundo, porém, não souberam interpretar esse resultado como indicador de que n tem status de número genérico. A conclusão apresentada pela dupla mostra que n vale 1, pois esse é o valor de seu coeficiente para que tenham expressões equivalentes. Tal explicação pode indicar o entendimento pela dupla de que o valor do coeficiente possa mudar.

Outros resultados que mostram uma compreensão errônea do uso do coeficiente também foram apresentados por Ursini et al. (2005): quanto a interpretação de m, a maioria dos alunos expressa que representa qualquer valor, contudo, também encontramos quem considere que m é equivalente a $3m$, $10m$, $3am$, $3ma$. (...) eles parecem não reconhecer que o coeficiente de m é 1, e consideram que podem lhe atribuir um coeficiente qualquer. (p. 18)

A equipe 6 apresentou um procedimento de manipulação da expressão de modo a encontrar uma solução. Um dos erros notáveis na manipulação é considerar $(n + 1)^2$ igual a $1n$, como podemos observar em seu protocolo:

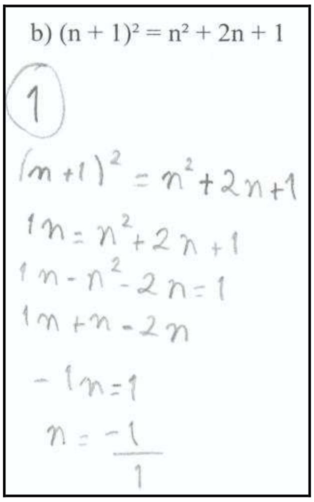


Figura 20: Protocolo da dupla 6 – Questão 2. b)

Durante a entrevista pedimos a esses alunos que explicassem como procederam, o que se deu no seguinte diálogo:

D6-2: "A gente separou as letras dos números."

D6-1: "É, aí tem que trocar os sinais."

P observa na quarta linha da resolução: "cadê o sinal de igual?"

D6-2: "É, tinha que colocar igual a zero."

D6-1: "Igual a zero, não. Igual a um."

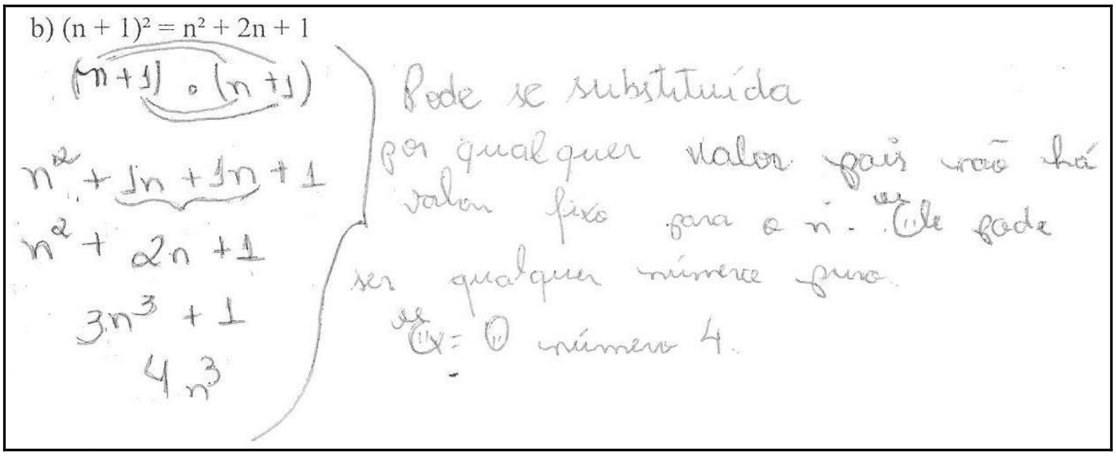
P: "Cadê o n^2?"

Os alunos não conseguiram explicar e D6-1 finalizou: "eu não entendi o que a gente fez aqui."

O diálogo com essa dupla mostra o uso de procedimentos algorítmicos que são usados incorretamente, evidenciando que embora esses alunos optem por essa estratégia, não entendem o feito.

De acordo com os registros de observação o trio tentou primeiramente resolver a questão manipulando a expressão na tentativa de recair numa equação do 2º grau e poder resolvê-la. Depois abandonou essa estratégia e desenvolveu o primeiro membro da igualdade. Embora tenha respondido que *n* pode ser substituído por qualquer valor, durante a entrevista percebemos que esse 'qualquer valor' se referia aos coeficientes que *n* poderia assumir. O exemplo apresentado em seu protocolo (figura 21) também mostra isso.

Na manipulação das variáveis, ou na mobilização da habilidade **G4**[1], a equipe mostra o conhecimento da propriedade distributiva, porém executaram a soma dos termos sem considerar se são semelhantes ou não, como mostra seu protocolo:


b) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$(n+1) \cdot (n+1)$

$n^2 + \underbrace{1n + 1n}_{} + 1$

$n^2 + 2n + 1$

$3n^3 + 1$

$4n^3$

Pode se substituída por qualquer valor pois não há valor fixo para o n. Ele pode ser qualquer número puro.

Ex: O número 4.

Figura 21: Protocolo do trio – Questão 2. b)

Durante a entrevista perguntamos às integrantes de T como pensaram. Elas argumentaram que usaram a propriedade distributiva e depois somaram os termos. Quanto à soma que realizaram, questionamos:

P: "Vocês começaram somando $1n$ com $1n$, que deu $2n$. E aqui: $n^2 + 2n$ é igual a $3n^3$, como calcularam?"

T1: "Aqui [n^2] quando não tem nada [se referindo ao coeficiente] é igual a 1, com mais 2 [coeficiente de $2n$], dá 3. E n também, quando não tem nada [referindo-se ao expoente] é igual a 1. Com mais 2 [expoente de n^2], dá 3. Por isso, $n^2 + 2n$ é igual a $3n^3$."

P: "Ah e depois: $3n^3 + 1$ é igual a $4n^3$ pelo mesmo raciocínio?"

T2: "Isso."

P: "Como é que vocês concluíram que a variável poderia ser substituída por qualquer valor?"

T1: "Porque a variável é uma letra que representa um valor que a gente não tem. Se a gente não sabe o valor, então coloca uma letra."

P: "E esse 4 do exemplo que citaram, como encontraram?"

T1: "É esse daqui [$4n^3$]."

[1] **G4:** "manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica."

As justificativas apresentadas por T mostram a confusão entre a idéia de variável e a interpretação do resultado que obteve, para a conclusão apresentada. E ainda, os critérios adotados pela equipe para a soma dos termos da expressão.

A dupla 1 mostrou procedimentos de substituição da variável *n* por diferentes valores na mesma expressão e, mais uma vez, sem atender ao conceito de igualdade. Adiantamos que no item c) dessa questão esses alunos procederam da mesma forma. Observemos seu registro escrito:

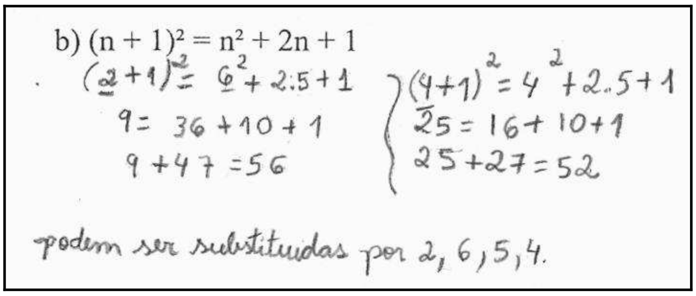


Figura 22: Protocolo da dupla 1 – Questão 2. b)

Ursini et al. (2005) discutem que, em casos como esse, parece que a idéia de que a variável representa qualquer número se confunda com a ênfase na abordagem da incógnita, em que sempre devem encontrar seu valor. (p. 17)

Os dados apresentados pelas equipes mostrou a interpretação da variável como número genérico pela duplas D2, D3 e D7. As equipes T e D5 expressaram que a variável em questão pode representar qualquer número, porém, referindo-se ao seu coeficiente. As duplas D1, D4 e D6 apresentaram procedimentos que não favoreceram a identificação do papel da variável *n* na expressão.

Com o item c), cujos resultados apresentamos a seguir, tínhamos por objetivo verificar como os alunos interpretariam a variável no papel de incógnita. Os alunos apresentaram tanto estratégias de substituição, quanto de manipulação das variáveis. As estratégias de substituição mostradas pelas equipes D1, D2 e D3 não desencadearam o sucesso na resposta e revelaram problemas com o conceito de igualdade. As estratégias de manipulação mostraram a procura de erros em etapas de resolução pelas equipes D4, D5, D6, D7 e T, ao chegarem em expressões do tipo '$x + 3 = 0$', '$x + 3$' ou '$1x +3 = 0$'. Nesse caso, os alunos revelaram a falta de interpretação da variável nas expressões obtidas.

A dupla 2 tentou primeiro a resolução por manipulação (**I4**[1]) e chegou em '$x + 3 = 0$'. Abandonou a estratégia e tentou a substituição de *x* por 1, obtendo '2 = -2', o que a levou a concluir, erroneamente, que *x* só pode ser substituído por 1, como pode ser visto na figura 23:

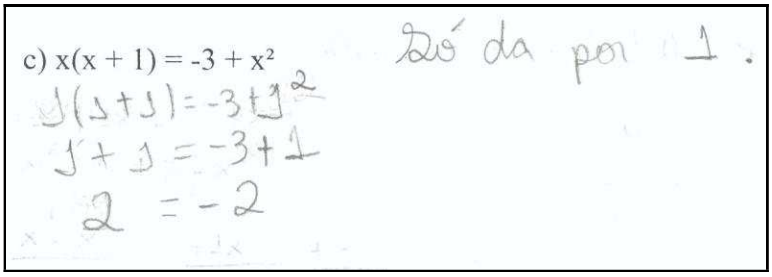


Figura 23: Protocolo da dupla 2 – Questão 2. c)

No decorrer da entrevista as integrantes de D2 revelaram como procederam:

D2-2: "Essa a gente não conseguiu."

P: "Aqui vocês substituíram por quanto?"

D2-2: "Por 1."

P: "E deu certo?"

D2-2: "Não, porque deu um positivo e outro negativo."

D2-1: "É, tinha que ter dado igual."

P: "Vocês responderam que só dá por um."

D2-2: "É, mas não dá."

P: "Por que desistiram de calcular da outra forma?"

D2-1: "A gente calculou, aí no final deu '*x* mais três igual a zero'. E aí?"

P: "E aí?"

D2-1: "Então já que a gente ficou sem saber, a gente desistiu."

P: "O que é *x*?"

D2-1: (risos) "É um valor. É uma variável."

P: "O que é uma variável pra vocês?"

D2-2: "É uma letra, um número qualquer. Pode ser qualquer número."

P: "Então vamos ler: *x* mais três é igual a zero. O que é *x*?"

D2-2: "Um número."

P: "Então como podemos ler?"

D2-2: "Um número mais três é igual a zero."

---

[1] **I4:** "determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas."

D2-1: “Não lembro mais.”

P: “Não?!”

D2-2: “Só se colocasse ali -3 com +3 é igual a 0.”

P: “Dá certo?”

D2-2: “Dá.”

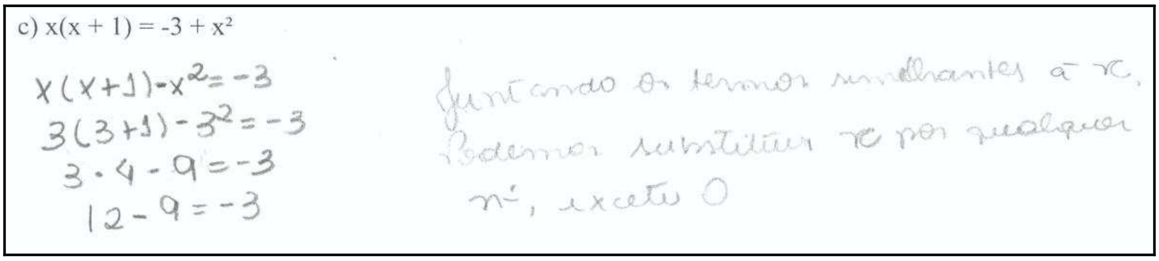
D2-1: “Dá, porque se eu tinha 3 reais e gastei 3 então vou ficar com nada.”

P: “Então qual é o valor de *x*?”

D2-1: “Seria -3.”

Nessa conversa percebemos que a letra, que segundo D2-2 representa ‘um número qualquer’, não foi interpretada dessa maneira na expressão em que apareceu, o que levou a dupla a desistir da estratégia de manipulação. A justificativa apresentada mostra também a percepção do erro cometido ao escrever “2 = -2”.

A dupla 3 (figura 24) tentou o procedimento de substituição de *x* por alguns números e deixou registrado apenas a substituição de *x* por 3. Na entrevista perguntamos se obtiveram uma sentença verdadeira e uma das integrantes disse que sim:


c) $x(x + 1) = -3 + x^2$

$x(x+1)-x^2=-3$

$3(3+1)-3^2=-3$

$3\cdot 4-9=-3$

$12-9=-3$

Juntando os termos semelhantes a x.
Podemos substituir x por qualquer nº, exceto 0

Figura 24: Protocolo da dupla 3 – Questão 2. c)

P: “Como fizeram?”

D3-2: “Substituímos por 3.”

P: “Vocês substituíram por outros valores antes e apagaram, por quê?”

D3-1: “Não deu certo.”

P: “E como pode ser qualquer valor? Substituindo por 3 dá certo?”

D3-2: “Dá.”

As argumentações apresentadas pelas componentes de D3 expõem a falta de interpretação da igualdade na sentença obtida ao substituir *x* por 3. Ou ainda, que consideram 12 - 9 = -3 como sentença verdadeira, observando o valor absoluto dos números. E ainda, uma generalização sem fundamentação nos procedimentos de substituição realizados pela dupla. Acreditamos que a conclusão apresentada nesse item tenha sofrido influência da que responderam no item anterior, visto que apresentaram a mesma explicação escrita. Porém, no item b), a generalização foi feita com base nos procedimentos de substituição em que foram verificadas a igualdade em todos os casos testados.

A dupla 1, como fez no item b), substituiu a variável *x,* em suas três aparições na expressão dada, pelos números 6, 3 e 2 e escreveu como conclusão que ela pode ser substituída por esses valores.

As duplas 4 (figura 25) e 7 também chegaram, por manipulação, em '$1x + 3 = 0$' (**I4**[1]) e não souberam calcular o valor de x a partir dessa equação. Desistindo dessa estratégia, efetuaram procedimentos de substituição:

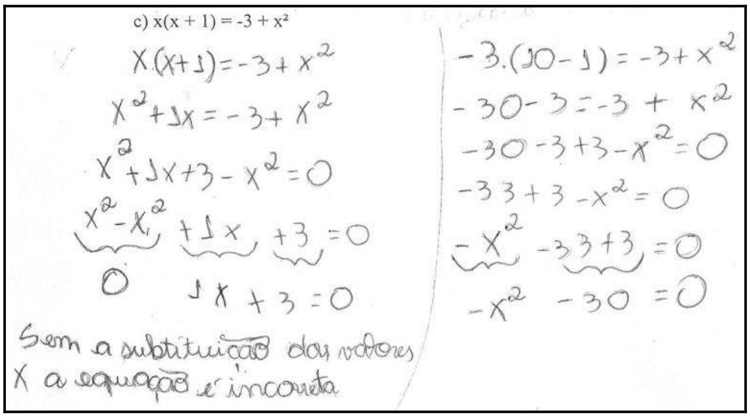


Figura 25: Protocolo da dupla 4 – Questão 2. c)

A dupla 4, mais uma vez por influência do termo x^2, não aceitou que nesse item não tivesse uma equação do 2º grau. Ao obter "$1x + 3 = 0$", desistiu da primeira estratégia e, na outra, misturou os procedimentos de manipulação e substituição das variáveis, atribuindo os valores '-3' e '10' para x, mantendo o termo quadrático sem substituição por algum valor. O protocolo da dupla mostra que sabe operar com os termos da expressão, porém, se os resultados dessas operações não apontam para suas expectativas, mudam a estratégia de modo a satisfazê-las.

