

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

LEANDRO MARQUES

**SOBRE A UTILIZAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO NO ESTUDO DE
DERIVADAS PARCIAIS**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**São Paulo
2009**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

LEANDRO MARQUES

**SOBRE A UTILIZAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO NO ESTUDO DE
DERIVADAS PARCIAIS**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para
obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE
MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Professor Doutor Benedito
Antonio da Silva**.*

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

Aos meus familiares e especialmente aos meus pais que sempre me apoiaram nos estudos.

A todos aqueles que sentiram minha ausência.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor Benedito Antonio da Silva, que desde o princípio me orientou nesta pesquisa, sempre buscando me incentivar e auxiliar com seus conhecimentos.

Aos Professores Doutores Marcos Roberto Celestino e Bárbara Lutaif Bianchini pelas valiosas sugestões e incentivadores comentários no exame de qualificação, que foram de muita valia para o desenvolvimento deste trabalho.

À secretaria do Estado da Educação pela bolsa de estudos concedida.

Aos meus colegas do mestrado.

Aos meus amigos Vagner, Silvana, Corina e Siane, que me ofereceram apoio e contribuições importantes ao longo do curso.

RESUMO

O trabalho tem por objetivo mostrar como estudantes de um curso de Engenharia mobilizam o livro didático no estudo de derivadas parciais. Sabe-se da importância da disciplina de Cálculo nos cursos ligados à ciências exatas e que muitos alunos apresentam sérias dificuldades na aprendizagem dos conteúdos que a compõem. Muito se tem pesquisado sobre o uso de tecnologias da informação em sala de aula, para tentar tornar o ensino e a aprendizagem mais eficaz, porém na prática, os índices de abandono e repetência indicam que isso não está ocorrendo de maneira satisfatória. As novas tecnologias vêm tornando o livro didático uma ferramenta cada vez mais eficiente e que se pode tê-lo à mão de modo relativamente mais fácil do outras ferramentas tecnológicas. Assim desenvolvemos nossa pesquisa no intuito de investigar como os alunos manipulam o livro didático, na busca por informações e quais contribuições que a utilização dessa ferramenta pode trazer para a aprendizagem do tópico sobre Derivadas Parciais. Para buscar indícios que nos apontassem como isso ocorria, elaboramos um instrumento de pesquisa com questões fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que foi aplicado a alunos em estágios distintos do curso de engenharia mecânica de uma universidade particular da cidade de São Paulo. A pesquisa revelou que os alunos priorizam o registro algébrico em suas resoluções e que esta representação é tida como resposta válida e que outras representações são apenas “auxiliares”. A maioria dos alunos apresentou relativamente bom desempenho no tratamento de funções de duas variáveis na sua representação algébrica, porém demonstraram dificuldades quando elas são expressa na língua natural. Os dois grupos apresentaram similaridades na manipulação do livro para a exploração conteúdo. A forma como foram resolvidas algumas questões indicou que o livro foi uma ferramenta eficaz para o processo de aprendizagem.

Palavras-Chave: Livro Didático, Derivadas Parciais, Registros de Representação Semiótica, Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

The objective of this work is to show how the Engineer course students use the didactic book to study the Partial Derivates. It's known the importance of the Calculus subject in the courses linked to the exact sciences, in which students show heavily burdens, while learning this subject. A lot has been researched about the use of technologies of information in the classroom, trying to make the teaching process more effective, but in practice, the levels of dismissing and failure show that it is not been very satisfactory. The new technologies are making the book a more efficient tool, and you can have it in hands easier than the other technologic tools. Like this, we developed our research with the propose to investigate how students manipulate the books, looking for information and what contributions the use of this tool for the learning of the topic about Partial Derivates. To look for evidences that show us how it happened, we elaborated a research tool with elementary questions based in the Raymond Duval's Theory of the Registers of Semiotics Representation that was used with students from different levels from the mechanic engineering from a private university in São Paulo. The research reveled that the students have as a priority the algebraic records in their resolutions and this representation is known as a valid answer and other representations are just auxiliaries. Most of the students showed a relative good work dealing with the functions treatment of two varieties in their algebraic representation, but they showed some hardship when they are expressed in their natural language. Bother groups show us similarities when using the book for the exploration of the topics. The way some questions were solved told us the book was an efficient tool for the learning process.

Keywords: Textbooks, Partial Derivatives, Registers of Semiotic Representation, Teaching and Learning.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	12
-------------------	----

CAPÍTULO I

1. Problemática.....	14
2. Uso de livro didático e o estudo de funções de duas variáveis.....	20

CAPÍTULO II

1. Fundamentação teórica.....	25
2. Procedimentos metodológicos.....	31
2.1 As escolhas.....	34
O livro.....	34
Sujeitos e Instituição.....	44

CAPÍTULO III

1. O instrumento	46
2. A aplicação.....	50

CAPÍTULO IV

Análise dos dados.....	53
------------------------	----

CAPÍTULO V

Conclusões.....	71
-----------------	----

REFERÊNCIAS.....	75
------------------	----

ANEXOS

Anexo1.....	79
Anexo 2	80

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Registro gráfico de f e g	29
Figura 2: Definição de função de duas variáveis.....	36
Figura 3: Exemplo de representação numérica de uma função.....	37
Figura 4: Representação gráfica e domínio de função.....	38
Figura 5: Definição de Limite.....	39
Figura 6: Representação gráfica de Limite.....	40
Figura 7: Exemplo de Continuidade.....	41
Figura 8: Definição de Derivadas Parciais e notações.....	42
Figura 9: Representação gráfica de Derivadas Parciais de certa função f	43
Figura 10: Planos verticais e retas tangentes.....	43
Figura 11: Resposta oferecida pela dupla S4.....	55
Figura 12: Resposta oferecida pela dupla Q4.....	55
Figura 13: Resposta oferecida pela dupla Q5.....	57
Figura 14: Resposta oferecida pela dupla S4.....	58
Figura 15: Resposta oferecida pela dupla S4.....	59
Figura 16: Resposta oferecida pela dupla Q4.....	60
Figura 17: Resposta oferecida pela dupla S3.....	60
Figura 18: Resposta oferecida pela dupla Q1.....	62
Figura 19: Resposta oferecida pela dupla S3.....	63
Figura 20: Resposta oferecida pela dupla S1.....	65
Figura 21: Resposta oferecida pela dupla Q3.....	66
Figura 22: Resposta oferecida pela dupla S2.....	67
Figura 23: Resposta oferecida pela dupla Q3.....	68

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Registros de representação semiótica.....	27
Tabela 2. Registro numérico de f e g.....	30
Tabela 3: Uso do livro pelo aluno.....	69
Tabela 4: Características das duplas.....	72

APRESENTAÇÃO

Com o desenvolvimento da tecnologia, o acesso a bens produzidos por ela vem se massificando. É o que acontece, por exemplo, com o uso do computador, que está cada vez mais presente no cotidiano das pessoas, uso este que busca facilitar, tornar mais rápidas e eficientes as tarefas antes executadas sem ele.

Os horizontes para sua aplicação também foram avistados para a sala de aula, seja em nível fundamental, médio ou superior. Essa tecnologia também trouxe contribuições para o aprimoramento de outro recurso pedagógico que tem grande importância na sala de aula e que tem uma maior acessibilidade, o livro didático, que a cada edição busca adequar-se às necessidades dos estudantes.

Sabemos que nem todos os livros didáticos têm a qualidade esperada para ser utilizado junto aos alunos, devido a vários fatores que fogem do foco de nossa pesquisa. Mas ele ocupa uma posição de destaque dentre as ferramentas disponíveis ao professor em seu processo de ensino. De acordo com Romanatto (2004).

A situação de sala de aula brasileira permite dizer que nem a palavra do professor e muito menos os modernos meios tecnológicos de comunicação podem substituir o livro didático nas atividades escolares, pois este acumula várias funções, como, por exemplo, a de ser instrumento de intercâmbio e inter-relação social, permitindo a comunicação no tempo e no espaço, assim como constitui vasta fonte de informações (ROMANATTO, EPEM, 2004).

Tendo em vista essa importância do livro didático, pretendemos investigar como é seu uso em sala de aula, mais especificamente, como o aluno o manipula para poder se apropriar das informações contidas nele.

Para tanto, escolhemos o tema Derivadas Parciais pelo fato de existirem poucas pesquisas sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão de conteúdos sobre funções de duas variáveis, dificuldades que também tivemos em nossa graduação. Com nossa pesquisa, buscamos informações que possam contribuir para o ensino de Cálculo, dado que os índices de reprovação e de desistência nesta disciplina são relativamente altos.

Para obter informações sobre a manipulação do livro didático pelos alunos e quais contribuições essa manipulação traz para seu aprendizado, elaboramos um questionário exploratório com seis questões sobre o tema Derivadas Parciais de funções de duas variáveis. em que os alunos buscavam informações no livro para respondê-las. Tanto a elaboração do instrumento quanto a análise das respostas foram embasadas na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Aplicamos este questionário a alunos do segundo e do quinto semestres do curso de Engenharia Mecânica de uma universidade particular da cidade de São Paulo.

Organizamos nosso trabalho em cinco capítulos

A problemática está no **Capítulo I**, no qual justificamos nossa opção pelo tema, assim como apresentamos de forma simples algumas considerações sobre pesquisas, cujos temas são relacionados com aquele tratado em nosso trabalho. Neste mesmo capítulo, discorremos, de forma bem singela, sobre o uso do livro didático e o estudo de funções de duas variáveis, considerando, principalmente, informações contidas em pesquisas de colegas do nosso grupo de estudos.

No **Capítulo II** está a fundamentação teórico-metodológica, em que apresentamos noções sobre a teoria dos Registros de Representação semiótica de Duval. Neste mesmo capítulo, também apresentamos nossas escolhas relativas ao livro didático, assim como aos sujeitos e à instituição em que aplicamos o instrumento.

O questionário e sua aplicação encontram-se no **Capítulo III**. Neste capítulo, descrevemos nossas pretensões com o instrumento diagnóstico e a forma como ocorreu a aplicação aos alunos.

No **Capítulo IV** buscamos fazer uma análise qualitativa dos protocolos produzidos pelos alunos, no intuito de obter informações que nos dêem indícios de como eles manipulam o livro didático e quais contribuições significativas essa manipulação traz para sua aprendizagem.

As considerações finais encontram-se no **Capítulo V**, no qual salientamos alguns resultados significativos da pesquisa, na modesta pretensão de contribuir com as informações obtidas, para o processo de aprendizagem do Cálculo.

CAPÍTULO I

1. Problemática

O grupo “O Elementar e o Superior em Matemática” do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC–SP trabalha essencialmente com duas linhas de pesquisa do Programa de Mestrado e Doutorado, a saber:

- 1) História, Epistemologia e Didática da Matemática.
- 2) A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores.

Participando desse grupo, pretendemos discutir um tema relacionado ao ensino de Cálculo. Propusemos-nos a abordar no desenvolvimento das funções de duas variáveis, o tema Derivadas Parciais.

Este conteúdo é visto, de modo geral, em Cálculo II, fase em que os alunos já cursaram Cálculo Diferencial e Integral de funções com uma variável.

A proposta deste trabalho é analisar como os alunos manipulam o livro didático e quais contribuições significativas que a utilização dessa ferramenta traz para a aprendizagem do tópico sobre Derivadas Parciais. Tal proposta fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

A pesquisa foi motivada pela dificuldade encontrada por mim e meus colegas em nos apropriarmos desse conteúdo, ainda no nível da graduação, e também por meio de questionamentos informais a colegas professores que atuam no ensino superior com conteúdos de Cálculo. Há indícios apontando que é dada pouca importância ao uso do livro didático em sala de aula, assim buscamos saber se a sua utilização pode ser um facilitador à compreensão dos conteúdos abordados.

Num artigo sobre o Cálculo no curso de licenciatura em matemática, Barufi (2002) aponta obstáculos que alunos e professores enfrentam no processo de ensino e de aprendizagem desse conteúdo:

Diante das dificuldades dos alunos, muitas vezes, os professores desenvolvem seus programas limitando-se ao adestramento dos estudantes, pensando que a memorização de técnicas será suficiente, e que, no futuro, eles descobrirão sozinhos os significados dos conceitos e da utilização dessas técnicas, ao enfrentar problemas cuja resolução os exige (BARUFI, 2002, p.70).

O livro escolhido para o desenvolvimento da nossa pesquisa é Cálculo Volume II de James Stewart, quarta edição, editado por Pioneira Thomson Learning em São Paulo, 2003, pois apresenta uma relativa correspondência com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que nos guiará na fundamentação teórica deste trabalho. Entendemos que esta correlação está no fato de o autor buscar explorar em seu livro diferentes representações dos objetos matemáticos explanados na sua obra, com o objetivo de tornar mais evidentes seus conceitos.

Essa escolha se deu após consultarmos alguns trabalhos realizados em pesquisas sobre livros didáticos relacionadas com nosso tema. Destacamos Silva (2004) cuja dissertação sobre o tratamento da noção de Integral em livros didáticos foi embasada nos registros de representação semiótica. Destaca ao se referir a um dos livros analisados, a saber, o volume I de Stewart.

No prefácio, o autor menciona características da obra, inclusive fazendo comentários que, embora sem utilizar os termos da teoria de Duval, indicam sua preocupação em utilizar diferentes representações e a mudança entre seus registros (SILVA, 2004 p. 29).

Também no prefácio do volume II, Stewart deixa clara sua intenção de como apresentar os conteúdos, buscando estimular o aluno para a descoberta, por meio da utilização de exercícios em consonância com situações do mundo real, com os quais procura ligar o cotidiano ao Cálculo. Mostra também uma preocupação com a compreensão do conceito, fazendo uma apresentação dos tópicos utilizando quatro tipos de registros de representação, que o autor denominou como apresentação geométrica, numérica, algébrica e verbal ou descritiva.

Em nenhum momento esse autor menciona Duval, mas apresenta os conteúdos do livro em relativa sintonia com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Fica clara esta consonância no prefácio do segundo volume da coleção, em que o autor salienta que escreveu o livro tendo como foco principal a compreensão conceitual:

Tentei implementar essa meta através da Regra de Três: “Tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente”. Visualização, experimentação numérica e gráfica e outras abordagens mudaram radicalmente a forma de ensinar o raciocínio conceitual. Mais recentemente, a Regra de Três foi expandida tornando-se a Regra de Quatro com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo. (STEWART, Prefácio, 2002).

A utilização do livro didático pode ser um facilitador à compreensão de conceitos e aplicações das Derivadas Parciais de funções de duas variáveis, visto que as representações que o livro traz podem complementar os esclarecimentos dados pelo professor em sala de aula ou, mesmo numa leitura inicial, motiva o aluno para o estudo do conceito. Representações gráficas de funções, por exemplo, podem auxiliar o aluno na apropriação de alguma de suas propriedades, que podem não ser tão evidentes em outros registros de representação. Podem proporcionar ainda alguma economia de tempo, pois o professor pode apenas apresentar na lousa algum detalhe da representação gráfica da função, essencial à compreensão do conteúdo discutido.

Diversos trabalhos de pesquisa sobre o ensino de Cálculo, a que tivemos acesso, evidenciam que muitos alunos apresentam dificuldades na aprendizagem dos conceitos que compõem essa disciplina.

