PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ROBERTO SEIDI IMAFUKU

SOBRE A PASSAGEM DO ESTUDO DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL PARA O CASO DE DUAS VARIÁVEIS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ROBERTO SEIDI IMAFUKU

SOBRE A PASSAGEM DO ESTUDO DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL PARA O CASO DE DUAS VARIÁVEIS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Professor Doutor Benedito Antonio da Silva*****.**

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

Aos meus avós Kyuichi Imafuku, Mitsuku Imafuku (in memorian) e Maria Miguel Jacomassi pelo exemplo de companheirismo, dedicação e amor.

Aos meus pais Mario Takashi Imafuku e Nair Aparecida Domingues Imafuku pelo amor, educação e apoio que sempre me deram.

A minha irmã Sueli Emiko Imafuku pelo incentivo, colaboração e demonstração de amizade durante toda minha vida.

A minha esposa Danila Brígida Santana Imafuku pela paciência, dedicação e amor que me dispensou nessa fase em que estive tão ausente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre presente em minha vida transmitindo paz e amor.

Ao Professor Doutor Benedito Antonio da Silva, que me orientou e motivou, nesta pesquisa. Pela oportunidade de desfrutar de seu conhecimento, sua experiência e sua amizade. E por sua contribuição para o desenvolvimento desta pesquisa.

Às Professoras Doutoras Sonia Pitta Coelho e Auriluci de Carvalho Figueiredo, pelas sugestões e comentários no Exame de Qualificação que muito contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho.

A todos os professores que, durante a minha vida, colaboraram para que tivesse uma boa formação, tanto na vida social, quanto na carreira profissional.

A todos os meus amigos.

A Secretaria do Estado da Educação pela bolsa de estudo concedida.

E a meus pais e a minha esposa, aos quais agradeço pelo empenho, dedicação e demonstração de amor que tanto me deram forças para a conclusão dessa pesquisa.

O Autor

RESUMO

Esta pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de verificar as dificuldades e saberes manifestados por estudantes relativos à transição do estudo das funções de uma variável para o caso de duas, no que diz respeito às variáveis dependentes e independentes e à interdependência entre elas, ao domínio e o gráfico, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também quais manifestações são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem. Para isso, elaboramos dois questionários fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, os quais foram aplicados a estudantes do quarto e quinto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da grande São Paulo. O primeiro questionário foi aplicado a alunos do quarto semestre e possibilitou, além de uma primeira análise das dificuldades, verificar a pertinência das questões, bem como a adequação dos enunciados. Foi constatado que algumas questões necessitavam de uma reestruturação e, também, que era necessário o acréscimo de novas questões, o que contribuiu na elaboração do questionário definitivo, que foi aplicado a estudantes do quinto semestre. Esta pesquisa revelou algumas dificuldades que os alunos apresentam quando estudam as funções de duas variáveis, como: a não compreensão do sistema de eixos 3D, a falta de clareza na determinação e representação do domínio da função, a dificuldade em realizar a conversão do registro da língua natural para o algébrico em situações contextualizadas, a confusão entre o registro gráfico do domínio e da função, e os obstáculos para a interpretação do gráfico de uma função de duas variáveis, dificuldades estas que se refletem negativamente no estudo das derivadas parciais. Os registros de representação semiótica se mostraram uma eficaz ferramenta para a explicitação dos saberes e da complexidade que o estudo de funções de duas variáveis representa para os alunos.

Palavras-Chave: Funções de duas variáveis, Derivadas Parciais, Cálculo Diferencial e Integral, Educação Matemática, Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This research was developed with the goal of verifying the difficulties and the knowledge shown by students related to the transition of the study of functions of one variable to the case of two variables, regarding dependent and independent variables well as the interdependence between them, to the dominion and the graphic, to the relation between the graphic of the dominion of the function and also which manifestations are revealed in the study of the partial derivatives of the first order. In order to do so we developed two questionnaires based upon the Theory of the Registers of Semiotic Representation of Raymond Duval, the questionnaires having been answered by students of the fourth and fifth term of the course of Mathematics of a private university in the greater São Paulo area. The first questionnaire was applied to students of the fourth term and it made possible to verify not only one first analysis of their difficulties, but also how pertinent the questions were, as well as how fitting the wording was. It has been found that some of the questions needed rephrasing, and also that the addition of new questions was necessary, which contributed to the making of a new questionnaire, which was answered by students of the fifth term. This research revealed some difficulties that students show when studying functions of two variables, such as the comprehension of the system of the 3D axis, the lack of clarity when determining and representing the dominium of the function, difficulty when performing the conversion from the representation of the natural language to the algebric language in contextualised situations, the confusion between the graphic representation of the dominion and the function, and the obstacles for the interpretation of the graphic of a function of two variables, difficulties that have negative effect on the study of partial derivatives. The registers of semiotic representation proved themselves an efficient tool for the explanation of the knowledge and the complexity that the study of functions with two variables represent for students

Keywords: Functions of two variables, Partial Derivatives, Differential and Integral Calculus, Mathematical Education, Registers of Semiotic Representation

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral é oferecida como disciplina básica nos primeiros anos de vários cursos de graduação, pois é uma ferramenta básica e de grande aplicabilidade, como por exemplo, o estudo do comportamento de funções, as derivadas, as integrais, etc.; o que destaca sua grande importância.

Mesmo sendo de grande importância para várias áreas, há muito tempo, várias pesquisas têm apontado para o alto nível de reprovação e de desistência nesta disciplina.

Ao ministrarmos tópicos de Cálculo Diferencial e Integral que abordam funções de várias variáveis, pudemos notar que muitos estudantes, mesmo aqueles que foram bem sucedidos nas disciplinas de Cálculo que abordam funções de uma variável, apresentam grandes dificuldades quando se deparam com uma função que é definida por mais do que uma variável, no que diz respeito a interpretação de seu significado,sua representação gráfica, no estudo de seus limites, derivadas parciais, entre outros

Tendo em vista esse problema, partimos em busca de pesquisas para tentar compreender o porquê dessas dificuldades. Encontrei três trabalhos que abordam no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, as funções de várias variáveis. O primeiro é um artigo que apresenta os resultados de um estudo sobre o software MAPLE V na abordagem de funções de várias variáveis, em particular o estudo dos gráficos e de curvas de níveis; o segundo, é uma tese de doutorado que aborda, numa linha filosófica, o surgimento das funções de várias variáveis. O terceiro também é uma tese de doutorado, em que o autor pesquisou sobre a utilização do software MAPLE para o estudo das Integrais Múltiplas. Apresentaremos uma discussão mais detalhadas dessas pesquisas no capítulo I.

Cientes das dificuldades dos alunos e da falta de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral quando aborda funções de duas variáveis, decidimos realizar este trabalho, tendo como base as dificuldades apontadas por alguns pesquisadores, como: a relação entre as variáveis, a identificação do domínio de uma função de duas variáveis, a representação gráfica e a conversão entre os registros de representação envolvidos inerentes ao estudo das funções de duas variáveis. Buscamos responder as seguintes questões: Quais as dificuldades e saberes manifestados pelos alunos relativos à transição do estudo de função de uma variável para o de duas variáveis, no que diz respeito ao conceito de variáveis dependente e independente, ao domínio de função, os gráficos de função e a relação entre esse e o gráfico do seu domínio? E quais manifestações dessas dificuldades aparecem são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem?

Para obter informações sobre essas dificuldades elaboramos dois questionários, um exploratório e outro que denominamos definitivo, embasados na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que foram aplicados a estudantes que cursavam o quarto e o quinto semestres do curso de Licenciatura em Matemática em uma Universidade particular da Grande São Paulo.

O questionário exploratório é composto de sete questões que abordam a localização de pontos nos sistemas de eixos coordenados, o conceito de funções de duas variáveis, do domínio e do registro gráfico dessas funções. Foi aplicado a alunos do quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da região da Grande São Paulo. Esse questionário nos permitiu levantar alguns dados e para verificar como essas questões seriam interpretadas pelos estudantes, ou seja, para nos indicar as alterações e acréscimo de questões, necessárias na elaboração do questionário definitivo.

Tendo em vista os dados fornecidos pelo questionário exploratório, elaboramos o questionário definitivo efetuando a alteração no enunciado de algumas questões que não foram bem interpretadas pelos estudantes e a inclusão de outras cinco questões que abordam o estudo das derivadas parciais de primeira ordem. Foi aplicado a estudantes do quinto semestre do mesmo curso e universidade onde foi aplicado o questionário exploratório.

Nosso trabalho está organizado em cinco capítulos.

No **CAPÍTULO I** apresentamos à problemática e uma discussão dos conceitos matemáticos abordados nessa pesquisa, sendo que nessa discussão fizemos uma ingênua comparação entre os conceitos de função de uma e duas variáveis.

No **CAPÍTULO II** é apresentada a Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval, na qual nos fundamentamos para a elaboração dos dois questionários e, utilizamos também, como ferramenta de análise dos mesmos. Apresentamos, também, os procedimentos metodológicos e o questionário exploratório, seguido da descrição da aplicação desse questionário e da análise das respostas dos estudantes. Responderam a esse questionário, estudantes do quarto semestre do curso Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da região da Grande São Paulo, que realizavam o estudo sobre função e duas variáveis.

No **CAPÍTULO III**, tratamos da apresentação do questionário definitivo, ao qual dividimos em duas partes, em que na primeira abordamos os conceitos referentes ao início do estudo das funções de duas variáveis e, na segunda parte as derivadas parciais.

No **CAPÍTULO IV**, fizemos a descrição da aplicação e a análise das respostas dos estudantes. Optamos por aplicar esse questionário a estudantes do quinto semestre da mesma universidade na qual aplicamos o questionário exploratório, também do curso Licenciatura em Matemática, a fim de verificar se as dificuldades apresentadas durante o estudo persistiam mesmo após terem concluído essa fase.

Finalmente, no **CAPÍTULO V**, apresentamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO I

Problemática

Desenvolvemos nossos estudos desde a pré - escola até o ensino médio, em escolas da Rede Estadual de Ensino da periferia do município de Guarulhos, escolas nas quais as condições, tanto físicas quanto em relação a materiais disponíveis, não eram das melhores e os professores tinham de se desdobrarem para oferecer o melhor possível para nós alunos.

Ao longo da nossa vida escolar, encontramos várias dificuldades em relação aos conteúdos “transmitidos” pelos professores, sendo que os relativos à matemática eram os que conseguíamos assimilar com mais facilidade, ou poderíamos dizer, com um pouco menos de dificuldade.

Já no final do Ensino Médio, começamos a pesquisar o mercado de trabalho e nosso objetivo, então, passou a ser o de nos tornar promotor público, o que necessitaria que cursássemos Direito, mas para alcançar esse objetivo sabíamos que não seria fácil. Foi então que tivemos a idéia de entrar em um curso de licenciatura, com o qual poderíamos ministrar aulas, para em seguida cursar Direito.

No ano de 1999, ingressamos no curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da Grande São Paulo. Inicialmente, decidimos por esse curso, pois era a disciplina em que tinha mais facilidade quando estudantes do ensino básico.

Ao ingressarmos, imaginávamos que seria um curso fácil, mas logo nas primeiras aulas pudemos perceber que, ao contrário do que pensávamos, seria muito difícil e, que nos ensinos Fundamental e Médio, não havíamos tido uma boa base, pois muitas definições que os professores apresentavam como revisão, para nós, eram novidades. Isso fez com que procurássemos materiais sobre matemática do ensino fundamental para estudar e fomos numa crescente partindo, depois, para os livros do ensino médio e, finalmente, começamos a entender mais as aulas, sendo que demoramos quase dois semestres para fazer esse estudo.

No curso de Matemática, as disciplinas que chamavam a atenção e nos encantavam , eram as de Cálculo Diferencial e Integral[1], nas quais se estudavam as funções, suas propriedades, limites, derivadas e integrais. Mas, eram também as disciplinas nas quais apareceram nossas maiores dificuldades, quanto ao estudo de vários teoremas, principalmente sobre continuidade, e também sobre limite e derivada.

Na disciplina Cálculo Diferencial e Integral II tivemos uma grande surpresa ao iniciar o estudo sobre Funções de duas variáveis, pois o professor abordou, inicialmente, as curvas de nível, sem sequer falar sobre domínio, contradomínio e imagem, passando às derivadas parciais e, logo depois às integrais duplas. Esse fato gerou muitos problemas no momento de identificar os limites de integração da integral dupla, pois demorou um pouco para descobrirmos que o domínio de uma função de duas variáveis representava uma região do plano xy e que a região de integração era um subconjunto do domínio da função.

Durante a graduação, começamos a ministrar aulas como professor eventual[2] e com o passar dos dias, fomos nos apaixonando pelo magistério e acabamos desistindo do objetivo de sermos promotor público. No final da graduação, em 2001, tivemos aulas atribuídas na rede estadual de ensino de São Paulo e, com isso, pudemos sentir ainda mais quão gratificante é essa profissão. Tudo isso nos levou à especialização em Educação Matemática.

No ano de 2002, nos matriculamos num curso de pós-graduação Lato - Sensu em Educação Matemática, em que tivemos contato com diversas

---

[1] Havia na grade curricular as Disciplinas Cálculo I, II, III e IV.

[2] Termo utilizado nas escolas da rede estadual de São Paulo para se referir ao professor que substitui os professores ausentes em um determinado dia.

pesquisas e com as novas tendências da Educação Matemática, mais voltadas para a linha norte-americana.

Em 2004 concluímos a especialização, cujo título da monografia foi “O ensino-aprendizagem da divisão de números racionais positivos através da resolução de problemas”.

Neste mesmo ano, fomos convidados a ministrar aulas para uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da mesma universidade, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral VI[3]. Pudemos perceber que os estudantes, assim como nós quando estudante de graduação, apresentavam dificuldades para determinar os limites de integração. A partir de então, nos semestres seguintes, novamente, atribuíram-nos outras turmas da mesma disciplina e, a maioria dos estudantes não conseguia determinar tais limites tanto para integral dupla como para tripla.

Ministramos também, por duas vezes, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral que aborda o início do estudo das funções de duas variáveis[4] e, pudemos perceber que muitos estudantes apresentaram dificuldades ao se depararem com as funções de duas variáveis, principalmente na parte inicial. Fato que constatamos, nos momentos de avaliação. Pudemos perceber também, durante as aulas, que os principais entraves apareceram logo no início do estudo da definição das funções de duas variáveis até o estudo de limite dessas funções.

Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que abordam funções de várias variáveis, notamos que muitos alunos, mesmo aqueles bem sucedidos nas disciplinas de Cálculo que abordam funções de uma variável, não obtiveram o mesmo sucesso quando se depararam com uma função de mais de uma variável, principalmente no que diz respeito à interpretação de seu significado e de sua representação gráfica. Isso gerava uma série de problemas, pois apenas decoravam os procedimentos de cálculo, sem entender realmente o que estavam fazendo.

---

[3] Em 2004 o conteúdo a ser desenvolvido nessa disciplina iniciava-se com integrais duplas, triplas integrais de linha, etc. Hoje, a disciplina é denominada Cálculo Diferencial e Integral VI, devido a uma reformulação da grade curricular.

[4] Nesta disciplina é realizado o estudo das funções de duas variáveis, mais precisamente, do domínio, gráficos de funções de duas variáveis, curvas de níveis, derivadas parciais de primeira e segunda ordem, máximos, mínimos e pontos críticos de funções de duas variáveis.

Com uma inquietação muito grande, resolvemos partir em busca de um curso de Mestrado em Educação Matemática a fim de desenvolver uma pesquisa sobre funções de duas variáveis. Nos matriculamos, então, no Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, da PUC-SP, freqüentando, semanalmente, o grupo de pesquisa “Matemática no ensino superior: Didática do Cálculo”, que tem desenvolvido trabalhos sobre Cálculo, desde a concepção de números, limites de funções, derivadas, integrais, teorema fundamental do Cálculo. E iniciamos o estudo das funções de duas variáveis.

No início desta pesquisa, decidimos realizar um levantamento bibliográfico sobre o ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no que diz respeito às funções de duas variáveis e pouco, ou quase nada encontramos.

Os trabalhos encontrados sobre tal assunto foram um artigo e duas teses. O artigo das pesquisadoras Néri Terezinha Both Carvalho e Rosimary Pereira, intitulado “O software ‘MAPLE’ no estudo de funções de várias variáveis”, publicado na ‘Educação Matemática em Revista’, n. 17, em dezembro de 2004 pela SBEM[5], que apresenta os resultados de um estudo sobre funções de várias variáveis utilizando esse software, em particular o estudo dos gráficos e de curvas de níveis. As duas teses são de Gerard Emile Grimberg, defendida na Faculdade de Filosofia da USP-SP, no ano de 2001, sob o título “A constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna”, que aborda, numa linha filosófica, o surgimento das funções de várias variáveis; e a de Afonso Henriques apresentada a Université Joseph Fourier – Grenoble, em 2006, intitulada “L’enseignement et l’apprentissage des Integrales Multiples: Analyse Didactique Integrant l’usage du logiciel Maple” que trata do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas com o recurso do software Maple.

Em seu artigo, Carvalho e Pereira apresentam um trabalho sobre a utilização do software Maple V como ferramenta para o estudo de funções de várias variáveis, mais precisamente para o gráfico das funções e das curvas de nível, com estudantes de duas classes, sendo uma do curso de Engenharia (Cálculo B) e outra do curso de Física (Cálculo 2) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

---

[5] Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

No estudo foi empregado o software MAPLE V, para a realização de atividades envolvendo domínio, gráfico e curvas de nível de funções de duas variáveis. As pesquisadoras observaram que, em muitos casos, houve confusão entre a representação gráfica realizada com o auxílio do software e a teoria estudada em sala de aula.

Em uma das atividades, foi realizado o estudo sobre o domínio de uma função cuja representação gráfica é um parabolóide em coordenadas retangulares e o software utilizado apresentava apenas uma parte da superfície, sendo necessária uma mudança para as coordenadas polares para, então, obter o parabolóide referente a todo o seu domínio. Esse fato gerou confusão, pois, segundo as pesquisadoras, para muitos estudantes quando se trabalha com o computador, esse não apresenta respostas incorretas e, portanto, admitiam como correto o gráfico em coordenadas cartesianas.

Segundo as autoras, na análise do desenho os alunos realizam uma interação entre os níveis teórico e gráfico e essa manipulação permite a visualização e a explicitação do conteúdo, objeto da atividade. Ainda segundo as autoras, a "apreensão perceptiva"[6] não é suficiente para aprendizagem quando se estuda o desenho – Maple, fazendo-se necessária a "apreensão operatória"[7], que se dá pela manipulação dos recursos do Maple V, permitindo que o desenho (gráfico) exerça o papel de ferramenta heurística na fase da investigação do aluno.

As autoras apontam em suas conclusões que o fato da não identificação por parte dos alunos, da superfície que representa a função estudada, os leva a aceitar o gráfico apresentado na tela computador, sem muito questionamento, o que pode implicar em uma interpretação errônea do gráfico. Destacam que outro fato relevante que também prejudica o estudo sobre a representação gráfica de funções de duas variáveis é a determinação dos limites das variáveis livres x e y, ou seja, o domínio da função.

---

[6] "É aquela que permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou objeto, seja no plano ou no espaço" (DUVAL, 1994, p. 123; tradução livre).

[7] "É a apreensão de uma figura dada em suas diferentes modificações possíveis em outras figuras" (Duval, 1994, p. 124; tradução livre).

Henriques (2004) desenvolveu seu trabalho com estudantes e professores da Universidade Estadual de Santa Cruz (Bahia-BA), Universidade do Estado de Bahia – Campus de Teixeira de Freitas (Bahia-BA) e da Universidade Federal de Campina Grande (Paraíba-PB), sobre o ensino e aprendizagem de integrais múltiplas e suas aplicações no cálculo de áreas e volumes, utilizando também o software Maple como ferramenta. Seu objetivo foi o de compreender as dificuldades encontradas pelos alunos e de estudar em que medida a utilização de um software como o Maple pode ajudá-los a superar essas dificuldades, favorecendo a interação entre representação gráfica e representação algébrica desses objetos.

O autor destaca que, ao analisar a produção dos estudantes, constatou certas lacunas na aprendizagem das Integrais Múltiplas. Ele ressalta que os estudantes, freqüentemente começam a resolução dos exercícios pelos traçados dos desenhos a mão livre e que a representação gráfica de sólidos predomina em suas práticas, mas, que na maior parte dos casos, essa representação com papel/lápis é difícil e, os desenhos feitos não são suficientes para permitir a visualização do domínio de integração, o que mostra a falta de um trabalho de interação entre a representação gráfica e a representação algébrica. Diz ainda que, parece que essa interação não é desenvolvida em uma prática explicita pelos professores, ou seja, não mostram como os estudantes devem apoiar-se nos desenhos para resolver os exercícios, parecendo que esse trabalho é deixado a cargo do estudante.

Em relação aos professores, Henriques diz que eles mostraram certas tendências às estratégias da interpretação geométrica[8], da representação gráfica e da utilização dos recursos dos instrumentos informáticos, para facilitar a ligação entre os dois primeiros a fim de compreender a representação algébrica. E que reconhecem a existência de certas dificuldades ligadas ao ensino das Integrais Múltiplas, sendo que acreditam que boa parte delas aparece, particularmente, nos exercícios que julgam difíceis.

---

[8] O autor classifica a interpretação geométrica como uma representação que pode ser mental, ou seja, sem traçar explicitamente, ou de maneira precisa, os desenhos do sólido.

Já Grimberg (2001), em sua pesquisa, numa linha filosófica, procura dar conta do nascimento e da constituição da Análise Moderna no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. Destaca três etapas neste processo:

- A primeira é a concepção de Leibniz do seu algoritmo diferencial. O conceito de infinito que era filosófico torna-se matemático e físico, implicando em um estudo das relações que entretêm a metafísica, a lógica, a matemática e a física, em sua análise;
- A segunda se caracteriza pela aparição do conceito de função e a reorganização da análise do infinito em torno deste conceito feita por Euler e, independentemente dele, por Fontaine e Clairaut. Esta fase é interna à matemática.
- A terceira consiste no desenvolvimento combinado da Análise e da Mecânica. O conceito de função de várias variáveis permite a representação analítica das grandezas físicas. Os princípios de d'Alembert e de Maupertius, dotados dessa representação, levam, dos problemas da mecânica, às equações diferenciais parciais. A introdução por Lagrange do cálculo das variações, elaborado sobre a base do conceito de função de várias variáveis, encerra a síntese da Mecânica Analítica. Essa última acarreta a abertura de um novo domínio da matemática, a resolução das equações diferenciais parciais, que enriquece o conceito de função.

O autor ressalta que a interdependência entre Análise e Mecânica coloca o problema filosófico da relação a uma teoria científica com o real da Natureza e, o quanto a Mecânica Analítica é contemporânea da filosofia das ciências defendida por d'Alembert e da concepção kantiana do que é o objeto de uma ciência.

Embora tenhamos encontrado alguns trabalhos sobre as funções de duas variáveis, decidimos analisar as pesquisas realizadas sobre funções de uma variável para buscar conhecimentos que poderiam nos auxiliar em nossa pesquisa.

Considerando o cenário nacional observa-se uma preocupação crescente com os problemas do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral de um modo geral, como comprovam os levantamentos de pesquisas publicadas nos últimos anos de alguns programas de pós-graduação (Sad (1998), Villarreal (1999), Souza Junior (2000), Catapani (2001), Rezende (2003), Olimpio Junior (2005), Scucuglia (2006), Mariani (2006), Vidigal (2007), Anacleto (2007), entre outras). O que se estende, também, para o cenário internacional, como mostram os trabalhos de Sierpinska (1987), Tall (1990), entre outros.

Além dos trabalhos mencionados, pudemos verificar em várias pesquisas que desde há muito tempo, é alto o nível de reprovação e de desistência em Cálculo Diferencial e Integral. Barufi (1999) chama a atenção para o baixo índice de aprovação nos cursos oferecidos pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) no ano de 1995, nas áreas de ciências exatas, ciências humanas e biológicas. Segundo a pesquisadora, ”a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência – em MAT135 (Cálculo para Funções de uma Variável Real) foi de 66,9%, e em MAT131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8%”.

Dall’anese (2000) também destaca os altos índices de reprovação nessa disciplina e diz que esse fato sinaliza para a existência de problemas em seu ensino e aprendizagem. O autor critica a abordagem do conteúdo por meio de aulas expositivas, em que o professor apresenta as definições, propriedades e exemplos e sugere que os estudantes resolvam listas de exercícios, pensando ter dado conta de cumprir os objetivos.

Em sua pesquisa, Dall’anese (2000) apresenta um estudo sobre o ensino e aprendizagem do conceito de derivada, em que propôs uma seqüência didática com atividades apresentadas em fichas, para que os estudantes, em duplas, pudessem discutir sobre a essência do conceito. Aponta algumas dificuldades apresentadas pelos alunos; dentre elas as que nos chamaram a atenção foram:

> Ao comparar os protocolos com o quê os alunos expõem em plenária, pude constatar que eles apresentam dificuldades em expressar-se por escrito. Essa dificuldade parece mascarar a manifestação de sucesso do aluno ante algum saber culto, podendo o professor interpretar seu protocolo como manifestação do fracasso.
>
> Os alunos interpretam enunciados de questões matemáticas de modo incorreto, o que conduz a conjecturas sem sentido.
>
> Os alunos apresentaram dificuldades em relação à localização de pontos no gráfico de uma função, sendo que a possível causa provém de falhas na interpretação da notação algébrica de pontos.
>
> Não relacionam o coeficiente angular da equação com a inclinação da reta.

Em sua pesquisa, Pelho (2003) teve por objetivo introduzir o conceito de função por meio da compreensão do significado das variáveis dependentes e independentes e do relacionamento entre elas. Para isso, elaborou e aplicou a alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola particular de Araçatuba, uma seqüência didática fundamentada nos aspectos da Engenharia Didática e embasada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Uma das ferramentas de ensino utilizada na aplicação da seqüência foi o software Cabri-Géomètre II o que, segundo a autora, deixou os estudantes motivados, além de propiciar a realização da articulação entre os diferentes registros de representação da função, ou seja, do gráfico para o numérico e desse para o algébrico.

Pelho (2003) aponta ainda que responder uma questão matemática, no registro da língua natural, representa uma dificuldade para os alunos, pois muitos optaram por responder esse tipo de questão com expressões algébricas ou relações numéricas. Destaca ainda que os protocolos que foram apresentados, nesse registro, careciam de mais clareza e rigor.

Costa (2004) realizou um estudo de caráter diagnóstico, com oito estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade pública do estado do Pará, cujo intuito foi investigar os conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função. Os dados da pesquisa foram obtidos por meio da aplicação de um questionário e da realização de intervenções e foram confrontados com os de pesquisas similares.

A autora aponta que para um determinado sujeito, a compreensão referente ao conceito de função, de domínio e imagem, não acontece simplesmente pela inserção em atividades contextualizadas que o motivem a vivenciar essa situação e que, a concepções apresentadas pelos estudantes é influenciada pelo tempo gasto com tais funções nos currículos escolares.

Cientes das dificuldades dos alunos e da falta de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, relativamente a funções de várias variáveis, decidimos realizar este trabalho, tendo como base as dificuldades apontadas pelos pesquisadores como: a relação entre as variáveis, a identificação do domínio de uma função de duas variáveis, a representação gráfica e a conversão entre os registros de representação envolvidos inerentes ao estudo das funções de duas variáveis. Buscaremos responder as seguintes questões: Quais as dificuldades e saberes manifestados pelos alunos relativos à transição[9] do estudo de função de uma variável para o de duas variáveis, no que diz respeito ao conceito de variáveis dependente e independente, ao domínio de função, os gráficos de função e a relação entre este e o gráfico do seu domínio? E quais manifestações dessas dificuldades são reveladas no estudo das derivadas parciais?

A seguir apresentaremos algumas das possíveis causas das dificuldades que acreditamos, de acordo com a nossa prática, ser encontradas pelos alunos frente às definições apresentadas por alguns autores em livros que abordam os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral envolvidos em nossa pesquisa, ou seja, com a definição de função, do seu gráfico e do conceito de derivadas e derivadas parciais de primeira ordem.

Algumas abordagens na apresentação da definição de funções de uma e duas variáveis

Decidimos realizar esta discussão para apontar as possíveis causas das dificuldades apresentadas pelos alunos ao estudarem as funções de duas variáveis, pois neste momento, supostamente, já realizaram o estudo, das funções de uma variável e trazem consigo alguns conhecimentos que podem levá-los a confundir com os conceitos referentes às funções de duas variáveis.

Discutiremos, a partir de agora, diferentes apresentações de definições, por alguns autores que abordam o Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática sobre funções de uma e de duas variáveis.

As definições serão apresentadas na ordem que acreditamos ser mais significativas para o acesso ao conceito de função, sendo que as duas primeiras valorizam as relações entre as variáveis dependente e independente e, as outras duas, são em uma abordagem estrutural, ou seja, numa perspectiva conjuntista.

---

[9] Utilizamos o termo transição não para representar o momento do estudo, mas das dificuldades que representam a passagem do estudo das funções de uma para duas variáveis.

Em de nossa prática, pudemos perceber que os estudantes, na maioria dos casos, acham que a relação entre as variáveis nas funções de uma variável, ou seja, em que a variável *y* sempre depende da variável *x*, se estende para as funções de duas variáveis em que *z* depende de *x* e *y*, e continuam considerando que, nesse caso, *y* continua dependendo de *x* e, uma vez que esclarecermos esse fato, a compreensão do conceito de função passa a ser maior. Por outro lado, os estudantes fazem confusão entre os elementos do domínio das funções de uma e os de duas variáveis.

Em sua obra, Caraça (2003, p. 121) apresenta o conceito de função da seguinte forma:

> "Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x), se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x ® y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente."

Essa definição valoriza a relação entre as variáveis, quanto à dependência entre elas, o que dá um sentido de movimento ou, podemos dizer, o significado da correspondência entre os elementos dos conjuntos, sendo que o movimento se dá do conjunto a que pertencem as variáveis independentes ao conjunto a que pertencem as variáveis dependentes, ou seja, a dependência de y em relação à x.

Courant e Robbins (2000, p. 335) também utilizam a interdependência das variáveis para definir função: "uma função matemática é simplesmente uma lei que rege a interdependência de quantidades variáveis. Ela não implica na existência de qualquer relação de "causa e efeito" entre elas" e enfatizam "apenas a forma da *relação* entre as duas variáveis é considerada pelo matemático". Os autores, nessa definição, utilizam o termo variável como sendo "entes matemáticos com os quais temos a liberdade de escolher arbitrariamente a partir de todo um conjunto S de entes".

Acreditamos que as definições que apresentam a relação de dependência entre as variáveis se tornem mais significativas para os estudantes, uma vez que se conseguirem distinguir os conceitos de variáveis dependente e independente, essa definição se estende mais facilmente para o de conceito de funções de duas variáveis, pois, nas definições estruturais, ou seja, as que são definidas a partir de dois conjuntos, os elementos do primeiro conjunto, “conjunto domínio”, parecem ser iguais para as funções de uma e de duas variáveis, o que pode fazer com que os alunos não percebam a diferença, ou seja, que para as funções de uma variável os elementos do domínio são números reais, enquanto os elementos do conjunto domínio das funções de duas variáveis são pares ordenados.

Seguindo a abordagem que envolve a interdependência entre as variáveis Courant e Robbins (2000, p. 347), definem as funções de duas variáveis da seguinte forma: “se a variável independente P é um ponto do plano com coordenadas (x, y), e se a cada ponto P corresponde um único número u – por exemplo, u pode ser a distância entre o ponto P e a origem – então geralmente escrevemos $u = f(x, y)$.” Os autores ainda destacam que essa notação também será utilizada se duas quantidades x e y aparecerem desde o início como variáveis independentes.

Comparando-se as definições apresentadas por Caraça (2003), para função de uma variável, e Courant e Robbins (2000), para função de duas variáveis, notamos que a variável independente no caso de função de uma variável representa um conjunto de números, enquanto na função de duas variáveis representa um conjunto de pontos do plano. Esse fato, que inicialmente “parece” bem simples, pode vir a causar dificuldades no prosseguimento do estudo das funções de duas variáveis, como por exemplo:

- quando se aborda o conceito de limite de função de uma variável em um ponto é necessário verificar os limites laterais, ou seja, limite à esquerda e à direita; já para funções de duas variáveis, temos que considerar todos os caminhos possíveis, pelos quais um ponto do domínio da função pode se aproximar do ponto no qual se quer estudar o limite.
- para a derivada de uma função de uma variável, a variação se dá apenas em relação à variável independente, tanto quando se quer obter a derivada em um ponto ou quando se deseja determinar a função derivada e, para as funções de duas variáveis é necessário que se determinem as derivadas parciais, ou seja, deve-se derivar em relação as duas variáveis independentes, sendo uma de cada vez;

- para as integrais definidas, que não abordaremos nesse trabalho, os limites de integração são os extremos de um intervalo; já para as integrais duplas, os limites de integração são a fronteira de uma região do plano.

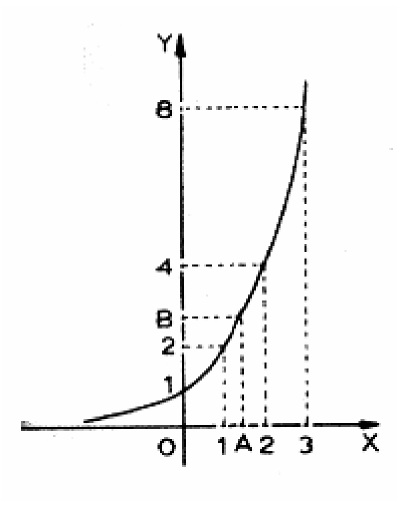
Em seu trabalho, Caraça (2003) diz que há várias maneiras de se estabelecer a correspondência entre a variável independente para a dependente, ou seja, como se dá em cada caso a lei de correspondência entre elas. E apresenta duas formas de definir cada função particular $y(x)$, que são:

- <u>Definição analítica</u>: Consiste em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y.

Tomemos como exemplo, a igualdade $y = 2x^3 - 1$. Efetuando as operações indicadas no segundo membro, vemos que essa igualdade faz corresponder a cada valor de x, um valor de y, por exemplo:

a $x = 1$® $y = 1$	a $x = 3$® $y = 53$
a $x = 0{,}5$® $y = -0{,}75$	a $x = -1$® $y = -3$, etc...

- <u>Definição geométrica:</u> Seja (Fig. 1) um sistema de referência cartesiano e uma curva (C) que não seja cortada em mais de um ponto por urna paralela ao eixo Oy.



Essa curva permite definir uma função y(x), para o que basta fazer o seguinte:

Seja *P* um ponto qualquer da curva e tiremos, por ele, perpendiculares aos eixos, as quais os encontram nos pontos A e B*;* sejam a e b os números reais (relativos) iguais, respectivamente, *as* medidas algébricas de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Suponhamos feita uma construção análoga para *cada* ponto da curva e façamos corresponder a cada número a o número b obtido pela construção indicada. Fica assim definida uma correspondência do conjunto dos aa — variável x — ao conjunto dos bb — variável y — fica, portanto, definida uma função y(x).

O autor enfatiza que "o conceito de função não se confunde com o de expressão analítica; - esta é apenas um modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis" (p. 123) e diz que "no entanto, estas duas idéias andam constantemente confundidas na linguagem e na escrita dos matemáticos!" (p. 123). Duval (2003), cuja teoria será discutida no próximo capítulo, diz que para que não haja essa confusão é necessário que se disponha de ao menos dois registros de representação diferentes e é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática.

Essas definições apresentadas por Caraça (2003) e Courant e Robbins (2000), não são conjuntistas, ou seja, não estão baseadas explicitamente na Teoria dos Conjuntos, dando mais evidência à interdependência entre as variáveis dependente e independente. Já em alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, as definições são fundadas nessa teoria, ou seja, são definições estruturais, como podemos observar nas definições que seguem:

Lima (2004, p. 13) diz que

> Uma função $f : A \to B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado o domínio da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x).

O autor ainda afirma que a regra que permite obter o valor f(x) Î B quando é dado x Î A é inteiramente arbitrária, porém, sendo sujeita as duas condições seguintes:

> 1ª. Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer f(x) para todo $x \in A$.
>
> 2ª. Não haver ambigüidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x) \in B$.

Já Stewart (2003, p. 12) define “uma função f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado f(x), em um conjunto B”. O autor prossegue dizendo que o conjunto A é chamado de domínio da função e que o número f(x) é o valor de f em x, sendo que a variação de f é o conjunto de todos os valores possíveis de f(x) quando x varia por todo o domínio. Ainda define que o símbolo que representa um número arbitrário qualquer do domínio de uma função f é denominado de variável independente, e o que representa um número qualquer na variação de f é chamado de variável dependente.

Já para as funções de duas variáveis, Stewart (2003, p. 873) utiliza a seguinte definição: “Uma função de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x,y) de um conjunto D um único valor real denotado por f(x,y). O conjunto D é o domínio de f e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$.”

A notação mais usual para indicar que a função assume os valores tomados por f num ponto genérico (x, y) é $z = f(x,y)$, sendo x e y as variáveis independentes e z a variável dependente.

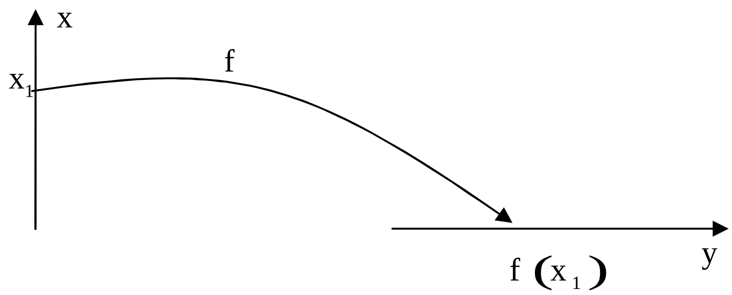
Ambos os autores definem função, o domínio e o contradomínio, sendo que Lima (2004) destaca as condições para que uma relação seja uma relação funcional ou função, enquanto Stewart (2003) a faz de forma implícita.

Citamos duas definições dadas por Stewart (2003), respectivamente, para função de uma e duas variáveis que podem levar alguns professores a imaginar que se o estudante entender a definição para função de uma variável poderá, facilmente, compreender a de duas variáveis. Mas, tal fato não ocorre de forma simples, pois apesar de apresentarem dois conjuntos, o domínio e o contradomínio, e uma regra que associa a cada elemento do conjunto domínio um único elemento do conjunto contradomínio, os elementos de tais domínios não são semelhantes para as funções de uma e de duas variáveis.

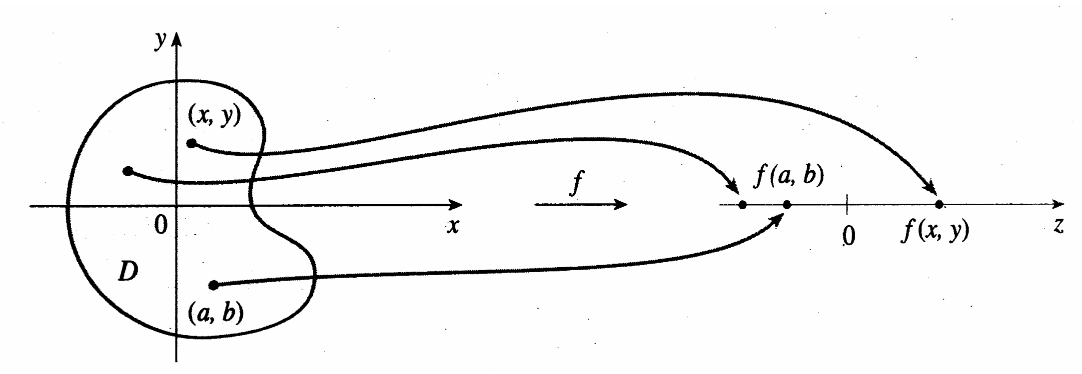
Reafirmamos que na função de uma variável real, os elementos do domínio são números e, para as funções de duas variáveis os elementos são pares ordenados de números. Se não observarmos com um olhar crítico, não conseguimos perceber que um número representa, geometricamente, um ponto em uma reta, enquanto que um par ordenado representa um ponto de um plano.

Na representação geométrica dessas situações, tem-se uma idéia melhor da diferença:

Em uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tanto o conjunto domínio, como o contradomínio são representados graficamente por uma reta, ou um intervalo dessa reta, e a função f associa cada número x do domínio a um único número $f(x)$ do contradomínio:



Já para no caso de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o conjunto domínio é representado por um plano, ou uma região do plano; e o contradomínio por uma reta, ou um intervalo dessa reta. A função f associa a cada ponto (x, y) do domínio a um único número $f(x, y)$ do contradomínio.



Tendo em vistas as diferenças em relação ao domínio das funções de uma e duas variáveis, buscaremos ressaltar suas implicações quanto aos seus gráficos.

Representação gráfica de funções

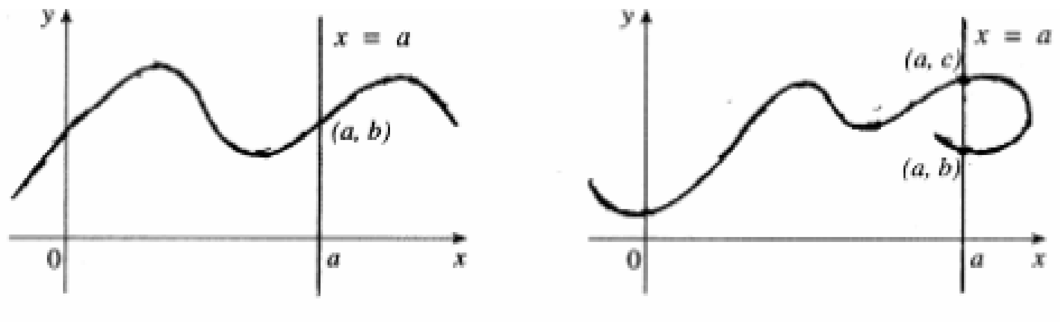
Uma maneira de representar uma função além do registro algébrico é por meio de seu registro gráfico, que, também, é muito abordado quando se fala de função de uma variável e, que se torna um tanto difícil quando se passa ao estudo das funções de duas variáveis.

