SONIA REGINA FACCO

CONCEITO DE ÁREA

UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

SÃO PAULO

2003

SONIA REGINA FACCO

CONCEITO DE ÁREA

UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação do Professor Doutor **Saddo Ag Almouloud.**

PUC/SP

SÃO PAULO

2003

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

Dedico este trabalho a minha irmã

Alzira Facco Saturnino,

pelo incentivo, apoio, colaboração, preocupação constante e carinho.

Amo você.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por estar presente em todos os momentos de minha vida.

Ao professor-doutor Saddo Ag Almouloud, pelo trabalho de orientação, desenvolvido com muita competência, dedicação, amizade e paciência.

Aos professores-doutores da Banca Examinadora, Paula Moreira Baltar Bellemain, Lulu Healy e Vincenzo Bongiovanni, pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução dessa dissertação.

À coordenação e ao corpo docente do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio, apoio e compreensão.

Às amigas Maria José Ferreira da Silva e Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pelo incentivo, carinho e dedicação para comigo durante toda essa caminhada.

Aos colegas do projeto de Geometria, Ana Lúcia, Ana Maria, Armando, Filomena, Irene, Irma, Márcia, Marli, Nancy, Renata, Rosana e Vera, pelo apoio constante durante todo o processo de aplicação e análises deste trabalho.

Aos professores: Admilson, Antonio, Artenio, Carlos, Claudemiro, Dirce, Etelvina, Luiz, Olinda, Paula, Regina e Sérgio, pela contribuição valiosa para a realização deste trabalho.

À amiga Gecília Scarpin, pelas orações e palavras confortadoras nas horas difíceis.

À direção, coordenação, professores e amigos do Colégio Batista Brasileiro, pelo incentivo, confiança e companheirismo em todos os momentos.

Ao secretário Francisco pela ajuda constante neste processo.

A todos que, de algum modo, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Agradeço em especial a minha mãe querida e meus familiares, pelo amor expresso de várias formas: pela paciência, compreensão, cooperação e apoio irrestrito.

RESUMO

CONCEITO DE ÁREA: UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

O objetivo dessa pesquisa é o estudo dos fenômenos que interferem no ensino-aprendizagem do conceito de área no Ensino Fundamental. Além disso, apresenta uma proposta de ensino do conceito de área e uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo por meio de uma seqüência didática envolvendo a decomposição e composição de figuras planas. As seguintes hipóteses nortearam o desenvolvimento das diferentes atividades propostas:

- a escolha de situações-problema envolvendo determinação de áreas de figuras geométricas, em particular áreas de polígonos, possibilita as comparações dessas figuras em termos de área como grandeza.
- estudar a área como grandeza, e comparando superfícies por recorte-colagem ou ladrilhamento possibilita a compreensão desse conceito.
- uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área, envolvendo o processo de decomposição e composição de figuras, proporciona ao aluno condições favoráveis à aprendizagem do conceito de área.

A pesquisa fundamentou-se principalmente na dialética ferramenta-objeto e mudança de quadros de Régine Douady (1986) e na teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval (1993,1994,1995). A metodologia empregada seguiu os princípios da engenharia didática. A pesquisa envolveu professores de quinta a oitava série e alunos de quinta série.

Palavras-chave: conceito de área – decomposição – configuração – composição – perímetro – ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

THE CONCEPT OF AREA: A PROPOSAL FOR TEACHING AND LEARNING

The objective of the research is to study phenomena that influence the teaching and learning of the concept of area in Ensino Fundamental (students aged 7-15). It presents a teaching proposal for the concept of area and a reflection about the learning of this concept through a teaching sequence involving the decomposition and composition of plane figures. The following hypothesis guided the development of the different activities proposed:

- problem situations involving determining the areas of geometrical figures, in particular areas of polygons, permits comparisons of these figures using area as magnitude.
- to study area as magnitude and the comparison of surfaces by cutting and pasting or tiling enables the understanding of this concept.
- a proposal for teaching and learning the concept of area, involving the decomposition and composition of figures, provides favourable conditions for the learning of the concept of area.

The theoretical basis for the research is proved principally by the tool-object dialectic and the change of frameworks of Régine Douady (1986) and the theory of semiotic representation registers of Raymond Duval (1993,1994,1995). The methodology used follows the principles of didactic engineering. The research involved teachers of the fifth to eighth grade and students of the eighth grade.

Key words: concept of area – decomposition – configuration – composition teaching and learning.

SUMÁRIO

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Este trabalho faz parte do projeto de pesquisa “Estudo de Fenômenos de Ensino-Aprendizagem de Noções Geométricas Pelos Alunos de 5ª a 8ª Séries do Ensino Fundamental”, desenvolvido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

O projeto da PUC-SP objetiva, além de investigar os problemas relativos ao ensino-aprendizagem de Geometria pelos alunos de 5ª às 8ª séries, integrar no mesmo projeto pesquisadores e professores do Ensino Fundamental, para despertar nesses profissionais sua atenção quanto à necessidade de um trabalho reflexivo sobre suas ações pedagógicas, levando em consideração pesquisas inerentes ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

Pretende ainda contribuir na formação de um profissional crítico, participativo e competente para atuar em sala de aula, proporcionando-lhe condições para não ser mais um professor executor de tarefas, procedimentos e técnicas que foram estabelecidas por especialistas.

Sabemos que professores de Matemática, apoiados nos livros didáticos, introduzem o conceito de área como um número associado a uma superfície e, rapidamente, passam ao cálculo da área utilizando fórmulas.

Assim, com o intuito de desenvolver um trabalho direcionado pelos objetivos expostos nesse projeto da PUC-SP e, tendo em vista que o desenvolvimento do conceito de área como grandeza ajuda os alunos a estabelecerem relações entre os quadros geométrico e numérico, conforme explicitam pesquisas realizadas por Régine DOUADY e Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN (1989, p.387) com alunos da faixa etária entre 9 e11 anos, pensamos em um estudo que envolvesse uma proposta de trabalho para subsidiar o professor no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Partimos da hipótese de BALTAR (1996), que também discute o desenvolvimento do conceito de área como grandeza para permitir aos alunos o estabelecimento das relações necessárias entre os quadros geométrico e numérico. Propusemo-nos, nesse trabalho de pesquisa, elaborar e aplicar uma proposta para o ensino desse conceito, a fim de subsidiar o processo ensino-aprendizagem do conceito de área. Assim, trabalhamos com três eixos: superfície (como conjunto de pontos), área (como grandeza) e medida de área (como número positivo).

A proposta didática aqui apresentada para o ensino-aprendizagem do conceito de área traz também uma preocupação com a prática do professor em sala. Assim, incluímos a participação desse mediador no processo das análises *a priori* das atividades, na elaboração e aplicação da seqüência, proporcionando-lhe um novo olhar sobre a produção dos alunos.

Portanto, esse trabalho objetiva apresentar uma proposta de ensino do conceito de área e uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo, por meio da elaboração, aplicação e discussão de uma seqüência de atividades, trabalhadas com figuras planas, à luz das teorias de DOUADY (1986,1987) e DOUADY e PERRIN-GLORIAN (1983, 1989) com o jogo de quadros e ferramenta objeto e, de Duval (1988, 1993, 1994, 1995), com o processo de apreensões e as representações semióticas de figura.

Essa seqüência de atividades originou-se de um teste piloto (cf. Anexo I), aplicado em alunos de 5ª série do ensino fundamental, de pesquisas de BALTAR (1996) e da análise de alguns livros didáticos.

A aplicação da seqüência aos alunos de 5ª série do ensino fundamental foi feita pelo professor titular da sala. Esse fato possibilitou-nos observar a concepção que o professor tem sobre o conteúdo área bem como a análise que ele faz de uma seqüência de atividades.

A seqüência de atividades envolveu situações de uso da decomposição e composição de figuras planas, com e sem o auxílio do jogo Tangram e do ladrilhamento, com o objetivo de comprovar as seguintes hipóteses:

a) a escolha de situações-problema envolvendo determinação de áreas de figuras geométricas, em particular áreas de polígonos, possibilita as comparações dessas figuras em termos de área como grandeza.
b) Um estudo que visa verificar a aprendizagem do conceito de área, reconhecendo a área como grandeza (comparando superfícies por recorte-colagem ou ladrilhamento) e calculando medidas de superfície em formas variadas, possibilita a compreensão desse conceito com praticidade e eficiência.
c) Uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área, voltada ao processo de decomposição e composição de figuras, subsidia o professor em sua prática e favorece-lhe reflexões sobre o aprendizado.

As análises das produções dos alunos nas fichas de resolução e nas de anotações das observações de sala permitem discutir o entendimento do conteúdo e as estratégias de resolução, bem como as dificuldades dos alunos em suas resoluções; as que resistem e as que não foram observadas *a priori*.

Esse trabalho se desenvolve em cinco capítulos, que discutem conceitos sobre área e perímetro em uma proposta de atividades para o ensino-aprendizagem do conteúdo área como grandeza pelo processo da decomposição e composição de figuras de superfícies planas.

No primeiro capítulo, encontram-se um breve histórico do conceito de área, uma síntese de área enquanto grandeza (objeto matemático) e alguns estudos anteriores sobre o conteúdo área.

No segundo capítulo explicitamos a problemática, a fundamentação teórica e os procedimentos metodológicos.

No terceiro capítulo, expomos uma síntese da seqüência, já analisada pelos professores envolvidos, aplicada aos alunos.

No quarto capítulo, apresentamos os resultados da aplicação da seqüência aos alunos e nossa análise *a priori* com as contribuições dos professores envolvidos na reelaboração da seqüência.

No quinto capítulo explicitamos as considerações finais dos estudos deste trabalho.

Constam ainda, nos anexos, o teste piloto, modelo da ficha de anotações das observações em sala de aula e a proposta da seqüência.

CAPÍTULO I

1. O conceito de área

Neste capítulo, procuramos explicitar um breve histórico do conceito de área, uma síntese de área enquanto grandeza (objeto matemático) e alguns estudos sobre o conteúdo área.

1.1 - O conceito de área: breve histórico

Há indícios históricos de que ocorreram sociedades avançadas, que se instalaram ao longo dos rios Nilo, no Egito, Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, Indo e Ganges, na região centro-sul da Ásia e, Hwang Ho e Yangtzé, na Ásia Oriental. Essas sociedades, conhecidas por suas habilidades em engenharia na drenagem de pântanos e irrigação, construíram obras de defesa contra inundações, grandes edifícios e estruturas por meio de projetos que requeriam muita geometria prática. O trabalho dos "estiradores de corda" egípcios da época foi bastante valorizado pelo matemático Demócrito, devido à precisão admirável das construções das pirâmides.

Numerosos exemplos concretos mostram que os babilônios do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de área de retângulos, de triângulos retângulos e isósceles (e talvez de um triângulo qualquer), de trapézio retângulo e do volume do paralelepípedo retângulo.

Pesquisadores ratificam ser também datados dessa época os primeiros documentos da história como livros sagrados e papiros. Exemplificam esses fatos com estudos voltados nos papiros Golenishev e Rhind (1850-1650 a.C, aproximadamente), que se tornaram fontes identificáveis quanto à origem da utilização da Geometria.

Estudos realizados nesses papiros constataram que os egípcios e os mesopotâmicos construíram os primeiros templos dentro de projeções cuneiformes e precisas. Para isso adotaram formas geométricas; logo, já resolviam problemas relacionados com a Geometria. Esses papiros trazem também exercícios, com suas respectivas soluções, que, segundo EVES (1992, p. 5), *26 são de Geometria, sendo a maioria desses problemas provindos de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas de terras e volumes de celeiros.*

ROBINS (1987, p. 47) afirma que no *Rhind Mathematical Papyrus* (RMP), a sessão prévia mostrou que os egípcios calcularam o volume dos armazéns cilíndricos de grãos corretamente, multiplicando a área da base pela altura. Os volumes dos recipientes cúbicos e retangulares foram determinados pelo mesmo modo nos problemas de números 44, 46. Os problemas 49, 51 e 52 preenchem a área do retângulo e do triângulo com pedaços de terra.

A Figura 1 ilustra que no desenho do trapézio existem triângulos nas laterais com a base na esquerda. Naquela época (1850-1600 a.C), não seria natural desenhar perpendicularmente como se faz hoje.

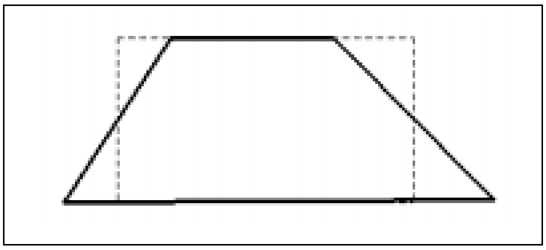


FIGURA 1- DESENHO DE UM TRAPÉZIO

BOYER (1974, p.13) explicita que existe no Papiro Ahmes problemas relacionados à Geometria, como o problema 51, que mostra o cálculo da medida de área de um triângulo isósceles efetuado por meio da multiplicação da metade do que chamaríamos de base pela altura.

Sendo assim, Ahmes justifica seu método para achar a área, sugerindo a decomposição do triângulo isósceles em dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos por compensação formem um retângulo, conforme Figura 2.

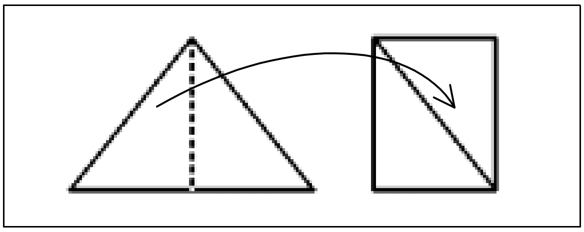


FIGURA 2 - DECOMPOSIÇÃO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES
E COMPOSIÇÃO DO RETÂNGULO.

Desta mesma forma, no problema 52, o trapézio isósceles também poderá ser decomposto (Figura 3). Nesse problema, a medida da área do retângulo é obtida multiplicando a base pela altura.

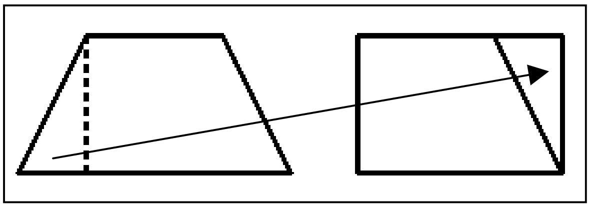


FIGURA 3.- DECOMPOSIÇÃO DO TRAPÉZIO E
COMPOSIÇÃO DO RETÂNGULO.

O problema 49 refere-se ao cálculo da superfície de um retângulo de comprimento 10 e largura 2. O problema 51 mostra o cálculo da área de um triângulo de altura 13 e de base 4. O de número 52, o cálculo da área de um trapézio, com a base maior 6, a base menor 4 e a altura 20.

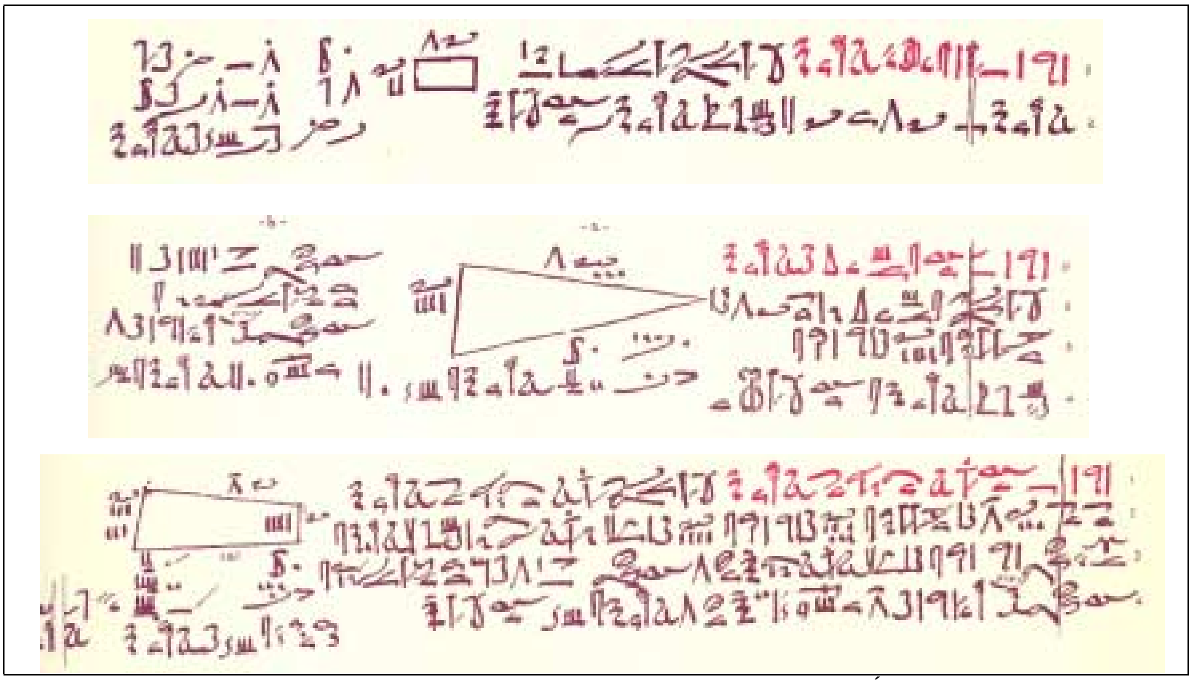


FIGURA 4 - FOTOS DO *RHIND MATHEMATICAL PAPYRUS* (RMP) NÚMEROS 49, 51,52.

O problema 53 explicita a figura que supõe o conhecimento do *teorema de Tales,* traçado pelo matemático egípcio mil anos antes do nascimento de Tales.

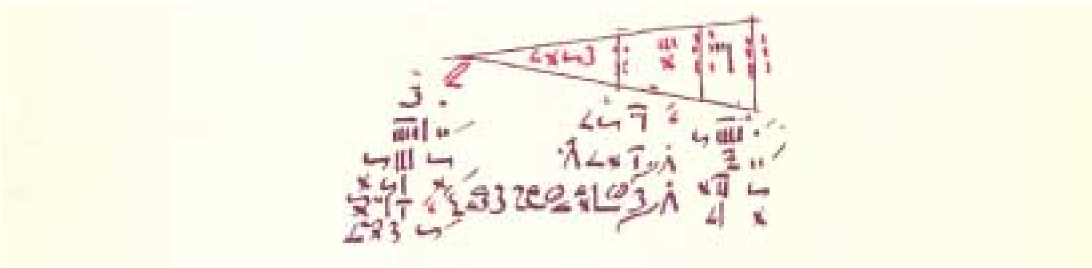


FIGURA 5 - FOTO DO RHIND MATHEMATICAL PAPYRUS (RMP) NÚMERO 53.

Naquela época, a distinção entre as noções de deslocamentos, movimentos e a idéia geral de transformação, aplicadas a todo o espaço, mantinham-se estranhas ao pensamento matemático.

No final do século de ouro da história da Matemática, viveu no período entre 330 a.C e 275 a.C., aproximadamente, o geômetra grego Euclides, autor de *Os Elementos. Essa* obra reúne de modo sistematizado as principais descobertas geométricas de seus precursores sobre os elementos sistemáticos. Dedicando-se ao ensino da Matemática, Euclides atraiu um grande número de discípulos, possibilitando assim a propagação de suas idéias.

Entre essas idéias, Euclides discutiu que a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. Em outras palavras, duas figuras que se coincidem por superposição são iguais (congruentes). Assim, os critérios asseguram a superponibilidade, por exemplo, de dois triângulos.

Quando Euclides enuncia que triângulos com bases iguais, situadas entre as mesmas paralelas são figuras iguais (equivalentes) e, que paralelogramos com bases iguais situadas entre as mesmas paralelas também são figuras iguais (equivalentes), refere-se, provavelmente, que tanto esses triângulos têm a mesma área como os paralelogramos também as têm.

Logo, podemos inferir que duas figuras são equivalentes quando têm a mesma grandeza (ou mesma área). A demonstração desse fato é possível por meio da decomposição de figuras planas.

Os gregos transformam a Geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos, no que poderíamos chamar de Geometria “sistemática” e Geometria "demonstrativa”.

No livro IV, Euclides trabalha com a altura, evidenciando a dependência linear das áreas dos triângulos e dos paralelogramos em relação a suas bases; para ele, essas figuras, que possuem a mesma altura fixa, são entre si suas bases.

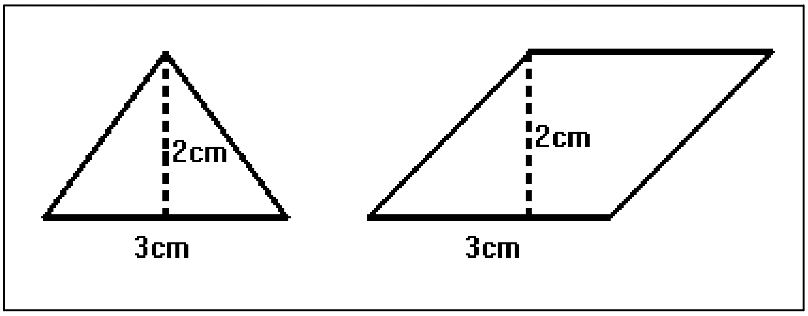


FIGURA 6 - FIGURAS DE MESMA BASE E MESMA ALTURA COM ÁREAS DIFERENTES.

No século XVII, o conceito de área reapareceu e com ele os problemas de quadratura. Esses problemas tratavam de comparar, segundo suas áreas, duas figuras planas, cuja área de uma é supostamente conhecida.

Segundo BALTAR (1996, p.17), o problema se explicita no relacionar as superfícies, de acordo com suas áreas, mais que de medí-las. O método dos indivisíveis (Cavalieri) e o método da exaustão (Arquimedes) geraram uma oposição entre os métodos de “descoberta”, de “invenção” e de “demonstração” em Matemática.

BALTAR também explicita que os matemáticos desse século concordaram com o método dos indivisíveis para a descoberta de resultados, mas os pontos de vista se dividiram na pertinência desse método para substituir o da exaustão como método de demonstração.

Para BALTAR, o conceito de área por intermédio dos problemas de quadratura é essência de discussão sobre os métodos em Matemática e sobre os conceitos fundamentais referentes a infinito e contínuo. Para ela, atrás da noção de indivisível, reencontram-se os problemas de dimensão análoga de alguma forma aos problemas que se encontram entre os conceitos de área e perímetro.

BALTAR discute a área como grandeza, explicitando as idéias de PERRIN-GLORIAN e DOUADY, que evidenciam a comparação de duas superfícies do ponto de vista puramente matemático com o uso da aplicação-medida. O interesse em considerar as classes de equivalência encontra pertinência nas razões didáticas. Trata-se, em particular, de dar um sentido à noção de área independentemente da unidade de área escolhida.

Com isto, como BALTAR, não pretendemos definir grandeza, mas propor uma mobilização da área como grandeza, que apresenta uma coerência interna e que não é contraditória com o sentido desse conceito em matemática.

1.2 - Conceito de área no saber matemático: área como grandeza

Apreender o conceito de área, ou seja, o saber matemático que permite comparar e medir o espaço ocupado pela superfície é fundamentarmo-nos para os planos prático e teórico de conteúdos referentes à área, a fim de evidenciar problemas relacionados às propriedades matemáticas, voltadas a resoluções de medidas. Assim, podemos usar o raciocínio matemático para chegarmos à identificação da área como grandeza sem recurso ao numérico de um determinado objeto:

Seja P o conjunto de todos os polígonos de um plano.

Para todo polígono convexo A, existe uma única aplicação $u_A: P \to IR^*_+$ tal que:

i) $u_A(S) \geq 0, \forall S \in P$

ii) $u_A(A) = 1$

iii) Para todo polígono S_1 e S_2 de P, $u_A(S_1 \cup S_2) = u_A(S_1) + u_A(S_2)$ se $S_1 \cap S_2 = \phi$ (propriedade da aditividade)

iiii) Para toda isometria G e todo polígono S de P, $u_A(S) = u_A(G(S))$, (propriedade da invariância por deslocamento).

Seja R_A um subconjunto de P x P.

Definir uma relação de equivalência sobre P:

$S\ R_A S^I \Leftrightarrow u_A(S) = u_A(S^I)$

R_A é reflexiva, pois $S\ R_A S$. De fato $u_A(S) = u_A(S)$

R_A é simétrica pois $S\ R_A S^I \Rightarrow S^I\ R_A S$

De fato $u_A(S) = u_A(S^I) \Rightarrow u_A(S^I) = u_A(S)$

R_A é transitiva pois $S_1 R_A S_2$ e $S_2 R_A S_3 \Rightarrow S_1\ R_A\ S_3$.

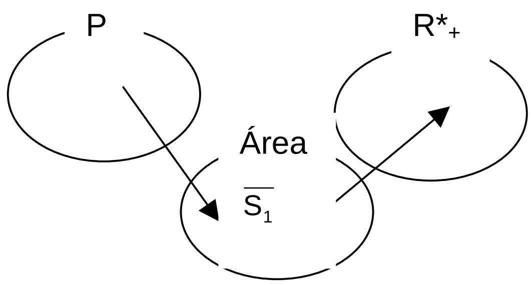
De fato $u_A(S_1) = u_A(S_2)$ e $u_A(S_2) = u_A(S_3) \Rightarrow u_A(S_1) = u_A(S_3)$

Dado um elemento de P, por exemplo, o polígono S_1, indica-se por $\overline{S_1}$,

$\overline{S_1} = \{\ S \ /\ S\ R_A S_1\ \}$

Denominaremos a classe $\overline{S_1}$ de área da superfície S_1.

<u>Definição 1</u> Chama-se medida da área S_1 e a indicaremos por $m(S_1)$ ao número real positivo associado a S_1, tal que a aplicação $m(S_1)=u_A(S_1)$



<u>Definição 2</u> Duas superfícies têm a mesma área se pertencem à mesma classe de equivalência.

<u>Definição 3</u> Duas superfícies têm áreas diferentes se não pertencem a mesma classe de equivalência.

Comparar as áreas de duas superfícies é decidir se elas pertencem à mesma classe de equivalência. Entendemos classes de equivalência como área enquanto grandeza.

1.3 - BALTAR (1996) e o Ensino e aprendizagem da noção de área de superfícies planas.

A pesquisa de BALTAR (1996) explicita a construção do conceito de área em nível do Ensino Fundamental e, mais particularmente, a aquisição das relações entre comprimento e áreas, indispensáveis à compreensão desse conceito como grandeza.

BALTAR (1996, p.24), como DOUADY e PERRIM-GLORIAM, (1992, p.12) utilizam o termo "grandeza", num sentido ingênuo e não buscam definí-lo. Acreditam ser suficiente saber que a área pode ser definida como uma classe de equivalência a partir de uma função medida. Não definem área, mas a expressão "ter a mesma área" a partir do recorte-colagem ou da medida. É esse aspecto que chama área como grandeza.

A problemática do trabalho de BALTAR apóia-se na hipótese de que *o desenvolvimento do ensino do conceito de área visto como grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os quadros geométricos e numéricos.*

Para dissociar a área do perímetro, BALTAR (1996, p.64) procurou respostas às seguintes indagações:

a) quais são as fontes de dificuldades dos alunos em relação à dissociação de área e perímetro?
b) Essas dificuldades de aprendizagem são devidas aos objetos geométricos em jogo (a superfície, o contorno), às fórmulas, às variações respectivas?
c) De qual domínio matemático elas são oriundas: geométrico, numérico ou Funcional?
d) Para os diferentes tipos de superfícies, as dificuldades de aprendizagem são as mesmas? Há diferenças?
e) Que tipo de situação permite desestabilizar as concepções errôneas instaladas (por exemplo, área e perímetro variam sempre no mesmo sentido)?
f) Quais situações reforçam a utilização das concepções errôneas?

g) Que efeito do contrato didático habitual reforça e/ou permite superar essas concepções errôneas?

A variedade de dificuldades dos alunos permite, segundo BALTAR, compreender melhor a aprendizagem do conceito de área, controlar as condições que favorecem essa aprendizagem, situando-as melhor em qual nível se encontram e formular a primeira hipótese de seu trabalho (p.65):

Para BALTAR, *a compreensão da diferenciação dos conceitos de área e perímetro coloca em jogo diferentes conhecimentos segundo a natureza das superfícies consideradas." (HRT)*

No desenvolvimento do trabalho, a autora (p. 69- 70) apresenta em relação às fórmulas e ao ponto de vista dinâmico as seguintes hipóteses:

HR1: Um estudo das fórmulas de área e perímetro de superfícies usuais efetuado em relação a invariantes geométricos das figuras favorece a construção da noção de área como grandeza bidimensional.

HR2: A construção de situações nas quais o ponto de vista dinâmico intervém, favorece o estudo dos invariantes geométricos que permitem conservar uma área, por conseqüência a aprendizagem de conhecimentos relacionados a comprimento e áreas.

Apresenta também uma lista de teoremas-em-ação ligados a situações que dão sentido ao conceito de área de superfícies planas. Essa lista foi constituída a partir dos resultados de pesquisas anteriores e de uma análise das respostas, das justificativas e dos argumentos usados pelos alunos resolvendo situações do dispositivo experimental da pesquisa.(BALTAR, 1996, p. 94-96).