Godoy (2004), em sua pesquisa sobre os fenômenos relacionados à aprendizagem de Derivada, indica que uma das dificuldades encontradas pelos alunos, na aquisição de conhecimentos relativos a esse conteúdo, está no fato de que são privilegiados registros algébricos na introdução deste conceito, assim como em problemas e exercícios. (GODOY, 2004, p. 85)

A pesquisa de Celestino (2008) buscou verificar concepções que os alunos do ensino superior possuíam sobre Limites e quais dificuldades eles apresentam ao estudarem este conteúdo. Os resultados indicam que os alunos associam o Limite a um movimento físico, em que os valores de uma sequência “caminham” em direção ao limite e que o símbolo *lim* é um obstáculo epistemológico, pois os alunos encontram dificuldades em perceber que “o limite é” e a função “se aproxima”; em geral, interpretam que o “limite se aproxima” (CELESTINO, 2008, p. 170).

Catapani (2001) realizou uma pesquisa direcionada aos alunos do curso de Geologia de uma faculdade pública do interior do Estado de São Paulo, buscando motivos que causam interesse ou desinteresse, apresentados por eles, para com a disciplina de Cálculo. Seus resultados apontam, entre outros motivos, a má formação discente em matemática no ensino básico, visto que o aluno não apresenta pré-requisitos necessários para acompanhar o desenvolvimento dos conteúdos, acarretando mais dificuldades com os conceitos básicos do Cálculo. O interesse do aluno foi verificado quando do trabalho executado por eles no final do ano, em que buscavam aplicações para teoria estudada em sala de aula (CATAPANI 2001, in: BOLEMA, pp. 48 – 62).

São incomparáveis as possibilidades do uso da tecnologia em sala de aula com relação ao giz e a lousa para o processo de ensino e aprendizagem, porém, nem sempre esta tecnologia está disponível. Assim, o livro se torna uma ferramenta importante desse processo, trazendo informações e exemplos que muitas vezes não são mencionados pelo professor, devido a fatores, tais como tempo disponível de aula ou mesmo falta de uma estrutura que possibilite ampliar suas explicações.

O uso do material tradicional (giz e lousa) pode ser enriquecido pelas representações e informações que o livro didático traz em seu conteúdo, auxiliando no desenvolvimento de um conceito ou de uma ideia que o professor apresenta em sala de aula no estudo de algum objeto matemático, podendo assim ser um facilitador na apropriação desses conhecimentos pelos alunos.

Nas Derivadas Parciais de funções de duas variáveis, por exemplo, uma das representações da função considerada é o seu gráfico, que por ter duas variáveis (independentes), se dá no espaço (R^3) e dessa forma, sua representação fica limitada no plano (lousa) e dependerá da relativa habilidade do professor na sua reprodução, podendo assim, perder detalhes ou até mesmo confundir o aluno na apropriação do conceito que está sendo apresentado.

Parece ser consenso que a tecnologia é uma ferramenta muito poderosa no processo de ensino e aprendizagem. Essa importância do uso da tecnologia é ressaltada por Melo (2002).

Seu uso pode permitir planejar atividades nas quais os alunos desenvolvam habilidades e práticas de visualização e simulação, explorando e controlando variáveis, fazendo conjecturas e testando hipóteses (MELO, 2002 p. 2).

Entendemos que a tecnologia informática é uma ferramenta que pode trazer grandes contribuições para a aprendizagem, mas que pode não estar disponível a qualquer momento que se queira utilizá-la. Em contrapartida, tem-se algo mais antigo, que se desenvolve juntamente com a moderna tecnologia: é uma ferramenta bem conhecida nas atividades pedagógicas e que pode estar sempre à mão, o livro didático.

A situação de sala de aula brasileira permite dizer que nem a palavra do professor e muito menos os modernos meios tecnológicos de comunicação podem substituir o livro didático nas atividades escolares, pois este acumula várias funções, como, por exemplo, a de ser instrumento de intercâmbio e inter-relação social, permitindo a comunicação no tempo e no espaço, assim como constitui vasta fonte de informações (ROMANATTO, EPEM, 2004).

Com o próprio desenvolvimento da tecnologia, o livro tornou-se mais eficiente. Suas ilustrações podem ser geradas por computador, assim melhorando consideravelmente a qualidade na produção e impressão, trazendo um bom detalhamento de gráficos, complementado com cores, que podem enfatizar algum aspecto relevante da figura impressa.

O livro didático é uma ferramenta que o professor pode utilizar para facilitar a apresentação de um conteúdo, explorando os recursos que ele traz. Seu uso pelos alunos pode ser enriquecido pela exploração de seus pontos fortes, assim como pode ser complementado, pelo professor, em suas possíveis lacunas.

O livro didático a cada dia que passa vai sendo mais e mais estruturado didaticamente, para que venha a ser um instrumento facilitador da aprendizagem de futuros alunos [...] (SILVA, 2004, p. 137)

Outra função que o professor pode desempenhar com o uso do livro é a de estimular os alunos a ler e interpretar as informações que ali estão representadas, desenvolvendo neles mais autonomia.

[...] a leitura de um livro apresenta inúmeras vantagens sobre outros meios de comunicação, sendo a reflexão a principal delas [...] (ROMANATTO, EPEM, 2004)

Barufi (1999) faz uma análise de 24 livros didáticos utilizados em cursos de Cálculo e menciona que bons livros sempre existiram e que alguns deles, por ela analisados, não têm um teor de iniciação à disciplina de Cálculo e se aproximam mais para um curso de Análise Real. Indica também que figuras podem auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos, pois possibilitam uma melhor visualização do problema em estudo.

Frequentemente, refletir sobre alguma imagem não consiste em produzir imagens, mas sim em produzir palavras (METZ, 1974, apud BARUFI, 1999, p. 154).

Tem-se discutido e pesquisado vários aspectos sobre a problemática do ensino de Cálculo, entre eles podemos citar trabalhos sobre análise de livros didáticos, sequências didáticas, entre outras abordagens relacionadas com essa questão. Todos esses trabalhos, acreditamos, trouxeram contribuições significativas ao processo de ensino e aprendizagem, atacando a forma como é abordado o conceito de Derivadas, a relação entre Derivada e Integral (Teorema Fundamental do Cálculo), entre outros.

Muitos dos temas tratados referem-se a funções de uma variável, podendo seu gráfico, de sua(s) derivada(s) e integrais serem representados geometricamente no plano cartesiano (com dois eixos coordenados). Têm-se então figuras planas que podem ser representadas com relativa facilidade no “plano” da lousa ou em uma folha de papel.

Porém, existem funções com mais de uma variável que estão rotineiramente fazendo parte do nosso mundo real.

Como exemplo, podemos citar a temperatura T num ponto (x,y) de uma superfície metálica, dada pela função: $T = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, em que k é uma constante positiva. De acordo com a função, quanto mais o ponto (x,y) se localiza afastado do centro, maior temperatura apresenta esse ponto. (MACHADO, N. J. 1979, p. 2).

Para o cálculo da taxa de variação da temperatura T , do exemplo acima, faz-se necessária a determinação de suas derivadas parciais de primeira ordem, em que uma de suas representações é o gráfico da função que é determinado a partir de três eixos coordenados, correspondendo às duas variáveis independentes (x e y) e à variável dependente T .

2. Uso de livro didático e o estudo de funções de duas variáveis

Nossa pesquisa busca dar continuidade aos trabalhos realizados anteriormente por colegas que participaram do grupo “O Elementar e o Superior em Matemática” do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC – SP.

Esses colegas desenvolveram pesquisas sobre o uso do livro didático pelos alunos na apropriação de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, assim como sobre dificuldades evidenciadas na transição do estudo de funções de uma variável para o de duas variáveis.

Silva (2004) desenvolveu sua pesquisa analisando dois livros que abordam o conteúdo “Integral”, observando como neles, o tema é tratado tendo como fundamentação teórica os registros de representação semiótica de Duval. Este autor enfatiza que existe um grande número de desistências, assim como retenções dos alunos na disciplina de Cálculo. Visto dessa forma, o autor indica que o livro pode ser um grande aliado, tanto para o aluno quanto para o professor, desde que apresente o conteúdo de forma a favorecer esse aprendizado.

A formação do professor também é citada na pesquisa de Silva (2004), em que indica que ela é preponderante para o exercício docente, visto que é por meio de sua prática docente que os alunos construirão seus conhecimentos.

Dada a influência que os livros didáticos exercem no processo escolar, eles poderiam (ou não) favorecer uma visão real do significado da Integral, mostrando a dinâmica de sua estrutura e a história dos seus sujeitos e objetos. Contudo, para que os resultados das atividades realizadas em sala de aula se aproximem da Ciência e possam propiciar ao aluno uma visão mais autêntica, é preciso que o professor domine toda essa complexidade (SILVA, 2004, p.16).

Em sua análise, Silva (2004) indica que os autores dos livros utilizam formas diferentes de apresentar a Integral. Um deles (Guidorizzi) apresenta o conteúdo de forma mais técnica, enquanto que o outro (Stewart) busca introduzir o assunto utilizando registros gráficos e simbólicos, para chegar à definição posteriormente.

Silva (2004) deixa claro em sua pesquisa que não tem a intenção de avaliar a qualidade didática dos livros analisados e sim fazer comparações entre eles, indicando pontos fortes e fracos de cada um, suas diferenças e semelhanças, buscando orientar o leitor desses livros na sua utilização.

Mesmo com a utilização da tecnologia, o livro representa uma ferramenta de grande importância para a construção do conhecimento do aluno e auxílio ao professor em sua prática docente. Este autor conclui que, para uma possível melhora no aprendizado do conteúdo sobre Integral, o trabalho docente deve procurar ser contextualizado e significativo, “utilizando o livro didático como uma ferramenta viva e transformando o aluno em um agente ativo de sua aprendizagem” (Silva, 2004, p. 145).

No trabalho realizado por Hsia (2006), sobre a utilização do livro didático pelo aluno na aquisição de conhecimentos sobre Integral, a autora aponta que existe um grande interesse do aluno pelo livro texto e que sua utilização pode ocorrer como leitura preliminar sobre o tópico a ser desenvolvido em sala de aula, sendo uma alternativa à apresentação do conteúdo por meio de aula expositiva.

Os sujeitos da pesquisa desenvolvida pela autora eram alunos do segundo e quinto semestres de um curso de matemática de uma faculdade particular do Estado de São Paulo, sendo que aqueles que estavam no segundo semestre não haviam ainda tido contato com o conceito Integral, ao passo que os pertencentes ao quinto semestre já tinham estudado este tópico. A autora pode assim comparar as estratégias utilizadas por cada grupo na resolução das questões propostas, buscando detectar diferenças sobre a utilização do livro, na aquisição dos conhecimentos sobre o tema abordado.

A autora pode observar, nos protocolos dos estudantes, que foram utilizados registros na língua natural, assim como o registro algébrico, porém o que apresentou maior ocorrência foi o registro gráfico. Constatou também que os alunos têm grande dificuldade em entender o que lêem, o que pode conduzir a apresentarem concepções não condizentes com os conceitos, como são aceitos pela comunidade matemática. Esta situação se explica, segundo Hsia, pelo fato de que ler um texto matemático assim como fazer um esquema para apresentar as ideias principais sobre aquilo que foi lido são tarefas às quais os alunos não estão habituados.

Segundo Hsia, os alunos viram de forma positiva o uso do livro em sala de aula, tendo como tarefa inicial a leitura do tópico a ser estudado e posterior discussão pelo grupo, junto com professor, que faria os esclarecimentos das possíveis dificuldades encontradas na leitura.

De acordo com sua observação, a autora cita que não houve diferenças substanciais entre as produções dos dois grupos de estudantes, indicando que não há grande diferença entre suas bases teóricas, necessárias para responder às questões propostas e que o livro forneceu as informações necessárias para isso.

O objeto matemático da nossa pesquisa é Derivadas Parciais de Funções de Duas Variáveis. Assim, torna-se importante citar a pesquisa de Imafuku (2008) que tratou sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis.

Nesse trabalho, Imafuku (2008) busca verificar as dificuldades e saberes que alunos do ensino superior apresentam nesta transição, no que diz respeito às variáveis da função, seu domínio e gráfico, assim como as derivadas parciais de primeira ordem.

O autor indica que alunos que não apresentaram grandes dificuldades no estudo de funções de uma variável, passaram a tê-las no estudo de funções de duas variáveis, implicando no não entendimento dos conceitos de outros objetos matemáticos que envolvem funções de mais de uma variável e dificultando o processo de aprendizagem desses alunos.

Para buscar algumas respostas que esclarecessem as questões de sua pesquisa, Imafuku (2008) aplicou dois questionários a alunos de quarto e quinto semestres de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade particular do Estado de São Paulo, alunos esses que já haviam feito estudos sobre funções de uma e duas variáveis.

Em seu trabalho, o autor constatou que alunos não classificam uma função de acordo com o número de variáveis independentes, podendo levar à uma confusão na representação gráfica entre o sistema que envolve dois eixos (R^2) e o sistema que envolve 3 eixos (R^3).

Imafuku (2008) produziu seus questionários fundamentados na Teria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, com os quais constatou que os alunos encontram dificuldades para fazer a conversão da representação de um objeto matemático que se encontra no registro da língua natural para o registro algébrico. Essa dificuldade pode ser justificada, segundo o autor, pelo fato de não ser usual a prática de se fazer conversões de registros no estudo das disciplinas de Cálculo Diferencial.

São apontadas, pelo autor, dificuldades com relação a funções de duas variáveis, em que os alunos confundem sua representação gráfica com seu domínio. Apresentam também dificuldades em determinar em que conjunto está inserido este domínio.

É cerne da nossa pesquisa o objeto matemático Derivadas Parciais que Imafuku também explorou em sua pesquisa, percebendo dificuldades na interpretação gráfica desse objeto.

Notamos que a não compreensão do gráfico da função é uma das manifestações que surgem ao se estudar as derivadas parciais, pois os alunos não interpretam em outro registro o que realizam no algébrico, fato que pode ocorrer devido a importância dada, por professores, às técnicas para determinar as derivadas no registro algébrico, dando pouca ênfase na interpretação de seu significado (IMAFUKU, 2008, p. 158).

O autor, após verificar algumas dificuldades que alunos apresentam na apropriação de conceitos que envolvem funções de duas variáveis, indica que o uso de registros de representação semiótica, pode ser de grande relevância para o processo de compreensão de conteúdos ligados ao Cálculo, propondo atividades que enfatizem a conversão entre registros de representação do objeto matemático estudado.

Assim, com vistas em pesquisas que abordam as dificuldades dos alunos em se apropriarem de conteúdos ligados ao Cálculo, pretendemos com a nossa, obter informações sobre o uso do livro didático pelo aluno.

Faremos uma análise de como os alunos manipulam o livro didático e quais contribuições significativas esse manuseio traz para a aprendizagem do tópico sobre Derivadas Parciais.

Buscamos expor neste capítulo a problemática que envolve nossa pesquisa, assim como algumas considerações apontadas por outros autores em seus trabalhos. No próximo capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica e procedimentos metodológicos que nortearão nosso trabalho. Descreveremos, de forma simplificada, como é apresentado no livro o conteúdo sobre derivadas parciais, assim como os alunos envolvidos em nossa pesquisa e a instituição em que estudam.