Buscaremos a partir de agora, discutir os possíveis fatores que podem gerar dificuldades para os estudantes , quando se estudam funções de duas variáveis, baseados na definição apresentada por alguns autores de livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral.

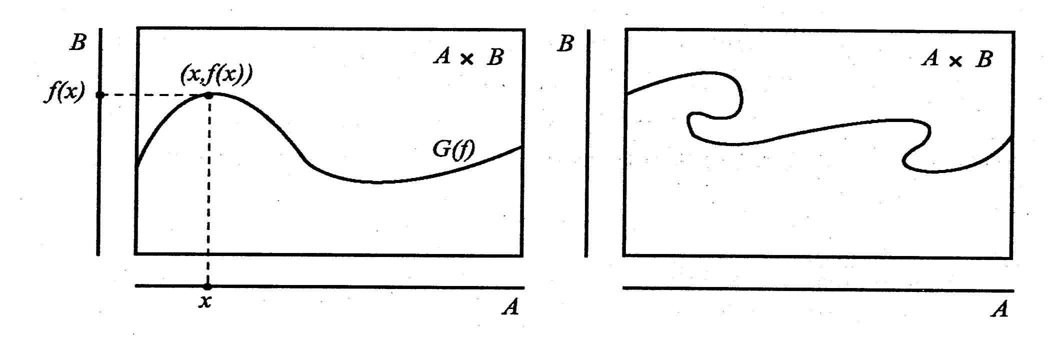
Courant e Robbins (2000), dizem que o caráter de uma função pode ser compreendido mais claramente por um simples gráfico e, apresentam alguns exemplos de funções como a afim, que tem por gráfico uma reta; a função quadrática cujo gráfico é uma parábola, etc. Dizem que “por definição, o gráfico de qualquer função $u = f(x)$ é o conjunto de todos os pontos no plano cujas coordenadas (x, u)estão na relação $u = f(x)$.

Stewart (2003, p. 12) diz que “se f for uma função com domínio A, então seu gráfico é o conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)) | x \in A\}$” e em seguida expõe que “o gráfico de f consiste em todos os pontos (x, y) do plano coordenado tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f”.

Sobre o registro gráfico, o autor ainda apresenta o “teste da reta vertical” definindo que “uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical corta a curva mais de uma vez” (p. 17). E apresenta o seguinte esquema, em que a primeira figura, à esquerda, pode representar o gráfico de uma função enquanto a figura da direita não pode.



Já Lima (2004, p. 14) diz que "o gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja, $G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B; y = f(x)\}$". O autor diz que é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x, para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f : A \to B$, ou seja, "que toda reta paralela ao eixo das ordenadas, traçada por um ponto de A, deve cortar o gráfico de G num e num só ponto" (p. 15). E, assim como fez Stewart, apresenta o esquema para ilustrar a situação:



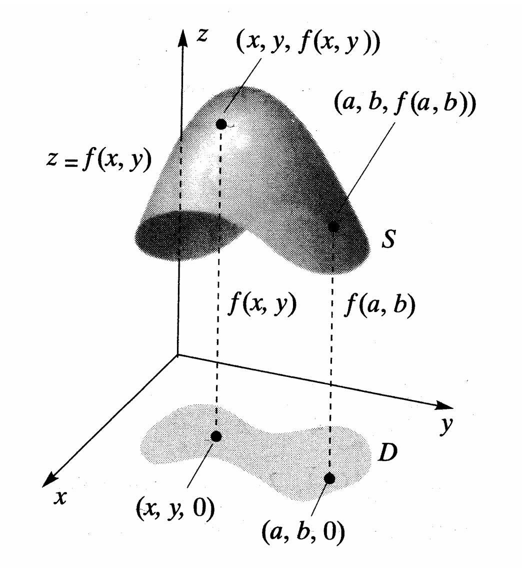
Sendo que a representação à esquerda é o gráfico de uma função $f : A \to B$ e a figura da direita representa o produto cartesiano $A \times B$, mas não pode ser o gráfico de uma função.

Courant e Robbins (2000, p. 347), dizem que

> "do mesmo modo que um gráfico fornece uma representação geométrica de uma função de uma variável, uma representação geométrica de uma função $u = f(x, y)$ de duas variáveis é fornecida por uma superfície no espaço tridimensional com *x, y, u* como coordenadas. A cada ponto (*x, y*) no plano *x, y*, associamos o ponto no espaço cujas coordenadas são (*x, y*) e $u = f(x, y)$".

Para as funções de duas variáveis, numa definição mais estrutural, Stewart (2003, p. 876) define que: “se f é uma função de duas variáveis com domínio D, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e (x,y) pertençam a D”.

Swokowski (1994, p. 348) diz que “o gráfico de uma equação $z = f(x, y)$ em um sistema coordenado xyz é, em geral, uma superfície S de algum tipo”. O autor continua, “representando o domínio D por uma região do plano xy, então o par (x,y) em D é representado pelo ponto $(x,y, 0)$. Os valores funcionais $f(x, y)$ são as distâncias (com sinal) do plano xy a S. Note que o autor utiliza o termo “equação” ao invés de “função” para enfatizar o relacionamento entre as variáveis.



Poderíamos estender o teste da reta vertical para função de uma variável, apresentada por Stewart (2003) e Lima (2004), para as funções de duas variáveis da seguinte forma: “uma superfície em um sistema coordenado xyz é o gráfico de uma função representada por $z = f(x, y)$ se, e somente se, nenhuma reta vertical paralela eixo *z*, corta a superfície mais de uma vez”.

Ao verificarmos as definições para funções de uma variável e duas variáveis, notamos que apesar de semelhantes na língua natural, ao se realizar a conversão para o registro gráfico, a forma de representar as funções de duas variáveis é mais complexa.

Quando se trata de uma função de uma variável, a representação é realizada no plano *xy*, ou seja, um sistema de dois eixos ortogonais, enquanto que a função de duas variáveis tem seu registro gráfico realizado no sistema de três eixos ortogonais *xyz*.

Com os dois eixos ortogonais, o plano xy fica subdividido em quatro quadrantes e os estudantes podem visualizar todos claramente. Já no sistema de três eixos ortogonais xyz, temos três pares de eixos que constituem os planos xy, xz e yz e que dividem o espaço tridimensional em oito partes chamadas octantes.

Em geral, quando se estuda a representação no espaço tridimensional, só se costuma representar o octante em que as três coordenadas são positivas, denominado primeiro octante, sendo que os outros sete são menos explorados. Esse fato pode dificultar o momento da represetação das funções de duas variáveis, pois os estudantes necessitam conhecer os oito octantes, uma vez que as funções $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ têm como domínio um subconjunto do plano xy ou, até mesmo, todo o plano. Para a representação gráfica das funções de duas variáveis devemos levar em conta o plano tridimensional como um todo e não considerar apenas uma parte dele.

Derivadas e derivadas parciais de primeira ordem

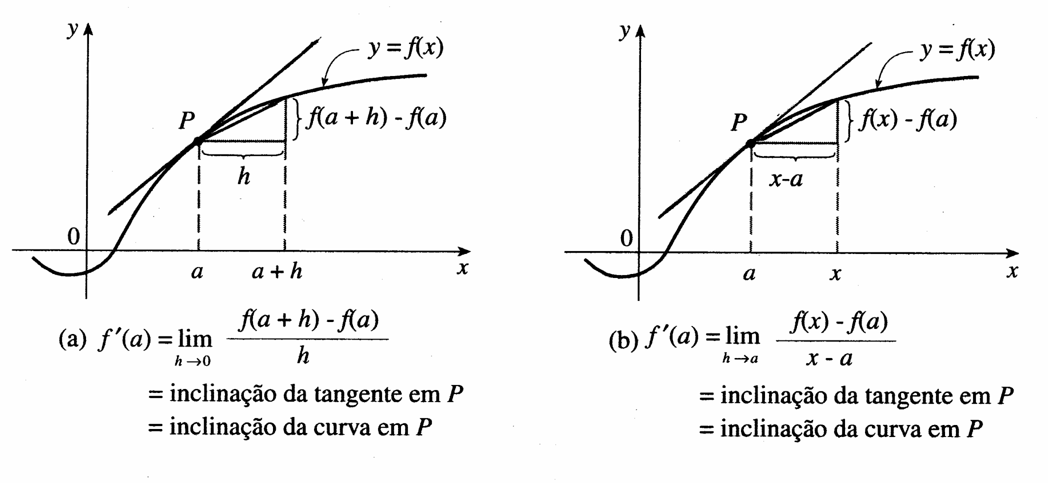
Além da definição e da representação gráfica quando da passagem do estudo das funções de uma para duas variáveis, podem ser encontradas, também, grandes diferenças entre as definições de derivadas para função de uma e de duas variáveis, o que pode dificultar o estudo das derivadas parciais.

Nesta parte apresentaremos algumas dessas diferenças e as possíveis dificuldades que os alunos podem encontrar ao iniciar o estudo das derivadas parciais de primeira ordem.

Primeiramente serão expostas as definições referentes à função de uma variável e, em seguida, as de duas variáveis.

Stewart (2003) apresenta um estudo da reta tangente a uma curva num ponto, velocidades e taxas como o incremento, taxa (instantânea) da variação de y em relação a x; a partir desse estudo, define a derivada de uma função *f* em um número *a*, utilizando a notação $f'(a)$, como $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, desde que esse limite exista.

Logo em seguida, apresenta a interpretação geométrica da derivada como a inclinação da reta tangente:



E depois, apresenta a derivada como uma função, dizendo que se variar o número *a*, substituindo a na equação $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ por uma variável x, obteremos uma nova função representada por $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, denominada derivada de f.

Utilizando a forma ponto-inclinação da equação da reta, podemos escrever a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$, no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

De forma semelhante à apresentada por Stewart (2003), Guidorizzi (1987, p. 156) apresenta a seguinte definição:

Sejam *f* uma função e *p* um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável em p ou diferenciável em p.

O autor diz que segue das propriedades de limite que

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

E que a derivada de f, em p, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p, de onde podemos escrever a equação dessa reta da seguinte forma: $y - f(p) = f'(p)(x - p)$.

Flemming e Gonçalves (1992) apresentam primeiramente a derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, definida por $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, quando esse limite existe.

Logo em seguida, apresentam a definição da função derivada de uma função da seguinte forma: "A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, (lê-se: f linha de x), tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

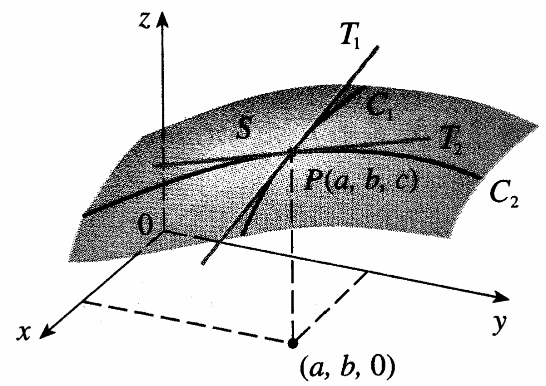
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, se este limite existir."

Vale ressaltar que a notação empregada para definir derivada, pelas autoras, pode levar o estudante a confundir o objeto matemático, função com sua representação algébrica, uma vez que utiliza o registro $y = f(x)$ denominando função, sendo que nesse caso deveriam utilizar apenas f.

Para uma função f de duas variáveis x e y, Stewart (2003) apresenta uma discussão sobre a possibilidade de, ao derivar em relação a variável x, fazer com que tal função se torne de uma única variável, para isso diz que basta considerar apenas x variável, mantendo y fixa, ou seja, fazendo $y = b$, onde b é uma constante. O mesmo vale para o caso da derivada parcial em relação a variável y, bastando fazer x constante.

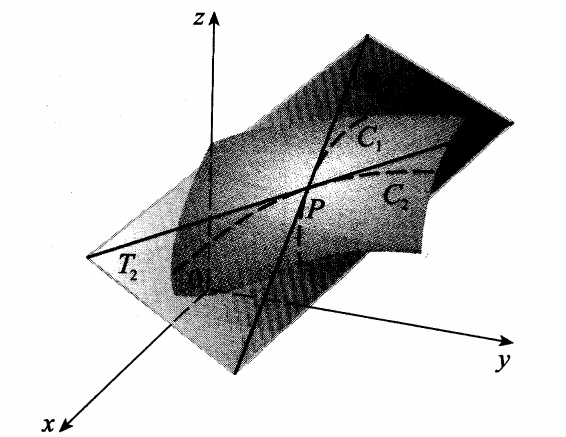
Logo em seguida, o autor define que “Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y definidas por $f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$ e $f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$”.

Stewart (2003, p. 898) apresenta a interpretação geométrica para derivadas parciais dizendo que “$z = f(x, y)$ representa a superfície S (o gráfico de f). Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ pertence a S. Fixando $y = b$, restringimos nossa atenção à curva C_1 na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S. Da mesma forma o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2”. Situações essas que podem ser visualizadas pelo gráfico a seguir



As derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ representam as inclinações das retas, T_1 e T_2,tangentes em $P(a, b, c)$ aos traços C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$.

Seguindo a mesma idéia utilizada para apresentar a interpretação geométrica das derivadas parciais como inclinação das retas tangentes, o autor define o plano tangente à superfície S no ponto P como o plano que contém as duas retas tangentes T_1 e T_2. Veja na representação gráfica a seguir:



Guidorizzi (2004, p. 174) define a derivada parcial de uma função f, em relação à x, no ponto (x_0,y_0) dizendo que “Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0,y_0) \in D_f$. Fixado y_0, podemos considerar a função g de uma variável dada por $g(x) = f(x,y_0)$”. E apresenta a partir da definição de derivada para função de uma variável, que

$$“\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0},$$

ou ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}”.$$

Logo em seguida, o autor apresenta a seguinte definição: “Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A, que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}”.$$

E expõe que “tal função denomina-se Função derivada parcial de 1ª ordem de f, em relação à x, ou, simplesmente derivada parcial de f em relação à x”.

E diz que, de modo análogo, define-se as derivadas parciais de f, em relação à y, no ponto (x_0, y_0), como

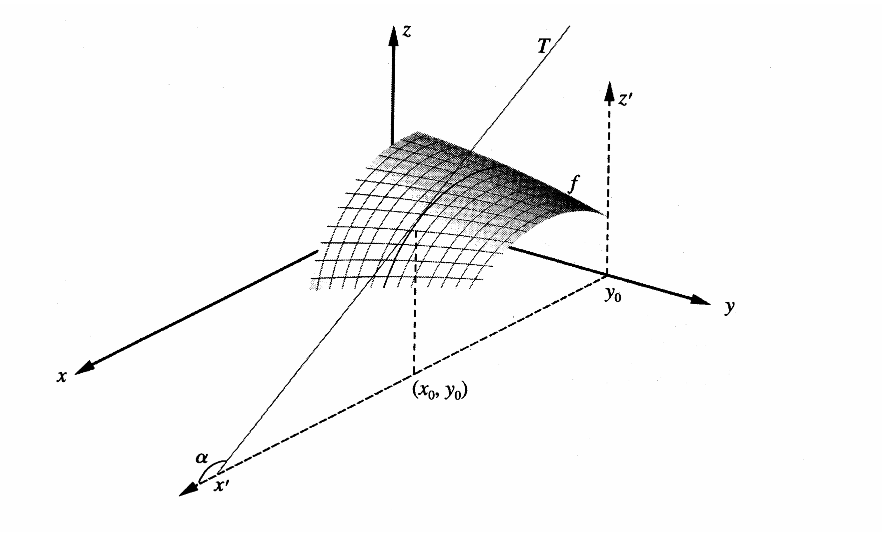
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

O autor apresenta a interpretação geométrica das derivadas parciais, por meio do seguinte exemplo:

> Suponhamos que $z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in D_f$. O gráfico da função $g(x) = f(x, y_0)$, no plano $x' y_0 z'$ (veja a figura), é a interseção do plano $y = y_0$ com o gráfico de *f*; $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é, então, o coeficiente angular da reta tangente T a essa interseção no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\alpha .$$



(p.180-181)

E sugere que o leitor interprete geometricamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Flemming e Gonçalves (1999) apresentam, assim como Guidorizzi (2004), duas definições, sendo uma para as derivadas parciais no ponto e outra para as derivadas parciais de primeira ordem como seguem:

> Sejam $\underset{z=f(x,y)}{f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in A$. Fixado $y = y_0$, podemos considerar a função $g(x) = f(x, y_0)$. A derivada de *g* no ponto $x = x_0$, denominada derivada parcial de *f* em relação à *x* no ponto (x_0, y_0), denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, é definida por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, se o limite existir. (p. 73)

E, de forma análoga, define a derivada parcial de f em relação à y no ponto (x_0, y_0) por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$, se o limite existir.

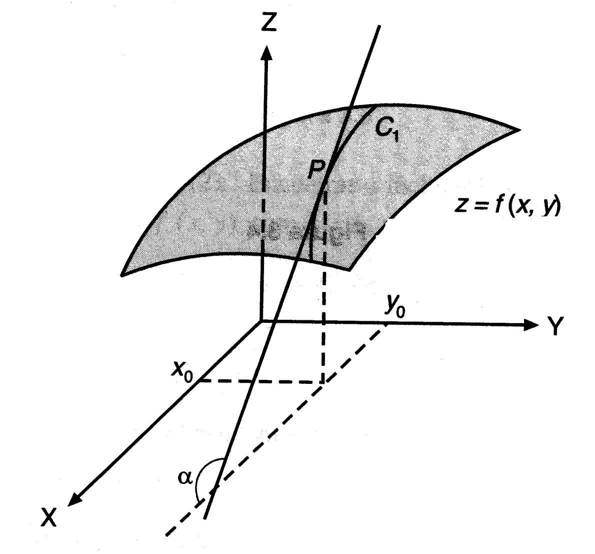
A autora apresenta a seguinte definição para as derivadas parciais de primeira ordem

> Sejam $\underset{z=f(x,y))}{f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ uma função de duas variáveis e $B \subseteq A$ o conjunto formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)$ existe. Definimos a função derivada parcial de 1ª ordem de *f* em relação à *x* como a função que a cada $(x, y) \in B$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial y}$ dado por
>
> $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,\ y)}{\Delta x}$. (p. 76)

E define analogamente, que a função derivada parcial de 1ª ordem de *f* em relação a y, como $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$.

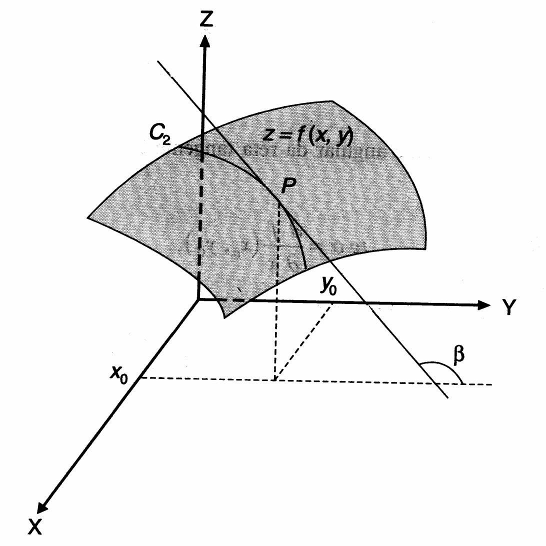
As autoras apresentam a interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função $\underset{z=f(x,y))}{f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ de duas variáveis que admite derivadas parciais em $(x_0, y_0) \in A$, como a inclinação da reta tangente a uma curva C em um ponto P.

> Para $y = y_0$ temos que $f(x, y_0)$ é uma função de uma variável cujo gráfico é uma curva C_1, resultante da intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$.
>
> A inclinação ou coeficiente angular da reta tangente à curva C_1 no ponto (x_0, y_0) é dada por $tg\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, onde α pode ser visualizado na figura



(p. 81)

Analogamente, Flemming e Gonçalves (1999), apresentam a inclinação da reta tangente à curva C_2, resultante da interseção de $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ como $\mathrm{tg}\beta = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$, em que β pode ser visualizado na figura.



Da mesma forma que ocorre com a definição de função, domínio de função e gráfico de função, podemos verificar que quando se trata de derivadas há muita diferença entre a derivada de uma função de uma variável e as derivadas parciais de função de duas variáveis.

Enquanto que, para uma função f de uma variável determina-se uma única derivada, para uma função f de duas variáveis têm-se que determinar duas derivadas, denominadas derivadas parciais, ora em relação a x, fazendo $y = y_0$, ou seja, fazendo y assumir o status de constante; ora em relação a y, fazendo, nesse caso, $x = x_0$, ou seja, agora x passa assume o papel de constante.

Em relação às derivadas parciais, parece-nos simples o fato de fazer ora uma depois a outra variável assumir o status de constante, porém não é de fácil interpretação, pois se fala que y é uma constante, mas no momento em que os estudantes vão derivar encontram a “letra” y e, para muitos, uma letra representa uma variável e não uma constante.

Outro fato desconfortável aparece no momento da interpretação geométrica das derivadas parciais, pois quando interpretam a derivada de uma função de uma variável encontram o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva em um determinado ponto e, quando se deparam com a interpretação geométrica das derivadas parciais, encontram o coeficiente angular para duas retas tangentes a uma curva num ponto.

As curvas às quais as retas que determinamos o coeficiente angular, por meio das derivadas parciais, são tangentes, também provocam certa confusão, pois são geradas a partir da interseção da superfície que representa a função com o plano obtido quando se faz uma das variáveis assumir o status de constante. Sendo que, em nossa prática docente pudemos notar que os estudantes têm dificuldades em interpretar que uma função constante é representada graficamente por um plano, uma vez que estão habituados a trabalhar com função de uma variável e realizar a representação no sistema bidimensional onde encontram uma reta.

Outro fato que causa desconforto é no momento do estudo do plano tangente a uma superfície, pois muitos não relacionam os coeficientes das retas tangentes às curvas geradas pela intersecção da superfície com os planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$, com a equação do plano tangente que contém essas retas tangentes.

Após essa discussão sobre algumas definições apresentadas pelos autores e a ingênua comparação por nós realizada na tentativa de apontar algumas das possíveis causas das dificuldades encontradas pelos estudantes no momento do estudo de função de duas variáveis, apresentaremos no próximo capítulo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, na qual nos baseamos para elaborar as questões, tanto do questionário exploratório quanto do questionário definitivo, que serão apresentados, respectivamente nos capítulos III e IV; e que também, utilizamos como ferramenta de análise para as respostas dadas pelos estudantes.

CAPÍTULO II

Fundamentação Teórico – Metodológica

Neste capítulo apresentamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, na qual no fundamentamos. E os procedimentos metodológicos que adotamos ao longo dessa pesquisa.

Os registros de representação semiótica

Na tentativa de investigarmos as dificuldades e saberes manifestados pelos estudantes relativas à transição do estudo de função de uma para duas variáveis, notadamente sobre o conceito de variáveis e a interdependência entre elas; sobre o domínio e o gráfico, a relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também, quais manifestações dessas dificuldades são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem. Elaboramos um questionário fundamentado na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, por acreditarmos que muitas das dificuldades dos estudantes estejam relacionadas à representação de conceito, em diferentes registros.

Segundo Duval (2003), para compreender as dificuldades que os estudantes apresentam na aprendizagem da matemática, de onde surgem e onde estão, é necessária uma abordagem que possa descrever o funcionamento cognitivo e que lhes dê possibilidades de compreender, efetuar e controlar a diversidade de processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino.

A atividade matemática, segundo o autor, é caracterizada pela importância e grande variedade das representações semióticas utilizadas no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, tendo em vista que, só se pode acessar os objetos matemáticos por meio de suas representações.

A necessidade de uma diversidade de representações semióticas para um objeto matemático deve-se ao fato de que eles não têm existência física e não estão diretamente acessíveis na percepção.

De acordo com Duval (2003), é necessário que se mobilize ao menos dois registros de representação diferentes para que não se confunda o conteúdo de uma representação com o objeto representado e, é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso a compreensão em Matemática.

Para Duval (1999), nem todo sistema semiótico é um registro de representação semiótico. Para que tal sistema possua esse status, deve cumprir além da comunicação, duas funções importantes do ponto de vista cognitivo, que são a objetivação e o tratamento. O autor diz que os sistemas que permitem cumprir essas duas últimas funções são registros. Sendo que os outros são códigos. Em seguida, apresenta um esquema em que destaca as duas abordagens de um sistema semiótico: a primeira como registro de representação, que tem as funções cognitivas de *tratamento*, que são transformações no interior de um mesmo registro; *objetivação*, no sentido de referenciar a relação entre a representação e o objeto representado e *comunicação* em um nível de funcionamento consciente e controlável. A segunda abordagem como código, que tem as funções cognitivas de transmissão (emissor $\rightarrow$ receptor), sinal casual de uma ação, endereçamento na memória (vindos de uma recuperação) e categorização (dados) em um nível de funcionamento automático ou reflexo.

Duval (2003) classifica os registros em cinco grupos: os sistemas de numeração, figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural e diz que “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica”.

Quando utilizamos registros de representação distintos para representar um mesmo objeto matemático, podemos realizar transformações no interior de um mesmo registro ou converter de um registro de representação em outro, o que Duval (2003) denomina, respectivamente de tratamento e de conversão.

Para o autor (2003, p. 16) “os tratamentos são transformações de representação no interior de um mesmo registro”. Podemos exemplificar a transformação quando em um sistema de numeração um mesmo número é representado por uma fração e, a partir dessa, por outra equivalente, outro exemplo seria a determinação das raízes de uma função dada no registro algébrico, por meio da resolução de uma equação.

E ainda, “as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registros conservando os mesmos objetos denotados...” (p.16). Podemos promover a conversão de registros ao trabalhar com funções ao passar, por exemplo, do registro algébrico para o registro numérico, do registro numérico para o registro gráfico, do registro algébrico para o registro gráfico, bem como as conversões inversas para representar o mesmo objeto matemático função.

Para Duval,

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são os mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. É por isso que a conversão não chama a atenção, como se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (2003, p. 16)

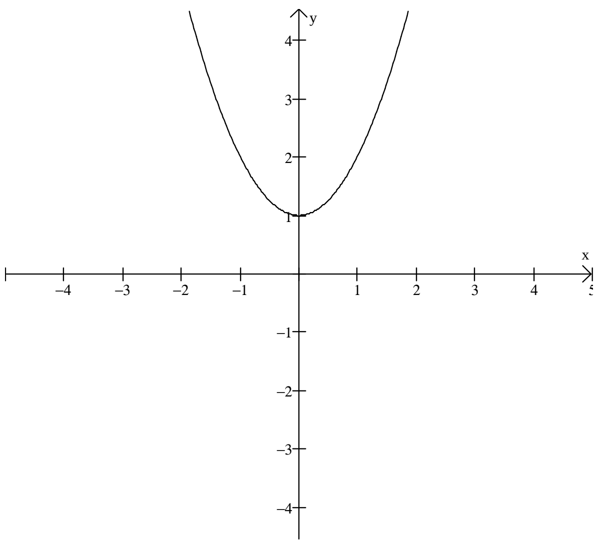
Segundo o autor “para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada.” (2003, p. 19). Ao realizar a conversão entre dois registros, pode-se fazê-la de maneira direta, sem que se encontrem grandes dificuldades, o que o autor chama de conversão congruente; ou apresentar dificuldade para se identificar no registro de chegada o objeto representado no registro de partida, ou seja, a conversão não se dá de forma direta, o que se chama conversão não-congruente. O autor fala também da importância da mudança no sentido da conversão, uma vez que essa pode ser congruente em um sentido e não ser em outro, por exemplo, no estudo de funções realizar a conversão do registro algébrico para o registro numérico se dá de forma direta, ou seja, é congruente. Mas quando se inverte o sentido da conversão do registro numérico para o registro algébrico, essa conversão não se dá de forma direta, o que caracteriza a conversão não-congruente.

Em geral, os alunos têm muitas dificuldades quando precisam fazer uma mudança de registro de representação e, essa dificuldade é muito maior quando se trata de uma conversão não-congruente, como foi apontado por K. Pavlopoulou (apud Duval, 2003, p. 20). Segundo Duval, em muitos desses casos, grande parte dessa dificuldade surge devido ao fato de que, no ensino, um sentido da conversão é privilegiado e tem-se a idéia que “treinando-se” esse sentido da conversão estar-se-ia treinando, também, a conversão no outro sentido.

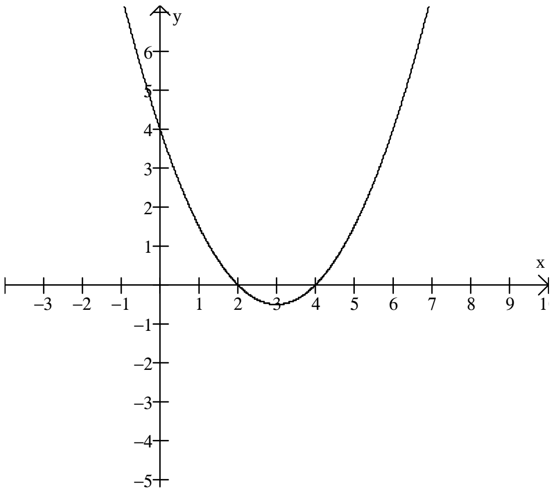
Nos exemplos seguintes, podemos perceber que a familiaridade na conversão realizada em um sentido, não implica na conversão inversa:

Geralmente, quando se representa a função por $f(x) = x^2 + 1$ no registro algébrico, os alunos, com certa facilidade representam-na graficamente:

$f(x) = x^2 + 1 \longrightarrow$



Agora, se lhes é apresentado o gráfico e solicitado que determinem o registro algébrico, a conversão não é realizada de forma direta. Como veremos no exemplo a seguir:



Para representar a função no registro algébrico, os estudantes precisam saber que o gráfico é a representação de uma função polinomial do 2° grau e, então partirem para tratamentos algébricos.

Para essa conversão, é importante analisar o quê Duval chama de variáveis visuais pertinentes, a saber os pontos em que o gráfico corta os eixos e o vértice. Saber que as raízes da função, quando existem, são as abscissas dos pontos cuja ordenada é zero e que o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas tem abscissa nula e ordenada igual à constante da expressão algébrica.

Se uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do segundo grau cujas raízes são x_0 e x_1, então sua forma geral é $f(x) = a.(x - x_0).(x - x_1)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

No gráfico apresentado, temos que as raízes são 2 e 4, e que o gráfico da função intercepta o eixo y das ordenadas no ponto $(0,\ 4)$, de onde $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ e $y = 4$ quando $x = 0$. Logo, se

$f(x) = a.(x - 2).(x - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = a.(x^2 - 6x + 8)$, sabendo que $f(0) = 4$, temos:

$4 = a.(0^2 - 6.0 + 8) \Rightarrow$

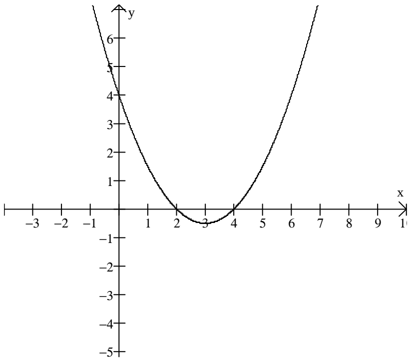
Þ $4 = 8.a$ Þ

Þ $\frac{4}{8} = \frac{8.a}{8}$ Þ

Þ $a = \frac{1}{2}$, logo

Þ $f(x) = \frac{1}{2}.(x^2 - 6x + 8)$ ou $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4$

E, então, pode-se concluir que:



$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4$

Outro exemplo em que se verifica que a conversão entre os registros não se dá de forma direta, pode ser encontrado quando é solicitada a representação gráfica do domínio de uma função de duas variáveis, como por exemplo, da função $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

Para realizar tal representação, é necessário efetuar tratamentos no registro algébrico uma vez que há uma raiz quadrada no denominador, para se obter a equação $x^2 + y^2 > 4$ e, a partir daí, identificar os pontos do plano que satisfazem essa inequação.

Para Duval (2003), esse é um dos motivos pelo qual a atividade matemática necessita de ao menos dois registros de representação, pois é a única possibilidade para que não se confunda registro de representação com o objeto matemático. E “é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso,...” (p. 22).

Para a aquisição de conhecimentos matemáticos os estudantes devem ter condições de acessar os objetos matemáticos, por meio de suas representações, o que faz com que os registros de representação semiótica tenham papel central na compreensão.

Levando em consideração que os registros de representação são fundamentais para a aquisição do conhecimento matemático, Duval (2003, p. 29) diz que as seguintes idéias são fundamentais:

> 1. O desenvolvimento da *capacidade mental de representação* depende do desenvolvimento cultural de *sistemas semióticos*, porque esses sistemas não preenchem somente uma função de comunicação, mas também uma função de transformação de representações ("tratamento") e de objetivação consciente para o sujeito. Um dos "cacifes" da formação inicial é a apropriação e o domínio desses sistemas.
> 2. Nos indivíduos em período de desenvolvimento e de formação inicial, o progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos.
> 3. Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, na sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos. Visar esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de tal ou tal noção particular é provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação.

Apoiados nessa teoria, buscamos investigar as dificuldades apresentadas pelos alunos na transição no estudo de função de uma variável para duas variáveis, no que diz respeito ao conceito de variáveis dependente e independente, ao domínio, ao gráfico e à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função, e também no que diz respeito às derivadas parciais, fundamentalmente no que diz respeito ao papel de constante assumido, por exemplo, pela variável x, quando se calcula a derivada parcial da função em relação à variável y.

A seguir estabeleceremos os procedimentos utilizados para a investigação que nos propomos realizar quanto à passagem do estudo de função de uma para duas variáveis.

Procedimentos metodológicos

Neste trabalho buscamos investigar as dificuldades e saberes apresentados pelos alunos na transição do estudo das funções de uma variável para o de duas variáveis, no que diz respeito às variáveis dependente e independentes, ao domínio, ao gráfico e à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também, que dificuldades são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem.

Para tanto, foram elaborados dois questionários, denominados, o primeiro questionário exploratório e o segundo, questionário definitivo.

O questionário exploratório é composto de sete questões, cada uma com diversos itens, e foi aplicado a quinze duplas de estudantes do 4° semestre (2° ano) noturno do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade particular da grande São Paulo, cujos alunos já haviam estudado tanto as funções de uma variável quanto as duas variáveis. Essa tarefa foi feita com a intenção de coletar dados, verificar como esses estudantes interpretariam os enunciados para que possibilitasse as alterações e que desse subsídios para formulação de novas questões, que julgássemos necessárias para a elaboração do questionário definitivo.

Os estudantes que responderam ao questionário exploratório já haviam cursado as disciplinas de Geometria Analítica I e II, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral I, II e III, Geometria Plana e, na época da aplicação, cursavam concomitantemente com Cálculo Diferencial e Integral IV a disciplina Geometria Espacial.

A atividade de aplicação do questionário exploratório foi desenvolvida em um único encontro, cuja duração foi de três horas.

Após a análise dos dados coletados com o questionário exploratório, realizamos alterações em algumas questões e acrescentamos outras sobre derivadas parciais, definindo assim, o definitivo com um total de treze questões.

Esse questionário foi aplicado a sete duplas de estudantes voluntários, todavia esses cursavam o 5° semestre noturno do cur so de Licenciatura em

Matemática, na mesma Universidade onde aplicamos o questionário exploratório. A aplicação foi realizada em três sessões que tiveram duração de uma hora cada e ocorreram sempre antes do horário de aula.

Apresentamos a seguir, o questionário exploratório, sua aplicação e análise. No capítulo III, abordaremos o questionário definitivo e no IV, a aplicação e análise das respostas apresentadas pelos estudantes a este questionário.

O questionário exploratório

O instrumento é composto de sete questões e a sua elaboração fundamentou-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Apresentamos as questões 1 e 2, simultaneamente, por terem uma relação de dependência entre si.

Questão 1

Nesta questão apresentamos seis situações no registro algébrico e solicitamos que os estudantes escrevessem uma fórmula matemática para representá-las.

As situações são as que seguem:

a) A área A de um círculo de raio r
b) O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b, sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura.
c) O volume V de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura.
d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.
e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).
f) O volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

Questão 2

Em relação às situações da questão anterior (em cada item), solicitamos que os estudantes determinassem quais variáveis dependiam de outra e quais não.

A questão 1 é uma adaptação de um exercício do livro “Cálculo B” de Gonçalves e Fleming (1999), em que os alunos, no momento da resolução, poderão realizar a conversão do registro em língua natural para o registro algébrico.

O objetivo da questão é verificar se os alunos fazem a conversão do registro da língua natural para o algébrico utilizando o nome sugerido para as variáveis, obtendo assim, a equação que representa cada situação. Na questão 2, o objetivo é verificar se os estudantes identificam qual é a variável dependente e qual a independente.

a) A área A de um círculo de raio r.

No **item (a)** apresentamos, no registro em língua natural, uma situação em que ao realizar a conversão para o registro algébrico, os estudantes encontrarão a equação matemática $A = \pi.r^2,\ r > 0$ que traz uma variável dependente A e uma variável independente r.

Nesse item, escolhemos os nomes A e r para as variáveis, pois vários alunos consideram variáveis apenas as letras x e y e, com isso, poderemos analisar se apresentam alguma dificuldade, devido a esse fato.

Optamos pela escolha da função $A = \pi.r^2,\ r > 0$, pois a mesma apresenta o número real π, que geralmente é confundido com uma variável. Poderíamos ter escolhido duas ou mais variáveis, mas queremos investigar como o aluno interpreta o relacionamento da variável A com a variável r.

b) O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b, sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura.

No **item (b)** apresentamos, no registro em língua natural, um contexto cotidiano em que ao realizar a conversão para o registro algébrico, os alunos encontrarão a equação $R = 2a + 2.b - 0{,}9$, $a > 0 \wedge b > 0$, que traz uma variável dependente R e duas variáveis independentes, a e b.

No contexto escolhido a sala tem uma porta cujas dimensões são 0,9m de largura por 2,1m de altura, o que poderá fazer com que o aluno não consiga determinar a equação com facilidade, pois deverá subtrair 0,9m da medida do rodapé. O fato de ser retangular determina uma função de duas variáveis que são denominadas, no enunciado, R, a e b, o que pode causar certa confusão, pois alguns alunos consideram apenas x e y como variáveis.

O objetivo específico desse item, na questão 1, é verificar se os estudantes terão a percepção de que a situação proposta representa uma função de duas variáveis. Na questão 2, queremos verificar, também, se os estudantes irão considerar R como a variável dependente e a e b como variáveis independentes.

c) O volume V de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura.

No **item (c)**, também apresentamos, no registro em língua natural, um contexto cotidiano. Ao realizar a conversão para o registro algébrico, os estudantes encontrarão a equação $V = \pi.x^2.y$, $x > 0 \wedge y > 0$, que envolve uma variável dependente V e duas independentes, x e y. A escolha da forma cilíndrica da piscina implica, também, na presença do número π.

Na questão 1 verificaremos também, se os estudantes terão a percepção de que a situação proposta representa uma função de duas variáveis. Na questão 2, queremos verificar, também, se os estudantes classificarão V como variável dependente e x e y como variáveis independentes.

d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.

No **item (d)**, apresentamos, no registro em língua natural, uma situação em um contexto geométrico em que, ao realizar a conversão para o registro algébrico, os alunos encontrarão a equação matemática $A = 6.x^2,\ x \geq 0$, que traz uma variável dependente A e uma variável independente x.

A escolha da função se deu devido ao fato de que a função a ser determinada é de uma variável, mas está em um contexto da geometria espacial, o que pode levar os alunos a procurarem uma função de duas ou mais variáveis. Além disso, como pedimos a área da superfície de um cubo, pensamos que muitos podem representar apenas a área de uma das faces.

Temos por objetivo, nesse item da questão 1, verificar se os estudantes terão a percepção de que a situação proposta representa uma função de uma variável apesar do contexto geométrico no $\mathbb{R}^3$. Na questão 2, queremos verificar, também, se os estudantes irão considerar A como variável dependente e x como variável independente.

e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

No **item (e)** apresentamos,no registro em língua natural, uma situação em que, ao realizar a conversão para o registro algébrico, os alunos encontrarão a equação $L = 2xz + 2yz,\ x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$, que envolve uma variável dependente L e três variáveis independentes x, y e z.

Ao propor essa situação, solicitamos que fosse considerada a condição de que no quarto não houvesse portas nem janelas, o que faz com que a situação não seja do cotidiano, mas essa escolha se deu devido ao fato de tentar facilitar a conversão do registro da língua natural para o algébrico.

Como escolhemos uma função de três variáveis que representa a quantidade de papel de parede necessária para revestir as paredes de um quarto retangular em que são dadas as medidas da largura do comprimento e da altura, imaginamos que isso possa fazer com que alguns estudantes determinem o volume do quarto e não a quantidade de metros quadrados de papel de parede necessários para atender as condições da situação dada.

f) O volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

No **item (f)**, apresentamos, no registro da língua natural, uma situação em um contexto geométrico em que, ao realizar a conversão para o registro algébrico, os estudantes encontrarão a equação $V = x.y.z,\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0$, que traz uma variável dependente V e três variáveis independentes x, y e z.

Com esse item queremos verificar se os estudantes terão a percepção de que essa função, assim como no item anterior, é de três variáveis e se irão considerar V como variável dependente e, x, y e z como variáveis independentes.

Questão 3

Nesta questão solicitamos que os alunos expressem, no registro gráfico, os pontos dados no registro numérico, tanto em pares quanto em ternas ordenadas. Disponibilizamos dois sistemas de eixos ortogonais de duas dimensões (2D) e de três dimensões (3D) para que façam essas representações, para verificar se os estudantes farão a escolha correta do sistema de eixos onde marcarão os pontos.

Os pontos que deverão ser localizados são A(3, -2), B(2, 1, 3), C(-2, 3), D, E(0, 3, 0), F(1, 2), G(0, -4), H(2, 0), I(2, -1, 3) e J(0, 0, 1).