Segundo ALMOULOUD (1997, p.28) teorema-em-ação designa as propriedades tomadas e utilizadas pelo aprendiz, em situação de solução de problema, sem que ele esteja necessariamente capaz de as explicar ou as justificar.

Teorema-em-ação sobre a definição de área

TC1: A área é o espaço ocupado por uma superfície.

TC2: A área é o número de ladrilhos necessários para recobrir uma superfície.

TC3: A área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula.

TC4: A área é uma propriedade da superfície invariante por certas operações (uma grandeza).

Teorema-em-ação para todo o tipo de superfícies

T1: Se S e S' são superfícies quase disjuntas, A(S $\cup$ S') = A(S) + A(S') (verdadeiro).

T2: A(f(S)) = A(S),; onde f é uma isometria e S uma superfície (verdadeiro).

T3: Duas superfícies equidecomponíveis têm a mesma área (verdadeiro).

T3': O "recorte–colagem" conserva a área (verdadeiro).

T4: Uma unidade sendo escolhida, duas superfícies de mesma medida têm mesma área (verdadeiro).

T5: Se duas superfícies S e S' são constituídas dos mesmos pedaços (equidecomponíveis) diferentemente colocados, de modo que S' seja mais "compacto" que S, então A(S)>A (S') (falso).

T6: Duas superfícies que têm os mesmos lados possuem mesma área (falso).

T7: Duas superfícies de mesma área têm o mesmo perímetro (falso).

T8: Duas superfícies de mesmo perímetro têm mesma área (falso).

T9: A área e o perímetro de uma superfície variam no mesmo sentido (falso).

Teorema-em-ação para superfícies usuais

T11: Dois retângulos de mesma área são idênticos (falso).

T12: Dois triângulos (ou paralelogramos) de mesma base e mesma altura têm mesma área (verdadeiro).

T13: Dois paralelogramos de mesmos lados têm mesma área (falso).

T14: A medida da área de um retângulo é o produto das medidas de seus dois lados (falso).

T15: A área de um paralelogramo é o produto das medidas de seus lados (falso).

T16: A área de um triângulo é o produto das medidas de seus lados (falso).

T17: A área de um quadrado é proporcional ao comprimento de seu lado (por conseqüência se o lado do quadrado dobrar, sua área também dobrará) (falso).

T18: Dois retângulos de mesma área têm mesmo perímetro (falso).

T19: Dois retângulos de mesmo perímetro têm mesma área (falso).

T20: A área e o perímetro de um retângulo variam no mesmo sentido (falso).

Teorema-em-ação sobre as deformações do paralelogramo

T21: “O deslocamento de um lado de um paralelogramo sobre seu suporte” conserva a área (verdadeiro).

T22: Girar um lado do paralelogramo ao redor de um vértice conserva a área (falso).

T23: O “deslocamento de um lado” de um paralelogramo sobre o seu suporte conserva o perímetro (falso).

T24: Girar um lado do paralelogramo ao redor de um vértice conserva o perímetro (verdadeiro).

Essas análises mostram que são numerosos os conceitos em jogo na concepção da área: os conceitos de área, de grandeza, de medida, de número, de perímetro, de encobrimento, de multiplicação, de adição, de colagem, de recorte, de equivalência, etc.

A autora assevera que em torno dos teoremas em ação sobre a definição de área é possível efetuar reagrupamentos que permitem mobilizar o funcionamento dos conhecimentos dos alunos.

1.4 - DOUADY e PERRIN-GLORIAN (1989) e o processo de aprendizagem do conceito de área de superfície plana.

Régine DOUADY e Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN (1989) apresentam uma pesquisa onde constroem um processo de aprendizagem do conceito de área de superfícies planas para alunos de 9 a 12 anos, utilizando o quadro teórico da “dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros” em sua seqüência de aprendizagem. Objetiva esse estudo associar um número máximo de áreas, em particular a dos polígonos de forma a fazer comparações e cálculos.

Para definir uma aplicação medida entre superfícies e números com sentido suficiente para os alunos, as autoras sustentam a hipótese de que é necessário distinguir área de superfície e área de número antes de construir a área como grandeza autônoma.

Em suas análises, DOUADY e PERRIN-GLORIAN distinguem três pólos para o estudo da área e da superfície: o geométrico, que considera superfícies como partes do plano; o pólo “grandeza”, que se refere às áreas e o pólo numérico, que diz respeito às medidas.

Essas autoras asseveram que o conceito de área como grandeza constitui um ímã entre superfície e os números e que uma escolha conveniente das unidades de comprimento e área permite estabelecer relações entre as medidas de comprimento e as medidas de área, facilitando a construção da aplicação medida F.

A pesquisa de DOUADY e PERRIN-GLORIAN baseou-se nas seguintes hipóteses:

- desenvolver o conceito de área como grandeza ajuda os alunos a estabelecer relações entre os quadros geométricos e numéricos.
- uma identificação precoce entre as grandezas e os números leva os alunos a fazer confusões entre comprimento e área.

As escolhas didáticas feitas nos estudos de área e perímetro foram:

- no quadro geométrico deve-se fazer a comparação com certas superfícies, por deslocamento ou recorte e colagem;
- no quadro numérico deve-se ter conhecimento de números inteiros e suas operações e saber associar um número a certas superfícies pelo cálculo do ladrilhamento de uma superfície de formas variadas;
- apontamentos das diferenças e estabelecimento das relações entre áreas e perímetros.

Para DOUADY e PERRIN-GLORIAN (1989), o jogo entre os quadros geométricos e numéricos faz avançar o conhecimento dos alunos sobre a noção de área, a medida e os números e provocar um certo efeito sobre a dissociação área-perímetro. Contudo, esse processo tem sido ainda insuficiente para modificar as concepções de alguns alunos.

Sendo assim, propusemo-nos elaborar uma seqüência de atividades que se baseará nessas pesquisas em conjunto com teorias que subsidiarão as análises e discussões das atividades do processo ensino-aprendizagem do conceito de área.

CAPÍTULO II

2. Problemática, Fundamentação Teórica e Procedimentos Metodológicos

Nesse capítulo explicitamos o problema que delimitou a temática desta pesquisa, a fundamentação teórica e os procedimentos metodológicos, que embasaram a argumentação das análises *a priori* e *a posteriori* e que orientaram a execução das atividades do trabalho.

2.1 - Problemática

Sabemos que professores de Matemática, apoiados nos livros didáticos, introduzem o conceito de área como um número associado a uma superfície e rapidamente passam ao cálculo da área, utilizando fórmulas.

Segundo BELLEMAIN e LIMA (2002, p 70,71),

> Nos PCN afirma-se que o ensino da Geometria vem tendo pouco destaque nas aulas de Matemática e tem sido confundido como ensino das medidas. Subentende-se, portanto, um esforço de mostrar que o ensino da Geometria não se resume ao estudo das grandezas geométricas.
>
> Deve-se ressaltar que as atividades envolvendo composição e decomposição de figuras, uso de ladrilhamentos, do Tangram e de poliminós, propostas no estudo da geometria subsidiam a compreensão das fórmulas de área.

Para evidenciar essa problemática, analisamos alguns livros didáticos de 5ª série do ensino fundamental e verificamos que neles ocorre um número reduzido de atividades relacionadas ao estudo do conceito de área em figuras planas, e, sem aprofundamento de conhecimentos, introduzem fórmulas para o cálculo de área.

Tendo isso em vista, explicitamos que as escolhas didáticas dos professores, quando ensinam perímetro, área e medida de área, parecem não favorecer a apropriação dos conceitos e das habilidades geométricas para o aprendizado desses conteúdos.

Sendo assim, temos a seguinte questão para pesquisa:

Uma seqüência de atividades com o uso da decomposição e composição de figuras planas como processo de ensino-aprendizagem facilitaria o aprendizado do aluno ao conceito de área?

As hipóteses que nortearam esse estudo foram:

a) O uso de uma seqüência de atividades, voltada à composição e decomposição de figuras planas para alunos da 5ª série do ensino fundamental, facilitaria o processo ensino-aprendizagem do conceito de área.

b) Uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área como grandeza subsidiaria a escolha didática do professor como estratégia de ensino para conteúdos que se relacionam à área.

Para trabalhar as figuras planas, o professor precisa refletir sobre as concepções que orientam e fundamentam as atividades que envolvem conceitos de área. Segundo BALTAR (1996, p. 22), as pesquisas neste campo temático evoluíram em diferentes acepções.

O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem através de uma seqüência de atividades voltada ao conceito de área enquanto grandeza a fim de facilitar ao professor o ensino desse conteúdo e, ao aluno, o aprendizado.

Para atingir esses objetivos, partimos da hipótese de BALTAR (1996) que expõe o desenvolvimento do conceito de área como grandeza para permitir aos alunos estabelecer as relações necessárias entre o quadro geométrico e o numérico.

A autora ressalta que para definir uma aplicação de medida entre superfícies planas e números, é necessário antes de construir a área como grandeza autônoma, deixar claro para o aluno as diferenças existentes entre área e perímetro.

Para BALTAR e outros estudiosos, os diferentes conceitos sobre área são identificados por meio da verificação da medida da área, da comparação de áreas e superfícies, da construção de superfícies de mesma área de uma superfície dada, das superfícies de área mínima para um contorno fixo e da verificação das deformações que conservam a área.

2.2 - Fundamentação teórica

As pesquisas de Régine DOUADY e Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN (1992) evidenciam a importância do conceito de área do ponto de vista puramente matemático, como a possibilidade de trabalhar as superfícies e números por intermédio de uma aplicação-medida.

DOUADY (1986,1987) trabalha com atividades que se referem a hipóteses cognitivas e didáticas, pois explicita que o processo da decomposição e composição de figuras planas faz uso da “dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros”.

DOUADY (1986) discute conceito como ferramenta quando procura resolver um problema. Esta ferramenta, adaptada, poderá ser instrumento para a resolução de diferentes problemas.

Entendemos que o processo ferramenta-objeto, quadro e jogo de quadros, apresentados por DOUADY, podem orientar todo um conjunto de atividades ligadas ao processo de ensino-aprendizado do conceito de área e de sua identificação.

Para tanto, é necessário organizar o processo do ensino em três etapas. A primeira compreende o conhecimento antigo, a pesquisa, o novo implícito e a explicitação, que fazem o papel de ferramenta. A Segunda é o objeto, que compreende a institucionalização. A terceira é a nova ferramenta, ou seja, a apreensão do objeto em estudo. Essa terceira etapa trabalha com a familiarização e a reutilização como também com a complexificação da tarefa ou novo problema. Nesse processo, o novo objeto transforma-se em objeto antigo.

Ao tratar sobre quadro e jogo de quadros, DOUADY (1986, p. 389) enfatiza o papel que esses elementos proporcionam ao desenvolvimento de questões matemáticas. Entendemos como DOUADY que quadro é um recurso constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.

DOUADY e PERRIN GLORIAN (1989) fizeram a conjectura que a interação dos pontos de vista estático e dinâmico é necessária na conceituação da grandeza área e na dissociação com o comprimento.

Com o uso de seus conhecimentos de mundo relacionados ao conteúdo em estudo e de metodologias e materiais adequados, professor e aluno encontram condições necessárias à compreensão e resolução do problema sobre área.

Essas metodologias envolvem teorias como as de DOUADY e PERRIN-GLORIAN (1986, 1987,1989) e também de teorias de DUVAL (1988, 1993, 1994 e 1995) com a representação de conteúdos e as apreensões que ocorrem durante a resolução dos problemas.

Segundo DUVAL (1993, p. 39) as representações são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento porque tornam possível a construção do conhecimento. Elas funcionam como o elemento que constrói o sentido do objeto em estudo. Para o autor, as representações gráficas são representações semióticas.

ALMOULOUD (1997, p.6), citando DUVAL, afirma existir nas representações semióticas dois aspectos: forma (ou representante) e conteúdo (ou representado).

Explicita que a forma muda de acordo com o sistema semiótico usado. Assim, ocorrem vários registros possíveis de representação para um mesmo objeto, com diferente tratamento cognitivo para cada registro.

Entretanto, ALMOULOUD (2000, p. 40) assevera que não se deve confundir o conteúdo da representação e o objeto representado, pois, “o conteúdo de uma representação não é o objeto representado, mas o registro permite explicitar ou revelar as propriedades do objeto representado”.

As apreensões observadas por DUVAL (1994, p. 125) que embasaram esse trabalho de pesquisa foram:

a) Seqüêncial - possível nas tarefas de construção ou de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura;
b) Perceptiva - interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
c) Discursiva - compreensão dos elementos da figura geométrica, por meio da articulação dos enunciados relacionados às propriedades do objeto; e,
d) Operatória - apreensão sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e as reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem.

Como DOUADY e PERRIN-GLORIAN, adotamos nessa pesquisa o conceito de área enquanto grandeza, por apresentar uma coerência interna, que não é contraditória com o sentido desse conceito em Matemática. Essas autoras explicitam que, para se chegar a conhecer o conceito de área, é necessário saber que a área pode ser definida como uma classe de equivalência a partir de uma função medida, reconhecendo que se tem a mesma área a partir do recorte-colagem ou da medida.

Utilizamos a decomposição e composição de figuras planas como recurso e o jogo de quadros geométricos e numéricos, para possibilitar o cálculo da medida de área e reconhecer a área como uma grandeza autônoma.

Adotamos também as teorias de DUVAL relacionadas às representações semióticas de conteúdo e às apreensões que ocorrem durante a resolução dos problemas em análise.

2.3 - Procedimentos Metodológicos

O desenvolvimento dessa pesquisa teve como elemento norteador, a elaboração, aplicação e discussão de uma seqüência de atividades, voltada ao processo de reconfiguração de figuras planas, por meio da decomposição e composição.

A seqüência de atividades compreendeu quatro fases: estudos preliminares, elaboração das atividades da seqüência e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*.

Os **estudos preliminares** serviram de base para a construção das atividades da seqüência, elaborada através de conhecimentos didáticos adquiridos na área de estudo e das análises que compreenderam:

a) os estudos históricos e epistemológicos sobre o conceito de área e perímetro;
b) as concepções dos alunos, professores e das dificuldades e obstáculos que surgiram no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem;
c) a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 1º grau;
d) alguns livros didáticos.

Na fase do levantamento das concepções dos alunos sobre o conceito de área e perímetro, num primeiro momento, aplicamos em uma turma de 5ª série, um teste piloto (cf. Anexo I), para verificação das dificuldades relacionadas a esse conteúdo.

Em seguida, efetuamos um levantamento das concepções dos professores do grupo de estudos da oficina do projeto de geometria da PUC-SP no ano de 2002. Esses professores também contribuíram na elaboração e análise da seqüência de atividades.

Nessa oportunidade, anotamos as considerações didáticas e matemáticas discutidas pelo grupo de professores envolvidos naquele projeto.

Dentre os problemas indicados, tentamos definir os que seriam investigados nesse trabalho de pesquisa por meio de atividades, discussão das estratégias de resolução e institucionalização do conteúdo em estudo. Os resultados e análises do teste piloto direcionaram a **elaboração das atividades da seqüência e análise *a priori***.

As análises *a priori* do pesquisador e professores envolvidos sob os pontos de vista matemático e didático, determinaram as escolhas feitas e permitiram controlar o comportamento de cada situação que envolvia o problema da atividade, bem como predizer procedimentos possíveis durante a realização do trabalho.

Na fase de **experimentação,** trabalhamos com os professores que participaram do projeto de geometria PUC-SP e planejamos a aplicação do trabalho em uma das turmas de alunos desses professores com a presença de três deles.

Os encontros com os professores, para análise e discussão da seqüência, foram realizados no período de dois meses com sessões semanais de duas horas. Durante os encontros, solicitamos aos professores do grupo as análises didática e matemática dos exercícios que seriam aplicados por um deles em uma sala de 5ª série em que atuava.

A turma de alunos que participou da aplicação da seqüência foi composta por 32 indivíduos, divididos em grupos formados por três alunos cada.

Durante a execução das atividades, que foi programada para 12 sessões, os grupos tiveram momentos de reflexão e discussão, com orientações do professor nos momentos de dúvidas e na socialização de resoluções feitas por eles. Em alguns casos, no final da atividade, o professor sistematizou o conteúdo trabalhado.

As observações das atividades feitas em sala de aula foram anotadas pelos professores observadores e pela pesquisadora. Essas anotações, direcionadas por meio do preenchimento de uma ficha de observação (Anexo II), a qual se atentou aos seguintes procedimentos:

a) desenvolvimento das atividades em sala de aula com a presença da pesquisadora e de dois observadores;

b) postura do professor frente à classe e em relação à seqüência e às possíveis dificuldades encontradas pelos alunos para resolver o problema;
c) discussão coletiva professor-aluno das atividades desenvolvidas e possíveis resoluções do problema, correção de resoluções e institucionalização do conteúdo analisado;
d) assimilação dos alunos do conteúdo exposto;
e) validação da proposta didática (aplicação da atividade da seqüência).

A **análise *a posteriori* e validação** teve como suporte as contribuições dos professores do grupo de estudos, referentes às considerações didáticas e matemáticas[1] apresentadas e, após a experimentação, os resultados e análises das resoluções e procedimentos dos alunos e professor, anotados nas fichas de resoluções dos alunos e nas de observações dos professores observadores e pesquisadora.

Com esses estudos, num segundo momento, intencionamos aprofundar os estudos, levando aos professores envolvidos os resultados obtidos com os alunos e a comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*, a fim de evidenciar a esses professores a importância das atividades diversificadas no processo ensino-aprendizagem-aprendizado de determinados conteúdos matemáticos, em especial o conceito de área, como também validar a proposta que evidencia a seqüência de atividades aplicada e avaliada nessa pesquisa.

[1] Por considerações didáticas entende-se serem as discussões relacionadas aos objetivos, as variáveis escolhidas e o material utilizado. Por considerações matemáticas entende-se serem os conteúdos mobilizáveis e as estratégias de resolução dos exercícios propostos

CAPÍTULO III

3. A Seqüência de Atividades

Nesse capítulo apresentamos a seqüência de atividades aplicada aos alunos da 5ª série do ensino fundamental, com o objetivo de facilitar o aprendizado do conceito de área por meio da composição e decomposição de figuras planas.

A seqüência, composta de sete atividades, conforme Quadro 1, envolveu no processo de execução dessas atividades questões que objetivaram:

a) diferenciar contorno e superfície; atividade 1;
b) observar por meio de sobreposição, recorte-colagem a quantidade de papel em cada uma delas; atividades 1 e 2;
c) identificar formas das figuras planas; atividade 2;
d) explicitar o processo decomposição e composição da forma de figuras, utilizando malhas; atividades 2 e 4;
e) utilizar unidades de medidas variadas para determinar a área de um objeto dado; atividade 3;
f) determinar o perímetro de um polígono; atividades 4 e 5;
g) diferenciar o perímetro e a medida da área das figuras por meio da composição e decomposição de figuras planas; atividades 4 e 5;
h) introduzir o cálculo da medida de área por meio de aproximação de medida de área; atividades 6 e 7;
i) identificar a área como grandeza utilizando traços que permitam a decomposição e composição de figuras planas; atividades 6 e 7.

QUADRO 1.- RELAÇÃO DE CONTEÚDOS, OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DOS EXERCÍCIOS QUE COMPÕEM A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Atividades	Título	Objetivo	Organização
1	Conceito de área	Reconhecimento de forma e conceito de área.	Cinco exercícios contendo subitens. 1; 2a; 2b; 3a; 3b; 3c; 4a; 4b; 5a;5b.
2	Área enquanto grandeza unidimensional	Comparar formas; identificar as figuras que têm mesma área com superfícies diferentes.	Cinco exercícios contendo subitens. 1a; 1b; 1c; 2; 3a; 3b; 3c; 4a; 4b; 5
3	Área enquanto grandeza bidimensional	Cálculo da medida de área, reconhecendo a unidade de medida dada.	Dois exercícios contendo subitens. 1a; 1b; 1c; 2a; 2b; 2c.
4	Distinção de Perímetro e área	Reconhecer figuras com perímetros iguais e áreas e medidas de área diferentes.	Um exercício contendo sub itens. 1a; 1b; 1c; 1d; 1e.
Lição 1	Perímetro e área	Consolidar os conhecimentos adquiridos. Figuras com perímetros iguais e medidas de área diferentes e perímetros diferentes com medidas de área iguais.	Dois exercícios 1 e 2
5	Composição de figuras planas	Composição de figuras utilizando o tangram para após identificar o perímetro e a medida de área das figuras construídas,	Dois exercícios contendo subitens. 1a; 1b; 1c; 1d; 2a; 2b; 2c; 2d.
Lição 2	Composição de figuras planas	Fortalecer a aprendizagem da composição/ decomposição /composição de figuras planas.	Quatro exercícios contendo subitens. 1a; 1b; 1c; 1d; 2a; 2b; 2c; 2d; 3a; 3b; 3c; 3d; 4a; 4b; 4c; 4d.
6	Composição e decomposição de figuras planas	Compor e decompor as figuras planas, em retângulos ou triângulos, utilizando traços para determinar a medida de área.	Um exercício contendo sub itens. 1a; 1b; 1c; 1d; 1e; 1f.
7	Composição e decomposição de figuras planas	Compor e decompor as figuras planas mais complexas utilizando traços para determinar a medida de área.	Um exercício contendo sub itens. 1a; 1b; 1c; 1d.

3.1 - *Análise a priori*

A análise *a priori* é parte importante de uma seqüência de atividades, pois permite ao pesquisador determinar o significado e a importância das escolhas feitas, como também predizer procedimentos possíveis durante sua aplicação.

A análise, que fez uso de dados provenientes dos estudos preliminares e dos resultados significativos de pesquisas sobre o assunto, possibilitou a elaboração da seqüência com escolhas didáticas consideradas adequadas aos objetivos propostos em cada atividade da seqüência desse trabalho de pesquisa.

Fundamentamo-nos nos obstáculos epistemológicos e didáticos, nas escolhas macro didáticas e nas variáveis de situação e de contrato.

BROUSSEAU (1983), observa que um obstáculo se manifesta pelos erros, que são reprodutíveis e persistentes, ligados entre si por uma causa comum: uma maneira de conhecer, uma concepção característica, um conhecimento antigo, que influem no domínio de ações. (apud GOUVEIA.1998, p.10).

Assim também observa PERRIN-GLORIAN (1986) com relação aos erros provocados pelos obstáculos:

> ... são resistentes e reaparecem mesmo depois que o sujeito rejeita esse modelo do seu sistema cognitivo e consciente, pois o obstáculo tenta adaptar-se localmente modificando-se com o mínimo de desgaste. Isso explica por que “transpor” um obstáculo exige um trabalho da mesma natureza que a implantação de um conhecimento, isto é, interações repetidas e dialéticas do aluno com o objetivo do seu conhecimento. (apud SILVA.1997, p.26,27)

Os obstáculos epistemológicos são inerentes ao próprio conhecimento do conteúdo (área) e às características de seu desenvolvimento e de seu funcionamento atual e, obstáculos didáticos são decorrentes de certas estratégias de ensino, de uma transposição proposta por livros didáticos e pelo professor que parece ter problemas em lidar com as dificuldades dos alunos. Esses fatos fazem com que o professor não discuta com os seus alunos no contexto de sala de aula o conteúdo abordado.

A constatação dos obstáculos didáticos permite ao professor rever a abordagem anterior sobre o assunto, para esclarecer a dificuldade de aprendizagem vivida pelo aluno.

Dentre os muitos obstáculos didáticos, nessa pesquisa, procuraremos observar os que ocorrem com mais freqüência no processo ensino-aprendizagem do conceito de área. Acreditamos que entre outros, os que se destacam podem ser as situações:

a) confundir as unidades de medidas, área e perímetro;
b) utilizar o mesmo cálculo para perímetro e área.
c) pouca argumentação do professor durante as explanações do conteúdo.

As escolhas macrodidáticas referem-se à organização global da seqüência. Nesse trabalho, elas estão envolvidas desde a elaboração das atividades do teste piloto (cf anexo I) até a institucionalização dos conteúdos da seqüência.

A institucionalização caracteriza-se pela discussão e argumentação no grande grupo (alunos e professor) sobre resoluções dos problemas apresentados e dos conceitos gerados por meio da execução dessas atividades e respectivas análises. Após a discussão, o professor faria uma síntese sobre o conteúdo estudado, calcada nas opiniões e soluções dos alunos, concluindo assim os trabalhos daquela atividade.

As variáveis de situação se referem à escolha das atividades, à forma de trabalho e ao tempo necessário para a aprendizagem.

3.2 - Realização da seqüência

A priori, a seqüência de atividades foi analisada pelos professores do projeto de geometria da PUC-SP, para apreciação, discussão e sugestões.

Após a análise desse grupo, o trabalho de aplicação da seqüência foi desenvolvido em dois momentos: no primeiro momento com dez professores da rede estadual de ensino de São Paulo, o capacitador, o observador e a pesquisadora e, num segundo momento, com os alunos, o professor da turma, dois observadores e a pesquisadora.

Após discussões, aplicamos em 8 sessões, a seqüência para os professores da Rede Estadual de Ensino, que seriam envolvidos nas atividades de aplicação da seqüência aos alunos. Essas sessões duraram dois meses e caracterizaram-se como observadoras do processo de ensino-aprendizagem do conceito de área em superfície plana. Objetivaram conhecer e discutir a concepção que o professor tem sobre o conceito de área e a análise que faz de uma seqüência de atividades voltada ao estudo desse conceito com a sua prática em sala de aula.

Era do conhecimento desses professores que, durante a aplicação da seqüência aos alunos, estariam presentes na sala de aula a pesquisadora e dois professores observadores. Esse fato fez com que ocorresse um vínculo implícito entre os envolvidos na pesquisa, garantindo, assim, a realização das atividades e oportunizando ao professor durante a aplicação das atividades, esclarecimentos de dúvidas com a pesquisadora.

Esse trabalho com os professores foi realizado em dois grupos. Um grupo foi composto por quatro professores, que lecionam no ensino fundamental e na mesma escola da rede estadual. O outro grupo com seis professores, que lecionam em escolas diferentes também da rede estadual.

Durante as sessões, solicitamos aos professores que analisassem os exercícios sob os pontos de vista didático e matemático, por meio de suas resoluções, a fim de gerarem possíveis discussões e sugestões. No último encontro com esses professores, apresentamos-lhes a seqüência reformulada.

Antes de iniciarmos o trabalho com os alunos, realizamos duas visitas à sala onde seria aplicada a seqüência, para observarmos o relacionamento entre professor e alunos.

Na primeira visita à turma, a professora apresentou-nos, pesquisadora e os professores observadores aos alunos. Nessa oportunidade, justificamos a presença desses professores durante a aplicação das atividades da seqüência.

Na segunda visita, o professor da sala organizou aleatoriamente os alunos em grupos de três e orientou-os como seriam as atividades para as próximas aulas.

Realizamos a aplicação da seqüência aos alunos de 5ª série do ensino fundamental em 14 sessões de 50 minutos a 1 hora e 40 minutos, para que pudéssemos atingir os propósitos desse estudo: apresentar uma proposta de trabalho que facilite o aprendizado do conceito de área.

Durante a aplicação da seqüência, ocorreram, em cada uma das atividades, momentos de discussão e reflexão. Em algumas delas, o professor fez a institucionalização sobre o conteúdo trabalhado.

A pesquisadora e os dois observadores, presentes em todas as sessões, anotaram, preenchendo formulários (cf.anexo II), o desenvolvimento das atividades em sala de aula, a postura do professor frente à turma e em relação à seqüência e as dificuldades encontradas pelos alunos. Anotaram também algumas discussões e conclusões do(s) grupo(s), feitas antes e depois dos comentários do professor.

3.3 - Análise das atividades

Nesse trabalho de pesquisa, estão explícitos em cada atividade e respectivas questões os seus objetivos, as análises *a priori* da pesquisadora e algumas contribuições dos professores que estiveram nas sessões de estudo da seqüência, os resultados da aplicação das atividades aos alunos e a análise a posteriori.

CAPÍTULO IV

4. Aplicação da seqüência e análises

Neste capítulo estão expostas as análises das atividades que constituem nossa seqüência didática. Apresentamos assim as nossas análises a priori e análise dos resultados obtidos dos alunos.

As atividades que constituem a seqüência deste trabalho esquematizam-se em:

Atividade	Apresentação	Instrumento	Produto
1	5 exercícios	Recorte e sobreposição de figuras	Reconhecimento de área
2	5 exercícios	Composição e decomposição de figuras	Reconhecimento de área enquanto grandeza unidimensional
3	2 exercícios	Cálculo da medida de área	Reconhecimento de área enquanto grandeza bidimensional
4	1 exercício	Construção de figuras	Distinção de perímetro e área.
4- lição 1	2 exercícios	Familiarização da construção de figuras	Fixação da distinção de perímetro e área.
5	2 exercícios	Tangram: composição de figuras planas e cálculo do perímetro e medida de área.	Compreensão e fixação de perímetro e medida de área de figuras planas diversas.
5- lição 2	4 exercícios	Familiarização da aprendizagem da composição/ decomposição/composição com o uso do tangram	Fixação do processo composição/ decomposição/composição com o uso do tangram
6	1 exercício	Composição ou decomposição de figuras utilizando traços	Cálculo da medida de área de figuras planas
7	4 exercícios	Composição ou decomposição de figuras planas complexas	Cálculo da medida de área de figuras planas

As atividades da seqüência foram aplicadas aos alunos pelo próprio professor da turma de alunos envolvidos no processo. Antes da aplicação da seqüência aos alunos, oportunizamos a esse professor e aos professores do grupo de estudos, discussões sobre os exercícios propostos na seqüência.