As integrantes do trio chegaram por manipulação em '$0 = -3$' e concluíram que x pode ser substituído por infinitos valores. O protocolo da equipe, que ilustramos a seguir, mostra o erro cometido na manipulação da equação para obter essa resposta, quando consideraram que '$x + 1= 1x$':

[1] **I4:** "determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas."

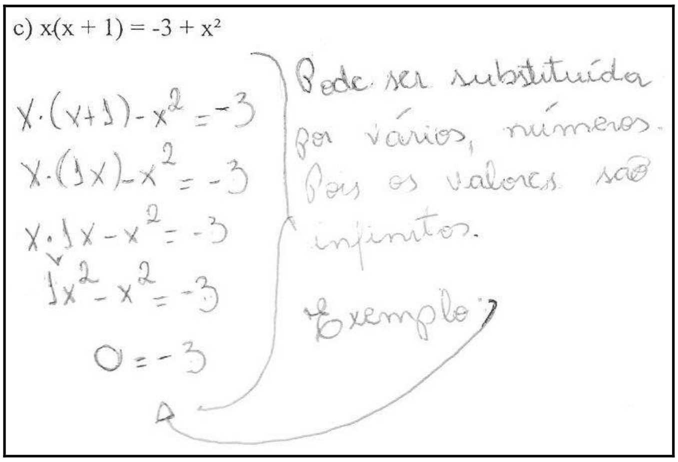


Figura 26: Protocolo do trio – Questão 2. c)

P: "Vocês chegaram em 0 = -3. E zero é a mesma coisa que -3?"

T2: "Aqui seria que dá -3."

Além disso, a fala de T2 evidencia a idéia do sinal de igual relacionado a um resultado.

As duplas D5 (figura 27) e D6 (figura 28), depois de muitas tentativas de manipulação em seus rascunhos que chegavam em "*x* + 3", finalmente conseguiram encontrar o valor de *x*:

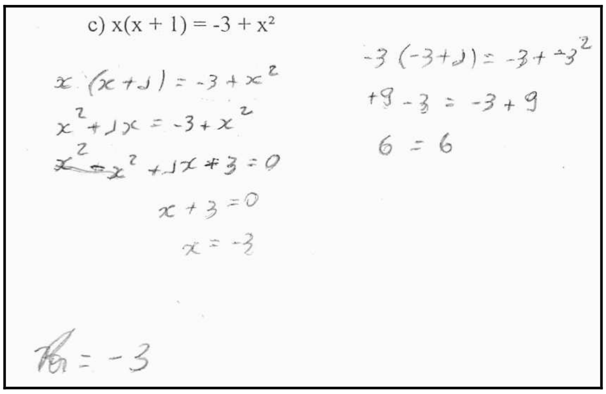


Figura 27: Protocolo da dupla 5 – Questão 2. c)

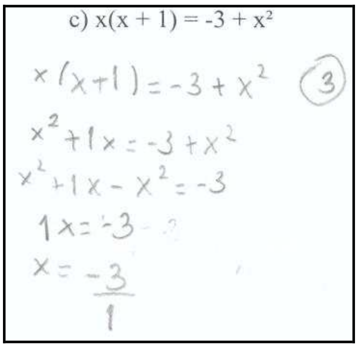


Figura 28: Protocolo da dupla 6 – Questão 2. c)

Observamos durante a aplicação do questionário que as duplas 5 e 6, na tentativa de escrever todos os termos no primeiro membro da equação, esqueciam de igualar a sentença a zero e continuavam a manipulação até recair na expressão '$x + 3$', que não aceitavam como resposta. As falas de uma das componentes de cada uma dessas equipes mostra isso:

D3-1: "A gente tinha esquecido de igualar a zero."

D6-1: "A gente passou só as letras pra um lado e os números pro outro, aí deu certo."

Essas foram as duas únicas duplas que solucionaram a equação corretamente.

Dos resultados que apresentamos na questão 2 destacamos a falta de interpretação das variáveis nas expressões '$x + 3$', '$x + 3 = 0$' e '$1x + 3 = 0$', encontradas pelas duplas D2, D7, D4, D5; e o uso incorreto do sinal de igual nas sentenças '$2 = -2$', '$3 = -3$', '$0 = 3$' e '$12 – 9 = -3$', obtidas pelas equipes D2, D7, T e D3, respectivamente.

Numa análise geral, podemos concluir que a dupla 1, ao apresentar problemas com o conceito de igualdade e ter atribuído valores diferentes para a variável numa mesma expressão, não pode identificar e, em decorrência disso, também não diferenciou, o papel que as variáveis assumem em cada uma das expressões.

A dupla 2 apresentou procedimentos de substituição das variáveis em todos os itens da questão, interpretando as variáveis dos itens a) e b) como números genéricos. No item c), tentou manipular os termos da equação e, ao obter '$x + 3 = 0$', desistiu. Durante a entrevista ficou clara a falta de interpretação da variável como um número nessa sentença. Substituindo x por 1 na expressão dada, se deparou com '$2 = -2$', que inicialmente aceitou como resposta.

A dupla 3 também apresentou procedimentos de substituição das variáveis em todos os itens, interpretando corretamente as letras dos itens a) e b) como variáveis relacionadas e número genérico, respectivamente. No item c), substituindo x por 3, as alunas aceitaram como verdadeira a sentença '$12 – 9 = -3$' e, além disso, escreveram que x poderia ser substituído por qualquer valor. Nesse caso percebemos que a falta de entendimento da igualdade foi um obstáculo para a identificação da variável como incógnita na equação dada.

A dupla 4 realizou a substituição das variáveis do item a) e as identificou como números genéricos. Nos itens b) e c), por acreditar que nesses itens apresentavam-se equações do 2º grau, misturou os procedimentos de manipulação aos de substituição, o que não favoreceu a sua análise do papel das variáveis nesses itens.

A dupla 5, substituindo as variáveis no item a), as identificou como números genéricos. Nos itens b) e c) apresentou procedimentos corretos de manipulação das letras. No primeiro, por falta de entendimento do resultado obtido do desenvolvimento do primeiro membro da expressão, que resultou no segundo, esses alunos se referiram à variável pelo valor de seu coeficiente. No item c), determinaram corretamente o valor correspondente à variável x.

A dupla 6, com a aplicação de procedimentos de manipulação na intenção de obter um resultado, não conseguiu identificar o verdadeiro papel das variáveis dos itens a) e b). No item c), que aborda uma variável no papel de incógnita, a dupla determinou seu valor corretamente.

A dupla 7 apresentou procedimentos de substituição das variáveis nos dois primeiros itens da questão, concluindo, adequadamente, que as variáveis no item a) estão presentes em uma relação funcional; e que a do item b) tem status de número genérico. No item c), tentou resolver a equação por procedimentos algébricos e ao se deparar com '$x + 3$', desistiu dessa estratégia e substituiu a variável, na expressão dada, por 3. Nesse caso a dupla não conseguiu identificar o papel da variável x.

O trio mostrou a substituição das letras no item a), o que o fez concluir, adequadamente, que as variáveis se encontram numa relação funcional. Nos itens b) e c), por apresentar procedimentos de manipulação incorretos, não identificou as variáveis como tendo papéis de número genérico e incógnita, respectivamente.

Os resultados obtidos nessa questão mostram os problemas que impediram a identificação dos diferentes papéis das letras nas expressões dadas. Nos procedimentos de manipulação das variáveis, com a mistura de critérios para a obtenção de um resultado esperado ou mesmo a falta de entendimento da resposta obtida, quando as operações foram realizadas corretamente; e nos procedimentos de substituição, com a falta de entendimento da igualdade.

As estratégias de substituição das variáveis no item a) favoreceram a interpretação destas como números genéricos pelas duplas D2, D3, D4, D5. As equipes D7 e T foram as únicas que as identificaram como presentes em uma relação funcional.

No item b), as únicas duplas que interpretaram a variável, corretamente, como número genérico foram D2 e D7. E no item c), em que a letra tem status de incógnita, a resposta correta foi apresentada pelas duplas D5 e D6.

Como podemos observar, nenhuma das equipes respondeu corretamente a todos os itens dessa questão, o que denota a dificuldade encontrada por elas para identificar o papel das letras, uma das capacidades necessárias para a compreensão do conceito de variável.

Neste caso, o aspecto substancial esteve mais atrelado à idéia de variável que têm os alunos, do que ao papel desempenhado pelas letras nas expressões em que aparecem.

4.3 Questão 3

Com a questão 3, reproduzida a seguir, pretendíamos verificar que conhecimentos os alunos utilizariam para representar expressões algébricas de forma diferente da apresentada e, logo, que significados dariam às variáveis nas representações produzidas por eles.

Questão 3: Represente de uma outra maneira cada uma das expressões:

a) $(x^2 + 1)(x - 2)$
b) $-6 + 5a + 3a$
c) $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y – 8$

Os registros de observação e de áudio revelaram dúvidas das equipes após ler o enunciado. Eles se faziam perguntas do tipo: “Como assim de outra forma?”, “É pra escrever outra ou resolver esta?”; “De uma outra forma? Será que tem que alterar os números, ou a ordem?”.

Percebendo tais questionamentos lhes dissemos que os próprios deveriam decidir como proceder.

As estratégias apresentadas pela maioria das equipes foram as de simplificação das expressões dadas – **G4**[1]. Nos procedimentos de manipulação das variáveis algumas equipes mostraram conhecimentos de agrupamento e soma de termos semelhantes; da aplicação da propriedade distributiva e de fatoração por fator comum em evidência. E a maioria apresentou procedimentos errôneos na aplicação dessas técnicas. Algumas duplas, por exemplo, após

[1] **G4 –** “manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica.”

terem mostrado o agrupamento de termos semelhantes realizaram a soma de termos não semelhantes na mesma expressão.

Como os procedimentos de cada equipe foram praticamente os mesmos nos três itens, apresentamos a análise das respostas de cada uma delas, em cada item.

A dupla 1, no item a), ignorou a multiplicação dos binômios e apresentou como resposta a expressão "$x^2 + x - 2 + 1$". Um componente da dupla explicou no decorrer da entrevista que ordenou a expressão dada. Essa justificativa foi apresentada também para explicar o que foi feito nos itens b) e c), em que apresentaram as expressões "$+ 3a + 5a - 6$" e "$y^2 + 4y^2 + 2y - 5y - 8$", respectivamente. Como se pode observar na figura 29, a dupla indicou os termos semelhantes por uma espécie de agrupamento. D1-1 descreveu o procedimento tomado, durante a entrevista: "colocamos em ordem também e juntamos os semelhantes."

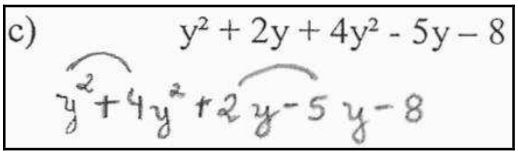


Figura 29: Protocolo da dupla 1 – Questão 3. c)

A dupla D2, assim como a dupla D4, efetuou operações com os termos das expressões e elaborou outra expressão que, de acordo com as componentes, na forma reduzida, é igual à da expressão dada. No item a) aplicou a propriedade distributiva, efetuando a multiplicação do primeiro binômio pelo segundo. A figura 30 mostra essa estratégia:

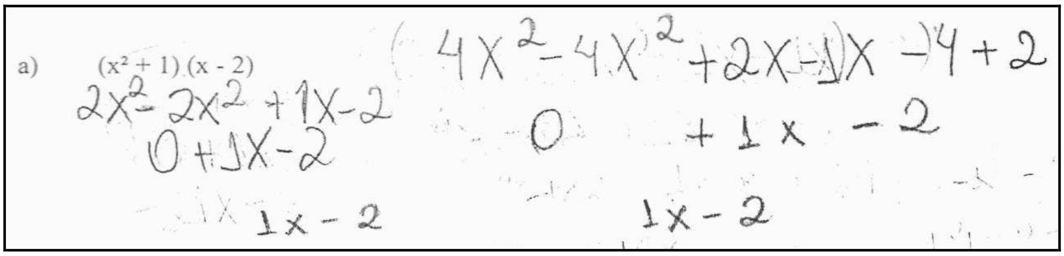


Figura 30: Protocolo da dupla 2 – Questão 3. a)

Podemos observar no protocolo de D2 que as integrantes da dupla resolveram erroneamente a multiplicação do termo x^2 por x, apresentando $2x^2$ como produto. No momento da entrevista, ao solicitar-lhes que explicassem como procederam para responder a esse item, elas perceberam o erro e disseram que o certo seria x^3.

Pode-se observar também no protocolo de D2 a ausência do sinal de igual relacionando as expressões, o que pode indicar a falta de compreensão desse símbolo como o que relaciona duas equivalências (ou mesmo o "resultado", como foi citado pela dupla) . Adiantamos ao leitor que a maioria das duplas não o utilizou nas respostas a essa questão, salvo a dupla 6 que adiantamos ter apresentado procedimentos de resolução de equações.

No item b), D2 efetuou a soma de termos não semelhantes escrevendo '$8a - 6 = 2a$', mesmo tendo mostrado em passos da manipulação o agrupamento dos que eram semelhantes ($5a$ e $3a$). No decorrer da entrevista questionamos:

P: "Mas o que é o *a* nessa expressão?"
D2-1: "É uma letra."
D2-2: "É um número. É uma letra que serve pra substituir um número que não está."
P: "A gente sabe quanto vale *a*?"
D2-1 e D2-2: "Não."
P: "Então, por que $8a$ menos 6, deu $2a$?
D2-2: "Devo seis e paguei oito, fiquei com dois. A gente tirou 6 do oito."

As componentes dizem nesse diálogo que a variável representa um valor desconhecido, porém, mostram que não a tratam assim ao realizar a operação $8a - 6$.

No item c) as alunas dessa equipe apresentaram procedimentos de agrupamentos de termos semelhantes corretamente, obtendo "$5y^2 - 3y – 8$" e escreveram a expressão "$9y^2 - 4y^2 - 9y + 6y – 8$", que na forma reduzida, é expressa por "$5y^2 - 3y – 8$", também.

A dupla 4 efetuou corretamente as operações com as variáveis, mas também identificou a equivalência das expressões por suas formas reduzidas. Os componentes da dupla explicaram na entrevista como procederam no item a):

D4-1: "Primeiro resolvemos essa aqui '$(x^2 + 1) (x – 2)$' pra saber mais ou menos qual o formato da equação que representaria a mesma, tendo o mesmo resultado."
P: "Como que eu sei que dá o mesmo resultado?"
D4-1: "Aqui [expressão dada] vai ter que fazer a propriedade distributiva: x^2 vezes x; x^2 vezes 2; e assim por diante. E aqui [expressão escrita pela dupla: "$(x^2).(x – 2) + (1).(x – 2)$"], a mesma coisa. Fazendo a mesma propriedade distributiva vai dar o mesmo resultado."

No item b), assim como a dupla 2, apresentaram ‘$8a - 6 = 2a$’ como resposta. E, além disso, escreveram outra expressão para chegar nesse resultado, como fizeram no item a). Ilustramos esse procedimento com a figura a seguir:

b) $-6 + 5a + 3a$ $(5a + 3a) - 6$

$-6 + 8a$

$2a$

Figura 31: Protocolo da dupla 4 – Questão 3. b)

Aproveitamos o momento da entrevista para sondar o que esses alunos pensam sobre as letras nessas representações:

P: “Quem é *a*?”

D4-1: “Um valor oculto.”

D4-2: “Qual, não sabemos.”

D4-1: “Pode ser qualquer número.”

P: “Se vocês soubessem o valor de *a*, como calculariam?”

D4-1: “Ia ter que multiplicar: 8 vezes o valor do *a*.”

P: “Daria um número e dele tinha que tirar...”

D4-2: “6.”