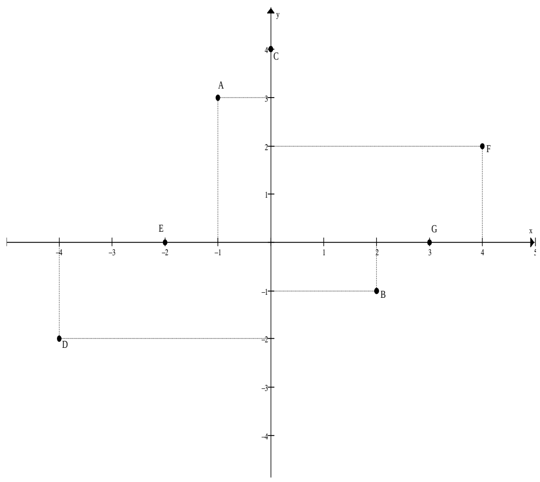
O objetivo desta questão é investigar as dificuldades que os alunos apresentam na localização dos pontos em 2D e 3D, ou seja, na conversão do registro numérico para o registro gráfico, e ao realizar a escolha do sistema de eixos coordenados que possibilite e facilite a representação dos pontos.

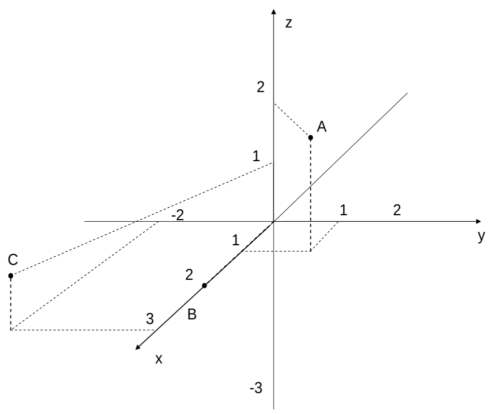
Foram escolhidos seis pontos em 2D, localizados um em cada quadrante e dois sobre os eixos, sendo que um se localiza no semi-eixo positivo x e outro no semi-eixo negativo y. Já em relação aos pontos em 3D, foram escolhido 4, dos quais um se localiza no primeiro octante, dois sobre os eixos e um no quinto octante.

No sistema de três eixos ortogonais foi apresentado, como usualmente se faz, apenas o primeiro octante, a fim de verificar se os estudantes têm conhecimento da existência dos outros sete octantes. Além disso, pretende-se investigar, se apresentam dificuldades ao representar o ponto situado no quinto octante.

Questão 4

Dê as coordenadas dos pontos indicados nas figuras abaixo:





Nessa questão, apresentamos também dois sistemas de eixos, com a representação gráfica de alguns pontos e solicitamos aos alunos que façam a conversão para o registro numérico.

O objetivo é diagnosticar se essa conversão, inversa à do exercício anterior, do registro gráfico para o registro numérico, em se tratando de pontos, causa algum tipo de dificuldade para os alunos.

Escolhemos pontos em 2D situados sobre os eixos, para investigar se há dificuldade na escrita no registro numérico; também escolhemos pontos situados nos quatro quadrantes, para verificar se os alunos representam corretamente um par ordenado.

Já os pontos em 3D foram escolhidos um no primeiro octante, um no quarto octante e um sobre o eixo x, para verificar se os alunos farão a conversão do registro gráfico para o registro algébrico considerando a terna ordenada como (x, y, z), principalmente no ponto que está sobre o eixo.

Questão 5

Nesta questão são apresentadas quatro funções no registro algébrico, em que os estudantes deverão classificar como função de uma, duas ou três variáveis e justificar, no registro da língua natural, o porquê da classificação.

a) $z = x + 2y^2$	c) $y = \sqrt{x} + 2$
b) $z = 2 - x$	d) $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

O objetivo dessa questão é diagnosticar se os alunos reconhecem as funções de acordo com a quantidade de variáveis independentes.

Foram escolhidas duas funções de uma variável e duas funções de duas variáveis e, o motivo pelo qual no enunciado pede que se classifiquem as funções como de uma, duas ou três variáveis é investigar se os alunos levarão em conta para a classificação apenas as variáveis independentes, mas também, as variáveis dependentes.

Questão 6

Nesta questão são apresentadas as representações algébricas de três funções e, para cada uma delas, são disponibilizados dois sistemas de eixos (2D e 3D). Solicitamos aos alunos que determinem o domínio de cada uma, também no registro algébrico e representem esse domínio no registro gráfico

a) $z = x^2 + y^2$	b) $y = 2x^2 + 5$	c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Escolhemos uma função de duas variáveis cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}^2$, uma função de duas variáveis onde o domínio é o conjunto dos pares ordenados (x, y)

do $\mathbb{R}^2$, tais que $x^2 + y^2 \le 4$ e uma função de uma variável cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}$.

O objetivo dessa questão é investigar se os alunos realizam tratamentos no interior do registro algébrico para determinar o domínio das funções e se realizam as conversões desse registro para o gráfico e, ainda verificar qual o sistema de eixos que escolhem para fazer a representação gráfica do domínio.

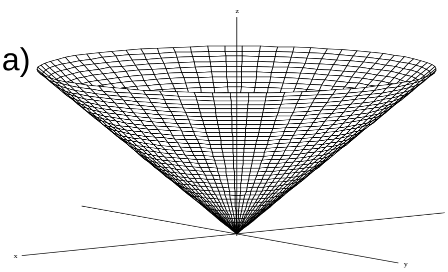
Vale ressaltar que os sistemas de eixos foram apresentados em ordem alternada para não influenciar a escolha por um deles.

Questão 7

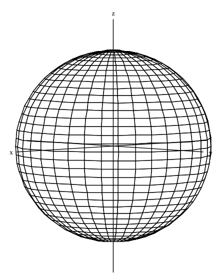
Nesta questão, apresentamos quatro gráficos e solicitamos que os alunos identifiquem quais deles são gráficos de funções do tipo $z = f(x,y)$, ou seja, gráficos de funções de duas variáveis. Ao solicitar a justificação de suas respostas, estamos interessados no registro da língua natural, que poderá dar pistas sobre as concepções que os estudantes apresentam sobre o gráfico de funções de duas variáveis.

Escolhemos quatro gráficos, sendo que um representa função de uma variável (d), dois representam função de duas variáveis (a e c) e um não representa função (b).

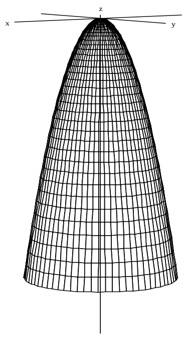
a)



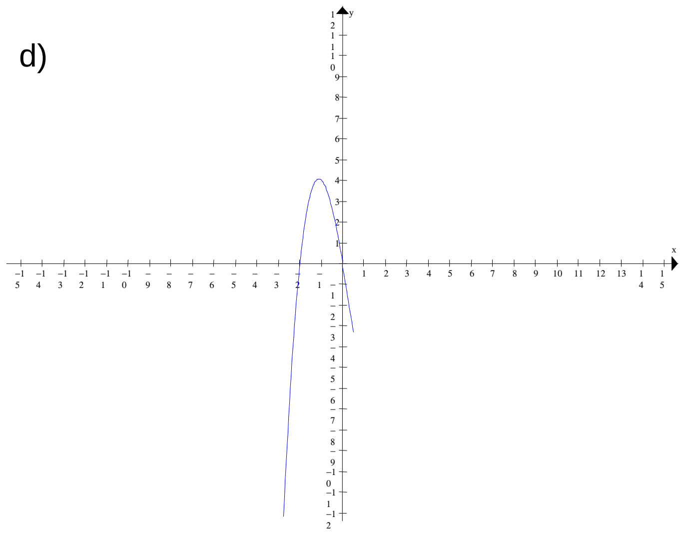
b)



c)



d)



Nosso objetivo com essa questão é verificar se os alunos justificam utilizando a definição de função de duas variáveis ou não, ou seja, se dirão que para todo elemento do domínio existe um único correspondente no contradomínio; ou se utilizam a idéia da reta paralela ao eixo que representa o contradomínio, ou seja, se traçarmos uma reta paralela ao eixo-z que só pode interceptar o gráfico em um único ponto.

A aplicação do questionário Exploratório

A aplicação do questionário exploratório se realizou em uma Universidade particular da Grande São Paulo. Após tratativas com a diretora[10] do curso de Licenciatura em Matemática, em que foram apresentadas as principais idéias da pesquisa, fomos autorizados a realizar a coleta de dados com a condição de que o professor da turma também concordasse, fato que não gerou nenhum problema, pois esse não se opôs à intervenção e nos disse que poderia ceder uma de suas aulas para a aplicação do questionário aos estudantes da turma em que ministrava aulas.

Participaram da aplicação do questionário exploratório, quinze duplas de estudantes do quarto semestre do curso de Licenciatura em Matemática, período noturno, que já haviam cursado as disciplinas CDI I, CDI II e CDI III, em que

[10]Termo adotado pela instituição para a função de Coordenadora de Curso.

estudaram os principais conceitos de função real de uma variável real, tais como: domínio, contradomínio, imagem, gráfico, limites, derivadas, integrais, dentre outros. Na data da aplicação do questionário exploratório, esses estudantes, já haviam tido contato com as funções de duas variáveis reais.

Antes de os alunos receberem o questionário, o professor da turma nos apresentou a eles e solicitou que colaborassem respondendo o questionário, pois o mesmo era para uma coleta de dados de um trabalho de mestrado e que nós precisaríamos que respondessem de forma mais séria possível, para que pudéssemos analisar o que realmente eles haviam aprendido até aquele momento sobre o tema. Após a apresentação, o professor se retirou e então, demos início à atividade.

Antes de distribuirmos as questões solicitamos aos estudantes que não apagassem os registros (rascunhos) que viessem a fazer, pois seriam importantes no momento em que fossemos analisar suas respostas. Solicitamos que não houvesse nenhum tipo de comunicação entre as duplas. Foram informados, ainda, que teriam o período[11] todo de aula para que pudessem responder as questões.

Durante a aplicação do questionário, surgiram alguns comentários entre os integrantes das duplas sobre as questões, como:

- "É igual à questão que o professor ensinou, mas eu não consigo me lembrar. Na verdade eu não entendi".
- "Não me lembro de nenhuma fórmula".
- "Você não se lembra da B1[12], isso aqui é B1".

Ao analisar esses comentários, tivemos a impressão que esses estudantes não dominam alguns dos conceitos abordados nesse questionário, pois tentavam se lembrar do que foi visto em uma das aulas e não do conceito envolvido. Podemos notar, também, que um dos estudantes afirma que não entendeu no momento de estudo.

Surgiram, também, algumas perguntas para que nós respondêssemos:

---

[11] O período a que nos referimos, é o período de um dia normal de aula, sendo que nesta Universidade as aulas têm início às 19h30min e término às 22h45min.

[12] B1 é a nota média do primeiro bimestre, mas os alunos consideram como B1 a principal avaliação.

- “O que é rodapé”?
- “Posso utilizar calculadora?”.
- “Posso aumentar os eixos? Porque não consigo representar a função aqui”.

Todas essas perguntas foram respondidas, sendo que a questão sobre aumentar os eixos foi respondida por meio de outra pergunta “você pode fazer isso?”.

Apresentamos, a seguir, análise das respostas apresentadas pelos estudantes.

Análise das respostas apresentadas pelos estudantes

Agora apresentaremos a análise das respostas dadas pelas 15 duplas a cada questão, sendo que essa análise foi fundamentada na Teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, apresentada no Capítulo II.

Para essa análise decidimos seguir os seguintes critérios:

- A atividade de conversão entre os registros de representação realizada, analisando os registros de representação e as conversões congruentes e de não - congruentes que podem surgir entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos;
- O conhecimento apresentado sobre as variáveis dependente e independente, por meio da classificação feita por eles na questão 2;
- O conhecimento apresentado sobre os gráficos 2D e 3D, no que se refere a existência de quatro quadrantes e oito octantes. Por meio da localização de pontos realizadas nas questões 3 e 4, sendo que essas atividades, quando analisadas em conjunto, propiciam a mudança no sentido da conversão;
- O conhecimento apresentado sobre funções de uma e de duas variáveis quanto a sua classificação. Para isso analisaremos a justificativa apresentada em cada item da questão 5;

- O conhecimento sobre o domínio das funções e sua respectiva representação gráfica, analisando se ao determinar algebricamente o domínio das funções de uma variável, utilizam apenas o conjunto $\mathbb{R}$ e representam graficamente esse domínio sobre o eixo das abscissas(x); e se na determinação algébrica do domínio das funções de duas variáveis o conjunto $\mathbb{R}^2$, e ao representarem graficamente, se representam como uma região do plano xy.

Análise das questões 1 e 2

Decidimos realizar a análise das questões 1 e 2 simultaneamente, pois para que respondessem a questão 2, os alunos deveriam antes responder a questão 1.

Na primeira questão apresentamos seis situações no registro da língua natural, sendo que alguns itens traziam o contexto matemático e solicitamos aos estudantes que representassem cada uma delas por meio de uma equação, ou seja, que utilizassem o registro algébrico. Na segunda questão, solicitamos que classificassem as variáveis utilizadas como dependentes ou independentes.

Ao observarmos a quantidade de erros apresentadas em cada item, pudemos notar que a mudança do registro em língua natural para o algébrico não se faz de forma simples para os estudantes. Isso pode ter ocorrido devido ao fato de que certos itens propostos caracterizavam uma conversão não-congruente, segundo Duval (2003), tanto que 9 das 15 duplas fizeram a transformação para o registro geométrico para, em seguida, passar para o algébrico. Esse fato que caracteriza a conversão não congruente foi um fato que nós não prevíamos na análise prévia desse questionário. O desconhecimento de resultados geométrico envolvidos também podem ter contribuído para respostas erradas.

Outro fato que pudemos observar foi que, mesmo no quarto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática, alguns alunos ainda não fazem distinção entre os termos expressão e equação, pois solicitamos que apresentassem uma equação matemática e, como podemos verificar nos protocolos seguintes, responderam com uma equação.

$6a^2\sqrt{3}$

Protocolo da dupla D

$(a+b)+(a+b)-0,9$

Protocolo da dupla F

A seguir, apresentaremos as análises de cada item.

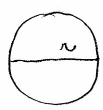
Item (a)

Nesse item, solicitamos que os estudantes escrevessem uma equação que representasse a área A de um círculo de raio r.

As duplas tiveram dificuldade na conversão do registro em língua natural para o algébrico, como podemos observar na resposta dada pela dupla D, que apresentou a equação de uma circunferência de raio 3 e centro no ponto (3, 2), ou seja, a equação $(x-3)^2+(y-2)^2=9$. Já a dupla F apresentou uma equação para o cálculo do comprimento de uma circunferência ao invés da equação para área do círculo, as duplas J e K apresentaram a expressão $\pi.r^2$ e não uma equação como foi solicitado.

Pudemos constatar, também, como havíamos previsto, que uma das duplas, mais precisamente a dupla C, não considerou as variáveis sugeridas, pois mesmo que o enunciado pedisse a área A, utilizou a variável S, provavelmente porque estavam habituados a representar a área de uma região do plano, nas aulas de Geometria.

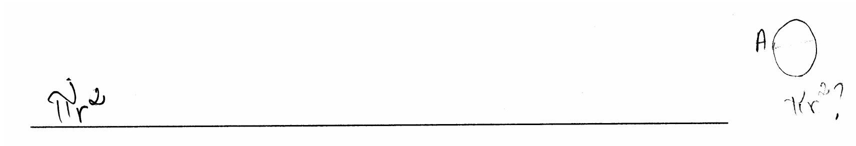
Tivemos uma surpresa ao analisar a resposta da dupla L, que além de trazer a equação esperada $A=\pi.r^2$, apresentou também a equação $A=\dfrac{\pi.D^2}{4}$, onde D é o diâmetro do círculo.



$A=\pi.r^2$ ou $A=\dfrac{\pi.D^2}{4}$

Protocolo da dupla L

Para responder este item, as duplas J e L fizeram a conversão do registro da língua natural para o geométrico e, depois, deste geométrico para o algébrico.



Protocolo da dupla J

Na análise da segunda questão, em que solicitamos que classificassem as variáveis utilizadas no mesmo item da primeira questão, duas duplas classificaram as variáveis corretamente, 10 classificaram de maneira errada e 3 deixaram em branco.

Pudemos notar que alguns alunos, mais precisamente as duplas M e C, confundem o número π com uma variável, pois responderam que “π depende de r”.

Das 15 duplas, quatro, A, L, N e O só responderam “não dependem”, mas não especificaram quais variáveis não dependem.

Item (b)

Solicitamos aos estudantes que apresentassem uma equação para representar o comprimento do rodapé necessário para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b, sendo que nessa sala havia uma porta de largura 0,9m e 2,10m de altura.

Nesse item, nos deparamos com um número de erros superior ao do item (a), mesmo com a explicação sobre o significado da palavra rodapé. Parece que muitos confundiram o conceito de perímetro com o conceito de área. As duplas B, D e M apresentaram como resposta a equação $R = a^2 + b^2 - 0,9$; as respostas das duplas E e N apresentaram a equação $R = (a.b) - 0,9$; já a dupla H respondeu por meio da equação $R = (a^2.b^2) - (0,9 . 2,10)$ a dupla K apresentou uma expressão, em que tiveram a intenção de calcular a diferença ente a área do piso e a área da porta, ou seja, $R = (a.b) - (0,9 \,.\, 2,10)$.

O “erro” da dupla F foi de ter utilizado uma expressão ao invés de uma equação para representar a quantidade de rodapé necessária para se colocar na sala retangular, como podemos observar no protocolo abaixo:

$$(a+b)+(a+b)-0,9$$

Protocolo da dupla F

As duplas A, C, E, J, K, L, M e O fizeram a conversão do registro da língua natural para o geométrico e, depois, desse para o algébrico e pudemos notar que os acertos foram de duplas que fizeram essas conversões, mais precisamente as duplas que acertaram foram A, C, L e O.

A dupla G não utilizou a variável sugerida no enunciado, mas apresentou a equação $2p = 2a + 2b - 0,9$ que também calcula o comprimento do rodapé. A notação 2p pode ter surgido devido ao fato dos estudantes procurarem mostrar um conhecimento mais apurado recorrendo a notações utilizadas nos livros didáticos dos ensinos fundamental e médio.

Em relação à questão 2, tivemos 3 respostas corretas, 7 erradas e 5 em branco.

Das respostas erradas, 5 delas diziam que “a variável a depende da variável b e vice e versa”, sendo elas das duplas A, F, G, K e L. A resposta da dupla N foi que “b depende” e a dupla O respondeu apenas depende, mas não mencionou nenhuma variável.

Item(c)

Neste item, solicitamos aos estudantes que apresentassem uma equação que representasse o volume de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura.

Ao analisarmos as resposta dos estudantes, nos deparamos com uma situação já esperada: algumas duplas apresentaram uma equação correta, mas não utilizaram as variáveis x e y sugeridas no enunciado e utilizaram-se das variáveis r e h. Essa situação ocorreu com as duplas D, J, K e M, sendo que a dupla J não apresentou uma equação e sim a expressão $p.r^2.h$.

A dupla E registrou "não lembramos", enquanto as respostas das duplas H e N trouxeram, respectivamente, as equações $V = x^2 + y^2$ e $V^3 = x.y$. Esse erro pode ter ocorrido, possivelmente, porque os estudantes não associaram a situação ao cálculo do volume de um cilindro circular reto, ou até mesmo por não saberem a "fórmula" do cálculo desse volume.

Sete duplas recorreram à conversão do registro da língua natural para o registro geométrico, para depois converter desse para o algébrico.

Na questão 2, houve 2 respostas corretas, 8 erradas e 5 em branco, sendo que uma das respostas consideradas corretas dizia "depende de r e h e não depende de π".

Quatro duplas responderam "x depende de y e vice-versa" e não indicaram V como variável dependente. É possível que os estudantes tenham apresentado essa resposta por estarem habituados ao estudo das funções de uma variável, em que x é a variável independente e y a variável dependente, em que há uma relação entre duas grandezas, fato que não ocorre nesse item.

Como a dupla E havia respondido, na questão 1, que "não se lembrava", nessa questão responderam "não sabemos" e consideramos como uma resposta em branco em relação à classificação das variáveis.

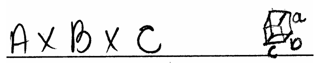
Notamos que devido ao fato de que esse item envolvia uma função de duas variáveis dificultou a classificação das mesmas, pois relacionaram as variáveis independentes como se uma dependesse da outra e deixaram de classificar a variável dependente V.

Item (d)

Solicitamos aos estudantes que determinassem uma equação para representar a área da superfície de um cubo de aresta x.

Na análise das respostas apresentadas nesse item, nos deparamos como havíamos previsto, com 10 respostas que traziam uma equação para o cálculo da área de apenas uma face do cubo, explicitando a equação $A = x^2$.

A dupla J não utilizou a variável sugerida x e, ao invés de um cubo apresentou um paralelepípedo de arestas a, b e c seguido da expressão A. B. C, de onde podemos notar que a dupla tentou calcular o volume e não a área como era solicitada.



Protocolo da dupla J

A dupla K apresentou a equação $A = x.x'.x''$ que resultaria no volume de um paralelepípedo de dimensões x, x', x'' e não na área da superfície de um cubo com aresta x.

Assim como nos itens anteriores, algumas duplas recorreram à conversão do registro da língua natural para o geométrico para depois fazer a conversão desse para o algébrico, sendo que a última conversão foi sem sucesso, possivelmente por não saberem o significado da “área da superfície” e interpretarem como a área de uma face do cubo.

Para a questão 2, não apresentaram nenhuma resposta correta devido ao fato de que nenhuma das duplas havia acertado a questão 1. Mas, levando em consideração as respostas dadas à primeira questão, a dupla B escreveu “A depende de x” e interpretamos que A é a variável dependente e x independente.

Outras respostas que obtivemos foram “não depende”, “A depende do x^2”, “x não depende de nenhuma”,” depende de x”, o que nos mostra a dificuldade apresentada por eles ao classificar as variáveis como dependente e independente.

Item (e)

Neste item, solicitamos que os estudantes representassem, por meio de uma equação, a quantidade de papel necessário para revestir as paredes de um quarto de x metros de largura, y metros de comprimento e z metros de altura.

Como havíamos previsto, o fato de fornecermos as medidas da largura, do comprimento e da altura do quarto, influenciou 3 duplas no sentido de calcularem o volume do quarto. A dupla G foi uma das que apresentou como resposta a equação para o cálculo do volume, mas ao perceber que não era a resposta correta indicou ao lado que estava errado, mas não apresentaram outra resposta.

$(L = x \cdot y \cdot z) \to$ erro

Protocolo da dupla G

Apenas 3 duplas “A, L e O” responderam corretamente. A dupla C apresentou como resposta a equação $L = 6.(b´\ h)$ e, a dupla D respondeu $L = 4.(b´\ h)$ e, além disso, não utilizaram as variáveis sugeridas.

A dupla J fez a conversão do registro da língua natural para o geométrico, mas não fez a conversão para o algébrico. Além dessa dupla, outras nove realizaram a conversão primeiro para o registro geométrico, para em seguida, converterem para o algébrico.

Das respostas apresentadas na questão 2, apenas uma estava correta. Sendo a resposta da dupla E: “L depende de x, y e z”, que se subentende que a variável L é dependente e as variáveis x, y e z são independentes.

Considerando a resposta da questão 1, a dupla B classificou de forma correta as variáveis, pois respondera anteriormente $L = y.z$ e na questão 2, responderam que “L depende de y e z”.

A dupla L acertou a questão 1, mas ao classificar as variáveis na questão 2 o fizeram de forma incorreta, pois apresentaram a seguinte resposta “y depende de z e x depende de z” o que nos mostra que não distinguem as variáveis entre dependente e independente.

Item (f)

Neste item, solicitamos aos estudantes que apresentassem uma expressão para representar o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

Esse último item das questões 1 e 2 teve um número de acerto superior ao dos anteriores, fato que pode ter ocorrido por se tratar de um contexto geométrico que os alunos se deparam com mais freqüência.

Apenas as duplas “D, F e I” responderam de forma incorreta. A dupla D apresentou como resposta a equação $V = 6.l^2.h$, não considerando as variáveis sugeridas, além de não apresentarem a solução correta, enquanto as respostas das duplas “F e I” trouxeram a equação $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ que também não estava correta.

Nesse item, apenas quatro duplas apresentaram a conversão do registro da língua natural para o geométrico e depois a conversão desse para o algébrico. As demais duplas responderam diretamente no registro algébrico.

Mesmo com poucos erros na questão 1, apenas duas duplas “B e E” classificaram de forma correta as variáveis entre dependente e independente com a resposta “V depende de x, y e z”.

As duplas G, L e M consideram que as variáveis x, y e z são interdependentes, ou seja, dependem umas das outras, enquanto a dupla H apresentou a seguinte resposta “as variáveis representam medidas de lado de um paralelepípedo, portanto, para calcular volume, uma depende da outra”.

O grande número de erros, em alguns itens, pode indicar que os alunos desconhecem o significado da questão matemática envolvida. Esse fato foi explicitado principalmente no item que trata da área da superfície de um cubo.

E quanto à classificação das variáveis entre dependente e independente, concluímos que os estudantes apresentam grandes dificuldades, pois a maioria das duplas não conseguiu fazê-lo adequadamente.

Questão 3

Nessa questão, apresentamos alguns pontos no registro numérico e solicitamos que fosse feita a conversão para o registro gráfico. Para essa representação gráfica, dispomos dois sistemas de eixos, em que os estudantes deveriam escolher aquele que fosse conveniente para representarem os pontos.

> Localize os seguintes pontos nos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais:
> A(3, -2), B(2,1, 3), C(-2, 3), D, E(0, 3, 0), F(1, 2), G(0, -4), H(2, 0), I(2, -1, 3) e
> J(0, 0, 1).

Apresentaremos as análises sobre as respostas dos alunos, primeiramente em relação ao sistema em 2D e, posteriormente, em relação ao sistema em 3D.

Na análise da questão em relação ao sistema de eixos 2D, pudemos constatar que uma das maiores dificuldades aparecem quando o ponto está sobre um dos eixos, pois, nove das duplas apresentou confusão quanto a ordenação das coordenadas do ponto, ou seja, confundem a abscissa (x) com a ordenada (y) do ponto e vice-versa.

Pudemos perceber que alguns alunos, mais precisamente as duplas, B, C, H, J e L, fazem a confusão entre os sistemas 2D e 3D, ou melhor, registram pontos bidimensionais no sistema tridimensional, assumindo que quando é dado o ponto (x, y) a cota $z = 0$. Tal fato pode ter ocorrido devido ao descuido do pesquisador que não atentou, que, nessa questão, o sistema 2D estava distante do enunciado da questão, pois constava na página seguinte e não na mesma página do sistema 3D.

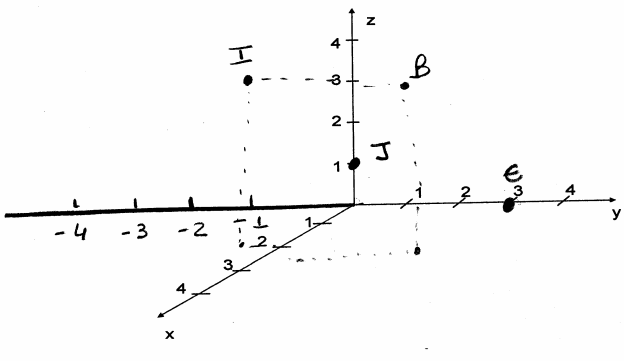
Outro fato que verificamos foi que duas duplas “D e M” marcaram os pontos, mas não os identificaram, ou seja, não deixaram claro qual é o ponto A, qual o ponto B e assim por diante.

A dupla J construiu mais um eixo no sistema e percebendo que havia feito algo errado, anotou ao lado “cancela”.

Vale ressaltar que o ponto D não foi representado pelas duplas, pois no enunciado da questão, esse ponto aparecia sem coordenadas, sendo essa mais uma falha do pesquisador, que no momento da formatação final do questionário exploratório apagou as coordenadas.

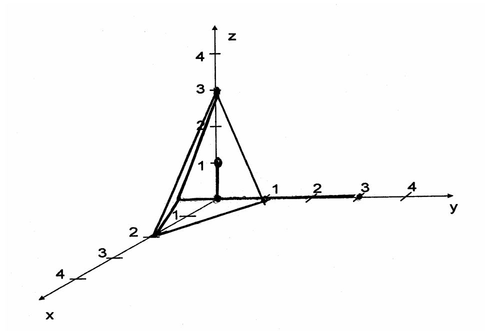
No sistema 3D, diferentemente do que ocorreu com o 2D, com exceção da dupla I que não representou, as demais duplas marcaram corretamente os pontos sobre os eixos, não havendo nenhum erro.

Em relação aos pontos que não se localizam sobre os eixos, seis duplas fizeram a representação correta das coordenadas x e y, mas ao representarem a cota z fizeram-na de forma errada, pois ao invés de considerar a altura de três unidades, prolongaram a reta paralela ao ponto z até essa alcançar a mesma altura desse eixo, sem considerar a noção de nível do plano que nos pontos, devido a representação, estaria um pouco mais baixo, no que diz respeito à visualização.



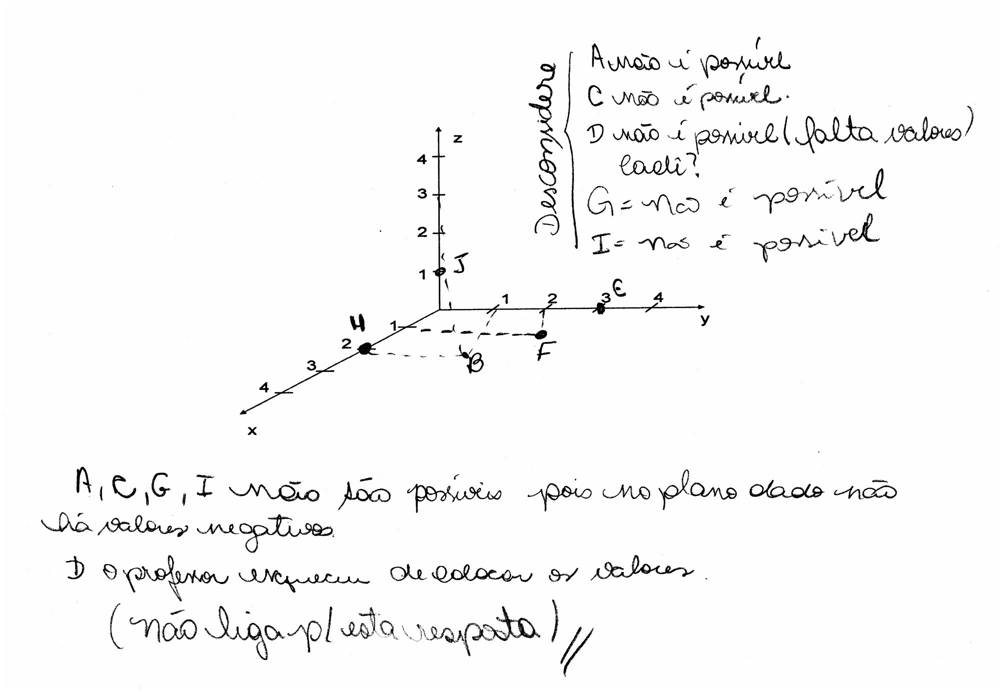
Protocolo da dupla F

Já as Duplas C, D, E, I, K e N, a partir das coordenadas do ponto B, representaram um tetraedro, como é possível verificar abaixo, na resposta da dupla D, sendo que as demais duplas citadas apresentaram respostas semelhantes:



Protocolo da dupla D

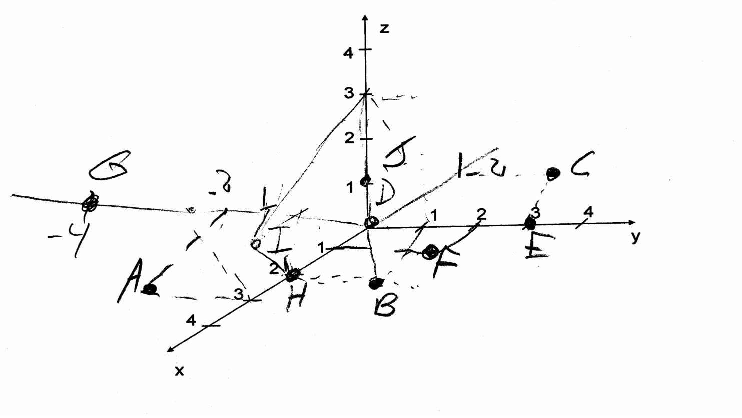
A dupla E justificou a não representação de alguns pontos por não haver, no plano dado, valores negativos.



Protocolo da dupla E

Com essa resposta, vemos que essa dupla não se atentou para a possibilidade de prolongar os eixos para a parte negativa. Assim como essa, a dupla I também não prolongou os eixos.

A dupla B fez uma representação um tanto estranha, pois representou os pontos do sistema 2D e os pontos do sistema 3D no mesmo sistema de eixos, sendo que o registro dos pontos foi realizada de uma forma um tanto difícil de ser interpretada.



Protocolo da dupla B

A dupla L representou os pontos do sistema 3D, em sua maioria de forma correta, com exceção do ponto B, em que a abscissa e a ordenada são apresentadas de forma correta, mas ao representar a cota, ligou o ponto ao eixo z e não representou a altura da cota.

Com a análise dessa questão, percebemos que a conversão do registro numérico para o gráfico, no que diz respeito a marcação de pontos no sistema 3D, causa uma certa dificuldade no momento da representação da cota (eixo z) e, no sistema 2D a confusão é feita em relação ao pontos sobre os eixos.

Questão 4

Nessa questão, apresentamos alguns pontos marcados nos dois sistemas de eixos, 2D e 3D, e solicitamos aos alunos que fizessem a conversão do registro gráfico para o algébrico, que seria a conversão no sentido inverso ao da conversão realizada no exercício 3.

Com relação à conversão do registro gráfico para o algébrico, notamos que ela é feita com mais facilidade por parte dos estudantes, pois o número de erros apresentados por eles foi bem menor do que os encontrados na questão 3.

Apenas 5 das 15 duplas apresentaram erros, os quais destacamos a seguir:

A dupla D não apresentou as coordenadas dos pontos situados sobre os eixos no sistema 3D. Já a dupla I, representou as coordenadas do ponto C (3, -2, 1) como C (3, 0, 1) onde notamos que não consideraram a ordenada dada do ponto. A dupla K, representou apenas as coordenadas do ponto A, no sistema 3D, mesmo assim,de forma errada; a dupla L que representou o ponto G do sistema 2D e, para o ponto B, do sistema 3D, apresentou as coordenadas B (2, 0).

Pudemos notar que a conversão do registro gráfico para o registro algébrico é realizada com mais facilidade pelos estudantes, do que a conversão inversa, ou seja, a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. O que indica que, assim como diz Duval (2003) a conversão pode ser realizada mais facilmente em um sentido do que no seu sentido inverso.

Questão 5

Nessa questão, apresentamos quatro funções no registro algébrico e solicitamos aos estudantes que as classificassem quanto ao número de variáveis, justificando no registro da língua natural, a classificação dada. Na realidade, não apresentamos nenhuma função de três variáveis, mas no enunciado dispomos essa possibilidade, por imaginar que algumas duplas poderiam classificar as funções pelo número de variáveis e não somente pela quantidade de variáveis independentes.

Seis duplas classificaram corretamente as funções A, D, E, F, H e L, mas dessas apenas a dupla E justificou corretamente. Nas justificativas apresentadas pela dupla A notamos que não consideraram z como variável, pois disseram que x e y eram variáveis e $z = f(x)$. A dupla F justificou dizendo que a variável x depende da variável y; As duplas H e L, em suas justificativas, disseram que nos itens em que a função era de duas variáveis, porque eram equações do 2º grau e, quando a função era de uma variável, porque era uma função do 1º grau.

As outras nove duplas classificaram as funções pelo número de variáveis que representam a função e não pelo número de variáveis independentes da função.

As duplas C, I, J e N não apresentaram justificativas para as classificações feitas em relação às funções. Nas justificativas apresentadas pela dupla G, notamos que reconhece a variável dependente e as variáveis independentes, mas não classifica a função de acordo com suas variáveis independentes; a dupla K faz confusão entre variável e incógnita, pois na justificativa apresenta o termo incógnita; a dupla M indica que tem a noção de variável dependente e independente, pois diz que para obter o valor da variável dependente é necessário localizar os valores das variáveis independentes; no item a) disseram que “ para achar o valor da variável z é necessário localizar o valor das outras duas variáveis (x, y), mas também classificam de acordo com o número de variáveis da função; a dupla O justificou dizendo que a classificação foi feita em relação a quantidade de símbolos (letras) que podem variar seus valores.

As justificativas apresentadas são preocupantes por se tratar de alunos do quarto semestre de um curso de licenciatura em Matemática, sendo que esse curso tem duração de seis semestres letivos.

Podemos concluir por meio dessa questão que a maioria dos alunos não sabe classificar a função como função de uma ou duas variáveis, o que pode dificultar no momento em forem transformar uma função do registro algébrico para o registro gráfico.

Questão 6

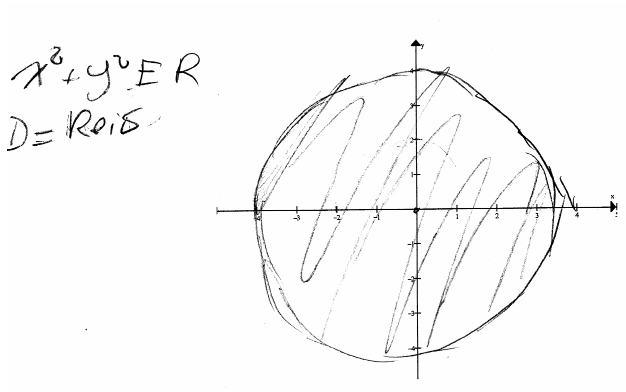
Na questão apresentamos três funções no registro algébrico e solicitamos aos alunos que, para cada uma delas, determinem o domínio, também no registro algébrico e, em seguida, que representem o domínio no registro gráfico.

Item a

Solicitamos que determinassem o domínio da função $z = x^2 + y^2$ e ficamos surpresos ao analisarmos as respostas, pois as 15 duplas responderam incorretamente.

Seis duplas A, C, L, M, N e O apresentaram o domínio $D = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \geq 0\}$, o que mostra que não interpretaram corretamente a região onde a função está definida.

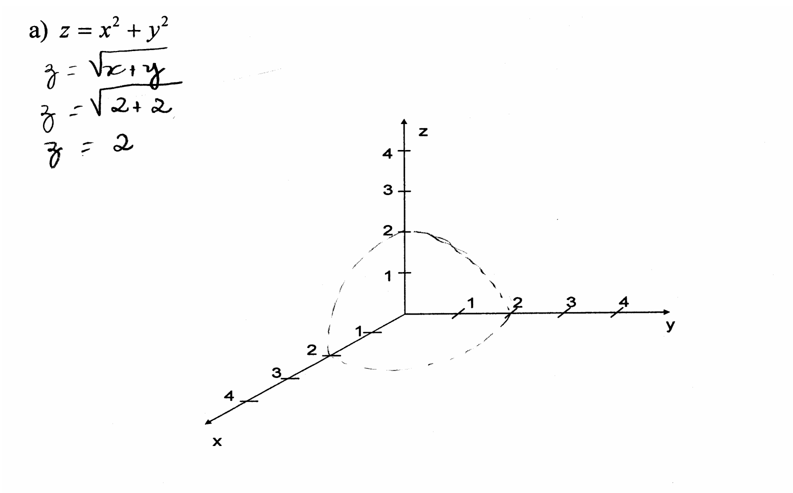
A dupla B expressou que o domínio são os reais, ao invés do $\mathbb{R}^2$. Em relação à representação gráfica do domínio, apresentou um círculo de raio 4, talvez por ser essa representação a que foi mais trabalhada em sala de aula pelo professor. Vale ressaltar que a simbologia utilizada pela dupla está aquém do esperado de alunos do quarto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática, pois utilizaram E ao invés de $\in$ para indicar que $x^2 + y^2$ pertence ao conjunto dos números reais, sendo que tal conjunto foi representado por R e não pelo seu símbolo correto.



Protocolo da dupla B

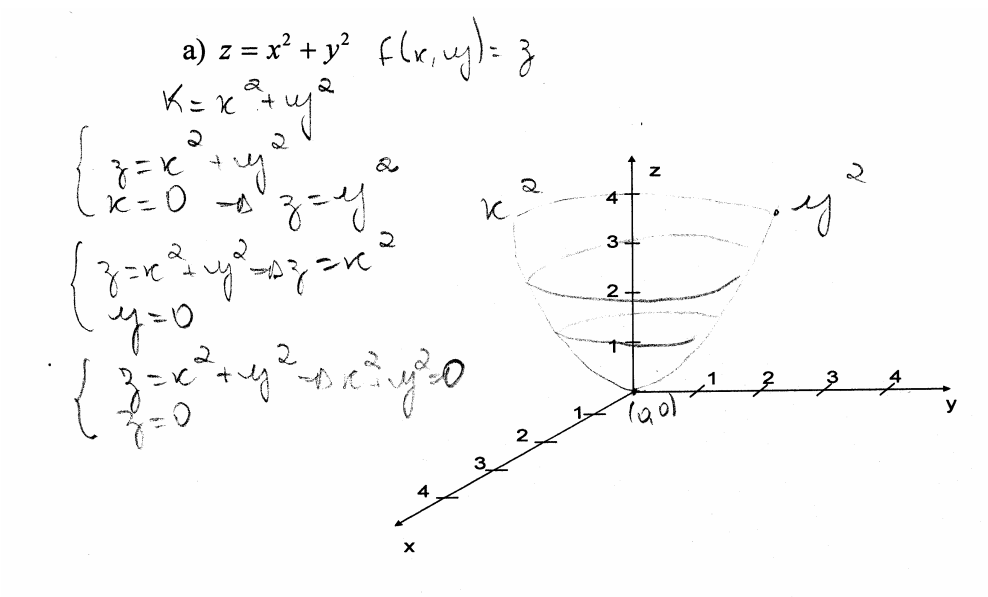
As demais duplas não determinaram, no registro algébrico, o domínio da função.