4.1 ATIVIDADE 1- Conceito de área

Para que pudéssemos atingir os objetivos propostos na seqüência, investigamos junto aos alunos o reconhecimento de formas e de conceito de área.

A atividade 1 objetiva assim trabalhar a compreensão dos alunos sobre área. Apresenta cinco exercícios fundamentados na teoria de DUVAL (1995), conforme nosso capítulo II, que denota não ser possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à representação.

Para DUVAL, o conhecimento é mobilizado por um sujeito por meio de uma atividade de representação. Assim, no contexto deste trabalho, a representação de figuras planas foi materializada por meio das figuras elaboradas pelos alunos.

As idéias de DUVAL expressam existir uma variedade de representações semióticas constituídas por signos que pertencem a um sistema de representação. Sendo assim, optamos pelo uso de um material manipulativo que representasse bem as figuras a serem analisadas.

O material para a resolução dos problemas compõe-se de uma ficha impressa (cf.anexo III), figuras recortadas em cartolina, varetas, borrachinhas, lápis preto e de cor, borracha e tesoura sem ponta, por acreditarmos que estimulam os alunos à elaboração de estratégias.

Durante a aplicação dos exercícios da atividade 1, estaremos observando as apreensões definidas por DUVAL (1994), que ocorrerem no processo ensino-aprendizagem e as três formas de processo cognitivo (DUVAL, 1995): visualização, construção e raciocínio.

Exercício 1.

1) Você recebeu dois objetos construídos com materiais diferentes: um com varetas e outro com cartolina.

Descreva as diferenças que você percebe nos dois objetos que recebeu.

Esse exercício objetiva a identificação da diferença que existe entre contorno e região interna de uma figura plana.

A escolha dos materiais: cartolina, varetas e borrachinhas e o número dos objetos, entregues para cada grupo, permitirá aos alunos o manuseio para construções de novas figuras.

DUVAL (1994) explicita a visualização como o processo que examina o espaço representação, da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva.

Com esse exercício, num primeiro momento pelo processo de visualização, esperamos que os alunos considerem um dos objetos como cheio e o outro vazio. Num segundo momento, o processo de raciocínio fará com que cheguem provavelmente à distinção, verbalizada de forma oral ou escrita, entre contorno (figura construída com varetas) e região interna delimitada por esse contorno (figura construída em cartolina).

Pela apreensão perceptiva, segundo DUVAL, o aluno interpretará a forma da figura em uma situação geométrica, chegando à resolução do problema em análise; no nosso caso, os alunos deverão conhecer a diferença entre contorno e região interna limitada por esse contorno.

Quanto à atuação do professor, esperamos que apresente a atividade aos alunos de forma a induzi-los à reflexão e discussão em seus grupos.

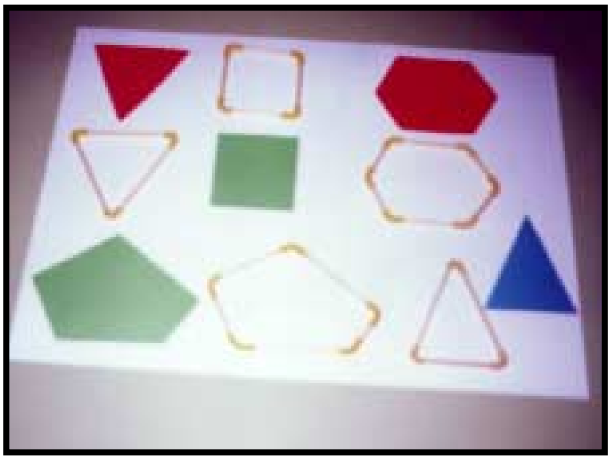


FIGURA 7 - FOTO REFERENTE AO MATERIAL DIDÁTICO DA ATIVIDADE 1.

Aplicação do exercício 1 aos alunos: observações e análises.

Participaram desta atividade 31 alunos organizados em grupos de três elementos cada. Após análise dos dois objetos, cada grupo explicitou o observado procurando mostrar a diferença entre os objetos analisados.

Constatamos em 45% dos alunos as seguintes características para os objetos:

a) *um é cheio e o outro é oco*,
b) *um só tem o lado de fora e o outro tem tudo*,
c) *um o lado interno é aberto e o outro não*,
d) *um dá para atravessar a mão e o outro não*.

Vários alunos afirmaram que as figuras possuíam a mesma forma e alguns as denominaram de triângulo, quadrado, retângulo.

O restante dos alunos ou escreveu o próprio enunciado: *um é de varetas e o outro de cartolina* ou não respondeu a questão.

Quando os alunos fizeram essas afirmativas, o professor não os chamou a atenção ao enunciado ou ao objetivo do exercício, deixando-os, assim, encontrarem por si mesmos a solução para o problema.

Os professores observadores constataram que os alunos estavam entusiasmados com o manuseio do material e ansiosos em solucionar o problema, buscando sempre a orientação do professor.

Consideramos positivos os índices da Tabela 1 tendo em vista ser a primeira vez que os alunos trabalharam com materiais diversificados, o que é gestão diferenciada das que vinham sendo aplicadas em sala, conforme testemunho de alguns professores participantes do projeto.

TABELA 1 - ÍNDICE DE PERCEPÇÃO ENTRE CONTORNO E REGIÃO INTERNA DE FIGURAS PLANAS.

SITUAÇÃO	ALUNOS	
	Nº	%
Registraram o contorno como vazio	14	45
Registraram a região interna como espaço cheio	11	35
Perceberam a diferença entre contorno e região interna	14	45

FONTE: ficha de resolução dos alunos
NOTA: participaram da atividade 31 alunos.

Observamos que a maioria dos alunos tentou chegar à solução do problema pelo processo de visualização e que 45% deles perceberam a diferença entre contorno e região interna limitada por esse contorno.(Tabela 1).

Os resultados obtidos pela análise das respostas escritas e discussões dos alunos confirmaram também a análise *a priori* feita pelos professores do grupo de que os alunos observariam, em relação aos objetos, que: *um é de vareta o outro de papel, um dá para atravessar a mão e o outro não*.

Esse ocorrido não obteve indução do professor ao aluno para a busca de respostas coerentes à solução do problema. Não houve, portanto, a intervenção, prevista pelos professores do grupo do projeto, com questionamentos para instigar os alunos a pensar em outra resposta.

Exercício 2.

a) Com as varetas que você recebeu, construa duas figuras diferentes, podendo ou não utilizar todo o material.

b) Faça um desenho dessas figuras e pinte sua região interna.

Este exercício objetiva a construção e a observação do contorno de figuras, com destaque, em cada uma delas, da linha poligonal e da região interna.

Escolhemos a construção de duas figuras com o uso de varetas e lápis de cor, para permitir aos alunos cumprirem todas as etapas solicitadas neste exercício: construção, desenho e pintura de figuras planas.

Utilizando o conhecimento adquirido no exercício anterior, os alunos, após a visualização, poderão utilizar o processo de construção de figuras, que pode ser trabalhado com um modelo. Este processo, DUVAL (1994) observa ser a execução de configurações.

Assim, acreditamos que os alunos tomarão como modelo o exercício 1 e as observações nas figuras construídas pelos colegas e farão uso de todo o material disponível. Nesta fase, segundo DUVAL, as ações e os resultados observados associam-se aos objetos matemáticos representados.

A figura elaborada com as varetas poderá ou não ultrapassar o espaço delimitado pela folha de papel na qual será desenhada a figura.

Para a resolução do problema, os alunos deverão utilizar as apreensões perceptiva e seqüencial, expostas por DUVAL. A primeira porque os alunos deverão fazer a interpretação das formas das figuras por meio da visualização e a segunda, a construção da figura com o material disponível.

O pedido para construírem dois objetos é uma escolha didática para que o aluno não fique somente na construção, mas também que se interesse pelas discussões intra-grupo, inter-grupo e debates coletivos com o professor.

Aplicação do exercício 2 aos alunos: observações e resultados.

Constatamos que os 31 alunos participantes não tiveram dificuldades na construção das figuras durante a aplicação do exercício. Observamos que utilizaram as figuras que os outros grupos receberam, restringindo assim a variedade delas ao conjunto de figuras elaboradas pela turma.

Em relação à pintura da região interna, 94% dos alunos não apresentaram dificuldades em fazê-la.

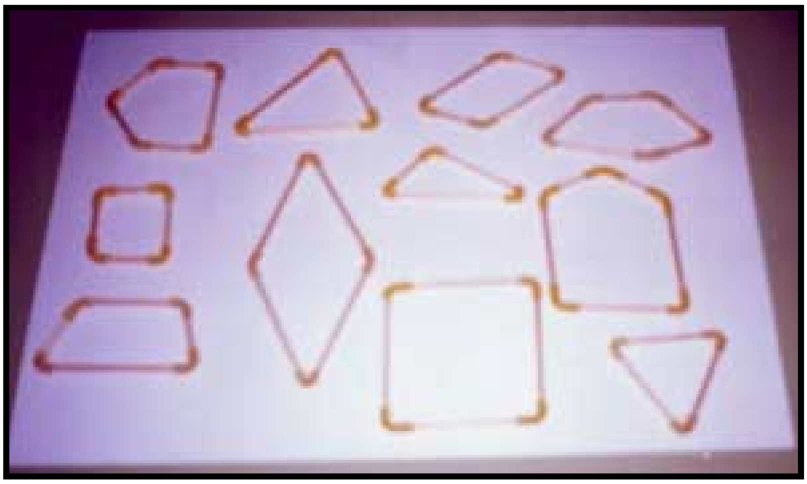


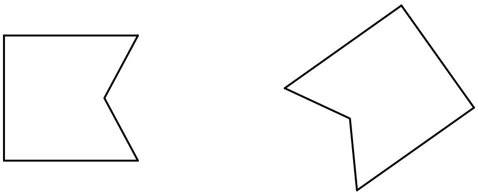
FIGURA 8 - FOTO REFERENTE ÀS CONSTRUÇÕES EFETUADAS PELOS ALUNOS NO EXERCÍCIO 2 DA ATIVIDADE 1.

Conforme nossa análise *a priori*, os alunos não apresentaram dificuldades para trabalhar o exercício. Observamos que eles perceberam que ao desenharem uma poligonal no papel, podiam desconsiderar a superfície que, essa figura determina e que, ao fazerem o contorno e pintarem a região interna da figura, identificariam a região delimitada por esse contorno.

Não constatamos a construção de figuras maiores que a folha de papel nem figuras abertas, conforme observaram *a priori* os professores dos grupos, não constatamos também comentários do professor, pertinentes a contorno e superfície.

Exercício 3.

Recorte as figuras da **página 3** e responda as perguntas:
a) As figuras têm a mesma forma?
b) A quantidade de papel utilizada em cada uma delas é a mesma? Por quê?



Este exercício objetiva a identificação da forma da figura por meio de classe de figuras poligonais e a identificação de áreas diferentes em figuras de mesma forma Entendemos aqui como forma, a aparência física do objeto (figura) visualizado pela linha poligonal.

Segundo DUVAL (1994, p.125), a resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige, dependem da distinção entre as formas de apreensão da figura. Outro passo para a resolução de problemas é observar que o raciocínio geométrico não funciona com a argumentação do pensamento natural.

DUVAL (1994) ainda enfatiza que, seja qual for a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, são possíveis duas atitudes: a apreensão perceptiva das formas, que é imediata e automática, e a apreensão discursiva dos elementos matemáticos da figura, que é a verificação e dependência da aprendizagem. Afirma que o problema das figuras geométricas está na diferença entre a apreensão perceptiva e a interpretação comandada por hipóteses.

Esperamos num primeiro momento que os alunos respondam que as figuras possuem a mesma forma de acordo com o "processo de visualização" (DUVAL, 1994). No item seguinte, que respondam possuir as figuras a mesma área, por se apresentarem, visualmente, bem próximas da mesma *quantidade de papel*[2].

Entretanto, partindo para o empírico, a estratégia disponibilizada pelo contexto instiga os alunos ao recorte e à sobreposição das figuras para confirmação de mesma forma. Essa estratégia os levaria a reconhecer que o tamanho das figuras são diferentes, portanto áreas diferentes.

Ao evidenciar essa diferença entre as figuras, os alunos concluirão, com a ajuda do professor no momento da institucionalização, que podem existir figuras de mesma forma com áreas diferentes.

Segundo DUVAL (1994), utilizando-se da apreensão perceptiva os alunos poderão interpretar as figuras por meio da sobreposição das mesmas para solucionar o problema proposto.

---

[2] Quantidade de papel: expressão utilizada no início das atividades para representar o conteúdo que preenche a área da figura.

Aplicação do exercício 3 aos alunos: observações e resultados.

Aplicamos o exercício aos alunos e constatamos que 68% dos 31 participantes responderam que as figuras têm a mesma forma. Quanto à área, tivemos um índice de 81% de alunos que afirmaram que as figuras não têm a mesma *quantidade de papel*.

Dos 31 alunos, apenas 6 responderam que as figuras eram iguais, conforme observação dos professores do grupo. Podemos inferir que os alunos consideraram a diferença não significativa. Este fato confirma que, em determinados casos, utilizar somente o processo de visualização pode levar a interpretações erradas. (DUVAL, 1994, p.125).

Para justificar a nossa inferência, lembramos que a heurística dos problemas de Geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar às formas de interpretações autônomas de figuras. Para essas interpretações, DUVAL, (1994, p.125) observa as apreensões: seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória. Sendo assim, se os alunos ficarem apenas na visualização chegarão à conclusão de que as figuras possuem a mesma área, devido a diferença de tamanho entre elas ser quase imperceptível, conforme nossa análise prévia deste exercício.

No primeiro momento do exercício 3, numa análise visual, foi unânime a resposta dos alunos de que as figuras apresentadas possuíam a mesma forma e a mesma área (*quantidade de papel*). Entretanto, após o professor instigá-los a recortarem as figuras para análise, observamos que 81% dos alunos que sobrepuseram-nas após recortadas chegaram à conclusão de que elas não possuíam a mesma área.

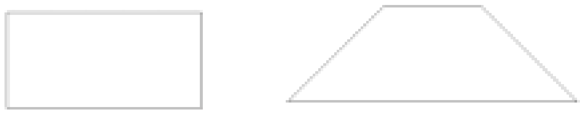
Vale observar que a maioria dos alunos após colocar as figuras sobrepostas confirmou a diferença entre elas por meio da claridade - os alunos comparavam as figuras sobrepostas contra a luz da janela - e utilizaram esse recurso para justificar a resposta de que elas possuíam formas iguais e áreas diferentes.

Constatamos que a participação ativa do professor junto aos grupos instigou os alunos a justificarem suas respostas. Observamos também que, mesmo o aluno respondendo corretamente ao professor, apresentou dificuldades para escrever o que havia observado.

Podemos assim observar que a técnica do recorte e colagem e sobreposição das figuras subsidiam o raciocínio dos alunos para a identificação da existência de figuras de mesma forma e áreas diferentes. Vale ressaltar que a intervenção do professor aos alunos solicitando-lhes o recorte e a sobreposição das figuras foi fundamental para a resolução do problema.

Exercício 4.

Recorte as figuras da **página 4** e responda as perguntas:
a) As figuras têm a mesma forma?
b) A quantidade de papel utilizada em cada figura é a mesma? Por quê?
c) O que você pode concluir.



O objetivo deste exercício é fazer os alunos observarem que o uso da técnica do recorte e da colagem possibilita a identificação de figuras que possuem formas diferentes com áreas iguais.

As formas distintas e tamanho das figuras permitirão ao aluno a decomposição de uma das figuras para a reconstrução da outra, em um trabalho de modificação mereológica, que explicitamos a seguir. Acreditamos que essas atividades ajudarão os alunos a adquirirem estratégias para resoluções dos problemas posteriores.

DUVAL (1994, p.129), para justificar a apreensão operatória no processo de solução de situações-problema observa as modificações que a figura poderá sofrer em mereológica, ótica e posicional. Para ele, trata-se de uma modificação mereológica quando a figura separa-se em partes, tornando-se subfiguras que se fracionam e se reagrupam. Esse processo evidencia uma relação da parte com o todo. A modificação ótica identifica a transformação de uma figura em outra à sua imagem. A modificação posicional ocorre quando há um deslocamento da figura em relação a um referencial.

Essas modificações são realizadas gráfica e/ou mentalmente.

> A apreensão operatória das figuras é uma apreensão central sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e por conseqüência as reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem. A produtividade heurística de uma figura, num problema geométrico, tem como fato, que existe a congruência entre uma de suas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis do problema dado. (DUVAL,1988. p.62).

Fracionar uma figura para realizar uma análise a partir de partes elementares caracteriza a operação de reconfiguração intermediária, que consiste na organização de uma ou várias subfiguras diferentes da figura de partida. Assim, as partes elementares de um fracionamento de figuras podem ser reagrupadas em subfiguras dentro da figura de partida.

Segundo DUVAL (1994) essa operação possibilita, tal como as medidas de área por soma de partes elementares, seqüenciar tratamentos ou colocar em evidência a equivalência de dois reagrupamentos intermediários.

Em conformidade com o exposto, nesse exercício o aluno estará reconfigurando o trapézio para chegar à forma de um retângulo e constatar que ambos possuem a mesma área.

Para responderem sobre a forma, os alunos não deverão ter dificuldades, por se tratarem de figuras “diferentes” (retângulo e trapézio).

Em resposta quanto à área, acreditamos que após o primeiro recorte (retirando as figuras da folha dada), da sobreposição e da compensação de figuras, os alunos poderão se apoderar da percepção visual para responder que as figuras têm a mesma área (quantidade de papel).

Partindo para o empírico e com o estímulo vindo do professor, os alunos deverão fazer mais recorte e colagem para construir figuras com a mesma forma da outra como também confirmar provavelmente que figuras com formas diferentes podem ter a mesma área, conforme Figura 9.

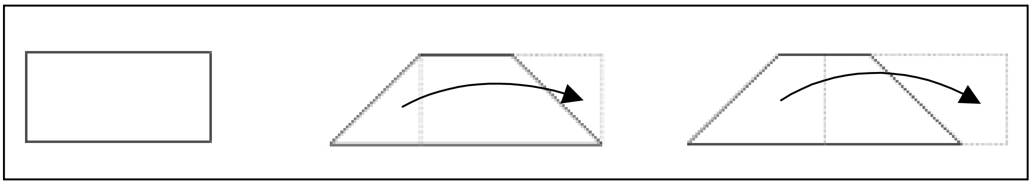


FIGURA 9 - TRANSFORMAÇÃO MEREOLÓGICA: RECORTE E COLAGEM DO TRAPÉZIO PARA A CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO.

Aplicação do exercício 4 aos alunos: observações e resultados.

Observamos que os alunos não apresentaram dificuldades em responder sobre a forma das figuras, pois 90% dos 31 alunos participantes responderam corretamente que as figuras possuíam formas diferentes.

Para desenvolver as atividades do exercício, todos os alunos recortaram as figuras do Anexo III e confirmaram o que se esperava: fizeram a simples sobreposição das mesmas.

Constatamos também que ocorreu uma discussão entre eles com relação ao que observaram nesta sobreposição. Dos 28 alunos que responderam a questão, 42% afirmaram que as figuras tinham a mesma *quantidade de papel* e alguns até comentaram em voz alta, que era só retirar o que sobrava de um lado e colocar no outro lado. Entendemos que isso indica uma operação mereológica feita mentalmente.

Alguns alunos, após o professor solicitar a confirmação de suas conjecturas, de que deveriam recortar para sobrepor, fizeram o recorte em uma das figuras sobrepostas e confirmaram ter a mesma *quantidade de papel*.

Esta atividade totalizou os seguintes índices: considerando-se 31 alunos presentes em sala, 51% afirmaram que as figuras tinham a mesma área, 39%, que as figuras não possuíam a mesma área e 10% não registraram suas respostas.

Constatamos, nas fichas de resolução dos alunos, dificuldades para concluírem por escrito o que havia sido discutido no grupo. Contudo, havíamos observado durante a aplicação da atividade que na discussão oral eles foram bastante argumentativos quando defenderam a idéia de que figuras de formas diferentes podem ter a mesma *quantidade de papel* (área).

Voluntariamente, 30 alunos recortaram as figuras, colocaram-nas sobrepostas e concluíram que elas possuíam a mesma *quantidade de papel*. Argumentaram que, se considerassem a retirada de uma parte de um lado de uma das figuras e a transferência para o lado sem espaço ocupado da figura a ser reconstruída ou modificada, formaria uma terceira figura. Isso comprovaria para eles terem as figuras anteriores o mesmo tamanho, ou seja, a mesma área.

Essas observações reforçam nossas análises feitas à luz da teoria de DUVAL (1995 p.45); pois, após um trabalho com configurações mereológicas, os alunos concluirão suas estratégias para construção de figuras com o objetivo de reproduzirem uma figura de partida por meio da apreensão seqüencial.

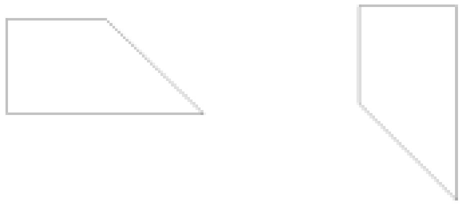
Observamos que o professor não efetuou a correção do exercício no final da aula, nem fez a institucionalização do conteúdo, mas esclareceu dúvidas de grupo em grupo durante a execução da atividade, levando os alunos a refletirem sobre suas respostas.

A institucionalização, ou seja, a síntese do conteúdo que deve ser feita pelo professor e a discussão do conteúdo e das estratégias verificadas durante a aplicação do exercício, é fundamental para a compreensão do trabalhado. No caso desse exercício, a institucionalização não ocorreu, deixando assim uma lacuna no aprendizado de alguns alunos. Sendo assim, enfatizamos que os alunos que apresentaram resposta errada quanto à forma, por confundi-la com a área, poderão ter dificuldades para a resolução de questões posteriores, tendo em vista serem esses conteúdos as ferramentas que serão utilizadas.

Nesta fase da aplicação das atividades, acreditamos que poderão ocorrer, com a maioria dos alunos, as apreensões seqüencial, perceptiva e operatória, explicitadas por DUVAL (1994, p 125), pois, para compreenderem os elementos da figura geométrica, estarão articulando os enunciados relacionados às propriedades do objeto.

Exercício 5.

Recorte as figuras da **página 5** e responda as perguntas:
a) As figuras têm a mesma forma?
b) A quantidade de papel utilizada em cada figura é a mesma? Por quê?
c) O que você pode concluir.



Esse exercício objetiva a compreensão dos alunos quanto à forma e ao uso da sobreposição de figuras para justificar figuras de mesma forma e mesma área.

Como ocorreu no exercício três dessa atividade 1, que comprovou ser a percepção visual insuficiente para evidenciar a mesma área das figuras dadas, acreditamos que, nesse exercício 5, mesmo percebendo que as figuras possuem a mesma forma, os alunos irão recortá-las para constatar o tamanho da área.

Esperamos que respondam ter as figuras a mesma área (quantidade de papel), sobrepondo-as, para concluírem que existem figuras de mesma forma com áreas iguais, ou diferentes, e, figuras de formas diferentes com área iguais, ou diferentes. Essas resoluções serão possíveis se o aluno envolver em seu processo a visualização sob o aspecto das apreensões perceptiva e operatória (DUVAL, 1994).

Nesse exercício podemos inferir que a sobreposição de figuras, objeto dos primeiros exercícios dessa atividade, passa a ser ferramenta de trabalho para a identificação de área, pois esse processo tornou-se familiar ao aluno. (DOUADY, 1986).

Durante a institucionalização do conteúdo e das estratégias de resolução do problema proposto, o professor estará substituindo o termo *quantidade de papel* pelo termo *área enquanto grandeza*.

Aplicação do exercício 5 aos alunos: análises e discussões.

Dos 31 alunos presentes, apenas 18 alunos responderam com acerto a questão.

Quanto a área, pudemos observar que todos os alunos presentes recortaram as figuras impressas na ficha de exercícios e sobrepuseram-nas, mas, apenas 14 alunos responderam por escrito a questão e, destes, 13 responderam com acerto de que as figuras possuíam a mesma área.

Para concluir as discussões relacionadas à identificação de forma e área, apresentamos na Tabela 2, as respostas dos alunos envolvidos na aplicação da seqüência.

TABELA 2 - ÍNDICE DE PERCEPÇÃO QUANTO À FORMA E ÁREA DE FIGURAS PLANAS POR MEIO DO RECORTE, SOBREPOSIÇÃO, DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO DE FIGURAS.

SITUAÇÃO As figuras têm a mesma	EXERCÍCIO	QUANTIDADE DE RESPOSTAS	ACERTOS (%)
Forma	3	31	68
Área	3	31	81
Forma	4	31	90
Área	4	28	42
Forma	5	18	100
Área	5	14	92

FONTE – ficha de resolução dos alunos
NOTA. Participaram da atividade 31 alunos.

Observamos que nos exercícios 3 e 4 ocorreu uma evolução no aprendizado do aluno, pois, o processo de ensino-aprendizagem começou com uma estratégia (exercício 3) que levou o aluno a repensar sobre a primeira afirmativa dada como resposta, por meio da investigação (a sobreposição das figuras).

A sobreposição das figuras passou a ser o instrumento que facilitaria a resolução do problema que será apresentado nos exercícios posteriores dessa seqüência de atividades.

No exercício 4, essa evolução foi evidente, mesmo apresentando as formas das figuras com maior complexidade. Sendo assim, o aluno precisou ampliar as ações do processo sobreposição-visualização para sobreposição-visualização-decomposição-composição.

Essa estratégia confirma nossa análise feita à luz da teoria de DUVAL (1994), segundo a qual o aluno faz uso de uma figura de partida, e, por meio da sobreposição e decomposição de partes dessa figura, forma uma terceira figura. Ao compor essa terceira figura, o aluno identifica a igualdade ou não das áreas das figuras anteriores.

Notamos também que, considerando as 18 respostas obtidas dos alunos no exercício 5, houve 100% de acertos com relação ao conteúdo “forma”. Podemos inferir nessa etapa da atividade um avanço no aprendizado do conteúdo, considerando os 68% no exercício 3 e os 90% no exercício 4.

Com relação à área, ocorreu também um significativo avanço no aprendizado desses alunos, pois os índices de acertos (81%, exercício 3 e 92%, exercício 5) enfatizaram uma evolução positiva de aprendizagem do exercício 3 para o 5 com o processo recorte-sobreposição-decomposição-composição de figuras planas, mesmo apresentando diferenças, 16 alunos, no número de participantes do exercício 3 para o 5.

Assim, ratificamos as idéias de DUVAL (1994) que denotam a importância de se trabalhar processos de reconhecimento de apreensões e de cognição, que remetem o aprendiz a uma análise matemática coerente em termos de raciocínio para chegar à solução do problema.

Ratificamos também as observações dos professores do grupo de estudos que explicitaram ser a comparação de figuras um processo adequado à identificação de áreas de figuras.

Portanto, consideramos válidos os resultados desses exercícios para fazer parte de uma proposta didática que poderá subsidiar o ensino da distinção entre perímetro, forma e área.

4.2. ATIVIDADE 2 - Área enquanto grandeza unidimensional

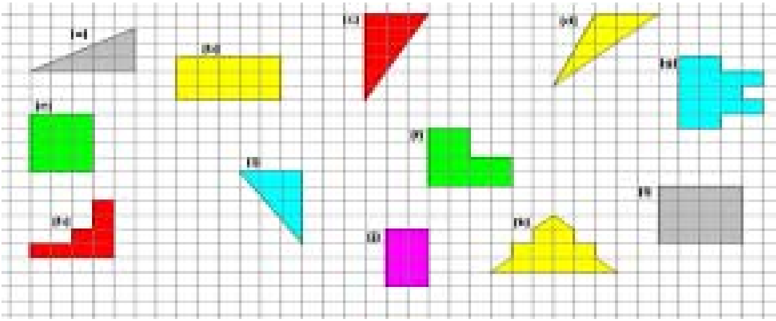
Na atividade 02 da seqüência procuramos diferenciar forma, superfície e área pelo processo de comparação de figuras, à luz da teoria de Douady (1986), que evidencia ser a comparação de figuras e contagem de unidades de medida de área o início de um jogo entre o quadro geométrico e o numérico.

Acreditamos que essa escolha didática consolidará ainda mais para os alunos a compreensão da diferença entre forma e área e possibilitará o cálculo da medida de área da figura por meio da contagem das unidades de medida.

Com o uso da estratégia decomposição e composição de figuras, objetivamos provocar o raciocínio que leva à solução do problema proposto. Assim, nesta atividade, estaremos utilizando essa estratégia como instrumento de aferição de área para identificar a sua medida.

Exercício 1.

Observe as figuras abaixo.



a) Identifique aquelas que têm a mesma forma.

b) Identifique as que têm a mesma quantidade de papel.

c) A área depende da forma da figura? Dê um exemplo.