CAPÍTULO II

Embasamento Teórico-metodológico

Neste capítulo, exporemos noções sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, em que nos basearemos para fazer uma análise qualitativa dos protocolos produzidos pelos alunos que participaram de nossa pesquisa. Faremos também uma breve descrição de como o assunto Derivadas Parciais é tratado no livro, indicando algumas partes que entendemos como importantes. No final do capítulo são descritos os alunos e a instituição em que estudam.

1. Fundamentação Teórica

Sendo o livro uma ferramenta que pode auxiliar o professor no processo de ensino devido às suas várias características como material didático-pedagógico, podemos destacar a forma como os assuntos são tratados e apresentados em seu conteúdo.

Assim, nossa pesquisa será fundamentada na teoria “Registros de Representação Semiótica” de Raymond Duval, que trata das articulações entre as representações de objetos matemáticos e os aspectos cognitivos envolvidos na aquisição do conhecimento pelos alunos.

A maneira de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações (MACHADO, S. D. A. 2003, p. 8).

Antes de apresentar alguns princípios da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, buscaremos abordar brevemente aspectos sobre semiótica.

O vocábulo semiótica tem sua origem na palavra semeion, de raiz grega, que quer dizer signo. Este signo a que se refere a palavra semeion indica a comunicação por meio de linguagem.

Uma forma de linguagem é a própria língua nativa, mas essa não é a única que utilizamos para nos comunicar. Existe uma infinidade de formas de nos comunicar e essa comunicação pode ocorrer por meio de imagens, gráficos, números, sons, luzes, cheiros, formas, entre outras. Assim a linguagem permite uma gama intrincada de formas de comunicação e de significação.

Estamos inseridos num mundo e nos comunicamos com ele por meio dos signos.

A Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido (SANTAELLA, 2006, p.13).

Segundo Santaella (2006), o signo é utilizado para representar, pelo menos em parte, algum objeto. Porém, essa correspondência entre signo e objeto se dá na mente interpretadora por meio de um outro signo que simboliza e traduz o significado do signo inicial. Dessa forma, são utilizados dois signos para intermediar a percepção do objeto pela mente interpretadora, o primeiro que se relaciona diretamente com o objeto e o segundo criado pela mente para traduzir o significado do primeiro.

Ora, o signo só pode representar seu objeto para um intérprete, e porque representa seu objeto, produz na mente desse intérprete alguma outra coisa (um signo ou quase-signo) que também está relacionada ao objeto não diretamente, mas pela mediação do signo (SANTAELLA, 2006, p. 58).

Historicamente, o desenvolvimento da matemática está diretamente ligado ao desenvolvimento das representações semióticas de seus objetos, que por sua vez oferecem condições para a evolução do pensamento matemático. Isso ocorre devido ao fato de ser possível fazer um tratamento matemático à esses objetos, acessando-os por meio de suas representações.

A dificuldade de entender esses processos está inserida na complexidade de seus objetos, pois estes só são acessíveis por suas representações, que Duval (2003) dividiu em quatro grandes grupos e chamou de registros; a língua natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas.

Tabela1: Registros de representação semiótica.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> ▪ argumentação a partir de observações, de crenças...; ▪ deduções válidas a partir de definição ou teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensões 0, 1, 2 ou 3): <ul style="list-style-type: none"> ▪ apreensão operatória e não somente perceptiva; ▪ construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> ▪ numéricas (binária, decimal, fracionária...); ▪ algébricas; ▪ simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos: <ul style="list-style-type: none"> ▪ mudanças de sistemas de coordenadas; ▪ interpolação, extrapolação.

Fonte: (DUVAL, 2003, in: MACHADO, S.D.A (Org), p. 14)

Segundo o autor, a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ou a troca constante entre registros, pode possibilitar a compreensão do objeto matemático em estudo, pois essa conversão não é somente uma mudança na forma de representar esse objeto, mas de tornar explícitos aspectos e propriedades que são acessíveis por meio de registros de representação diferentes. Isso também contribui para que o objeto matemático não seja confundido com sua representação, situação que pode ocorrer se utilizado apenas um tipo de registro no estudo de um objeto matemático.

As representações semióticas podem ser transformadas sob a perspectiva da aprendizagem, na atividade matemática. De acordo com a teoria de Duval, existem dois tipos de transformações bem distintas: as transformações de tratamento e as transformações de conversão.

As transformações que ocorrem no mesmo sistema, denominam-se tratamento, que implica em procedimentos de justificação (demonstração) e são internas ao registro.

Para cada registro existem regras próprias para as transformações de tratamento. Assim, registros diferentes do mesmo objeto matemático envolvem tratamentos diferentes, com graus de dificuldades diferentes para a apropriação de suas propriedades.

A transformação chamada de conversão é aquela em que ocorre uma mudança de registro de representação, porém conservando-se em parte ou totalidade a referência ao mesmo objeto. É nessa transformação de conversão que ocorre a coordenação dos registros de representação mobilizados no processo de apropriação de conceitos ou propriedades do objeto matemático em estudo.

Podemos citar como exemplo para esta situação o que segue:

Dadas as funções: $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$, desejamos determinar quais são os valores de x que as duas funções apresentam a mesma imagem.

Se pensarmos no registro gráfico, isso corresponde a encontrar os pontos de intersecção entre as curvas que representam cada função.

Para solucionar esta questão, podemos recorrer ao tratamento no registro algébrico, fazendo: $f(x) = g(x)$ que implica em $x^2 = x + 2$, em que obtemos uma equação do segundo grau, cujas raízes são 2 e -1 .

Assim, podemos fazer:

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 \text{ e } g(-1) = -1 + 2 = 1$$

$$f(2) = 2^2 = 4 \text{ e } g(2) = 2 + 2 = 4$$

Essas raízes indicam que as funções apresentam a seguinte particularidade:

$$f(-1) = g(-1) = 1 \text{ e } f(2) = g(2) = 4.$$

As funções f e g podem sofrer uma transformação de conversão para o registro gráfico, tornando possível a percepção de propriedades que não são tão evidentes no registro algébrico.

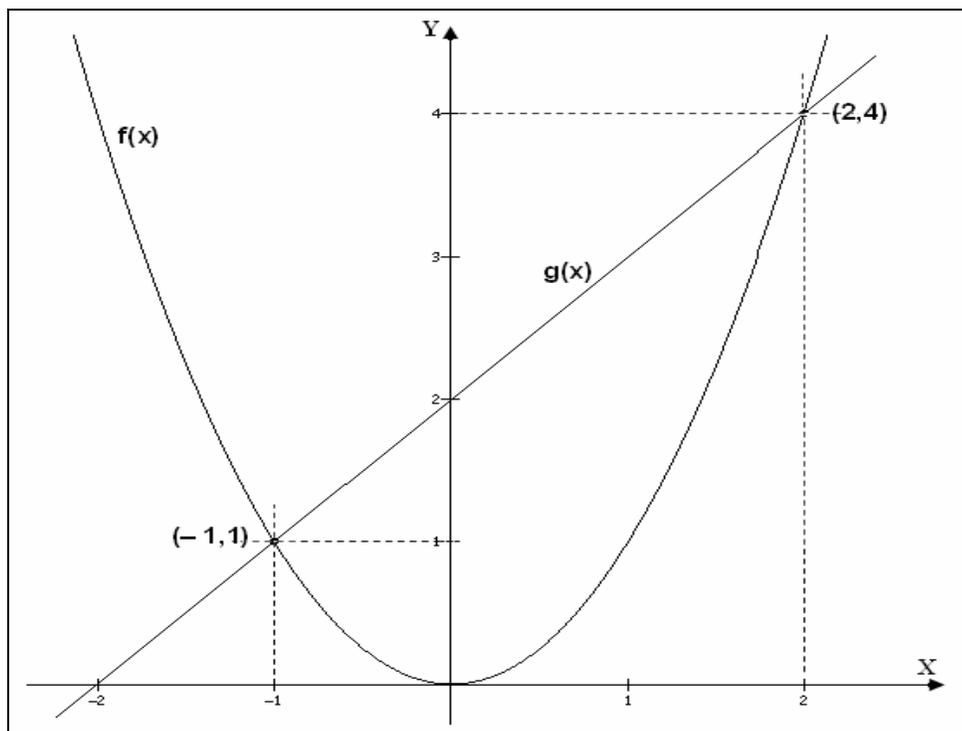


Figura 1. Registro gráfico de f e g.

Por meio desta representação, podem ser determinadas as intersecções dos gráficos das funções.

Na conversão é oferecida a possibilidade de se escolher o registro de representação em que o tratamento será executado, que em geral é buscado aquele dito mais “econômico” e/ou mais “potente” (Duval, 2003, p. 16, in: Machado, 2003), que no caso foi escolhido o registro algébrico.

Aproveitando o exemplo citado, podemos converter as representações das funções f e g do registro algébrico para o registro numérico (este apresentando alguns valores apenas). Estes valores podem ser obtidos a partir do registro algébrico e apresentados numa tabela.

Tabela 2. Registro numérico de f e g.

$F(x) = x^2$	$g(x) = x + 2$
$f(-1) = 1$	$g(-1) = 1$
$f(0) = 0$	$g(0) = 2$
$f(1) = 1$	$g(1) = 3$
$f(2) = 4$	$g(2) = 4$
$f(3) = 9$	$g(3) = 5$

Por meio dos valores calculados, podemos perceber que $f(-1) = 1$ e $g(-1) = 1$ e também $f(2) = 4$ e $g(2) = 4$, assim determinamos que para os valores de $x = -1$ e $x = 2$ as funções apresentam a mesma imagem (1 e 4, respectivamente), indicando as intersecções de seus gráficos.

Na transformação de tratamento ocorrem os processos matemáticos, ficando muitas vezes a transformação de conversão em segundo plano, pois de um modo geral, as provas e demonstrações são feitas por meio do tratamento de alguma forma de representação do objeto matemático em questão. De acordo com Duval (2003), a conversão é a transformação que oferece suporte à compreensão.

Mas, do ponto de vista cognitivo, a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2003, in: MACHADO, S.D.A (org), p.16).

Assim, a complementaridade e a coordenação entre vários registros de representação de um objeto matemático possibilitam estabelecer uma apropriação de suas propriedades, pois para cada uma delas, é possível perceber propriedades diferentes, próprias de cada representação.

Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essa especificidade a cada registro e reforçá-las é um caminho para o entendimento do objeto como um todo (DAMM, R.F. 2008, in: MACHADO, S.D.A (org), p.185).

Para Duval (2003) é necessário, porém não suficiente, que sejam mobilizados pelo menos dois registros para que haja a apropriação das propriedades de um objeto matemático. Daí a pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto que a matemática apresenta, cada um com suas características, oferecendo uma visão mais ampla e complementar do objeto em estudo.

2. Procedimentos metodológicos

Para investigar como o aluno manipula o livro didático e quais contribuições significativas que esse manuseio traz para a apropriação das informações contidas no tópico sobre Derivadas Parciais, faremos uma análise qualitativa dos resultados obtidos de um questionário proposto à alunos de graduação que estão em momentos diferentes do mesmo curso (um grupo é formado por alunos que cursam o segundo semestre e outro cursa o quinto semestre), buscando com isso comparar e verificar se existem diferenças significativas nas respostas por eles oferecidas.

O instrumento de pesquisa é composto por seis questões que contemplam aspectos teóricos relativos à Derivadas Parciais, assim como a resolução de exercícios, aplicando os possíveis conhecimentos adquiridos com a manipulação do livro didático.

Para a aplicação do questionário, fizemos visitas à instituição em que os alunos estudam, a fim de criar condições para a coleta de dados que pretendíamos fazer. Para a aplicação do questionário disponibilizamos exemplares do livro didático escolhido por nós para esta pesquisa.

A aplicação consistiu em distribuir para cada dupla, apenas um exemplar do livro didático e também as folhas contendo as questões. As duplas se formaram aleatoriamente e foram identificadas por meio de um número anotado na folha do questionário, em lugar próprio.

Para a resolução das questões não foi oferecido nenhum tipo de informação que explicasse ou esclarecesse dúvidas relativas a informações que constavam no livro didático, pois é justamente a forma desta busca pela informação que estamos interessados em analisar.

Pretendendo observar o comportamento dos alunos, na busca das soluções das questões, formulamos, a priori, alguns itens a serem identificados no ato da produção dos protocolos. Para essa coleta de dados, dois observadores participaram de cada sessão portando uma folha contendo estes itens a serem assinalados. É claro para nós que nem todas as situações podem ser previstas, assim, foi disponibilizado no formulário um espaço para que os observadores pudessem utilizar para fazer os registros dessas ocorrências.

Nosso trabalho enquadra-se no tipo de pesquisa qualitativa, pois estamos interessados em fazer uma investigação descritiva dos dados, procurando desvendar alguns mecanismos e significados ocultos inseridos nas resoluções, que podem nos oferecer pistas para responder a nossa questão de pesquisa.

O qualitativo engloba a idéia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho, etc. (BICUDO, in: BORBA, M.C. ARAÚJO, J.L. (org), 2006 p.106).

Também chamada de pesquisa naturalista, a pesquisa qualitativa surge no final do século XIX tornando evidentes trabalhos no campo das ciências sociais, com ênfase na psicanálise (D'AMBRÓSIO, in: BORBA, M.C. ARAÚJO, J.L. (Org), 2006 prefácio). Busca interpretar dados e discursos, por meio de uma decodificação de um sistema complexo de significados, com o objetivo de traduzir e expressar fenômenos do mundo social, reduzindo, assim a distância entre o pesquisador e o pesquisado.

Bogdan e Biklen (1994) indicam que uma pesquisa qualitativa, entre outras características, tem como objetivos possibilitar a compreensão do comportamento das experiências humanas, bem como buscar descrever como as pessoas constroem, de forma subjetiva, os significados de suas práticas cotidianas. A compreensão desses processos pode contribuir para a melhoria, no caso da nossa pesquisa, da aprendizagem, por meio de alterações da prática docente.

A abordagem qualitativa busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno ou contexto sociocultural. (FIORENTINI, 2006, p. 110).

De acordo com Fiorentini (2006), podemos classificar nossa pesquisa como “estudo de caso”, em que buscamos analisar com certa profundidade os dados obtidos em campo, de forma a permitir um detalhamento do processo subjetivo de resolução das questões propostas.

No estudo de caso é enfatizada a interpretação e análise do objeto onde ele ocorre, com o objetivo de retratar a situação próxima de seu acontecer natural, numa perspectiva descritiva, para compreender as ações, comportamentos e interações dos alunos envolvidos na pesquisa.

A análise de conteúdo busca investigar e interpretar informações que estão implícitas numa dada forma de comunicação, seja ela escrita ou falada. Busca uma compreensão do conteúdo que vai além da forma imediata e espontânea, se caracterizando, essencialmente pela forma interpretativa. (Fiorentini, 2006, p. 137). Esta análise é feita no material produzido pelos alunos, num processo de decodificação das informações ali contidas, procurando estabelecer relações acerca do objeto em estudo.

Por se tratar de dados simbólicos, eles podem ser vistos sob inúmeros ângulos e pontos de vista, dando margem a interpretações distintas. É o que apontam Laville e Dionne (1999).