Em relação ao registro gráfico, notamos que as duplas confundiram o gráfico do domínio com o gráfico da função. As duplas A e H representaram a parte do hemisfério superior de uma esfera contida no primeiro octante, que também não era o gráfico da função, além de realizar o tratamento no registro algébrico de forma incorreta.



Protocolo da dupla H

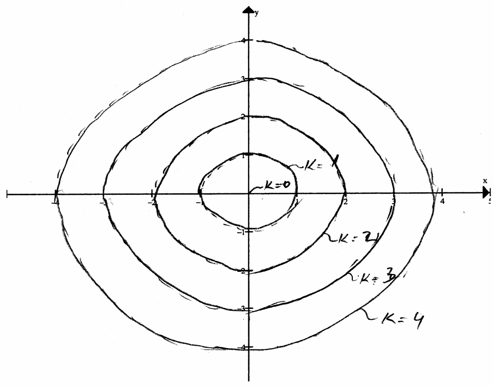
A dupla K utilizou o recurso de representar o gráfico da função plano a plano (um plano de cada vez), fazendo os tratamentos no registro algébrico.



Protocolo da dupla K

A dupla L fez confusão entre o gráfico do domínio da função e as curvas de nível da mesma, pois representaram apenas tais curvas no $\mathbb{R}^2$.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x^2+y^2) \geq 0\}$$



$K=0 \rightarrow x^2+y^2=0$
$K=1 \rightarrow x^2+y^2=1$
$K=2 \rightarrow x^2+y^2=2$
$K=3 \rightarrow x^2+y^2=\sqrt{3}$
$K=4 \rightarrow x^2+y^2=4$

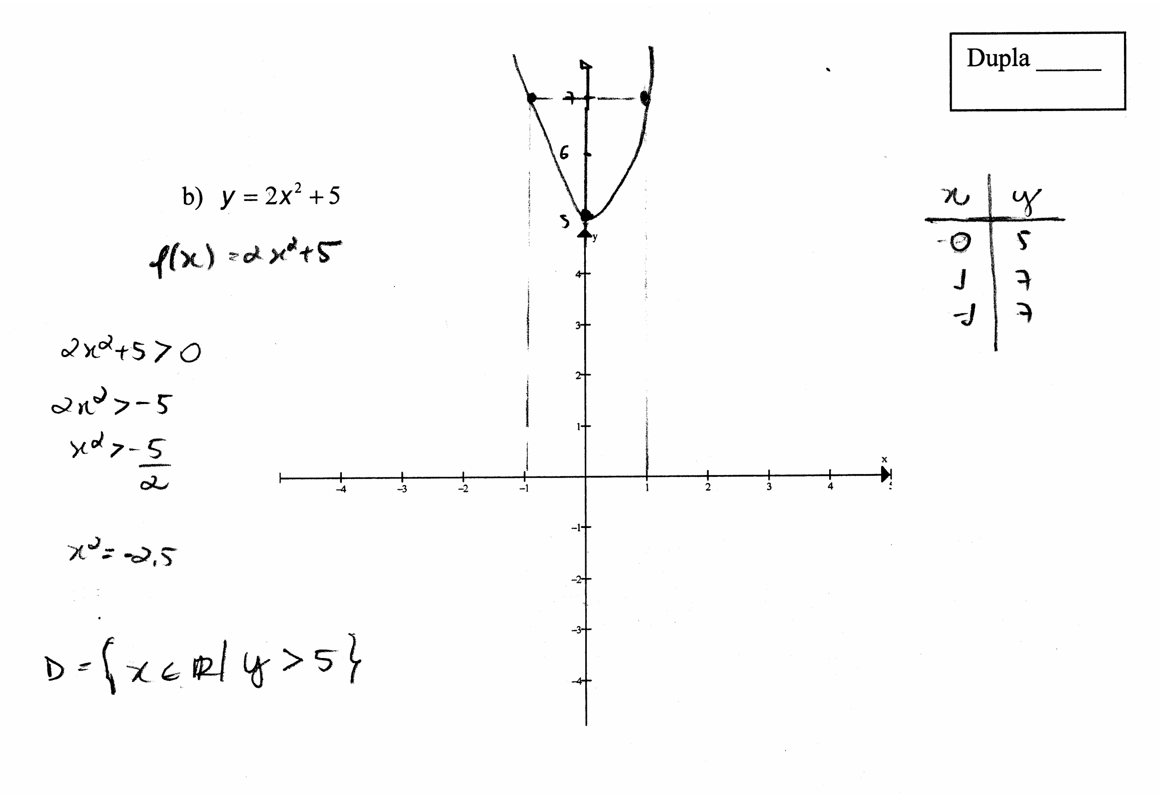
Protocolos da dupla L

A dupla J não respondeu a questão.

Item b

Em relação a função dada por $y = 2x^2 + 5$ e, como no item anterior, apenas uma dupla determinou o domínio, mas não fez o registro gráfico de forma correta.

A dupla A apresentou a seguinte resposta incorreta $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, y > 5\}$, de onde pudemos notar que o conceito de domínio não está incorporado para esta dupla, tendo em vista que fizeram confusão entre os elementos do conjunto domínio com os elementos do conjunto imagem.



Protocolo da dupla A

A dupla A, representou um esboço do gráfico da função e não do seu domínio como lhes foi solicitado. Assim como a dupla A, mais 7 duplas B, C, E, G, H, K e O representaram o gráfico da função ao invés do domínio. Um fato que nos chamou a atenção foi que as duplas citadas fizeram a conversão do registro algébrico para o numérico (tabela) para, a partir da tabela, realizarem a conversão para o registro gráfico.

A dupla D não apresentou o domínio no registro algébrico, mas o fez no registro gráfico por meio de uma reta passando pela origem, o que nos leva a supor que essa dupla pode ter pensado na representação da reta real.

A dupla E não representou o domínio da função e registrou a imagem da função. Isso também foi feito pela dupla N, mas podemos perceber que essa dupla não associa o domínio da função à variável independente, pois disse que $D = \{y \in R / y \geq 5\}$.

Apenas a dupla O determinou o domínio da função no registro algébrico de forma correta, mas não o fez no registro gráfico.

As duplas F, I e J não responderam esse item da questão.

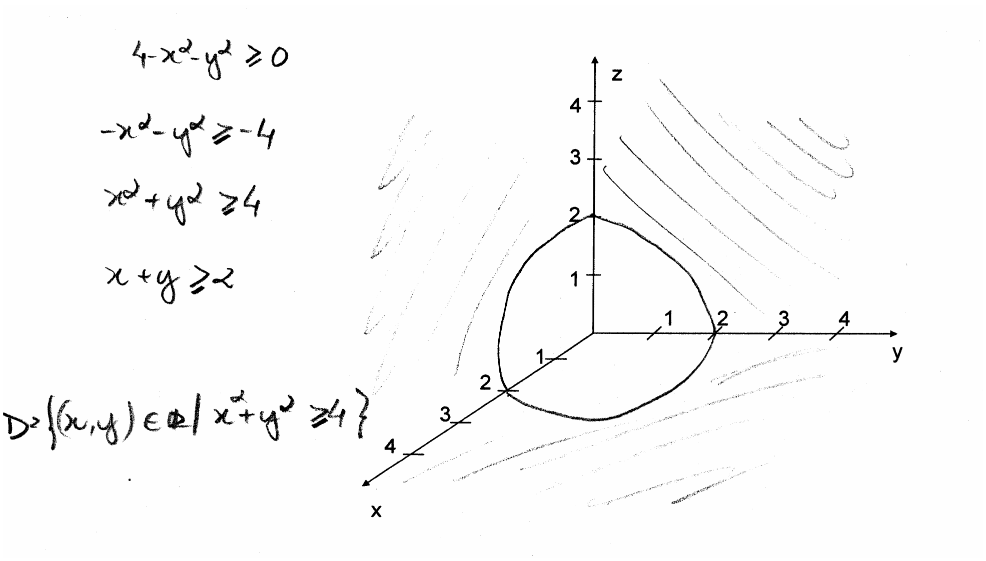
Todas as duplas utilizaram o sistema de eixos 2D para apresentarem seus registros.

Item c

Neste item solicitamos que as duplas determinassem o domínio no registro algébrico e, em seguida, fizessem a conversão para o registro gráfico da função $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

As duplas que responderam esse item da questão, fizeram algum tipo de tratamento no registro algébrico para depois realizarem a conversão para o registro gráfico.

A dupla A realizou o tratamento algébrico, mas por um erro de resolução de inequação apresentou o domínio $D=\{(x,y)\in \mathbb{R} \,/\, x^2+y^2 \geq 4\}$, além disso, escreve que o par ordenado (x,y) pertence ao conjunto dos números reais. Ao representar graficamente, não representou o domínio que determinou e sim, a parte do gráfico da função contida no primeiro octante, hachurando a parte exterior ao hemisfério, o que nos leva a crer que interpretou corretamente o significado da desigualdade, mas não a dimensão da figura representada.

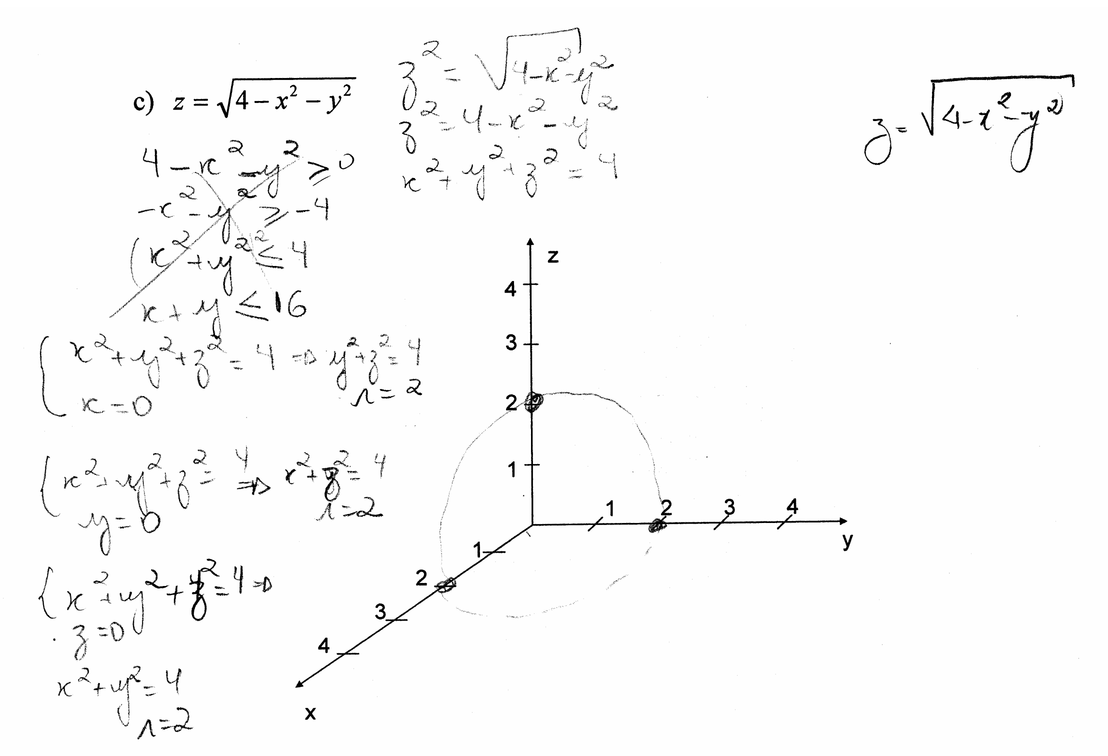


Protocolo da dupla A

Assim como a dupla A, a dupla B também determinou o domínio de forma incorreta $D = \{D \in R / x^2, y^2 > 4\}$ e representou, no sistema 2D, uma circunferência de raio 4, não indicando se a função está definida nos pontos interiores, exteriores ou apenas na fronteira.

A dupla C determinou de forma correta, sem realizar tratamentos no registro algébrico, o domínio da função, mas não representou graficamente.

As duplas D, G e K realizaram um tratamento no registro algébrico encontrando a equação de uma esfera de raio 2 e converteram para o registro gráfico a parte da superfície esférica contida no primeiro octante, sendo que a dupla K fez alguns tratamentos para representarem plano a plano (um plano de cada vez).

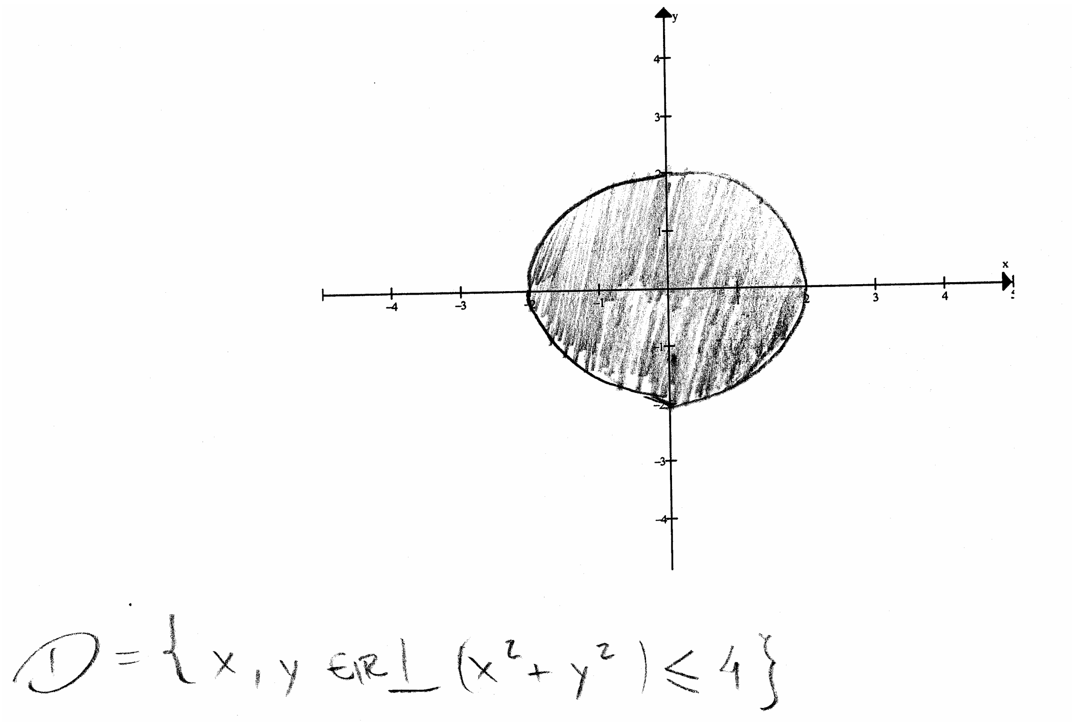


Protocolo da dupla K

A dupla L realizou tratamentos no registro algébrico e apresentou o domínio de forma correta, mas na conversão para o registro gráfico, interpretou esse domínio como uma circunferência de raio 4 sem dizer quais pontos deveriam ser considerados, se os pontos internos, externos ou os pontos da circunferência.

A dupla N não realizou tratamentos no registro algébrico e definiu $D = \{x^2 - y^2 \in R / x - y \geq 0\}$ como domínio da função e não apresentaram o registro gráfico.

A dupla O respondeu corretamente esse item, fazendo o tratamento no registro algébrico e realizando a conversão para o registro gráfico.



Protocolo da dupla O

Pudemos verificar nesse item que a interpretação do domínio das funções não é de fácil compreensão para os alunos, pois para que determinem, mesmo que apenas no registro algébrico, é necessário que realizem tratamentos no interior desse registro. Essa dificuldade parece não ser apenas no que diz respeito às funções de duas variáveis, mas também às funções de uma variável. É possível que não associem o termo “domínio” com “condição de existência” de uma função.

Notamos que as dificuldades aumentam quando realizam a conversão para o registro gráfico, pois a interpretação requer uma tomada de decisão em relação aos pontos que pertencem ao conjunto domínio, uma vez que se trata de função de uma variável, o domínio é representado pela reta real, ou por um intervalo dessa reta, já nas funções de duas variáveis, o domínio é o plano $\mathbb{R}^2$ ou uma região do plano, o que pode ser um fator dificultador para os alunos.

Questão 7

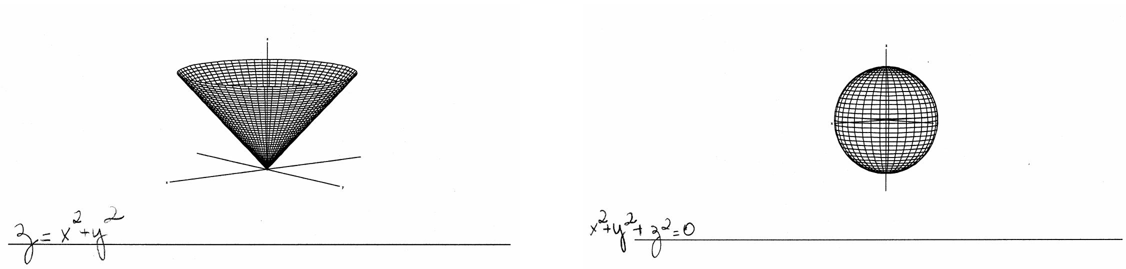
Nesta questão apresentamos quatro gráficos (três no $\mathbb{R}^3$ e um no $\mathbb{R}^2$) e solicitamos aos estudantes que indiquem quais deles representam funções do tipo $z = f(x,y)$, ou seja, gráficos de funções de duas variáveis, justificando suas respostas.

Ao analisarmos essa questão, notamos que cinco duplas C, F, H, J e K não apresentaram resposta para a mesma, o que limitou um pouco à análise, se comparado as questões discutidas anteriormente.

Por meio das respostas, pudemos notar que o enunciado da questão "Quais dos gráficos abaixo representam uma função do tipo $z = f(x,y)$? Justifique", foi mal interpretado, pois apenas 4 duplas B, G, I e L classificaram os quatro gráficos. Nas respostas das demais duplas, percebemos que interpretaram que era para identificar qual dos gráficos representava uma função de duas variáveis e, com isso, classificaram apenas uma função.

A dupla B classificou corretamente quais gráficos representavam funções de duas variáveis e quais não, mas notamos, em suas justificativas, que o conceito de gráfico de função de duas variáveis não estava claro.

A dupla I ao invés de responder a questão, tentou determinar a representação algébrica da função.



Protocolo da dupla I

Apesar da pequena quantidade de protocolos que pudemos analisar nesta questão, acreditamos que os estudantes não realizam tal classificação com convicção, pois não apresentaram justificativas coerentes.

Após a análise das respostas apresentadas pelos estudantes referentes ao questionário exploratório, pudemos constatar que alguns enunciados não estavam claros e decidimos, para a elaboração do questionário definitivo, alterá-los em algumas questões, por entender que da forma em que foram apresentados causaram certas dificuldades. Além disso, optamos por incluir novas questões e compor um instrumento constituído de duas partes. A primeira sobre os mesmos assuntos do estudo exploratório e a segunda com questões relativas ao estudo das derivadas parciais.

No próximo capítulo será apresentado, detalhadamente, o questionário definitivo.

CAPÍTULO III

O questionário definitivo

Para a elaboração do questionário definitivo, decidimos, com base nas informações obtidas com o questionário exploratório, realizar alterações nos enunciados de algumas questões, além de acrescentar outras que julgamos necessárias para o nosso estudo.

Desse modo, o questionário é composto de duas partes.

A primeira parte é constituída de sete questões que abordam os mesmos conceitos já apresentados no questionário exploratório, ou seja, a localização de pontos num sistema de eixos, bidimensional e tridimensional; a classificação das funções quanto ao número de variáveis, a conversão de registros de representação de uma função; o domínio de função e sua representação gráfica e o gráfico da função.

A questão que foi acrescentada, nessa primeira parte, trata do registro de pontos nos sistemas 2D e 3D, na qual é solicitado que os estudantes inicialmente descrevam, no registro da língua natural como fariam para registrar graficamente alguns pontos e, em seguida, realizar essa representação.

Na segunda parte, apresentamos seis questões sobre derivadas parciais, uma vez que os conceitos abordados inicialmente no estudo das funções de duas variáveis são aqui mobilizados, tanto no que se refere ao conceito de variável (O que significa, por exemplo, manter fixa uma das variáveis e variar a outra?) como nas representações e significados de tais derivadas, o que costuma ser fonte de dificuldades para os estudantes. Acreditamos que aquelas dificuldades iniciais sejam um fator impeditivo da real compreensão de noções estudadas a seguir como: limites, derivadas parciais, integrais duplas, etc.

Decidimos utilizar a Teoria dos Registros de Representação para investigar se o conceito de variáveis dependentes e independentes é mobilizado adequadamente na conversão do registro algébrico para o gráfico e vice-versa e nos tratamentos no interior dos registros, quando se estudam as derivadas parciais.

A seguir, apresentaremos o questionário definitivo juntamente com sua análise prévia das questões.

Parte 1

Questão 1

Optamos por iniciar esta atividade com a localização de pontos nos sistemas de eixos, 2D e 3D, pois na aplicação do questionário exploratório pudemos perceber que as questões estavam em uma ordem não linear em relação aos conceitos envolvidos em nossa pesquisa.

Nessa questão composta por três itens, apresentamos o enunciado no registro da língua natural e solicitamos aos estudantes que no primeiro item apresentassem no registro algébrico a localização desse ponto; no segundo, os pontos estão no registro algébrico e solicitamos, ainda, que fosse descrito, no registro da língua natural, como fariam a localização dos mesmos, cada qual, em um sistema de eixos adequado; já no terceiro solicitamos que fosse realizada a conversão, para o registro gráfico, dos pontos determinados nos itens anteriores, para isso, fornecemos os sistemas de eixos 2D e 3D.

a) Você parte da origem num determinado sistema de eixos, caminha pelo eixo-y uma distância de 2 unidades no sentido positivo, e depois verticalmente para cima uma distância de 1 unidade. Quais são as coordenadas de sua posição final?
b) Descreva como você faria para localizar a posição dos pontos $(1, 2)$ e $(0, 0, -1)$ num sistema de eixos adequado.
c) Represente graficamente os pontos dos itens anteriores, tendo como base as respostas apresentadas nos itens anteriores.

Essa primeira questão foi acrescentada para que possamos analisar os procedimentos utilizados pelos alunos para localizarem e registrarem os pontos nos sistemas de eixos e dar subsídios para as demais questões.

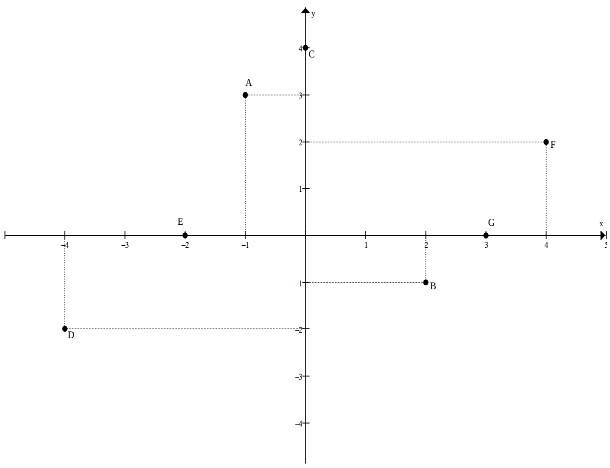
Questão 2

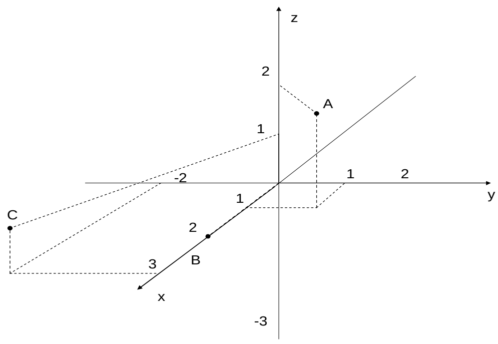
Nessa questão, fornecemos os sistemas de eixos, 2D e 3D, para que os estudante fizessem a escolha pelo adequado e localizassem os seguintes pontos:

A(3, -2), B(2,1, 3), C(-2, 3), D$(-2, -1, 3)$, E(0, 3, 0), F(1, 2), G(0, -4), H(2, 0), I(2, -1, 3) e J(0, 0, 1).

Questão 3

Nesta questão, apresentamos alguns pontos no registro gráfico, mais precisamente sete no sistema 2D e três no 3D,e solicitamos que os estudantes apresentassem as coordenadas no registro numérico.





A segunda e a terceira são questões já apresentadas no questionário exploratório. Optamos por mantê-las, pois queremos verificar se os erros encontrados na análise realizada sobre as mesmas no exploratório persistirão (agora com outros sujeitos), principalmente em relação à localização dos pontos no sistema de eixos 3D, no qual a maioria dos erros surgiram ao representarem a cota z de um ponto (x, y, z).

Na questão dois são dados pontos, tanto do sistema de eixos 2D, quanto do 3D e apresentamos os dois sistemas para verificar se os estudantes fazem a distinção entre tais sistemas. O sistema 3D aparece, propositalmente, antes do sistema 2D, pois acreditamos que alguns estudantes registrarão todos os pontos nesse sistema.

Efetuamos uma alteração em relação ao ponto D, na questão 2, sendo que na sua escolha levamos em conta que não havia nenhum ponto a ser representado no terceiro octante e com isso vamos verificar se os alunos percebem a possibilidade de se prolongar os eixos para a parte negativa, uma vez que só disponibilizamos o primeiro octante, ou seja, a parte do plano em que os três eixos são positivos.

Questão 4

Nesta questão, apresentamos os quatro itens seguintes, no registro algébrico e solicitamos que as classificassem como função de uma, duas ou três variáveis e relatassem, no registro da língua natural, o raciocínio utilizado para tal classificação.

a) $z = x + 2y^2$	c) $y = \sqrt{x} + 2$
b) $z = 2 - x$	d) $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

Essa questão também aparece no questionário exploratório, mas foi alterada, pois anteriormente, solicitamos que justificassem as respostas. Imaginamos que devido ao fato de essa solicitação estar somente no final do enunciado da questão, alguns estudantes acabaram não justificando. Muitos dos que apresentaram justificativas, o fizeram de forma incorreta.

Decidimos por manter essa questão, pois acreditamos que a partir das justificativas apresentadas no registro da língua natural, poderemos analisar se ao classificarem uma função, levam em conta as variáveis dependente e independente.

Questão 5

Nesta questão, apresentamos seis itens no registro da língua natural e solicitamos que para cada uma das situações, os estudantes escrevessem uma fórmula matemática que melhor pudessem representá-las e, a partir dessas fórmulas classificassem as variáveis entre dependentes e independentes.

a) A área A de um círculo de raio r

b) O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura a e comprimento b, sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura.

c) O volume V de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura.

d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.

e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

f) O volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

Essa questão é uma junção das questões 1 e 2 do exploratório. Decidimos por fazê-la, por entendermos que no formato anterior, dificultamos a resposta à segunda questão do exploratório.

As duplas que responderam ao primeiro questionário apresentaram algumas dificuldades ao determinarem a fórmula matemática, ou seja, ao realizarem a conversão do registro em língua natural para o algébrico, o que nos levou, então a optar pela repetição das questões.

Questão 6

Nessa questão, apresentamos três funções no registro algébrico e solicitamos que determinassem o domínio de cada uma delas, o que imaginamos que seria feita por meio de um tratamento no mesmo registro, e, em seguida, realizassem a conversão para o registro gráfico. Para tal, disponibilizamos dois sistemas de eixos, 2D e 3D, para que pudessem optar pelo sistema que achassem mais conveniente, uma vez que o gráfico do domínio de uma função de duas variáveis representa uma região do $\mathbb{R}^2$.

As funções são as seguintes:

a) $z = x^2 + y^2$	b) $y = 2x^2 + 5$	c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

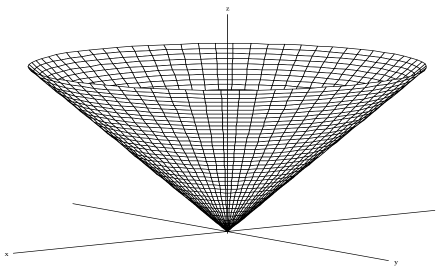
Esta é uma questão que consta no questionário exploratório e não sofreu alterações.

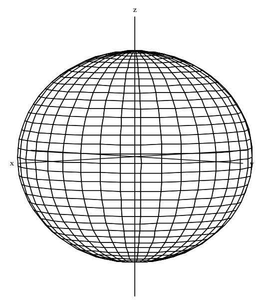
Além de verificar a conversão entre os registros, estamos interessados, também, em verificar se os estudantes fazem a distinção entre o gráfico do domínio e o gráfico da função, pois solicitamos apenas o gráfico do domínio e imaginamos que, assim como ocorreu com os estudantes que responderam ao questionário exploratório, podem apresentar um esboço do gráfico da função.

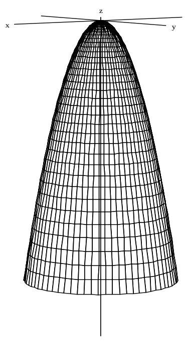
Questão 7

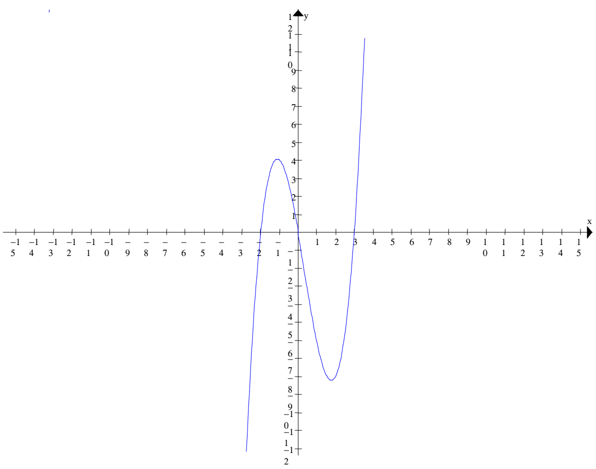
Assim como a sexta questão, a sétima não sofreu alterações em relação ao formato apresentado no questionário exploratório, com a exceção de seu enunciado que procuramos deixar mais claro, pois muitas das duplas, ao responderem a essa questão, não apresentaram justificativas.

Aqui apresentamos quatro gráficos e solicitamos que os estudantes classificassem, justificando no registro da língua natural, se são funções de duas variáveis ou não.









Nessa questão, temos o objetivo de verificar se, ao analisarem os gráficos, fazem uso da definição de função, em que cada elemento do conjunto domínio corresponde a um único elemento do conjunto imagem.

Parte 2

Apresentamos, a seguir, a segunda parte do instrumento que consta de questões relativas às derivadas parciais.

Questão 8

Nessa questão, apresentamos uma função genérica, no registro algébrico e solicitamos que os estudantes descrevam, no registro da língua natural, um procedimento para calcular as derivadas parciais de 1ª ordem.

Optamos por acrescentar essa questão, pois queremos verificar se ao descreverem tal procedimento, destacam que uma das variáveis da função perde esse status e passa a ser considerada como uma constante, ou seja, quando derivamos a função z em relação a variável x, devemos considerar y constante e vice-versa.

Questão 9

> **a)** Quando você calcula da derivada parcial da função: $z = x^2y + 2xy + x$, em relação à x, o que acontece com a variável y?
>
> **b)** Utilizando o procedimento descrito na questão anterior, calcule as derivadas parciais de 1ª ordem da seguinte função: $z = x^3 + 7xy^2 + y^3$.

Nosso objetivo com esse item é verificar como os estudantes interpretam o fato de uma variável, no momento da derivada, assumir o status de constante.

A escolha da função do **item (a)** se deu por ser uma função polinomial e apresentar as parcelas x^2y e $2xy$, pois no momento do cálculo da derivada em relação à x, y passa a ter o status de constante e ao se aplicar a regra do produto é mantida como coeficiente de x, podendo dar a impressão que não foi derivada. Como derivada parcial em relação à x, obtemos a função $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 2y + 1$.

Temos por objetivo com o **item (b)** verificar se os estudantes apresentarão tanto a derivada parcial de primeira ordem em relação à x, quanto em relação à y utilizando a idéia de que quando se deriva em relação à x, y assume o status de constante, o mesmo acontecendo em relação com a derivada em relação à y, onde x tem o status de constante. E, também, verificar se utilizam o procedimento descrito, no registro da língua natural, na questão anterior.

A escolha se deu por ser, como no item anterior, uma função polinomial sendo que a primeira e a última parcela são x^3 e y^3, o que pode permitir verificar se, no momento em que forem derivar em relação a x e, depois, em relação à y, há ou não clareza de quem está variando em cada caso. No primeiro caso, a derivada de y^3 em relação à x é igual a zero e, a derivada de x^3 em relação à y, é igual à zero.

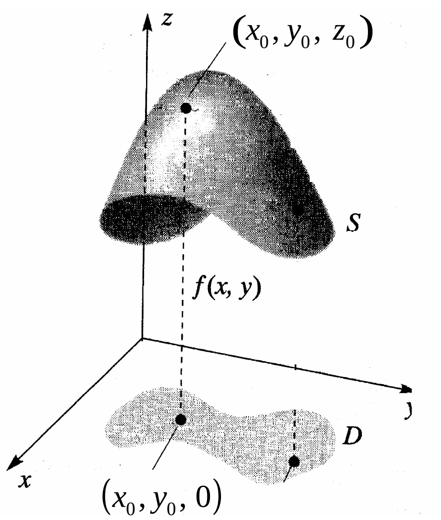
Outro fato que nos levou a essa escolha foi pelo motivo de a função, no registro algébrico, apresentar a parcela $7xy^2$, que no momento em que for derivada em relação à x, y desempenha o papel de constante, ou seja, nessa parcela, ao se aplicar a regra do produto y é mantida como coeficiente de x, dando a impressão que não foi derivada. O mesmo acontece quando forem derivar a função em relação à y, fazendo x constante.

Espera-se que os estudantes apresentem as derivadas parciais em relação a x e y, respectivamente, $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 7y^2$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 14xy + 3y^2$.

Nosso objetivo com os esses dois itens, é verificar se os estudantes realizam o tratamento, no registro algébrico, considerando, ao utilizarem as técnicas para derivar, as variáveis independentes da função, ora com esse status, ora com o status de constantes mesmo representadas por “letras”.

Questão 10

Considere a superfície que é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$.



Observe que z_0 é o valor da função no ponto (x_0, y_0)

a) O que quer dizer pra você a notação $x = x_0$? e $y = y_0$?

b) Qual interpretação geométrica de $x = x_0$ e $y = y_0$?

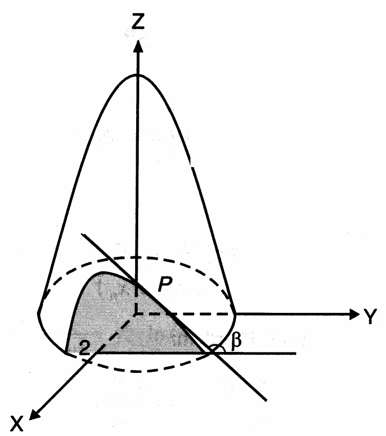
Nosso objetivo com o **item (a)** é verificar qual a interpretação dos alunos sobre as notações $x = x_0$ e $y = y_0$, Pretendemos investigar se os alunos fazem alguma referência entre variável e constante ao comentar sobre x e x_0 e, y e y_0.

Em relação ao **item (b)**, o objetivo é verificar se interpretam que quando fazem uma das variáveis assumirem o status de constante, essa passa a representar um plano que interceptará a superfície gerando uma curva.

A representação gráfica da função foi escolhida por permitir a visualização da região onde está definida. E, por ser um parabolóide, com o qual os estudantes estão mais acostumados a trabalhar devido a ser mais abordada nas aulas.

Questão 11

Encontre o coeficiente angular b da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = 6 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 2$, no ponto P (2, 1, 1)[13].



Obs.: Note que no gráfico a parte mais escura representa o plano $x = 2$.

[13] GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B*: Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Integrais Triplas. São Paulo: MAKRON Books, 1999.

Nessa questão, apresentamos uma função no registro algébrico e solicitamos que determinem o coeficiente angular da reta tangente a curva de interseção da superfície $z = 6 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 2$, por um ponto. Optamos também por, apresentar o registro gráfico da situação, para possibilitar a visualização da situação aos estudantes e, para auxiliá-los na interpretação do enunciado.

Escolhemos essa questão que apresenta uma curva gerada pela interseção entre gráfico da função $z = 6 - x^2 - y^2$ e o plano $x = 2$, pois queremos verificar se os estudantes irão perceber que a inclinação da reta tangente pode ser determinada pela derivada de uma função e, nesse caso mais específico, se determinarão a derivada parcial de primeira ordem em relação à y, uma vez que a reta tangente é paralela ao plano yz. E, assim como Dall'anese (2000) verificou em sua pesquisa, buscaremos averiguar se, mesmo depois de estudarem as derivadas de funções de uma variável, relacionarão o coeficiente da reta tangente com a inclinação da mesma para funções de duas variáveis.

Decidimos acrescentar a observação, pois imaginamos que seria de difícil interpretação por parte dos estudantes, uma vez que boa parte deles tem a concepção de que o plano é representado por um retângulo.

Questão 12[14]

Um professor realizou junto com seus alunos um estudo sobre o conceito de plano tangente a uma superfície, chegando à conclusão que a equação de tal plano é dada por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, em que $f_x(x_0, y_0)$ é a derivada parcial de primeira ordem em relação à x no ponto (x_0, y_0) e, que $f_y(x_0, y_0)$ é a derivada parcial de primeira ordem em relação à y no ponto (x_0, y_0). E, logo em seguida, solicitou que determinassem à equação do plano tangente à superfície $z = x^3 - y^2$ no ponto $(x, y) = (2, 3)$.

[14] Essa questão foi adaptada de McCALLUM, W. G. et al. *Cálculo de várias variáveis*.Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda: 1997.

A resposta de um dos estudantes foi

$$z = 3x^2(x - 2) - 2y(y - 3) - 1.$$

a) No seu entendimento, o estudante está certo ou errado?
b) Se acha que está errado, que erro o estudante cometeu?
c) Se a resposta do estudante estiver errada, apresente a resposta correta.

Nosso objetivo com essa questão é verificar se os estudantes percebem que o erro cometido foi em relação às derivadas parciais de primeira ordem no ponto, pois apesar de ter derivado corretamente, o aluno não determinou a inclinação da reta tangente, ou seja, não substituiu o ponto em cada uma das derivadas parciais.

A escolha dessa questão se deu pelo motivo de apresentar uma função polinomial e por permitir que os estudantes avaliem se a resposta apresentada está correta.

Nossa intenção com essa questão, além de verificar se notam que o aluno que apresentou a resposta ao professor não aplicou o ponto nas derivadas parciais, é, também de apresentar a eles a equação do plano tangente a uma superfície em um ponto, discutindo o significado das parcelas que aparecem na equação do plano.

Questão 13

Determine a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 1, 3)$. Sabendo que a equação do plano tangente é dada por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Nosso objetivo com essa questão é verificar se os alunos irão associar o significado geométrico das derivadas parciais ao de plano tangente, isto é, verificar se associarão o conceito de reta tangente ao de plano tangente a uma superfície num ponto,uma vez que tal plano é determinado pelas retas tangentes paralelas aos planos xz e yz, cujo coeficiente angular de cada uma é determinado, respectivamente, pelas derivadas f_x e f_y no ponto.

Para que determinem o plano tangente, primeiramente os estudantes devem calcular as derivadas parciais f_x e f_y no ponto $P(1, 1, 3)$, para, então, apresentarem a equação do plano tangente nesse ponto.

Decidimos apresentar, novamente, a equação do plano tangente a função $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) para facilitar aos estudantes no momento em que forem determinar o plano solicitado, pois estamos interessados em verificar se determinarão as derivadas parciais, tanto em relação à x, quanto em relação à y. E, por acreditar, que muitos não se lembram dessa equação, dificultando assim o trabalho deles, poderia levá-los a deixar em branco, ou seja, não apresentar resposta a essa questão.

A escolha da função cujo registro gráfico é um parabolóide ocorreu, porque, essa função é muito discutida nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral que aborda função de duas variáveis e os estudantes estão mais familiarizados, o que pode levá-los a se lembrar do registro gráfico da mesma.

CAPÍTULO IV

Aplicação e Análise do questionário

A aplicação do questionário

A aplicação do questionário definitivo foi realizada, na mesma universidade particular da Grande São Paulo onde aplicamos o questionário exploratório.

Participaram 14 estudantes do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática, período noturno, que já haviam cursado as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I, II, III e IV, em que estudaram os principais conceitos de função real de uma variável real e de função de duas variáveis reais, com exceção das integrais múltiplas.

Solicitamos aos estudantes que se sentassem em duplas, totalizando sete duplas às quais denominaremos D1, D2, D3, D4, D5, D6 e D7.

Por ser um questionário composto de 13 questões, as quais, em sua maioria, eram compostas por mais de um item, decidimos realizar a aplicação em três sessões com duração de uma hora cada.

As sessões foram realizadas fora do horário de aulas, em que estavam presentes o pesquisador e um observador que circularam pela sala anotando os comentários que surgiram entre os integrantes das duplas. O pesquisador, além disso, interagiu com os estudantes, quando solicitado.

Descrição da primeira sessão

Nesta sessão foram formadas as sete duplas, sendo que os estudantes tiveram a liberdade de escolher seu parceiro para responderem ao questionário. E, cada dupla gerou um único protocolo.

Antes de distribuirmos as questões solicitamos aos estudantes que não apagassem os registros (rascunhos) que viessem a fazer e explicamos que os mesmos seriam importantes no momento em que fossemos analisar suas respostas. Solicitamos, também, que não houvesse nenhum tipo de comunicação entre as duplas. E, para dar mais ênfase ao que tínhamos acabado de solicitar, fizemos à leitura das seguintes orientações que constavam no questionário:

"Caro (a) aluno (a):

O intuito deste questionário é o de realizar o levantamento de dados para uma pesquisa que visa estudar a transição das funções de uma variável para o caso de duas.