Esse exercício tem por objetivo a identificação de área como grandeza unidimensional[3] por meio da comparação de figuras planas.

As escolhas didáticas estão explícitas quanto à forma das figuras, cujos contornos poderão ser identificados pelos alunos a partir do aspecto visual da figura e, explícitas quanto à quantidade de figuras com a mesma forma em posições diferentes.

A escolha da malha quadriculada permite por meio da contagem das superfícies formadas por quadradinhos preenchidos, a verificação da área da figura. Esses procedimentos possibilitam aos alunos observarem que existem figuras que possuem formas diferentes com a mesma área e, figuras de mesma forma que possuem ou não a mesma área.

Por hipótese, esse raciocínio levará os alunos a considerarem que o espaço ocupado pela figura representa a sua área.

[3] Utilizamos o termo “unidimensional” como sendo o princípio fundamental de contagem, ou seja, o aluno simplesmente conta quantas unidades compõem a figura.

No item (a) solicitamos a identificação de figuras de mesma forma para mobilizar os conhecimentos introduzidos na atividade bem como utilizar o processo de visualização-construção e raciocínio (DUVAL, 1995) para resolver o problema proposto no exercício 1.

Acreditamos que os alunos não apresentarão dificuldades para responder que as figuras (a), (c), (d) e (i) têm a mesma forma triangular ou mesma forma; (b), (e), (j) e (l) possuem forma retangular ou mesma forma e demais figuras possuem forma de escadinha ou formas diferentes, uma vez que estes conhecimentos já são mobilizáveis[4] pelos alunos. Nesses casos, os alunos efetuarão uma categorização por figuras de seu repertório, tais como triângulos e retângulos.

No item (b) desse exercício solicitamos a identificação da área (quantidade de papel). Esperamos que os alunos efetuem a contagem das superfícies dos quadradinhos e que façam, se necessárias, compensações na figura inicial para chegarem a um cálculo aproximado do tamanho da área.

Sendo assim, poderão observar que as figuras (b) e (g) são compostas por 15 quadradinhos; (e), (f), e (k), 12 quadradinhos; (h) e (j), 8 quadradinhos.

Acreditamos que os alunos, mesmo encontrando dificuldades para resolverem a contagem de quadradinhos não completos da área dos triângulos, (a), (d) e (i) poderão efetuar a decomposição e composição dessas unidades para chegar à resposta de 7,5 unidades de medida.

Durante a aplicação dessa atividade, esperamos que o professor chame a atenção dos alunos sobre a existência de várias categorias de figuras, que se diferenciam quanto à forma e à área.

O Grupo de professores observou que, nesse exercício, a institucionalização do conteúdo a ser feita pelo professor, será de considerável importância para a compreensão dos alunos, tendo em vista que a identificação da medida de área é solicitada e que esta deve ser grafada em cm².

[4] Segundo Aline Robert (1998, p. 168), nível mobilizável implica na utilização de um conhecimento por um início de justaposição de saberes. São as aplicações para as quais é necessário adaptar os conhecimentos ao contexto particular. Por exemplo, por uma mudança de ponto de vista ou de quadro, mas com indicações (sejam dadas pelo professor sejam enunciados).

Acreditamos que o professor faça a síntese do conteúdo estudado como também instigue os alunos a uma discussão para fixação e familiarização do exposto.

Aplicação do exercício 1 aos alunos: observações e resultados.

Participaram dessa atividade 32 alunos. Desses, 5 apresentaram respostas completas e corretas. Obtivemos pelo menos uma das respostas esperadas dos outros 27 alunos.

Verificamos pelas respostas que 56% dos 32 alunos indicaram a resposta correta, ou seja, os triângulos de mesma forma eram as figuras (a), (i), (c) e (d). Os 44% restantes responderam que os triângulos que possuíam a mesma forma eram (a) e (i), diferenciando-os de (c) e (d), que, por sua vez, possuíam formas iguais.

Quanto às figuras retangulares, apenas 22% dos 32 alunos indicaram ter forma de retângulo as figuras (b) e (e), conforme explicita a Tabela abaixo:

TABELA 3 - ÍNDICE DE ACERTOS DOS ALUNOS EM RELAÇÃO A FIGURAS DE MESMA FORMA.

SITUAÇÃO:MESMA FORMA	ALUNOS (%)
triangular: (a), (c), (d) e (i)	56
triangular: (a) e (i), (c) e (d)	44
retangular: (b), (e), (j) e (l)	15
retangular (b) e (e)	22

FONTE: ficha de resolução dos alunos
NOTA: Participaram desta atividade 32 alunos.

Observamos que parte dos alunos analisou apenas um grupo de figuras que tinham mesma forma e já considerou como feito o exercício. Isso justifica o alto índice de alunos que não respondeu a determinados grupos de figuras de mesma forma, tendo em vista as dificuldades em definir a idéia "*mesma forma*".

Os alunos, denominados nesta pesquisa de X e Y, fizeram observações interessantes, que achamos relevante citar:

O aluno X explicou para o grupo do qual fazia parte que *forma não tem nada a ver com tamanho e sim triângulos e quadrados. O* aluno *Y* argumentou em seu grupo que *todas as figuras que têm três lados são triângulos e têm mesma forma.* Podemos inferir que nos dois casos os alunos categorizaram figuras unicamente pelo número de lados.

Para a identificação da área da figura do item (b), constatamos que 97% dos alunos acertaram pelo menos um dos grupos de figuras.

As respostas com relação à área para as figuras (a), (d) e (i) não ocorreram como o esperado, mas, respostas como 7,8 e 9 quadradinhos para os triângulos foram observadas. Vale ressaltar que 44% dos alunos entenderam que área e forma são elementos distintos em uma figura e que uma não depende da outra.

TABELA 4 - ÍNDICE DE ACERTOS RELACIONADOS À ÁREA DE FIGURAS PLANAS

SITUAÇÃO: FIGURAS DE MESMA ÁREA	A L U N O S	
	Acertos (%)	em branco (%)
(b) e (g) – 15 quadradinhos	69	31
(e), (f) e (k) – 12 quadradinhos	53	47
(h) e (j) – 8 quadradinhos	53	47
(a), (d) e (i) – 7,5 quadradinhos	44	56

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA. Participaram desta atividade 32 alunos.

Todos os alunos apresentaram pelo menos uma das respostas esperadas; pois as análises desses alunos limitaram-se a um dos grupos ou parte de grupos de figuras.

Dessa forma, confirmaram-se as nossas hipóteses e a dos professores do grupo de que os alunos responderiam às questões tendo em vista apenas um grupo de figuras de mesma forma e um grupo de figuras de mesma área (quantidade de papel).

Durante a aplicação pudemos observar comentários dos alunos referindo-se à área: *“é só contar os quadradinhos de todos e ver quem tem resposta igual”*

O professor, devido à disponibilização de tempo para as orientações dadas de grupo em grupo, não teve tempo para fazer a síntese e discussão do conteúdo. Logo, a fase de institucionalização, necessária à compreensão dos alunos, conforme nossas observações e dos professores do grupo de estudo, não ocorreu.

Sendo assim, acreditamos que os alunos tenham dúvidas sobre o exposto no exercício, as quais poderão dificultar resoluções posteriores.

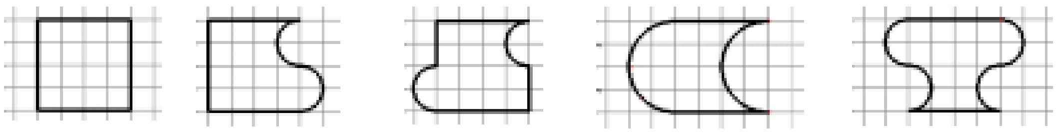
Exercício 2.

O exercício 2 dessa atividade objetiva reconhecer figuras de uma mesma classe de equivalência, por meio da comparação de áreas de superfícies diversas. Entendemos classe de equivalência as figuras que possuem formas diferentes com mesma área.

Com exceção da Figura 1, as figuras desse exercício apresentam formas diferentes com contornos curvilíneos, para instigar o aluno a trabalhar a compensação de espaço para construir o quadrilátero.

Mostre que as figuras 2, 3, 4 e 5 têm a mesma área que a figura 1.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5



Fazendo uso de uma malha quadriculada, apresentamos aos alunos figuras com formas mistas (segmentos e arcos) para serem analisadas e comparadas. Nosso objetivo é que percebam que classe de equivalência constituí-se não só de polígonos, mas também por outras figuras.

A forma e a quantidade dessas figuras no painel são escolhas didáticas que permitirão aos alunos utilizarem a técnica da compensação e, assim, justificarem que existem figuras com mesma área, mas com formas diferentes.

A escolha da malha quadriculada tem por objetivo, entre outros, identificar qual estratégia o aluno usaria para compensar as áreas das diferentes superfícies: a contagem ou a técnica de compensação.

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades para justificar que as superfícies das figuras 2, 3, 4 e 5 possuem a mesma área que a figura 1.

Para resolver o exercício, esperamos que os alunos coloquem traços nas figuras, decompondo-as e compensando partes delas, para perceberem que todas têm a mesma área, através de um trabalho de configuração mereológica.

Aplicação do exercício 2 aos alunos: observações e resultados.

Havia um certo entusiasmo dos alunos no desenvolvimento desse exercício. Segundo eles, trabalhar com figuras curvilíneas era um desafio.

Contudo, segundo os professores do grupo, os alunos resolveriam “tranqüilamente” esse exercício, tendo em vista os “encadeamentos” necessários à resolução.

Conforme a análise dos professores do grupo, os alunos pintaram a região interna da figura composta pela compensação. Para compreender melhor o exposto, segue abaixo alguns protocolos dos alunos:

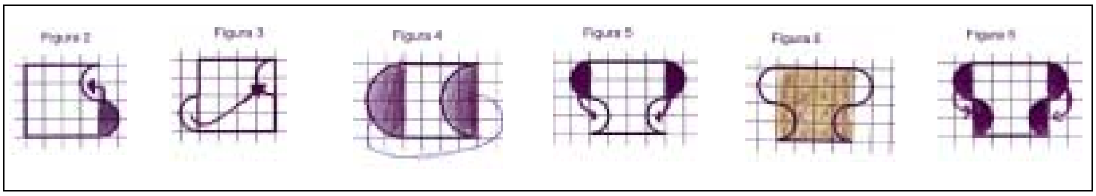


FIGURA 10 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTES AO EXERCÍCIO 2 DA ATIVIDADE 2

Constatamos que 87,5% dos alunos apresentaram a decomposição das figuras, indicando por setas ou preenchimentos essa compensação para chegarem à figura 1 e justificarem que as superfícies têm a mesma área. Somente 7 alunos (22, 5%) contaram o número de quadradinhos que compunham a figura.

O professor, durante a aplicação, pediu, de grupo em grupo, para que os alunos escrevessem suas justificativas, já expostas oralmente.

Os alunos não pediram para recortar as figuras, como foi previsto pelos professores do grupo; ao contrário, sem recorrer a essa técnica, resolveram o exercício com rapidez e organização.

Dessa forma, podemos considerar que o objetivo da proposta de trabalho foi alcançado, tendo em vista que os alunos utilizaram a técnica da composição e decomposição das figuras, conforme resultados explicitados na Tabela 5.

Podemos assim perceber que os alunos passam de uma apreensão perceptiva para a apreensão operatória, para realizarem a partir de então um trabalho de configuração mereológica das figuras.

TABELA 5 - ÍNDICE DE ACERTOS DAS SUPERFÍCIES CURVILÍNEAS COM A MESMA ÁREA PELA CONTAGEM DE QUADRADINHOS E OU DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO DE FIGURAS.

SITUAÇÃO	SIM (%)	NÃO (%)	ACERTOS (%)
Decomposição das figuras	87,5	12,5	87,5
Contagem dos quadradinhos – 16 quadradinhos	22	78	18

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: Participaram desta atividade 32 alunos

Conforme mostram os resultados, a decomposição das superfícies é um recurso eficaz e de fácil aceitação para o desenvolvimento de atividades elaboradas que visam à identificação de área e ao cálculo da medida de área.

Constatamos pela observação que os alunos com a percepção visual chegaram à resposta esperada, mas, mesmo assim, desenvolveram a etapa operatória para justificarem suas respostas e apreender o conteúdo.

Exercício 3.

Esse exercício objetiva fazer com que os alunos, reconheçam superfícies de figuras de mesma área com medidas de área diferentes, como também, superfícies de figuras com áreas diferentes com medidas de área iguais. Sendo assim, nesse exercício, ocorrerá uma discussão sobre a utilização de diferentes unidades de medidas.

Vale destacar que as figuras 1 e 2 são representadas por dois retângulos congruentes com quantidades de quadradinhos diferentes. Da mesma forma, figuras 3 e 4 são representadas por dois quadrados não congruentes, mas que possuem a mesma quantidade de quadradinhos. Nos dois casos a diferença está na superfície de cada quadradinho-unidade, conforme mostra o exercício abaixo.

3)
a) Utilizando a área da superfície do quadradinho de cada figura como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área tem cada figura.

Figura 1

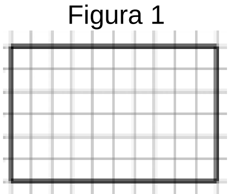


Figura 2

Figura 3

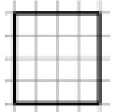
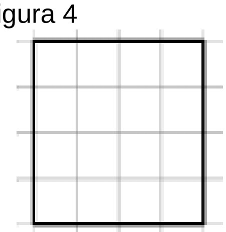


Figura 4



b) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 1 e 2?
c) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 3 e 4?

Esperamos que no item (a) os alunos respondam que a figura 1 tem 60 quadradinhos; a 2 tem 15 quadradinhos; a 3 e a 4 têm 16 quadradinhos cada e que podem representá-los com o desenho de cada quadradinho perto do número encontrado.

Para os itens (b) e (c) acreditamos que ocorrerão poucas respostas corretas, tendo em vista ser a primeira vez que introduzimos a unidade de medida de área. Entendemos como resposta correta que as figuras 1 e 2 têm o mesmo tamanho e quantidades de quadradinhos diferentes e as figuras 3 e 4 têm tamanhos diferentes e mesmo número de quadradinhos.

Escolhemos as figuras retângulo e quadrado por serem conhecidas pelos alunos de 5ª série. Sendo assim, essas figuras serão aproveitadas ao longo dessa seqüência de atividades. O tamanho dos quadradinhos, ou unidades de medidas de área, permitirá a contagem e a possível observação das diferenças entre as figuras 1, 2 e 3, 4.

A institucionalização nesse exercício é bastante necessária para reforçar as estratégias utilizadas e o conteúdo estudado, como também discutir definições de superfície, área e medida de área.

Aplicação do exercício 3 aos alunos: observações e resultados.

Constatamos que a contagem dos quadradinhos que compunham a área de cada figura não foi dificuldade para 88% dos participantes, mas, nas respostas, eles não fizeram referência à unidade de medida utilizada, ou seja, à dimensão dos quadradinhos, pois forneceram somente os números já esperados.

Considerando que decompor e compor figuras já foram meios de resolução no exercício 2, nesse exercício tornam-se recursos eficazes já conhecidos pelos alunos, e a maioria fez uso delas para a resolução do problema proposto.

A exemplo disso, em relação às figuras 1 e 2, 44% dos alunos responderam que elas possuíam o mesmo tamanho. Solicitamos na ficha da atividade uma justificativa da resposta. Entre as justificativas, constamos uma que denota o raciocínio do aluno: *se fizer mais divisões as figuras ficarão iguais*.

Analisando as figuras 3 e 4, dos 32 alunos participantes, 62,5% concluíram que elas possuíam tamanhos diferentes e acrescentaram as seguintes justificativas:

a) *elas não são do mesmo tamanho mas têm o número de área igual,*
b) *a figura 3 tem o mesmo número de quadradinhos que a 4, mas o tamanho é menor,*
c) *o número 3 é quatro vezes menor que o 4,*
d) *a área não é a mesma.*

Observamos que o professor insistiu para que os alunos escrevessem suas conclusões, para ter argumentos à institucionalização. Esses, mesmo com dificuldades para se expressarem na escrita, redigiram suas observações. A turma mostrou um crescimento significativo quanto à resolução do problema proposto, conforme explicita a Tabela 6.

TABELA 6 - ÍNDICE DE ACERTO DE FIGURAS E DE UNIDADE DE MEDIDAS DE ÁREA.

SITUAÇÃO: respostas	SIM (%) (Resposta correta)	NÃO (%)
Fig.1 e 2 têm o mesmo tamanho	44	50
Fig.1 e 2 têm unidades de medidas diferentes.	59,5	31,5
Fig. 3 e 4 têm tamanhos diferentes	62,5	31,5
Fig. 3 e 4 têm a mesma quantidade de unidade de medida com superfícies diferentes	37,5	56,5

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: participaram da atividade 32 alunos.

Exercício 4.

O exercício 4 desta atividade objetiva a identificação da quantidade de unidades de medida de área das figuras dadas.

Neste exercício fizemos o uso da malha triangular para instigar os alunos a efetuarem, se necessária, a correspondência da quadriculada para a triangular.

4)
a) Utilizando a área da superfície do triângulo da malha como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área contém cada figura abaixo.

Figura 1

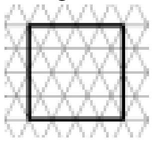


Figura 2

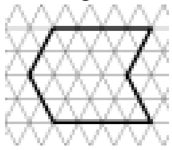
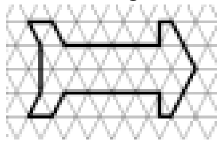


Figura 3



b) Anote aqui suas observações desta atividade.

Caso ocorra a correspondência das malhas, os alunos estarão efetuando um raciocínio matemático ao identificarem o número de unidades (triangulares) que compõe a área da figura.

Essa mudança de malha é uma escolha didática que intenciona facilitar a identificação do número de unidades de medida de área de cada figura, tendo em vista que os alunos poderão utilizar o mesmo processo da malha quadriculada.

Os alunos poderão efetuar a contagem das unidades de medida de área para constatarem o número 32 em cada figura e reconhecer a igualdade da área das três figuras, embora as formas sejam distintas. Provavelmente, não terão dificuldades para resolver o exercício, pois farão as compensações das partes de cada unidade de medida de área, necessárias para formar uma unidade inteira.

Os professores do grupo observaram que seus alunos terão dificuldades na compensação das partes da unidade de medida, mas consideram o exercício interessante devido à malha triangular.

Com a institucionalização, isto é, a fase da atividade em que o professor faz a recapitulação da estratégia e do conteúdo visto, os alunos não apresentarão provavelmente dificuldades nas questões posteriores para trabalharem unidade de medida.

Aplicação do exercício 4 aos alunos: observações e resultados.

A maioria dos 32 alunos (91%) procurou identificar o número de unidades de medida das figuras em análise. Desses 29 alunos, (56,5%) acertaram o número de unidades de medida de todas as figuras do painel e, 28% acertaram parte do exercício. Os alunos que erraram o número de unidades de medidas das figuras fizeram-no mais especificamente com relação à figura 3, tendo em vista a sua complexidade, segundo os alunos.

Constatamos que 26 alunos (81%) apresentaram justificativa para sua resposta como:

a) *todas as figuras tem a mesma área mais não tem a mesma forma,*
b) *duas metades formam um triângulo,*
c) *cada figura tem 32 triângulos,*
d) *as áreas são iguais e as formas diferentes,*
e) *a figura 1 usa a mesma quantidade de papel que a figura 2 e 3 por ter o mesmo número de triângulos da malha,*
f) *eu gostei muito da atividade, é muito interessante.*

Durante a aplicação do exercício, o professor esteve atento aos grupos observando o andamento da atividade. Solicitou-lhes a revisão da contagem das unidades de medidas de área quando o resultado apresentava-se errado.

Concluímos que na resolução desse exercício as apreensões perceptiva e operatória (DUVAL, 1994, p.125) tiveram um papel importante, pois os alunos, no primeiro momento, com a visualização, identificaram que a unidade de medida era igual em todas as figuras e, no segundo momento, 18 alunos (56,5%) utilizaram corretamente a contagem das unidades de medidas de área para chegarem à solução do problema: as figuras propostas possuem o mesmo número de unidades de medida de área.

Exercício 5.

Esse exercício visa à composição de figuras com formas diferentes e áreas iguais, ou seja, da classe de equivalência.

5) Utilizando a área da superfície do quadradinho da malha como unidade de medida, desenhe figuras que tenham formas diferentes com 12 unidades de medida de área cada uma.

O propósito desse exercício é reforçar no aluno a idéia de que podem ocorrer figuras de formas diferentes com mesma área, ou seja, que o aluno tenha a noção de figuras equivalentes quanto à área.

A grande dificuldade dos alunos na resolução de problemas está essencialmente nas idéias que ocorrem entre a apreensão perceptiva e os conceitos matemáticos em jogo. Segundo DUVAL (1988, p.61), os alunos lêem o enunciado, constroem a figura, em seguida se concentram na figura sem voltar ao enunciado.

DUVAL (1994) afirma ser a apreensão operatória, o centro das possíveis modificações de uma *figura de partida*. Nela o problema proposto deve ser trabalhado com hipóteses. Com base nos dados do problema é possível construir uma figura, com ou sem instrumento. Sem essa atitude, os alunos, provavelmente, não chegarão à interpretação discursiva da figura, ou seja, ao raciocínio que os levará à solução do problema.

Logo, a apreensão operatória permite “ver” na figura o caminho de solução, ou soluções do problema. Portanto, uma apreensão operatória é solicitada cada vez que se espera da figura que ela realize uma função heurística.

Esse exercício envolve figuras com 12 unidades de medida de área que devem permitir aos alunos construírem na malha quadriculada uma diversidade de figuras com formas diferentes, mas com a mesma medida de área.

A escolha de um número fixo de unidades tem por objetivo possibilitar ainda mais aos alunos a exploração de superfícies de formas diferentes e mesma área.

Acreditamos ser para os alunos um exercício de fácil compreensão, visto que estarão elaborando suas próprias figuras. Sendo assim, os alunos poderão compor figuras variadas com sua região interna pintada, para identificar a área composta pelas 12 unidades de medida.

Os professores do grupo argumentaram que os alunos poderão construir figuras sem se importarem com as 12 unidades de medida, mas possivelmente farão um número significativo de figuras variadas.

Aplicação do exercício 5 aos alunos: observações e resultados.

A maioria dos 32 alunos (88%) fez as figuras corretamente e pintou sua região interna. Observamos que 84,5% de alunos desenharam mais de quatro figuras, diversificando suas formas, mas com 12 unidades de medidas de área, conforme Figura 11.

Vários alunos utilizaram como modelo as figuras apresentadas nos exercícios anteriores, alterando somente o número de unidades de medida.

1. Figuras de formas diversificadas construídas com 12 unidades de medida de área.

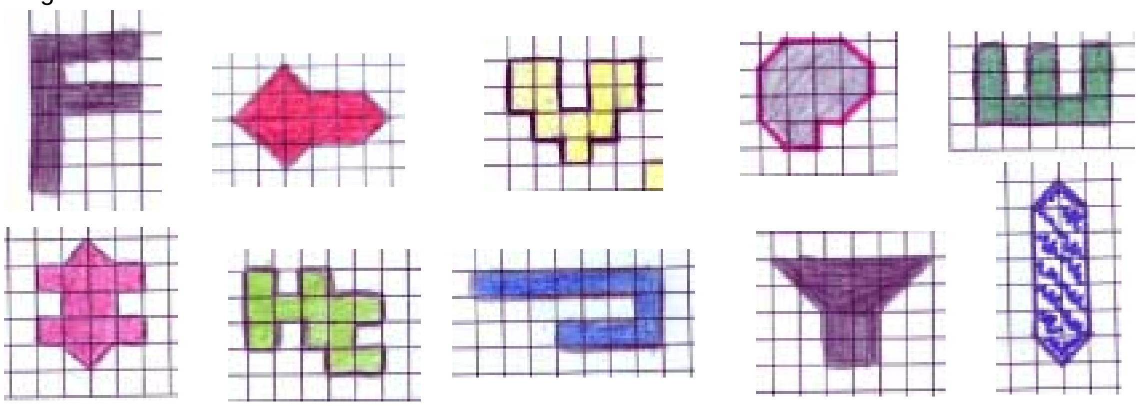


FIGURA 11 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTES ÀO EXERCÍCIO 5 DA ATIVIDADE 2.

Dos 32 alunos, 9 apresentaram desenhos com 12 unidades separadas pelos vértices, e 5 alunos propuseram figuras unidas por linhas, conforme afirmaram os professores do grupo de estudos.

O professor regente não efetuou a institucionalização no final da atividade, ficando assim algumas resoluções com erros ou sem discussão, principalmente as referentes ao número de unidade de medida de área das figuras construídas. Sendo assim, poderão surgir nos alunos dificuldades na resolução de atividades subseqüentes que exigem a identificação da equivalência de figuras quanto à área.

2. Desenhos elaborados com 12 unidades de medida de áreas separados pelo vértice de cada figura. Conforme previram alguns professores.

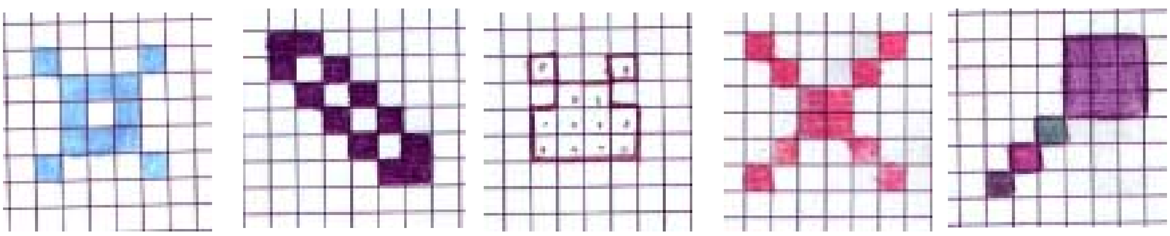


FIGURA 12 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTES AO EXERCÍCIO 5 DA ATIVIDADE 2.

Podemos observar nas Figuras 11 e 12 que os alunos contemplaram o objetivo dessa atividade com relação a figuras equivalentes; pois, nesse exercício constataram que as figuras por eles desenhadas independentemente da forma, tinham a mesma área, ou seja, o mesmo número de quadradinhos (12) em sua região interna.

4.3. ATIVIDADE 3 - Área enquanto grandeza bidimensional

Essa atividade tem por objetivo fazer com que os alunos compreendam que a medida da área depende da unidade de medida escolhida.

Procuramos trabalhar com unidades de medida variadas como o centímetro (cm), o metro (m), o centímetro ao quadrado (cm²), a polegada e a “lua”, para determinação da medida de área das figuras propostas na atividade.

Os instrumentos para a verificação de medidas que os alunos poderão utilizar serão o esquadro e as réguas: graduada, de polegadas e uma com unidades em “luas”, medindo cada lua 1,5 cm.

A atividade se desenvolve em exercícios divididos em itens que denotam uma seqüência de questionamentos.

Exercício 1.

Esse exercício visa levar os alunos a efetuarem a multiplicação da medida do comprimento pela medida da largura da figura em estudo, ou seja, a utilização do princípio multiplicativo. Tem como objetivo fazer também com que reconheçam a necessidade de considerar a unidade de medida no processo de resolução para a determinação da área da figura.

O exercício foi desenvolvido apoiando-se nas seguintes etapas:

1) a) Construa abaixo, com régua e esquadro, um retângulo com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.
b) Quadricule a região interna desse retângulo e determine a medida de sua área.
c) Que medida você encontrou para essa área?
d) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por um quintal retangular com 8 m de comprimento e 4 m de largura?
e) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por uma reserva indígena com 8 Km de comprimento e 4 Km de largura?

Itens (a) e (b)

Acreditamos que todos os alunos construam o retângulo, conforme o solicitado no item (a), e que o quadriculem com quadrados de 1 cm ou 0,5 cm de lado por tratar-se de malha já utilizada em atividades anteriores.

O tipo da figura bem como as medidas solicitadas foram escolhas didáticas, cujo objetivo é permitir uma boa visualização dela e do quadriculado, conforme exemplos na Figura 13.

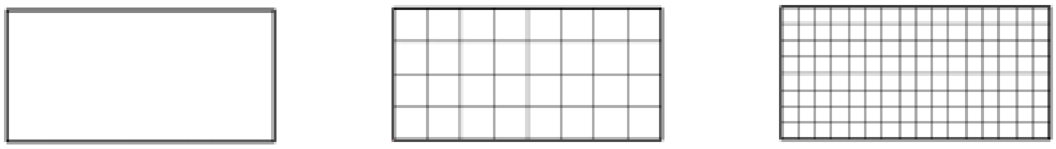


FIGURA 13 – CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO ITEM A E B COM MALHAS DE 1 CM E 0,5 CM

Acreditamos que os alunos apresentem dificuldades no manuseio dos instrumentos, por ser o primeiro momento da seqüência de atividades em que utilizam a régua, o esquadro e o sistema métrico para desenhar o retângulo.

Contudo, como o uso da malha na atividade anterior pode tornar-se instrumento para a análise do problema apresentado nesse exercício, subsidiando as estratégias ligadas à aprendizagem da medida de área e da identificação da área, acreditamos que os alunos ficarão atentos à medida do quadriculado da atividade anterior.