A análise de conteúdo não é, contudo, um método rígido, no sentido de uma receita com etapas bem circunscritas que basta em transpor em uma ordem determinada para ver surgirem belas conclusões. Ela constitui, antes, um conjunto de vias possíveis nem sempre claramente balizadas, para a revelação – alguns diriam reconstrução – do sentido de um conteúdo (LAVILLE e DIONNE 1999, p.216).

Três formas ou estratégias são destacadas por Laville e Dionne (1999, p.227) para a análise e interpretação dos dados dentro do modelo qualitativo.

- Emparelhamento: consiste em comparar os dados produzidos com um modelo teórico, verificando a correspondência entre a situação observada na pesquisa com o modelo proposto, apoiado numa teoria.
- Análise histórica: tem como característica comum a forma anterior de se apoiar num quadro teórico para propor um roteiro sobre a evolução de um fenômeno ou situação que esteja em estudo, propondo uma previsão que será colocada à prova por meio dos dados colhidos.

- Construção iterativa de uma explicação: é elaborada paulatinamente uma explicação lógica do conteúdo produzido pelos alunos. Para isso são interpretados os dados de maneira exploratória, num processo que progride por aproximações sucessivas, buscando indícios que podem colaborar com resposta à questão de pesquisa ou que apresente uma nova perspectiva sobre o assunto.

Utilizaremos esta última estratégia apresentada, pois vai ao encontro das perspectivas de nossa pesquisa, dado seu caráter exploratório na busca de interpretar e refletir sobre as contribuições que o livro traz para o aprendizado do aluno sobre derivadas parciais.

2.1 – As escolhas

O livro

A fim de responder nossa questão de pergunta, escolhemos o livro: Cálculo, de James Stewart (2003, 4ª edição), pois apresenta variadas formas de representação do objeto matemático tratado, tendo relativa correspondência com a teoria de Duval, no que se refere aos registros de representação semiótica, auxiliando-nos na análise dos dados obtidos junto aos alunos.

A obra, editada por Pioneira Thomson Learning em São Paulo (2003), quarta edição, é composta de dois volumes e encontra-se no volume 2 o conteúdo: Derivadas Parciais, objeto de nossa pesquisa. Este conteúdo faz parte do estudo de funções com mais de uma variável, podendo então, o nosso trabalho trazer contribuições às pesquisas realizadas anteriormente sobre este tipo de função. Restringiremo-nos a funções de duas variáveis.

No prefácio, o autor do livro indica que o produziu buscando contemplar a aprendizagem do aluno por meio da descoberta, na tentativa de apresentar-lhe um sentido de utilidade do Cálculo, enfatizando a compreensão dos conceitos. Para isso, usa como um dos recursos, exercícios ligados ao mundo real.

Outro recurso utilizado é o que o autor chama de Projeto Aplicado. Consiste na proposta de um problema ligado ao cotidiano cuja solução se dá por meio da aplicação do objeto matemático estudado no tópico. Em cada Projeto Aplicado, o autor dá sugestões de como o problema pode ser resolvido, apresentando caminhos que possam levar o aluno a se envolver com o assunto, desenvolvendo sua criatividade e habilidade matemática.

Para o tópico sobre Derivadas Parciais, é proposto o projeto de construção de uma caçamba para transporte de entulho, em que o autor indica os custos do material e da mão-de-obra para a sua execução. Com o intuito de minimizar os custos de fabricação e maximizar o material transportado pela caçamba, o autor propõe ao aluno que busque uma solução para o problema, supondo ser, o aluno, contratado para projetar esta caçamba.

O livro foi produzido tendo como público alvo estudantes norte-americanos que talvez tenham maior acesso à tecnologia, se comparados com os estudantes brasileiros. Assim o autor propõe como terceiro recurso esse uso, indicando que, por meio da tecnologia, o acesso à compreensão de alguns conceitos torna-se mais claro.

A tecnologia a que o autor se refere se dá pelo uso de calculadoras gráficas e computadores e por meio de programas específicos (Derive, Maple entre outros). Porém, indica que o livro pode ser utilizado com ou sem essa tecnologia.

Atualmente, a tecnologia não torna obsoletos o lápis e o papel. Cálculos à mão e esboços são frequentemente preferíveis à tecnologia para ilustrar e reforçar alguns conceitos. Professores e estudantes precisam desenvolver a habilidade para decidir quando é apropriado a máquina ou a mão (STEWART, 2003, prefácio).

O livro traz nove capítulos (do 9 ao 17) que complementam o volume 1. O objeto de nosso estudo encontra-se no capítulo 14, que tem como título Derivadas Parciais. Este capítulo é dividido em oito tópicos e o assunto sobre Derivadas Parciais é efetivamente tratado no tópico 14.3.

O livro tem seu conteúdo direcionado para que o aluno adquira gradativamente os conhecimentos necessários para cada tópico subsequente. Assim, o capítulo 14 é iniciado com uma abordagem sobre funções de várias variáveis (tópico 14.1), segue-se uma abordagem sobre limites e continuidade (tópico 14.2) de funções de duas variáveis que se estende depois para funções de mais de duas variáveis, chegando então ao tópico (14.3) sobre Derivadas Parciais.

No início do tópico sobre funções de várias variáveis são dados exemplos que envolvem a utilização de funções de duas variáveis para expressar situações do cotidiano. Cita a relação que existe entre o volume (V) de um cilindro, sua altura (h) e seu raio (r), descrevendo que V é uma função de r e de h , introduzindo a notação $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Após isso, apresenta a definição de função de duas variáveis em língua natural, seguida de uma representação gráfica, fazendo assim, uma conversão entre os registros.

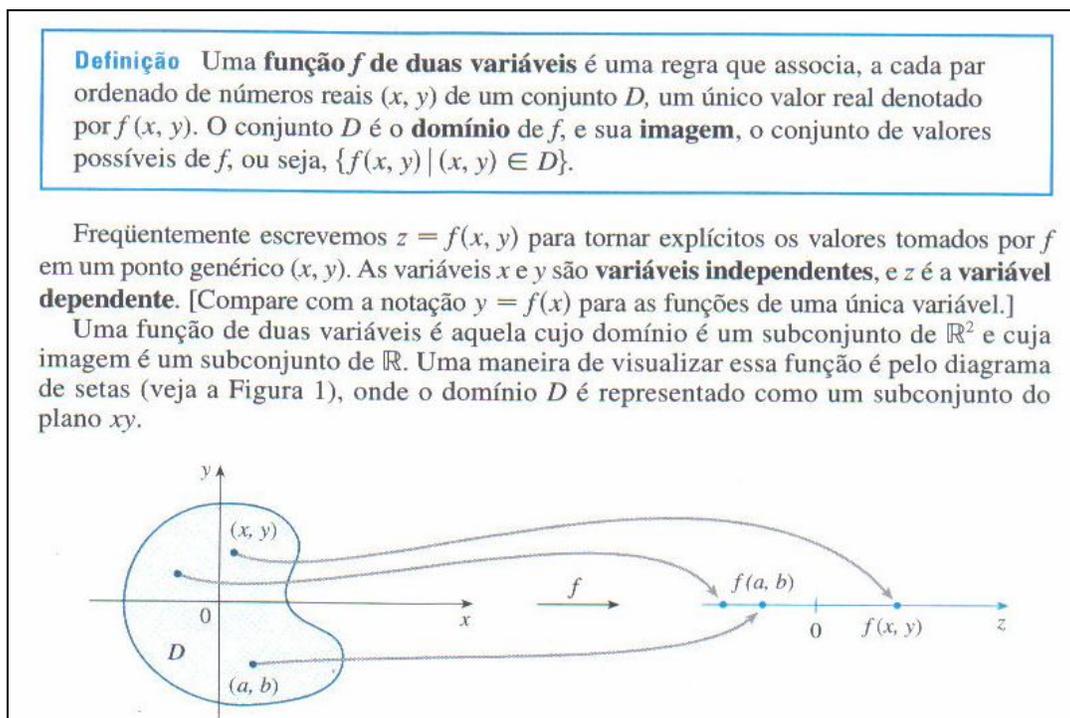


Figura 2. Definição de função de duas variáveis.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003, p. 873.

Seguem exemplos em que o autor apresenta a relação existente entre grandezas por meio de tabelas de valores (representação numérica), exemplos estes que fazem parte do cotidiano, procurando fazer com que os alunos percebam a existência de fenômenos no mundo real, que são “traduzidos” por tais funções, procurando despertar um maior interesse pelo assunto.

Destacamos uma representação de função por meio de tabela (representação numérica), observando que o autor utiliza a expressão “fórmula explícita” para se referir ao que Duval chama de registro algébrico.

Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas. A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimadores numéricos de seus valores.

EXEMPLO 2 □ Em regiões com inverno severo, o índice *sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da rapidez do vento v . Assim W é uma função de T e de v , e podemos escrever $W = f(T, v)$. A Tabela 1 apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e Serviço Meteorológico do Canadá.

TABELA 1 Índice sensação térmica como função da temperatura do ar e rapidez do vento

		Velocidade do vento (km/h)											
		5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	
Temperatura real (°C)	$v \backslash T$	5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10	
	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17	
	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24	
	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31	
	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38	
	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45	
	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52	
	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60	
	-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67	

Figura 3. Exemplo de representação numérica de uma função.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003, p. 874.

Trata-se da representação da sensação térmica em função da temperatura real e da velocidade do vento. Como exemplo, o autor propõe a determinação do valor da função dado que a temperatura é $-5\text{ }^\circ\text{C}$ e a velocidade do vento é 50 km/h , que corresponde à notação $f(-5,50)$. Buscando estes valores na tabela, encontra-se -15 , que representa a temperatura aparente se houvesse vento.

Percebemos que o autor procura explorar as representações dos objetos matemáticos e assim tornar mais propícia a aquisição dos conceitos discutidos.

Em sua pesquisa, Imafuku (2008) indica que os alunos confundem a representação gráfica de uma função com a representação gráfica de seu domínio. Isso ocorre, segundo o autor, pelo fato de que eles não relacionam o registro gráfico com o conceito de função em que cada elemento do domínio corresponde a uma única imagem. Aponta também que existe a confusão entre o domínio de uma função de duas variáveis com as curvas de nível correspondentes.

A determinação do domínio das funções de duas variáveis foi outra grande dificuldade que constatamos, pois nos protocolos apresentados notamos que muitos confundem o conceito de domínio com o de curva de nível e, também, que muitos não verificam onde o domínio da função está definido (IMAFUKU, 2008, p.157).

No livro que utilizamos em nossa pesquisa, o autor procura deixar claro o conceito de função e domínio D e função, apresentando sua definição em língua natural ao lado de sua representação gráfica, já fazendo uma conversão entre as representações pretendendo tornar evidentes detalhes que cada forma proporciona.

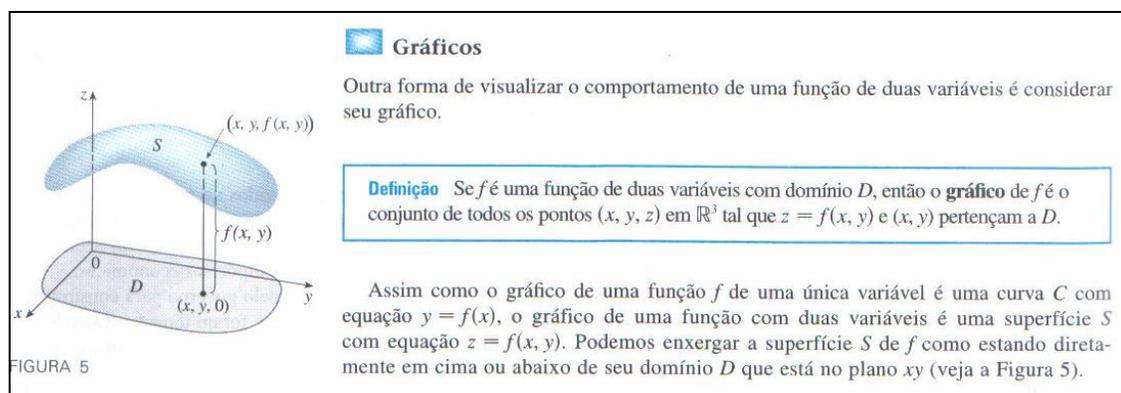


Figura 4. Representação gráfica e domínio de função.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003 p. 876.

Isso vai ao encontro da Teoria de Duval, que indica a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica para que ocorra uma compreensão matemática do objeto em estudo.

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação (DUVAL, 2003, p. 14, MACHADO, S.D.A. Org)

O conteúdo do livro segue sendo apresentado por meio da exploração das representações dos objetos matemáticos estudados, tais como curvas de nível e funções de três ou mais variáveis. Ao final desse tópico são propostos setenta e um exercícios que estão numa ordem crescente de dificuldade e resgatam conceitos do assunto tratado, assim como o tratamento de funções em suas representações algébricas e gráficas. As respostas dos exercícios de numeração ímpar são apresentadas no final no livro.

O tópico 14.2 aborda o conteúdo sobre Limites e Continuidade de funções de mais de uma variável, buscando dessa forma, proporcionar ao aluno a base teórica para poder compreender posteriormente o tópico sobre Derivadas Parciais.

O conteúdo desse tópico é iniciado por meio de exemplos de funções de duas variáveis nas suas representações algébrica e numérica (tabela de valores), proporcionando ao aluno um contato inicial com o tema a ser discutido, o que possibilita uma melhor compreensão do assunto tratado.

Após uma breve explanação sobre do que se trata o Limite de função de duas variáveis, é apresentada a definição no registro da língua natural, auxiliada pelo registro algébrico.

1 Definição* Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L** e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } (x, y) \in D \text{ e } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

Figura 5. Definição de Limite.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003 p. 888.

A definição é relativamente complexa, assim Stewart, em seu livro procura, por meio de figuras (representação gráfica), torná-la mais clara ao entendimento do aluno.

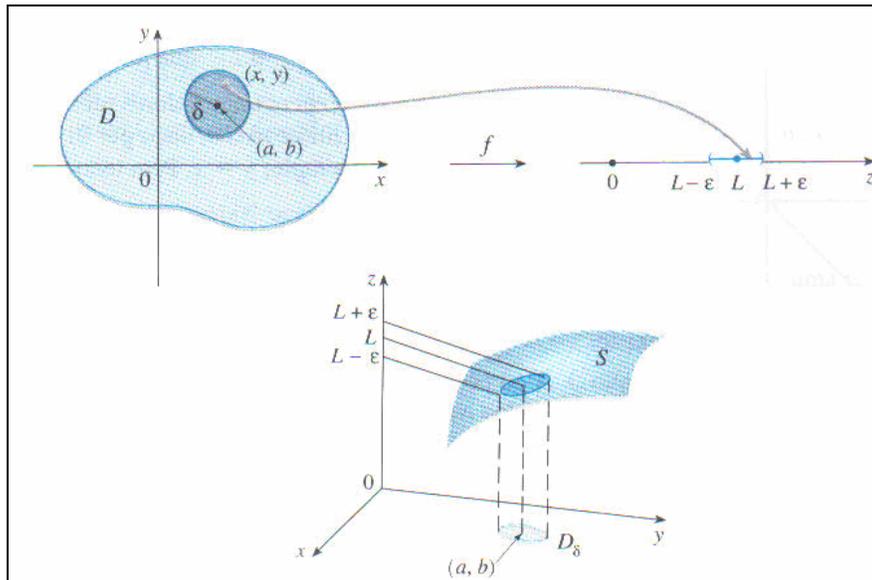


Figura 6. Representação gráfica de Limite.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003 p. 889.