Sua colaboração é de fundamental importância e desde já agradecemos sua participação.É importante que saibam que seus nomes não serão divulgados.

Por favor, resolva cada exercício com calma, procurando refletir bem e indicar tudo o que sabe a respeito do que é solicitado a você.

Não apague nada. Todas as informações nos são muito importantes para entender seu raciocínio."

Foram propostas as cinco primeiras questões. As três primeiras tratavam da localização de pontos num sistema de eixos, a fim de verificar a conversão entre os registros da língua natural, gráfico e o numérico; a quarta questão abordava a classificação de algumas funções quanto ao número de variáveis; e a quinta apresentava algumas situações na língua natural para que os estudantes as representassem no registro algébrico.

Durante a aplicação da primeira parte do questionário, ocorreram alguns comentários muito parecidos com os que haviam sido feitos no questionário exploratório, como:

- “Nossa, não consigo me lembrar de quase nada”;
- “Sei que um dia já aprendi isso”;
- “Isso lembra Geometria Analítica”.

Pudemos observar, assim como havia acontecido no questionário exploratório, que aparentemente os alunos não dominam os conceitos, apenas estudam em algumas aulas e, logo em seguida, acabam por esquecer o que foi estudado, num período curto de tempo.

Descrição da segunda sessão

Nesta sessão, assim como foi feito na primeira, ressaltamos que se tratava de uma pesquisa de mestrado e que todos os rascunhos anotados por eles, nos serviriam para tentar compreender o raciocínio utilizado.

Entregamos as questões às duplas e lemos, juntamente com os estudantes, as orientações, que eram as mesmas já apresentadas na primeira sessão, e que repetimos nas três sessões para dar ênfase às mesmas.

A dupla D5 não compareceu a essa sessão.

Na segunda sessão foram trabalhadas as questões de número seis a nove. A sexta questão trata da determinação e do registro gráfico do domínio de algumas funções; na sétima, foi solicitado aos alunos estabelecer se os gráficos representavam uma função de duas variáveis; e as duas últimas desta sessão tratavam das derivadas parciais de primeira ordem de funções de duas variáveis.

Os comentários que surgiram, foram sempre em relação a não se lembrarem de como se resolvia o que lhes era proposto.Fomos questionados, uma única vez, sobre as derivadas parciais, mais precisamente, sobre a questão 9:

Estudante: “professor, devo derivar em relação a x ou as duas?”

Pesquisador: “leia atentamente o enunciado”

Estudante: “ahhhh... é em relação às duas”.

Esse fato se repete muitas vezes em sala de aula, pois os estudantes, em muitas situações, não fazem a leitura do enunciado com a devida atenção e solicitam que o professor lhes diga o que devem fazer. Fica aqui uma sugestão, para que os professores proponham mais atividades em que os estudantes devam interpretar os enunciados, para que desenvolvam mais autonomia em suas atitudes e deixem de depender das orientações do professor.

Descrição da terceira sessão

Assim como nas sessões anteriores, iniciamos com as recomendações sobre como as duplas deveriam proceder na resolução da atividade, ou seja, que não apagassem os rascunhos e anotações auxiliares que viessem utilizar para a resolução de alguma questão e, após distribuir o questionário, fizemos à leitura das orientações que constava no mesmo.

Nesta sessão, assim como havia ocorrido na anterior, uma das duplas não compareceu, dessa vez a dupla D3, o que fez com que obtivéssemos seis protocolos.

Na terceira sessão foram trabalhadas as quatro últimas questões do nosso instrumento de coleta de dados, numeradas de dez a treze. Na décima apresentamos um gráfico e solicitamos aos estudantes que relatassem o que entendiam e a qual interpretação geométrica das notações $x = x_0$ e $y = y_0$; a décima primeira trata da determinação do coeficiente angular da reta tangente à uma curva por um ponto; as duas últimas tratam do estudo do plano tangente.

Pudemos notar pelos comentários que foram surgindo durante o decorrer da atividade, que o conceito de derivada parcial de representa uma grande dificuldade para os estudantes, pois diziam que não se lembravam de como se fazia. Fato que pudemos constatar na análise das respostas apresentadas por eles, às quais discutiremos ao longo deste capítulo.

Alguns desses comentários foram:

-“Nossa, não me lembro de ter estudado as derivadas no gráfico!”.
- “Não tenho idéia de como se calcula o coeficiente angular de uma reta observando o gráfico”.
- “Esse aluno é muito inteligente, conseguiu acertar o exercício”.

Baseados em comentários desse tipo, pudemos constatar que os estudante não estão acostumados a se deparar com problemas que abordam as derivadas parciais, envolvendo a conversão entre os diversos tipos de registros de representação.

Particularmente, na minha experiência quando estudante de graduação, também não tive a oportunidade de realizar tal estudo.

Após essa descrição de como ocorreu a aplicação do questionário definitivo, apresentaremos a análise por nós realizada das respostas apresentadas pelas duplas.

Análise das respostas apresentadas pelos estudantes ao questionário

Apresentaremos a análise das respostas dos estudantes à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

A análise foi realizada basicamente nos moldes daquela realizada no questionário exploratório, com pequenas alterações e com o acréscimo dos critérios referentes às derivadas parciais. Pautamos-nos pelos seguintes critérios:

- A atividade de conversão entre os registros de representação realizada, analisando os registros de as variações de congruência e de não - congruência que podem surgir entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos;
- O conhecimento apresentado sobre os gráficos 2D e 3D, no que se refere a existência de quatro quadrantes e oito octantes respectivamente. Por meio da localização de pontos realizadas nas questões 1, 2 e 3, sendo que estas atividades, quando analisadas em conjunto, propiciam a mudança no sentido da conversão;

- O conhecimento apresentado sobre funções de uma e de duas variáveis quanto à sua classificação; para isso analisaremos a justificativa apresentada em cada item da questão 4;
- O conhecimento apresentado sobre as variáveis dependente e independente, por meio da classificação feita por eles na questão 5;
- O conhecimento sobre o domínio das funções e sua respectiva representação gráfica, analisando se, ao determinar algebricamente o domínio das funções de uma variável, utilizam o conjunto ¡ e representam graficamente esse domínio sobre o eixo das abscissas(x); e se na determinação algébrica do domínio das funções de duas variáveis, o conjunto ¡^{2}, e ao representarem graficamente, se representam como uma região do plano xy.
- O conhecimento sobre o status assumido pelas variáveis nas derivadas parciais, ora como variável, ora como constante dependendo da variável em relação a qual se está derivando.
- A interpretação geométrica dada ao tratamento realizado no interior do registro algébrico, nas questões 11, 12 e 13, que abordam tal interpretação.

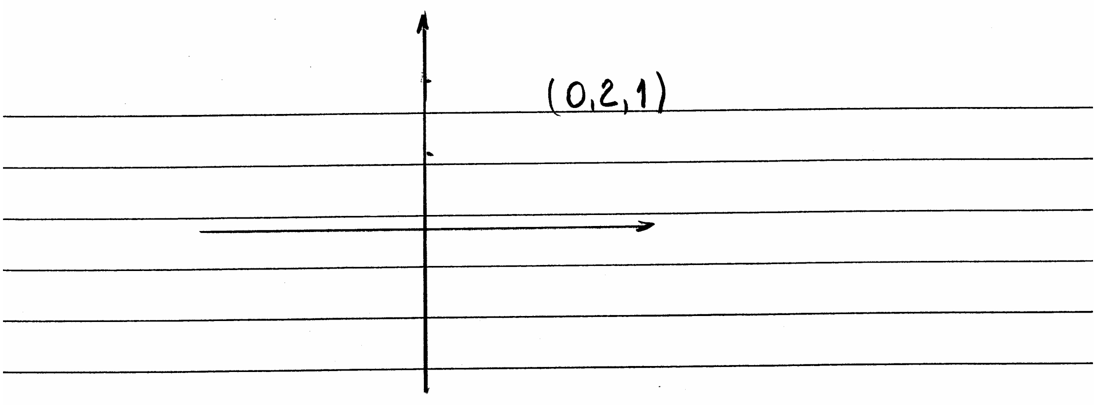
Questão 1

A primeira questão é composta por três itens, referentes à localização de pontos em sistemas de eixos ortogonais, 2D ou 3D.

a) Você parte da origem num determinado sistema de eixos, caminha pelo eixo-y uma distância de 2 unidades no sentido positivo, e depois verticalmente para cima uma distância de 1 unidade. Quais são as coordenadas de sua posição final?

Neste item apresentamos uma situação no registro da língua natural e solicitamos que as duplas apresentassem no registro algébrico as coordenadas de sua posição final.

Das sete respostas, apenas a da dupla D5, apresentou corretamente as coordenadas $(0, 2, 1)$, fazendo um esboço gráfico para chegar à conclusão de sua posição, mas notamos que quando realizou o esboço do gráfico não indicou a legenda dos eixos:



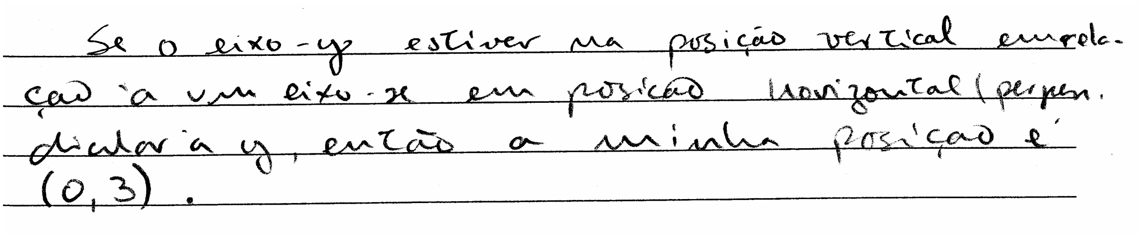
Protocolo da dupla D5

As duplas D2, D4, D6 e D7 apresentaram o par ordenado $(0, 3)$ como resposta, ou seja, não perceberam que se tratava de um ponto no 3D, que é representado por uma terna ordenada. Possivelmente, por imaginarem o plano 2D, em que o eixo y é o eixo vertical, e seguirem as orientações do enunciado que solicitava que caminhassem duas unidades na direção sobre o eixo y e depois subissem verticalmente uma unidade, o que pode tê-los levado a adicionar as unidades da ordenada y com as da cota z.

As outras 3 duplas, D1e D3 também indicaram a posição final com um par ordenado, mas com o ponto $(2,1)$, possivelmente, por estarem mais habituados ao trabalho com o sistema 2D, em que os pontos são indicados no registro numérico como pares ordenados .

Acreditamos que, devido ao fato de o sistema 2D ser mais trabalhado em sala de aula, os estudantes sempre imaginam o eixo y como sendo o eixo vertical, o que faz com que boa parte deles, confundam no momento em que se trabalha com o enunciado em língua natural, pois a posição do eixo das cotas, no sistema 3D , geralmente, é vertical

Podemos verificar no protocolo apresentado pela dupla D2, que realmente interpretaram o enunciado como sendo o eixo y o eixo vertical. Pois eles justificaram a posição apresentada, considerando que o eixo vertical é o eixo y, não se atentando que caminhavam sobre o eixo positivo y e depois verticalmente para cima:



Se o eixo-y estiver na posição vertical em rela-
ção à um eixo-x em posição horizontal (perpen-
dicular a y, então a minha posição é
(0,3).

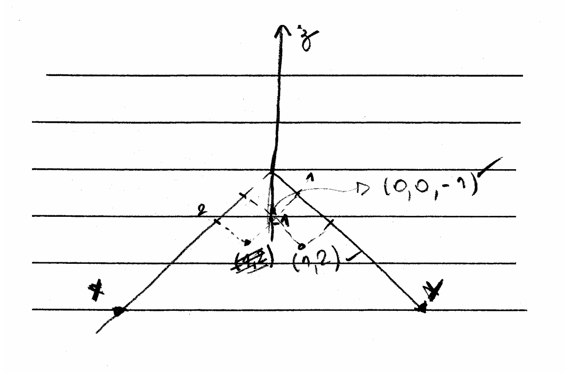
Protocolo da dupla D2

Realmente, o enunciado da questão dá uma sutil indicação de que se trata do sistema 3D, fato que pode ter contribuído para essas interpretações por parte dos alunos.

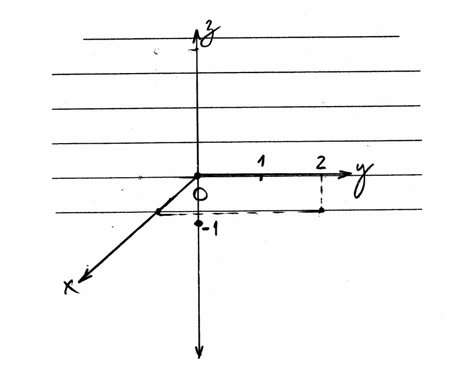
b) Descreva como você faria para localizar a posição dos pontos $(1, 2)$ e $(0, 0, -1)$ num sistema de eixos adequado.

Aqui apresentamos os pontos no registro algébrico e solicitamos que fosse descrito, no registro da língua natural, como fariam a localização dos mesmos, cada qual, em um sistema de eixos adequado.

As duplas D1, D4 e D5, ao invés de apresentarem a resposta no registro da língua natural recorreram ao registro gráfico, atividade que é proposta no item c, mas podemos perceber nos protocolos das duplas D1 e D5, que tentaram representar ambos os pontos no sistema de eixos 3D, o que nos leva a crer que não fazem distinção entre pares e ternas ordenadas, no momento em que vão localizar os pontos nos sistemas de eixos,embora acreditemos que a forma como a questão foi proposta tenha induzido a esse erro.



Protocolo da dupla D1



Protocolo da dupla D5

As demais duplas, D2, D3, D6 e D7, responderam corretamente a questão. Destacamos o protocolo da dupla D7, pois utilizaram os termos “à esquerda” e “à direita” para indicar, respectivamente, o primeiro e o segundo elementos do par ordenado.

A dupla D7 descreveu o seguinte procedimento:

“1° Traçaria uma reta cortando verticalmente o eixo x em cima do número indicado à esquerda no par ordenado e depois outra reta cortando o eixo y horizontalmente em cima do número indicado à direita no par ordenado. No cruzamento entre as duas aparece o ponto.

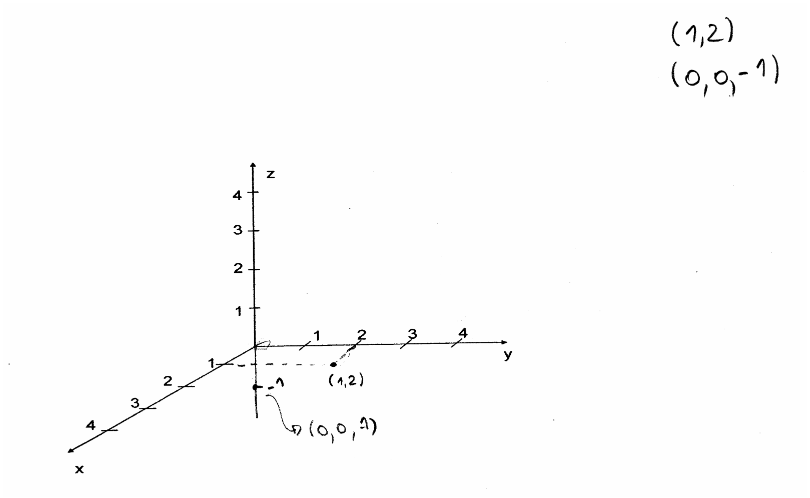
2° Pensaria em um plano xy correspondente a (0, 0) que está localizado em uma terceira dimensão z, abaixo da origem, exatamente no ponto (-1). Daí (0, 0, -1).”

c) Represente graficamente os pontos dos itens anteriores, tendo como base as respostas apresentadas.

Neste item disponibilizamos os sistemas de eixos 2D e 3D para que os estudantes indicassem a localização dos pontos dos itens anteriores.

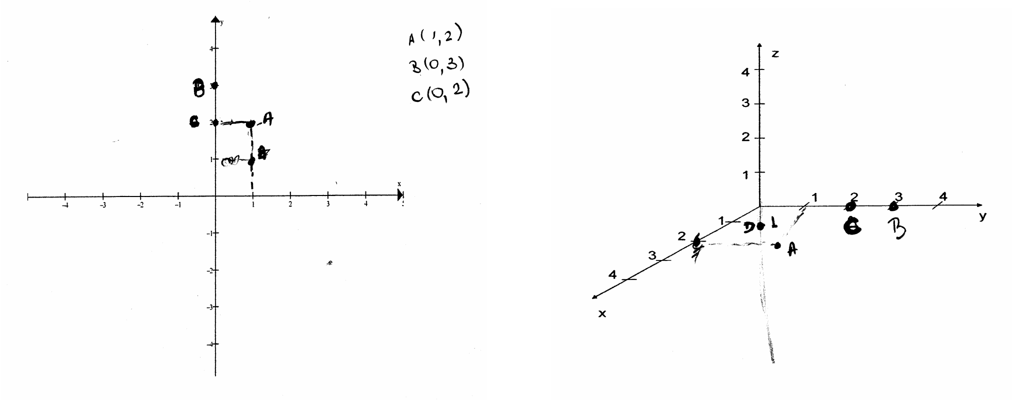
Verificamos nos protocolos que, com exceção da dupla D5, todas as outras fizeram a extensão do eixo das cotas para representarem o ponto $(0, 0, -1)$, mas nenhuma dupla representou o ponto $(0, 2, 1)$, do item a, corretamente.

A dupla D1 representou corretamente o ponto $(0, 0, -1)$, mas representou o par ordenado (1, 2) nos dois sistemas de eixos, o que nos leva a crer que não fazem distinção entre o par e a terna ordenada, considerando que o ponto $(1, 2)$ tem a cota $z = 0$. Vale ressaltar que a representação deste ponto no sistema de eixos 2D foi feita corretamente.



Protocolo da dupla D1

Já a dupla D4, criou alguns pontos, que acreditamos ter surgido a partir do enunciado do item a), e os representou nos dois sistemas de eixos, como podemos ver a seguir

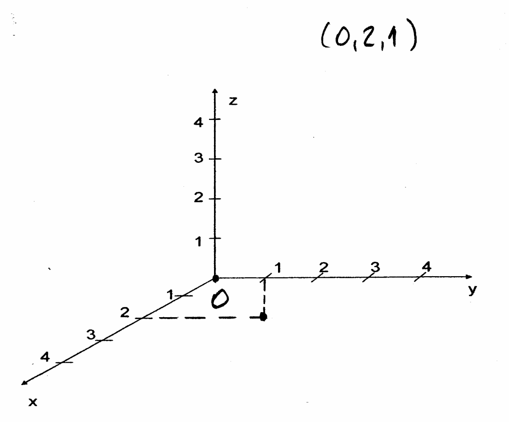


Protocolo da dupla D4

Esses protocolos indicam que a dupla considerou, no item a, em que se partia da origem, toda vez que se caminhava em uma direção diferente, o que pode justificar a criação dos pontos B e C, que registraram.

Verificamos que, assim como a dupla D1, a D4 também considerou a cota $z = 0$.

A dupla D5, representou corretamente as coordenadas do item a) no registro algébrico, mas ao registrar graficamente o fez de forma incorreta, pois interpretou as coordenadas do ponto (0, 2, 1) em outra ordem, considerando como sendo $x = 2$, $y = 1$ e fez o registro de um ponto na origem.



Protocolo da dupla D5

Com a análise desta questão, pudemos notar que a conversão realizada do registro da língua natural para o algébrico e deste para o gráfico representa dificuldades para os estudantes, visto que o número de acertos foi bem baixo.

As duplas que realizaram corretamente a conversão do registro algébrico para o da língua natural, também obtiveram sucesso ao realizar a representação no registro gráfico.

Questão 2

Nesta questão apresentamos alguns pares e ternas ordenadas e dois sistemas de eixos dos quais os estudantes deveriam escolher para que fizesse o registro gráfico. Optamos por deixar a cargo dos estudantes essa escolha, para que pudéssemos verificar se fazem a distinção ou não entre pares e ternas ordenadas.

Localize os seguintes pontos nos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais: A(3, -2), B(2,1, 3), C(-2, 3), D$(-2, -1, 3)$, E(0, 3, 0), F(1, 2), G(0, -4), H(2, 0), I(2, -1, 3) e J(0, 0, 1).

Apresentaremos primeiramente a análise relativa ao registro gráfico dos pontos no sistema 3D e, logo em seguida, dos pontos 2D.

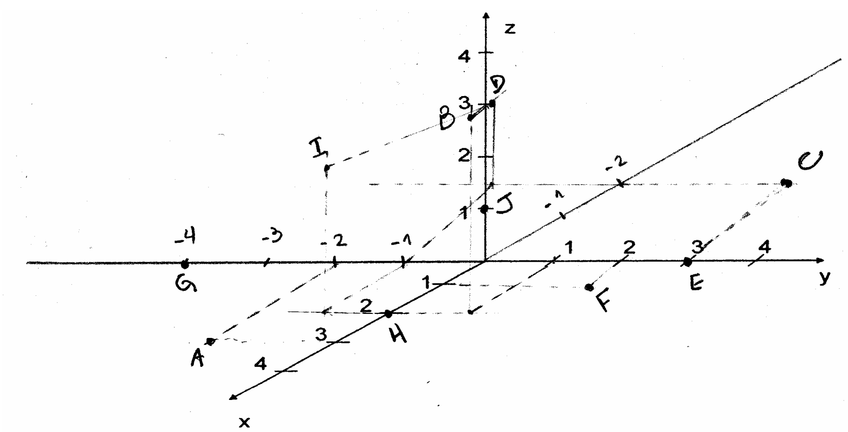
Os pontos cuja representação gráfica deveria ser realizada no sistema 3D, são:

B(2,1, 3), D$(-2, -1, 3)$, E(0, 3, 0), I(2, -1, 3) e J(0, 0, 1).

Nenhuma das sete duplas fez o registro de todos os pontos corretamente. E assim como havíamos detectado nas respostas apresentadas ao questionário piloto, a maior dificuldade apareceu no momento em que as duplas foram registrar a coordenada z das ternas ordenadas.

Vale ressaltar que, com exceção da dupla D4, as demais representaram corretamente os pontos E e J, que se localizam sobre os eixos.

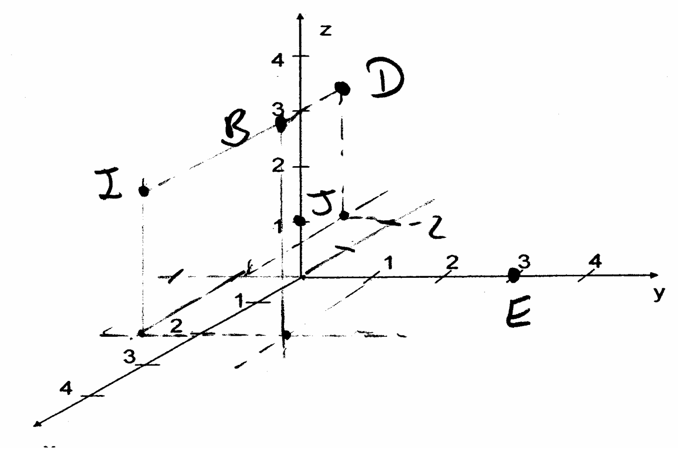
A dupla D1, realizou o registro de todos os pontos, inclusive os pares ordenados, no sistema 3D e, como veremos no momento da análise referente ao sistema 2D, também, tentou marcar todos os pontos.



Protocolo da dupla D1

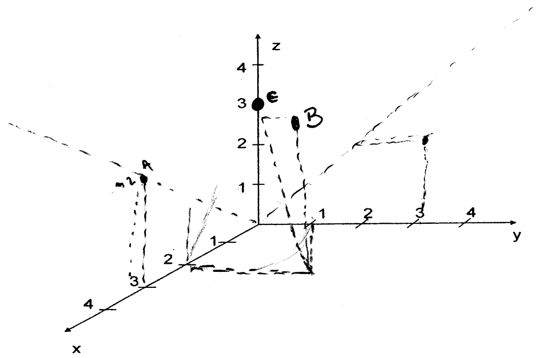
Ao analisarmos apenas os pontos que deveriam ser marcados nesse sistema de eixos, notamos que a representação de alguns deles foi realizada de forma correta, como é o caso dos pontos E, I e J. Notamos que essa dupla utilizou dois critérios para representar os pontos fora dos eixos, pois registraram corretamente o ponto I, mas não os pontos B e D, cuja cota z é igual a do ponto I, e que nesses casos a cota z foi representada de forma incorreta, pois para a altura da cota, não levou em consideração a perspectiva e representou como se o ponto estivesse sobre o eixo z.

No protocolo da dupla D2 podemos notar que, assim como a dupla D1, representou de forma correta o ponto I, mas a dificuldade surgiu no momento de representar a coordenada z dos pontos B e D.

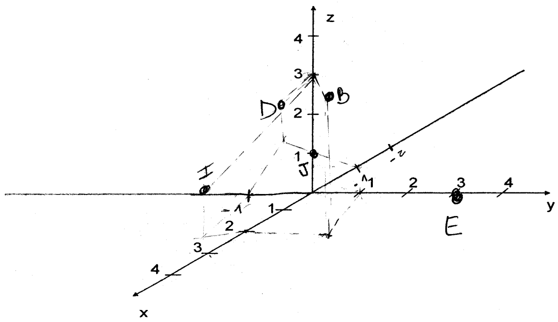


Protocolo da dupla D2

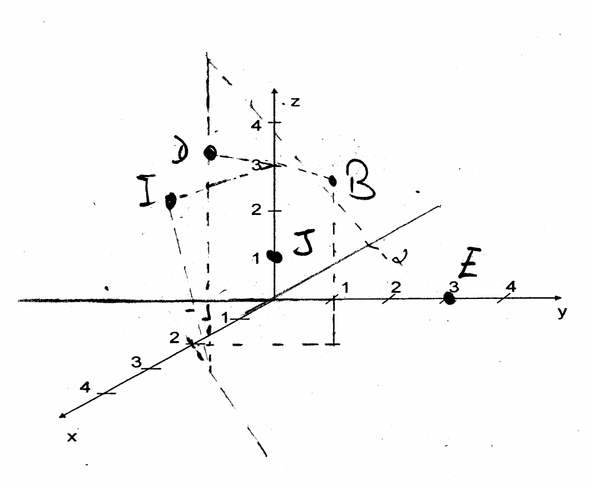
A partir dos protocolos podemos verificar que as duplas D4, D6 e D7, fazem certa confusão ao registrarem graficamente as ternas ordenadas. Notamos que uma dificuldade aparece no momento em que representarem as retas paralelas aos eixos de acordo com cada coordenada, cuja intersecção determina a localização do ponto a ser indicado, pois as fazem de forma incorreta, uma vez que não utilizam essas retas paralelas aos eixos, o que faz com que a localização do ponto não seja a indicada no registro algébrico.



Protocolo da dupla D4

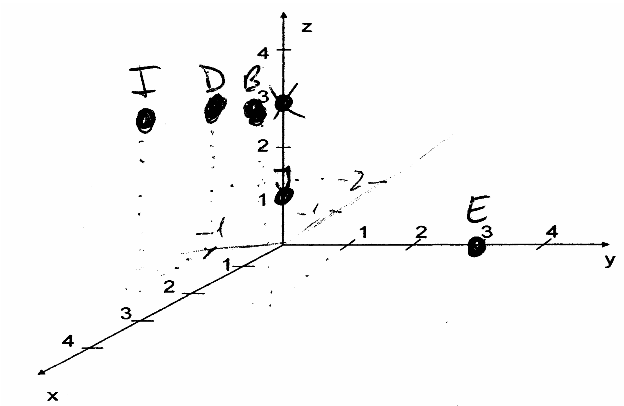


Protocolo da dupla D6



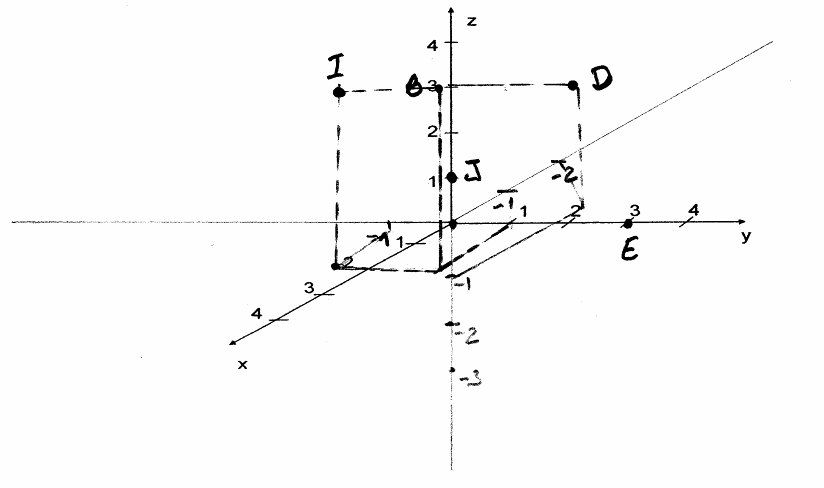
Protocolo da dupla D7

No protocolo apresentado pela dupla D3, notamos que o método para representação de pontos para o 2D, foi utilizado para os pontos em 3D, pois aparentemente não utilizaram as três coordenadas, uma vez que foram marcados em um dos planos, xy, xz, ou yz.



Protocolo da dupla D3

A dupla D5, também apresentou erros ao representar a cota z e notamos que se atrapalharam ao realizar a marcação do ponto D do quarto octante.



Protocolo da dupla D5

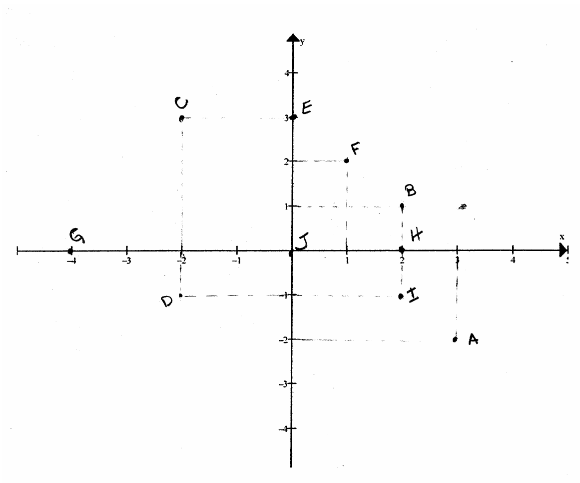
Nas respostas apresentadas, notamos que, diferentemente do que ocorreu com alguns estudantes que responderam ao questionário exploratório, todas apresentaram conhecimento sobre a existência dos demais octantes.

Baseados nos protocolos que analisamos, podemos dizer que a conversão do registro algébrico para o gráfico não é simples para os estudantes, quando se trata de pontos do sistema 3D, pois os mesmos apresentaram erros, principalmente, quando vão determinar a localização da cota z.

No sistema 2D deveriam ser registrados os pontos A(3, -2), C(-2, 3), F(1, 2), G(0, -4) e H(2, 0).

Três duplas, D3, D5 e D7, representaram corretamente todos os pontos.

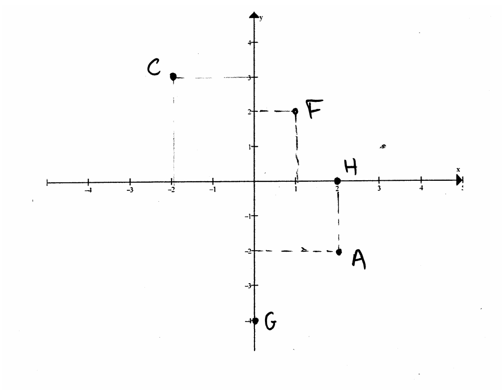
A dupla D1, como comentamos na análise dos pontos referentes ao sistema 3D, tentou representar, também, nesse sistema todos os pontos a que a questão se referia, sem realizar a escolha pelo sistema que fosse conveniente.



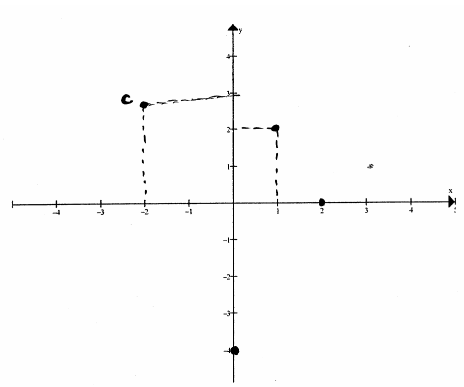
Protocolo da dupla D1

Analisando, apenas os pontos que deveriam ser representados no sistema 2D, notamos que a dupla apresentou erro somente em relação ao ponto G(0, 4), pois ao invés de representá-lo sobre o eixo y, o fez sobre o eixo x. E os demais pontos representou corretamente.

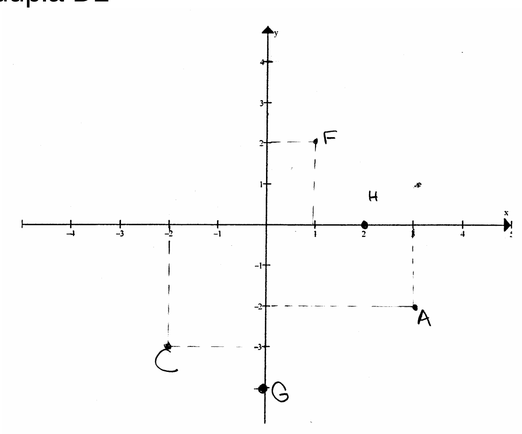
As duplas D2, D4 e D6, marcaram corretamente boa parte dos pontos, apresentando apenas alguns erros.



Protocolo da dupla D2



Protocolo da dupla D4



Protocolo da dupla D6

Os erros apresentados pelas duplas, aparentemente, surgiram devido a distração, como no caso da dupla D2 que ao invés de representar o ponto A(3, -2), representou A(2, -2). Também a dupla D6 que ao invés do ponto C(-2, 3), representou C(-2, -3).

Já a dupla D4, ao representar o ponto C não o fez de forma correta, pois não se atentou ao marcar a coordena y, que deveria ter a distância 3do eixo x. E, registrou o ponto A no sistema 3D, não percebendo que se tratava de um par ordenado.

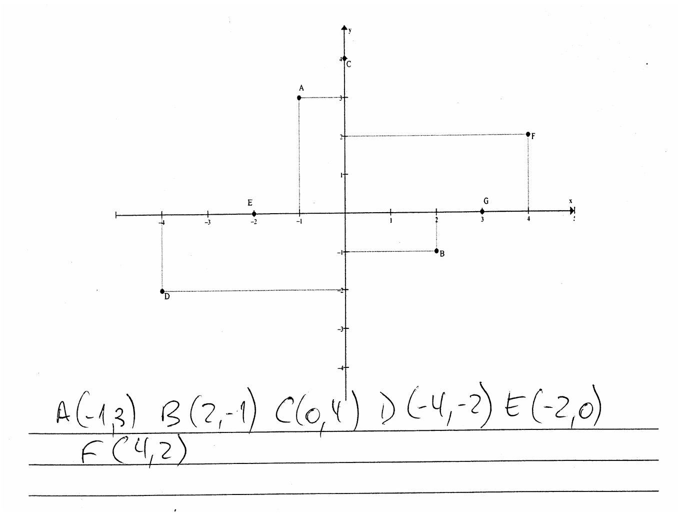
Pela análise realizada, notamos que as dificuldades são bem inferiores, em quantidade, do que em relação ao sistema 3D, pois o número de erros apresentados é bem menor e ocorreram, possivelmente, devido a desatenção ao registrar graficamente os pontos.

Questão 3

Nesta questão apresentamos dois sistemas de eixos, 2D e 3D, e alguns pontos no registro gráfico e solicitamos que os estudantes registrassem as coordenadas dos mesmos no registro algébrico.

Apresentaremos as análises referrentes aos sistemas de eixos 2D e 3D separadamente.

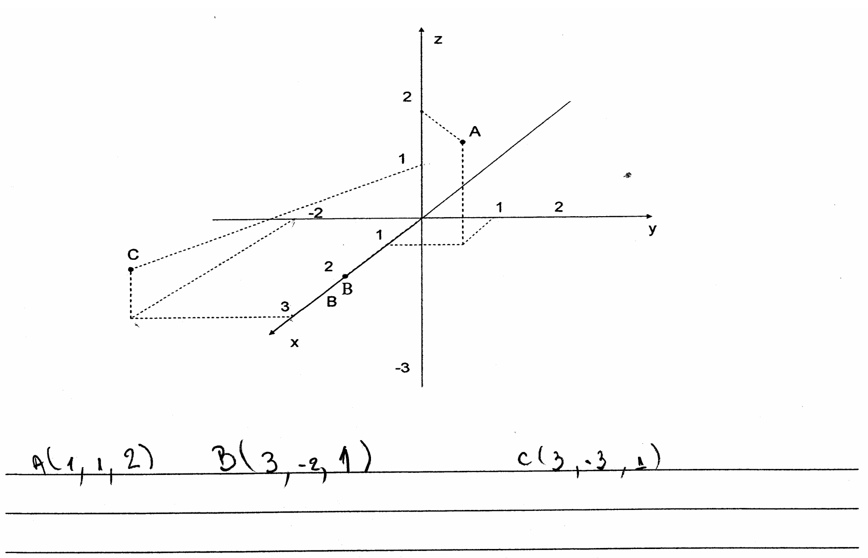
Todas as duplas apresentaram corretamente as coordenadas dos pontos em 2D, com exceção da dupla D3, que, supomos por esquecimento ou por não ter percebido a existência do ponto, não registrou as coordenadas do ponto G, como podemos ver no protocolo:



Protocolo da dupla D3

A conversão do registro gráfico para o numérico, em relação ao sistema 2D, parece não gerar dificuldades para esses estudantes.

Em relação à representação de pontos em 3D, com exceção da dupla D4, as demais duplas representaram corretamente as ternas ordenadas.



Protocolo da dupla D4

Como pode ser visto no protocolo da dupla D4, a terna ordenada (3, -2, 1) foi denominada de B, sendo que o correto seria C. E, não conseguimos encontrar a lógica utilizada pelos estudantes para registrar as coordenadas do ponto que denominaram ponto C.

Com a análise das questões 2 e 3, podemos concluir, assim como afirma Duval (2003) que a conversão entre os registros de representação deve ser desenvolvida nos dois sentidos, pois pudemos verificar que na conversão do registro algébrico para o gráfico, no sistema 3D, os estudantes apresentaram várias dificuldades, o que ocorreu com menor freqüência quando mudamos o sentido da conversão.

Questão 4

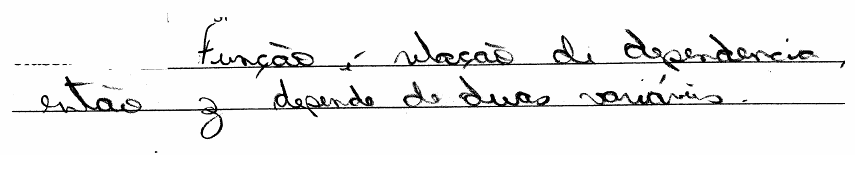
Nesta questão apresentamos quatro funções no registro algébrico, que os estudantes deveriam classificar como sendo de uma, duas ou três variáveis e justificassem no registro da língua natural, a classificação apresentada.

As funções são:

a) $z = x + 2y^2$	c) $y = \sqrt{x} + 2$
b) $z = 2 - x$	d) $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

Apenas duas duplas, D5 e D7, classificaram corretamente as funções.

A justificativa apresentada pela dupla D7, mostra que seus componentes compreendem o conceito de função a partir do número de variáveis.


função é relação de dependencia, então z depende de duas variáveis.

Protocolo da dupla D7

Já as justificativas da dupla D5, também dão a entender que se referem à relação de interdependência entre as variáveis, dependente e independentes, mas não justificam corretamente como a dupla D7.

A dependência do valor de X para achar a solução da função

Protocolo da dupla D5

As duplas, D1, D2, D3 e D6, classificaram as funções pelo número de variáveis, sem explicitar as variáveis dependente e independentes.

A dupla D4 não apresentou justificativas para a classificação que realizaram, mas classificaram corretamente os itens b e c como sendo função de uma variável e os itens a e d, respectivamente, como função de três e uma variável.

Vale ressaltar que apresentamos apenas o protocolo de um item de cada dupla, pois todas justificaram, os quatro itens desta questão, de forma muito parecidas.

, possui duas incógnitas (variáveis)

Protocolo da dupla D1

Notamos que a dupla D1 classifica a função pelo número de variáveis contidas na representação algébrica da função e não faz distinção entre as variáveis dependente e independentes.

Outro fato que destacamos do protocolo apresentado pela dupla é que os termos, incógnita e variável são utilizados como sinônimos, ou seja, não diferenciam o status das "letras".

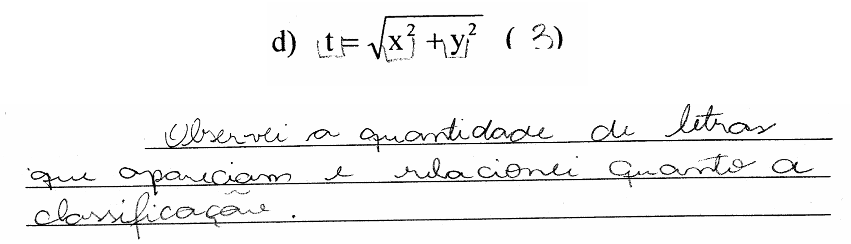
A dupla D2 também justifica recorrendo ao número de variáveis.

Aqui temos um fator constante e não variável (2), assim as variáveis são z e x.

Protocolo da dupla D2

Essa dupla utiliza o termo “fator constante” ao invés de “termo independente” apresentando uma linguagem matemática não adequada para estudantes do quinto semestre de um curso de formação de professores.

A dupla D6 também justifica de acordo com o número de variáveis, mas utiliza o termo letras para se referir a elas.


d) $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ (3)

Observei a quantidade de letras que apareciam e relacionei quanto a classificação.