Segundo os professores do grupo, os alunos poderão recorrer às malhas quadriculadas da atividade anterior, mas, acreditam que eles poderão elaborar uma malha sem uma medida padrão para o quadriculado.

Aplicação aos alunos: observações e resultados.

Participaram desta atividade 27 alunos.

Na análise dos resultados, constatamos que desses 27 alunos, 74% efetuaram a construção do retângulo com as medidas dadas.

Durante o desenvolvimento da atividade os alunos estavam com dificuldades para manusear o esquadro com a régua. Isso confirma as conclusões dos professores do grupo segundo as quais os alunos poderiam apresentar um certo desconhecimento quanto ao uso desse instrumento. Por isso, consideramos como correta, uma construção mesmo sem o rigor matemático, ou seja, a que mais se aproximou das medidas indicadas no enunciado, 4 cm e 8 cm.

Alguns alunos tiveram também dificuldades em utilizar o quadriculado padrão. Dos 15 alunos (56%) que acertaram o exercício, 10 utilizaram o quadriculado de 1 cm e 5 alunos o quadriculado de 0,5 cm e, conforme observações dos professores do grupo, 12 alunos (44%) não mantiveram um padrão para o quadriculado da figura.

Durante a aplicação da atividade, o professor orientou os alunos na construção do retângulo com o uso do esquadro e não discutiu de imediato a necessidade de uma medida padrão para a aferição da área.

Tendo em vista a demora do atendimento do professor aos alunos, os grupos trocaram idéias. Isso levou a maioria deles a fazer correções em suas resoluções referentes à unidade de medida de área até então apresentada sem padronização do quadriculado na figura.

Item (c)

No desenvolvimento do item (c), os alunos poderão trabalhar além da unidade de medida cm o cm^2, diferenciando, assim, medida de comprimento de medida de área.

Esperamos que o professor evidencie para os alunos as diferenças entre as unidades de medida, explicitando-lhes que a unidade de medida de comprimento é dada em cm, m ou km.e, a unidade de medida de área é dada em cm^2, m^2 ou km^2.

Nesse exercício, os alunos poderão responder que o retângulo possui 32 quadradinhos de 1 cm ou 128 quadradinhos de 0,5 cm e, como resposta para a medida da área, o valor será de 32 cm^2.

Aplicação aos alunos: observações e resultados.

Esse exercício, que solicitou aos alunos a identificação da área e da medida utilizada, obteve dos 27 alunos participantes, respostas significativas para essa seqüência de atividades.

Constatamos que 20 alunos (74%) acertaram a resolução do problema. Desses, 4 responderam o expoente indicador da unidade de medida de área por extenso, conforme Figura 14.

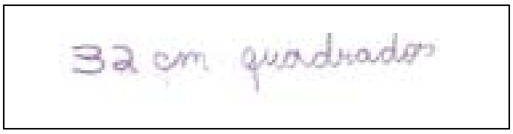


FIGURA 14 – PROTOCOLO D E ALUNO PARA RESPOSTA DO PROBLEMA EM CM² .

Esse fato permitiu-nos levantar duas hipóteses:

a) o aluno considerou a palavra “quadrado” por observar o quadriculado utilizado no item anterior;
b) o aluno estaria com dificuldades no registro escrito cm² da unidade de medida de área porque não utilizava ou desconhecia até então essa medida de área.

Itens (d) e (e)

Com as outras unidades de medida, m e km, constatamos também a mesma forma de respostas escritas por extenso, dos mesmos alunos para as questões (d) e (e), conforme figura15.

FIGURA 15 - PROTOCOLOS DE ALUNOS PARA RESPOSTA DO PROBLEMA EM M² E KM²

Nesse exercício, o professor desenhou na lousa um retângulo e desenvolveu, a partir de então, um raciocínio referente à unidade de medida. Em seguida, revestiu o retângulo com uma malha quadriculada com 1 cm e questionou os alunos quanto ao número de quadradinhos da malha no retângulo. Obteve, por unanimidade, a resposta correta.

Em seguida, perguntou aos alunos o número de quadradinhos da figura por eles desenhada na ficha de resolução da seqüência. Obteve uma diversidade de respostas como: 32, 64, 128, 98, 30, 56 entre outras. Essas respostas explicitaram as diferentes malhas utilizadas pelos alunos.

O professor, dando continuidade ao processo de resolução, desenvolveu, na lousa, a determinação da medida de área da figura em estudo, mas sem falar em cm². Mostrou aos alunos que estaria utilizando, naquele momento, a régua e o quadriculado, para efetuar o seguinte raciocínio: dividiria a medida do comprimento em oito partes e faria o mesmo procedimento para a medida da largura de 4 cm, o que totalizaria 32 quadradinhos na figura, nesse caso usaria o quadriculado de 1 cm como lado de cada quadradinho. Explicitou ser correta também a resposta 128 quadradinhos para o caso desses possuírem a sua unidade igual a 0,5 cm para cada lado.

Concluiu sua exposição diferenciando a unidade de medida de comprimento, que nesse caso, seria o cm, e a unidade de medida de área, o cm² e obteve a observação de um aluno, que expressou em voz alta: *é só trocar o quadradinho e escrever cm²*. Outro aluno argumentou que seria mais fácil multiplicar 4 por 8 para chegar à resposta 32. O professor, aproveitando essa resposta, perguntou-lhe *32 o quê?*. Alguns alunos responderam-lhe que eram cm e outros, cm². O professor questionou-os novamente como seria a escrita da unidade de medida de área. A maioria dos alunos respondeu-lhe “cm²”.

Após essas explanações, os alunos continuaram a resolução do exercício. Os resultados dessa resolução estão explícitos na Tabela 7, onde podemos observar um desempenho significativo desses alunos relacionado ao cálculo da medida de área e à unidade de medida de área.

TABELA 7 - ÍNDICE DE ACERTOS PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA E REGISTRO DA UNIDADE DE MEDIDA.

SITUAÇÃO: ACERTOS	ALUNOS	
	Nº	%
Cálculo da medida de área do retângulo (contagem dos quadradinhos)	20	74
Registro da unidade de medida de área (unidade da malha)	17	63

FONTE:ficha de resolução dos alunos.
NOTA: participaram desta atividade 27 alunos.

Observamos nas produções dos alunos que somente 26% deles apresentaram dificuldades na construção do retângulo e seu quadriculado, o que, provavelmente, levou-os ao erro no cálculo da medida de área.

Com os exercícios (d) e (e) esperamos que os alunos cheguem à fórmula para o cálculo da medida da área de uma superfície retangular, multiplicando a medida do comprimento pela medida da largura.

Acreditamos que não terão dificuldades em responder para o item (d) 32 m^2 e, para o item (e) 32 km^2 a medida de área da superfície determinada, tendo em vista a unidade de medida de área transformada em metros e quilômetros, respectivamente.

Por essa atividade possuir um certo grau de complexidade, a presença do professor nas resoluções dos alunos será fundamental para esclarecimentos quanto à conversão do quadradinho para metro e quilômetro. Esperamos também que, além da presença do professor nos grupos, ele faça a institucionalização do conteúdo e da estratégia de resolução, com exemplos e discussões.

Aplicação do exercício itens (d) e (e) aos alunos: observações e resultados.

Observamos que 44% dos 27 alunos participantes acertaram o exercício (d) e 37%, o (e). O restante dos alunos encontrou o valor 32 como resposta, mas não utilizou a unidade de medida de área corretamente ou não a escreveu.

Segundo BELLEMAIN e LIMA (2002, p. 27), os erros cometidos com mais freqüência estão ligados à expressão da medida de área de uma superfície, cujos comprimentos dos lados são dados em metros e a resposta, em metros ou mesmo em centímetros, ao invés de metros quadrados, ou seja, mantém a unidade de comprimento para expressar a unidade de medida de área.

Com relação à resposta em km^2, observamos que o índice de acertos foi menor ao que se referia m^2, mas o índice de respostas parcialmente corretas foi maior, conforme a Tabela 8.

Observamos que os erros dos 55% de respostas parciais confirmam as observações de BELLEMAIM e LIMA, ou seja, os alunos escreveram para a medida de área do item (e) km ou cm^2. Podemos inferir que a escrita da unidade de medida é para o aluno um obstáculo, tendo em vista que efetuaram o cálculo da medida de área.

TABELA 8 - ÍNDICE DO REGISTRO DA UNIDADE DE MEDIDA

SITUAÇÃO: UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA	ALUNOS	
	Nº	%
UNIDADE DE MEDIDA M² ITEM (D)		
32 m² (resposta correta)	12	44
32 com a unidade de medida incorreta	12	44
32 sem unidade de medida de área	3	12
UNIDADE DE MEDIDA KM² (ITEM E)		
32 Km² (resposta correta)	10	37
32 com a unidade de medida incorreta	15	55
32 sem unidade de medida de área	1	4
Em branco	1	4

FONTE: fichas de resolução dos alunos
NOTA: participaram dessa atividade 27 alunos

Contudo podemos inferir que a estratégia dos alunos para o cálculo da medida de área está centrada na multiplicação da medida do comprimento pela medida da largura da figura em estudo, sem considerar a unidade de medida utilizada no problema proposto. Fato esse que nos levou a elaborar o exercício 2.

Exercício 2.

O objetivo desse exercício é fazer com que os alunos determinem a área de uma figura com unidades de medidas variadas, iniciando o raciocínio com o cm² para, gradualmente, chegar ao uso da polegada e da “lua”.

Para o desenvolvimento das atividades, o professor deverá apresentar aos alunos as réguas com as unidades de medida diferentes, ou seja, uma em centímetro, outras em polegada e “lua”.

A escolha do nome “lua” para essa medida tem como objetivo permitir aos alunos ampliarem seus conhecimentos em relação à unidade de medida, pois, esse nome não é uma unidade corrente.

Para a régua em polegadas, o professor deverá orientar os alunos quanto à diferença que existe entre centímetro e polegada.

Exercício 2
a) Meça os lados do retângulo abaixo com uma régua em cm e calcule sua medida de área.

Nessa etapa do exercício, esperamos que os alunos explicitem as medidas dos lados do retângulo em 7,5 cm e 4,5 cm. Multiplicando essas medidas, poderão chegar ao resultado 33,75 cm² para a sua medida de área.

Contudo, devido à margem de erro que o material poderá apresentar, consideraremos como corretos também os resultados que apresentarem uma diferença de 0,5cm na medida do comprimento e/ou da largura.

A escolha de medidas com números decimais deve permitir aos alunos ampliar os conhecimentos adquiridos em atividades anteriores.

Tendo em vista a complexidade da situação, esperamos que o professor intervenha com orientações que possam esclarecer aos alunos quanto ao uso dessa unidade de medida e que, no final da atividade, faça a institucionalização envolvendo unidades de medidas variadas, como também discuta as resoluções obtidas pelos alunos.

Aplicação do item (a) aos alunos: observações e resultados.

A análise dos resultados revela que 19 alunos (70%) dos 27 que participaram da atividade expressaram corretamente as medidas dos lados do retângulo dado, mas, desses, somente 5 alunos (19%) acertaram o cálculo da medida de área.

Segundo os observadores, a maioria dos alunos iniciou o cálculo, mas sem sucesso na resolução, conforme a análise prévia dos professores do grupo.

Durante a realização desse exercício, o professor foi bastante solicitado pelos grupos e, todos o chamavam ao mesmo tempo, mostrando ansiedade na tentativa de resolver o exercício. Na impossibilidade do professor em atender a todos, os alunos começaram a brincar, comprometendo assim o andamento da atividade.

Para retomar a atividade e a atenção dos alunos, o professor efetuou, na lousa, a multiplicação com dois números decimais. Em seguida, pediu para que eles fizessem o mesmo.

Devido à agitação na classe, constatamos que poucos participaram da discussão, mesmo estimulada pelo professor durante a exposição do conteúdo.

Exercício 2 item (b)

b) Você recebeu uma régua diferente das que conhece. Em vez de ter centímetros como unidade ela tem polegadas.
Utilizando a régua em polegadas determine a medida dos lados do retângulo acima e calcule a medida de sua área, considerando como unidade de área a superfície de um quadrado de lado medindo 1 polegada e representando por polegada ² (pol^2).

O objetivo desse exercício é a percepção da possibilidade de utilizar o mesmo procedimento do exercício do item (a) para o cálculo da medida de área, com a substituição do cm pela pol.

Esperamos, portanto, que o aluno utilize a ferramenta unidade de medida centimetrada e a substitua no mesmo contexto pelas unidades de medida em “polegada” e em “lua”.

O retângulo escolhido representa medidas fracionárias ($3\,{}^{1}\!/_{8}$ pol e $1\,{}^{7}\!/_{8}$ pol) e medidas inteiras (3 luas e 5 luas). Os alunos poderão perceber que o número associado à figura, tanto para a largura e o comprimento quanto para a área, depende diretamente da unidade de medida escolhida.

O trabalho sobre as configurações (mudança de cm para polegada e para lua) fica a cargo do processo de construção, que por meio de instrumentos pode ser trabalhada com um modelo, nesse caso, pegar o cm e substituir pela polegada ou lua. No processo, as ações e os resultados observados associam-se aos objetos matemáticos representados.

Esperamos que o professor acrescente idéias para ajudar o aluno a utilizar a polegada no cotidiano, como, por exemplo, fazer comentários sobre a tela da televisão e muitos outros objetos como canos, ferros, brocas entre outros que têm a medida representada em polegadas.

Esperamos também que os alunos tenham um conhecimento da régua em polegada antes de iniciarem o exercício e que, no momento da aplicação, o professor faça comparações com a régua comum, a centimetrada, tendo em vista ser esta bastante conhecida pelos alunos, para que percebam a diferença entre as unidades de medida.

Segundo SILVA (1997), os alunos têm dificuldades em operar com números representados na forma fracionária e/ou decimal, mas, esperamos que com as intervenções do professor para minimizar as dúvidas, as dificuldades serão menores.

Uma possível resolução desse exercício seria efetuar a multiplicação de $3\,{}^{1}\!/_{8}$ pol por $1\,{}^{7}\!/_{8}$ pol, para obter $5\,{}^{55}\!/_{64}$ pol² como medida de área do retângulo dado.

Acreditamos que os alunos poderão chegar a esse resultado após a institucionalização da noção de polegada como unidade de medida de comprimento.

Aplicação do exercício item (b) aos alunos: observações e resultados.

Na aplicação desse exercício, 03 alunos (11%) grafaram a medida dos lados do retângulo dado, $3\,{}^{1}\!/_{8}$ pol por $1\,{}^{7}\!/_{8}$ pol, o que gerou uma dificuldade para o cálculo da medida de área em polegadas. Sendo assim não obtivemos acertos para o problema, confirmando a existência de uma dificuldade no cálculo com frações.

Dos alunos restantes, 10 (37%) iniciaram os cálculos, mesmo com as medidas dos lados erradas, mas, sem sucesso em operar com números fracionários e, 17 (63%), dos 27 alunos que participaram da atividade, não chegaram a responder a questão.

O professor fez alguns questionamentos para os alunos durante a realização da atividade conforme explicita, a seguir, a transcrição do diálogo:

Reconheça **P** para professor e **A** para aluno. P- A régua de polegadas é igual a de cm? A- Não. P- Qual das réguas (lua e cm) a unidade de medida é maior? A- Lua (O professor utilizando a régua em polegadas para medir a mão de um aluno perguntou:) P - Encontrei a medida 3 o quê? A- 3 polegadas. P- 1 cm está dividido na régua em 10 pedacinhos. Uma lua está dividida em 3 pedacinhos. (O professor, utilizando a régua centimetrada, perguntou:) P- 1cm e 3 pedacinhos como posso representar? (Somente uma aluna **(R)** respondeu): A- 1 cm e 3 milímetros, que escrevo 1 vírgula 3 centímetros. (O professor registrou na lousa 1,3 cm e fez um desenho como se fosse a régua em polegadas, dividindo-a em oito partes iguais. Em seguida, perguntou aos alunos): P - Como posso escrever o registro dessa informação? (Neste momento, estava se referindo ao registro de $1\frac{3}{8}$ polegadas. Recebeu como resposta *1 polegada e 3 pedacinhos de polegada*.)

Não obtendo outra resposta, o professor explicou *que a unidade polegada na régua representava uma divisão em oito pedacinhos iguais e que cada pedacinho correspondia a* $1/8$ *polegadas. Tinham-se, portanto, 3 pedacinhos e uma polegada inteira. A resposta seria então* $1 + 3x1/8 = 1\frac{3}{8}$ *polegadas.*

Após todos esses questionamentos, os alunos voltaram a discutir no grupo a possível resolução da questão proposta na seqüência. Os resultados obtidos estão explicitados na Tabela 9.

TABELA 9 - ÍNDICE DO REGISTRO DA UNIDADE DE MEDIDA EM POLEGADA E DO CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

SITUAÇÃO: Unidade de medida em polegadas	ALUNOS Nº	ALUNOS (%)
Registro da medida de área	12	44
Acertos da medida de área	3	11
Cálculo da medida de área	10	37
Acertos do cálculo da medida de área	-	-

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: Participaram dessa atividade 27 alunos.

Devido à complexidade das ferramentas necessárias (uso de frações mistas), consideramos o índice de 11% de acertos relevante, como também os 37% de participantes que tentaram calcular a medida de área da figura em polegadas. Concluímos que o exercício é viável para a seqüência, mas que as ferramentas precisam ser melhor trabalhadas.

Admitimos que nesse momento o trabalho com unidades inteiras poderia ter evitado as dificuldades, bem como ter aceito a sugestão dos professores que analisaram o grau de complexidade para seus alunos.

Não houve correção do exercício para amenizar o desinteresse dos alunos na resolução do problema e apreensão da nova ferramenta.

Exercício 2

c) Você recebeu outra régua diferente das que conhece. Em vez de ter centímetro ou polegadas ela tem luas. Com esta régua determine a medida dos lados do mesmo retângulo utilizado no item a e b e calcule a medida de sua área, considerando como unidade de área a superfície de um quadrado de lado medindo 1 lua e representando por lua ^{2}.

O item (c) do exercício 2 objetiva a identificação da área de uma figura com unidade de medida expressa em lua (cf. anexo V).

A resolução será feita com a régua em luas para fazer conhecer unidade de medida diferenciada da anteriormente estudada. O nome da régua e sua medida foram escolhas didáticas, já justificadas por nós anteriormente.

Por se tratar de uma multiplicação com números inteiros: 5 luas por 3 luas, acreditamos que os alunos não apresentem dificuldades em chegar à resposta, 15 luas^2, com relação à medida da área do retângulo dado.

Aplicação do exercício item (c) aos alunos: observações e resultados.

Acreditamos que, devido ao insucesso do exercício anterior, houve um desinteresse por parte dos alunos em continuar a atividade. Esse fato deveria levar o professor a fazer uso de uma estratégia diversificada para que o aluno retomasse o engajamento com a atividade e buscasse a resolução do problema. Fato esse que não ocorreu, segundo nossas observações e resultados obtidos.

Constatamos que cinco alunos dos 27 expressaram corretamente a unidade de medida em luas, com o resultado esperado de 15 luas^2. Os 22 alunos restantes não responderam a questão.

Podemos inferir que a prática do professor deve se constituir de métodos diversificados para possibilitar um aprendizado que permita a solução de problemas diversos. Caso não ocorra essa preocupação didática, a apreensão do aluno quanto ao conteúdo trabalhado é prejudicada e gerará problemas na resolução de atividades posteriores.

Tendo em vista a complexidade de certos conteúdos, a metodologia do professor, fundamentada por reflexões sobre sua prática, deve estar revestida de orientações teóricas e metalinguagens que propiciem aos alunos o resgate de conteúdos e o repasse de novas idéias.

Desta forma, a presença do professor durante todo o processo ensino-aprendizagem é fundamental para minimizar dúvidas dos alunos e instigá-los a um raciocínio adequado, principalmente em situações complexas como se apresentou nessa atividade 3.

Vale ressaltar que o professor não institucionalizou o conteúdo dessa atividade no final de sua execução. Os alunos apresentavam-se indisciplinados, provavelmente por se tratar de final de período de aula. Sendo assim, o conteúdo não se familiarizará para os alunos, conseqüentemente, ficarão lacunas, que possibilitarão dificuldades nas questões posteriores.

4.4. ATIVIDADE 4 - Distinção entre perímetro e medida de área

Para DOUADY e PERRIN-GLORIAN (1989), o jogo entre os quadros geométricos e numéricos faz avançar o conhecimento dos alunos com relação à noção de área, à medida de área e aos números e provocar um certo efeito sobre a dissociação área-perímetro. Contudo, como pudemos observar nos resultados de pesquisas anteriores, esse processo tem sido ainda insuficiente para modificar as concepções de alguns alunos quanto à área e perímetro.

O objetivo dessa atividade é analisar figuras de mesmo perímetro que tenham medidas de área e formas diferentes e, consolidar, por meio da "lição de casa", os conhecimentos adquiridos em sala.

A atividade visa ainda à percepção e apreensão do conhecimento que cada aluno adquiriu com relação ao conteúdo estudado, através da correção individual e coletiva dos exercícios. Para tanto, é composta por um exercício e uma lição de casa, a fim de possibilitar aos alunos e professores um espaço de tempo maior para discussões mais aprofundadas sobre o conteúdo na fase de institucionalização e familiarização da mudança de *status* do objeto matemático.

O material a ser utilizado para a resolução das situações-problema constitui-se de:

a) uma placa de isopor contendo uma folha A_4 com uma malha quadriculada de 1cm, colada em sua base,
b) três pedaços de barbante medindo 18cm de comprimento cada um na cor laranja,
c) alfinetes na quantidade adequada para fixação do barbante na placa,
d) uma régua graduada,
e) ficha de lição de casa impressa.

Elaboramos esta atividade à luz da teoria de DUVAL (1993, p. 42), que enfatiza a necessidade da conversão de registros de representação: passagem do objeto concreto para a sua representação na folha de papel.

Segundo DUVAL, dado o enunciado de um problema, pode-se esboçar a figura geométrica, que é âncora das hipóteses (conversão da representação lingüística/natural para a representação figural) e assim, realizar as operações matemáticas (conversão para o registro algébrico ou aritmético) definidas pelo enunciado.

Na construção/apropriação de um conhecimento, o termo representação vincula-se às concepções prévias que o aluno tem sobre os conhecimentos em pauta. Neste processo, o professor deve ter por objetivo o ensino-aprendizagem, no momento da socialização do conhecimento universal sistematizado. Pode-se assim partir das representações/ concepções prévias dos alunos, transformá-las e chegar ao saber científico.

Para que isso ocorra, exige-se o conhecimento das representações internas, externas e semióticas (de sentido) e um grande trabalho pedagógico posterior para mudá-las. Assim, a função do professor é mostrar uma nova maneira de se perceber o mundo - conhecimento universal sistematizado - com instrumentos *a priori* lógicos e adequados ao nível de escolaridade do aluno.

Logo, compreensão do objeto em estudo se refere à atribuição de significado às linguagens utilizadas no processo, em que o objeto é interpretado através dos registros de representação. Na nossa atividade, procuraremos então evidenciar por meio da manipulação do barbante a existência de várias figuras de formas distintas mas com mesmo perímetro.

Exercício 1

Você recebeu três pedaços de barbante, uma placa quadriculada e alfinetes para fixação.

a) Construa três figuras de formas diferentes usando o barbante e o alfinete para fixá-lo na placa.

b) Desenhe no espaço abaixo o contorno das figuras construídas. Identifique suas figuras numerando-as.

c) Qual a soma das medidas dos lados dessas figuras construídas?

d)Qual a medida da área das superfícies que as figuras construídas determinam?

e) Anote aqui seus comentários sobre a atividade.

Vale ressaltar que uma breve definição de perímetro completa o enunciado do exercício. “Chamamos de perímetro de um polígono a soma das medidas de seus lados”, para que os alunos percebam que figuras de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes.

O material didático é de fácil manipulação para permitir ao aluno várias construções diferentes e o cálculo da medida da área de cada figura construída, pois tem o quadriculado como uma das ferramentas disponível para a resolução.

Nossa intenção nesse exercício é fazer com que os alunos façam a conversão de registros explicitados acima: passagem da manipulação para a folha de papel.

Esperamos ainda que os alunos construam as três figuras solicitadas com formas diferentes e que utilizem o alfinete para identificar o vértice dessas figuras, que podem ser retângulos, triângulos retângulos e outras figuras geométricas para diferenciar perímetro e área.

Quanto ao cálculo do perímetro, esperamos que os alunos encontrem um valor próximo a 18cm, medida do comprimento dos barbantes entregues na atividade para subsidiar a composição de figuras.

Acreditamos que os alunos, no início da atividade, somente com a visualização não relacionem as medidas iguais dos barbantes com o perímetro; sendo assim, eles operam com construções das figuras. Mas, antes da institucionalização do exercício, constatarão que se a medida do comprimento dos barbantes são iguais, as figuras construídas terão o mesmo perímetro.

Contudo, consideraremos como resposta correta resultados entre 17cm e 18cm de perímetro, devido às possíveis dificuldades na fixação das pontas dos barbantes com o alfinete na placa de isopor.

Para o cálculo da medida de área, tendo em vista que os alunos poderão construir figuras com contorno de acordo com o quadriculado, acreditamos que eles não terão dificuldades em resolver a questão, por ser o quadriculado uma ferramenta já utilizada em exercícios anteriores. No caso de ser um triângulo, ocorrerá uma certa resistência na resposta, pois a unidade de medida deverá ser bem observada devido a sua fracionalização.

Os alunos têm à disposição duas estratégias: contagem ou medida com a régua. Assim, consideraremos como resposta correta da medida de área das figuras construídas, aquelas que estiverem de acordo com as respostas na ficha de resolução, como também tendo em vista que as figuras poderão estar representadas sob formas variadas.

Esperamos que os alunos apresentem comentários sobre figuras com perímetros iguais, independentes da forma escolhida e de sua medida de área.

Caso os comentários não ocorram, o professor deverá intervir e instigar os alunos a discutirem o problema, a resolução possível e a solução a que chegaram, como também fazer uma síntese do conteúdo para a familiarização e apreensão do objeto em estudo.

Aplicação do exercício 1 aos alunos: observações e resultados.

A aplicação dessa atividade foi bastante proveitosa no início do processo de construção, tendo em vista o estímulo causado pelo material nos alunos e professor.

O professor solicitou aos alunos para construírem na placa de isopor e folha quadriculada três figuras de formas diferentes, com o uso dos barbantes e alfinetes.

Nessa etapa da atividade, a participação dos alunos foi expressiva, mas pouco criativa, com relação às formas das figuras, conforme mostra o protocolo abaixo. Em nosso encontro com os professores, eles esperavam uma maior criatividade dos alunos, que na nossa opinião, produziria maior diversidade de formas.

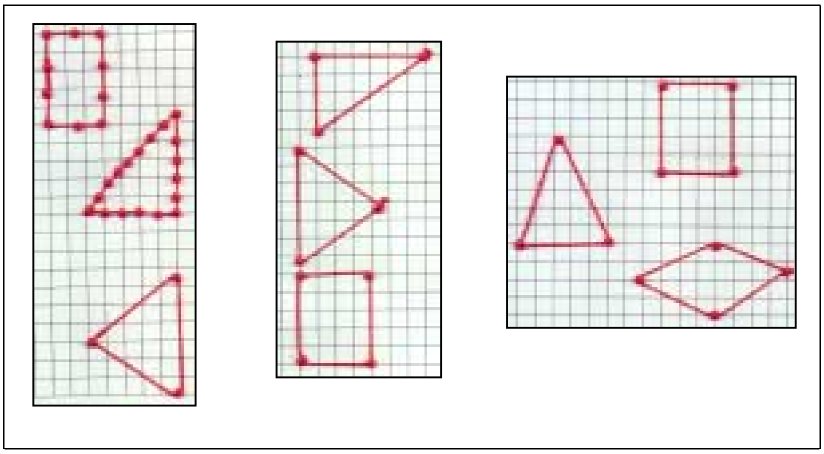


FIGURA 16 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTE A 1ª ETAPA DA ATIVIDADE 4

Em seguida, o professor solicitou aos alunos que desenhassem no papel quadriculado distribuído o contorno das figuras construídas com o barbante e que identificassem as mesmas através de números.

Nessa etapa os alunos não demonstraram dificuldades para desenvolver o solicitado e a participação e o envolvimento foram totais.