P: “Dá pra saber quanto vai dar $8a - 6$?”

D4-2: “Não. A gente pensou que o *a* era uma incógnita, que ia ficar aí paradinha, sem saber o valor.”

D4-1: “Se alterar o valor do *a*, vai alterar o valor do resultado.”

As falas dos componentes de D4 mostram a confusão entre a idéia de variável como número genérico, quando questionados sobre o que a letra *a* representa; e o que efetivamente fizeram que, também não revela o entendimento da variável como incógnita, como foi dito por D4-2, mas que simplesmente a desconsideraram e subtraíram 6 de 8, como mostrou também a dupla 2.

No item c), apresentaram também os mesmos procedimentos de D2: o agrupamento correto de termos semelhantes e a expressão “$[(y^2 + 4y^2) + 2y - 5y] - 8$”.

A dupla D5, para responder ao item a), aplicou a propriedade distributiva corretamente e obteve “x^3 - $2x^2$ + $1x$ -2”. Depois apresentou “x^2 (+1)x (-2)” como resposta. Questionados sobre o que apresentaram a dupla se justificou:

D5-1: “A gente tentou montar outra expressão de forma que não modificasse o resultado. Que nem o enunciado pediu né: represente de uma outra maneira.”

P: “E como vocês obtiveram “x^2 (+1)x (-2)”?”

D5-1: “Aí, na verdade, a gente só mexeu nos parênteses.”

P: “Como vocês calculariam?”

D5-2: “x^2 vezes x, dá x^3; depois x^2 vezes -2, dá -$2x^2$...”

D5-1: “A gente quis mais representar, se for fazer direitinho dá.”

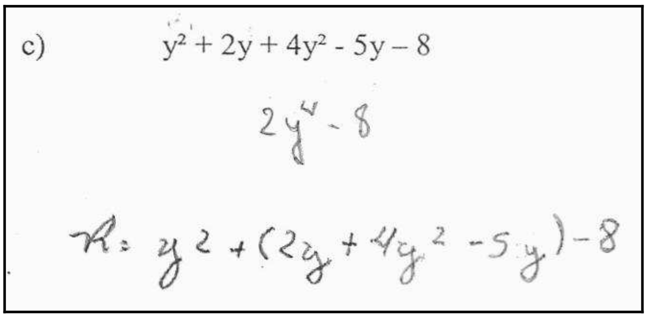
Resultados que mostram erros no uso de parênteses em expressões foram mostrados na pesquisa de Tinoco et al. (2007) com alunos de sexta, sétima e oitava séries. Para os referidos autores esses erros mostram a pouca experiência dos alunos com a escrita de expressões que, em sala de aula, no máximo, as resolvem. (TINOCO et al., 2007, p. 13)

No item b) a dupla efetuou corretamente a adição dos termos apresentando como resposta, “$8a$ – 6” e apresentou uma reorganização da expressão dada, expondo: “– 6 + ($5a$ + $3a$)”.

No item c) fizeram uma soma com os termos da expressão dada e obtiveram “$2y^4$ – 8” (figura 32). Para tentar entender como realizaram esses cálculos, prosseguimos com nossos questionamentos:

P: “O que fizeram pra obter $2y^4$ – 8?”

D5-2: “y^2 + $2y$ + $4y^2$, que dá 7 y^5; E 7 y^5 menos $5y$, dá $2y^4$.


c) $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8$

$2y^4 - 8$

R: $y2 + (2y + 4y^2 - 5y) - 8$

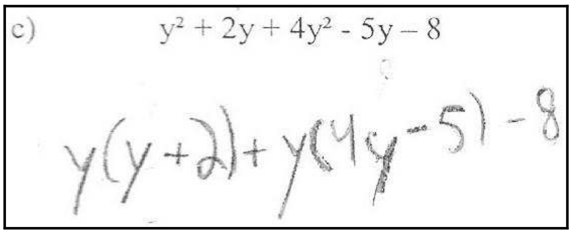
Figura 32: Protocolo da dupla 5 – Questão 3. c)

As explicações da dupla revelam que somaram os coeficientes e os expoentes dos termos que tinham y e y^2 como parte variável.

A equipe D7 efetuou corretamente a manipulação das variáveis, mostrando conhecimentos da aplicação da propriedade distributiva e de fatoração por fator comum em evidência, apresentando como resposta ao item a) a expressão "$x\ (x^2 + 2x) +1\ (x – 2)$".

Assim como a dupla D5, D7 efetuou corretamente a adição dos termos no item b). Foram as únicas equipes que realizaram corretamente os cálculos desse item. D7 apresentou como resposta a fatoração da expressão dada: "$2(4a - 3)$".

No item c) a dupla 7 também apresentou a fatoração dos termos, como se pode observar na figura a seguir:


c) $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y – 8$

$y(y+2)+y(4y-5)-8$

Figura 33: Protocolo da dupla 7 – Questão 3. c)

Após as justificativas corretas referentes ao uso da propriedade distributiva e de fatoração, apresentadas nas respostas aos itens da questão 3, a dupla revelou que não entendeu o que fez. Vejamos o trecho da entrevista em que diz isso:

D7-1: "Essa já foi mais complicadinha."

P: "Por quê?"

D7-1: "Nós fizemos o resultado. Depois fizemos uma embolação aqui que nem eu entendi."

As falas de D7-1 mostram que, mesmo tendo efetuado corretamente as operações com os termos, não entendeu o que fez.

Nos procedimentos apresentados pelas duplas 2, 4, 5 e 7 percebemos que a equivalência entre as expressões é vista pela forma final em que as apresentam e que, portanto, as fases de simplificação da expressão não são entendidas como formas diferentes, porém equivalentes, à expressão dada.

Os procedimentos realizados por D2, D4, D5 e D7 equipes mostram a mobilização das habilidades **G4**[1] e **G5**[2].

Analisando o rascunho da dupla 6 (figura 34), feito durante a resolução do item a), verificamos que efetuou operações com os termos no intuito de obter um resultado para a expressão. Após encontrar um resultado, criaram uma equação que tivesse esse mesmo valor como raiz.

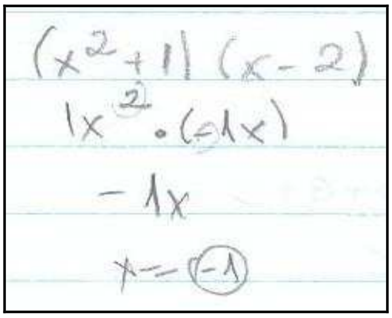


Figura 34: Rascunho feito pela dupla 6 – Questão 3. a)

A dupla apresentou no protocolo a equação "$5x - 4x = - 6 + 7$" e sua resolução.

Mesmo que não tenham apresentado uma resposta que atenda ao enunciado quisemos questioná-los sobre o feito. No diálogo com essa dupla os componentes justificaram os passos de resolução do rascunho e o porquê desse procedimento:

D6-2: "A gente somou x^2 com 1 e deu $1x^2$. E do outro lado: '$x - 2$' deu $-1x$. Depois multiplicamos o $1x^2$ com $-1x$, que deu $-1x$."

P: "Aí vocês chegaram em $x = -1$. Até aqui não tinha o sinal de igual, aí vocês colocaram, por quê?"

D6-2: "A gente separou os dois, colocou o x pra cá e o -1 do outro lado. Pra trocar os termos, colocar um de um lado e o outro, do outro."

P: "Essa aqui [resposta] é uma maneira diferente de representar essa aqui [item a)]?"

D6-1: "Foi o que a gente entendeu, que era pra montar outra pra achar o mesmo valor."

Nessas explicações a dupla revela o uso de critérios diversos nas operações com os termos a favor da obtenção de um resultado, para que, a partir dele, pudesse criar uma outra equação que tivesse a mesma solução.

[1] **G4** – "manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica."
[2] **G5** – "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos."

No itens b) e c) a dupla procedeu da mesma forma, porém, no último item, transformou a expressão dada numa equação de 2º grau.

Apresentamos a seguir, em figuras justapostas, o rascunho feito pela dupla e a escrita apresentada no protocolo:

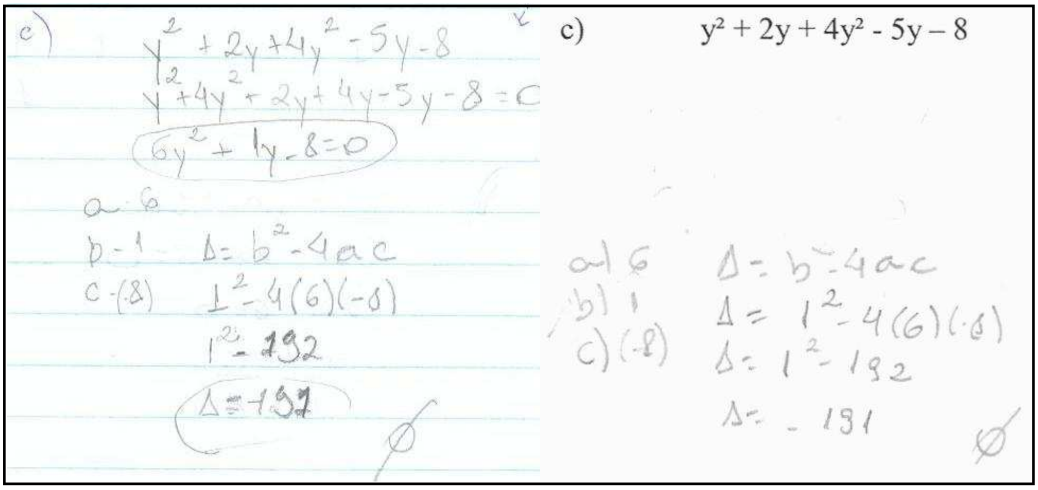


Figura 35: Rascunho e protocolo da dupla 6 – Questão 3. c)

Durante a entrevista os componentes de D6 apresentaram seus argumentos quanto a forma de resolução dessas questões:

D6-1: “A gente resolveu, aí essa é uma equação do 2º grau.”

D6-2: “Aí deu um conjunto vazio.”

P: “Por quê?”

D6-1: “Porque o delta deu negativo.”

P: “Todas as expressões vocês igualaram a zero...”

D6-1: “É porque a gente está com as equações do 2º grau na cabeça.”

A fala de D6-1 nos revela a forma em que as equações são abordadas em sala de aula. As estratégias apresentadas pela dupla nas respostas às três primeiras questões do questionário se baseiam na elaboração e resolução de equações. Tinoco et al. (2007) argumentam que essa maneira de proceder é um forte indício da mistura de significados atribuídos pelos alunos a questões algébricas, particularmente, às expressões algébricas. Diante de qualquer questão, recorrem às equações, preferencialmente aquelas que eles estão aprendendo no momento, o que sugere que a álgebra se reduz ao estudo das equações como ferramenta para resolver problemas. (p. 12)

A dupla 3 também apresentou erros nas operações realizadas. No item a), mostrou uma tentativa de fatoração do primeiro binômio, escrevendo “$x\ (x + 1)\ (x – 2)$”. A fala de uma das integrantes da dupla mostra como procederam:

D3-2: “Eu sei que x^2 é igual a x vezes x. Então a gente fez x vezes x e copiamos o resto.”

No item b) a dupla somou todos os termos, como as duplas D2 e D4, e obteve “$2a$”. No momento da entrevista uma das integrantes de D3 descreveu o que as letras significam quando as utiliza em operações:

P: “O que é o x?” [P se refere à variável do item a)]

D3-1: ‘O x acompanha um número.”

P: “Quando vocês estão fazendo essas continhas, o que pensam sobre o a, o x?”

D3-1: “A gente já afasta direto. A gente nem pára pra pensar porque o x.”

A fala de D3-1 evidencia a desconsideração do papel da variável ao realizar operações nas expressões em que aparecem.

Para responder ao item c) a dupla apresentou primeiramente o agrupamento de termos semelhantes e depois a soma sem considerar essa característica. O trecho da entrevista, reportado a seguir, mostra a mistura de critérios utilizados pelas componentes para a realização dos cálculos apresentados em seu protocolo (figura 36):

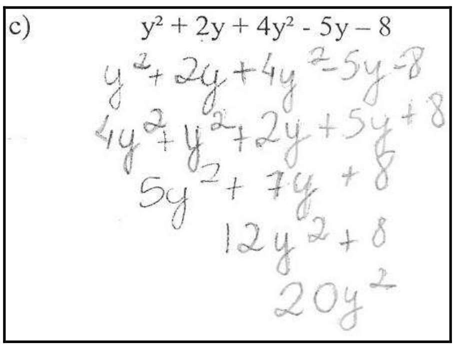


Figura 36: Protocolo da dupla 3 – Questão 3. c)

P: “Por que aqui deu $5y^2$?”

D3-1: “Porque a gente somou $4y^2$ com y^2, são semelhantes.”

P: “E por que depois deu $12y^2$?”

D3-2: “5 mais 7 dá 12.”

P: “E esses dois são semelhantes?”

D3-1: “A gente pode somar porque a letra é igual. Se a letra não fosse igual, aí não poderia somar”

P: “E aqui vocês somaram $12y^2$ com 8 e deu $20y^2$. São semelhantes?”

D3-2: “Não.”

D3-1: “Semelhantes não são, mas na hora a gente somou.”

A dupla mostrou saber identificar e agrupar os termos semelhantes da expressão e depois mostrou outros critérios para a soma de termos que não são semelhantes, ou seja, por um lado, mostra o conhecimento, por outro, o ignora.

As integrantes do trio, primeiramente, trocaram as variáveis por outras letras e reescreveram as expressões, utilizando-as.

No item a), depois de mudarem a letra, realizaram uma forma de soma dos termos entre parênteses e a multiplicação dos termos obtidos, conforme mostra seu protocolo:

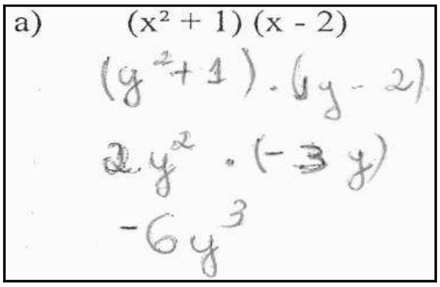


Figura 37: Protocolo do trio – Questão 3. a)

Na argumentação sobre o procedimento seguido para obter essa resposta uma das integrantes de T explicou:

T1: “A gente pegou a mesma expressão, porém trocou as variáveis.”

P: “E como calcularam para obter esse resultado?”

T1: “Ela [referindo-se a T2] somou y^2 com 1 e deu $2y^2$. E depois, fez $1y$ com 2, que deu $3y$.”

Nesse caso percebemos a falta de entendimento dos elementos da expressão: a função dos parênteses nela, a operação entre os binômios e também o desconhecimento da propriedade distributiva.

No item b), a equipe T apresentou “$8b$ - 6 = $2b$” como resposta. A fala de T1 descreve o feito: “$5b$ com $3b$, dá $8b$. Pra calcular $8b$ – 6, primeiro faz 8 – 6 que dá 2; e b menos nada, b.

No item c), escreveu a expressão dada com a letra *z* e também somou todos os termos, obtendo 4*z*.

Os resultados apresentados pelas equipes nessa questão mostram a falta de entendimento da variável como número genérico nas expressões e o uso de procedimentos algorítmicos incorretamente, utilizando os mais diversos critérios. Em alguns casos esses procedimentos foram utilizados para satisfazer as expectativas dos alunos quanto a resposta a ser encontrada: um monômio ou um resultado numérico, como expressaram o trio e as duplas 3 e 6. Tal fato mostra uma lacuna no conceito de variável, considerando que sua compreensão implica também na superação da simples realização de cálculos e operações com letras ou com símbolos, como apontaram Ursini e Trigueros (2001).