Protocolo da dupla D6

Assim como havia ocorrido no questionário exploratório, concluímos, a partir dos protocolos, que os estudantes não classificam corretamente uma função como sendo de uma, duas ou três variáveis, o que pode dificultar o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, pois não fazem distinção do objeto matemático que estão estudando.

As justificativas apresentadas no registro da língua natural nos permitem observar que, estudantes do quinto semestre, não utilizam a linguagem matemática adequada para se referir aos objetos matemáticos abordados nesta questão.

Questão 5

Nesta questão apresentamos seis situações no registro da língua natural, sendo que alguns deles traziam o contexto matemático, e solicitamos aos estudantes que representassem por meio de uma fórmula matemática, ou seja, que realizassem a conversão para o registro algébrico e, em seguida, que dissessem quais eram as variáveis envolvidas na situação e que as classificassem como dependente ou independente.

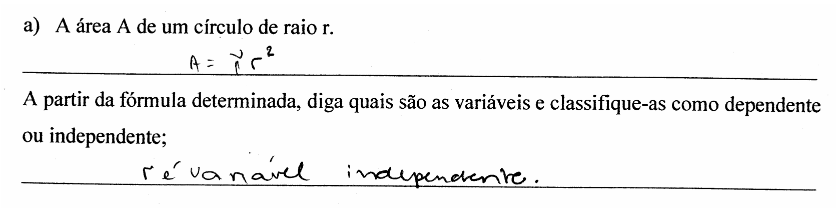
Apresentaremos a seguir, a análise dos protocolos apresentados pelas duplas em cada item.

Nesta análise, quando utilizarmos o termo “fórmula matemática” esteremos nos referindo a função, no registro algébrico, que representa cada situação.

A área A de um círculo de raio r. A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

Diferentemente do que encontramos nas respostas apresentadas no questionário exploratório, a maioria das duplas escreveu a fórmula matemática $A = \pi \cdot r^2$ e classificou corretamente as variáveis.

Apenas duas duplas, D4 e D5, não acertaram a classificação das variáveis, apesar de ter escrito corretamente a fórmula matemática que representa a situação. As duas duplas expressaram a variável r como independente, mas não classificaram a variável A.


a) A área A de um círculo de raio r.

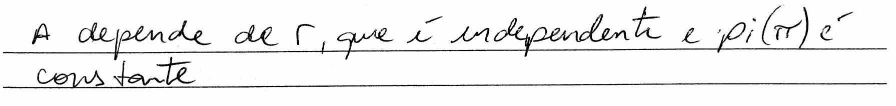
$A = \pi r^2$

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

r é variável independente.

Protocolo da dupla D4

Em seu protocolo a dupla D3, além de classificar corretamente as variáveis, ainda destacou que π é constante, expressando


A depende de r, que é independente e pi(π) é constante

Protocolo da dupla D3

Nenhuma das duplas interpretou o número π como variável, diferente do que havia ocorrido no questionário exploratório.

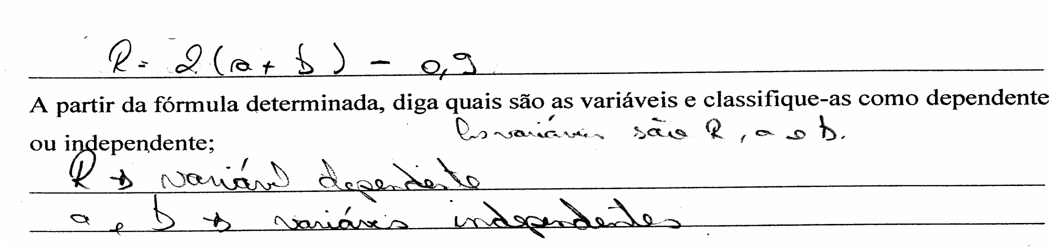
Item (b)

O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura *a* e comprimento *b,* sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura.

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

Assim como ocorreu no questionário exploratório, um dos estudantes nos questionou sobre o significado da palavra rodapé e o pesquisador respondeu que "é a barra que rodeia a parte inferior da parede (segundo o dicionário Aurélio), ou seja, é aquela faixa que se coloca na parte inferior da parede".

Neste item, apenas a dupla D7 deu a resposta completa, ou seja, apresentou a fórmula matemática e classificou as variáveis corretamente.


$R = 2(a+b) - 0,9$

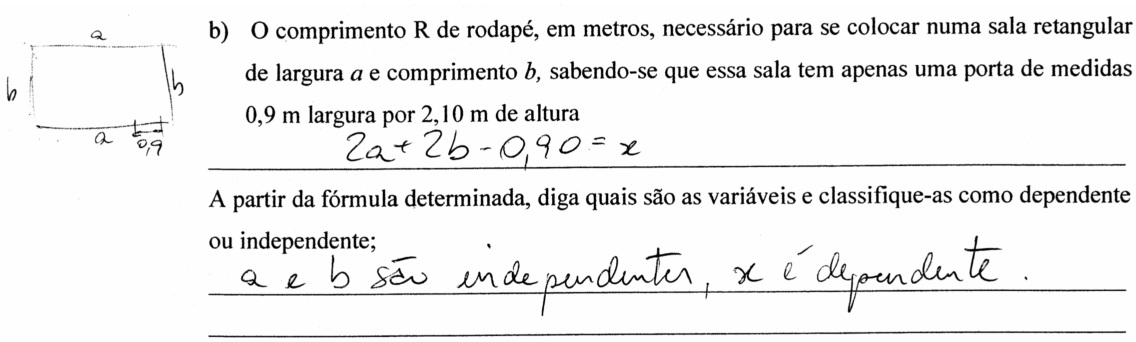
A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente; As variáveis são R, a e b.

R → variável dependente

a e b → variáveis independentes

Protocolo da dupla D7

A dupla D3 apresentou a fórmula matemática correta, mas não empregou as variáveis sugeridas, mais precisamente, utilizou a variável x ao invés de R. Mas, classificou corretamente as variáveis que adotaram.



b) O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura *a* e comprimento *b,* sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura

$2a + 2b - 0,90 = x$

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

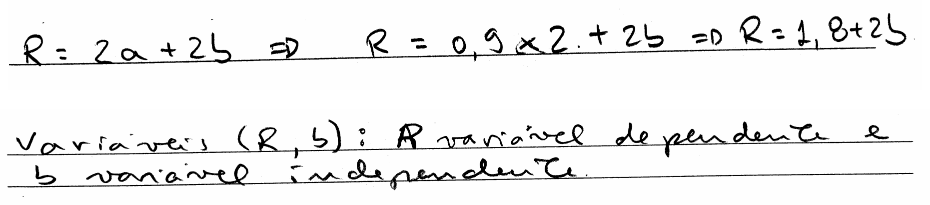
a e b são independentes, x é dependente.

Protocolo da dupla D3

Essa dupla recorreu ao registro geométrico para realizar a conversão do registro da língua natural para o algébrico, o que mostra que, os integrantes dessa dupla, constataram ser essa uma conversão não-congruente.

A dupla D1 também fez o registro geométrico, mas não apresentou o registro algébrico, ou seja, deixou este item em branco.

A dupla D2 apresentou, no registro algébrico, a fórmula para calcular o perímetro da sala e, logo em seguida, realizou tratamentos para, então, dar a resposta definitiva, mas os tratamentos foram realizados de forma incorreta.

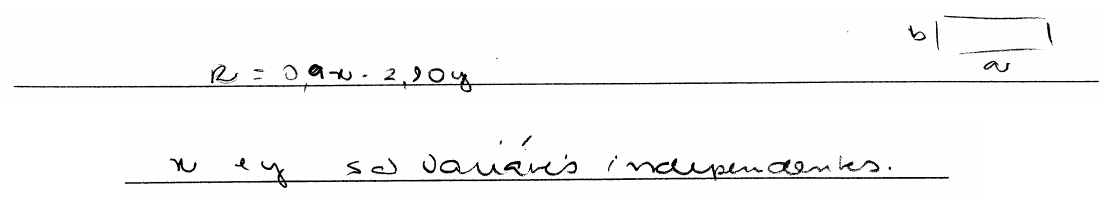

R = 2a + 2b => R = 0,9 x 2 . + 2b => R = 1,8 + 2b

Variáveis (R, b): R variável dependente e b variável independente.

Protocolo da dupla D2

Como podemos observar, no protocolo, a dupla D2 classificou corretamente as variáveis R e b, mas por um equivoco que realizou no tratamento, não classificaram a variável a.

A dupla D4, assim como D1 e D3, também recorreu ao registro geométrico, mas utilizou as medidas das portas como coeficientes das variáveis e apresentou uma fórmula em que multiplicaram as duas variáveis, com a qual calculariam uma área.



R = 0,9x . 2,10y

x e y são variáveis independentes.

Protocolo da dupla D4

Essa dupla não utilizou todas as variáveis sugeridas no enunciado e adotou x e y ao invés de a e b, as quais classificaram como variáveis independentes e não apresentaram classificação para a variável R.

As duplas D5 escreveu uma fórmula matemática para o cálculo da área da sala, ou seja, $R = a.b$. A dupla D6 também escreveu uma fórmula da área da sala, mas, além disso, subtraiu 0,9m que representa a largura da sala.

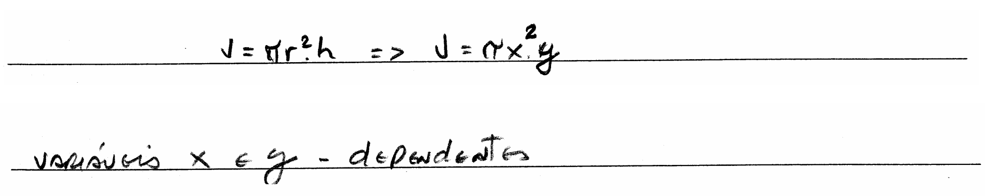
As duas duplas classificaram corretamente as variáveis, sendo R dependente e, a e b independentes.

Item (c)

O volume V de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura. A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

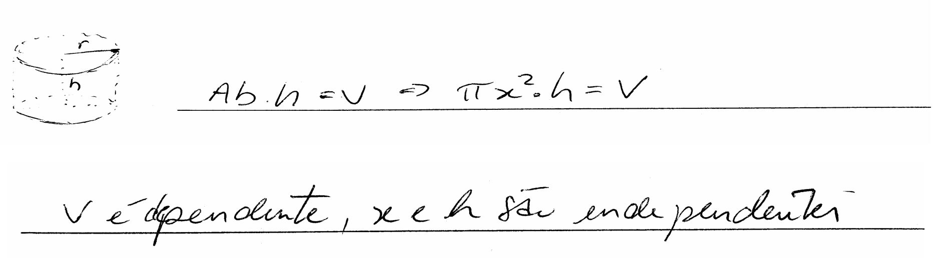
Três duplas, D2, D6 e D7, responderam corretamente esse item, ou seja, escreveram a fórmula matemática e classificaram adequadamente as variáveis como havia sido solicitado.

A dupla D5, antes de escrever a fórmula matemática, registrou a função que determina o volume de um cilindro, $V = p \cdot r \cdot h$, em que r e h representam respectivamente o raio e a altura do cilindro, geralmente utilizada nas aulas de Geometria, para em seguida, substituir pelas variáveis sugeridas no enunciado. No momento em que foram classificar as variáveis a fizeram de forma incorreta, pois disseram que x e y são variáveis dependentes e não classificaram a variável V, como podemos observar no seguinte protocolo:



Protocolo da dupla D5

A dupla D3 realizou o registro geométrico e, assim como a dupla D5, também recorreu à função que determina o volume de um cilindro para, em seguida, substituir pelas variáveis sugeridas no enunciado, mas diferentemente do que foi realizado pela dupla D5, essa dupla não substituiu corretamente as variáveis, pois continuou utilizando a variável h para representar a altura da piscina. Classificou corretamente as variáveis que utilizou na fórmula matemática que registraram.



$Ab \cdot h = V \Rightarrow \pi x^2 \cdot h = V$

V é dependente, x e h são independentes

Protocolo da dupla D3

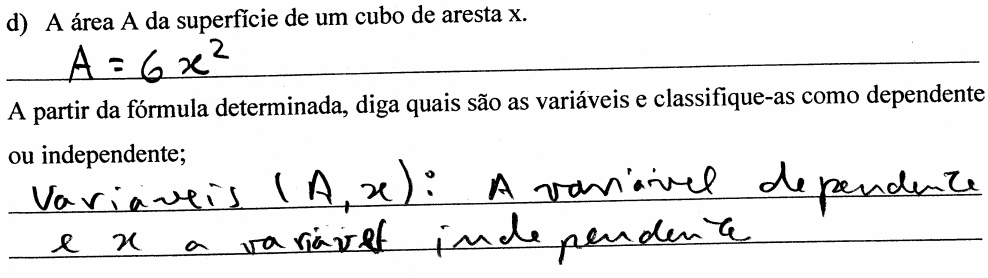
A dupla D4 recorreu ao registro geométrico para representar a situação, mas não apresentou a fórmula matemática como havia sido solicitada. Mesmo sem apresentar a fórmula, a dupla apresentou a classificação para as variáveis x e y, mas a fez de forma incorreta.

A dupla D1 apresentou a fórmula matemática $V = d \times R$ a qual não conseguimos compreender, pois as variáveis sugeridas foram V, x e y.

Item (d)

A área A da superfície de um cubo de aresta x. A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

As duplas D2 e D3 responderam corretamente este item, ou seja, escreveram a fórmula matemática e classificaram as variáveis corretamente.


d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.

$A = 6x^2$

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

Variaveis (A, x): A variável dependente e x a variável independente

Protocolo da dupla D2

As duplas D1, D4 e D6 ao invés de escreverem a fórmula para o cálculo da área da superfície do cubo, escreveram a fórmula que calcula o volume do mesmo. Em relação à fórmula que apresentaram, fizeram corretamente a classificação das variáveis.

d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.

$A = x^3$

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

x é a variável independente.
A é a variável dependente, pois depende do valor de x para obter seu valor.

Protocolo da dupla D4

Já a dupla D7, apresentou a fórmula para o cálculo da área de um quadrado e não da superfície de um cubo, que é a soma das áreas das faces do cubo. Mas, assim como as duplas D1, D4 e D6, realizou a classificação correta das variáveis envolvidas.

A dupla D5 não apresentou resposta para este item.

Acreditamos que muitos dos erros, aqui apresentados, podem ter surgido da má interpretação do enunciado que solicitava a área da superfície de um cubo e não do seu volume que é uma atividade mais trabalhada envolvendo formas tridimensionais. E, além da má interpretação, cremos que o conceito da área da superfície de um sólido não foi bem construído, por esses estudantes, nas disciplinas Geometria e Cálculo Diferencial e Integral.

Item (e)

A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

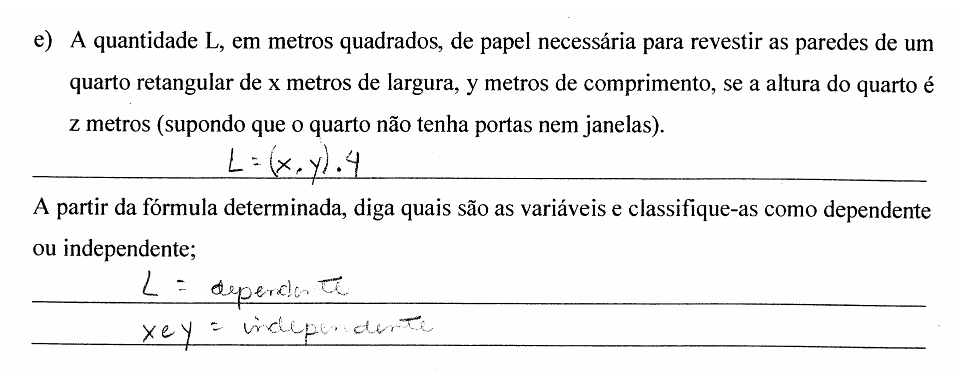
A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

A dupla D7 foi à única que respondeu corretamente este item. Escreveu a fórmula $L = 2zx + 2zy$ e classificou as variáveis corretamente.

A dupla D2 apresentou a fórmula $L = (x + y) \cdot z$,que fornece a metade do papel necessário para revestir as paredes da sala; notamos que essa dupla percebeu que se tratava da área das paredes, mas não deve ter atentado para o fato de que são dois pares de paredes congruentes. Classificou corretamente as variáveis como dependente e independentes.

As duplas D1 e D5 apresentaram uma fórmula que calcula a área do piso da sala e não a área das paredes como era necessário. Além disso, a dupla D1 ainda multiplicou por quatro, acreditamos que por entenderem que se tratava de uma sala com quatro paredes.

Ambas as duplas,em relação à fórmula que registraram, classificaram corretamente as variáveis.



e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

$L = (x, y) . 4$

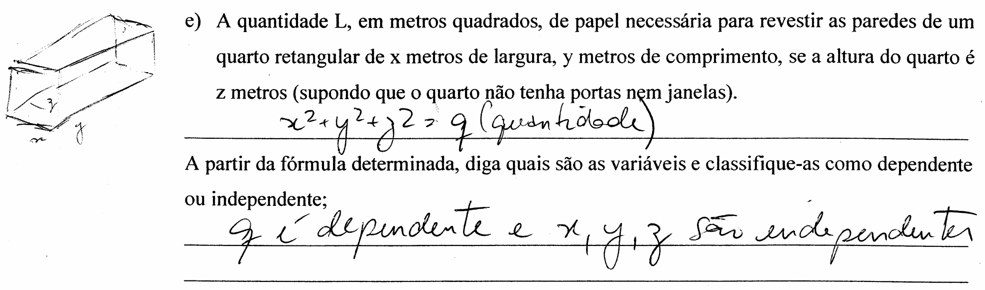
A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

L = dependente

x e y = independente

Protocolo da dupla D1

A dupla D3 recorreu ao registro gráfico para representar a situação, mas ao escrever a fórmula para calcular a quantidade de papel de parede necessário para revestir a sala, apresentou a equação de uma esfera de raio $\sqrt{q}$, utilizando a variável q ao invés de L que havia sido sugerida, classificando-as corretamente.



e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

$x^2+y^2+z^2 = q$ (quantidade)

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

q é dependente e x, y, z são independentes

Protocolo da dupla D3

A dupla D6 apresentou uma fórmula matemática que calcula o volume da sala e não a quantidade de papel necessária para revestir as paredes da sala. E, em relação à fórmula apresentada, classificou corretamente as variáveis.

A dupla D4 não apresentou resposta para este item.

Item (f)

O volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z. A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

Todas as 7 duplas responderam corretamente este item, ou seja, apresentaram a fórmula matemática e classificaram as variáveis.

Acreditamos que os estudantes não tiveram dificuldade em responder este item por se tratar de uma situação, no contexto matemático, que estão habituados a encontrar desde o ensino fundamental.

Baseados na quantidade de erros apresentada pelas duplas nos seis itens, podemos concluir que a conversão do registro em língua natural para o algébrico quando se trata de determinar uma função para representar uma situação fora do contexto matemático e, mesmo se tratando de contextos que implicitamente trazia situações geométricas, os estudantes tiveram dificuldades, principalmente quando se tratou de área de superfícies de sólidos.

Assim como já havia ocorrido no questionário exploratório, muitas duplas fizeram a conversão primeiramente para o registro geométrico para só depois converterem ao registro algébrico, o que nos leva a concluir a conversão de muitas situações do registro da língua natural para o algébrico não é congruente, pois os estudantes necessitam do registro geométrico para compreenderem a situação.

Questão 6

Nesta questão, apresentamos três funções de duas variáveis, no registro algébrico, e solicitamos que os estudantes determinassem o domínio de cada uma. Para isso era necessário que realizassem um tratamento nesse mesmo registro e, em seguida, que representassem no registro gráfico esse domínio. Disponibilizamos dois sistemas de eixos, 2D e 3D, para que eles próprios escolhessem qual era o mais adequado.

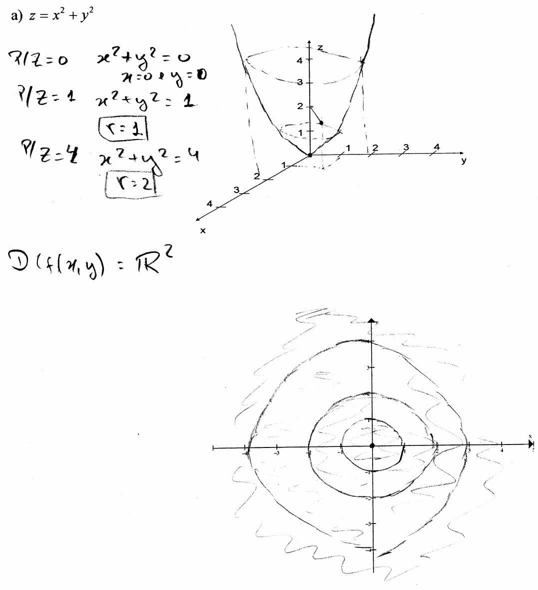
Destacaremos na apresentação de cada item apenas as funções, em sua representação algébrica, omitindo os sistemas de eixos que disponibilizamos aos estudantes.

Item (a)

$$z = x^2 + y^2$$

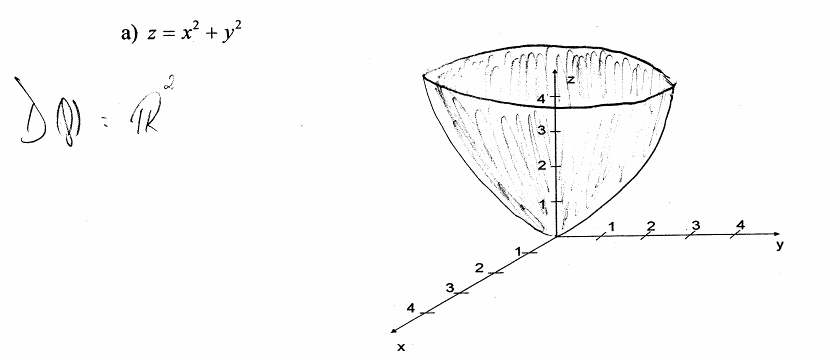
Neste item, das seis duplas que participaram da segunda sessão, apenas duas, D2 e D7, determinaram corretamente o domínio da função, mas nenhuma das seis apresentou corretamente o registro gráfico desse domínio.

A dupla D2 utilizou as curvas de nível para representar o gráfico da função, o que fez corretamente, mas não deve ter atentado para fato de que o solicitado era o gráfico do domínio e não da função.



Protocolo da dupla D2

A dupla D7, assim como a dupla D2, ao invés de representar o gráfico do domínio, fez um esboço do gráfico da função.



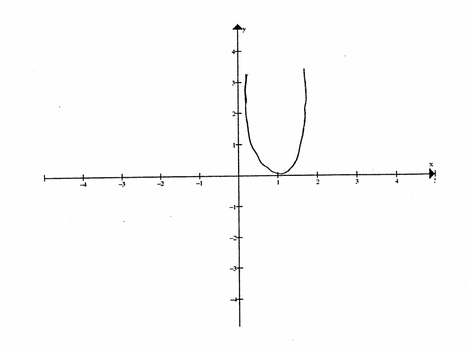
Protocolo da dupla D7

A dupla D1 confundiu a função com a equação de uma circunferência e apresentou, no registro gráfico, a parte da esfera contida no primeiro octante do sistema 3D.

A dupla D4 também representou a parte da esfera contida no primeiro octante do sistema 3D e fez um esboço de uma tabela, na qual, acreditamos que tentaria representar por meio da marcação de pontos.

A dupla D3 disse que o domínio dessa função é $D(f) =$ ¡ e não representou graficamente.

O caso mais esdrúxulo foi o da dupla d6, pois seus componentes disseram que o domínio da função é $D = x^2$ e representaram o que segue:



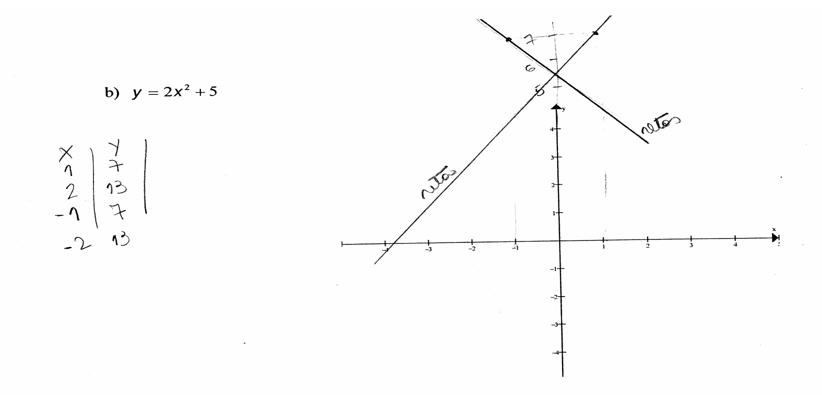
Protocolo da dupla D6

Item (b)

$y = 2x^2 + 5$

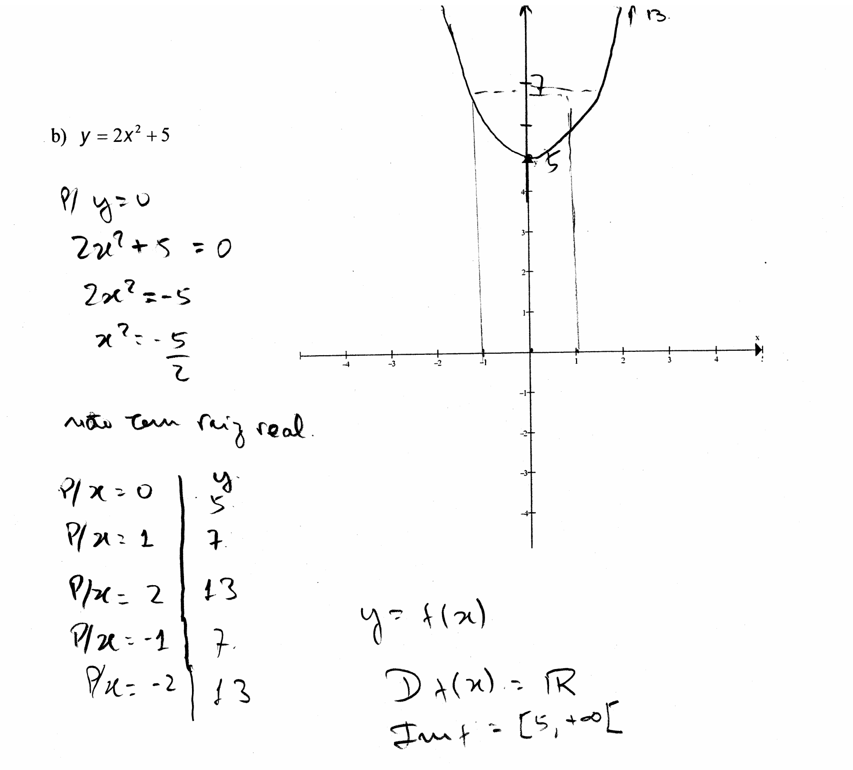
Neste item quatro duplas, D2, D3, D4 e D6, determinaram corretamente o domínio da função. Nenhuma das seis duplas representou corretamente o gráfico do domínio, sendo que, com exceção da dupla D1 que representou duas retas, as demais duplas registraram graficamente uma parábola.

A dupla D1 fez um registro numérico (tabela) e, em seguida, representou duas retas no sistema 2D.



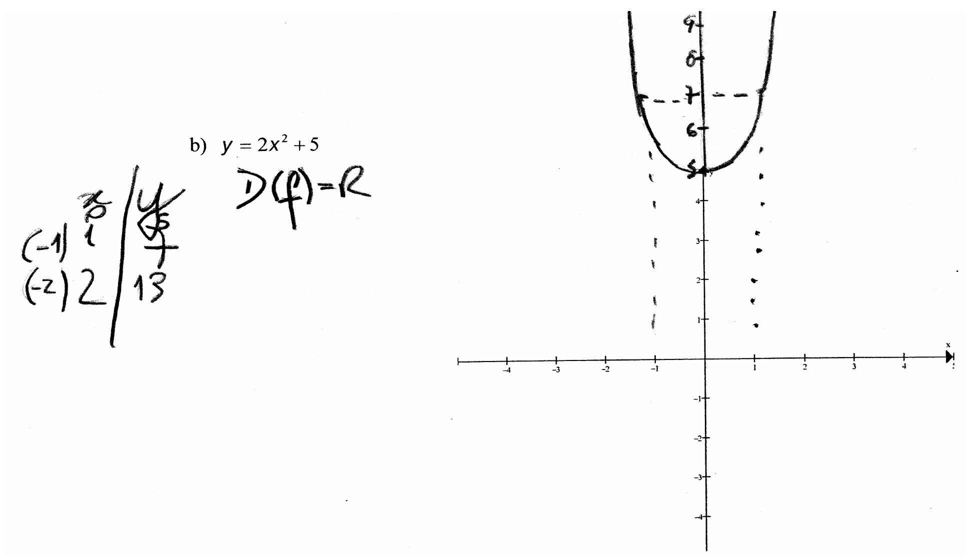
Protocolo da dupla D1

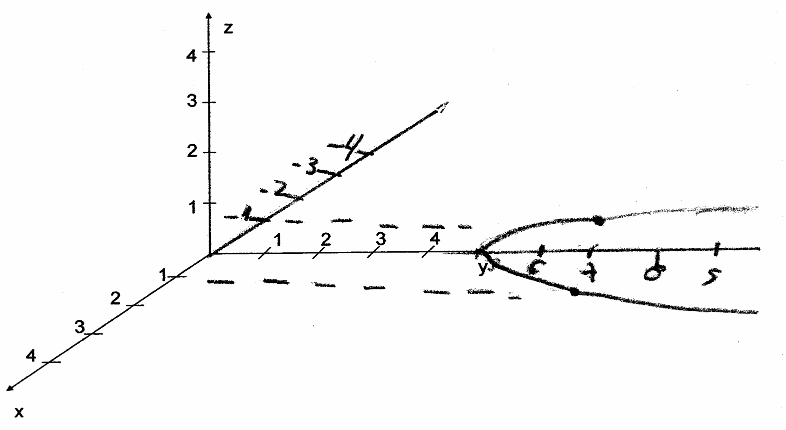
A dupla D2 além de apresentar o domínio da função, determinou também a imagem e verificou a quantidade de raízes e recorreu ao registro numérico para realizar a representação gráfica da função e não do domínio.



Protocolo da dupla D2

A dupla D3 apresentou, além do domínio, o registro numérico e o gráfico da função, sendo que esse último foi feito nos dois sistemas de eixos.

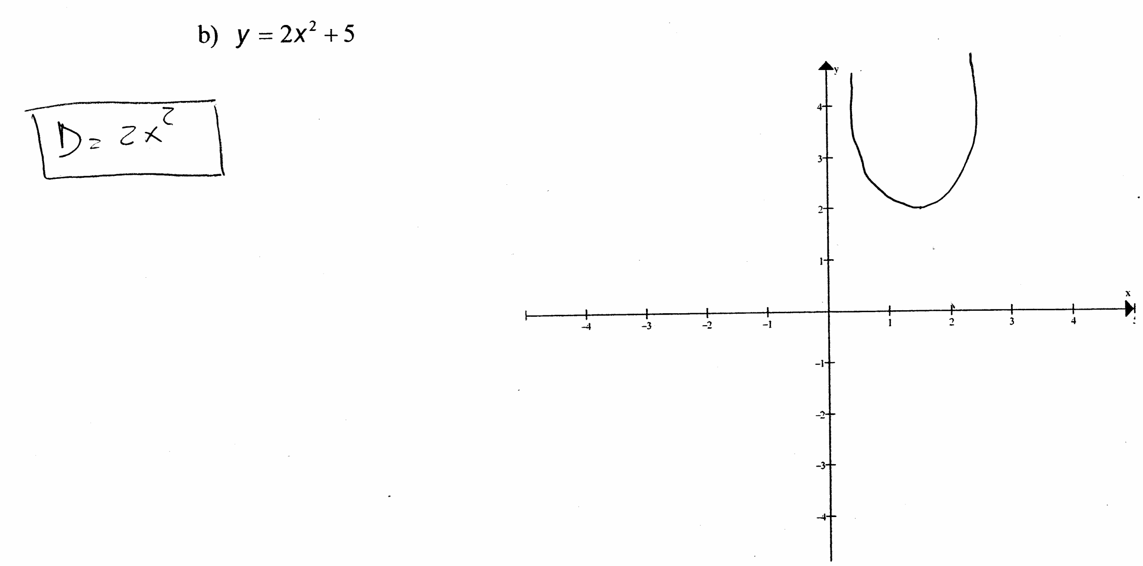




Protocolos da dupla D3

As duplas D4 e D7 apresentaram o domínio, no registro algébrico e representaram um esboço da função no registro gráfico, por meio de uma parábola.

Novamente a dupla D6, que nos dá a entender que não compreende o conceito de domínio, pois após analisar o item anterior e agora este, apenas utiliza como domínio a parcela que contém a variável x.



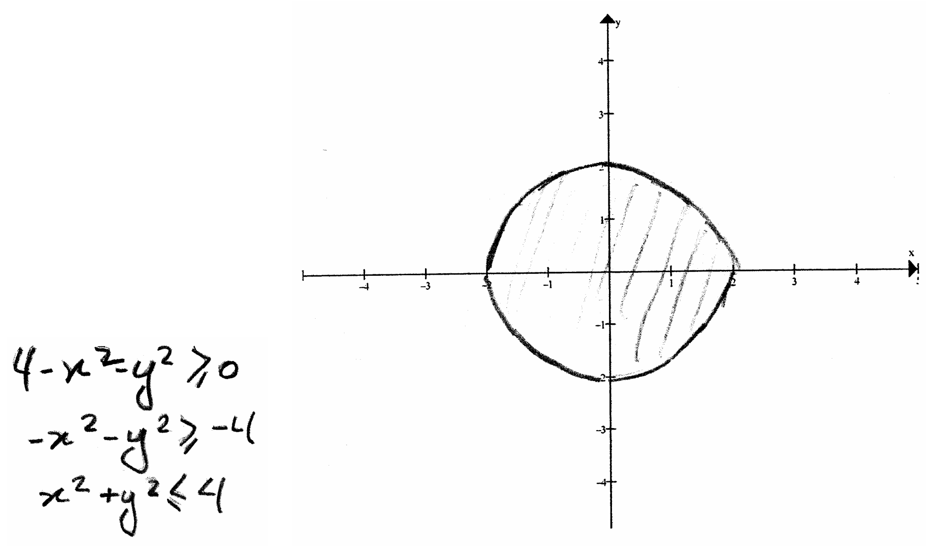
Protocolo da dupla D6

Item (c)

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

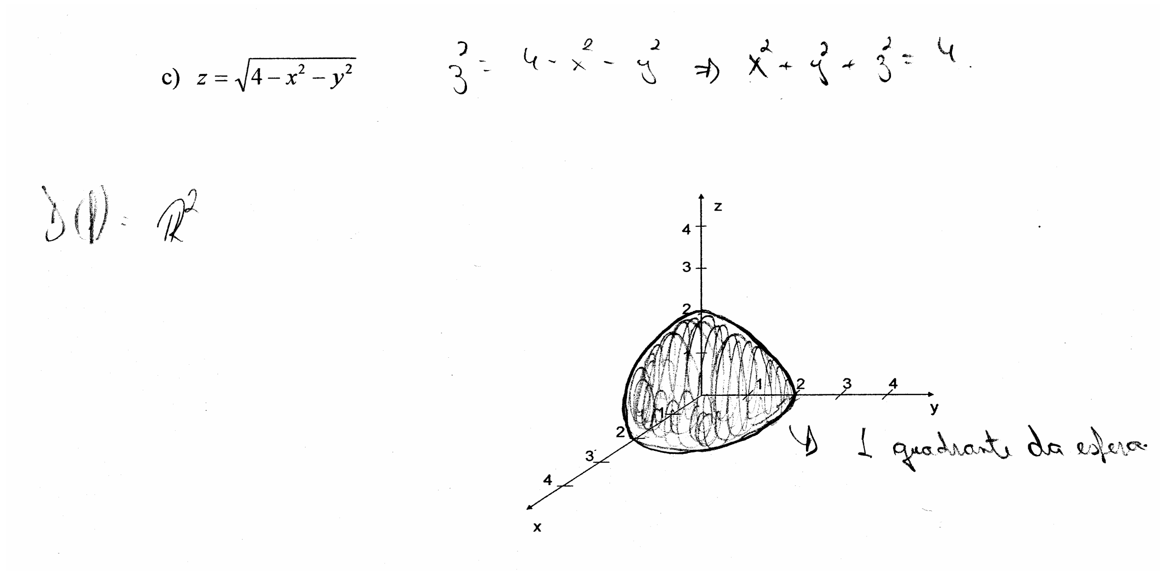
Neste item apenas a dupla D3, realizou corretamente o tratamento, no registro algébrico, necessário para a determinação do domínio dessa função e representou, acertadamente, o gráfico do domínio, no sistema 2D.

Apesar de ter representado corretamente o gráfico do domínio, a dupla não registrou o domínio da função, apenas realizou o tratamento e, dali, concluiu que aquela seria a condição para os elementos do domínio, ou seja, o domínio sobre o qual a função está definida.



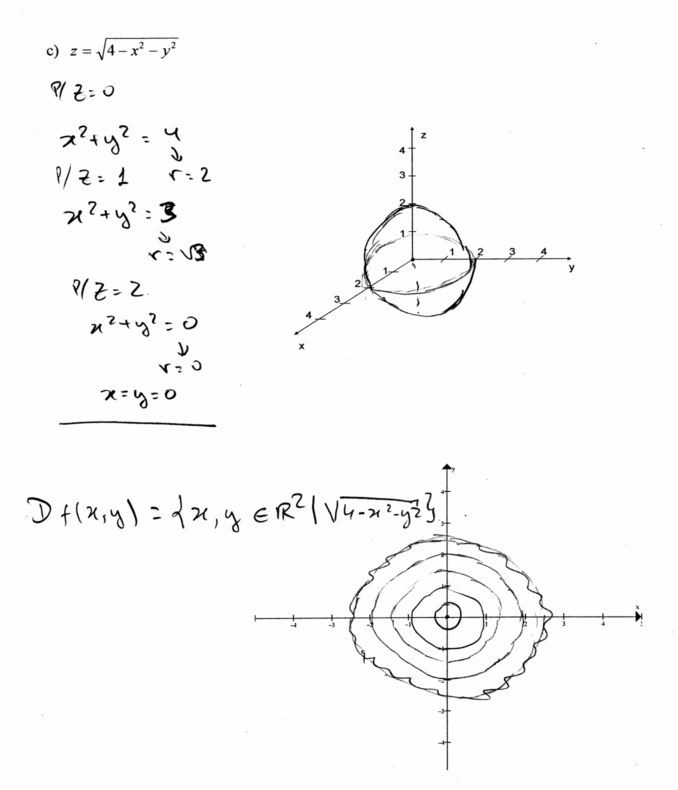
Protocolos da dupla D3

A dupla D7, também realizou tratamentos, no registro algébrico, determinando a equação de uma esfera de raio 2, mas ao apresentar o domínio da função disse que $D(f) = \mathbb{R}^2$. No registro gráfico esboçou a parte da esfera contida no primeiro octante do sistema 3D.



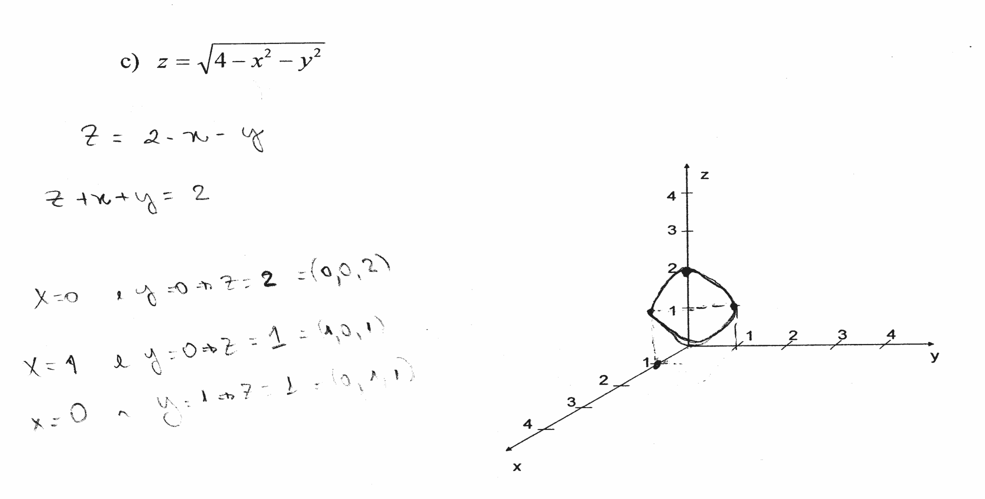
Protocolo da dupla D7

A dupla D2 apresentou o domínio $Df(x,y)=\{x,y \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{4-x^2-y^2}\}$, em que não verificou a condição para os elementos do domínio e ao invés de representar o seu gráfico, determinou algumas curvas de nível, fez o registro gráfico das mesmas e esboçou o gráfico da função.



Protocolo da dupla D2

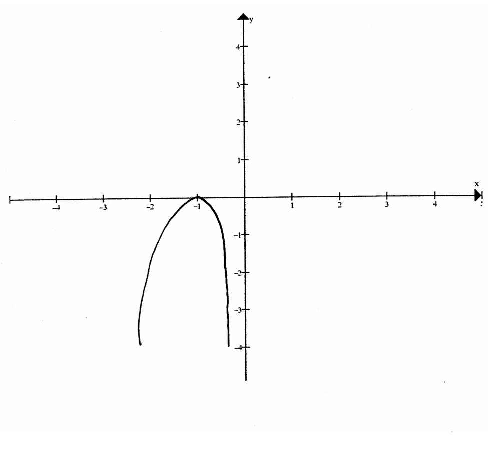
A dupla D4 realizou um tratamento no registro algébrico que chamou muito a atenção pelos erros cometidos, por se tratar de estudantes do quinto semestre. Pois a função contém um radical, cujo radicando é uma soma e, a dupla extraiu a raiz quadrada de cada parcela como se estivessem aplicando a propriedade do radical de um produto. Em seguida, atribuiu alguns valores para as variáveis na nova função que obteve, determinando assim alguns pontos, a partir dos quais fiz o registro gráfico.