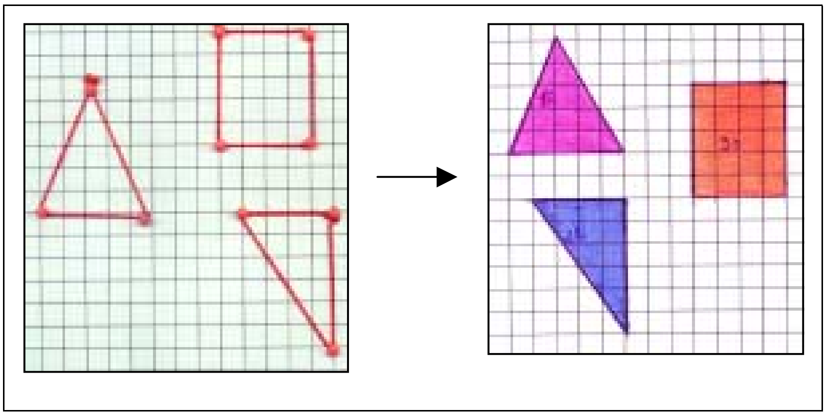


FIGURA 17 - PROTOCOLOS DE UM GRUPO DE ALUNOS REFERENTES A 2ª ETAPA DA ATIVIDADE 4

Com relação à 3ª etapa do processo de resolução - soma das medidas dos lados das figuras desenhadas - os alunos já começaram a apresentar dificuldades. Dos 30 alunos participantes, 13 (43,5%) apresentaram resposta correta, 07 (23,5%) responderam parcialmente correto e o restante não chegou a responder o quesito. Consideramos parcialmente correto o cálculo de pelo menos uma das figuras construídas.

Na 4ª etapa - medida da área das superfícies das figuras construídas – o índice de acertos diminuiu, mas o de respostas parcialmente corretas aumentou de 23,5% para 40%. Observamos que o número de alunos interessados em resolver a questão havia crescido.

Essas quatro etapas do processo de construção desse conhecimento - distinção entre perímetro e área - estão resumidas na Tabela 10 abaixo.

TABELA 10 - CONSTRUÇÃO DE FIGURAS E CÁLCULO DO PERÍMETRO E DA ÁREA.

SITUAÇÃO: 30 alunos participantes	ALUNOS (30)			
	Sim	%	Parcial	%
Desenhou as figuras na folha	30	100	-	-
Unidade de medida correta no cálculo de perímetro.	16	53,5	07	23,5
Unidade de medida correta no cálculo de área	13	43,5	14	46,5
Identificou mesmo perímetro com áreas diferentes	-	-	10	33,5
Calculou o perímetro das figuras	19	63,5	05	17
Acertou os cálculos do perímetro	13	43,5	07	23,5
Calculou a medida da área das figuras	14	46,5	04	13
Acertou o cálculo da medida de área	10	33,5	08	27

FONTE: ficha de resolução dos alunos.

A 5ª etapa do processo, solicitada no item (e) - discussão sobre a atividade vivida naquele momento - foi fundamentada nas dificuldades encontradas pelos alunos durante a realização desse exercício 1. Foram:

a) a construção de um triângulo não retângulo dificultou o cálculo da medida de área;

b) confusão entre área, unidade de medida de área e perímetro;

c) dificuldades para registrar a unidade de medida de área;

d) dificuldades para calcular a medida da área do quadrado em posições diferentes, conforme Figura abaixo.

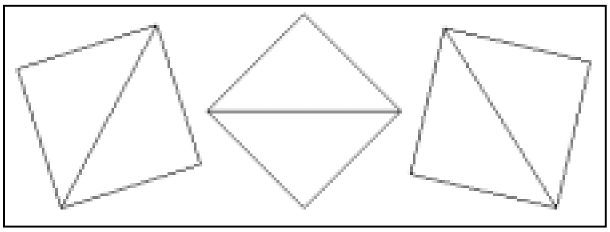


FIGURA 18 - APRESENTAÇÃO DO QUADRADO EM POSIÇÕES VARIADAS

Na fase de institucionalização, o professor não fez a síntese do conteúdo, mas discutiu sobre o tamanho dos barbantes e a diferença entre perímetro e área. Os alunos e o professor concluíram, que existem figuras de perímetros iguais e áreas diferentes.

O objetivo da seqüência estava sendo atingido, pois, dos 30 alunos participantes, 77% utilizaram a unidade de medida adequada para o cálculo do perímetro; 66,5% acertaram o cálculo do perímetro e 60,5% acertaram o cálculo da medida de área, mesmo parcialmente; ou seja, os alunos acertaram, pelo menos, o cálculo do perímetro e da medida de área de uma das figuras do exercício.

Para a familiarização da ferramenta-objeto (equivalência e diferenciação entre perímetro e área de figuras planas), solicitamos aos alunos que respondessem aos exercícios da **lição de casa I**. Essa lição objetiva consolidar os conhecimentos adquiridos por meio das atividades realizadas em sala de aula, como também verificar a apreensão do conteúdo em questão.

Com essa atividade, o professor poderá perceber o grau de conhecimento dos alunos, com as correções coletivas, uma vez que essas possibilitam a socialização das resoluções e soluções do problema.

DOUADY (1986) enfatiza a necessidade da familiarização para constatar se o objeto anteriormente estudado seria reutilizado como ferramenta nas atividades propostas. Sendo assim, a construção do retângulo teve como finalidade possibilitar o desenvolvimento do raciocínio nessa atividade, por se tratar de uma figura já conhecida pelos alunos de 5ª série.

Acreditamos que os alunos que acompanharam o trabalho desenvolvido até essa etapa, comprometidos com o seu aprendizado, terão condições de fazer essa lição sem o auxílio do professor.

Esperamos que essa atividade evidencie para os alunos e professor, além de conhecimentos não observados em sala, a necessidade de se trabalhar outras atividades cujo objetivo é consolidar a aquisição dos novos conhecimentos.

Esperamos também que todos os alunos façam a atividade e que o professor a conclua com a institucionalização do conteúdo afim de instigar os alunos a utilizarem o retângulo como subsidio para a configuração da figura de partida em situações posteriores.

4.5. LIÇÃO DE CASA 1.

1) Desenhe no papel quadriculado, cinco retângulos que tenham perímetros iguais a 20 unidades e complete a tabela abaixo.

Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento e a superfície do quadradinho como unidade de medida de área.

	Medidas			
	Comprimento	Largura	Perímetro	área
Retângulo A				
Retângulo B				
Retângulo C				
Retângulo D				
Retângulo E				

Com o uso do papel quadriculado, os alunos poderão construir retângulos de mesmo perímetro e identificar o comprimento, a largura e a medida de área das figuras construídas. Em conseqüência desse processo, acreditamos que observarão, provavelmente a existência de figuras com mesmo perímetro, mas medidas de áreas diferentes. Ou seja, distinção entre os conceitos de perímetro e de área.

O **exercício 1** da lição de casa objetiva a construção de retângulos diferentes com perímetros iguais.

Esperamos que os alunos não considerem como figuras diferentes os retângulos cujos lados têm mesma medida e que estão em posições diferentes.

Quanto à identificação da medida do perímetro e da área, acreditamos que os alunos ainda confundirão o perímetro com a medida da área; mas esperamos que esse fato seja revisto e corrigido na institucionalização da atividade.

Para calcular a medida de área e perímetro, os alunos poderão utilizar a régua para identificar a medida de 1 cm do lado do quadradinho da malha, como também o comprimento e a largura da figura. Com esse processo de verificação, esperamos que surjam por parte dos alunos soluções possíveis quanto ao perímetro, conforme explicita a figura abaixo. Poderão também ocorrer retângulos com medidas iguais em posições diferentes.

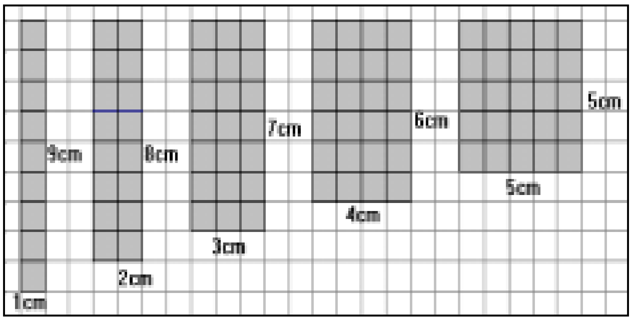


FIGURA 19 - POSSÍVEIS CONSTRUÇÕES DE RETÂNGULOS PELOS ALUNOS PARA O EXERCÍCIO 1 DA LIÇÃO DE CASA

Consideraremos como resposta adequada, os resultados explicitados na Tabela 11, com ou sem a unidade de medida.

TABELA 11 - POSSÍVEIS RESPOSTAS DOS ALUNOS PARA O EXERCÍCIO 1 DA LIÇÃO DE CASA.

FIGURA	MEDIDAS			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
Retângulo A	1cm	9cm	20cm	$9cm^2$
Retângulo B	2cm	8cm	20cm	$18cm^2$
Retângulo C	3cm	7cm	20cm	$21cm^2$
Retângulo D	4cm	6cm	20cm	$24cm^2$
Retângulo E	5cm	5cm	20cm	$25cm^2$

Quando preencherem o quadro com retângulos iguais, os alunos perceberão que, se seus perímetros são iguais e a medida das áreas também são iguais, os retângulos são do mesmo tamanho e, assim, construirão novas figuras mas com outras medidas de comprimento e largura, atentos à conservação do mesmo perímetro.

Aplicação da atividade Lição de Casa aos alunos: análise e discussões

O professor da turma, antes de entregar a lição de casa, fez uma rápida explanação no quadro negro de como deveriam ser trabalhados os exercícios solicitados. Iniciou a explicação dando um exemplo de construção de um retângulo e fez as seguintes colocações:

Professor (P)*: Eu tenho um retângulo de medidas 12cm por 7cm.* - E desenhou a figura para os alunos.

Em seguida, começou a questionar os alunos:

P*: Qual o perímetro desse retângulo?*

Alunos (A): *É só somar todos os lados.*

Sendo assim, o professor logo colocou a seguinte solução:

Perímetro = 7 cm + 12 cm + 12 cm + 7 cm = 38 cm

Em seguida continuou o questionamento:

P*: Qual seria a medida da área desse retângulo?*

A primeira resposta dada por alguns alunos em voz alta foi a de *38cm²*.

Com essa resposta, o professor pediu aos alunos que pensassem um pouco mais, pois já haviam feito exercícios parecidos.

A segunda resposta, que surgiu de um dos alunos foi: *é só multiplicar o 12 pelo 7.*

O professor então questionou novamente os alunos sobre - *Qual seria a resposta se multiplicarmos o sete pelo doze?* - E escreveu no quadro a resposta da multiplicação: *7 cm x 12 cm = 84,* sem a unidade de medida para perguntar aos alunos: *qual seria essa unidade de medida*.

A resposta da turma foi unânime de que a unidade de medida era o centímetro ao quadrado.

O professor ainda questionou a turma para saber qual seria a escrita correta dessa unidade de medida. Obteve como resposta de alguns alunos: *escreve cm com o dois em cima.*

A explanação do professor foi encerrada com observações para que os alunos fizessem a lição de casa conforme o discutido, ou seja, deveriam efetuar os cálculos do perímetro e da medida de área, solicitados em cada exercício.

A devolução dessa atividade deveria ser feita pelos alunos na aula seguinte; fato que ocorreu parcialmente, pois, dos 31 alunos que receberam o material, somente 12 devolveram-no para análise da pesquisadora.

Em relação aos exercícios dessa lição de casa, pudemos constatar o não comprometimento da turma em resolvê-los.

Segundo o professor, os alunos não têm o hábito de fazer tarefas em casa. A ausência de estímulo para que eles se interessassem pela execução da tarefa parece justificar esse não comprometimento dos alunos pela resolução dos exercícios.

Doze alunos que tentaram resolver os exercícios construíram as figuras sem uma análise profunda do enunciado do problema. Alguns fizeram o exercício 1 igual ao 2 não observando ser no exercício 1 a medida do perímetro fixa e a medida de área variável e, que, no exercício 2 ocorria o oposto.

A Tabela 12 evidencia que desses 12 alunos, 2 conseguiram construir corretamente o retângulo com as dimensões 1cm x 9cm, mas, apenas 1 calculou corretamente a medida de área e do perímetro desse retângulo. Outro aluno confundiu área com perímetro ao somar os lados da figura e dar como resposta para a área o resultado dessa soma, confirmando os resultados de BALTAR (1996).

Dez alunos não conseguiram desenhar a figura com essas medidas e calcular a medida da área e do perímetro, tendo em vista que a maioria (60 %) entregou o exercício sem resolver.

Poucos foram também os alunos que pintaram a região interna das figuras construídas, para subsidiar o cálculo da medida de área, conforme Figura 20.

FIGURA 20 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE AO EXERCÍCIO 1 DA LIÇÃO DE CASA DA ATIVIDADE 4

Entretanto, observando as respostas dos 12 alunos que entregaram a atividade, podemos constatar na tabela abaixo que houve um índice de acertos relevante para a aceitação da atividade na seqüência didática caso seja oferecido um estímulo aos alunos pelo compromisso da execução da mesma.

TABELA 12 - RESPOSTAS CORRETAS DOS ALUNOS DO EXERCÍCIO 1 DA LIÇÃO DE CASA

SITUAÇÃO: CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO	CONSTRUÇÃO	MEDIDA DA ÁREA	PERÍMETRO
	Nº de alunos		
1x 9	2	1	1
2x 8	6	4	4
3x 7	6	4	4
4x 6	4	3	3
5x 5	4	3	3

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: participaram dessa atividade 12 alunos

Vale ressaltar que nos retângulos de tamanho 2 cm x 8 cm e 3 cm x 7 cm a resolução do problema discorreu melhor, pois, dos 12 alunos, 6 conseguiram construir corretamente os retângulos; destes, 66% acertaram os cálculos da medida da área e do perímetro. Isso evidencia que o exercício é acessível para os alunos facilitando a compreensão entre o cálculo da medida de área e de perímetro como também à identificação da diferença que ocorre entre perímetro e área.

Observamos também um dado otimista quanto ao acerto desses cálculos nos retângulos 4 cm x 6 cm e 5 cm x 5 cm, tendo em vista que dos 12 alunos, 4 construíram o retângulo corretamente e, desses 4 alunos, 3 (75%) calcularam corretamente a medida da área e do perímetro. Consideramos como corretos os resultados, conforme apresentados na Tabela11 juntamente com o desenho na malha quadriculada.

O **exercício 2** da atividade lição de casa seguiu o mesmo estilo do anterior, mas com questões que objetivam oportunizar aos alunos uma visão diferenciada do problema. Observe:

2) Desenhe no papel quadriculado, quatro retângulos que determinam superfícies que tenham áreas com medidas iguais a 36 unidades e complete a tabela abaixo.

Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento e a superfície do quadradinho como unidade de medida de área.

	MEDIDAS			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
Retângulo A				
Retângulo B				
Retângulo C				
Retângulo D				

Acreditamos que esse exercício também será de fácil resolução para os alunos, que poderão contar os quadradinhos até formarem um retângulo, facilitando assim a sua construção. Se eles utilizarem a régua constatarão que o lado do quadradinho da malha mede 1cm de comprimento.

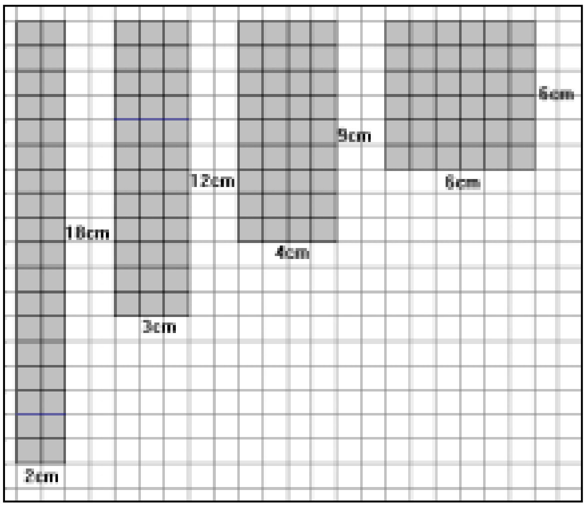


FIGURA 21 - POSSÍVEIS CONSTRUÇÕES DE RETÂNGULOS PELOS ALUNOS PARA O EXERCÍCIO 2 DA LIÇÃO DE CASA

Consideraremos como resposta correta o número exato com sua respectiva unidade de medida: para perímetro o cm e para a medida de área o cm², como explicita a Tabela abaixo:

TABELA 13 - POSSIVEIS RESPOSTAS DOS ALUNOS PARA O EXERCÍCIO 2 DA LIÇÃO DE CASA.

FIGURA	MEDIDAS			
	Comprimento	Largura	Perímetro	Área
Retângulo A	2cm	18cm	40cm	36cm²
Retângulo B	3cm	12cm	30cm	36cm²
Retângulo C	4cm	9cm	26cm	36cm²
Retângulo D	6cm	6cm	24cm	36cm²

Nesta situação, os alunos perceberão provavelmente que ao construírem retângulos com medidas de comprimento e largura diferentes, terão perímetros diferentes e medidas de área iguais.

Se no primeiro momento os alunos construírem dois retângulos com medidas de seus lados iguais, poderão perceber, ao anotarem na tabela o mesmo perímetro para as duas figuras, a mesma medida de área. Assim, construirão com outras medidas de comprimento e largura, novas figuras, conservando a mesma área.

Aplicação da atividade aos alunos: análise e discussões

Acreditávamos que esse exercício seria de fácil resolução para os alunos, que estariam contando os quadradinhos até formar um retângulo e que com a régua graduada constatariam que o lado do quadradinho da malha possuía 1cm de comprimento.

Conforme podemos observar na Tabela 14, dos 12 alunos que devolveram a lição de casa com esse exercício, 3 conseguiram construir corretamente o retângulo 2x18 e calcular a sua área e seu perímetro. Constatamos nessa etapa do exercício uma melhora com relação ao exercício anterior, por apresentar melhores índices de acerto. Podemos inferir que esta melhora deveu-se ao fato de que eles poderiam contar os quadrados antes de construir a figura.

Constatamos que, na construção do retângulo 6x6 (lados iguais) houve uma queda nos índices de acertos tanto na construção da figura como nos cálculos da medida de área e do perímetro, conforme Tabela 14. Podemos concluir que, para o aluno, lados iguais significa quadrado, não considerando-o também como um retângulo.

Pudemos constatar que os alunos, pelas anotações escritas na ficha de resolução respostas, ou não tinham interesse em refletir sobre a resolução do problema ou estavam desestimulados, tendo em vista as respostas que nem se aproximaram do correto.

TABELA 14 - COMPOSIÇÃO, CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA E DO PERÍMETRO. ATIVIDADE 4. LIÇÃO DE CASA I. EXERCÍCIO 2.

SITUAÇÃO: CONSTRUÇÃO DO RETÂNGULO	CONSTRUÇÃO	CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA	CÁLCULO DO PERÍMETRO
	Nº de alunos		
2x18	3	3	3
3x 12	5	4	4
4x 9	7	3	3
6x 6	1	1	-

FONTE: ficha de resultados dos 12 alunos que entregaram a atividade.

Vale destacar também que, nesse exercício, 55% dos alunos ainda confundiram área com perímetro ao somarem a medida dos lados da figura e atribuírem ao resultado dessa soma como resposta para a medida de área.

Esperávamos que todos os alunos fizessem a lição de casa e que esta seria discutida pelo professor para ser institucionalizada. Esses fatos, execução de todos os exercícios da lição e institucionalização de seu conteúdo, que não ocorreram, contavam com o objetivo de tornar familiar o processo – distinção entre perímetro e área - até então utilizado pelo aluno para a resolução de problemas relacionados à área enquanto grandeza autônoma.

Logo, temos ainda muito que caminhar nas atividades 5, 6 e 7 dessa seqüência para resoluções que remetem alunos e professor a esses propósitos.

4.6. ATIVIDADE 5 - Composição de figuras

Esta atividade objetiva aprofundar a compreensão de perímetros e medidas de área por meio do processo da decomposição e composição de figuras, introduzidas na lição de casa da atividade 4 que visava possibilitar, além da apreensão de conteúdos voltados à área e suas medidas, diferenciar área e perímetro.

Para executar a tarefa proposta, cada aluno participante receberá o material descrito na atividade para desenvolver estratégias para resolver o problema proposto, organizado e apresentado em 2 exercícios:

Você está recebendo um jogo, chamado Tangram, contendo 7 peças.
Forme figuras com as peças do Tangram, obedecendo as seguintes regras:

- não deve haver sobreposição de peças;
- um lado de uma peça deve encostar-se a um lado de outra peça.

1)
a) Forme figuras utilizando somente os dois triângulos pequenos.
b) Registre no espaço abaixo as figuras que você formou e pinte suas superfícies.
c) Identifique suas figuras numerando-as.
d) Qual a medida da área da superfície de cada figura construída?
e) Qual o perímetro dessas figuras?

2)
a) Agora, forme figuras utilizando os dois triângulos pequenos e um triângulo médio.
b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma das figuras que você formou e pinte suas superfícies.
c) Identifique suas figuras numerando-as.
d) Qual a medida da área da superfície de cada figura construída?
e) Qual o perímetro dessas figuras?

Essa atividade está acompanhada de uma lição de casa composta também por dois exercícios, que fazem uso de peças do Tangram.

Solicitamos aos alunos a formação de figuras utilizando peças do Tangram, pela técnica decomposição e composição introduzida nas atividades anteriores, sem recorrer à sobreposição.

A escolha do Tangram tem por objetivo favorecer a estratégia da composição de figuras, para determinar o perímetro e a medida da área da figura resultante. Para isso, os alunos deverão medir com a régua os lados das figuras montadas, o que os levaria a medidas aproximadas que poderão ser representadas por números decimais.

Nessa atividade, o professor deverá fazer uma apresentação do Tangram, identificando todas as peças, para que não haja dúvidas quanto à interpretação do enunciado e para a execução do processo de construção.

A resolução desse tipo de problema e o raciocínio exigido nela dependem da distinção entre as formas de apreensão da figura (as apreensões seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória).

Segundo DUVAL (1994), seja qual for a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, são possíveis as apreensões: perceptiva das formas - em nosso caso, as figuras construídas pela junção das peças do Tangram - e, discursiva das informações envolvidas na figura, ou seja, aquelas que permitem os cálculos da medida de área e perímetro e a identificação da unidade de medidas. Entendemos que a apreensão perceptiva é imediata e automática enquanto que a apreensão discursiva depende de um processo de aprendizagem.

No **exercício 1**, solicitamos aos alunos que montassem figuras formadas por dois triângulos pequenos no intuito de identificar a partir dessa composição a medida da área da superfície e o perímetro da figura resultante.

O uso de apenas duas peças do Tangram como atividade inicial é uma escolha didática para permitir aos alunos um contato com as peças e propiciar uma evolução no nível de complexidade da composição de figuras utilizando mais peças do jogo.

Para nossa análise, consideraremos as seguintes identificações: (TP) para triângulo pequeno, (TM) triângulo médio, (TG) triângulo grande, (P) paralelogramo e (Q) para o quadrado.

Os alunos poderão construir quadrados em diversas posições por estar considerando que são figuras diferentes, ou seja, a mudança de posição da figura para eles a transforma em outra conforme exemplo na Figura 22.

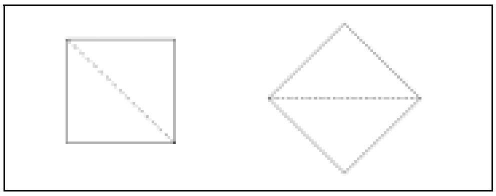


FIGURA 22 - EXEMPLO DE QUADRADOS COM DUAS PEÇAS DO TANGRAM, EXERCÍCIO 1

A passagem das figuras construídas com o Tangram para o papel será feita através da ação de contornar com o lápis sobre o papel a figura resultante.

Além do triângulo e do paralelogramo, é possível que os alunos apresentem diversas formas conforme Figura 23.

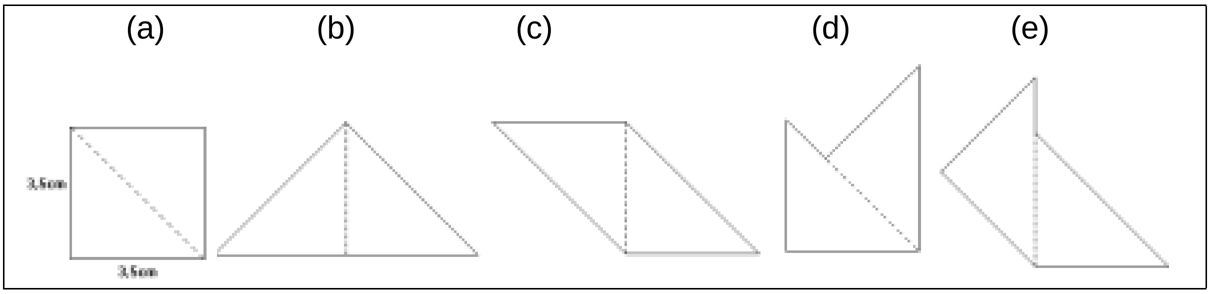


FIGURA 23 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO DE FIGURAS COM DUAS PEÇAS DO TANGRAM.

Para o cálculo da medida de área de cada figura construída, esperamos que os alunos, iniciando com o quadrado “comportado” (a), consigam efetuar o cálculo da medida de área das demais figuras por eles construídas.

Acreditamos que a maioria dos alunos indique uma reposta para a medida de área entre 11,56 cm² e 12,96 cm² , obtida~~s~~ a partir da medida dos lados das peças do Tangram utilizadas, e constate que todas as figuras construídas, independentemente da forma, têm superfícies diferentes e medidas de área iguais.

Nessa atividade, a ação do professor visa à manutenção das exigências do enunciado, bem como estimular a criação de novas formas.

Para o cálculo do perímetro e melhor compreensão dos alunos na distinção entre perímetro e medida de área, o professor poderá retomar, se necessário, a definição de perímetro, assim como orientar os alunos para trabalharem as unidades das medidas dos lados de cada figura construída.

De acordo com a forma das figuras construídas, pode-se encontrar figuras que possuem a mesma área e mesmo perímetro, conforme exemplos (b) e (c) da Figura 23. Isso deverá ser salientado e discutido pelo professor na institucionalização, de forma a diferenciar área e perímetro.

Aplicação da atividade aos alunos: resultados e análises

A atividade 5 ocorreu em dois momentos: o exercício 1 foi aplicado para 27 alunos; o exercício 2 para 18 alunos após o feriado.

Os erros cometidos na resolução do exercício 1, revelam que os alunos continuam ainda tendo dificuldades no cálculo da medida de área do triângulo construído por eles mesmos. Os erros abaixo listados demonstram nossos argumentos:

a) multiplicação da medida de todos os lados do triângulo;
b) multiplicação da medida de dois lados do triângulo, quando este apresentava medida de lados iguais;
c) multiplicação da medida de dois lados do paralelogramo por eles construído.

Mostramos na Figura 24 um exemplo em que um aluno multiplica as medidas dos lados diferentes de um triângulo retângulo isósceles, errando assim o cálculo da medida de área, mas acertando o cálculo do perímetro ao somar a medida de todos os lados desse triângulo.

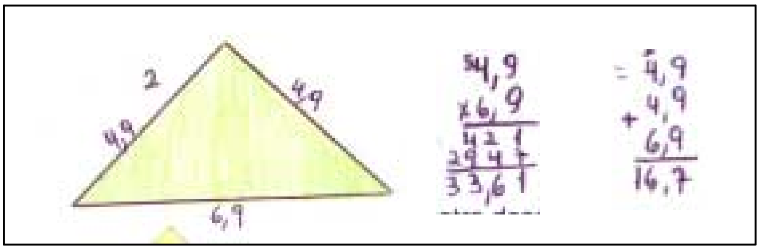


FIGURA 24 - PROTOCOLO DE UM ALUNO REFERENTE AO ERRO NO EXERCÍCIO 1 DA ATIVIDADE 5

Na análise das respostas, constatamos que as medidas dos lados das figuras construídas eram corretas, apesar de alguns erros no cálculo com números decimais.

Para o cálculo do perímetro, um grupo de três alunos, com o auxílio das duas peças do Tangram, construiu figuras e considerou como perímetro o contorno das figuras, incluindo os lados das peças que se encontravam no interior da figura resultante conforme mostra protocolo da Figura 25.

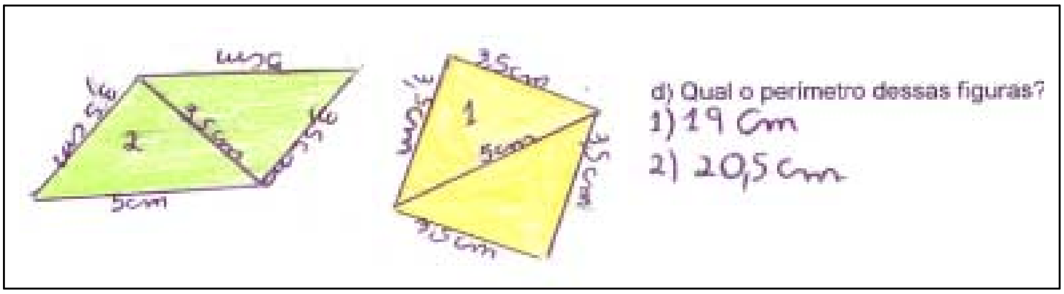


FIGURA 25 - PROTOCOLO REFERENTE A ERRO DO PERÍMETRO DA FIGURA RESULTANTE

Podemos inferir, ao observarmos a figura acima, que os alunos ainda apresentavam dificuldades na conceituação de perímetro. Entretanto, ao verificarmos nas resoluções o índice acertos, constatamos que a maioria (56%) dos 27 alunos efetuou corretamente o cálculo do perímetro das figuras montadas, conforme protocolo da Figura 26.