É dada sequência ao tópico por meio de exemplos de funções de duas variáveis na sua representação algébrica, auxiliada, em alguns casos pela sua representação gráfica, explorando e evidenciando propriedades que esta representação oferece.

Nesse mesmo tópico é tratada a Continuidade de funções de mais de uma variável, sendo que inicialmente é dada a definição para funções de duas variáveis. Essa definição é apresentada por meio do registro na língua natural, auxiliada por representações algébricas de funções.

Seguem exemplos que discutem a situação de continuidade de algumas funções e, entre eles, alguns exploram a representação gráfica da função em questão, detalhando, por meio da visualização da superfície, representante da função, propriedades que podem auxiliar a apropriação do conceito pelo aluno.

EXEMPLO 9 □ Onde a função $h(x, y) = \text{arctg}(y/x)$ é contínua?

SOLUÇÃO A função $f(x, y) = y/x$ é racional e, desse modo, contínua em todo lugar, exceto sobre a reta $x = 0$. A função $g(t) = \text{arctg } t$ é contínua em qualquer lugar. Logo, a função composta

$$g(f(x, y)) = \text{arctg}(y/x) = h(x, y)$$

é contínua, exceto onde $x = 0$. O desenho da Figura 9 mostra a ruptura existente no gráfico da função h acima do eixo y .

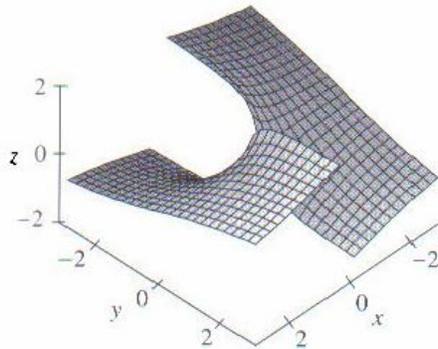


Figura 7. Exemplo de Continuidade.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003, p. 893

O conceito de continuidade para funções de duas variáveis é estendido para funções de três ou mais variáveis, não sendo esta, uma discussão que se alonga pelo tópico. Seguem então quarenta e dois exercícios que tratam do assunto visto no tópico, resgatando os conceitos estudados, por meio de exercícios que propiciam o tratamento de registros algébricos e gráficos.

Conceitos sobre Derivadas Parciais são discutidos no tópico 14.3, que é iniciado pela exploração de um exemplo em que é apresentada uma tabela de valores da umidade relativa do ar e a temperatura real no ambiente, em que a combinação de valores dessas duas variáveis implica no valor de uma grandeza que o autor chama de Índice de Calor.

Com este exemplo, o autor apresenta o conceito de Derivadas Parciais de funções de duas variáveis, indicando que para o cálculo de sua derivada relativa à uma variável, mantém-se fixa a outra variável, tornando evidente a variação da função quando uma das variáveis é fixada num dado valor.

Neste exemplo que inicia o t3pico, o c3lculo das Derivadas Parciais n3o 3 executado com algoritmos da defini33o de Derivada, pois a fun33o n3o est3 no seu registro alg3brico, e sim no num3rico, apresentando alguns valores para suas vari3veis dependente e independentes.

Ap3s as considera33es sobre o exemplo 3 apresentada a defini33o de Derivadas Parciais de fun33es de duas vari3veis, no registro alg3brico, assim como algumas not33es utilizadas na literatura sobre o assunto.

4 Se f 3 uma fun33o de duas vari3veis, suas **derivadas parciais** s3o as fun33es f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Not33o para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Figura 8. Defini33o de Derivadas Parciais e not33es.

Fonte: STEWART, J. C3lculo, volume II, 2003, p. 897.

3 apresentado um exemplo explorando as not33es, assim como o conceito de Derivadas Parciais de fun33es de duas vari3veis. A seguir 3 feita uma explica33o sobre seu significado geom3trico.

Neste ponto da apresenta33o do conte3do evidencia-se mais ainda a import3ncia da coordena33o dos registros de representa33o semi3tica, pois 3 por meio da convers3o do registro alg3brico para o registro gr3fico que alguns detalhes ou propriedades que n3o s3o t3o evidentes no registro alg3brico passam a ser no registro gr3fico, tendo como foco principal a compreens3o do conceito pelos alunos.

O autor faz uma explanação sobre o significado das Derivadas Parciais de funções de duas variáveis, auxiliado pela sua representação gráfica, oferecendo exemplos nessa representação.

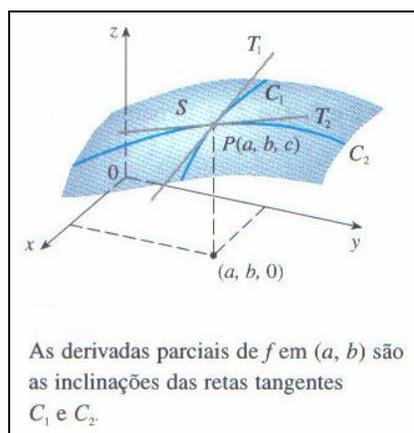


Figura 9. Representação gráfica de Derivadas Parciais de certa função f .

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003, p. 898.

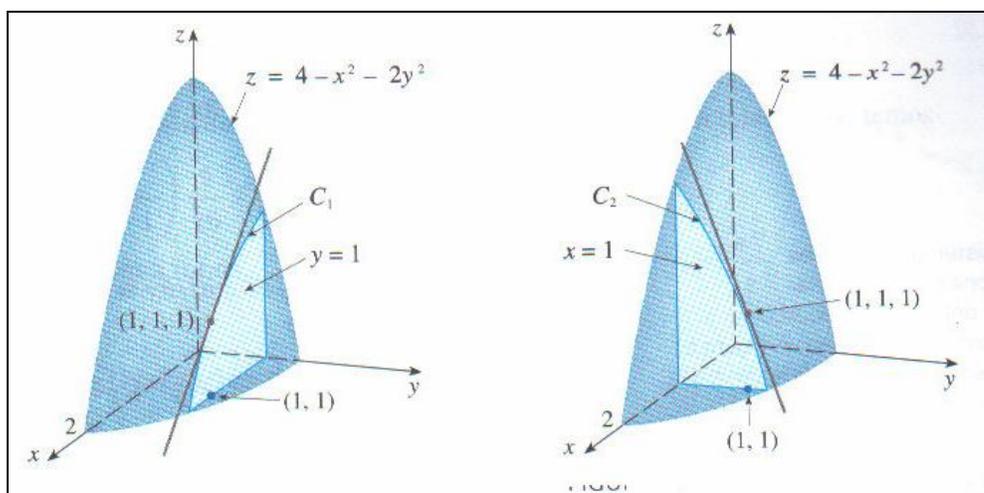


Figura 10. Planos verticais e retas tangentes.

Fonte: STEWART, J. Cálculo, volume II, 2003, p. 899.

Outros exemplos são apresentados, seguidos da extensão desse conceito para funções de mais de duas variáveis, assim como Derivadas Parciais de maior ordem, cuja análise foge do intuito desta pesquisa, mesmo considerando sua importância no Cálculo e na Matemática em geral.

O tópico é finalizado com a apresentação de noventa e um exercícios sobre os conceitos estudados, em que a prática do aluno concorre para a fixação de algumas idéias sobre esse objeto matemático. Em alguns exemplos é indicado o uso da tecnologia em sua resolução, devido à sua representação gráfica ser de grande auxílio na compreensão do conteúdo, que vai ao encontro da Teoria de Duval.

Buscamos assim, fazer uma singela descrição do livro utilizado em nossa pesquisa, no intuito de ressaltar os registros de representação semiótica nele utilizados, com o objetivo de verificar a manipulação do livro pelo aluno e quais contribuições essa prática pode trazer para seu aprendizado, levando em consideração a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Sujeitos e Instituição

Nossa pesquisa teve como público alvo alunos de uma faculdade particular da cidade de São Paulo. Esse público foi dividido em dois grupos, sendo que um deles cursava o segundo semestre e o outro cursava o quinto semestre, ambos do curso de engenharia mecânica, curso este oferecido pela instituição no período noturno. Estes alunos foram convidados a participar da pesquisa e suas contribuições deram-se de forma espontânea.

O grupo formado por alunos do segundo semestre, que chamaremos de **S** (sendo S1, S2, S3, S4, S5, duplas pertencentes a esse grupo), já havia cursado no primeiro semestre a disciplina de Cálculo I, tendo conhecimentos sobre derivadas de funções de uma variável, sendo que no segundo semestre estavam fazendo um estudo sobre integrais, também de funções de uma variável. Salientamos que apenas uma dupla deste grupo era composta de uma aluna e um aluno, sendo que as outras duplas eram formadas exclusivamente por alunos do gênero masculino.

O grupo formado por alunos do quinto semestre, que chamaremos de **Q** (sendo Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, duplas pertencentes a esse grupo), já havia cursado conteúdos do Cálculo que contemplavam Derivadas Parciais.

Dessa forma pretendemos também fazer uma análise comparativa entre as respostas oferecidas pelos grupos, pois os mesmos possuem graus diferentes de conhecimentos sobre Derivadas Parciais.

Neste capítulo procuramos fazer um breve relato do nosso embasamento teórico–metodológico, assim como uma apresentação de nossas escolhas. No próximo capítulo indicaremos nossas pretensões com o questionário aplicado aos alunos e uma breve descrição de sua aplicação.

CAPÍTULO III

O experimento

Neste capítulo apresentaremos as pretensões que temos com cada questão de nosso instrumento diagnóstico e também uma breve descrição da sua aplicação, buscando indícios que nos apontem como os alunos manipulam o livro didático para responder as questões propostas.

1. O instrumento

Nosso instrumento diagnóstico é constituído de seis questões, podendo ser dividido em duas partes, se observada a natureza das questões.

A primeira parte, constituída pelas questões de 1 à 3, tem como característica principal, a exploração do livro pelo aluno na busca por definições e noções a respeito de Derivadas Parciais, assim como uma descrição de como o autor trata desse conteúdo, visto pelo ângulo dos alunos.

Na segunda parte do instrumento diagnóstico, é proposta aos alunos a resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas Parciais, dando ênfase ao tratamento dos registros de representação semiótica. Nesta parte, buscamos saber quais contribuições o livro didático pode oferecer aos alunos na resolução, sendo priorizada a notação e a representação numérica (tabela de valores) de uma função de duas variáveis (questão 6).

A seguir, apresentamos as questões propostas aos alunos, assim como o que pretendemos inicialmente com cada uma delas. É claro para nós que após a análise de cada resposta oferecida pelos alunos, podem surgir situações não levantadas a priori, dada a ampla gama de respostas que podemos obter para cada uma delas.

1) Em qual(is) página(as) do livro o autor define derivadas parciais de funções de duas variáveis? (reproduza essa definição)

páginas						
----------------	--	--	--	--	--	--

Com esta questão, temos o intuito de analisar como o aluno manipula o livro didático, num primeiro contato. De que forma localiza um assunto no livro, folheando-o, recorrendo ao índice ou fazendo outro tipo de exploração. E também se o aluno não confunde exemplos que introduzem o conceito com a definição do mesmo.

2) Em qual trecho do livro a noção de derivadas parciais ficou clara para você? Se você fosse explicar essa noção a algum colega de seu curso, como procederia?

páginas						
----------------	--	--	--	--	--	--

Com esta questão, novamente pretendemos observar a manipulação do livro pelo aluno, na busca por informações que dão conta de responder a questão e de acordo com a fundamentação teórica de Duval, quais os registros de representação o aluno vai utilizar para expressar suas ideias, se prioriza algum deles e se faz alguma conversão de registros.

Nosso intuito não é que os alunos apresentem uma definição formal sobre Derivadas Parciais, valorizando suas habilidades matemáticas. Estamos interessados em qual registro de representação semiótica eles indicarão como fundamental para a compreensão das noções sobre nosso tema.

Tendo a indicação de quais páginas do livro foram utilizadas pelos alunos para responderem esta questão, podemos associar a resposta oferecida, com os conteúdos destas páginas, buscando indícios que nos apontem em quais informações os alunos se apóiam para dar conta de respondê-la, se nas informações trazidas nos exemplos ou nas definições.

3) Descreva como o autor do livro apresenta o conteúdo Derivadas Parciais.

Com esta questão queremos verificar se o aluno interpreta os registros de representação semiótica utilizados pelo autor para a exposição do conteúdo, explorando as informações que cada um traz especificamente, não os confundindo com exemplos.

Queremos também verificar se o aluno leva em consideração assuntos tratados no início do capítulo que introduzem o conteúdo sobre Derivadas Parciais, e se os mesmos fazem referência aos registros utilizados pelo autor.

4) Escolha um exercício sobre derivadas parciais proposto no livro, resolva-o e indique as páginas consultadas. Por quais motivos você o escolheu?

páginas						
----------------	--	--	--	--	--	--

Com esta questão buscamos verificar que tipo de exercício os alunos se sentem seguros em resolver sendo auxiliados pelas informações contidas no livro.

Dado que existem exercícios propostos em diferentes registros de representação, buscamos verificar se os alunos priorizam algum deles, e também quais conhecimentos mobilizam para resolvê-los.

Após escolher o exercício, queremos investigar como os alunos manipulam o livro na busca de informações que poderão auxiliá-los na resolução.

5) Dada a função $f(x,y) = (6 - x)^2 + (5 - y)^2 + xy$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}(5,3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4,2)$.

Quais páginas do livro que você consultou para responder esta questão? Indique a principal.

páginas						
principal						

Com a resolução desta questão pelos alunos e as páginas indicadas na consulta, buscamos saber quais recursos eles utilizam para respondê-la e qual informação lhes parece fundamental para essa resolução.

Dado que o livro apresenta formas diferentes para a notação de Derivadas Parciais, queremos investigar se os alunos as interpretam de forma correta, indicando que o livro contribuiu para que eles se apropriassem desse conhecimento.

Queremos também investigar a forma com que os alunos irão solucionar a questão, se utilizarão a regra da cadeia ou se farão algum tratamento no registro algébrico da função antes de aplicar os conceitos de Derivadas Parciais.

Salientamos que não é interesse desta pesquisa verificar se os alunos resolverão a questão de forma correta, estamos interessados nos meios que eles utilizarão para respondê-la e se priorizam algum registro de representação semiótica, de acordo com a teoria de Duval.

6) Use a tabela de valores de $f(x,y)$ para estimar o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)$. Indique as páginas do livro que utilizou para resolver esta questão.

páginas

$x \backslash y$	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

Dado que a representação de alguns pontos da função está na forma de registro numérico (tabela), o que não acontece corriqueiramente, pois as funções são apresentadas, de modo geral, na sua representação algébrica, queremos investigar como os alunos buscam, no livro, as informações necessárias para a sua resolução. De acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, os alunos devem manipular pelo menos duas representações do objeto em estudo para que eles se apropriem das informações ali contidas. Essa manipulação também oferece meios para eles não confundirem o objeto com sua representação. Dessa forma, queremos investigar se o livro contribui para essa apropriação, visto que o autor apresenta o conteúdo do livro utilizando diferentes registros de representação para os objetos matemáticos.