Notamos também o uso correto desses algoritmos por algumas duplas, porém, as próprias revelaram o não entendimento das respostas obtidas, como mostraram as equipes D5 e D7. Para Trigueros et al. (2000), mesmo os alunos que aprendem a utilizar técnicas específicas e algoritmos, não aprendem a refletir sobre sua utilidade e pertinência. Se trata de uma aprendizagem memorizada que em vez de favorecer a compreensão do conceito de variável, tende a entorpecê-lo. (TRIGUEROS, p. 47)

Outro fato que deve ser considerado é que nenhuma das equipes relacionou as expressões obtidas na simplificação com o sinal de igual, o que pode revelar que este só é empregado para ligar a um resultado; e não uma expressão a outra equivalente, como apontam Tinoco et al. (2007, p. 2)

As respostas apresentadas nessa questão mostram também a influência do contexto de apresentação da questão para a sua realização, ou ainda, que o único referencial de representações de expressões algébricas para esses alunos seja o próprio contexto algébrico.

Percebemos, nos procedimentos apresentados pelos alunos, a falta de referencial numérico ao manipular as variáveis, o que significa que o aspecto simbólico foi literalmente separado do substancial, e ainda, que esses algoritmos não são resultados de uma generalização no campo da aritmética, mas sim, resultantes de técnicas de manipulação ensinadas.

Na seqüência apresentamos os resultados obtidos da aplicação da questão 4.

4.4 Questão 4

Com a questão 4, transcrita a seguir, tínhamos por objetivo verificar como os alunos interpretariam letras no status de variáveis relacionadas.

Questão 4: Um quadrado, como o que está representado abaixo, é chamado Quadrado Mágico quando a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal resulta sempre no mesmo número.

Que valores *m* e *n* podem representar para que este seja um quadrado mágico?

		-2	
m	**16**	**-18**	**28**
		n	
		56	

Explique como você pensou.

Nessa questão as equipes utilizaram procedimentos de substituição de uma das letras para obter o da outra, considerando a soma obtida; ou atribuíram um valor como soma e, a partir dele, encontraram os de *m* e *n*.

Os alunos apresentaram respostas que mostram o entendimento das variáveis *m* e *n* como incógnitas (D3, D5 e D6), números genéricos (D4) ou variáveis relacionadas (D1, D2, D7 e T).

Uma das causas para a interpretação das variáveis como incógnita, descoberta durante as entrevistas, foi o próprio enunciado que não requeria todas as possibilidades de valores. Fato que ressalta a importância que esse instrumento de coleta de dados teve para nossa pesquisa e merece atenção para o caso de uma reaplicação dessa questão.

Aproveitamos, na análise dos dados obtidos com a questão 4, para estabelecer uma comparação com os resultados da questão 2. a), que requeria a interpretação de variáveis relacionadas dadas na expressão $x = 10 + y$.

As duplas D5 e D6 apresentaram respostas que mostram o entendimento das letras como sendo incógnitas. Vejamos o protocolo da dupla 5 que mostra a estratégia de resolução adotada pela dupla:

> Primeiro, tiramos os resultados das duas linhas dados pelo quadrado mágico. na linha vertical obtemos o resultado 36 e na linha horizontal, o resultado obtido foi 16. Feito isto, procuramos assim substituir as letras m e n para que o resultado da linha vertical desse o mesmo da linha horizontal. Assim, $m = 11$ e $n = 1$. Isso tudo resultou em <u>37</u>.

Figura 38: Protocolo da dupla 5 – Questão 4

Nota-se no protocolo de D5 que a soma dos números na horizontal, que seria 26, foi escrita como igual a 16, erro que foi notado pela dupla ao explicar a estratégia tomada, durante a entrevista.

O procedimento descrito por D5 em seu protocolo mostra a conclusão de que *m* e *n* podem assumir os valores 11 e 1, respectivamente. Os registros de áudio e de observação mostram que a dupla tentou preencher o quadrado mágico primeiramente e acabou desistindo dessa estratégia. Durante a entrevista questionamos os componentes sobre suas conclusões:

P: "Por que 37?"

D5-1: "Isso não quer dizer que ele não pode ser substituído por outro número. Dessa vez a gente pensou no 11 e no 1. No 37, entendeu?"

P: "Vocês chegaram a testar outros números?"

D5-1: "Testamos, dá certo."

P: "Mas vocês não escreveram os outros que deram certo, só esses dois."

D5-1: "A gente achou, mas..."

D5-2: "Colocamos só um número."

D5-1: "Foi só um exemplo isso aí. É que nem eu te falei, dependeria do jeito que você fosse preencher o quadrado mágico, entendeu?"

Podemos perceber pelo diálogo com D5 que apesar de terem testado outros valores que segundo eles poderiam substituir as variáveis, não generalizaram essas possibilidades, o que confirma a interpretação das letras como incógnitas nessa questão.

Na questão 2. a) essa dupla interpretou as letras como números genéricos, fato que nos leva a concluir que teve maior facilidade para a generalização na interpretação de variáveis relacionadas apresentadas em sentença algébrica.

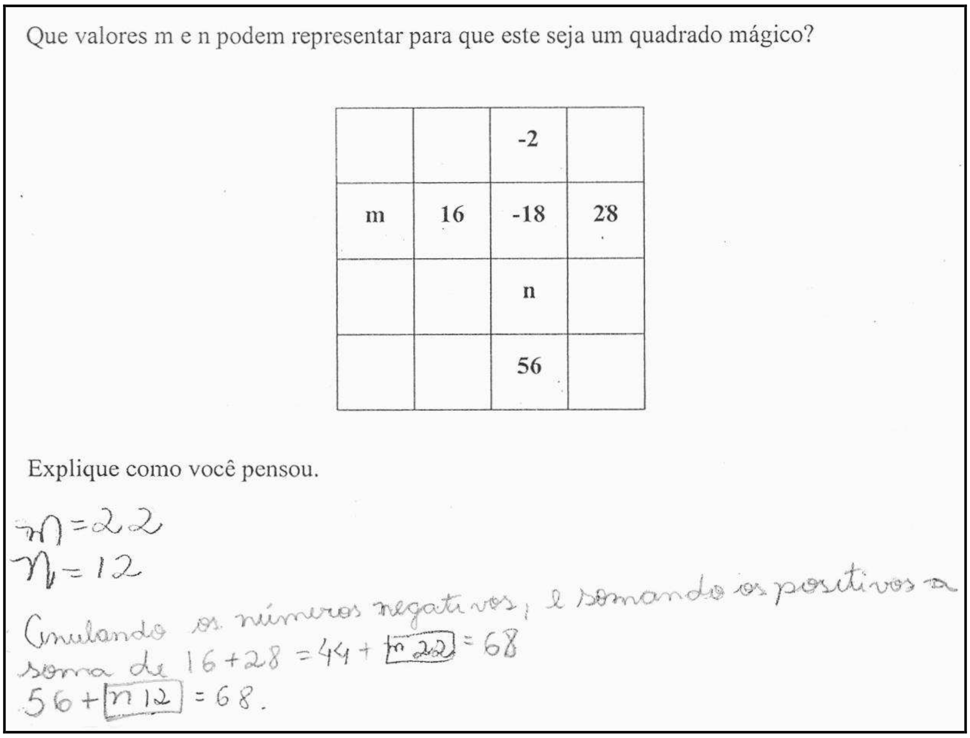
A dupla 6 atribuiu para *m* o número 30 e, de acordo com a soma obtida, encontrou o valor de *n:* 20. No momento da entrevista tentamos verificar se esses alunos haviam percebido que poderiam repetir o procedimento e se conseguiram generalizar as possibilidades de valores que as variáveis podem representar, visto que não apresentaram mais dados em seu protocolo:

P: "Qual foi a primeira idéia que vocês pensaram para responder essa questão?"
D6-2: "Primeiro em achar o valor de *m* e de *n*. Somamos aqui [horizontal] e vimos o valor que deu."
D6-1: "Aí a gente deu um valor pro *m* e encontrou um resultado. Depois somou a coluna e o tanto que faltou pra chegar no resultado da linha, a gente completou."
P: "Mas será que daria certo com outros valores?"
D6-1: "Se procurar bastante eu acho que dá."

Apesar de terem utilizado essa estratégia, o diálogo que se deu com D6 nos revela que não perceberam que esse procedimento poderia ser repetido sempre com outros números, ou seja, também não houve generalização.

Lembramos que essa dupla apresentou procedimentos de manipulação na questão 2.a), considerando o valor das variáveis pelo valor de seu coeficiente e não soube interpretar o resultado obtido. Na questão 4, porém, D6 pôde perceber por quais valores poderia substituir as variáveis, mesmo que não tenha se referido a todas as possibilidades. Nas duas respostas, porém, a idéia de incógnita parece prevalecer.

Durante a aplicação dessa questão percebemos a grande inquietação das integrantes de D3, pois não conseguiam encontrar os valores que as letras representam. Elas estavam somando os números como se fossem todos positivos, ou seja, desconsiderando o sinal de menos de -2 e -18. Depois de muitas tentativas de soma à procura dos possíveis valores de *m* e *n*, perceberam que não poderiam desconsiderar o sinal de negativo, e então resolveram anular esses números. Observemos o protocolo da dupla:


Que valores m e n podem representar para que este seja um quadrado mágico?

		-2	
m	16	-18	28
		n	
		56	

Explique como você pensou.

m = 22
n = 12
Anulando os números negativos, e somando os positivos a soma de 16 + 28 = 44 + $\boxed{n\ 22}$ = 68
56 + $\boxed{n\ 12}$ = 68.

Figura 39: Protocolo da dupla 3 – Questão 4

O trecho da entrevista, reportado a seguir, mostra a explicação das componentes de D3 sobre a conclusão apresentada em seu protocolo:

D3-2: "A gente não ia poder somar número negativo."

D3-1: "A gente anulou. Porque, no final, de qualquer forma, ia ter que tirar eles. Por exemplo: aqui [linha] ia ter que fazer 16 + 28 e tirar 18, porque ele é negativo. Então anulamos e somamos os positivos, e deu 44. Mais o valor de *m* que ia ser 22..."

D3-2: "E na coluna a gente anulou o 18 e o 2."

D3-1: "Ficou só o 56, pra dar 68."

A estratégia mostrada pela dupla de anular os números negativos transformou a relação '$m - n = 10$' em '$m - n = 12$', para a qual o par de valores com $m = 22$ e $n = 12$ não representa uma resposta correta. Podemos notar no protocolo da dupla o erro na soma de 44 com 22, que seria 66. Além disso, o protocolo revela o uso do sinal de igual sempre para indicar o resultado da operação realizada e a forma com que as componentes se referem aos valores das letras na escrita "*m*12" e "*n*22".

A dupla 3 mostra, mais uma vez, a dificuldade em estabelecer a soma com números negativos, assim como nas respostas às questões 1 e 2.

Na questão 2. a), especificamente, mostraram o reconhecimento da dependência de x em relação a y. Enquanto, na questão 4, interpretaram as variáveis como incógnitas.

As duplas 1 e 4 apresentaram respostas em seus protocolos que nos fizeram entender que as variáveis tinham sido interpretadas como incógnitas por elas. Porém, durante as entrevistas com as referidas equipes, percebemos que responderam assim por influência do enunciado, o que aponta, novamente, para uma reformulação para o caso de uma posterior aplicação, podendo constar, por exemplo, quantos valores as letras podem representar ao invés de 'que valores'. Ou ainda, quantos e quais valores.

A equipe D4, para atender o valor da soma que fixou, 50, preencheu o quadrado mágico e respondeu que $m = 24$ e $n = 14$. Com a entrevista pudemos perceber o porquê dessa resposta:

D4-1: "Aqui dava pra manipular os resultados que a gente queria em cada coluna. Então qualquer valor que substituir nesse, dando o mesmo resultado no outro, pode ser qualquer valor."
P: "E por que vocês colocaram *m* igual a 24 e *n* igual a 14?"
D4-1: "Por causa da pergunta."
P lê enunciado.
D4-1: "Inúmeros, muitos valores."
P: "E por que não mostraram outros?"
D4-2: "A gente ficou feliz com o cinqüentinha mesmo."
D4-1: "Porque a gente já sabia que poderia ser qualquer valor."

Nesse caso, a dupla interpretou as letras como representantes de quaisquer números, assim como mostrou na resposta à questão 2. a). A fala de D4-2 mostra que esses alunos se contentam com a obtenção de uma resposta que atenda ao enunciado e por isso não se ocupam em apresentar outras possibilidades, o que seria um passo para a generalização. Fato que foi mostrado também pelas duplas 5 e 6.

Por sua vez, a dupla 1, que também mostrou a tentativa de preenchimento do quadrado mágico durante a resolução da questão, apresentou como resposta que *m* pode ser substituído pelos números 26 e 20; e *n*, por 36 e 10, nessa ordem.

A resposta apresentada por D1 nos fez pensar que o enunciado não havia sido compreendido pela equipe, pois para $m = 26$ e $n = 36$ a soma dos valores da linha e da diagonal não é a mesma. Durante a entrevista os componentes explicaram que colocaram esses valores por serem estes os resultados da soma dos números da linha e da coluna, dados no quadrado mágico. Quando questionados sobre o que foi afirmado por quadrado mágico, eles perceberam que essa resposta não era válida, mas que os outros valores citados eram. Aproveitamos esse momento para também questioná-los sobre a decisão que tomaram de abandonar a estratégia de preenchimento do quadrado mágico. Vejamos:

P: “Por que desistiram de preencher?”

D1-1: “Não é que desistimos, é que aqui está escrito que valores *m* e *n* podem representar, aí nós fizemos desse jeito.”

P: “Agora vocês já sabem que se o valor de *n* é 36 e *m* é 26, não dá certo. Se *m* = 26, quanto tem que ser *n*?"

D1-1: “Deixa eu ver quanto dá. [o aluno faz as contas] O *n* tem que ser 16.”

P: “E será que podem ser outros valores?”

D1-1: “Acho que sim.”

D1-2: “Pode ser 48.”

P: “E o *n*?”

D1-1: “Então o *n* tem que ser 38.”

P: “E se o *m* for 10?”

D1-1: “O *n* vai ter que valer 0.”

P: “Por que você está falando o resultado sem fazer as contas? Como está pensando?”

D1-1: “Se o *m* valer 14, o *n* vai ter que valer 10 a menos que ele. Só com número negativo que não está dando certo. Deixa eu tentar: se *n* = -20, como *m* tem que ser 10 a mais, vai ser -30. (...) Não dá certo.”

Interessante notar que a dupla 1 substituiu as variáveis por valores sem respeitar a igualdade na questão 2. a) e não soube aplicar o conceito de igualdade, enquanto no contexto numérico, na questão 4, apresentaram essa idéia e perceberam o erro. E além disso, deduziram a regra que associa uma variável à outra na correspondência entre seus valores, o que indica a habilidade **F1** – “reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)”. Tal fato nos leva a concluir que o problema não está na falta do conceito de igualdade, mas sim no reconhecimento e na aplicação desse conceito em sentenças algébricas.

A dupla 1 também revela nesse diálogo a dificuldade de ordenação de inteiros negativos, o que não permitiu que a generalização apresentada por ela abrangesse também esse conjunto.

As equipes D2, D7 e T interpretaram as variáveis como representantes de vários valores, explicitando a dependência ou a regra que as associa, mostrando a mobilização da habilidade **F1** – “reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)”.

A dupla 2 mostrou a percepção da relação de dependência entre as variáveis:

D2: “Um valor depende do outro, depende de *n* o valor de *m*, e vice-versa.”

A dupla interpretou as variáveis como números genéricos na questão 2 a), porém não mostrou entender a relação de dependência, como mostrou na questão 4.

As integrantes do trio fixaram o número 46 como valor da soma e encontraram os de *m* e *n*, de modo a obter esse resultado. As alunas de T exemplificaram algumas possibilidades de pares que dariam certo, escrevendo “*m*40 e *n*30, *m*60 e *n*50, etc.” e apresentaram a conclusão de que qualquer número aumentado de 10, servirá para descobrir o valor de *m.* Em outras palavras, que *m* vale dez a mais do que *n*, o que mostra a percepção da relação de dependência entre essas variáveis.