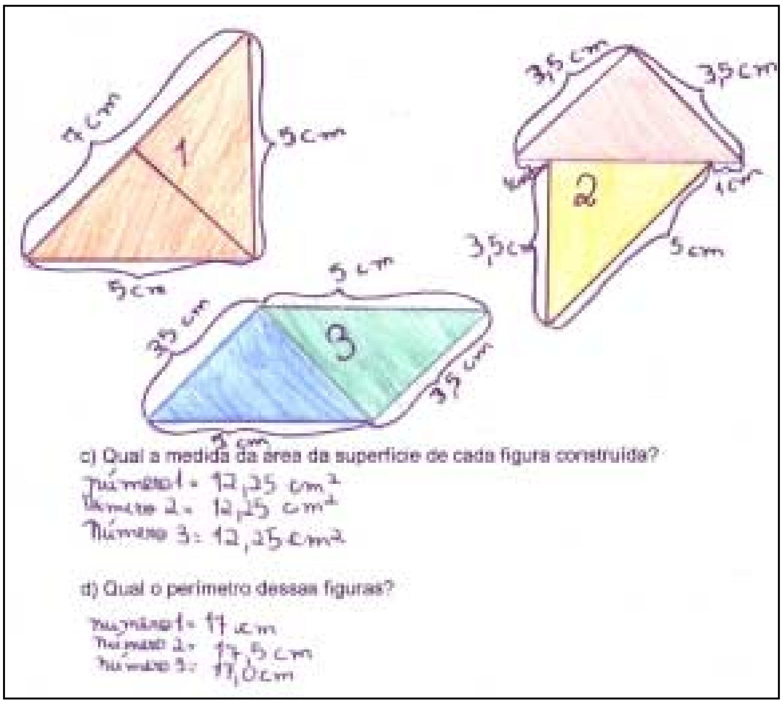


FIGURA 26 - PROTOCOLOS DE UM ALUNO REFERENTES À MONTAGEM DE FIGURAS COM DUAS PEÇAS DO TANGRAM

Os índices de acertos quanto à montagem das figuras com as peças do Tangram e os seus cálculos (medida de área e perímetro) podem ser visualizadas na Tabela 15.

TABELA 15 - CONSTRUÇÃO DE FIGURAS, CÁLCULO E UTILIZAÇÃO DA UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA E PERÍMETRO - ATIVIDADE 5, EXERCÍCIO 1.

SITUAÇÃO: 27 ALUNOS PARTICIPANTES	ALUNOS	
	Nº	%
Desenho da figura construída com o Tangram.	24	89
Cálculo da medida de área das figuras desenhadas	24	89
Cálculo correto da medida de área	12	45
Cálculo do perímetro das figuras desenhadas	19	70
Cálculo correto do perímetro	15	56
Utilização correta da unidade de medida de área	19	70
Utilização correta da unidade de medida de comprimento	14	52
Não realização da atividade	3	11

FONTE: ficha de resolução dos alunos.

Como podemos observar, a participação dos alunos no exercício 1 foi bastante significativa, tendo em vista o envolvimento e interesse da maioria deles na busca de estratégias para a resolução do problema proposto.

Vale destacar que dos 27 alunos participantes, 89% desenharam corretamente as figuras por eles montadas e calcularam as suas medidas de área (com acerto ou não). Desses, 70% utilizaram corretamente a unidade de medida de área e 45% acertaram esse cálculo.

Vale destacar ainda que, apenas um aluno utilizou explicitamente o cálculo da medida de área como se fosse o cálculo do perímetro: soma das medidas dos lados. Para o cálculo do perímetro, o índice de acertos também foi positivo, tendo em vista que dos 19 alunos que calcularam o perímetro das figuras, 15 alunos (80%) acertaram a resposta, conforme mostra a Tabela 15.

Para concluir nossa análise, destacamos as idéias dos professores do grupo do projeto, que explicitaram ser o exercício apropriado para o reconhecimento do processo de reconfiguração de figuras planas, uma estratégia que, apesar das dificuldades dos alunos para efetuarem os cálculos, faz com que eles descubram idéias e conceitos novos, como por exemplo*:*

As formas das figuras mudam e a área se mantém ou *a composição de figuras liga arestas e reduz ou aumenta o perímetro da figura obtida.*

Conforme nossa análise e a dos professores, a maioria (56%) dos 24 alunos que respondeu ao exercício, compreendeu que na composição de duas figuras, a medida da área da figura montada é a soma das medidas das áreas das duas figuras que a compõem (peças do Tangram) e que o perímetro é soma das medidas dos lados da figura final.

Exercício 2.

Para reforçar o processo da composição e o método de determinação do perímetro e da medida de área de figuras por meio da sobreposição, o exercício 2 é composto pelas seguintes etapas:

a) formar figuras com dois triângulos pequenos e um triângulo médio;
b) desenhar o contorno das figuras construídas e pintar as suas superfícies;

c) identificar a medida da área da superfície de cada figura desenhada;
d) identificar o perímetro das figuras desenhadas.

Essas três peças do Tangram devem permitir a montagem de formas variadas e, conseqüentemente, a ampliação dos conhecimentos dos alunos no que diz respeito ao uso da decomposição e composição de figuras.

A construção de um quadrado pelos alunos facilitaria o cálculo da medida de área de todas as figuras construídas. Os alunos poderão também optar em construir figuras de seu repertório geométrico, conforme exemplos abaixo:

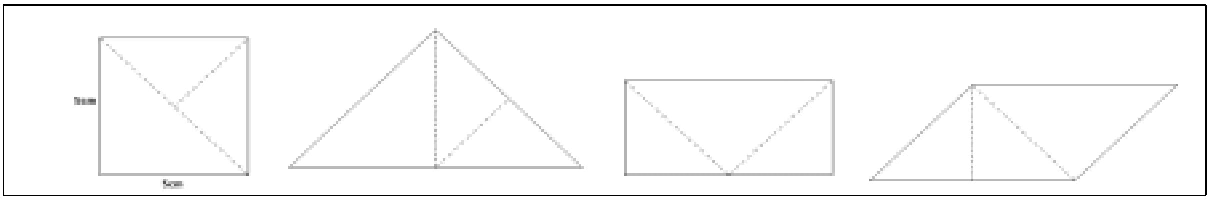


FIGURA 27 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO DE FIGURAS COM TRÊS PEÇAS DO TANGRAM.

Após desenharem figuras no papel, os alunos poderão perceber que a medida de área das outras figuras, independentemente da forma escolhida, pode ser obtida a partir da medida da área do quadrado ou do retângulo.

Aplicação da atividade aos alunos: resultados e discussão

A participação dos alunos foi também significativa conforme resultados explicitados na Tabela 16.

TABELA 16 - CONSTRUÇÃO DE FIGURAS, CÁLCULO E UTILIZAÇÃO DA UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA E PERÍMETRO - ATIVIDADE 5, EXERCÍCIO 2.

SITUAÇÃO: FIGURAS DESENHADAS PELOS ALUNOS	RESPOSTAS			
	Corretas		Parcialmente Corretas	
	Alunos			
	Nº	%	Nº	%
Desenho das figuras com o Tangram	16	89	02	11
Cálculo da medida de área	14	78	04	22
Cálculo do perímetro	9	50	07	38
Uso da unidade de medida de área	14	78	04	22
Uso da unidade de medida de comprimento	08	45	04	22

FONTE: ficha resolução dos alunos.
NOTA: participaram da atividade 18 alunos.

Podemos observar na tabela acima que 89% dos 18 alunos que tentaram resolver o exercício, iniciaram com a construção das figuras, conforme mostra protocolos da Figura 28.

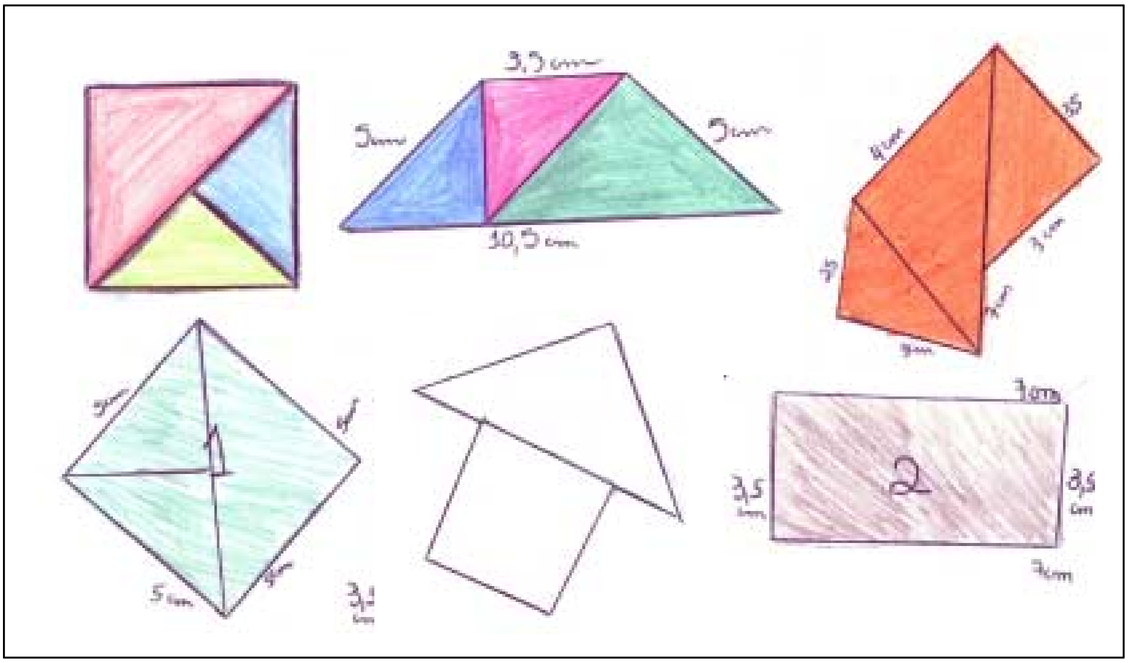


FIGURA 28 - PROTOCOLOS REFERENTES AOS DESENHOS DE FIGURAS COM TRÊS PEÇAS DO TANGRAM

Podemos observar na Tabela 16, que dos 16 alunos que tentaram calcular o perímetro das figuras construídas, 07 não conseguiram completar seu raciocínio. Quanto ao uso adequado da unidade de medida de comprimento, 10 alunos apresentaram dificuldades em resolver o problema.

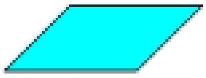
Esperávamos que o professor fizesse a institucionalização da atividade com debate coletivo com a classe para que os alunos refletissem sobre suas soluções e estratégias de resolução, para que possam identificar seus erros e/ou seus resultados corretos. Observamos que esta institucionalização não ocorreu; mas mesmo assim, o professor aplicou a Lição de casa II, prevista na seqüência como meio de familiarização com o conteúdo e de “fortalecimento da aprendizagem”.

4.7. LIÇÃO DE CASA II

A **lição de casa II** objetiva levar o aluno a perceber as variações do perímetro de uma figura quando se muda a sua forma. Procura ainda evidenciar que a figura ao mudar de forma pode manter a sua área e medida de área. Essa lição de casa, composta por 4 exercícios, foi subsidiada com um material básico: folhas impressas com 4 exercícios, o jogo Tangram (com as 7 peças) e uma régua graduada para trabalhar a unidade de medida de área e perímetro.

No **exercício 1**, os alunos poderão compreender que a mudança da forma da figura altera as suas superfícies e seu perímetro, mas a área e sua medida podem permanecer as mesmas.

1)a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura colorida?

e) Alterar a forma da figura, altera também a medida de sua área? Justifique sua resposta.

f) Alterar a forma da figura, altera também a medida de seu perímetro? Justifique sua resposta.

Como a figura pode ser transformada em um quadrado, a medida de sua área pode ser calculada multiplicando a medida de dois de seus lados.

A manipulação das peças do Tangram visa facilitar a montagem de um retângulo com área equivalente à do paralelogramo.

Para formar a figura do item (a), os alunos poderão utilizar uma peça (P) ou 2 peças (TP) do Tangram. No item (b), só poderão considerar os dois (TP) para construírem o retângulo com a mesma peça, conforme a Figura 29.

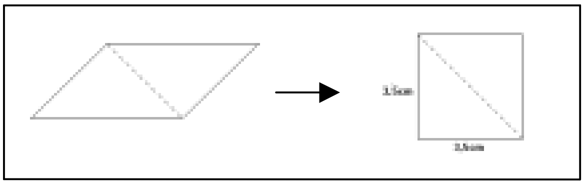


FIGURA 29 - RESPOSTA ESPERADA NA COMPOSIÇÃO DE UM RETÂNGULO COM AS PEÇAS DO TANGRAM.

Para o cálculo da medida de área do quadrado (item c), os alunos poderão apresentar como resposta medidas entre 10,89 cm² a 12,25 cm², devido à margem de erros que pode ocorrer ao contornar a figura no papel.

Quanto ao item (d) os alunos poderão perceber que as figuras quadrado e paralelogramo têm a mesma medida de área; sendo assim, chegarão provavelmente a uma resposta para medida de área do paralelogramo valores entre 10,89cm² e 12,25 cm². Como resposta correta, consideraremos para a medida de área do paralelogramo valores entre 10,89 cm² e 12,25 cm², mesma resposta do item (c).

Acreditamos que os alunos que conseguirem resolver os itens (c) e (d) não terão dificuldades em acertar o item (e), pois compreenderão que quando se altera somente a forma da figura de partida sua medida de área não varia, mas poderão observar que alterando a forma da figura poderá alterar o seu perímetro.

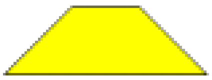
Sendo assim, poderão responder o item (f), justificando que a figura terá o perímetro de acordo com o contorno da figura construída.

O **exercício 2** dessa lição de casa objetiva ampliar os conhecimentos dos alunos por meio da montagem de figuras mais complexas envolvendo o uso de um número maior de peças do Tangram.

Com esses exercícios os alunos poderão perceber que, a mudança da forma da figura altera a sua superfície, sem alterar a área e a medida de área.

2)

a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura dada?

Para que respondam ao item (a), os alunos utilizarão a sobreposição de peças do Tangram no trapézio isósceles em referência. No item (b), poderão chegar a uma das quatro soluções expostas na Figura 30 ao sobreporem as figuras do Tangram na figura dada. Contudo, poderão notar que uma das soluções (1TM+P), não possibilitará a composição do retângulo; sendo assim, substituirão o (TM) ou o (P) por dois (TP).

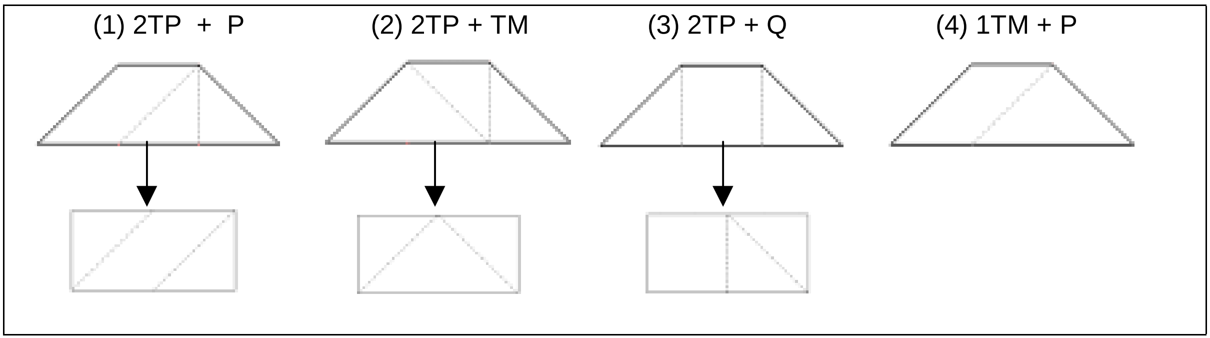


FIGURA 30 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO DE UM RETÂNGULO COM AS PEÇAS DO TANGRAM, EM RELAÇÃO AO TRAPÉZIO DADO.

Acreditamos que os alunos não apresentarão dificuldades em sobrepor as peças e efetuar a composição do retângulo no papel por meio de seus contornos.

O cálculo da medida de área (item c) poderá ser feito com as medidas 7cm por 3,5cm, que multiplicadas resultarão em 24,5 cm².

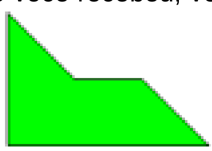
Contudo, tendo em vista que ao contornar no papel a figura montada e, possivelmente, ocorrerem diferenças nas medidas dos lados, consideraremos como corretos os resultados expostos entre 22,4 cm² e 24,5 cm² a medida da área do trapézio isósceles.

O **exercício 3** objetiva consolidar os conhecimentos até então adquiridos nesta seqüência de atividades.

Nessa atividade, os alunos poderão fazer uso de um número maior de peças do Tangram para compreenderem que a mudança da forma da figura não altera a área e sua medida.

Foi explicitada ao aluno da seguinte forma:

3) a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura dada?

Acreditamos que os alunos poderão usar o mesmo procedimento do exercício anterior.

Observarão que, dependendo da escolha das peças do Tangram, não conseguirão compor o retângulo, concluindo que precisarão substituir peças, como o TG, por outras peças que constituem a mesma área.

Para responder ao item (a), os alunos poderão sobrepor as peças na figura irregular dada. Sendo assim encontrarão uma das cinco soluções apresentadas na Figura 31. Entretanto, como podemos observar, duas das soluções (4 e 5) não possibilitam a composição do retângulo. Sendo assim; necessariamente, o TG precisa ser substituído por outras peças que tenham a mesma área.

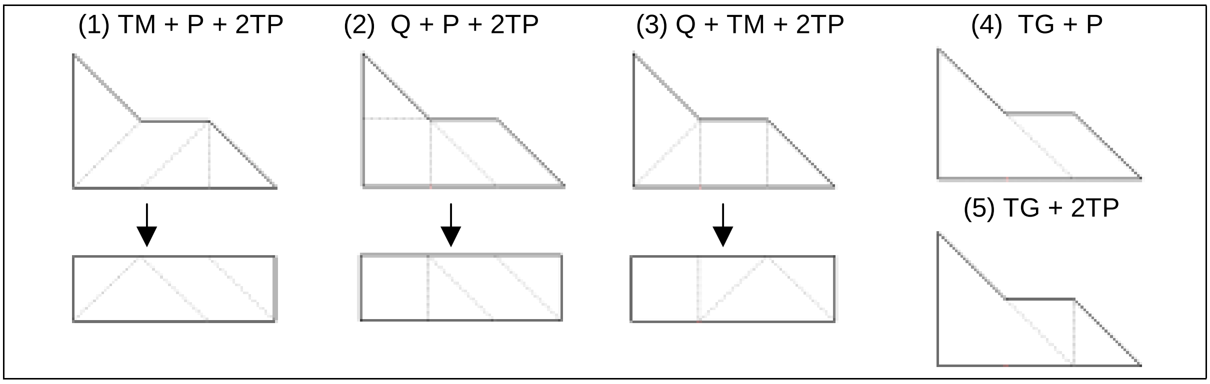


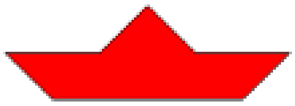
FIGURA 31 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO DE UM RETÂNGULO COM PEÇAS DO TANGRAM.

Consideraremos como resposta correta para esse cálculo os resultados entre 33 cm² e 36 cm², tendo em vista a ocorrência de diferenças nas medidas utilizadas para a construção do retângulo, como também a transferência para a folha de papel da figura construída com as peças do Tangram sofrendo alterações em seu contorno.

Com esse exercício, os alunos poderão compreender que a medida de área da figura dada é igual à do retângulo construído com as peças do Tangram, sobrepostas na figura dada.

O **exercício 4** desta lição de casa objetiva evidenciar que figuras de formas diferentes podem ter áreas e medidas de áreas iguais.

4) a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura dada?

A forma da figura foi escolhida para permitir aos alunos vivenciarem o processo da sobreposição, decomposição, composição e comparação de figuras de formas diferentes com a mesma área e medida de área.

Acreditamos que os alunos para responderem ao item (a) poderão apresentar uma das três soluções explicitadas na Figura 32. Vale ressaltar que uma dessas soluções não possibilita a resolução do item b (construção de um retângulo) desse exercício, conforme mostra o desenho (3) da Figura 32.

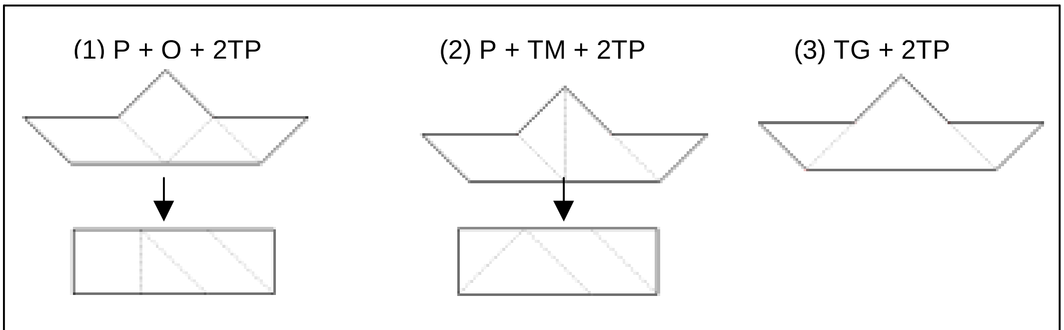


FIGURA 32 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO DE UM RETÂNGULO COM AS PEÇAS DO TANGRAM.

Para o cálculo da medida de área (item c), devido ao retângulo ter sido construído com as mesmas peças do retângulo do exercício anterior, os alunos poderão efetuar o mesmo procedimento de resolução do anterior.

Esperamos que ocorram questionamentos por parte dos alunos com relação às figuras dos exercícios 3 e 4, tendo em vista as formas e superfícies diferentes e área e medida de área iguais, como também a complexidade das figuras em análise.

Aplicação da atividade aos alunos: resultados e discussões

A lição de casa II foi entregue para 18 alunos; destes 14 devolveram-na para análise. Segundo o professor da turma, os alunos não têm o hábito de fazer lição de casa.

Apresentamos nas Tabelas 17 e 18 os resultados obtidos na lição de casa:

TABELA 17 - CONSTRUÇÃO E CÁLCULO DE MEDIDA DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS: RESULTADOS POSITIVOS

SITUAÇÃO: FIGURAS ANALISADAS	CONSTRUÇÃO CORRETA DA FIGURA		CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA		CÁLCULO CORRETO DA MEDIDA DE ÁREA	
	Alunos					
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Item1						
Retângulo	5	36	10	71,5	4	28,5
Paralelogramo	(*)	-	8	57	2	14
Item 2						
Retângulo	9	64	9	64	6	43
Trapézio	(*)	-	7	50	3	21,5
Item 3						
Retângulo	6	43	11	78,5	3	21,5
Figura colorida	(*)	-	9	64	4	28,5
Item 4						
Retângulo.	8	57	10	71,5	4	28,5
Figura colorida	(*)	-	7	50	6	43

FONTE: Lição de Casa II. Atividade 5.
NOTA: (*) A figura já estava construída no exercício. Participaram da atividade 14 alunos.

Como podemos observar na Tabela 17, a Lição de casa II foi significativa quanto ao número de alunos que tentaram resolver a questão, pois, dos 14 alunos que devolveram o trabalho para análise, uma média de 50% construiu corretamente as figuras solicitadas. Vale ressaltar que, desses alunos, uma média de 63,3% calculou a medida de área e que, desse percentual, uma média de 45% acertaram esse cálculo.

Temos ainda um número relevante de participação de alunos que tentaram construir as figuras solicitadas, pois, os 14 alunos tentaram, correta ou incorretamente, resolver o exercício. Desses 14 alunos, uma média de 35,7% errou o cálculo da medida de área, ficando o maior índice de erros nos itens: (c, d) do exercício 1 – 43%; (c) do exercício 3 – 57% e no item (c) do exercício 4 – 43%.

TABELA 18 - IDENTIFICAÇÃO DA FORMA, MEDIDA DE ÁREA E PERÍMETRO.

SITUAÇÃO: RESPOSTAS CORRETAS EXERCÍCIO 1	ALUNOS	
	Nº	%
(e) alterar a forma não altera a medida de área	4	28,5
(f) alterar a forma altera o perímetro.	5	36

FONTE: ficha de resolução dos alunos, lição de casa II - exercício 1.
NOTA: participaram dessa atividade 14 alunos

Vale destacar que 5 alunos deixaram de responder ao exercício e 5 propuseram cálculos e resultados com expressão incorreta da medida de área devido à incompreensão da diferença que existe entre área e perímetro.

Podemos aqui constatar os teoremas em ação T7 e T8 da pesquisa de BALTAR (1996), que evidenciam serem falsas as afirmativas: duas superfícies de mesma área têm o mesmo perímetro (T7); duas superfícies de mesmo perímetro têm a mesma área (T8). Segundo BALTAR, esses teoremas estão ligados a situações que dão sentido ao conceito de área em superfícies planas.

Comparando os resultados dos alunos nos exercícios 1 da atividade 5, conforme Tabelas 15 e 16, podemos evidenciar que, se institucionalizada essa atividade com correções coletivas e síntese do conteúdo estudado, a lição de casa, provavelmente, estaria com índices de participação e de acertos mais significativos.

Conforme observações dos professores do grupo, a lição é "um reforço necessário à compreensão de tudo o que já foi estudado recentemente bem como sua institucionalização".

A institucionalização dos exercícios desta lição não ocorreu, como também, não ocorreu o compromisso didático do professor de estar sempre retomando nas atividades posteriores conteúdos anteriores, necessários à compreensão dos alunos.

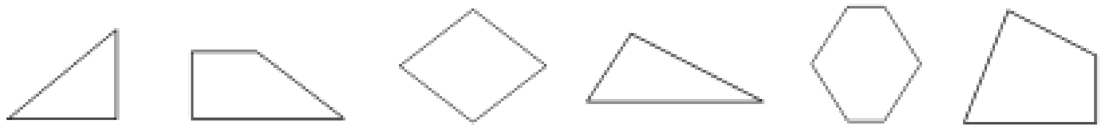
4.8. ATIVIDADE 6 - Decomposição e compensação de figuras planas.

A atividade pretende evidenciar que o processo de reconfiguração da figura, por meio de sua decomposição e composição, possibilita a compreensão de medida de área e área como grandeza autônoma.

DUVAL (1994) que denota as modificações existentes no processo de reconfiguração das figuras geométricas nos permitiu elaborar esta atividade que foi dividida em seis exercícios, conforme abaixo expostas.

Utilizando uma régua desenhe traços para decompor a figura quando achar necessário e calcule a medida de sua área.

a) b) c) d) e) f)



A partir da composição e/ou decomposição solicitadas pelo exercício, os alunos deverão, por meio de traços internos e ou externos à figura, construir novas figuras com formas que possibilitem a determinação de suas medidas da área.

Acreditamos que, durante a execução da atividade, a decomposição e a compensação das figuras ocorrerão de forma gradativa em relação ao grau de complexidade da figura de partida e da elaboração da nova figura feita pelos alunos.

A apreensão operatória (DUVAL, 1994), que consiste na modificação de uma figura de partida, realizada tanto mental como materialmente, permitirá, juntamente com a configuração mereológica, que os alunos façam a decomposição da figura em partes, compondo subfiguras retangulares ou triangulares. Essa decomposição tem por finalidade a relação dessas partes (subfiguras da figura de partida), visando ao cálculo da medida de área, e, conseqüentemente, da área enquanto grandeza, ou seja, o espaço ocupado por essa medida de área.

Por acreditarmos que as figuras desta atividade são de fácil manipulação em relação ao processo de reconfiguração, tanto no que diz respeito à forma como à área, tomamo-las como ponto de referência para o desenvolvimento do processo de análise.

De início, salientamos as palavras de DUVAL (1994) que denotam já ser pela apreensão ótica, a possibilidade de composição e decomposição de figuras. Isto é, pela visualização, os alunos trabalharão com a figura de partida, acrescentando ou não outras figuras, que subsidiarão a compreensão da superfície para o cálculo da sua medida de área.

Os alunos poderão também mudar somente a posição da figura - deslocamentos por rotação, translação entre outros processos - para facilitar a composição da nova figura.

Escolhemos o triângulo como primeira figura, proposta pelo exercício, item (a), por acreditarmos que a partir dela os alunos poderão construir um retângulo. Isto deverá instigá-los para a percepção da relação entre esse triângulo e a metade da área do retângulo recém construído, conforme Figura 33.

Para o cálculo da medida de área do triângulo do item (a), consideraremos como resposta correta, 10cm², obtida por operações mentais ou não, pelo cálculo da metade da área do retângulo de lados 4 cm e 5 cm.

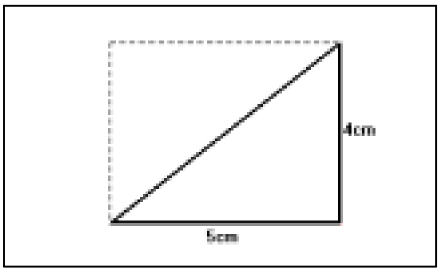


FIGURA 33 - EXEMPLO DE COMPOSIÇÃO DO RETÂNGULO.