Para a resolução dessa questão, os alunos não podem fazer a aplicação da definição de Limites, devido ao tipo de registro utilizado (tabela). A aplicação de Limites, na função, é possível na situação em que o registro está na forma algébrica. Assim queremos investigar se o livro é um facilitador na resolução da questão, oferecendo suporte de informações que conduzem os alunos à solução da questão, visto que não se trata de uma questão convencional ou tratada comumente.

2. A aplicação

Por meio da aplicação das mesmas questões e análise dos protocolos produzidos pelos dois grupos que se caracterizam em ter estudado o conteúdo sobre Derivadas Parciais (Q) ou não (S), juntamente com o confronto das respostas dadas pelos alunos, levando em consideração o grupo ao qual eles pertencem, buscamos informações que indiquem a forma como eles manipulam o livro didático e quais contribuições esse manuseio traz para o processo de ensino e aprendizagem.

Cada grupo era constituído por dez alunos, que desenvolveu as resoluções das questões propostas em duplas, formadas espontaneamente. Foram analisados então, os protocolos de vinte alunos.

Os dados produzidos pelo grupo S (alunos que cursavam o segundo semestre), foram coletados na própria instituição de ensino, em horário normal de aula. Este espaço foi cedido por um professor de outra disciplina que nos auxiliou na observação dos alunos durante a resolução das questões propostas. O tempo oferecido para a resolução das questões foi de duas aulas, que compreende uma hora e quarenta minutos.

Os alunos desta turma que não participaram da nossa pesquisa estavam no mesmo ambiente desenvolvendo atividades da disciplina correspondente à aula. As duplas participantes de nossa pesquisa não se sentaram separadas do restante da turma, elas se sentaram aleatoriamente pela sala de aula, pois acreditamos que dessa forma os alunos participantes ficariam mais à vontade para desenvolver as questões propostas.

Neste grupo (S), o procedimento foi de fornecer às duplas o livro, juntamente com as folhas que continham as questões de 1 a 3 e após o término desta é que foi fornecida a folha com as questões de 4 a 6, procurando assim, tornar o desenvolvimento da aplicação mais organizado, facilitando também a observação.

Para a aplicação do instrumento diagnóstico no grupo Q (alunos que cursavam o quinto semestre), não foi possível o uso do período de aula, sendo então utilizado um período anterior ao seu início, dividindo-se a aplicação em dois encontros de uma hora cada, sendo que no primeiro foram trabalhadas as questões de 1 a 3 e no segundo encontro, as questões de 4 a 6.

Nos dois encontros que tivemos com o grupo Q, para a produção dos protocolos, foram mantidas as mesmas duplas, visando, assim, tornar mais similar com o que ocorreu na aplicação do instrumento no grupo S, para uma posterior comparação entre os protocolos dos dois grupos sem ter como variável a troca dos componentes das duplas.

Nas aplicações (tanto para o grupo S, quanto para o grupo Q) pedimos aos alunos que utilizassem apenas caneta na resolução das questões, pois deixamos claro que também tínhamos interesse por aquilo que eles julgassem estar errado numa tentativa inicial de resolver cada questão. Porém, algumas duplas disseram se sentir mais à vontade utilizando lápis e borracha, possivelmente por sentirem insegurança no desenvolvimento das resoluções e não quererem que isso transparecesse.

Os livros didáticos utilizados para consulta na resolução das questões foram fornecidos por nós, sendo que cada dupla recebeu apenas um exemplar, tendo então que explorar seu conteúdo, a fim de responder as questões, de forma conjunta. Ao entregarmos os livros às duplas, os alunos surpreenderam-se com seu “tamanho”, pois o mesmo tem quase 4 cm de espessura (com capa dura) e por volta de 1,5 kg de massa. Essa característica pode ter aumentado o interesse por seu conteúdo, pois algumas duplas folheavam o livro, antes de verificar a folha com as questões.

Para facilitar nossa observação junto aos alunos, na ocasião da produção dos protocolos, elaboramos previamente uma lista de procedimentos que entendemos que poderiam ocorrer, ficando a cargo dos observadores a indicação dos mesmos. Dado que outros procedimentos não indicados previamente na lista poderiam ocorrer, deixamos espaço para estes registros.

Esta lista facilitou nossa observação, devido à rapidez com que podíamos fazer as anotações e também contribuiu para a discrição da observação, situação que poderia afetar a naturalidade da manipulação do livro pelos alunos, alterando assim alguns resultados.

Nenhuma das duplas desistiu do processo, deixando-nos contentes com seu interesse, entusiasmo e participação na produção dos protocolos.

Procuramos neste capítulo descrever nossas pretensões com cada questão do nosso questionário e a forma como foi o procedimento de sua aplicação. No próximo capítulo faremos uma descrição dos dados obtidos por meio dos protocolos produzidos pelos alunos.

CAPÍTULO IV

Análise dos dados

Neste capítulo faremos uma análise qualitativa das respostas oferecidas pelos alunos que participaram de nossa pesquisa, verificando os registros de representação semiótica que foram utilizados nas respostas, buscando indícios de como eles manipulam o livro didático para responder as questões propostas.

1) Em qual(is) página(as) do livro o autor define derivadas parciais de funções de duas variáveis? (reproduza essa definição)

Esta questão indicava ao aluno apenas a busca da definição sobre Derivadas Parciais e sua simples reprodução, de acordo com o que está descrito no livro.

Verificamos por meio da observação que os alunos, de um modo geral, folheiam bastante o livro em busca de informações que podem ajudar a compor a resposta da questão, porém nem sempre essa busca implica numa resposta satisfatória.

Observamos que todas as duplas localizaram o assunto sobre Derivadas Parciais, por meio do índice, já que o livro apresenta esse conteúdo no capítulo que tem como título “Derivadas Parciais”, facilitando assim a busca. Observamos também que nenhuma dupla leu o prefácio do livro, num primeiro contato ou mesmo após o término das questões.

O capítulo (14) “Derivadas Parciais” não trata desse conceito em seu primeiro tópico, apresenta dois tópicos que o antecedem, no intuito de oferecer informações que serão necessárias para o entendimento sobre Derivadas Parciais. Observamos que algumas duplas iniciam a exploração do livro desde o início do capítulo, sendo que outras já buscam a solução da questão no tópico (14.3) sobre Derivadas Parciais. Essa prática pode não implicar no acerto ou erro na resposta da questão, já que tivemos duplas que iniciaram a exploração do livro pelo início do capítulo e se enganaram na resposta, assim como tivemos duplas que iniciaram a exploração do livro pelo tópico sobre Derivadas Parciais e apresentaram uma resposta satisfatória à questão.

Antes de apresentar a definição de Derivadas Parciais, o autor expõe um exemplo que utiliza uma função de duas variáveis no registro numérico (tabela), em que determina suas derivadas parciais descrevendo seu procedimento, que implica em considerar uma das variáveis “constante” e derivar a função considerando apenas a outra variável.

A definição é encontrada na página 897 do livro, dentro de um quadro, com a possível intenção de destacá-la ao leitor como ápice do desenvolvimento do conteúdo, buscando tornar institucionalizado o conceito sobre derivadas parciais.

Por meio dos protocolos, verificamos que duas duplas pertencentes ao grupo Q confundiram a definição de Derivadas Parciais de funções de duas variáveis com a definição de funções de duas variáveis. Este mesmo engano não ocorreu no grupo S, porém três duplas desse grupo ofereceram como respostas interpretações de trechos do livro em que preparava o leitor para o entendimento do conceito e não a definição propriamente dita.

Apenas duas duplas (S1 e S3) ofereceram como resposta a definição de Derivadas Parciais como está no livro (como foi pedido na questão), utilizando para isso representações no registro algébrico e no da língua natural.

Outras duplas (S4, S5, Q2 e Q3) apresentaram como sendo suas respostas o procedimento “prático” de como são determinadas as derivadas parciais, de forma similar ao descrito no livro.

1) Em qual(is) página(as) do livro o autor define derivadas parciais de funções de duas variáveis? (reproduza essa definição)

páginas	897	898	899			
---------	-----	-----	-----	--	--	--

As derivadas parciais recebem das derivadas de f_x e f_y , onde para diferenciação em x , o "y" como uma constante. Idem para diferenciação em y .

Figura 11. Resposta oferecida pela dupla S4.

Para esta questão, as duplas Q1 e Q4 ofereceram respostas que indicam certa confusão entre a definição de Derivadas Parciais de funções de duas variáveis e a definição de função de duas variáveis, sendo que esta última é encontrada num tópico anterior. Esta situação nos indica a possibilidade de dificuldades de interpretação por parte dos alunos, naquilo que está sendo solicitado na questão.

1) Em qual(is) página(as) do livro o autor define derivadas parciais de funções de duas variáveis? (reproduza essa definição)

páginas				8	7	3
---------	--	--	--	---	---	---

Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de f , e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de f , ou seja $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

Figura 12. Resposta oferecida pela dupla Q4

As duplas S2 e Q5 apresentaram respostas não condizentes com a questão, indicando que esses alunos não entenderam o que estava sendo solicitado. Dessa forma, para estes estudantes, o uso do livro pode não ser uma ação facilitadora da aprendizagem, pois mesmo sendo auxiliados por informações contidas nele, não buscaram atrelar a questão com seu conteúdo.

Comparando as respostas dos grupos, percebemos que nenhuma dupla do grupo Q e apenas duas duplas do grupo S (S1 e S3) responderam a questão de forma satisfatória, sugerindo que ter estudado o conteúdo (grupo Q) não implica em ter maior sucesso nas resoluções, nem fazer um melhor uso do livro.

2) Em qual trecho do livro a noção de derivadas parciais ficou clara para você? Se você fosse explicar essa noção a algum colega de seu curso, como procederia?

Com esta questão estamos interessados em verificar se os alunos priorizam algum tipo de registro de representação semiótica para respondê-la e como eles transmitem uma informação sobre o conteúdo abordado a um colega, indicando algum registro de representação que dê conta de tornar clara essa informação.

Percebemos, pela análise dos protocolos, que as dez duplas responderam esta questão, utilizando símbolos (representação algébrica) conjuntamente com o registro da língua natural, indicando o procedimento para se determinar as derivadas parciais de uma função de duas variáveis, indicado no livro, que consiste em considerar uma das variáveis como constante e derivar a função em relação à outra variável.

2) Em qual trecho do livro a noção de derivadas parciais ficou clara para você? Se você fosse explicar essa noção à algum colega de seu curso, como procederia?

páginas			8	9	8
---------	--	--	---	---	---

"Regra para Determinar Derivada Parcial de $z = f(x, y)$ } Trechos do livro
 1. Para achar f_x [...] em relação a x
 2. Para achar f_y [...] em relação a y "

- Quando você for derivar em relação a x , considere y como se fosse uma constante e derive apenas o que tiver x .
- Quando você for derivar em relação a y , considere x como se fosse uma constante e derive apenas o que tiver y .

Figura 13. Resposta oferecida pela dupla Q5

Apenas uma dupla (S4) ofereceu uma resposta, também na língua natural, em que remete a uma interpretação geométrica das Derivadas Parciais, indicando a existência de pontos, planos e curvas associados ao nosso objeto matemático em estudo.

São apontadas pelos alunos outras páginas situadas no entorno da página 898 que os auxiliaram na obtenção de informações que dessem conta de responder a questão, porém em todos os protocolos é citada a referida página. Isto se dá, possivelmente pelo fato de que é encontrado nela um quadro indicando a regra prática para se determinar as derivadas parciais de funções de duas variáveis, seguido de um exemplo de uma função na sua representação algébrica em que sofre tratamento de acordo com o exposto no quadro. Ao lado encontra-se uma representação gráfica (que não corresponde à função do exemplo), indicando algumas propriedades das Derivadas Parciais, tais como inclinação de retas tangentes às curvas resultantes da intersecção do gráfico da função com os planos ($x=x_0$ e $y=y_0$) num ponto específico $P(x_0, y_0, z_0)$ da superfície, que não são perceptíveis por meio da representação algébrica.

O fato de a totalidade das respostas ter indicado esta página, dá indícios de que os dois tipos de representação (algébrica e gráfica) forneceram conjuntamente aos alunos, as informações que eles consideraram suficientes para responder a

questão. Isso vai ao encontro da teoria de Duval (2003) que indica que é necessária a mobilização de ao menos dois registros de representação para que haja a compreensão de um objeto matemático.

2) Em qual trecho do livro a noção de derivadas parciais ficou clara para você? Se você fosse explicar essa noção à algum colega de seu curso, como procederia?

páginas

A derivada parcial faz com que você ache o ponto de interseção entre 2 planos que cortam uma curva em uma determinada coordenada.

Figura 14. Resposta oferecida pela dupla S4

A dupla Q3 apresentou uma resposta diferenciada das outras, em que indica a existência da relação da derivada com a taxa de variação da função, informação que se encontra na página 898, representada na língua natural. Isso indica que alguns alunos fazem uma maior exploração das informações contidas no livro, buscando compreender melhor o seu conteúdo.

Comparando a quantidade de alunos que indicaram o método prático para se obter as derivadas parciais de funções de duas variáveis (8) com a quantidade de alunos que ofereceram repostas referentes à noção desse conteúdo (2), verificamos o que Imafuku (2008), percebeu na sua pesquisa.

Nas atividades que envolviam o conceito de derivadas parciais, notamos que conhecem o procedimento para determinar as derivadas parciais no registro algébrico, mas [...] também constatamos que a interpretação geométrica das derivadas parciais, primeiramente como coeficiente angular da reta tangente e, posteriormente, como a inclinação do plano tangente, não é compreendida pelos estudantes...(IMAFUKU, 2008, p. 158).

3) Descreva como o autor do livro apresenta o conteúdo derivadas parciais.

Esta questão busca explorar a percepção dos alunos sobre a utilização, pelo autor do livro, de diferentes registros de representação semiótica para desenvolver o assunto sobre Derivadas Parciais. Desta forma estamos interessados em quais registros os alunos reproduzem, no intuito de responder a questão, indicando qual(is) dele(s) tornam claras as informações sobre o conteúdo.

As duplas S4 e Q2 mencionam uso de representações diferentes da algébrica para a exposição do conteúdo, em que essas buscam auxiliar a sua compreensão, pois em suas visões, por exemplo, a representação gráfica tornam mais “claras” as idéias sobre o tópico Derivadas Parciais.