É interessante notar também a forma de escrita apresentada pelo trio para mostrar os valores que as letras podem assumir. Assim como a dupla 3 mostrou, as integrantes de T podem expressar nessa escrita porque se referem à variável pelo valor de seu coeficiente.

A dupla 7, assim como mostrou na resposta à questão 2. a), reconheceu o relacionamento funcional entre *m* e *n* e descreveu a regra que as relaciona, escrevendo: “m = o valor de $n + 10$” (figura 40). Interessante observar e comparar a forma em que a regra foi apresentada por esta dupla nessa questão, com a que apresentou em 2. a): “*x* é dez a mais que *y*”, o que mostra uma transição na escrita algébrica.

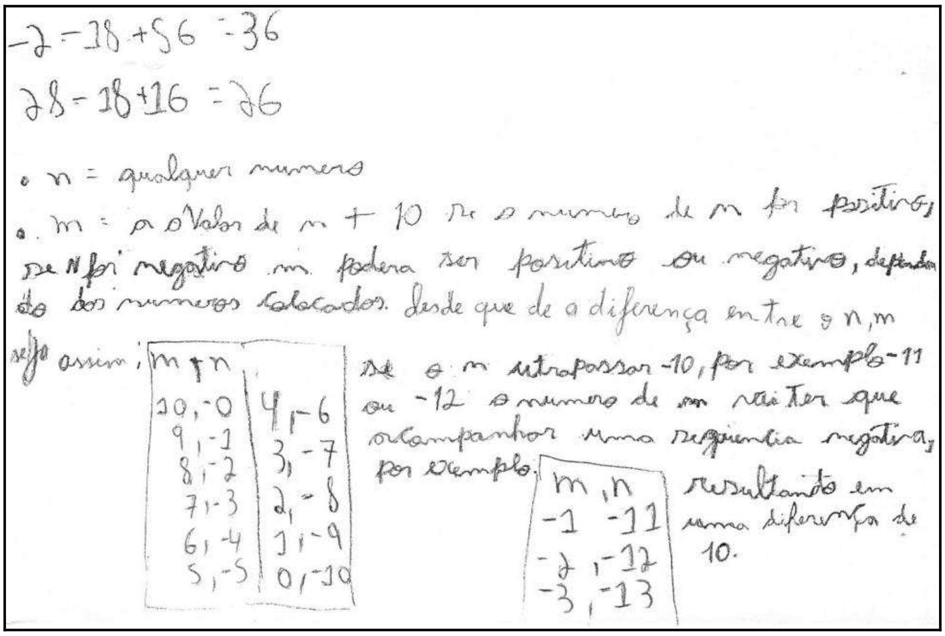

-2 - 18 + 56 = 36
28 - 18 + 16 = 26
• n = qualquer numero
• m = o valor de n + 10 se o numero de n for positivo, se N for negativo m podera ser positivo ou negativo, depende do dos numeros colocados. desde que de a diferença entre o n, m seja assim, m e n
10, -0
9, -1
8, -2
7, -3
6, -4
5, -5
4, -6
3, -7
2, -8
1, -9
0, -10
se o n ultrapassar -10, por exemplo -11 ou -12 o numero de m vai ter que acompanhar uma sequencia negativa, por exemplo.
m, n
-1 -11
-2, -12
-3, -13
resultando em uma diferença de 10.

Figura 40: Protocolo da dupla 7 – Questão 4

Nota-se no protocolo da dupla 7 a percepção da variação conjunta entre as variáveis *m* e *n* ao observar que para os números de *n* menores do que -10, tem-se que os valores de *m* são negativos. Essa análise mostrada pela dupla indica a mobilização das habilidades **F4** – “reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas)” e **F5** – “determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra”.

Da análise dos resultados obtidos com a aplicação da questão 4, destacamos a satisfação de alguns alunos com a obtenção de um par de valores que atende ao enunciado e não pensar em outras possibilidades ou, quando as consideram, não percebem a necessidade de expressá-las, de generalizar.

Uma causa que pode ser apontada para esse fato é o próprio contexto de aplicação da questão, que supõe um número em lugar de uma letra.

Em comparação com os resultados apresentados à questão 2. a) é interessante notar que praticamente os mesmos problemas foram evidenciados, tais como: a dificuldade em conceber a soma com números negativos, apresentada pela dupla 3; a ordenação de números inteiros, pela dupla 1; a idéia de variável como incógnita, pela dupla 6;

Quanto ao contexto de apresentação da questão e sua influência no entendimento das variáveis, percebemos algumas diferenças em relação ao que foi apresentado pelas duplas nas respostas à questão 2. a). Dentre elas, destacamos o que foi apresentado pelas duplas D1, que ao aplicar o conceito de igualdade, o qual tinha demonstrado não ter conhecimento nas questões anteriores, pôde entender a relação de funcionalidade entre as variáveis; e D6, que pôde identificar possíveis valores representados pelas variáveis por procedimentos de substituição, estratégia que não foi utilizada pela dupla em nenhuma das questões anteriores.

Em contrapartida, as duplas D3 e D5, que haviam percebido o relacionamento funcional entre as variáveis na questão 2. a), revelaram em suas conclusões na questão 4 que a idéia de incógnita prevalece, pois não se sentem impulsionados a generalizar.

Percebemos também que nenhuma das equipes simbolizou os dados da questão em uma expressão algébrica, porém, que as equipes D1, D2 e T descreveram o relacionamento entre as variáveis em linguagem natural. E a dupla 7 apresentou uma mistura da escrita da regra utilizando a linguagem natural, sinais e a simbolização das variáveis.

4.5 Questão 5

Transcrevemos, abaixo, a questão 5.

Questão 5: Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:

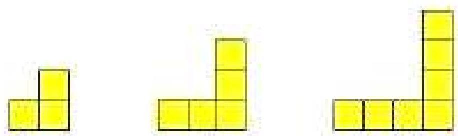


figura 1 figura 2 figura 3

a) Desenhe a próxima figura. Quantos quadradinhos ela tem?

b) Desenhe a 5ª figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos?

e) E a 17ª?

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura dessa seqüência? Escreva uma regra.

Com essa questão pretendíamos verificar como os alunos expressariam uma regra geral para a contagem de quadradinhos correspondentes a posição de cada figura na seqüência.

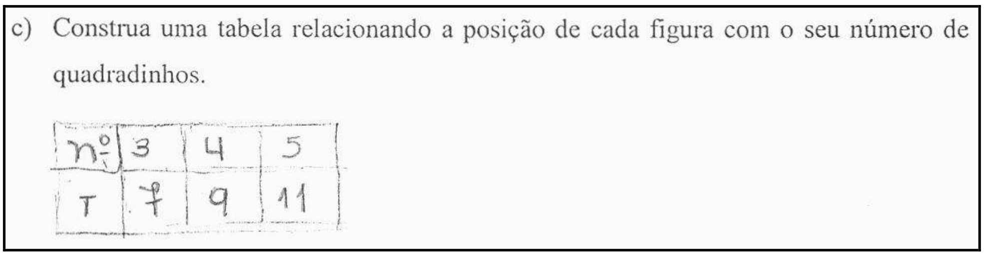
Os registros de áudio e de observação apontaram as falas dos alunos dizendo que essa questão era a mais fácil. Durante a entrevista as equipes confirmaram isso e acrescentaram que haviam feito uma questão parecida com essa em uma das atividades das aulas de matemática do início do ano.

Os alunos responderam aos itens a) e b) sem apresentar dificuldades, revelando o reconhecimento do padrão apresentado na seqüência de figuras, ou, em termos do Modelo 3UV, a habilidade **G1** – “reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas”.

Todas as equipes, com exceção de D3, responderam corretamente a esses dois itens. A dupla 3 havia entendido o padrão como tendo o mesmo número de quadradinhos na horizontal e na vertical e, ao somar esses quadradinhos não perceberam que dois deles se sobrepunham. A dupla apresentou 10 como resposta ao item a); e 12 para o item b). Esse modo de percepção do padrão foi apresentado pela dupla também nas respostas aos itens d) e e) da questão, como mostraremos adiante.

Todas as equipes construíram corretamente a tabela pedida no item c), expressando a correspondência entre as grandezas *número da posição da figura na seqüência* e *número de quadradinhos*.

As equipes D1, D2, D3, D4, D6 e D7 construíram tabelas identificando as grandezas por *posição* ou *figura*, e *número* ou *total.* A dupla 1 (figura 41) foi a única que simbolizou essas grandezas por “*nº*”, para designar o número da figura, e “*t*”, para o total de quadradinhos correspondente a cada uma delas.

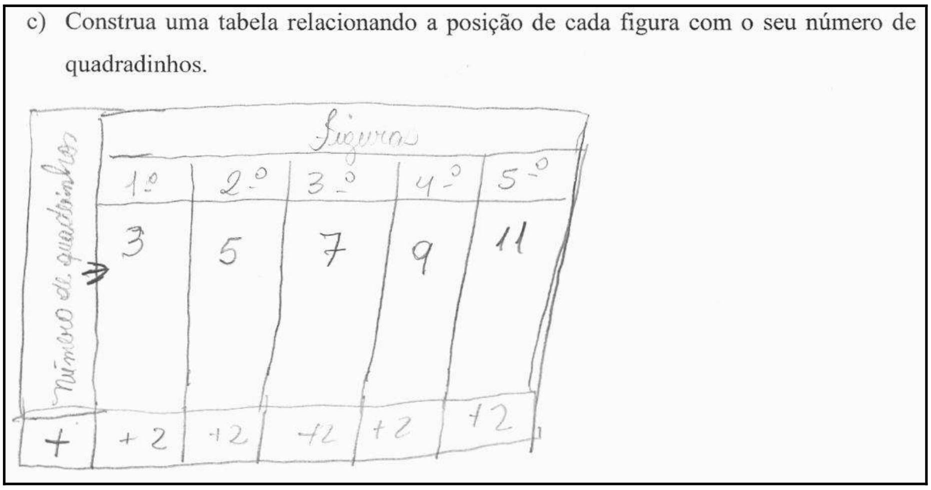

c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

nº	3	4	5
T	7	9	11

Figura 41: Protocolo da dupla 1 - Questão 5. c)

Podemos observar que a dupla 1 representou na tabela apenas os valores correspondentes às três primeiras figuras da seqüência, enquanto outras equipes completaram com os resultados dos itens b) e c) e outras ainda com os dos itens d) e e).

O trio e a dupla 5 apresentaram formas tabular diferentes das outras duplas. A equipe D5 expressou na tabela, além das duas grandezas relacionadas, a variação do número de quadradinhos de uma figura a sua subseqüente, como podemos observar na figura 42:

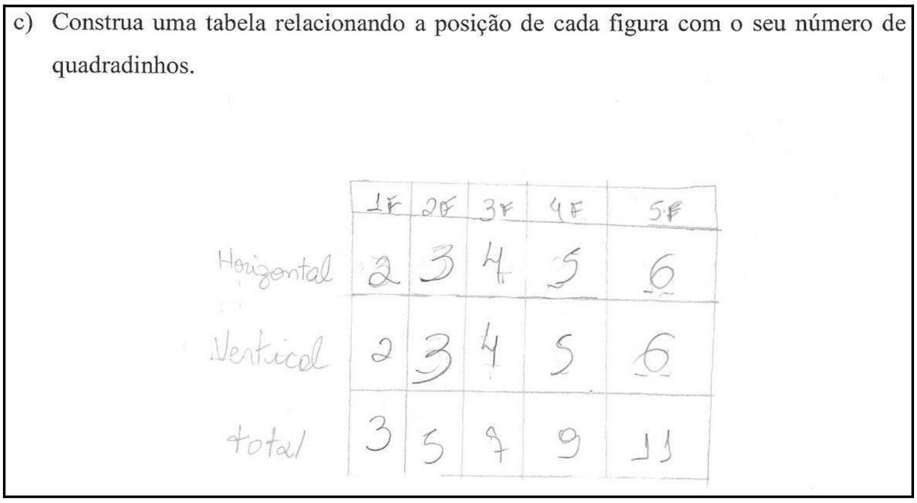


c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

	figuras				
	1º	2º	3º	4º	5º
número de quadradinhos →	3	5	7	9	11
+	+ 2	+2	+2	+2	+2

Figura 42: Protocolo da dupla 5 - Questão 5. c)

O trio relacionou na tabela o número de quadradinhos da vertical e da horizontal de cada figura da seqüência e o seu total de quadradinhos e identificou a grandeza figura por F. Vejamos o protocolo da equipe:



c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

	1F	2F	3F	4F	5F
Horizontal	2	3	4	5	6
Vertical	2	3	4	5	6
total	3	5	7	9	11

Figura 43: Protocolo do trio - Questão 5. c)

O trio e a dupla 5 apresentaram também nos itens d) e e) o desenho das figuras de posição 11 e 17. Durante a entrevista perguntamos porque o fizeram, já que o desenho não foi pedido, na tentativa de sondar se haviam deduzido uma regra ou se o desenho foi a único referencial para a contagem:

P: “E aqui estava pedindo pra desenhar?”
D5-1: “Não, fizemos o rascunho.”
P: “Se vocês não desenhassem, como iriam fazer?”
D5-2: “De cabeça. Ia somando até chegar na figura 11. Ia ser bem mais difícil, aí a gente desenhou.”

Pela explicação da dupla percebemos que considerou o desenho uma forma mais rápida para obter a resposta, o que nos leva a crer que não deduziu o padrão, ou seja, não mobilizou a habilidade **G3** – “deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas”.

Fizemos perguntas similares ao trio, que também mostrou não ter conseguido deduzir um padrão.

P: “O item d) pede pra desenhar?”
T1: “Não.”
P: “E se eu pedisse o total de quadradinhos da centésima figura, vocês iriam desenhar também?”
T1: “Eu desenharia.”
P: “Não tem outra forma de saber a quantidade de quadradinhos?”
T2: “Eu pensei assim: vai ter sempre um a mais que a posição.”

Pela fala das componentes percebemos que até aqui não tinham deduzido uma regra válida para essa seqüência.

Pela resposta apresentada por T também no item f) “a regra é acrescentar um quadradinho na horizontal ou na vertical” percebemos que associou o total de quadradinhos da figura com a respectiva quantidade na vertical ou na horizontal, o que mostra a dependência do desenho para a contagem.

P: “Com essa regra que vocês escreveram, se eu perguntar quantos quadradinhos ela tem, como vocês fariam?”
T2: “Se na 11ª tem 12 na vertical, então na 100ª vai ter 101. No total vai dar 201.”
P: “E da figura de posição 500?”

T2: “Dá 1001.”
P: “Qual é a regra?”
T1 e T2: “Acrescentar um aqui [horizontal] e um aqui [vertical].”

Nesse diálogo que se deu com o trio podemos perceber a dedução da regra (**G3**[1]) por T2, pois considerou que a quantidade de quadradinhos da vertical e da horizontal corresponde ao número da figura somado a um. Para descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura da seqüência, por essa estratégia, as integrantes somam o número de quadradinhos da vertical e da horizontal e subtraem um, da sobreposição das duas fileiras.

As integrantes do trio mostram no dialogo que apresentamos a dificuldade em descrever essa regra que encontraram.

A dupla 5 não conseguiu descrever uma regra válida para a seqüência pedida no item f) da questão. A resposta dada foi “a regra é ir aumentando um quadradinho na vertical e um na horizontal”. Considerando a resposta apresentada pela equipe, questionamos:

P: “Eu fiquei pensando assim: para a figura de posição 100, vou ter que desenhar até a 99ª pra saber quantos quadradinhos tem?”
D5-1: “Eu acho que teria algum cálculo.”
D5-2: “É mais fácil desenhar.”
D5-1: “É, é trabalhoso, mas...”

Diferentemente do que o trio revelou, a dupla 5 focalizou a atenção na variação da grandeza número de quadradinhos e não conseguiu estabelecer uma relação com a posição que a figura ocupa na seqüência, o que não a permitiu obter uma regra válida para essa seqüência.