Protocolo da dupla D4

A dupla D1 foi à única que não respondeu esse item.

Assim como havia feito nos itens anteriores, a dupla D6, novamente escreveu uma função de x e, no registro gráfico, apresentou uma parábola.



Protocolos da dupla D6

Assim como havíamos constatado no questionário exploratório, novamente podemos dizer que a determinação do domínio de uma função não é de fácil compreensão para os estudantes, pois, quando se trabalha com função de duas variáveis para que se determine o domínio é necessário muitas vezes um tratamento no interior do registro algébrico.

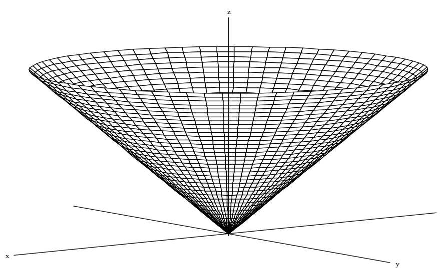
As dificuldades foram mais evidentes quando solicitamos representação do domínio no registro gráfico. Mesmo quando as duplas não determinaram corretamente o domínio da função, notamos que, na maioria das respostas, buscaram representar graficamente a função e não o seu domínio.

Questão 7

Nesta questão, apresentamos quatro funções no registro gráfico e solicitamos que os estudantes indicassem quais representavam funções do tipo $z = f(x,y)$.

As duplas D1 e D7 deixaram todos os itens dessa questão em branco.

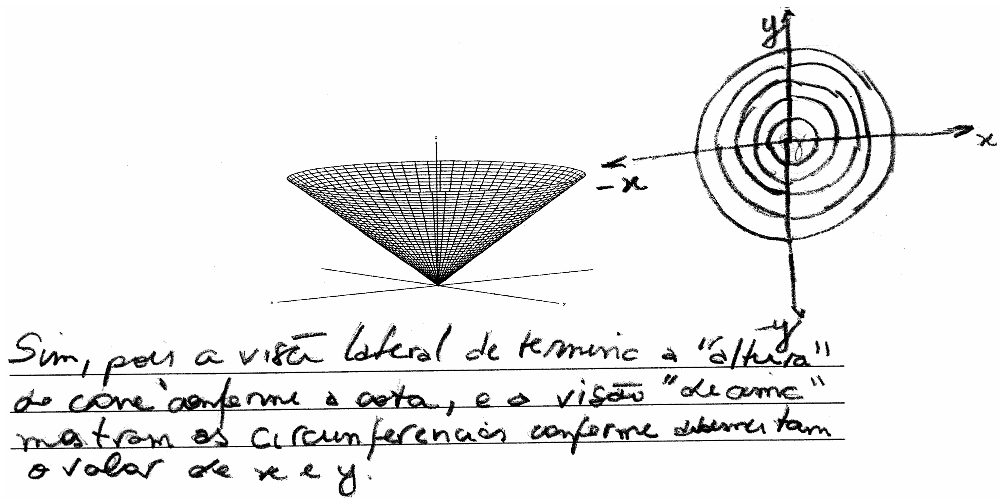
Item (a)



As demais duplas disseram que é uma função do tipo $z = f(x,y)$. Apenas as duplas D7 e D2 apresentaram em sua justificativa a relação entre as variáveis.

A dupla D7 justificou dizendo: “sim, pois são três dimensões e z depende da variação de x e y”. Já a D2, disse que “sim é função do tipo $z = f(x,y)$. Ao variar o valor de z temos um único par ordenado que representa a função”. Notamos que apesar das duplas utilizarem justificativas envolvendo as variáveis e a idéia de função, a D2 teve dificuldades em expressar-se no registro da língua natural, uma vez que disse que um par representa a função.

A dupla D3 justifica dizendo que sim, pois a visão lateral determina a altura do cone conforme a cota, e olhando de cima pode-se ver circunferências conforme determinam os valores de x e y, e faz o registro gráfico da vista de cima que nos dá uma idéia das curvas de nível do gráfico, como podemos ver no protocolo a seguir:

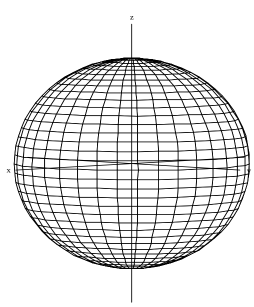


Protocolo da dupla D3

Ao justificar sua resposta a dupla D6, disse que o gráfico representa uma função $z = f(x,y)$, pois tem pontos em todos os eixos.

A partir das justificativas apresentadas pelas duplas D3 e D6, pensamos que não compreendem muito bem o conceito de gráfico de uma função, pois não relacionaram com a idéia da unicidade da imagem de cada elemento do domínio.

Item (b)

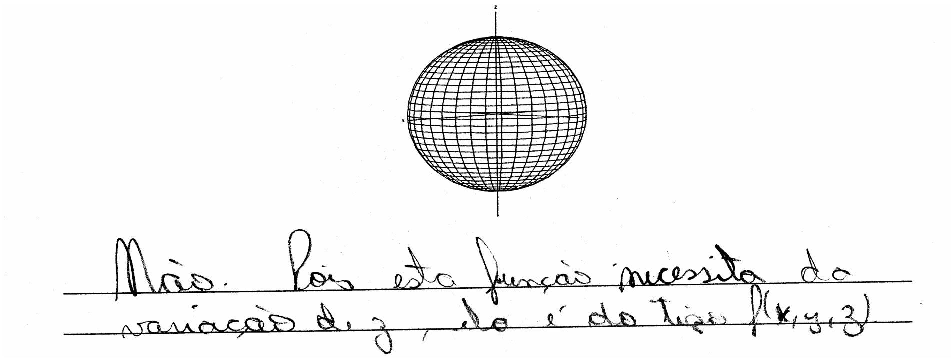


As duplas D3 e D6 disseram que o gráfico representa uma função de duas variáveis, justificando de forma semelhante a que haviam feito no item anterior, ou seja, a dupla D3 disse que sim por z determinar a altura proporcional dos valores de x e y, e novamente representou a vista de cima do gráfico. Já a D6 justificou dizendo que a representação possui pontos em todo o sistema de eixos.

As duplas D2 e D6 disseram que não representa uma função do tipo $z = f(x, y)$.

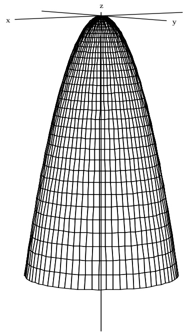
A D6 justificou dizendo que “ao variar z temos mais que uma representação”, isso nos leva a crer que essa dupla conhece o conceito de função, uma vez que ao dizer que tem mais que uma representação estava se referindo a imagem da função.

A dupla D6 justifica corretamente e dizendo que o gráfico representa uma função do tipo $f(x, y, z)$, ou seja, uma função de três variáveis $w = f(x, y, z)$.



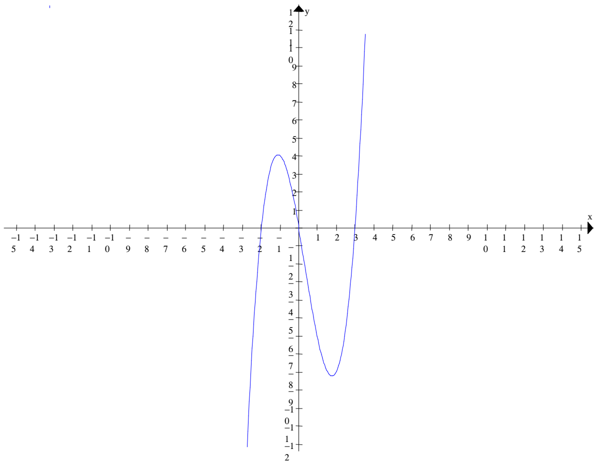
Protocolo da dupla D6

Item (c)



As quatro duplas que responderam a esse item, D2, D3, D6 e D7 disseram que o gráfico representa uma função $z = f(x, y, z)$, mas justificaram seguindo as mesmas idéias das justificativas apresentadas nos itens anteriores.

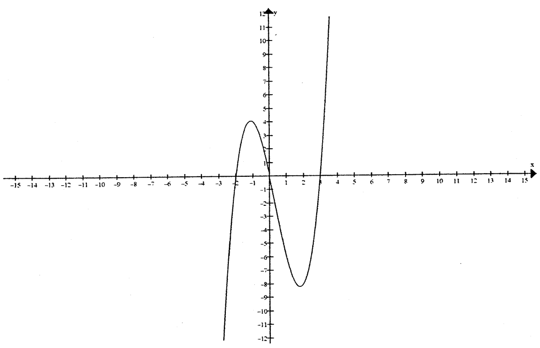
Item (d)



A dupla D3 não apresentou resposta a esse item.

As outra três duplas disseram que o gráfico não representa uma função $z = f(x, y)$, sendo que as duplas D2 e D6, justificaram dizendo que há dependência apenas de x.

A dupla D6 disse que no plano cartesiano se dá apenas em x e y, o que nos faz pensar, baseados nas respostas anteriores, que utilizaram a lógica por não aparecer o eixo z.



não pois o plano cartesiano se dá
apenas em x e y

Protocolo da dupla D6

A partir da análise dos protocolos, pensamos que alguns estudantes não relacionam o registro gráfico com o conceito de função, pois notamos que não relacionam com o fato de que cada elemento do domínio corresponde a uma única imagem, o que os levaria a utilizar o teste da reta vertical que apresentamos no Capítulo I ao discutirmos os registros gráficos das funções de uma e duas variáveis.

Questão 8

Nesta questão, apresentamos uma função de duas variáveis, cuja imagem é $z = f(x, y)$ e solicitamos que os estudantes descrevessem um procedimento para calcular as derivadas parciais de primeira ordem.

As duplas D1 e D4 não apresentaram resposta a esta questão.

A dupla D2 ao invés de descrever o procedimento para o cálculo das derivadas parciais fez um registro algébrico de algumas notações utilizadas para indicar as derivadas parciais.

Na resposta apresentada pela dupla D3, observamos que não compreendem bem o conceito de derivadas parciais, pois dizem que se deriva primeiro em x e depois em y, dependendo da variável que está primeiro na função.

A dupla D6 iniciou a descrição evidenciando que "para se calcular a derivada parcial de 1ª ordem dessa função primeiramente eu preciso saber em relação a quem será derivado" e continua dizendo que "em seguida, enquanto aplico a regra de derivação –regra do tombo – preciso atentar aqueles elementos que serão como constantes". Pela descrição realizada pela dupla, observamos que entendem o procedimento para o calculo das derivadas parciais, mas notamos que, para ela, $z = f(x, y)$ indica uma função polinomial, pois dizem que a regra de derivação a ser utilizada é a "regra do tombo", ou seja, o método utilizado para derivar polinômios. Podemos verificar, também, que destacam o fato das variáveis assumirem o status de constante.

A dupla D7, diz que se deve “derivar a função z primeiro em relação a variável x e depois volte novamente à função z e derive em relação à y”. Por essa descrição feita pela dupla, notamos que , assim como a dupla D6, essa também conhece os procedimentos para o cálculo das derivadas parciais, mas não indicaram que quando se deriva em relação a uma variável a outra passa a ter o status de constante.

Questão 9

Nesta questão, apresentamos dois itens que tratam dos procedimentos para a determinação das derivadas parciais, sendo que o primeiro enfatiza o status que as variáveis assumem e o segundo, solicitava que determinassem as derivadas parciais.

Item (a)

Neste item, fizemos a seguinte pergunta:

> Quando você calcula da derivada parcial da função: $z = x^2y + 2xy + x$, em relação à x, o que acontece com a variável y?

Todas as duplas responderam corretamente a esse item, o que mostra que todos sabem que quando se quer calcular as derivada parcial de uma função de várias variáveis em relação a uma delas, as demais passam a ter o status de constante. Fato que nos chamou a atenção, pois na questão anterior algumas duplas não responderam ou apresentaram uma resposta incorreta.

As duplas D2, D4 e D6, além de responder no registro da língua natural, apresentaram a derivada parcial no registro algébrico. Sendo que a D6, ao derivar a parcela x em relação a x, nos dá a entender que consideraram igual a zero, pois, apresentaram apenas $z' = 2xy + 2y$.

Item (b)

Neste item, solicitamos que utilizassem o procedimento descrito na questão anterior para calcular as derivadas parciais de 1ª ordem da função: $z = x^3 + 7xy^2 + y^3$.

As duplas D2, D4 e D6 determinaram corretamente as derivadas parciais indicando $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 7y^2$ e $\frac{\partial z}{\partial x} = 14xy + 3y^2$.

Já a dupla D7 determinou a derivada em relação a x corretamente, mas ao derivar a função em relação a y apresentou $\frac{\partial z}{\partial y} = 14x + 3y^2$, em que ao derivar a parcela $7xy^2$ não apresentaram a variável y.

Apenas as duplas D1 e D3 apresentaram soluções nas quais verificamos que não levam em conta o status que a variável assume no momento em que determinam as derivadas parciais. No protocolo da D1, pudemos notar que seus componentes sabem que se deve derivar, nesse caso, em relação a variável x e, em seguida, a y, mas observamos, também, que além de não considerar que y assume o status de constante quando se deriva em relação a x e vice-versa, que não dominam as regras da derivação, pois apresentaram como derivada parcial em relação a x a expressão $2x^2 + 7y^2 + y^3$ e, para a derivada parcial em relação a y, $x^3y + 14xy^3 + 3y^4$, em que notamos que confundem as regras de derivação com os de integração.

A dupla D3 apresentou o seguinte protocolo:

$$3x^2 + 14xy^2 + y^3$$
$$3x^2 + 28xy + 3y^2$$

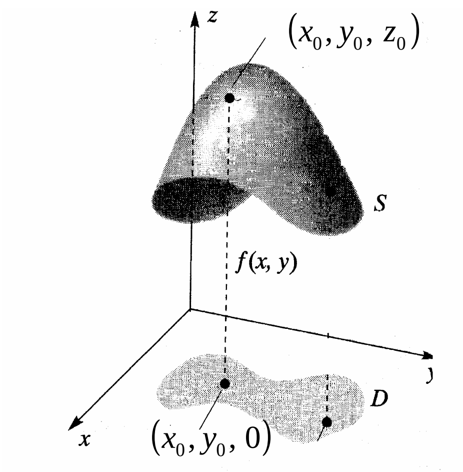
Protocolo da dupla D3

No qual verificamos que não domina os procedimentos para determinar as derivadas parciais de primeira ordem de uma função de duas variáveis, pois derivou simultaneamente em relação às variáveis x e y e, observando a segunda parcela notamos que tentaram derivar duas vezes em relação a y.

Nesta questão, notamos que alguns apresentam dificuldades em realizar o tratamento no interior do registro algébrico, uma vez que não determinaram corretamente as derivadas parciais de primeira ordem. Essa dificuldade pode ter surgido por não compreenderem corretamente o conceito de derivadas parciais de primeira ordem e, essa não compreensão pode ter surgido devido ao fato, de que, em boa parte dos casos, ao abordar esse assunto, os professores costumam trabalhar apenas com o registro algébrico, o que pode dificultar o acesso a esse conceito, pois, segundo Duval (2003), é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso a compreensão em Matemática.

Questão 10

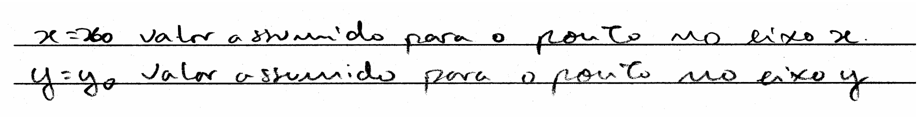
Nesta questão, pedimos para os estudantes considerarem a superfície, a seguir, que representa o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. Informamos que z_0 é o valor da função no ponto (x_0, y_0) e perguntamos, no item (a), o querem dizer as notações $x = x_0$ e $y = y_0$ e, no item (b), qual a interpretação geométrica dessas notações.



Item (a)

Neste item, nenhuma das duplas respondeu o que as notações indicam, isto é, que quando $x = x_0$ a variável x assume o status de constante, o mesmo ocorrendo com $y = y_0$.

A resposta que mais se aproxima dessa interpretação é a da dupla D2, como podemos ver no protocolo:


$x = x_0$ valor assumido para o ponto no eixo x.
$y = y_0$ valor assumido para o ponto no eixo y

Protocolo da dupla D2

As duplas D1, D4 e D5 interpretaram que são os valores que indicam a origem do sistema de eixos. Talvez tenham interpretado os índices zero com sendo as coordenadas da origem.

A dupla D7 disse que é “o valor das variáveis x e y num determinado ponto (x_0, y_0) da função”, o que mostra que não observaram que o gráfico representa uma função de duas variáveis e seus pontos são ternas e não pares ordenados.

Já a dupla D6 registrou apenas que são iguais.

Item (b)

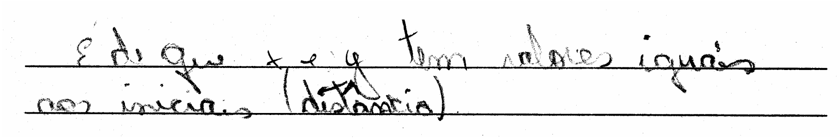
As duplas D1 e D4 não apresentaram resposta para este item.

A interpretação dada pela dupla D2 foi “para $x = x_0$ e $y = y_0$ temos um ponto (x_0, y_0)”; podemos observar que essa dupla não distinguiu as constantes e, assim como fez a dupla D7 no item anterior, não se deram conta de que o gráfico representa uma função de duas variáveis.

A dupla D5 registrou apenas “$(x, y)(0,0)$”. Imaginamos que podem ter apresentado essa representação, no registro algébrico, para indicar que se refere a origem do sistema cartesiano, em decorrência da resposta que a dupla apresentou no item anterior.

A dupla D6 respondeu que “os pontos x_0 e y_0 correspondem respectivamente aos eixos x e y”, expressando que são pontos e não coordenadas dos pontos como seria o correto.

Já a dupla D7 disse que x e y têm valores iguais aos iniciais e destaca que se refere à distância, como podemos observar no protocolo:


É dito que x e y tem valores iguais aos iniciais (distância)

Protocolo da dupla D7

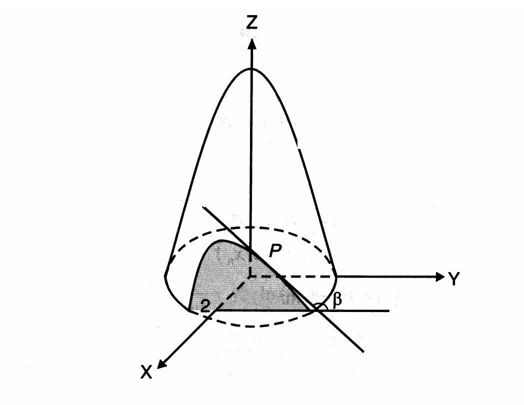
Pensamos que a dupla pode ter imaginado na distância de x_0 e y_0, respectivamente aos eixos x e y.

Nesta questão, observamos que os estudantes podem não ter levado em conta o registro gráfico apresentado e, como ocorre em muitos casos, pensado somente no registro algébrico, por ser este o mais enfatizado pelos professores em suas aulas.

Questão 11

Nesta questão, solicitamos que os estudantes encontrassem o coeficiente angular b da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = 6 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 2$, no ponto P (2, 1, 1). Para isso, disponibilizamos o registro gráfico da função, para auxiliá-los na interpretação do enunciado.

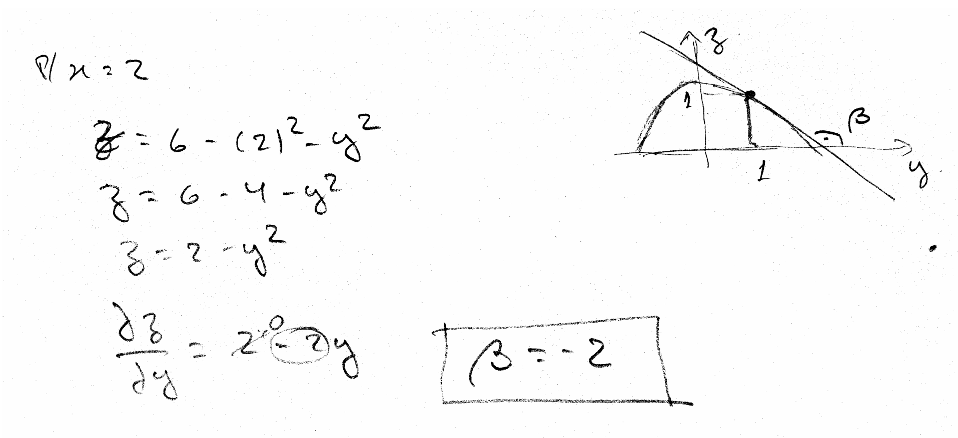
O registro gráfico que foi apresentado é o que segue:



Ainda no enunciado, destacamos que a parte escura representa o plano $x = 2$.

Não foi grande surpresa ao verificar que apenas a dupla D2 apresentou resposta para questão, uma vez que a complexidade envolvida pelo gráfico e pelo enunciado é relativamente grande. No entanto ela foi proposta uma vez que os sujeitos estão cursando o quinto semestre de uma licenciatura em matemática e tal questão é apresentada em livro didático.

Ao analisarmos o protocolo da dupla D2, notamos que ao invés de trabalhar com as derivadas parciais de imediato, primeiramente, atribuíram o valor 2 à variável x e, em seguida, determinaram a derivada da função $z = 2 - y^2$, que representa a curva de intersecção da função $z = 6 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 2$.



Protocolo da dupla D2

Pudemos notar que para determinar o coeficiente angular a dupla fez um esboço, do registro gráfico, da projeção da curva $z = 2 - y^2$ que determinaram sobre o plano yz e do plano $x = 2$, de onde verificamos que compreendem o conceito de reta tangente a uma superfície por um ponto, pois articulam os dois registros de representação, algébrico e gráfico.

Acreditamos que a maioria das duplas não apresentou respostas por não relacionarem o coeficiente angular da reta tangente com o conceito de derivadas parciais de primeira ordem.

Questão 12

Nesta questão, apresentamos a seguinte situação:

"Um professor realizou junto com seus alunos um estudo sobre o conceito de plano tangente a uma superfície, chegando à conclusão que a equação de tal plano é dada por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, em que $f_x(x_0, y_0)$ é a derivada parcial de primeira ordem em relação à x no ponto (x_0, y_0) e, que $f_y(x_0, y_0)$ é a derivada parcial de primeira ordem em relação à y no ponto (x_0, y_0). E, logo em seguida, solicitou que determinassem à equação do plano tangente à superfície $z = x^3 - y^2$ no ponto $(x, y) = (2, 3)$.

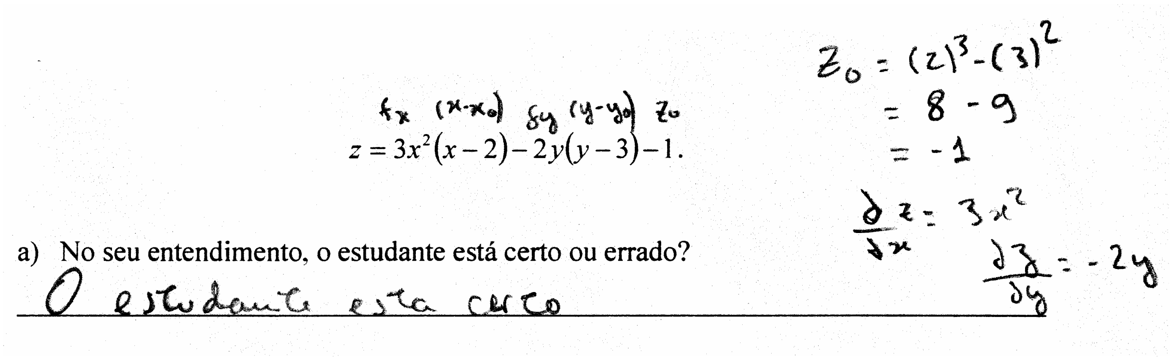
A resposta de um dos estudantes foi $z = 3x^2(x - 2) - 2y(y - 3) - 1$."

E fizemos as seguintes questões:

a) No seu entendimento, o estudante está certo ou errado?
b) Se acha que está errado, que erro o estudante cometeu?
c) Se a resposta do estudante estiver errada, apresente a resposta correta.

As duplas D1, D2, D5 e D7, disseram que o estudante havia apresentado a resposta correta, sendo que as duplas D1 e D7 só escreveram que estava "certo". Já as duplas D2 e D5, realizaram um tratamento no interior do registro algébrico para verificar a resposta.

A dupla D2 apresentou o seguinte protocolo:



f_x $(x-x_0)$ g_y $(y-y_0)$ z_0

$$z = 3x^2(x-2) - 2y(y-3) - 1.$$

$Z_0 = (2)^3 - (3)^2$
$= 8 - 9$
$= -1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$

a) No seu entendimento, o estudante está certo ou errado?

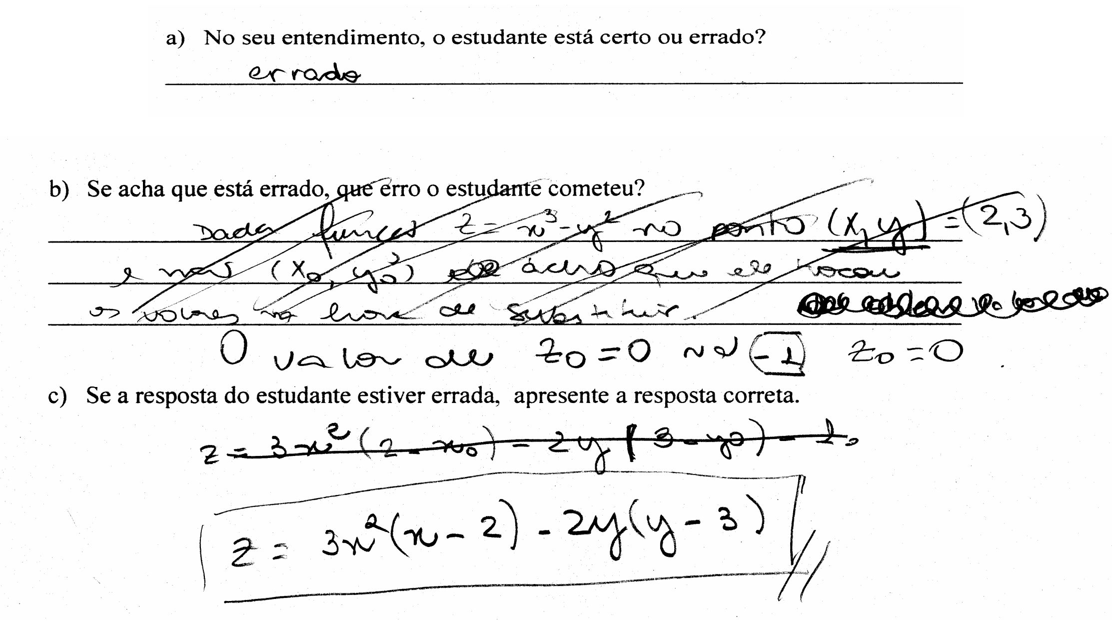
O estudante esta certo

Protocolo da dupla D2

Podemos notar que os componentes desta dupla determinaram a cota do ponto de tangência e as derivadas parciais que, quando aplicadas no ponto representa a inclinação das retas tangentes à curva determinada pela intersecção da superfície com os planos que contêm essas retas. Mas, não substituíram o ponto, o que fez com que dissessem que o estudante estava certo.

Já a dupla D5, determinou as derivadas parciais e, em seguida, concordou com a resposta do estudante.

A única dupla que não concordou com o estudante foi a D4, mas pudemos perceber no protocolo que cometeu um erro, pois disseram que o valor da cota determinado pelo estudante estava errado



a) No seu entendimento, o estudante está certo ou errado?

errado

b) Se acha que está errado, que erro o estudante cometeu?

~~Dada função $z = x^3 - y^2$ no ponto $(x, y) = (2,3)$ e nos (x_0, y_0) acho que ele trocou os valores na hora de substituir.~~

O valor de $z_0 = 0$ não -1 $z_0 = 0$

c) Se a resposta do estudante estiver errada, apresente a resposta correta.

$\cancel{z = 3x^2(2 - x_0) - 2y(3 - y_0) - 1.}$

$$\boxed{z = 3x^2(x-2) - 2y(y-3)}$$

Protocolo da dupla D4

A dupla D6 não apresentou respostas para essa questão.

Pudemos notar, nessa questão, que os estudantes não relacionam o coeficiente angular da reta tangente com a inclinação do plano tangente, uma vez que nenhuma das duplas indicou que o erro estava na não substituição do ponto nas derivadas parciais. Este fato pode estar relacionado com o estudo das derivadas das funções de uma variável, mais precisamente, quando se estuda a derivada para determinar a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto, pois, em muitos casos, os professores não costumam dar tanta ênfase na aplicação das derivadas e visam mais as técnicas de derivação.

Questão 13

Nesta questão, solicitamos que os estudantes determinassem a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 1, 3)$. Para isso, fornecemos a equação do plano tangente em sua forma genérica.

As duplas D1, e D6 não apresentaram resposta para esta questão.

As duplas D2 e D7 apresentaram a equação $z = 3 + 4x(x - 1) + 2y(y - 1)$ como sendo a equação do plano tangente ao parabolóide $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 1, 3)$, na qual verificamos que, assim como ocorreu na questão anterior, não calcularam as derivadas parciais no ponto para determinar o coeficiente angular das retas tangentes contidas no plano.

A dupla D4 também utilizou a equação $z = 3 + 4x(x - 1) + 2y(y - 1)$ para representar o plano tangente, mas continuou e, após realizar um tratamento no registro algébrico, apresentou a equação $z = 4x^3 - 4x^2 + 2y^2 - 2y + 3$.

$$z = 3 + 4x^2(x-1) + 2y(y-1)$$
$$z = 3 + 4x^3 - 4x^2 + 2y^2 - 2y$$
$$\boxed{z = 4x^3 - 4x^2 + 2y^2 - 2y + 3}$$

Protocolo da dupla D4

A dupla D5 baseou-se na equação do plano tangente e realizou algumas substituições de valores para determinar, de forma incorreta, a equação da reta tangente.

$$z = 4x + (1,1)(x-) + (1,1)(y-1) \;//$$

Protocolo da dupla D5

A partir dos protocolos pudemos confirmar, nessa questão, o que já havíamos detectado na questão anterior, que é o fato de não conhecerem o fato de que para determinar o plano tangente é necessário que se determinem os coeficientes angulares das retas tangentes relativas às curvas formadas pela intersecção da superfície com os planos $x = x_0$ e $y = y_0$.

A analise dos dados evidenciou que as dificuldades e dúvidas que vieram à tona são variadas e de diferentes naturezas. Vão desde o desconhecimento de resultados relacionados com a geometria métrica até as noções mais diretamente ligadas ao conceito de função de uma ou mais variáveis. Ficou explicito, por exemplo, que a idéia de variação envolvida no conceito de derivadas não é algo que se possa pressupor como sendo do domínio do aluno que se inicia no estudo de função de duas variáveis. Muito menos que a transição do estudo de função de uma para mais variáveis se processa de modo natural: há fatos novos em jogo.

Os registros de representação semiótica se revelaram uma ferramenta eficaz para fazer emergir questionamentos e expor dificuldades que, acreditamos, só puderam ser evidenciados com a proposta de questões em diferentes representações e que, para sua resolução, era necessário transitar entre diferentes registros.

Após essa análise, em que pudemos verificar algumas dificuldades semelhantes as já detectadas no questionário exploratório, em algumas questões, e, também, as dificuldades que surgem quando se trabalha com as derivadas parciais, apresentaremos uma discussão sobre elas no próximo capítulo.

CAPÍTULO V

Considerações finais

Com essa pesquisa, tivemos o objetivo de verificar quais as dificuldades e saberes manifestados pelos estudantes relativo à transição do estudo das funções de uma variável para o caso de duas, no que diz respeito as variáveis e a interdependência entre elas, ao domínio e o gráfico, à relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também, quais manifestações são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem.

A motivação por realizar esse estudo surgiu, inicialmente, em nossa prática como professor da Disciplina Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que pudemos verificar por meio de atividades e avaliações realizadas pelos estudantes sobre função de duas variáveis que eles faziam muitas confusões com os conceitos envolvidos por estarem habituados ao estudo de função de uma variável. Essa motivação passou a ser maior quando iniciamos nossa participação no grupo de pesquisa G2, intitulado: "Matemática no ensino superior: Didática do Cálculo.", coordenado pelo professor Benedito Antonio da Silva, pois partimos em busca de pesquisas que abordassem o ensino e aprendizagem de funções de duas variáveis e, as poucas pesquisas que encontramos sugeriam a utilização de um software para auxiliar no estudo dessas funções e apontavam que havia muitas dificuldades na realização desse estudo.

Tendo em vista algumas dessas dificuldades apontadas, decidimos realizar esta pesquisa com a intenção de responder as seguintes perguntas: Quais as dificuldades e saberes manifestados pelos alunos relativos à transição do estudo de função de uma variável para o de duas variáveis, no que diz respeito ao conceito de variáveis dependente e independente, ao domínio de função, os gráficos de função e a relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função? E que manifestações dessas dificuldades são reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem?

Para isso elaboramos dois questionários fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, aos quais denominamos exploratório e definitivo, compostos, respectivamente, de 7 e 13 questões, sendo que o exploratório teve a finalidade, além de verificar as dificuldades que seriam manifestadas, de servir como instrumento de verificação da pertinência das questões que tínhamos proposto, e quanto à compreensão dos enunciados das mesmas, a fim de, a partir dessas indicações, elaborarmos o definitivo.

Os questionários, exploratório e definitivo, foram aplicados, respectivamente, a 15 duplas de estudantes do quarto e 7 duplas do quinto semestres de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade particular da Grande São Paulo.

A partir dos protocolos dos alunos, pudemos verificar que muitas dificuldades são manifestadas já no inicio do estudo das funções de duas variáveis, pois grande parte dos estudantes não compreendem o sistema tridimensional, ou seja, a representação gráfica do $\mathbf{R}^3$. Constatamos esse fato nas questões que envolviam a conversão do registro numérico para o gráfico, em relação à representação de pontos no sistema 3D.

Essa não compreensão do sistema tridimensional pode ocorrer em conseqüência da ênfase dada ao estudo do plano cartesiano e a falta de tempo destinada ao estudo desse sistema, pois notamos que os estudantes buscam utilizar a mesma idéia e localização de pontos do $\mathbf{R}^2$ para o $\mathbf{R}^3$ e acabam se esquecendo do significado da cota de um ponto.

Outra dificuldade apresentada pelos estudantes é que muitos não classificam uma função de acordo com o número de variáveis independentes, pois pudemos observar, nos protocolos deles, que utilizam o número de variáveis que estão relacionadas, ou seja, que aparecem no registro algébrico. Fato que pode dificultar o estudo, uma vez que não conseguem distinguir o objeto matemático que está estudando.

Uma atividade que não estamos habituados a utilizar em nossa prática como professor de Cálculo Diferencial e Integral e que pudemos verificar sua importância com esta pesquisa, foram a conversão do registro da língua natural para o algébrico e, também, quando solicitamos justificativas no registro da língua natural. Isso permitiu que analisássemos o raciocínio utilizado pelos estudantes, uma vez que expressaram o raciocínio utilizado na resolução.

Os estudantes apresentaram grandes dificuldades na conversão do registro da língua natural para o algébrico, principalmente, em situações que o contexto não lhes era familiar, pois muitos deles não conseguiram escrever, no registro algébrico, uma fórmula que pudesse representar a relação das variáveis envolvidas em cada situação, apesar de mostrarem conhecimentos sobre quais variáveis eram dependentes e quais eram independentes.

A determinação do domínio das funções de duas variáveis foi outra grande dificuldade que constatamos, pois nos protocolos apresentados notamos que muitos confundem o conceito de domínio com o de curva de nível e, também, que muitos não verificam onde o domínio da função está definido.

Há uma confusão, também, entre o da função e de seu domínio, pois solicitamos que representassem graficamente o domínio de algumas funções e, grande parte dos estudantes, fizeram um esboço do gráfico da função, o que mostra tal confusão.

Como mencionamos, no capítulo IV, pensamos que alguns estudantes não relacionam o registro gráfico com o conceito de função, pois notamos que não relacionam com o fato de que cada elemento do domínio corresponde a uma única imagem, uma vez que, ao justificar as escolhas feitas na questão que solicitava que dissessem se os gráficos apresentados representavam funções de duas variáveis, utilizaram argumentos que não envolviam o conceito de função e nem o relacionamento entre as variáveis.

Nas atividades que envolviam o conceito de derivadas parciais, notamos que conhecem o procedimento para determinar as derivadas parciais no registro algébrico, mas, assim como constatou Dall’anese (2000) para derivadas de função de uma variável, também constatamos que a interpretação geométrica das derivadas parciais, primeiramente como coeficiente angular da reta tangente e, posteriormente, como a inclinação do plano tangente, não é compreendida pelos estudantes, como pudemos constatar, uma vez que apesar de determinarem as derivadas parciais, não as calcula no ponto indicado.

Notamos que a não compreensão do gráfico de função é uma das manifestações que surgem ao se estudar as derivadas parciais, pois os alunos não interpretam em outro registro o que realizam no algébrico. Fato que pode ocorrer devido a importância dada, por professores, as técnicas para determinar as derivadas parciais no registro algébrico, dando pouca ênfase na interpretação de seu significado.

Conseguimos, com nosso questionário definitivo, verificar melhor as dificuldades apresentadas pelos estudantes, pois fizemos alterações nas questões que foram mal interpretadas no exploratório chegando a um instrumento com mais qualidade.

Os estudantes que participaram dessa pesquisa, tiveram muito empenho para responder as questões e aceitaram bem essa atividade. Assim também foi com a instituição que nos permitiu realizar a coleta de dados sem se opor.

Nessa pesquisa, apontamos algumas dificuldades que podem atrapalhar na compreensão dos conceitos que aparecem no início do estudo das funções de duas variáveis, fundamentados na Teoria dos Registros de Representação, sobre a qual refletimos e, a partir daí, mudamos nossa prática na sala de aula, e passamos a valorizar os registros de representação propondo atividades que possibilitem a conversão entre registros.

Como nessa pesquisa abordamos o estudo das funções de duas variáveis, sugerimos que tal estudo seja estendido, pois acreditamos que essas dificuldades que apontamos podem ser manifestadas, também, no estudo das integrais múltiplas.

Com a realização desta pesquisa, almejamos auxiliar o professor, nos sentido de que podem enfatizar mais, em suas aulas, as dificuldades apontadas para melhorar a qualidade do ensino e, assim, ajudar na formação dos cidadãos que compõem à sociedade mundial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANACLETO, G. M. C. *Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Calculo Diferencial e Integral*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Gradiva-publicações Ltda: Lisboa, 2003. (Coleção Ciência Aberta, n. 98)

CARVALHO, N. T. B.; PEREIRA, R. *O Software MAPLE no estudo de funções de várias variáveis.* Educação Matemática em Revista, ____, ano 11, n. 17, p. 52 – 60, dez., 2004.

CATAPANI, E. C. *Alunos e professores em um Curso de Cálculo em Serviço: o que Querem?* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

COSTA, A. C. *Conhecimentos universitários sobre o conceito de função*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DALL’ANESE, C. *Conceito de derivada*: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Silvia Alcântara Machado (org.). – Campinas, SP: Papirus, 2003 (coleção papirus), p. 11-33.

______. *L’analise cognitive du fonctionnement de la pensée et activité mathématique*. São Paulo: PUC, 1999.

FERREIRA, A. B. H. *Miniaurélio Século XXI Escolar: O minidicionário da língua portuguesa*, 4ª Ed. Ver. Ampliada, Rio de janeiro, Nova Fronteira, 2000.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo A*: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: MAKRON Books, 1992. 5 ed.

______. *Cálculo B*: Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Integrais Triplas. São Paulo: MAKRON Books, 1999.

GRIMBERG, G. E. *A constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna*. Tese: São Paulo (SP). USP-Filosofia, 2001.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo* – 2 ed.- São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 1987. v. 1.

______. *Um curso de Cálculo* – 5 ed.- São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2004. v. 2

HENRIQUES, A. *L’enseignement et l’apprentissage des integrales multiples*: analyse didactique integrant l’usage du logiciel maple. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 2006.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. v. 1

MARIANI, R. de. C. P. *Transição da educação básica para o ensino superior*: A coordenação de Registros de Representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no Curso de Cálculo. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

McCALLUM, W. G. et al. *Cálculo de várias variáveis*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda: 1997.

MELO, J. M. R. de. *Conceito de Integral*: uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

OLIMPIO, A. J. *Compreensões de Conhecimentos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PELHO, E. B. B. *Introdução ao conceito de função*: a importância da compreensão das variáveis. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

RESENDE, W. M. A. *O ensino de Cálculo:* Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SAD, L. A. *Cálculo Diferencial e Integral*: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SCUCUGLIA, R. *A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SIERPINSKA, A. *Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits*. Educational Studies in Mathematics, 18, p. 371- 397, 1987.

SOUZA JR., A. J. *Trabalho coletivo na universidade: Trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

STEWART, J. *Cálculo, volume I*. 4. ed. – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

______. *Cálculo, volume II*. 4. ed. – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com Geometria Analítica. Trad. Alfredo Alves de Faria. São Paulo: Makron Books, 1994. 2ª ed.

TALL, D. *Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis*. Focus on Learning Problems in mathematics, 12 (3&4), p. 49-63, 1990.