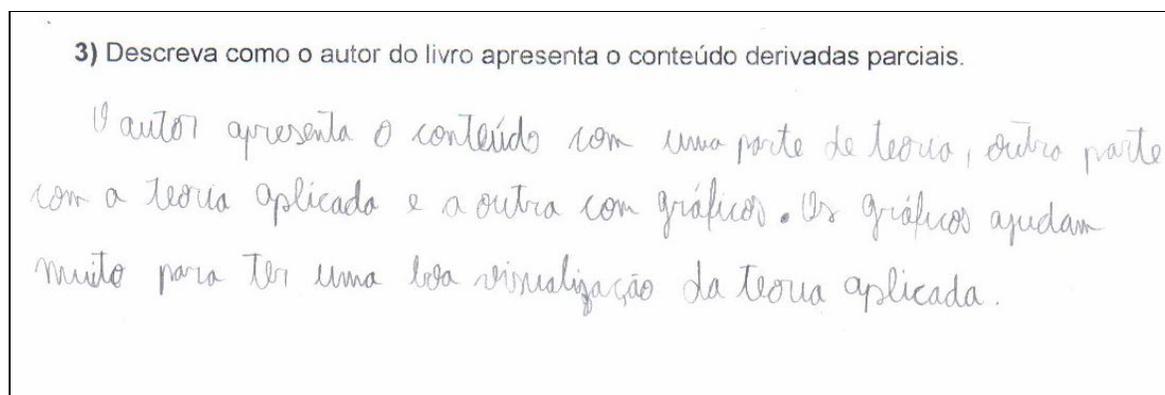


Figura 15. Resposta oferecida pela dupla S4

As duplas S5, Q3, Q4 e Q5 indicam que o conteúdo é apresentado por meio de exemplos que tratam de uma aplicação sobre um problema do mundo real. Esta consideração leva-nos a entender que alunos buscam compreender conteúdos por este meio, situação em que pode levá-los a um entendimento parcial do assunto tratado, não se apropriando muitas vezes do conceito, porém dominando técnicas de operações sobre o mesmo.

3) Descreva como o autor do livro apresenta o conteúdo derivadas parciais?

Ele descreve a uma tabela de temperatura que corresponde à variação de calor q^{do} a temperatura real e T e a umidade do ar e H, temos uma função (T, H), através disso é obtida mantendo-se x fixo (x=0) e determinando-se a derivada ordinária em H da função G(y) = F(T, y):

$$F_y(T, H) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(T, H+h) - F(T, H)}{h}$$

Figura 16. Resposta oferecida pela dupla Q4

A dupla S3 fez um breve roteiro sobre como o assunto é tratado no livro, indicando os tópicos anteriores ao tópico sobre Derivadas Parciais. Isso aponta para a possibilidade desses alunos terem percebido a importância de se ter conhecimentos prévios para poder se apropriar de outros, para isso, eles exploraram o capítulo de uma forma mais ampla, fazendo um melhor uso do livro.

3) Descreva como o autor do livro apresenta o conteúdo derivadas parciais.

Primeiramente foi apresentado o conteúdo de Funções de Variáveis com tópicos para com as de "Duas Variáveis" e "Três ou mais variáveis". Após foi abordado o conteúdo de Limites e Continuidade, onde após foi abrangido o Tópico de Continuidade. Após várias exemplificações, demonstrações de conceitos e definições, o autor encicou o Tópico "Derivadas Parciais" numa hora bem propícia, pois o leitor já havia visto o conteúdo necessário para entender o conteúdo.

Figura 17. Resposta oferecida pela dupla S3

As duplas S2 e Q1 mencionam que os assuntos são tratados sob os pontos de vista verbal (representação no registro da língua natural), numérico, visual (representação gráfica) e algébrico, como foi descrito no início do capítulo do livro, pelo autor, mostrando também que houve uma exploração do livro em tópicos diferentes do específico sobre Derivadas Parciais.

Percebemos, tanto para as duplas do grupo S quanto para as duplas do grupo Q, que a maioria das respostas para esta questão está associada às idéias trazidas pelos exemplos e baseados neles que os alunos buscam uma compreensão do conteúdo. Fica assim, então, a definição e a demonstração de propriedades do objeto matemático em segundo plano, o que pode ser indicado como um dos problemas do fracasso existente nas disciplinas de Cálculo, como observa Barufi (2002), que indica que muitos alunos tornam-se receptáculos de uma série de resultados que algum detentor desse conhecimento afirmou que seria verdade. Assim os alunos transformam-se em meros repetidores destes resultados, sem se preocupar com seu significado.

O máximo que poderão fazer é repetir conceitos que guardaram na memória episódica, procurando reproduzi-las da mesma maneira que lhes foram transmitidos, ou resolver problemas semelhantes aos que viram serem resolvidos, aplicando técnicas que, de tanto repetir, conseguiram razoavelmente memorizar (BARUFI, 2002, p. 71).

4) Escolha um exercício sobre derivadas parciais proposto no livro, resolva-o e indique as páginas consultadas. Por quais motivos você o escolheu?

Dado que o autor do livro apresenta seu conteúdo utilizando diferentes registros de representação semiótica, com esta questão estamos interessados em verificar se os alunos se sentem seguros em utilizar algum deles, e se existe algum tipo de registro de representação que é priorizado por eles na resolução desta questão.

As duplas Q1 e Q3 escolheram exercícios cujos enunciados estavam na representação numérica e que também contemplavam a representação da língua natural; em suas respostas também utilizaram esses dois registros. De acordo com a página que indicaram, verificamos que os exercícios que escolheram não são

especificamente sobre Derivadas Parciais e sim sobre funções de duas variáveis. Este fato sugere a não compreensão do que foi pedido na questão, indicando certa confusão sobre funções de duas variáveis e Derivadas Parciais de funções de duas variáveis. De forma semelhante a dupla S3 indicou uma questão sobre o domínio de funções de duas variáveis, indicando também dificuldades na interpretação da questão. Este exercício sugere, para sua resolução, tratamento na representação algébrica da função.

4) Escolha um exercício sobre derivadas parciais proposto no livro e resolva-o, indique as páginas consultadas. Por quais motivos você o escolheu.

páginas	874	875			
---------	-----	-----	--	--	--

Ex 2. PAG 884

a) 124. É O ÍNDICE DE TEMPERATURA EM FUNÇÃO DA UMIDADE QUA A TEMPERATURA ^{REAL} É 95°F e A UMIDADE RELATIVA É 70%.

b) 60%

c) 85°F

d) QUANDO A TEMPERATURA É DE 80°F APESAR DE TERMOS UMA VARIAÇÃO ALTA NA UMIDADE O ÍNDICE DE TEMPERATURA NÃO TEM UMA GRANDE VARIAÇÃO, POREM A 100°F ESSE ÍNDICE SOFRE UMA GRANDE VARIAÇÃO.

Figura 18. Resposta oferecida pela dupla Q1

Foi possível verificar nos protocolos produzidos pelas duplas que 80% delas escolheram exercícios de funções representadas algebricamente, enfatizando a preferência pelo seu uso. Mesmo sendo mencionado no início do capítulo sobre Derivadas Parciais os quatro pontos de vistas em que seria tratado o assunto, a maioria dos alunos não lançou mão de outras representações que pudessem dar conta de responder a questão, podendo isso indicar em suas visões, que representações diferentes da algébrica são apenas formas auxiliares para a exploração de idéias e que não são válidas como respostas.

Em sua pesquisa sobre os conhecimentos mobilizados por alunos sobre a noção de Integral no contexto das concepções operacionais e estruturais, Vidigal (2007) aplicou seu instrumento de pesquisa a dois grupos diferentes de alunos de matemática, um que cursava Cálculo Diferencial e Integral III e outro que cursava a mesma disciplina, porém no nível V, de uma faculdade particular do Estado de São Paulo. Em uma das questões solicitava ao aluno a determinação da área de um

semi-círculo por meio de uma integral e também qual seu significado geométrico. Segundo a autora, os alunos priorizaram o registro algébrico como resposta válida e que a indicação de alguma resposta em outro registro (o gráfico, por exemplo) não tinha o mesmo teor de validação.

Parece que, mesmo aqueles estudantes que indicaram perceber que a área correspondente à integral solicitada, fosse o número 2π , não se sentiram suficientes seguros para expressar que este era o valor da integral, procurando abrigo em procedimentos algébricos que pudessem confirmar tal resultado (VIDIGAL, 2007, p. 130).

4) Escolha um exercício sobre derivadas parciais proposto no livro e resolva-o, indique as páginas consultadas. Por quais motivos você o escolheu.

páginas	884	875				
---------	-----	-----	--	--	--	--

SEJA $g(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

a) ESTIME $g(1, 2) = \sqrt{36 - 9(1)^2 - 4(2)^2}$
 $= \sqrt{36 - 9 - 16}$
 $= \sqrt{11}$

b) DETERMINE O MÍNIMO DE g
 $D = \{(x, y) / -9x^2 - 4y^2 \geq -36\}$

c) $I = \{z/2 = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}\}$

Figura 19. Resposta oferecida pela dupla S3

Percebemos por meio dos protocolos e observações, que a maioria das duplas indica como página consultada para a resolução da questão escolhida aquela que apresenta exemplos parecidos com o exercício indicado, buscando possivelmente, desenvolvê-lo baseando-se em suas informações, apontando para sua relativa importância junto aos alunos.

5) Dada a função $f(x,y) = (6 - x)^2 + (5 - y)^2 + xy$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}(5,3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4,2)$.

Quais páginas do livro que você consultou para responder esta questão?

Indique a principal.

No capítulo que trata de Derivadas Parciais, não existe menção sobre regras de derivação de funções. Assim, queremos verificar se os alunos fazem algum tipo de tratamento no registro algébrico da função, bem como entendem a notação utilizada na questão, dado que a notação que o livro apresenta é diferente da utilizada na questão, indicando uma compreensão desta informação trazida pelo livro.

Pela análise dos protocolos, pudemos observar que a maioria das duplas, tanto do grupo S, quanto do grupo Q, apresentou o uso da regra da cadeia para resolver a questão, não executando um tratamento no na representação algébrica da função, antes de determinar suas derivadas parciais. Isto foi verificado nas duplas: S1, S2, S4, S5, Q1, Q2 e Q4.

Notamos também que as duplas S1, S2, S4, S5 utilizaram a notação indicada no livro, que é diferente da notação utilizada no protocolo, isto aponta para a possibilidade de que o livro ofereceu um suporte de informações suficiente para a resolução da questão, mostrando assim, sua importância.

5) Dada a função $f(x,y) = (6-x)^2 + (5-y)^2 + xy$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}(5,3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4,2)$. Quais páginas do livro você consultou para responder esta questão? Indique a principal.

páginas	906				
principal	906				

$$f_x(x,y) = (6-x)^2 + (5-y)^2 + xy$$

$$f_y(x,y) = (6-x)^2 + (5-y)^2 + xy$$

$$f_x(x,y) = 2x \cdot x'$$

$$f_y(x,y) = 2x \cdot x'$$

$$f_x(x,y) = 2(6-x) \cdot -1 + y$$

$$f_y(x,y) = 2(5-y) \cdot -1 + x$$

$$f_x(x,y) = -12 + 2x + y$$

$$f_y(x,y) = -10 + 2y + x$$

$$f_x(5,3) = -12 + 2(5) + 3$$

$$f_y(4,2) = -10 + 2(2) + 4$$

$$f_x(5,3) = 1$$

$$f_y(4,2) = -2$$

Figura 20. Resposta oferecida pela dupla S1

Em três destas quatro duplas houve a indicação de que a página principal utilizada para a resolução da questão proposta é aquela que apresenta exemplos de questões resolvidas e que nenhuma dupla (tanto do grupo S, quanto do grupo Q) indicou como página principal aquela que apresenta a definição de Derivadas Parciais, reforçando assim, a ideia de que o aluno busca compreender o conteúdo, inicialmente apropriando-se das informações que são apresentadas nos exemplos.

Apenas três duplas fizeram um tratamento no registro algébrico, (S3, Q3 e Q4), para posteriormente determinar as derivadas parciais da função proposta na questão. Destas, apenas as duplas do grupo Q utilizaram a notação indicada na questão do nosso instrumento de pesquisa, indicando que houve uma correspondência entre a notação do protocolo e a notação utilizada no livro.

Percebemos uma relativa desenvoltura das duplas (tanto do grupo S quanto do Q) no tratamento das funções na sua representação algébrica, para a determinação de suas derivadas parciais, indicando uma possível priorização dessa representação em sala de aula e/ou resolução de exercícios.

Comparando as resoluções oferecidas pelos grupos, não é possível perceber diferenças explícitas entre eles, sugerindo que o uso do livro pode ter proporcionado um relativo nivelamento dos conhecimentos dos alunos em seus diferentes estágios sobre Derivadas Parciais, levando em consideração que o grupo Q já tivera contato com esse conteúdo, enquanto que os alunos do grupo S tiveram apenas conceitos ligados à Derivadas de funções de uma variável.

5) Dada a função $f(x,y) = (6-x)^2 + (5-y)^2 + xy$, determine $\frac{\partial f}{\partial x}(5,3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4,2)$. Quais páginas do livro você consultou para responder esta questão? Indique a principal.

páginas	896	897	898			
principal	898					

$$f(x,y) = x^2 - 12x + y^2 - 10y + xy + 61$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 12 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 10 + x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(5,3) = 2(5) - 12 + 3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = 2(2) - 10 + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(5,3) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = -2$$

Figura 21. Resposta oferecida pela dupla Q3

Por meio dos protocolos, observamos que 80% das duplas indicaram páginas que continham exemplos como páginas principais que foram consultadas para auxiliarem na resolução da questão, reforçando a ideia da importância do exemplo para o aluno, que busca compreender o conteúdo.

6) Use a tabela de valores de $f(x,y)$ para estimar o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)$. Indique as páginas do livro que utilizou para resolver esta questão.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

Este tipo de representação de função não é comumente utilizado em livros didáticos. Assim, queremos verificar como os alunos buscam informações no livro que dão conta de resolver a questão e se essas informações foram suficientes. Queremos também investigar se os alunos interpretam os valores da tabela, percebendo como as variáveis se comportam, com relação aos seus valores.

Verificamos nos protocolos que quatro duplas, entre elas três do grupo S (S2, S4 e S5) e uma do grupo Q (Q1), resolveram a questão determinando o valor da função no ponto especificado e não o valor da derivada parcial neste ponto, nos indicando que houve confusão no que foi pedido no enunciado do exercício. As duplas pertencentes ao grupo S indicaram que consultaram páginas que tratavam de assuntos ligados a Limites, assunto que é preliminar ao conteúdo sobre Derivadas Parciais.

6) Use a tabela de valores de $f(x,y)$ para estimar o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)$. Indique as páginas do livro que utilizou para resolver esta questão.

páginas

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

Limites e continuidade

$\frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 17,5$

Figura 22. Resposta oferecida pela dupla S2

A dupla do grupo Q buscou informações em páginas que tratavam de assuntos ligados à curvas de nível, que também faz parte de conteúdos que introduzem o tópico sobre Derivadas Parciais, porém que não contém informações suficientes que dão conta de responder a questão.

Uma única dupla do grupo Q (Q2) indicou a página que contém a definição de Derivadas Parciais como fonte de informação para a resolução da questão, resolvendo a mesma de forma parcial, porém indicando, por meio do desenvolvimento do tratamento da representação algébrica, que estava na direção correta, situação que nos permite pensar na possibilidade de que nem todos os alunos se apóiam apenas nos exemplos que o livro traz.

Quatro duplas, uma delas pertencente ao grupo S (S3) e três ao grupo Q (Q3, Q4 e Q5), resolveram a questão baseadas em exemplos, de acordo com as páginas indicadas nos protocolos. Esta situação reforça a percepção de sua importância como fonte de informação junto aos alunos e que a exploração dessas informações no livro pode contribuir com o aprendizado, pois estes exemplos podem ser diferentes dos vistos em aula, ou mesmo com um enfoque diferente do enfoque do professor, sugerindo que algumas propriedades que não foram percebidas em aula, podem ser evidenciadas na exploração do livro.