As duplas D1 e D3 também fizeram o desenho das figuras de posição 11 e 17, ao responder aos itens d) e e). Os pingos a lápis nos quadradinhos do protocolo de D3 mostram uma estratégia de contagem utilizada. Vejamos seu protocolo:

---

[1] **G3** – “deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas”.

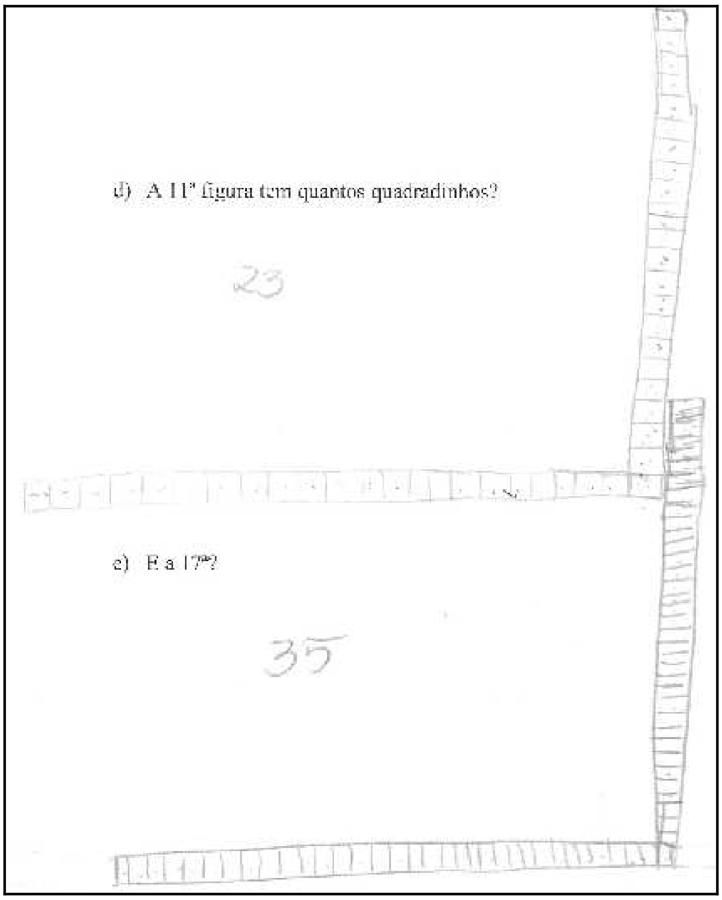


Figura 44: Protocolo da dupla 3 – Questão 5. d) e e)

P: “E aqui, 11ª figura, estava pedindo pra desenhar?”

D3-1: “Ah, mas a gente quis desenhar pra gente ter uma noção. A gente podia ter multiplicado, eu acho.”

P: “Multiplicado o quê?”

D3-1: “Ah, indo pela tabela...aqui já estava escrito, mas a gente quis desenhar, porque a gente foi contando.”

P: “No item e) vocês fizeram a mesma coisa e na f) está pedindo a regra. Qual é a regra?”

D3-1 e D3-2: “Aumentar dois quadrados a cada vez.”

P: “E eu pergunto assim: quantos quadradinhos tem a 100ª figura?”

D3-1: “Não sei.”

P: “Com essa regra dá pra escrever a quantidade de quadradinhos de qualquer figura?”

D3-1: “Não.”

D3-2: “Só desenhando mesmo.”

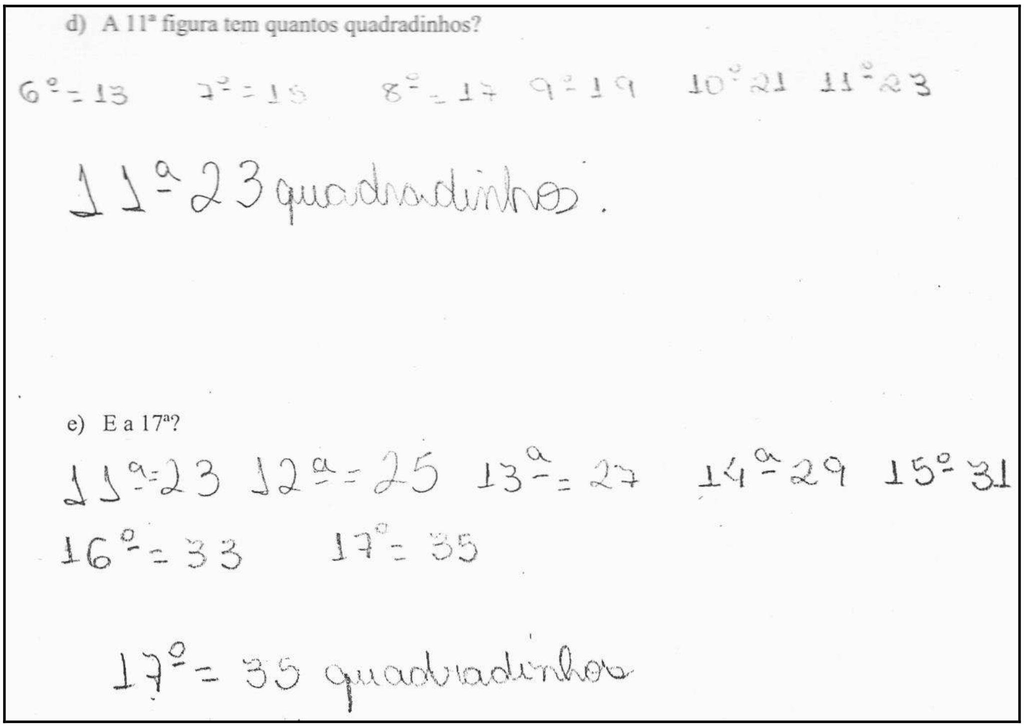
P: “E observando a tabela vocês notam alguma regularidade, alguma forma de descobrir o número de quadradinhos?”

D3-1: “Aqui: 35. Se a gente somar mais 2: 37, então a gente já sabe.”

P: “Então não existe uma outra maneira de descobrir a quantidade de quadradinhos sem ser comparando com a figura anterior? Se eu quiser saber a da 100ª, tenho que saber da 99ª. É isso?”
D3-1: “Isso.”

Os feitos de D3 também deixam transparecer que não deduziram uma regra válida para a seqüência, como mostrou também a dupla 5.

A dupla 2 continuou a seqüência da tabela para responder aos itens d) e e), como mostra seu protocolo:


d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos?

6º = 13 7º = 15 8º = 17 9º = 19 10º 21 11º 23

11ª 23 quadradinhos.

e) E a 17ª?

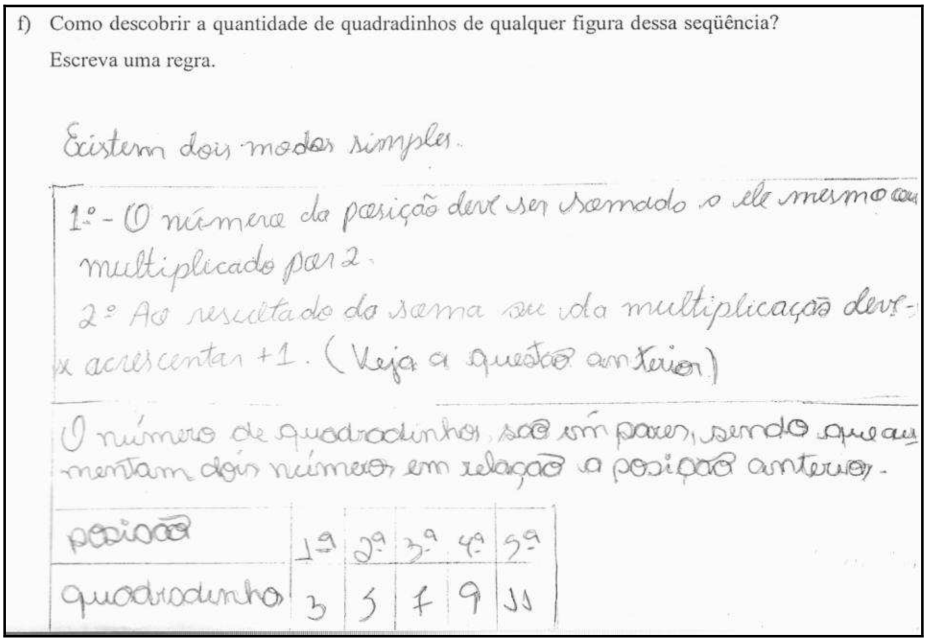
11ª = 23 12ª = 25 13ª = 27 14ª 29 15º 31
16º = 33 17º = 35

17º = 35 quadradinhos

Figura 45: Protocolo da dupla 2 – Questão 5. d) e e)

As duplas 4 e 7 mostraram o uso da regra nesses itens. D7 escreveu “(11 x 2) + 1” e “(17 x 2) + 1” e seus respectivos resultados; e D4 “(11 + 11) +1” e “(17 + 17) + 1”.

As equipes D1, D2, D4 e D7 foram as únicas que apresentaram uma regra válida para obter o total de quadradinhos de cada figura da seqüência. As três primeiras equipes a apresentaram em linguagem natural, mostrando a dedução da regra que rege o padrão (**G3** – “deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas”). Ilustramos esse procedimento com o protocolo de D4:



f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura dessa seqüência?
Escreva uma regra.

Existem dois modos simples.

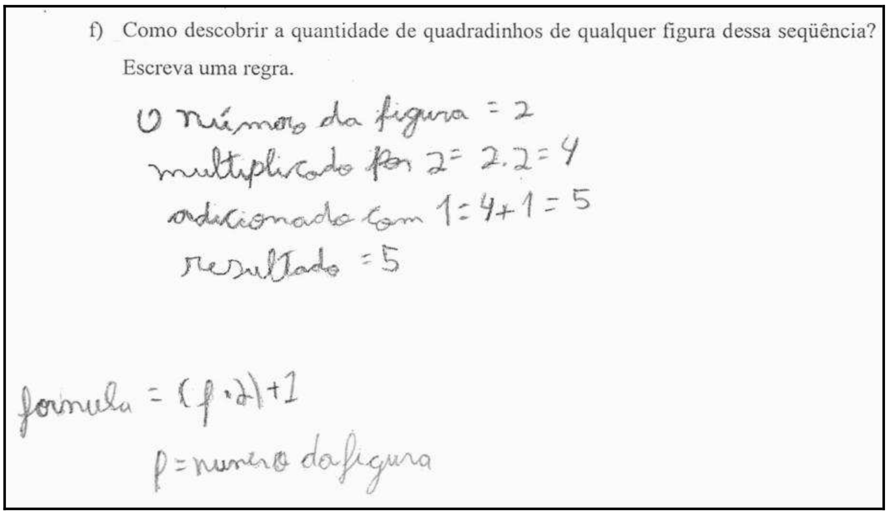
1º - O número da posição deve ser somado a ele mesmo ou multiplicado por 2.
2º Ao resultado da soma ou da multiplicação deve-se acrescentar +1. (Veja a questão anterior)

O número de quadradinhos são ímpares, sendo que aumentam dois números em relação a posição anterior.

posição	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
quadradinho	3	5	7	9	11

Figura 46: Protocolo da dupla 4 – Questão 5. f)

A equipe D7 foi a única que simbolizou essa regra (**G5**[1]), utilizando o que chamou de fórmula. Vejamos seu protocolo:



f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura dessa seqüência?
Escreva uma regra.

O número da figura = 2
multiplicado por 2 = 2.2 = 4
adicionado com 1 = 4+1 = 5
resultado = 5

formula = (f.2)+1
f = numero da figura

Figura 47: Protocolo da dupla 7 – Questão 5. f)

A dupla 7 foi a única que mobilizou todas as habilidades necessárias para a generalização do padrão. As equipes D3, D5 e D6 expressaram o reconhecimento do padrão apresentado enquanto as duplas D1, D2, D4 e T mostraram também a dedução da regra que rege o padrão.

[1] **G5:** "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos".

Os resultados apresentados mostram que os alunos são capazes de continuar a seqüência dada, o que implica que podem "ver" o padrão que a rege, ou seja, a habilidade **G1 -** "reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas". O fato de poder "ver" um padrão é considerado um dos passos necessários no processo de generalização, como apontaram Mason et al. (1985, apud TRIGUEROS et al., 2000, p. 40). Porém, alguns têm problemas para a dedução da regra que os rege – **G3**[1] e, em conseqüência disso, têm dificuldades para simbolizá-la – **G5**[2].

Mais uma vez fica evidente que a simbolização é problemática para esses alunos e não podemos deixar de considerar o processo histórico que a desencadeou.

Tinoco et al. (2006), com base em Baumgart (1992), Guelli (2002) e Struik (1989), citam o desenvolvimento histórico da linguagem e do pensamento algébricos, destacando os estágios de evolução na fase antiga da álgebra, ou seja, o retórico, o sincopado e o simbólico.

No estágio retórico, os resultados e raciocínios matemáticos eram expressos totalmente em palavras. Não se usavam símbolos ou abreviações. No estágio sincopado, durante séculos, as palavras foram sendo substituídas por abreviaturas e sinais, criando condições para o surgimento de um novo estágio: o simbólico. Este se caracteriza pelo fato de as idéias e procedimentos serem expressas por meio de símbolos. (TINOCO et al., 2007, p. 3)

Tomando essas considerações, devemos atentar para as respostas em que a regra é descrita em linguagem natural, pois é uma forma de expressão do pensamento algébrico.

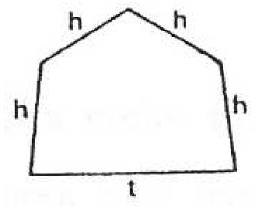
4.6 Questão 6

Com a questão 6, transcrita a seguir, tínhamos por objetivo verificar se os alunos reconheceriam a variação conjunta das variáveis h e t, e o conjunto numérico que seria tomado, já que $t > 4h$, a partir da análise da figura e da expressão do seu perímetro:

---

[1] **G3:** "deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas".
[2] **G5:** "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos".

Questão 6: Considere a seguinte figura:



a) Escreva a expressão do perímetro dessa figura.

b) Se $h = 3$, qual é o valor do perímetro?

c) Quais os valores de t e h para que o perímetro dessa figura seja igual a 4?

No item a) os alunos não apresentaram dificuldades para escrever a expressão do perímetro. Obtivemos resultados em que o perímetro da figura foi representado por expressões abertas (**G5**[1]), como os apresentados pelas equipes D1, D2, D3, D4, D5 e T e por representações que expressam um relacionamento funcional entre o valor do perímetro e as medidas dos lados da figura (**F6**[2]), como o que responderam D6 e D7.

As duplas 1, 4, 6 e o trio disseram no momento da aplicação que não lembravam o que era perímetro. Considerando que essa informação era fundamental para responder a essa questão, decidimos lhes dizer a seguinte afirmação: "perímetro é a soma das medidas dos lados de um polígono".

No momento da resolução dessa questão percebemos que a dupla 1 escreveu, como reposta ao item a), a expressão "$h + h + h + h$" e então resolvemos lhes perguntar se haviam entendido o que afirmamos como perímetro. Um deles respondeu: "é a soma das medidas dos lados". Perguntamos quantos lados tem a figura e, apontando para os de medida h, um dos componentes respondeu que tem 4, indicando que desconsideraram o lado de medida t.

A equipe D3 apresentou a expressão "$2h + 2h + t =$ " no item a).

No momento da resolução observamos que tinha a igualado a zero e depois apagou. No decorrer da entrevista tentamos sondar o porquê da utilização do sinal de igual, como mostra o seguinte diálogo:

P: "Então vocês escreveram que o perímetro é $2h + 2h + t =$...Que é igual a quanto?"

[1] **G5:** "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos".
[2] **F6:** "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema"

D3-1: "Não tem como determinar o valor, porque a gente não sabe. Se tivesse o perímetro dela dava pra determinar."

Percebemos pela fala de D3-1 o uso do sinal de igual como indicador de um resultado, um valor numérico que representasse o perímetro, o qual não era possível identificar com os dados disponíveis.