VIDIGAL, L. F. *Conhecimentos mobilizados por alunos sobre a noção integral no contexto das concepções operacionais e estruturais*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

VILARREAL, M. E. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ANEXOS

Anexo I

Dupla _____

O questionário exploratório

Questão 1

Para cada uma das situações abaixo, escreva uma equação matemática que melhor possa representá-la:

a) A área A de um círculo de raio r.

____

b) O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura *a* e comprimento *b*, sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura

____

c) O volume V de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura.

____

d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.

____

e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

____

f) O volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

____

Dupla _____

Questão 2

Em relação às situações da questão anterior, para cada item, escreva quais são as variáveis que dependem de outra e quais não dependem?

a) ____

____

b) ____

____

c) ____

____

d) ____

____

e) ____

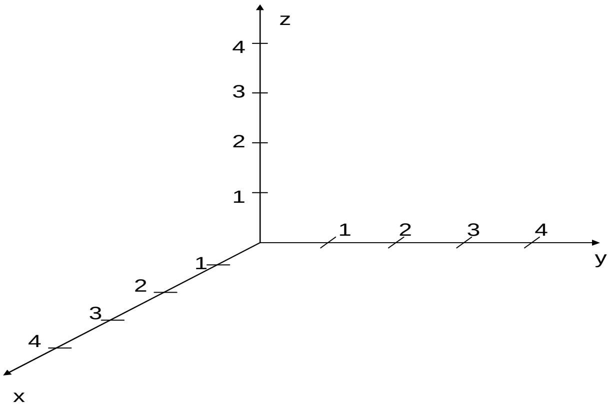
____

f) ____

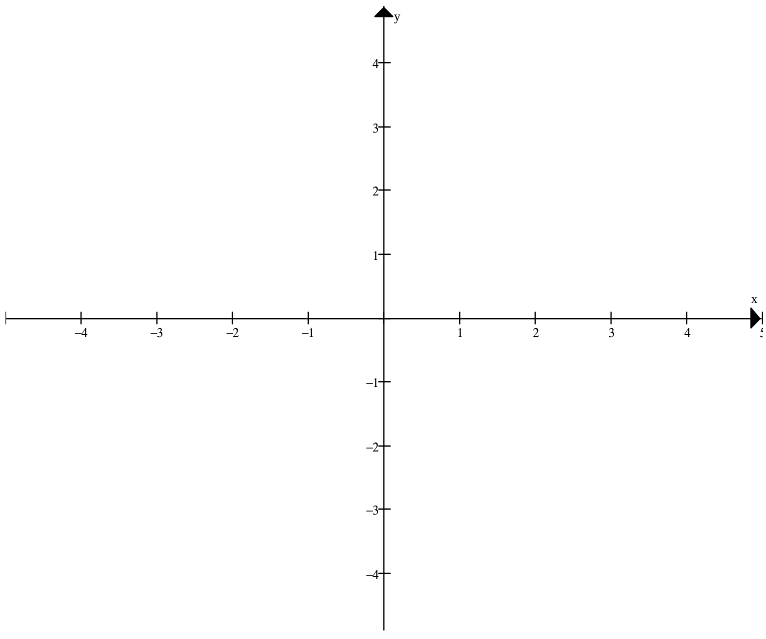
____

Questão 3

Localize os seguintes pontos nos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais: A(3, -2), B(2,1, 3), C(-2, 3), D, E(0, 3, 0), F(1, 2), G(0, -4), H(2, 0), I(2, -1, 3) e J(0, 0, 1).

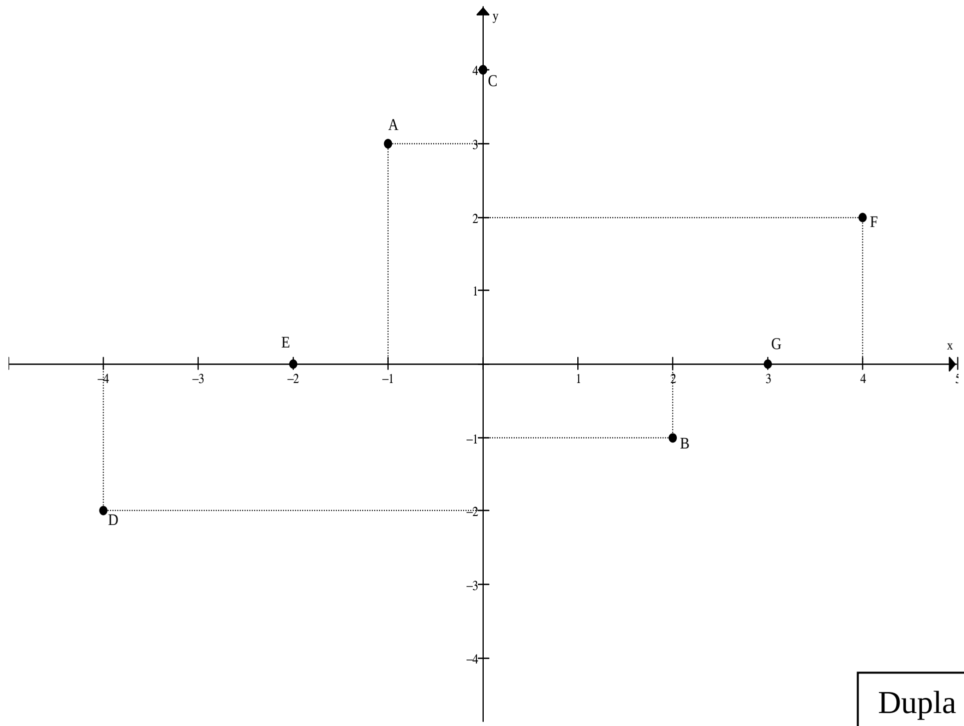


Dupla ______

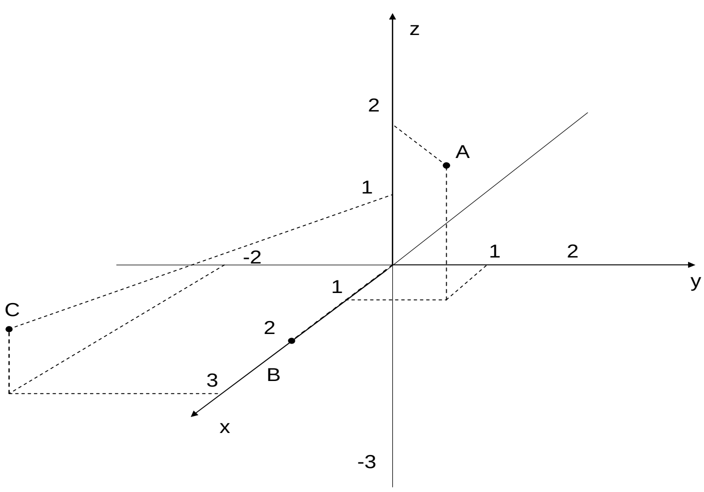


Questão 4

Dê as coordenadas dos pontos indicados nas figuras abaixo:



Dupla _____



Questão 5

Classifique as funções abaixo como função de uma variável (1), de duas variáveis (2) e três variáveis (3), justificando sua resposta:

a) $z = x + 2y^2$ ( )

____

____

b) $z = 2 - x$ ( )

____

____

c) $y = \sqrt{x} + 2$ ( )

____

____

d) $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ ( )

____

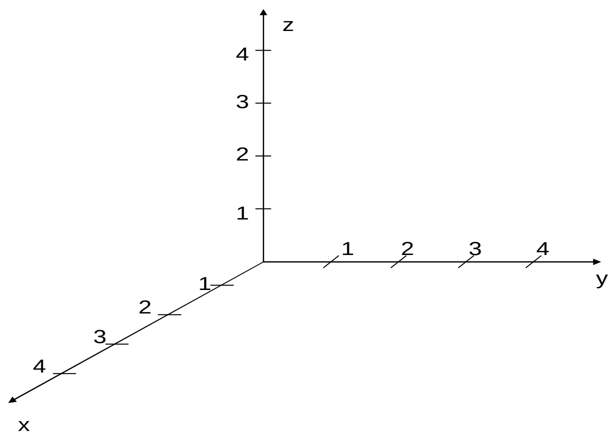
____

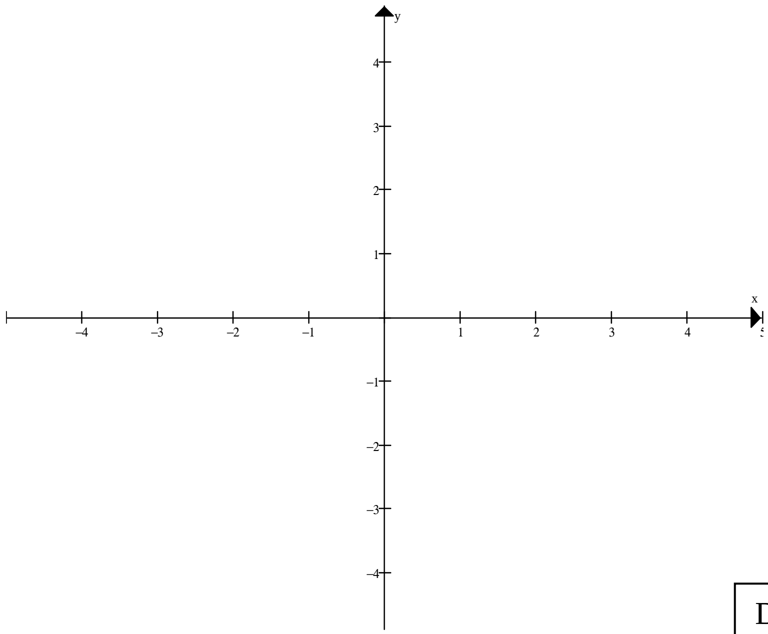
Dupla ______

Questão 6

Determine algebricamente o domínio das funções e, em seguida faça a representação gráfica do domínio no sistema de eixos que julgar conveniente.

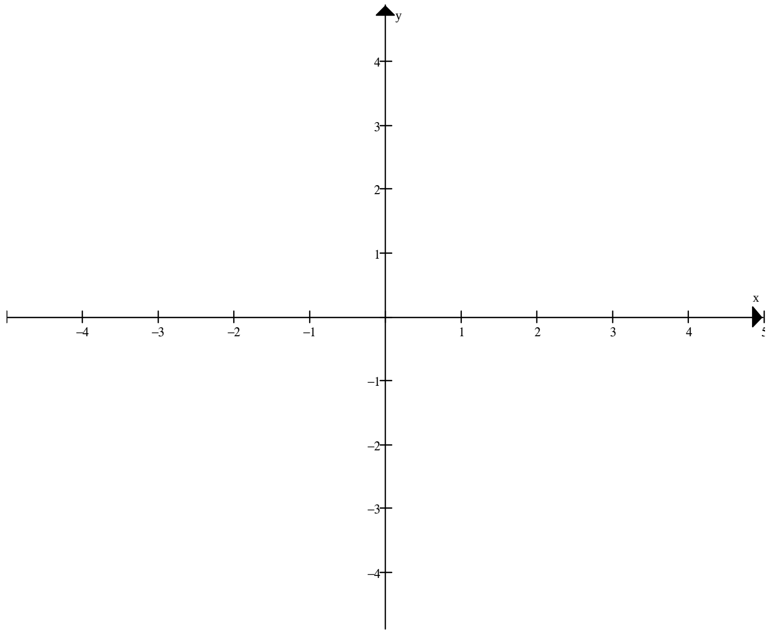
a) $z = x^2 + y^2$

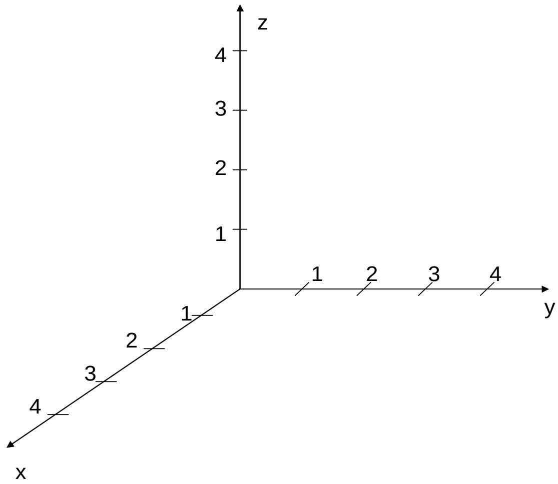




Dupla ______

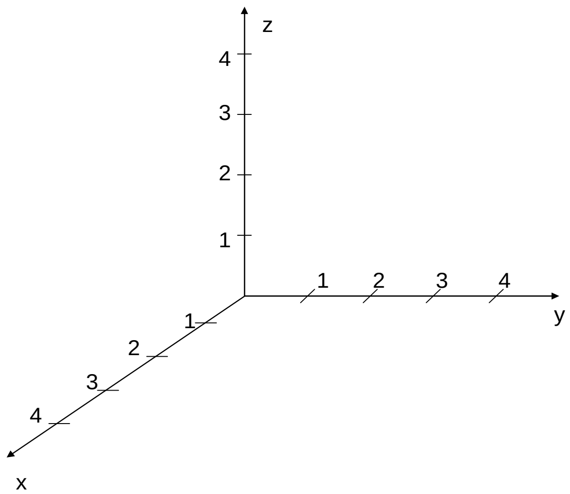
b) $y = 2x^2 + 5$

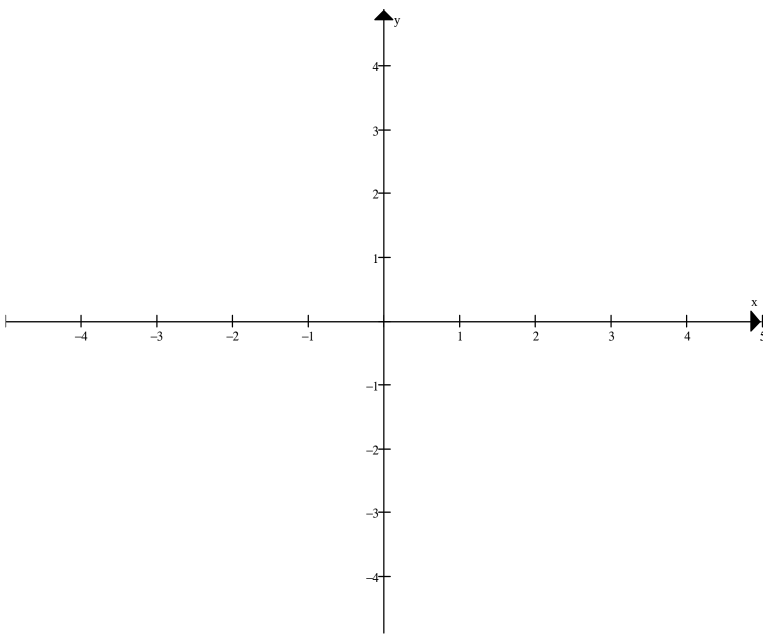




Dupla ______

c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



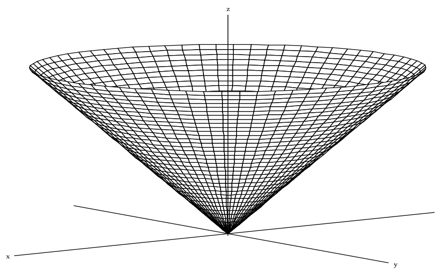


Questão 7

Dupla _____

Quais dos gráficos abaixo representam uma função do tipo $z = f(x, y)$? Justifique.

a)

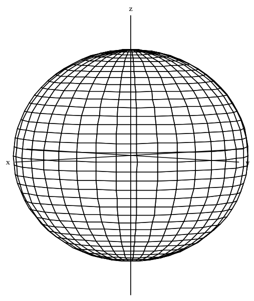


____

____

____

b)



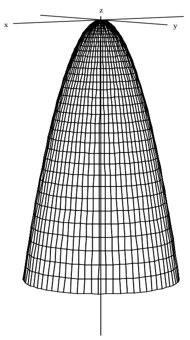
____

____

____

c)

Dupla _____

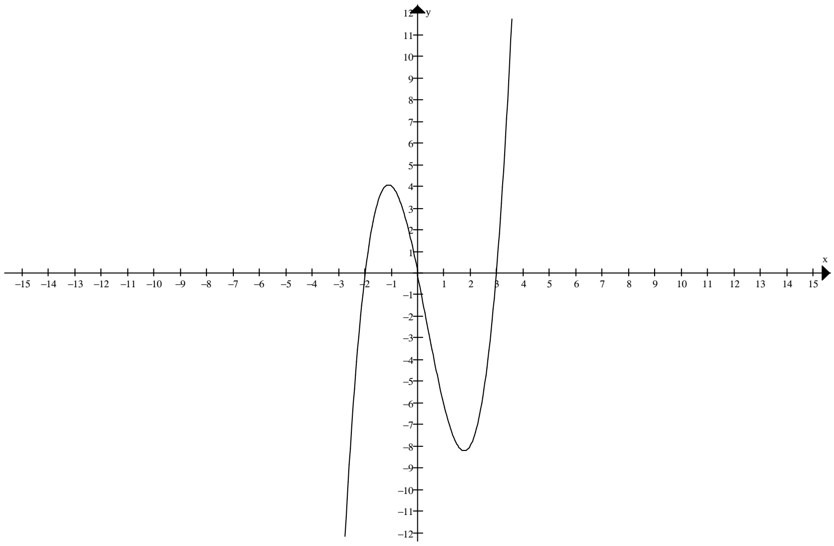


____

____

____

d)


y
x
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−15
−14
−13
−12
−11
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Anexo II

O questionário definitivo

Primeira sessão

Caro(a) aluno(a) :

O intuito deste questionário é o de realizar o levantamento de dados para uma pesquisa que visa estudar a transição das funções de uma variável real para o caso de duas.

Sua colaboração é de fundamental importância e desde já agradecemos sua participação.

È importante que saibam que seus nomes não serão divulgados.

Por favor resolva cada exercício com calma, procurando refletir bem e indicar tudo o que sabe a respeito do que é solicitado a você.

Não apague nada. Todas as informações nos são muito importantes para entender seu raciocínio.

QUESTIONÁRIO

1) Responda aos seguintes itens:

a) Você parte da origem num determinado sistema de eixos, caminha pelo eixo-y uma distância de 2 unidades no sentido positivo, e depois verticalmente para cima uma distância de 1 unidade. Quais são as coordenadas de sua posição final?

____

____

____

____

____

____

b) Descreva como você faria para localizar a posição dos pontos $(1, 2)$ e $(0, 0, -1)$ num sistema de eixos adequado.

____

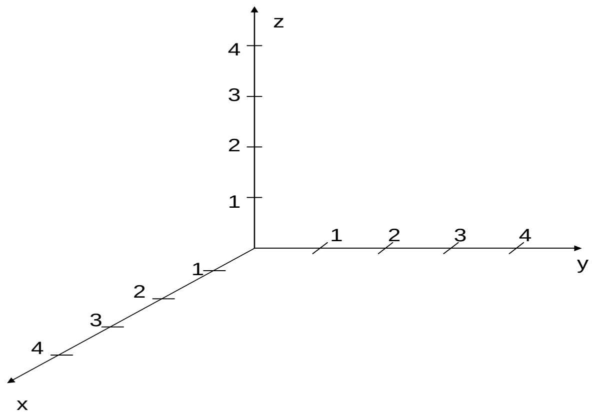
____

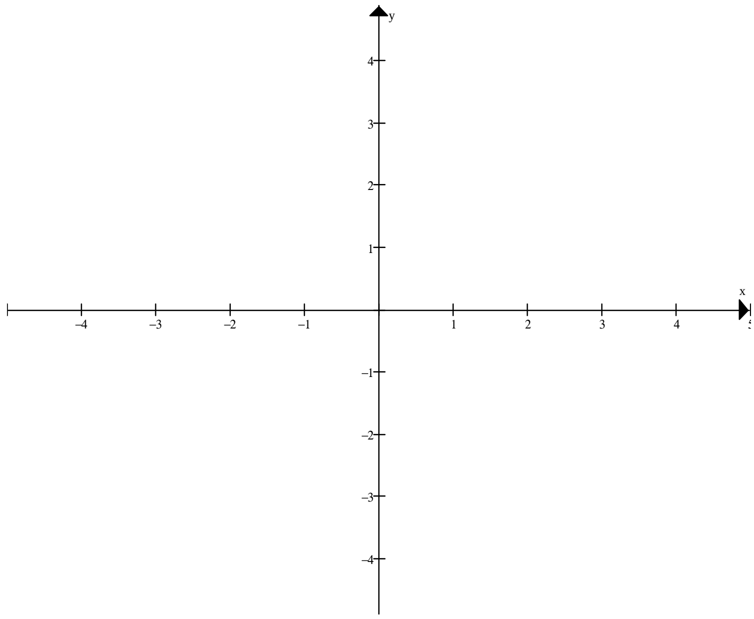
____

____

____

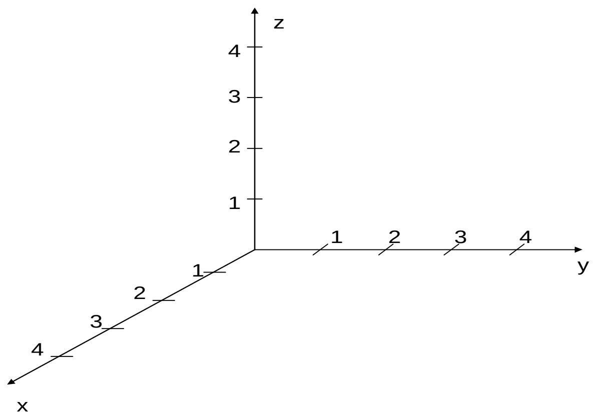
c) Represente graficamente os pontos dos itens anteriores, tendo como base as respostas apresentadas nos itens anteriores.

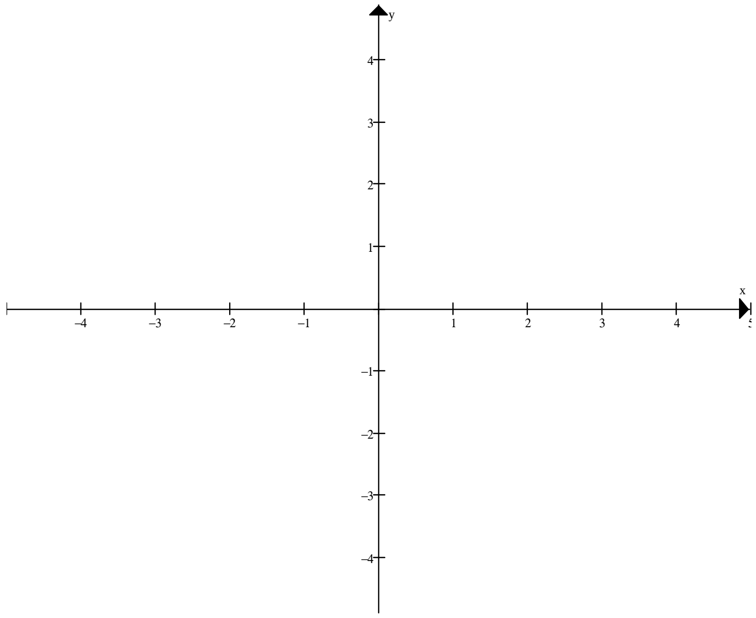




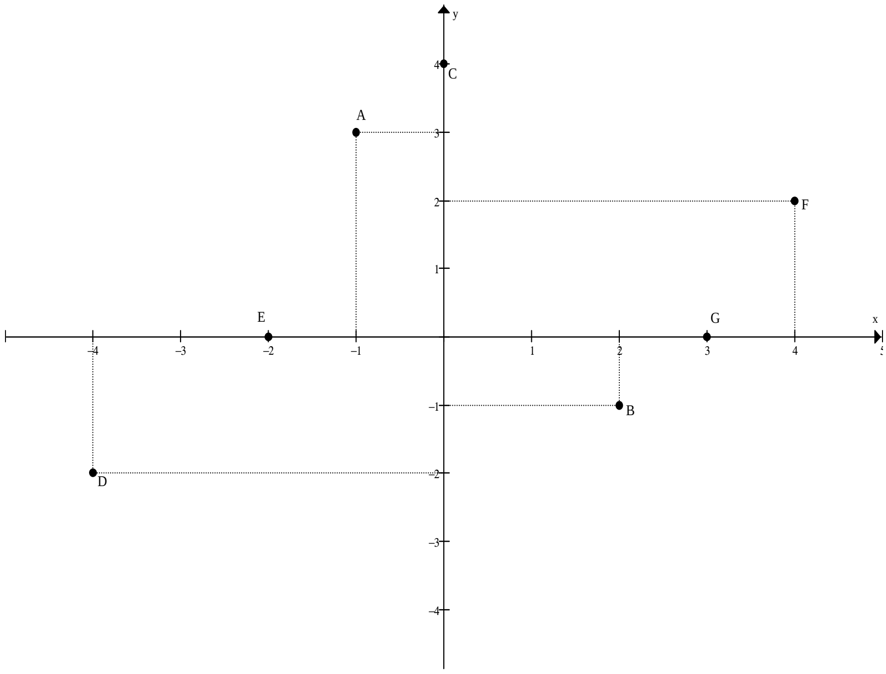
2) Localize os seguintes pontos nos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais:

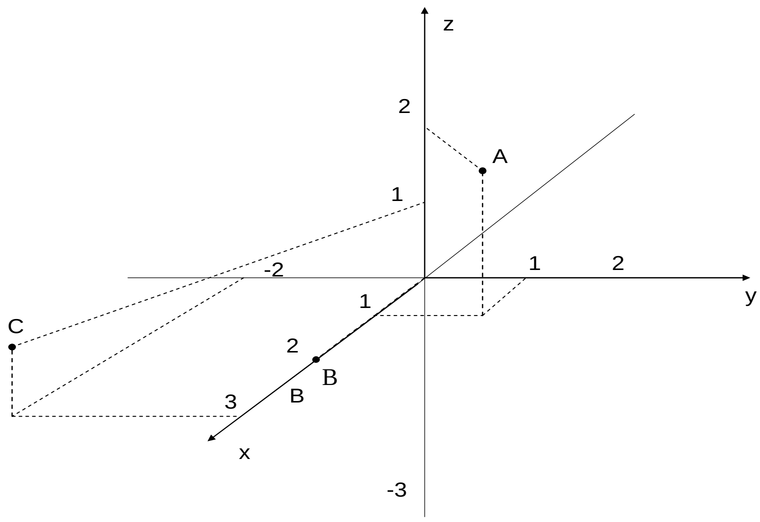
A(3, -2), B(2,1, 3), C(-2, 3), D$(-2, -1, 3)$, E(0, 3, 0), F(1, 2), G(0, -4), H(2, 0), I(2, -1, 3) e J(0, 0, 1).





3) Dê as coordenadas dos pontos indicados nas figuras abaixo:





4) Classifique as funções abaixo como função de uma variável (1), de duas variáveis (2) e três variáveis (3):

a) $z = x + 2y^2$ (   )

Relate, com suas palavras, o que pensou para fazer tal classificação

b) $z = 2 - x$ (   )

Relate, com suas palavras, qual o raciocínio utilizado para fazer tal classificação

c) $y = \sqrt{x} + 2$ (   )

Relate, com suas palavras, o que pensou para fazer tal classificação

d) $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ (   )

Relate, com suas palavras, o que pensou para fazer tal classificação

____

____

Questão 5

Para cada uma das situações seguintes, escreva uma fórmula matemática que melhor possa representá-la:

a) A área A de um círculo de raio r.

____

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

____

____

b) O comprimento R de rodapé, em metros, necessário para se colocar numa sala retangular de largura *a* e comprimento *b,* sabendo-se que essa sala tem apenas uma porta de medidas 0,9 m largura por 2,10 m de altura

____

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

____

____

c) O volume V de água necessário para encher uma piscina cilíndrica de x metros de raio e y metros de altura.

____

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

____

____

d) A área A da superfície de um cubo de aresta x.

____

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

____

____

e) A quantidade L, em metros quadrados, de papel necessária para revestir as paredes de um quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento, se a altura do quarto é z metros (supondo que o quarto não tenha portas nem janelas).

____

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

____

____

f) O volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.

____

A partir da fórmula determinada, diga quais são as variáveis e classifique-as como dependente ou independente;

____

____

Segunda sessão

Caro(a) aluno(a):

O intuito deste questionário é o de realizar o levantamento de dados para uma pesquisa que visa estudar a transição das funções de uma variável real para o caso de duas.

Sua colaboração é de fundamental importância e desde já agradecemos sua participação.

È importante que saibam que seus nomes não serão divulgados.

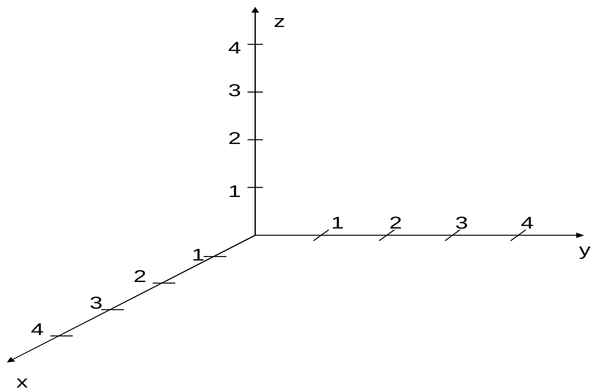
Por favor resolva cada exercício com calma, procurando refletir bem e indicar tudo o que sabe a respeito do que é solicitado a você.

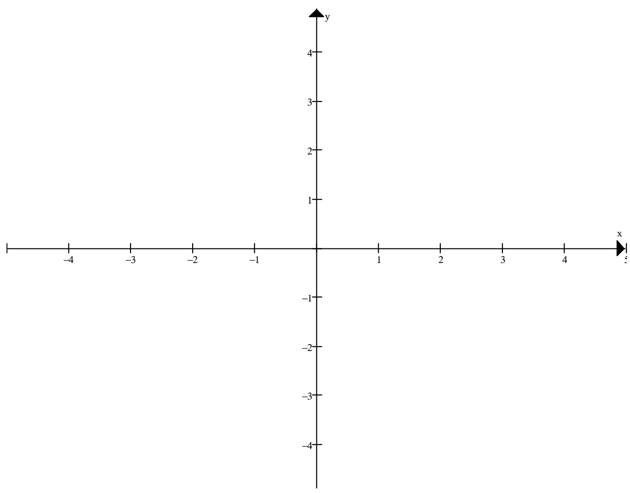
Não apague nada. Todas as informações nos são muito importantes para entender seu raciocínio.

Questão 6

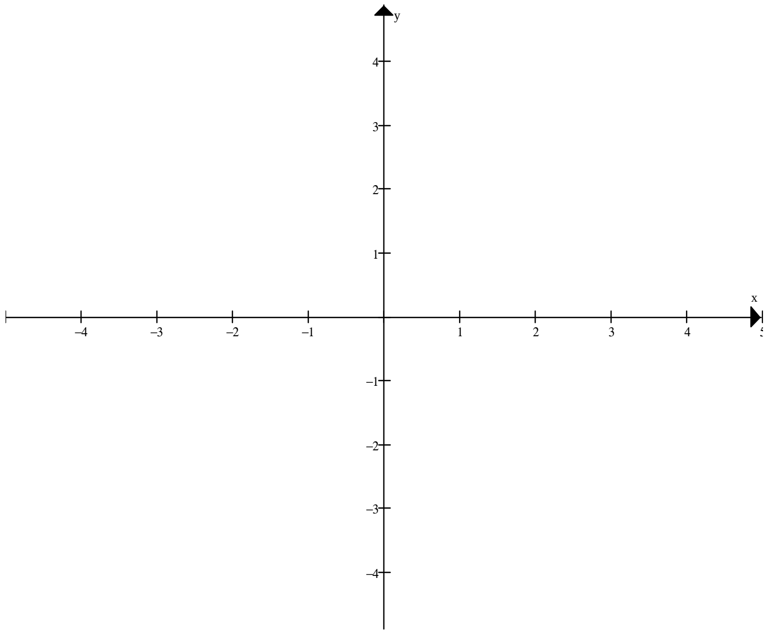
Determine algebricamente o domínio das funções e, em seguida faça a representação gráfica do domínio no sistema de eixos que julgar conveniente.

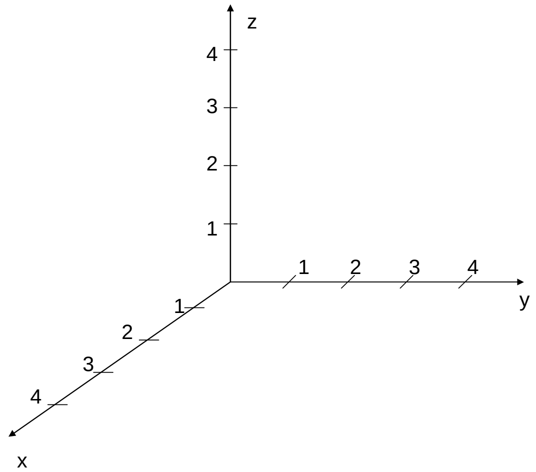
a) $z = x^2 + y^2$



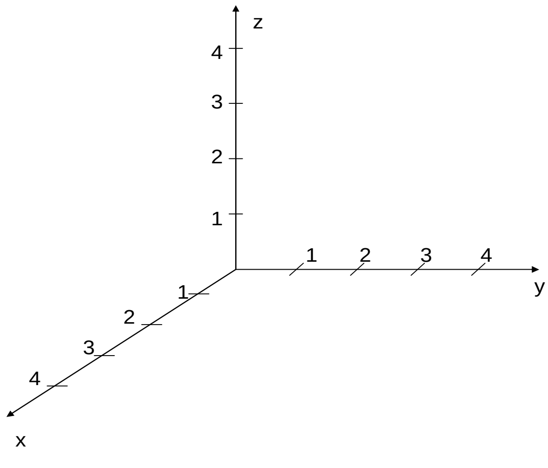


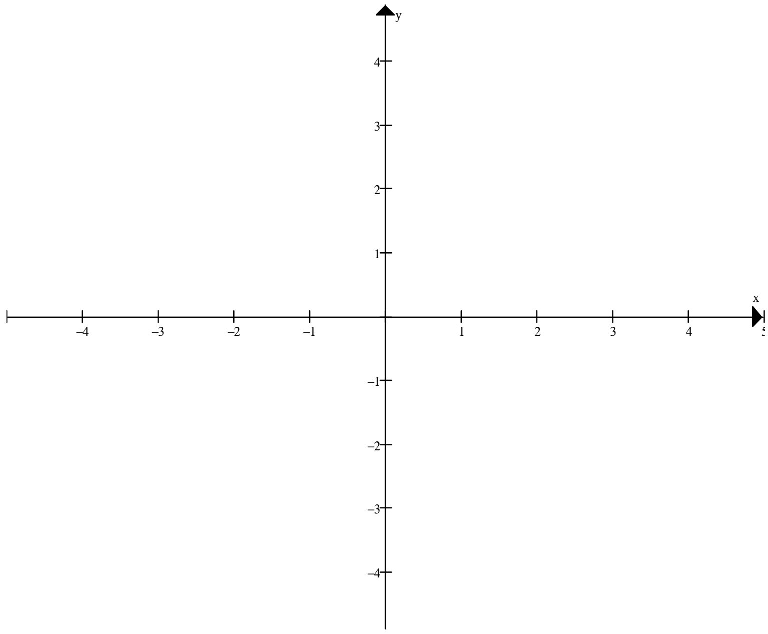
b) $y = 2x^2 + 5$





c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

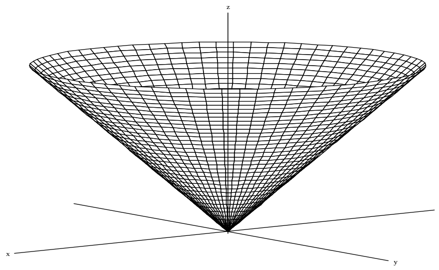




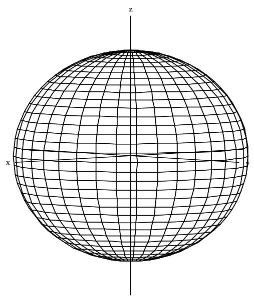
Questão 7

Determine, em cada caso, se o gráfico representa uma função do tipo $z = f(x, y)$ justificando sua resposta.

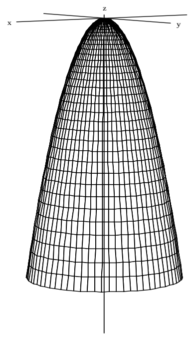
a)



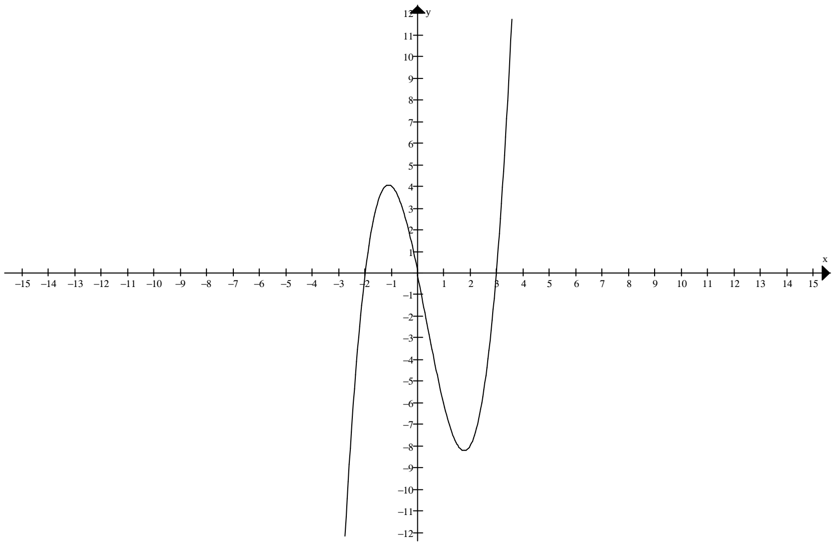
b)



c)



d)



Questão 8

Seja uma função dada por $z = f(x, y)$. Descreva um procedimento para calcular as derivadas parciais de 1ª ordem dessa função.

Questão 9

a) Quando você calcula da derivada parcial da função: $z = x^2 y + 2xy + x$, em relação à x, o que acontece com a variável y?

b) Utilizando o procedimento descrito na questão anterior, calcule as derivadas parciais de 1ª ordem da seguinte função: $z = x^3 + 7xy^2 + y^3$.

Terceira sessão

Caro(a) aluno(a) :

O intuito deste questionário é o de realizar o levantamento de dados para uma pesquisa que visa estudar a transição das funções de uma variável real para o caso de duas.

Sua colaboração é de fundamental importância e desde já agradecemos sua participação.

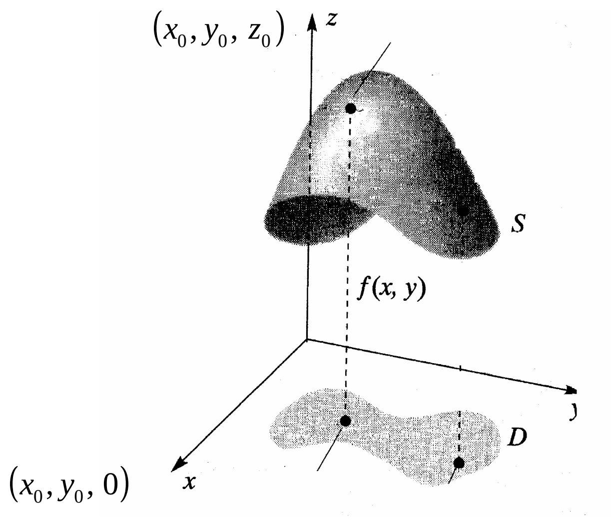
È importante que saibam que seus nomes não serão divulgados.

Por favor resolva cada exercício com calma, procurando refletir bem e indicar tudo o que sabe a respeito do que é solicitado a você.

Não apague nada. Todas as informações nos são muito importantes para entender seu raciocínio.

Questão 10

Considere a superfície que é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$.



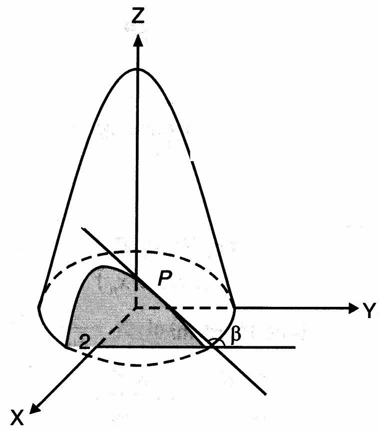
Observe que z_0 é o valor da função no ponto (x_0, y_0)

a) O que quer dizer pra você a notação $x = x_0$? e $y = y_0$?

b) Qual interpretação geométrica de $x = x_0$ e $y = y_0$?

Questão 11

Encontre o coeficiente angular β da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = 6 - x^2 - y^2$ com o plano $x = 2$, no ponto P (2, 1, 1)[15].



Obs.: Note que no gráfico a parte mais escura representa o plano $x = 2$.

[15] GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B*: Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Integrais Triplas. São Paulo: MAKRON Books, 1999.

Questão 12[16]

Um professor realizou junto com seus alunos um estudo sobre o conceito de plano tangente a uma superfície, chegando à conclusão que a equação de tal plano é dada por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, em que $f_x(x_0, y_0)$ é a derivada parcial de primeira ordem em relação à x no ponto (x_0, y_0) e, que $f_y(x_0, y_0)$ é a derivada parcial de primeira ordem em relação à y no ponto (x_0, y_0). E, logo em seguida, solicitou que determinassem à equação do plano tangente à superfície $z = x^3 - y^2$ no ponto $(x, y) = (2,3)$. A resposta de um dos estudantes foi

$$z = 3x^2(x-2) - 2y(y-3) - 1.$$

a) No seu entendimento, o estudante está certo ou errado?

b) Se acha que está errado, que erro o estudante cometeu?

c) Se a resposta do estudante estiver errada, apresente a resposta correta.

[16] Essa questão foi adaptada de McCALLUM, W. G. et al. *Cálculo de várias variáveis*.Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda: 1997.

Questão 13

Determine a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 1, 3)$. Sabendo que a equação do plano tangente é dada por $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.