6) Use a tabela de valores de $f(x,y)$ para estimar o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)$. Indique as páginas do livro que utilizou para resolver esta questão.

páginas 895 896

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

$g(x) = f(x, 2)$
 $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h}$
 Para $h = 0,5$ e $-0,5$
 $g'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h, 2) - f(3, 2)}{h}$

$g'(3) \approx \frac{f(3,5) - f(3)}{0,5} = \frac{f(3,5,2) - f(3,2)}{0,5}$
 $\frac{22,4 - 17,5}{0,5} = 9,8$

$g'(3) \approx \frac{f(2,5) - f(3)}{-0,5} = \frac{10,2 - 17,5}{-0,5} = 14,6$

$\frac{9,8 + 14,6}{2} = 12,2$

Achamos este resultado através do exemplo da pág 896, fazendo um comparativo.

Figura 23. Resposta oferecida pela dupla Q3

No ato da resolução das tarefas propostas, pudemos detectar algumas características da forma como os estudantes manipulam o livro didático. Assim, com informações obtidas por meio do formulário de ocorrências, sintetizamos algumas ações dos alunos, na tabela a seguir.

Tabela 3: Uso do livro pelo aluno.

A dupla inicia a leitura:	
No início do capítulo	Direto em Derivadas Parciais
40%	60%
As duplas respondem as questões na ordem proposta?	
Sim	Não
40%	60%
As duplas exploram outro tópico sem ser Derivadas Parciais?	
Sim	Não
20%	80%

Pudemos também constatar que todas as duplas localizam o capítulo sobre Derivadas Parciais por meio do índice e que folheiam constantemente o livro apenas neste conteúdo, não explorando o livro de uma forma mais ampla, nem mesmo lendo o prefácio. Percebemos também que na sua totalidade, os alunos promovem uma discussão para buscar a solução da questão.

Observamos que a dupla S4 fez uma leitura no conteúdo do livro de aproximadamente 20 minutos para depois iniciar a resolução da primeira questão. Consideramos este fato importante, pois nos aponta para a possibilidade de os alunos buscarem ter uma “visão geral” do assunto tratado na questão para posteriormente procurar respondê-la com base nas informações que o livro oferece, levando em consideração todo um contexto e não apenas um conteúdo pontualizado.

Percebemos também que os alunos buscam inicialmente informações contidas em exemplos para resolver problemas. Foi o que observamos na dupla S5, no momento da produção de seu protocolo, em que comparava as questões propostas com exemplos contidos no livro.

Preliminarmente, indícios indicam que o livro traz contribuições significativas para o aprendizado, pois entendemos que as informações encontradas nele foram interpretadas e aplicadas pelo aluno na resolução das questões.

Neste capítulo buscamos fazer uma análise qualitativa dos dados fornecidos pelos alunos (por meio de protocolos contendo questões a serem resolvidas). Procuramos destacar algumas respostas que nos indicaram como pode ser a manipulação do livro didático pelo aluno. No próximo capítulo, faremos nossas considerações finais com o humilde objetivo de oferecer algumas contribuições que nossa pesquisa possa proporcionar.

CAPÍTULO V

Conclusões

Em nossa pesquisa, tivemos a intenção de investigar como os alunos manipulam o livro didático e quais contribuições significativas que a utilização dessa ferramenta traz para a aprendizagem do tópico sobre Derivadas Parciais de funções de duas variáveis.

Esta escolha foi motivada pelo fato de podermos dar continuidade a trabalhos já realizados por colegas do nosso grupo de estudos (O Elementar e o Superior em Matemática) sobre dificuldades de aprendizagem dos alunos em temas relacionados a funções de mais de uma variável e ao uso do livro didático. Foi também motivador de nossa escolha o fato de podermos voltar a ter contato com o conteúdo sobre Derivadas Parciais, pois tivemos dificuldades em nos apropriarmos deste conteúdo quando éramos estudantes da graduação. Essa oportunidade proporcionou-nos a percepção de alguns conceitos que anteriormente não nos eram tão evidentes.

Para obter indícios sobre como ocorre a manipulação do livro didático pelos alunos e quais contribuições esse manuseio oferece para o processo de aprendizagem, elaboramos um questionário como instrumento de pesquisa, contendo seis questões com vistas na teoria dos registros de representação semiótica de Reymond Duval.

Este questionário foi aplicado em dois grupos distintos de um curso de engenharia mecânica de uma faculdade particular da cidade de São Paulo. Os grupos eram compostos por alunos que cursavam o Segundo semestre, que denominamos de S e alunos que cursavam o Quinto semestre, estes denominados Q. Cada grupo era composto por dez estudantes que produziram os protocolos em duplas, estas formadas aleatoriamente.

Buscamos fazer uma análise dos protocolos das duplas, de forma singela, no intuito de perceber algumas de suas características. Na tabela abaixo, procuramos fazer um breve resumo do que observamos.

Tabela 4: Características das duplas.

<p>S1: Apresentou relativa precisão no que escreve, tornando claras suas ideias. Deixou de resolver duas questões (3 e 6), porém ofereceu resoluções consistentes nas outras.</p>	<p>Q1: Ofereceu indícios de que não interpretou corretamente algumas questões. Não apresentou autonomia para responder com suas palavras, copiando trechos do livro (questão 2).</p>
<p>S2: Apresentou certa confusão em algumas respostas, indicando uma interpretação parcial do que era pedido nas questões.</p>	<p>Q2: Tem relativa autonomia e precisão no que escreve, porém a forma sintética que utiliza torna suas respostas incompletas.</p>
<p>S3: Confundiu-se na resposta de uma questão (4), porém apresentou objetividade nas outras respostas. Teve bom desempenho no desenvolvimento matemático, indicando que se apropriou das informações contidas no livro.</p>	<p>Q3: Não consegue expressar suas idéias de forma clara, mas tem bom desempenho e precisão nos desenvolvimentos matemáticos.</p>
<p>S4: Suas respostas são majoritariamente confusas, sendo sintéticas e incompletas. Escreve como se estivesse conversando com alguém, apresentando certa ingenuidade em suas palavras. Faz seus cálculos de forma não muito organizada.</p>	<p>Q4: Interpretou de forma incorreta duas questões (1 e 3), oferecendo respostas que não se relacionam com o que foi pedido. Porém, apresentou bom desenvolvimento nas questões envolvendo cálculos matemáticos (questões 4, 5 e 6), em que a utilização do livro se mostrou evidente.</p>
<p>S5: Apresenta grande confusão no que escreve, não tornando claras suas intenções. Sintetiza suas respostas de forma a não concluir a ideia sobre o assunto, deixando-a incompleta. O mesmo ocorre em suas resoluções matemáticas.</p>	<p>Q5: Mostrou relativa capacidade de resolver as questões, sendo clara a utilização do livro (notações). Tem dificuldades de expressar suas idéias, pois indicou uma correta interpretação das questões, porém apresentou respostas confusas (nas questões 1, 2 e 3)</p>

Por meio dos protocolos, podemos perceber que o registro algébrico é a representação mais utilizada nas respostas oferecidas pelas duplas e que outras representações do mesmo objeto matemático são consideradas auxiliares para sua compreensão. Porém os alunos consideram importantes estas representações “auxiliares”. Nos protocolos é apontada a importância do registro gráfico, em que alunos consideram que “os gráficos ajudam muito” na percepção de algumas propriedades do objeto matemático estudado (dupla S4).

Na questão (5), em que era pedido aos alunos para que determinassem as derivadas parciais da função, indicamos um tipo de notação no instrumento de pesquisa e percebemos o uso da notação indicada no livro, por algumas duplas, em suas resoluções. Isso aponta na direção de que o livro forneceu informações suficientes e elas foram interpretadas pelos alunos, indicando-o assim como uma ferramenta que pode auxiliar os alunos na apropriação de conceitos.

De acordo com Duval (2003), a conversão de registro de representação faz-se necessária apenas para se eleger em qual representação ocorrerá o tratamento, sendo escolhido aquele considerado mais econômico e/ou mais potente. Assim, a conversão é tida como atividade secundária no âmbito matemático, mas considerada mais importante que o tratamento sob o ponto de vista cognitivo.

Percebemos em protocolos de algumas duplas a transformação de conversão, em que ocorreu do registro numérico para o registro algébrico (questão 6), para posterior tratamento na busca pela resolução da questão. Esta conversão é apresentada no livro, indicando que os alunos apropriaram-se desta informação e aplicaram-na em suas resoluções, apontando para a possibilidade de que as representações indicadas no livro podem contribuir para seu aprendizado.

Nos protocolos de algumas duplas verificamos certa confusão na interpretação sobre o que era pedido em algumas questões, pois ofereceram respostas que não condiziam com o que era proposto. Isso indica-nos que erros cometidos pelos alunos podem estar ligados à interpretações incorretas dos enunciados dos problemas, trazendo assim, prejuízos em seu aprendizado.

Em algumas questões foram oferecidas pelas duplas, respostas utilizando o registro na língua natural. Percebemos por meio destes registros que os alunos apresentam dificuldades em expressar suas idéias, não tornando claras suas intenções, o que nos leva a considerar a possibilidade de que este entrave possa ocorrer em sala de aula, em que o aluno não consegue ser claro na pergunta que pode fazer para que esclareça sua dúvida junto ao professor. Assim, essa dificuldade em se expressar pode ser um dos obstáculos para sua aprendizagem.

Não percebemos diferenças significativas entre os grupos no que diz respeito à manipulação do livro. Os alunos buscam as informações de forma similar, concentrando-se apenas no conteúdo que está sendo mencionado nas questões, não explorando outros assuntos tratados no livro. Este fato nos aponta para uma possível sub-utilização do livro, em que ele pode ser valorizado como ferramenta, porém pouco explorado efetivamente, não proporcionando assim, suas possíveis contribuições para o aprendizado.

Ao compararmos as respostas dos grupos, não percebemos diferenças significativas que poderiam caracterizá-los de acordo com o estágio que se encontravam no curso, pois apresentaram similaridades na forma de responder as questões, apontando dificuldades semelhantes.

Ficaram evidentes dificuldades de interpretação e de expressão, por parte dos estudantes que participaram da pesquisa, sobre os conceitos abordados, situação esta que pode ser considerada um obstáculo para a aprendizagem dos alunos.

Modestamente, esperamos que as informações aqui apresentadas possam ser utilizadas de alguma forma, para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Fundamentos da Didática da Matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de doutorado. USP – SP, 1999.

BARUFI, M. C. B. O Cálculo no curso de licenciatura em matemática. Educação em Revista, ano 9, edição especial, 2002, p. 69 – 72.

BAUMGART, J. K., Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Cálculo: 2ª ed. São Paulo: Atual, 1993,

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M.C. ARAÚJO, J.L. (orgs) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

CATAPANI, E. C. Cálculo em serviço: um estudo exploratório. BOLEMA, nº16, pp. 48 – 62, UNESP – Rio Claro, 2001.

CELESTINO, M. R. Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos no Ensino Superior. Tese de doutorado. PUC – SP, 2008.

DALL'ANESE, C. Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação de mestrado. PUC – SP, 2000

DAMM, R. F. Registros de representação. In MACHADO, S. D. A (Org), Educação Matemática, Uma (nova) introdução: 3ª ed. São Paulo: Educ, 2008, pp. 167 – 187.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In MACHADO, S. D. A (Org), Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003 pp.11 - 31.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S.. Investigação em Educação Matemática. Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GODOY, L. F. S. Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem. Dissertação de mestrado. PUC – SP, 2004.

HSIA, Y. W. A utilização do livro didático pelo aluno ao estudar integral. Dissertação de mestrado. PUC – SP 2006.

IMAFUKU, R. S. Sobre a passagem do estudo de função de uma variável para o caso de duas variáveis. Dissertação de mestrado. PUC – SP, 2008.

LAVILLE, C. DIONNE, J. A Construção do Saber. Manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

LUDKE, M, ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em educação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO. N. J. Cálculo, funções de mais de uma variável. São Paulo: Atual, 1979.

MACHADO, S. D. A. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. (Org.), Campinas: Papirus, 2003, pp. 7 - 10.

MARIANI, R. C. P. Transição da educação básica para o ensino superior. A coordenação de Registros de Representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo. Tese de doutorado PUC – SP, 2006.

MELO, J. M. R. Conceito de Integral: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. . Dissertação de mestrado. PUC – SP, 2002.

PAIS, L. C. Didática da Matemática. Uma análise da influência francesa: 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

ROMANATTO, M. C. O Livro Didático: alcances e limites, EPEM, São Paulo, 2004. Acesso em 06/04/2008. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr19-Mauro.doc

SANTAELLA, L. O que é semiótica. São Paulo: Brasiliense, 2006, 24ª ed. reimp.

SILVA, C. A. A noção de integral nos livros didáticos e os registros de representação semiótica. Dissertação de mestrado. PUC – SP, 2004.

STEWART, J. Cálculo, volume II. 4ª ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2003.

VIDIGAL, L. F. Conhecimentos mobilizados por alunos sobre a noção de integral no contexto das concepções operacionais e estruturais. Dissertação de mestrado. PUC – SP, 2007.

ANEXOS

Anexo 1

Formulário de ocorrências

Encontro () grupo ()

1) A dupla localiza o conteúdo pelo índice (1) ou folheando o livro (2).

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

2) A dupla inicia a leitura no início do capítulo (1) ou direto em derivadas parciais (2)

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

3) A dupla promove uma discussão para buscar a solução da questão? sim (1) não (2).

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

4) A dupla responde as questões na ordem proposta? sim (1) não (2).

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

5) A dupla explora outro assunto não relacionado com derivadas parciais? sim (1) não(2).

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

6) A dupla folheia constantemente o livro? sim (1) não(2).

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

7) A dupla lê algo do prefácio? sim (1) não(2)

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

8) Qual a ordem de entrega (das duplas) das atividades resolvidas.

D1 () D2 () D3 () D4 () D5 ()

Anexo 2

As questões

QUESTÕES (se achar necessário, utilize o verso da folha). (nº da dupla_____).

1) Em qual(is) página(as) do livro o autor define derivadas parciais de funções de duas variáveis? (reproduza essa definição)

páginas						
---------	--	--	--	--	--	--

2) Em qual trecho do livro a noção de derivadas parciais ficou clara para você? Se você fosse explicar essa noção à algum colega de seu curso, como procederia?

páginas						
---------	--	--	--	--	--	--

3) Descreva como o autor do livro apresenta o conteúdo derivadas parciais.

QUESTÕES (se achar necessário, utilize o verso da folha). (n° da dupla ____)

4) Escolha um exercício sobre derivadas parciais proposto no livro e resolva-o, indique as páginas consultadas. Por quais motivos você o escolheu?

páginas						
---------	--	--	--	--	--	--

5) Dada a função $f(x,y) = (6 - x)^2 + (5 - y)^2 + xy$, **determine** $\frac{\partial f}{\partial x}(5,3)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(4,2)$.

Quais páginas do livro você consultou para responder esta questão? Indique a principal.

páginas						
principal						

6) Use a tabela de valores de $f(x,y)$ para estimar o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2)$. Indique as

páginas do livro que utilizou para resolver esta questão.

páginas					
---------	--	--	--	--	--

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1