As equipes D2, D5 e T apresentaram, respectivamente, as expressões "$4x + 1t$", "$(h + h + h + h) + t$" e "$4h + t$".

Questionamos as componentes de D2 para que explicassem como obtiveram essa expressão. Elas revelaram que $4x$ representava a soma dos h, que simplesmente representaram por uma letra diferente.

As duplas 6 e 7 relacionaram a expressão do perímetro a uma outra variável, representando um relacionamento funcional entre o perímetro e as medidas dos lados da figura. A dupla 6 apresentou "$4h + t = x$" como resposta e justificou:

D6-1: "A gente fez uma expressão algébrica, só que não tem o resultado. E quando não tem o resultado a gente representa com x".

A dupla 7 deu o nome de fórmula à escrita apresentada: "$p = 4h + t$", assim como fez na questão 5.

Os registros de observação sobre a dupla na resolução do item b) mostram a insatisfação com a expressão obtida:

D7-1: "Não tem como calcular o valor do perímetro, t pode ser qualquer valor."

Pela fala de D7-1 percebemos a não aceitação da expressão como representante de um valor para o perímetro e a influência do enunciado nesse caso com a escrita "qual o valor do perímetro", o que o fez voltar a analisar a figura e tentar calcular o valor de t. Para isso transferiu a medida h para o segmento t e considerou o perímetro como sendo igual a 18, argumentando que a medida t corresponde a $2h$:

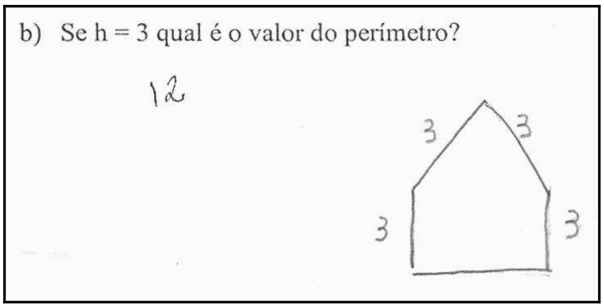
D7-1: "Pelo que eu vi aqui, essa parte [t] é o dobro daqui [h], então vai dar 6."

As duplas 2 e 4 também consideraram a medida t como sendo igual a $2h$ e escreveram 18 como resposta ao item b). Durante a entrevista apresentaram os mesmos argumentos expostos pela dupla 7, como mostram as falas de componentes dessas duas equipes, a seguir:

D4-1: "Porque a gente pegou metade. Aqui está meio inclinado [parte superior do desenho], então a gente tentou colocar reto e abaixar essa parte de cima. Aqui dá 6, então a gente colocou que essa "área" de baixo é equivalente a 6. Aqui teve a questão da soma que dá 12. Mais 6, dá 18."

D2-2: "É porque nós não sabíamos o valor de *t*, aí a gente pensou que *t* é a mesma coisa que 2*h*."

As equipes D3 e D1 escreveram que o perímetro é 12. A justificativa apresentada pela dupla 1 mostrou a idéia que apresentaram no item a), em que desconsideraram a medida *t*. E na entrevista D1-1 confirmou: "Nós somamos os quatro *h*." Vejamos o protocolo dessa equipe:


b) Se h = 3 qual é o valor do perímetro?

12

Figura 48: Protocolo da dupla 1 – Questão 6. b)

A dupla 3 também desconsiderou a medida *h* para o cálculo do perímetro, porém apresentou o argumento de que não era possível calcular porque esta medida *t* não foi dada e não era possível obtê-la. O trecho a seguir mostra as justificativas apresentadas pelas componentes de D3 e a dúvida sobre a conclusão apresentada:

D3-1: "Somamos os *h*, só. Porque aí não tem o valor de *t*, então a gente colocou 12."

P: "Então 12 é o valor do perímetro?"

D3-1: "Não. Está perguntando qual é o valor do perímetro. A gente não tem como responder, porque não tem o valor de *t*."

As equipes D5, D6 e T simbolizaram o valor do perímetro pela expressão obtida da substituição de *h* por 3, na expressão que construíram na resposta ao item a). D5 e T apresentaram "12 + *t*" como resposta nesse item, e D6: "12 + *t* = *x*". Ilustramos esse procedimento com o protocolo da dupla 5:

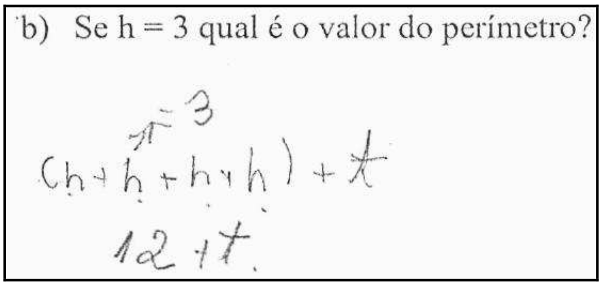


Figura 49: Protocolo da dupla 5 – Questão 6. b)

As respostas das equipes D5, D6 e T continuaram em termos de simbolização no item b), e não mostram nenhuma análise quanto as possíveis medidas que as variáveis representam.

No tem c), como se a primeira idéia fosse dividir o valor do perímetro por 2 e designar o resultado à 4*h* e à *t,* as duplas 1, 3, 4 e 7 atribuíram o valor 0,5 para *h* e 2 para *t*. Tal fato mostra, mais uma vez, que não foi feita uma análise dos possíveis valores que as variáveis podem representar na figura, pois, com essas medidas, não teríamos um polígono.

Mesmo que não tenham atribuído valores possíveis para as variáveis, decidimos questionar no intuito de entender seus raciocínios para a apresentação dessa resposta.

No decorrer da entrevista com a dupla 1, um de seus integrantes diz que as letras poderiam representar outros valores, porém, revelou a dificuldade em atribuir números diferentes de 1 e de 0,5 para as variáveis, o que constituiu um obstáculo para a identificação de outros:

D1-1: “Colocamos 0,5 nos *h* e 2 embaixo.”

P: “Daria para utilizar outros valores?”

D1-1: “Se *t* for 1... Não, mas não vai dar certo.”

P: “Por quê?”

D1-1: “Porque ia pôr 1 aqui [*t*]; aqui ia valer 1 [*h*], aqui 1 [*h*] e aqui [outros 2*h*] tinha que ser 0,5, mas eles têm que ser iguais. Não dá.”

A dupla 3 mostrou a dificuldade em conceber as variáveis como representantes de números menores do que 1:

P: “E poderia ser outros valores?”

D3-1: “Se o *t* for 1...não dá.”

P: “Por quê?”

D3-1: “Porque ia ficar um *h* de fora.”

A dupla 4, no momento da entrevista, desconsiderou sua resposta porque lembrou do que tinha concluído no item anterior: $t = 2h$; e não conseguiu atribuir outros valores para as variáveis. A fala de D4-1 mostra essa argumentação:

D4-1: “Mas no caso aqui não teria como *t* ser 2. Porque se *h* é 0,5, usando o mesmo raciocínio que a gente usou no item b), se *h* é 0,5, o *t* equivale a 1. Então aqui está incorreto.”

A dupla 7 considerou que $t = 4h$. Vejamos suas justificativas:

D7-1: “Para o perímetro ser 4, então o *t* tem que ser 4*h*, aí vai dar 2.”
P: “Outros valores de *t* e *h* não dão o perímetro 4?”
D7-1: “Só se for um número negativo. Pra dar igual a 4, não dá.”
P: “E poderia ser número negativo?”
D7-1: “Só na expressão algébrica poderia. Se fosse usar só a fórmula e não a figura, aí até poderia ser.”

As equipes D2, D6 e T apresentaram um par de valores que satisfaz a expressão, porém, durante a entrevista, mostraram que as variáveis *t* e *h* poderiam assumir vários valores e que reconheceram a relação de dependência entre essas variáveis, ou seja, mobilizaram a habilidade **F1**[1].

A dupla 2, como fizeram as equipes 1, 3, 4 e 7, atribuiu os valores 0,5 e 2 para *h* e *t*, respectivamente, porém, argumentou que essas variáveis poderiam assumir infinitos valores. Vejamos o diálogo que se deu com as integrantes:
D2-2: “A gente já pensou que o *t* é igual a 2. Aí dividimos 2 por 4 e deu 0,5 para o *h*.”
P: “Será que podem ser outros valores?”
D2-2: “Acho que pode.”
P: “Quantos valores o *h* pode representar?”
D2-1: “Ih, infinitos.”
D2-2: “Infinitos não. Infinitos do ‘zero virgula não sei quanto’ pra cá, né.”
P: “Por quê?”
D2-2: “Porque pode ser 0,223; 0,533...pra dar 4.”
P: “E o *t*?”
D2-2: “Também, porque vai depender do valor de *h*.”

[1] **F1** – “reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)”.

Na entrevista com D2 as integrantes revelaram que perceberam a relação de dependência entre as variáveis, considerando a relação entre os lados da figura, mas, sem analisar suas possíveis medidas.

As equipes T e D6 apresentaram em seus protocolos a resposta 0,8, pois, dividiram o valor do perímetro igualmente entre os lados da figura.

T1: "A gente dividiu. Deu 0,8 o valor de *t* e *h*."

P: "Vocês deram a resposta considerando a medida *h* igual a medida *t*, elas podem ser diferentes?"

T2: "Aqui podia ser 1 [*t*]. E 3 tinha que dividir por esses outros aqui [*h*]. Aqui [*h*] vai ser 0,75."

T1: "Qualquer número que a gente colocar no *t* vai dar pra dividir o resto por quatro e descobrir o valor de *h*."

P: "Quantos valores *t* pode assumir?"

T2: "Tendo perímetro 4? Vários."

P: "E o *h*?"

T1: "Todos os valores decimais, dependendo do número que o *t* tiver."

Percebemos com as falas das integrantes do trio que o reconhecimento da relação de dependência entre os lados da figura foi feito, embora também não tenham pensado nas condições de existência da figura.

A dupla 6 foi a única que percebeu a dependência entre os lados da figura e como deve ser essa relação, mostrando que $t < 4h$ e que $4h > 2$, por isso não aceitou $t = 2$ e $h = 0,5$ como resposta, como fizeram as outras equipes. Vejamos os trechos da entrevista em que a dupla argumenta seus pensamentos:

D6-2: "A gente pegou o 4, que é o valor total, e dividimos por 5."

D6-1: "Aí no caso, somando todos os *h*, vai ficar maior do que o *t*. Cada *h* é menor do que o *t*, mas juntando todos fica maior do que o *t*." [$4h > t$]

D6-2: "A soma dos *h* tem que ser mais da metade do valor 4." [$4h > 2$]

P: "E poderia ser outro valor pro *h* e pro *t*?"

D6-1: "A gente não conseguiu achar."

As argumentações dos componentes de D6 mostram a dificuldade em atribuir valores, respeitando as condições que apresentaram.

A dupla 6 que revelou nas questões em contexto puramente algébrico que tudo se resolve por equação, mostrou nessa uma análise do papel da variável. Essa foi a vantagem de usar esses diferentes contextos em nossa pesquisa, embora esses alunos não tenham conseguido encontrar outros valores para as letras, reconheceram que existe. Assim como outras equipes, D6 também demonstrou, com suas falas, a dificuldade em pensar em números num intervalo de números inteiros consecutivos.

A dupla 5, por sua vez, considerou $h = 3$ e $t = -8$, pois consideraram a resposta do item b). Vejamos seus argumentos:

D5-1: "Já que a gente achou aqui 12 e o perímetro é $12 + t$ [resposta ao item b)], então só subtraindo pra dar 4."
D5-2: "Foi o único jeito de achar 4."
P: "Não tem outro jeito?"
D5-2: "Se fosse colocar 1 em cada um, ia dar 5, não tem como."
P: "Pode ser menos que 1?"
D5-2: "Se não pode ser negativo, eu não sei."

Nesse caso, além de não ter idéia de que essas variáveis não podem representar números negativos, os alunos da dupla D5 revelaram a dificuldade para pensar em números menores que 1 e maiores que zero.

Os resultados da questão 6 mostram a falta de reconhecimento da variação conjunta das variáveis, por conta da falta de análise dos valores que a figura pode assumir e da dificuldade em considerar números num intervalo de zero a um. Em conseqüência, os alunos consideraram apenas um par de valores que não atende ao enunciado da questão, ou encontraram alguns outros pares, mostrando o reconhecimento da correspondência entre as variáveis somente em termos de valores discretos.

Embora a maioria dos alunos não tenha atendido aos objetivos da questão no que se refere à análise dos possíveis valores que os lados da figura podem assumir, percebemos que alguns reconheceram a correspondência entre as variáveis envolvidas.

Observamos, como em algumas respostas apresentadas na questão 4, a idéia de que encontrar um par de valores que satisfaça o enunciado é o bastante, ou seja, que não há necessidade de generalizar.

A dificuldade em considerar infinitos números num intervalo de valores inteiros consecutivos foi revelada por essas equipes e confirmam a referência a qualquer número considerando o conjunto dos números inteiros positivos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na análise dos resultados, apresentada no capítulo 4 deste relatório, procuramos mostrar como os alunos participantes da pesquisa utilizam a variável e os significados que a atribuem nesses usos.

O Modelo 3UV como guia teórico possibilitou a verificação dos conhecimentos que emergem na simbolização, manipulação e interpretação das variáveis. Com os dados coletados das equipes podemos traçar um perfil geral dos participantes quanto as habilidades requeridas para o tratamento da variável nas questões propostas.

Percebemos que a habilidade de interpretação das variáveis por esses alunos apresenta muitas defasagens. Quando se trata de variáveis em relação funcional, a maioria das equipes, por procedimentos de substituição, as considerou como números genéricos; outras se conformaram em atribuir um par de valores que atenda à questão, mostrando que não há necessidade de generalização.

Poucos alunos foram capazes de reconhecer o relacionamento funcional entre as variáveis (**F1** – "reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas)") nas questões em que tinham esse status e, menos ainda, conseguiram reconhecer a variação conjunta entre elas (**F4** – "reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas)").

Quanto a interpretação de variáveis no papel de número genérico (**G2** – "interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor") verificamos a dificuldade em identificá-la como tal pela falta de entendimento dos resultados obtidos da aplicação de procedimentos algorítmicos, ou dos erros apresentados ao utilizá-los. Tais erros foram cometidos por conta da própria idéia dos alunos em relação ao que acreditavam que deveriam obter como resposta na questão.

Quanto as habilidades de interpretação de números genéricos que envolvem o reconhecimento de um padrão (**G1** – "reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas"), verificamos que todas as equipes foram bem sucedidas, porém, poucas conseguiram deduzir uma regra válida para o padrão apresentado na questão 5 (**G3** – "deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas").

A interpretação da variável como incógnita também apresentou problemas, embora tenha sido reconhecida (**I1** – "reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema"), não pôde ser determinada, pois os procedimentos adotados pelas equipes não favoreceram sua identificação. As principais causas para isso foram a expectativa quanto ao tipo de expressão e, logo, do tipo de resposta a ser encontrada no uso de algoritmos; e a falta de interpretação da igualdade.

Quanto à simbolização as equipes mostraram ter dificuldade para representar por letra, principalmente quando se tratava de variáveis nos papéis de número genérico (**G5** – "simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos") e variáveis em relação funcional (**F6** - "expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema"). A simbolização da letra no status de incógnita (**I5** – "simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação") foi a que mais equipes acertaram, embora algumas tenham revelado que não a simbolizaram por terem calculado facilmente seu valor, como se do seu reconhecimento os alunos partissem diretamente para a sua determinação, sem simbolizá-la.

Quanto a dificuldade de simbolização de termos genéricos temos, por um lado, as equipes que sentiram a necessidade de representá-lo por letra, porém que o incluíram em expressões nas quais não tem esse status. Por outro, as equipes que o interpretam como número genérico (**G2** – "interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor"), mas o representam com um número escolhido aleatoriamente. A dificuldade em simbolizar um termo genérico também foi apresentada na questão 5, em que a maioria das equipes não identificou as grandezas por variáveis e tampouco a regra que rege o padrão. Em compensação, quando a variável é dada na questão, a simbolização não apresenta problemas, como foi apresentado pelas equipes na resposta à questão 6. a).

Quanto a manipulação das variáveis, as equipes, em geral, mostraram inúmeros critérios para as operações com termos literais, principalmente de variáveis no status de número genérico, indicando a falta de entendimento desses procedimentos, os quais impediram a identificação dos papéis que as letras desempenham.

Quanto as habilidade de manipulação da variável como incógnita (**I3** – "substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação uma sentença verdadeira"; e **I4** – "determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas") percebemos a falta de utilização do conceito de igualdade nos procedimentos de substituição adotados por algumas duplas, ao tentar determinar o termo desconhecido. Em contrapartida, ao realizar procedimentos algorítmicos também mostraram a necessidade de satisfazer suas expectativas quanto à resposta, revelando, mais uma vez, a falta de interpretação da variável.

Quanto aos procedimentos de manipulação da variável como número genérico (**G4** – "manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica") percebemos que não acarretaram em identificação da variável como tal, visto que os diferentes critérios utilizados para operar com as variáveis desencadearam erros no processo e no resultado, ambos não interpretados pelos alunos. Mesmo quando utilizaram procedimentos corretos, alguns alunos não entendiam o que o resultado significava.

Quanto a manipulação das variáveis em relação funcional percebemos que as equipes tiveram êxito nas habilidades de substituição das letras (**F2** – "determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente" e **F3** – "determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente"), salvo aquelas que não souberam utilizar o conceito de igualdade. Quanto a determinação de intervalos de variação (**F5** - "determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra"), os alunos mostraram ter muitas dificuldades

Os resultados que reportamos sugerem que a maioria das dificuldades apresentadas por esses alunos são frutos da forma como são abordados os diferentes usos da variável na álgebra escolar que, em suma, não parece favorecer a diferenciação entre os papéis que a variável pode assumir.

Essa influência foi revelada nas respostas às questões e nas justificativas apresentadas pelos alunos durante as entrevistas. Dentre elas, destacamos: o hábito de igualar a equação à zero, uma forma usual de apresentação do conteúdo; a necessidade de mostrar um resultado ao resolver as questões, mesmo quando isso não é pedido no enunciado, que revela que sempre trabalham com questões em que precisam calcular algo.

Importante destacar o papel que os instrumentos de coleta de dados desempenharam nessa investigação. As gravações em áudio, assim como os registros de observação, nos forneceram dados quanto às dúvidas que emergiram e estratégias utilizadas pelos alunos ao responder as questões. Esses dados serviram de base para a estruturação das perguntas da entrevista e também para que avaliássemos o 'impacto' de cada enunciado. A elaboração de questionamentos foi feita de modo que pudesse esclarecer as conclusões apresentadas nos protocolos e os procedimentos tomados por cada equipe.

Percebemos, com as questões formuladas durante a entrevista que os alunos da mesma equipe expressam argumentos diferentes para o mesmo feito, revelando os significados que cada um atribui à variável. Tal fato revela o aspecto positivo da organização dos alunos em equipes (duplas e trio) e das entrevistas, que proporcionaram a expressão dessas concepções.

Nesses diálogos os alunos, em sua maioria, se referiam à variável como representante de um número qualquer, porém, as justificativas para tal, apresentadas por alguns deles, mostram que se referem ao coeficiente da variável e não ao seu valor.

Outra observação sobre a idéia de variável como representante de qualquer número é a idéia de incógnita que se revela, posto que pode ser qualquer número, já que não se sabe qual é, exatamente, antes de calcular.

O predomínio da idéia de variável como incógnita fica mais evidente ainda quando os alunos reconhecem que uma variável tem status de número genérico, mas apresentam apenas alguns valores, ou um valor como resposta, o que revela que para eles não há necessidade de generalização, mas sim de apresentar uma solução que atenda as restrições da questão.

Se quando questionados os alunos, em geral, consideram a variável como representante de um número qualquer, por outro lado, quando a manipulam "esquecem" do que elas representam, fazendo emergir o uso de procedimentos algorítmicos, utilizados correta ou incorretamente, no intuito de atender suas expectativas quanto à resposta, o que mostra a insuficiência do ensino de técnicas sem a exploração do que as letras representam.

O fato de ao manipular as variáveis prevalecerem o uso desses procedimentos parece nos mostrar a dissociação entre os aspectos simbólico e substancial, pois o símbolo é operado sem considerar o conjunto que representa, com base em procedimentos memorizados que muitas vezes são utilizados inadequadamente. Ao passo que na interpretação das variáveis, o aspecto substancial fica mais atrelado à idéia de variável que os alunos apresentam diante de uma dada questão, do que à identificação do papel que ela tem. Da mesma forma, ao representar um número genérico por uma letra e apresentá-lo numa equação, revela que a parte substancial, o conjunto representado pelo símbolo não é mobilizado na escrita da expressão.

Quanto ao conjunto numérico tomado pela maioria das equipes nessa questão, inteiros positivos, percebemos que isso ocorre, não somente porque não se reportam, mas pela dificuldade em conceber a soma e a ordenação de números negativos; ou em considerar os valores de um intervalo restrito, como]0,5, 1[, por exemplo.

Para Ursini e Trigueros (1998), o trabalho adequado com cada um dos aspectos que a variável pode apresentar-se implica as capacidades de: interpretar, em um problema dado, o significado da variável, quer dizer, dar-se conta do papel que a variável assume nessa situação; operar com e sobre o símbolo empregado para representá-la; utilizá-la com o fim de representar um problema de maneira simbólica.

Os dados apresentados mostram que se é feito um trabalho com os diferentes usos da variável, as características que as fazem diferentes não são explícitas, ou, há uma ênfase no uso da variável como incógnita, o que não favorece a construção do conceito de variável como ente que pode assumir diferentes papéis.

A análise proposta pelo modelo 3UV nos mostrou as defasagens, a falta de habilidades para o tratamento adequado dos diferentes usos da variável. Em contrapartida, a análise dos aspectos simbólico e substancial nos revela que, embora existam essas lacunas, os alunos têm suas próprias idéias sobre a variável e a forma com que a expressam na maioria das vezes, não reflete o que matematicamente seria o correto.

Portanto, é necessário refletir sobre as estratégias de ensino para a abordagem desse conceito, de forma que favoreçam uma aprendizagem significativa. Nas palavras de Laville e Dionne (1999): “é verdade que as conclusões de tal investigação valem de início para o caso considerado, e nada assegura, *a priori*, que possam se aplicar a outros casos. Mas também nada o contradiz (...)”. (p. 156)

REFERÊNCIAS

BOOTH, L.R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (org.); traduzido por Domingues, H.H. **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995. p. 23–37.

BRAGA, C. **Função:** a alma do ensino da matemática. São Paulo, SP: Annablume; Fapesp, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 2005. 6ª ed.

_______. **Lições de álgebra e análise**. Lisboa: Sá da Costa, 1954. vol. II

CHRISTO, D S. **Introdução da noção de variável em expressões algébricas por meio da resolução de problemas**: uma abordagem dinâmica. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, A.F.;SHULTE, A.P.(org.); traduzido por Domingues, H.H. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 70-78.

HOUSE, P.A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (org.); traduzido por Domingues, H.H. **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995. p. 1–8.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A.F.;SHULTE, A.P.(org.); traduzido por Domingues, H.H. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 104-110

KÜCHEMANN, D. Algebra. In: K.M. Hart (org.). **Children's Understanding of Mathematics.** London: Joh Murray, 1987, p. 102-119.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução: Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Revisão técnica e adaptação da obra: Lana Mara Siman. Porto Alegre: Artes Médicas Sul Ltda; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999. 340 p. ISBN 85-7307-489-2.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. Temas Básicos de Educação e Ensino. São Paulo: EPU, 1986. 6ª reimpressão, 2003. p. 11-44

MALISANI, E. The notion of variable in semiotics contexts different. In: International Conference on "The Humanistic Renaissance in Mathematics Education", University of Palermo, 2002, Italia. **Proceedings…** Itália, 2002. p.245–249. (Texto disponível em http://math.unipa.it/~grim/SiMalisani.PDF - acessado em 09 ag. 2007) .

PONTE, J. P. Estudo de caso em educação matemática. **Bolema** 25, ano 19, 2006. (Texto disponível também em www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf - acessado em 06 mar. 2009) p. 1-21.

QUEIROZ, P. C. G. **Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. 134 f.

RODRIGUES, D. M. **A compreensão dos alunos, ao final do Ensino Médio, relativa ao conceito de variável.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. 147 p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do gestor:** gestão do currículo na escola. Coordenação: FINI, M. I. Elaboração: MACEDO, L. et al. São Paulo: SEE, 2008. v. 3. ISBN 978-85-7849-041-6.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S.V. **Álgebra:** das variáveis às equações e funções. 4º ed. São Paulo: IME-USP, 2003. 111 p.

TINOCO, L. A. A. et al. Educação Algébrica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX., 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais...** Belo Horizonte, MG: UNI-BH, 2007. p. 1-16. CC02128926734T; ISBN: 978-85-98092-05-8

TRIGUEROS, M.; REYES, A.; URSINI, S; QUINTERO, R. Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. In: **Investigación y Experiencias Didácticas**. Enseñanza de las ciencias, 1996, México. p. 351-363.

TRIGUEROS, M.; URSINI, S.; LOZANO, D., La conceptualización de la variable en la enseñanza media. In: **Educación Matemática**, 2, 2000, México. v. 12, p. 27-48.

TRIGUEROS, M.; URSINI, S. A model for the uses of variable in elementary algebra. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings**… Utrecht: Utrech University, 2001. v. 4, p. 327-334.

_________. Understanding of different uses of variable: a study with starting college students. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHAMATICS EDUCATION, 21. 1997, Lathi. **Proceedings…**Finland, 1997. v. 4, p. 254-261.

_________. Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. In: HITT, F. (Ed.). **Investigaciones en Matemática Educativa II.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, p. 445-463.

URSINI, S., ESCAREÑO, F., MONTES, D., TRIGUEROS, M. **Enseñanza del álgebra elemental.** Una propuesta alternativa. México: Trillas, 2005. ISBN 968-24-6752-7, 165 p.

APÊNDICE A: O questionário piloto.

PARTE I

Um quadrado é chamado *Quadrado Mágico* quando a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre a mesma. A seguir, têm-se dois quadrados mágicos, parcialmente preenchidos:

Questão 1: Quantos valores o símbolo ☺ pode representar?

		☺
	46	**13**
-8		**25**

Expliquem como vocês pensaram.

Questão 2: Quantos valores x e y podem representar para que este seja um quadrado mágico?

		-2	
x	**16**	**-18**	**28**
		y	
		56	

Expliquem como vocês pensaram.

PARTE II

Escreva quantos e quais valores as letras podem representar em cada uma das expressões abaixo:

a) $x - y = 10$

b) $- 5 - a = - a - 2 – 3$

c) $\frac{x}{2} + 12 = -2$

APÊNDICE B: O questionário de pesquisa

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica para representar:

a) Um número que multiplicado por 5 resulte em 0,5.

b) Um número somado a 2.

c) A subtração de dois números que resulte em 2,5.

Questão 2: Escreva por quantos valores as letras podem ser substituídas em cada uma das expressões abaixo. Dê exemplos.

a) $x = 10 + y$

b) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

c) $x(x + 1) = -3 + x^2$

Questão 3: Represente de uma outra maneira cada uma das expressões:

a) $(x^2 + 1)(x - 2)$

b) $-6 + 5a + 3a$

c) $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8$

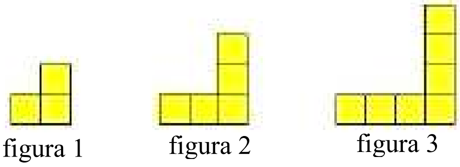
Questão 4: Um quadrado, como o que está representado abaixo, é chamado Quadrado Mágico quando a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal resulta sempre no mesmo número.

Que valores *m* e *n* podem representar para que este seja um quadrado mágico?

		-2	
m	**16**	**-18**	**28**
		n	
		56	

Explique como você pensou.

Questão 5: Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



a) Desenhe a próxima figura. Quantos quadradinhos ela tem?

b) Desenhe a 5^a figura da seqüência. Quantos quadradinhos ela tem?

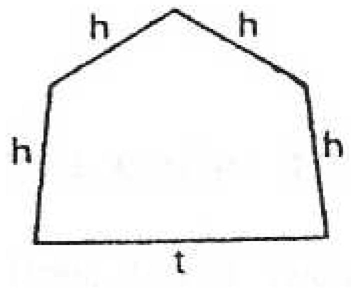
c) Construa uma tabela relacionando a posição de cada figura com o seu número de quadradinhos.

d) A 11ª figura tem quantos quadradinhos?

e) E a 17ª?

f) Como descobrir a quantidade de quadradinhos de qualquer figura dessa seqüência? Escreva uma regra.

Questão 6: Considere a seguinte figura:



a) Escreva a expressão do perímetro dessa figura.

b) Se $h = 3$, qual é o valor do perímetro?

c) Quais os valores de t e h para que o perímetro dessa figura seja igual a 4?

APÊNDICE C: Termo de consentimento

Termo de consentimento

Nos dias 08 e 10 de setembro de 2008 será aplicado um questionário de pesquisa a alguns alunos de oitava série, no período de 7:00 às 8:40. Tal procedimento é parte de um projeto de investigação em Educação Matemática e tem por objetivo coletar dados que possam contribuir para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem em Matemática.

Os alunos que optarem por participar dessa etapa responderão a algumas questões, podendo ter suas falas gravadas ao realizá-las e, posteriormente, serão entrevistados.

Os dados coletados serão de uso exclusivo de uma pesquisa acadêmica, cujos resultados podem, eventualmente, ser publicados em congressos ou revistas científicas.

Tal investigação não visa fins lucrativos e as informações obtidas poderão ser divulgadas com a garantia de total sigilo quanto a identificação dos participantes.

Eu, ____, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da 8ª série ______, autorizo a sua participação nessa etapa do referido projeto de pesquisa.

ANEXO A: As questões de Trígueros e Ursini (1998) que nos serviram de inspiração para a elaboração das questões 1, 2 e 3.

Neste exercício, somente escreva uma fórmula. NÃO CALCULE o número.

1. Escreva uma fórmula que expresse: Um número desconhecido que multiplicado por 13 é igual a 127.

2. Escreva uma fórmula que expresse: Um número desconhecido multiplicado pela soma desse mesmo número desconhecido por 2 é igual a 6.

3. Escreva uma fórmula que expresse: Um número desconhecido é igual a 6 mais outro número desconhecido.

4. Escreva uma fórmula que expresse: Um número desconhecido dividido por 5 e seu resultado somado a 7.

Para cada uma das seguintes expressões quantos valores a letra pode assumir?

5. $x + 2 = 2 + x$

6. $3 + a + a = a + 10$

7. $x = x$

8. $4 + s$

9. $x + 5 = x + x$

10. $3 + a + a + a + 10$

11. $7x^2 = 2x - 5$

12. $x/x^2 -4 = 3$

13. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

14. $4 + x^2 = x (x + 1)$

Reduza as seguintes expressões a uma equivalente:

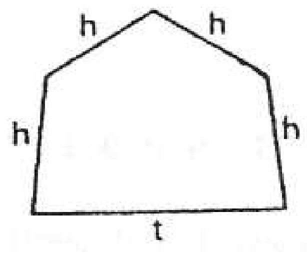
15. $(x^2 + 1) (x^2 - 2) =$

16. $a + 5a – 3a =$

17. $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y – 8 =$

ANEXO B: As questões de Küchemann (1987) que nos serviram de inspiração para a elaboração da questão 6.

Escreva a expressão do perímetro da seguinte figura:



O que você pode dizer sobre *m* se:

$m = 3n + 1$

$n = 4$