Com relação ao trapézio (item b), os alunos poderão efetuar o seguinte procedimento para calcular a medida de área:

a) decompor a figura em um quadrado de 3 cm por 3 cm e em um triângulo de 4 cm por 3 cm (Figura 34, A);
b) decompor a figura em um quadrado de 3 cm por 3 cm e em um quadrado de 4 cm por 3 cm (Figura 34, B);
c) completar a figura para compor um retângulo de 7 cm por 3 cm e calcular a medida de sua área obtendo 21 cm². Após, subtrair a medida de área do triângulo com medidas 3cm por 4cm, com medida de área 6cm² e obter o resultado final da medida de área do trapézio, ou seja, 21 cm² - 6 cm² = 15 cm² (Figura 34, C).

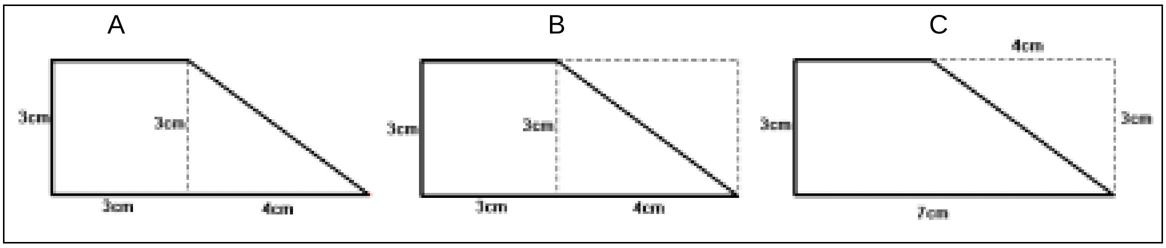


FIGURA 34 - EXEMPLO DE COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DO TRAPÉZIO.

Para o losango (item c), os alunos poderão utilizar um dos procedimentos abaixo:

a) efetuar a decomposição do losango e, pelo deslocamento das partes, formar um retângulo de 8 cm por 3 cm, para encontrar a medida de área 24 cm². Sendo assim, os alunos poderão perceber que a medida de área do losango é a mesma do retângulo, conforme mostra a figura abaixo. (Figura 35, A);

b) decompor o losango em quatro triângulos, efetuando o cálculo de um desses e após multiplicá-lo por quatro, obtendo o resultado 24 cm² (Figura 35, B);

c) compor a figura em um retângulo de 8 cm por 6 cm para obter a medida de área 48 cm². Após os cálculos da medida da área de um dos triângulos 4 cm por 3 cm, obtendo 6 cm², multiplicar esse resultado por quatro, devido à área do retângulo estar representada com 4 triângulos a mais que a figura de partida, obtendo assim o resultado de 24 cm²; em seguida, subtrair esse resultado pela medida da área do retângulo; ou seja, 48 cm² - 24 cm² = 24 cm².(Figura 35, C).

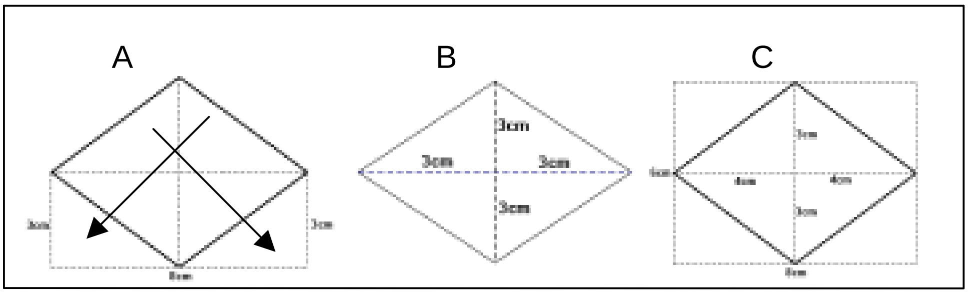


FIGURA 35 - EXEMPLO DE COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DO LOSANGO.

Após resolverem os itens (a), (b) e (c) do exercício, os alunos, por meio da decomposição e compensação de figuras, efetuarão sem dificuldades os itens posteriores.

Para o item (d), os alunos poderão utilizar a decomposição da figura de partida em dois triângulos menores, para em seguida, compor os respectivos retângulos para obterem a superfície da qual poderão utilizar como medida de área: a soma das medidas das áreas dos dois triângulos menores.(Figura 36)

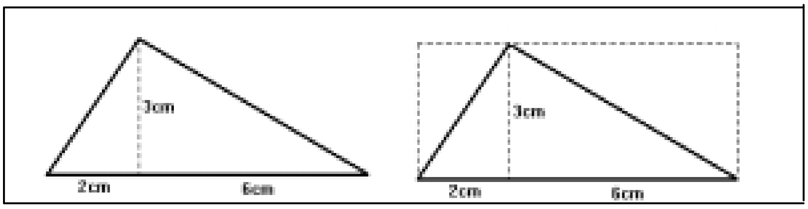


FIGURA 36 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DO TRIÂNGULO.

A decomposição da figura também estará presente para o cálculo da medida de área do hexágono (item e). Após essa decomposição, os alunos poderão fazer a compensação da figura até formar um retângulo de 4 cm por 6 cm. Poderão obter como resultado 24 cm² para a medida de área da figura de partida. (Figura 37, A).

Todavia, poderão optar pela decomposição por meio de um retângulo de 2 cm por 6 cm e obter 12 cm² de medida de área, que, com a compensação das partes dos triângulos para formar outro retângulo igual e encontrar o resultado 24 cm² para a medida da área da figura em referência (o hexágono), conforme mostra a Figura 37, B.

Também como hipótese de solução, os alunos poderão efetuar a decomposição do hexágono em dois retângulos de 2 cm por 3 cm e quatro triângulos, que com a compensação surgirão mais dois retângulos para subsidiar o cálculo da medida de área (Figura 37 C).

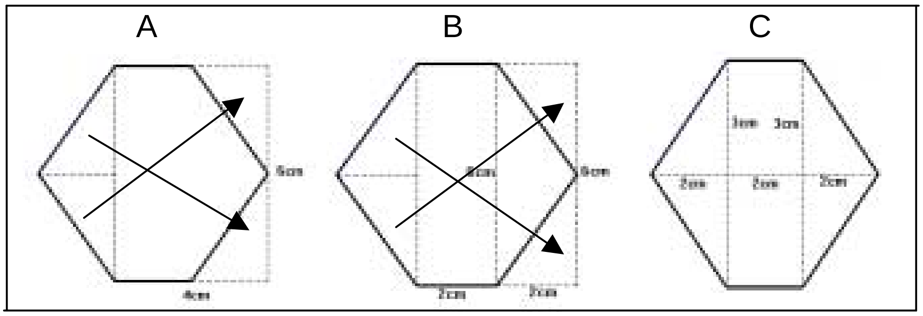


FIGURA 37 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DO HEXÁGONO

No item (f) aumentamos a complexidade da figura de partida com o objetivo de obter uma apreensão operatória mais reflexiva por parte dos alunos.

Nesse exercício, esperamos que os alunos decomponham a figura em três retângulos, conforme Figura 38 A. De início, poderão efetuar o cálculo da medida de área dos triângulos e o cálculo da medida de área do retângulo, totalizando assim 21cm² para a medida de área do quadrilátero, ou seja, estarão efetuando a soma das medidas das áreas, 5 cm² + 4 cm² + 12 cm², das subfiguras que compõem a figura de partida.

Também como hipótese de solução, os alunos poderão efetuar o cálculo da medida de área do retângulo que compreende toda a figura dada, conforme Figura 38 B. A esse resultado, subtrai-se a soma da medida de área dos dois triângulos utilizados para a compensação do retângulo.

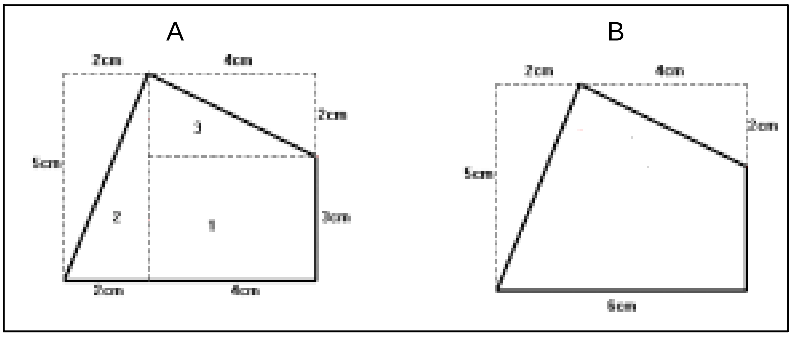


FIGURA 38 - EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DO HEXÁGONO

Aplicação da atividade aos alunos: análise e discussões

Esta atividade foi aplicada para 29 alunos, em um encontro de duas aulas de 50 minutos cada.

Iniciando a atividade, o professor efetuou uma revisão do cálculo da medida de área com exercícios na lousa para que os alunos pudessem refletir sobre o que já haviam estudado nas atividades anteriores.

O procedimento resultante do debate coletivo foi um trabalho com traços internos e externos à figura para, após a decomposição e compensação da figura de partida, calcular por partes a medida de área da superfície assim obtida.

Para concluir suas explanações, o professor, sob orientação-sugestão, efetuou esses cálculos na lousa e fez um breve comentário da atividade, dizendo que os alunos deveriam observar bem a decomposição, efetuar os cálculos da medida de área das subfiguras e somá-los para chegar à medida da área da figura inicial.

Nesse momento, o exercício foi discutido pelos alunos, que apresentaram diferentes estratégias de resolução com o processo da reconfiguração de figura por meio de sua decomposição e composição.

O professor, dando continuidade ao raciocínio dos alunos, questionou-os sobre o cálculo que poderia ser feito após a decomposição da figura. Os alunos responderam-lhe que efetuariam os cálculos das partes e somariam seus resultados.

Durante a execução da atividade, observamos que os alunos se sentiam estimulados e bastante receptivos à discussão no grupo.

Ao trabalharem com o exercício (a), a maioria dos alunos fez a compensação mentalmente, escrevendo na ficha de resolução apenas o resultado, conforme registra a Tabela 19. Resolveram o problema com rapidez e precisão, conforme exemplifica o protocolo da Figura 39.

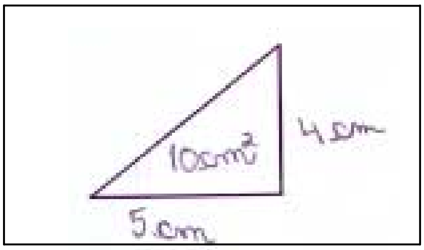


FIGURA 39 - PROTOCOLO DE UM ALUNO.
ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (A)

Vale salientar que dos alunos que explicitaram o cálculo, a maioria o fez conforme mostra a Figura 40.

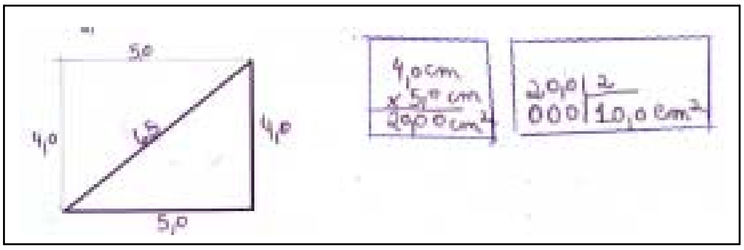


FIGURA 40 - PROTOCOLO DE UM ALUNO. ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (A)

Poucos foram os alunos que pediram a presença do professor para possíveis explicações ou confirmações de acertos, mostrando autonomia na resolução. Na tabela a seguir explicitamos os índices representativos dos acertos desse exercício.

TABELA 19 - COMPOSIÇÃO DE FIGURA E CÁLCULO DE MEDIDA DE ÁREA. ATIVIDADE 6. EXERCÍCIO (A)

SITUAÇÃO: ITEM (A) 29 ALUNOS	ALUNOS Nº	ALUNOS %
Composição explícita da figura de partida em quadrado	10	34
Cálculos da medida de área do quadrado e do triângulo.	29	100
Cálculos corretos da medida de área do quadrado e do triângulo.	24	82,5
Utilização correta da unidade de medida de área.	26	89,5

FONTE: ficha de resolução dos alunos.

Podemos inferir que o cálculo da medida de área de um triângulo como ferramenta poderá subsidiar e facilitar o cálculo de medidas de áreas de figuras mais complexas.

Quanto ao exercício (b) constatamos na resolução escrita dos alunos, traços internos e externos à figura, formando dois retângulos. Notamos que, para eles, a decomposição já se tornou uma ferramenta de fácil manipulação, o que facilita os cálculos da medida de área, conforme protocolo da Figura 41.

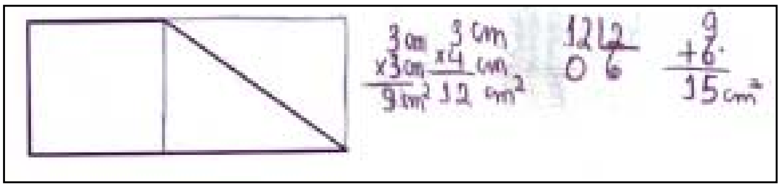


FIGURA 41 - PROTOCOLO DE UM ALUNO. ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (B)

Os índices de acertos podem ser observados na Tabela 20 quanto ao uso da compensação e da decomposição, dos cálculos da medida de área como também do uso adequado da unidade de medida de área.

TABELA 20 - RECONFIGURAÇÃO E CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS.

SITUAÇÃO: FIGURAS	TRAÇOS NA FIGURA.		CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA		CÁLCULO CORRETO DA MEDIDA DE ÁREA		UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA	
	Alunos							
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
(b) Trapézio	28	96,5	22	76	18	62	20	69
(c) Losango	23	79,5	24	82,5	15	52	20	69

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: Participaram desta atividade 29 alunos.

Observamos que esses índices foram bastante significativos para a nossa seqüência de atividades, pois, no item (b), dos 29 alunos, somente um deles não fez decomposição por meio de traços na figura de partida, como também poucos (quatro alunos) erraram o cálculo da medida de área. Dos 22 alunos que calcularam, apenas dois erraram a unidade de medida de área.

Esses erros são justificados, tendo em vista as dificuldades diversas como o registro da unidade de medida de área, os erros na multiplicação, ou a subtração, ou até mesmo por falta de compreensão da diferença entre área e perímetro, conforme explicitamos na Tabela 21.

TABELA.21 - DIFICULDADES NA RECONFIGURAÇÃO, CÁLCULO DE MEDIDA DE ÁREA E USO DE UNIDADE DE MEDIDA.

SITUAÇÃO: FIGURAS	TRAÇOS NA FIGURA.		CALCULO DA MEDIDA DE ÁREA		DIFERENÇA: ÁREA DE PERÍMETRO		UNIDADE DE MEDIDA ÁREA	
	Alunos*							
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
(b) Trapézio	1	3,5	4	14	-	-	2	7
(c) Losango	5	17	11	38	-	-	4	14

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: participaram desta atividade 29 alunos.

Ocorreram mais erros no cálculo das medidas de área dos dois retângulos construídos do que no cálculo da medida de área de um só retângulo ou um só triângulo. Constamos ainda que um grande número de alunos cometeu erro na multiplicação da medida dos lados do trapézio, conforme exemplifica a Figura 42.

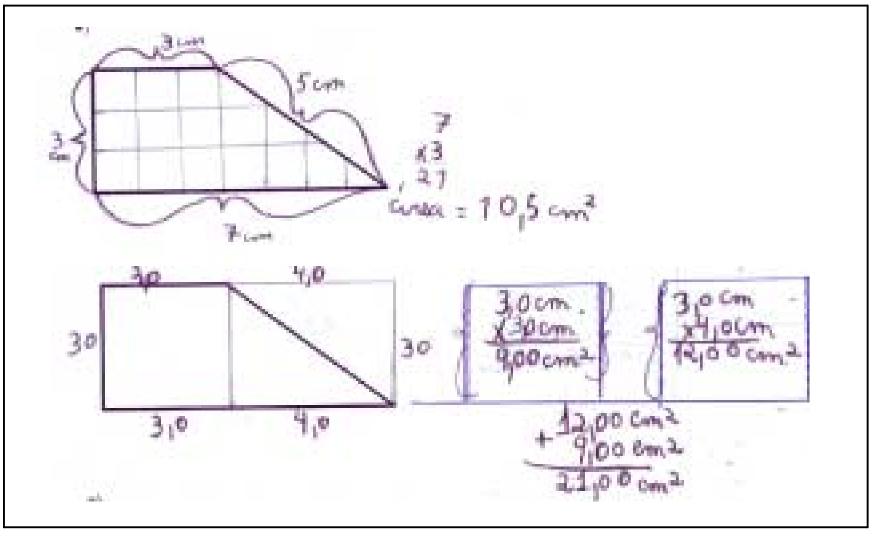


FIGURA 42 - PROTOCOLOS DE ERROS DOS ALUNOS. ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (B)

Ao término da primeira aula, os alunos já estavam efetuando a decomposição do losango (item c), conforme os protocolos abaixo.

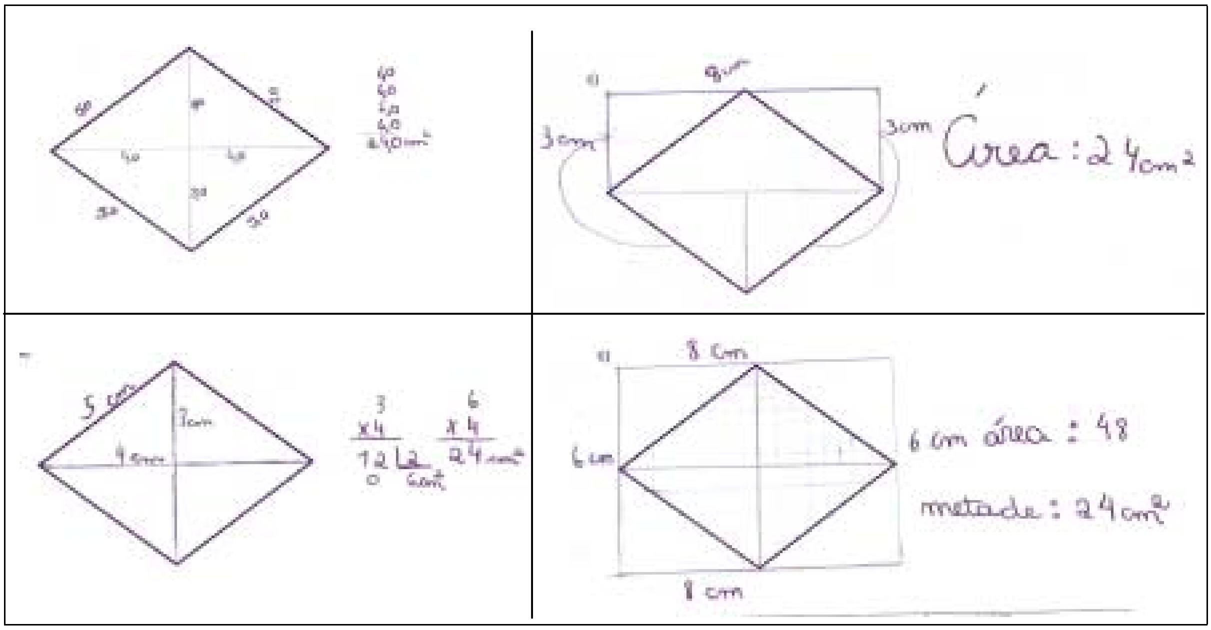


FIGURA 43 - PROTOCOLOS REFERENTES À DECOMPOSIÇÃO DO LOSANGO. ATIVIDADE 6 EXERCÍCIO (C)

Constatamos nas análises feitas das resoluções dos alunos que dos 29 alunos, a maioria (24 alunos) efetuou os cálculos da medida de área dos triângulos, por eles construídos na decomposição do losango; multiplicando seus lados ou somando todas as partes decompostas na figura de partida. Desses 24 alunos, 15 (62,5%) acertaram o cálculo da medida de área e 20 (83,3%) utilizaram a unidade de medida de área adequada, o cm².

Durante a execução da atividade, o professor esclarecia aos alunos as dúvidas que surgiam, passando de grupo em grupo, confirmando o resultado ou pedindo que refizessem os cálculos quando se encontravam errados. Chamava a atenção dos alunos para a diferença dos cálculos de medida de área e de perímetro. Podemos observar o professor mediador tornando os conhecimentos mobilizáveis, segundo ROBERT (1998, p. 165).

Vale destacar que, durante a execução desse exercício, um dos grupos apresentou decomposições diferentes. Isso gerou uma acentuada discussão entre esses alunos para investigar quais decomposições estariam corretas. Solicitaram a presença do professor, que afirmou estarem todas as decomposições corretas.

Podemos inferir quanto a isso que os alunos se conscientizaram da existência de mais uma possibilidade de resolução.

A participação dos alunos nas discussões dos grupos continuava bastante intensa, pois, dos 29 alunos em sala, 24 deles já efetuavam os cálculos da medida da área do triângulo do exercício (d), mesmo sendo esse cálculo parcialmente correto para 7 deles. Logo, temos uma margem de 52% de acertos, conforme Tabela 22.

Na decomposição da figura de partida (d), a maioria dos alunos (22) apresentou somente traços internos na figura. Esse fato permite-nos confirmar a eficácia do cálculo da medida de área do triângulo como ferramenta para a resolução do problema.

Os índices de acertos foram satisfatórios para a seqüência de atividades, tendo em vista que, dos 24 alunos que fizeram o cálculo da medida de área da figura, 15 (62,5%) o acertaram e 16 (66,6%) utilizaram a unidade de medida de área adequada, conforme Figura 44.

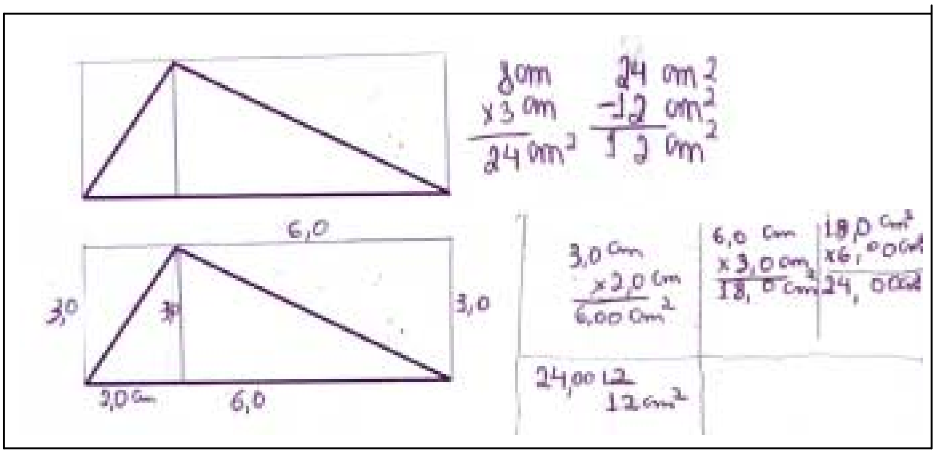


FIGURA 44 - PROTOCOLOS REFERENTES À DECOMPOSIÇÃO DO TRIÂNGULO. ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (D)

Quanto aos erros, nessa fase do exercício, 10 (34%) entre os 29 alunos ainda apresentaram dificuldades no cálculo da medida de área, 6 (21%) no uso da unidade de medida e 5 (17%) não diferenciaram área de perímetro, conforme Figura 45.

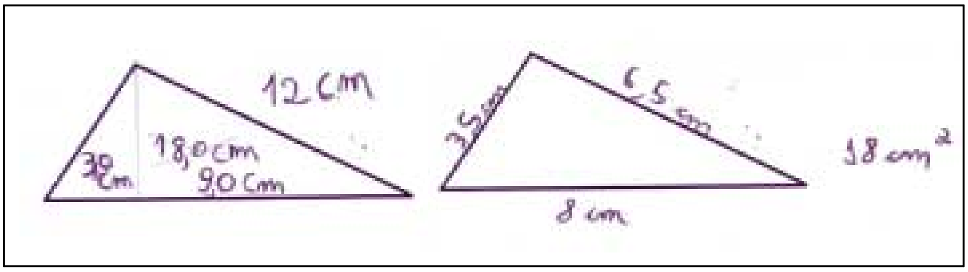


FIGURA 45 - PROTOCOLOS DE ERROS DE ALGUNS ALUNOS. ATIVIDADE 6, ITEM (D)

Para efetuarem o cálculo da medida de área do hexágono, item (e), 20 alunos (69%) fizeram a decomposição explícita da figura; desses, 10 acertaram o cálculo da medida de área, conforme Figura 46.

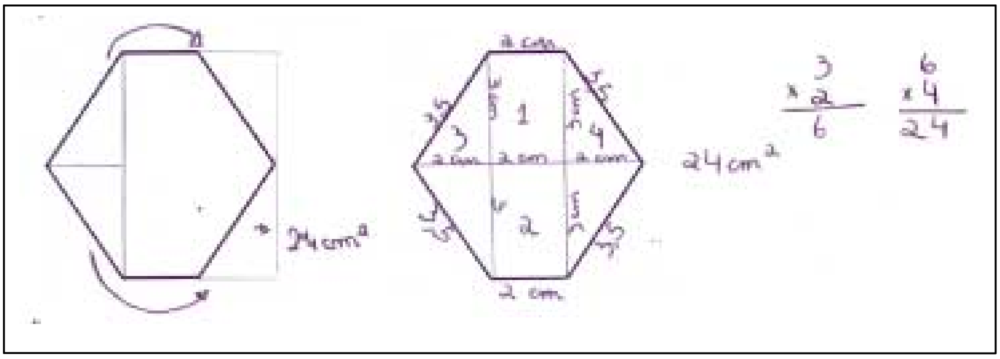


FIGURA 46 - PROTOCOLOS REFERENTES À DECOMPOSIÇÃO DO TRIÂNGULO.
ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (E)

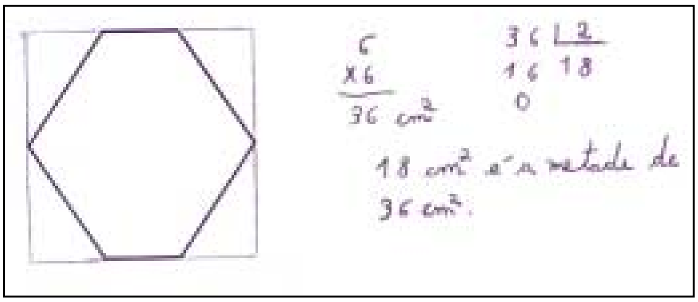


FIGURA 47 - PROTOCOLO DE ERROS DE UM ALUNO.
ATIVIDADE 6, EXERCÍCIO (E)

Na análise do quadrilátero, item (f), 21 alunos utilizaram explicitamente a decomposição da figura e 20 calcularam a medida de sua área. Observamos que essa figura obteve, quanto ao cálculo da medida de área, o menor número de acertos: dos 20 alunos que calcularam a medida de área, 3 (10,5%) acertaram, conforme Figura 48. Constatamos na análise do cálculo que 4 alunos confundiram área com perímetro de onde podemos inferir que este conhecimento não é ainda sequer mobilizável por esses alunos.

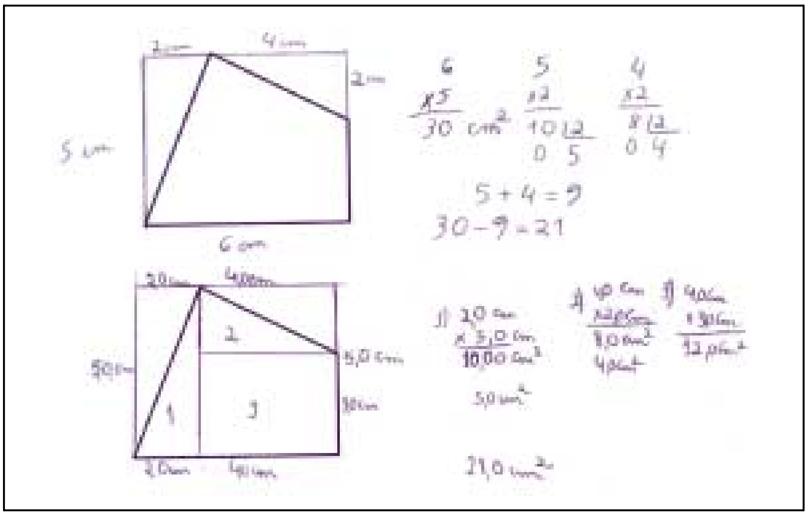


FIGURA 48 - PROTOCOLOS REFERENTES À DECOMPOSIÇÃO DO QUADRILÁTERO. ATIVIDADE 6, ITEM (F)

Nesse item, ocorreu o maior número de fichas de resolução em branco quanto à escrita da unidade de medida: 45% da turma, ou seja, 13 alunos. Mas, entre os que escreveram a unidade de medida, 73,3% (11 alunos) acertaram-na, conforme mostra a Tabela 22.

TABELA. 22 - RECONFIGURAÇÃO E CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS.

SITUAÇÃO: FIGURAS	TRAÇOS NA FIGURA		CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA		CÁLCULO CORRETO DA MEDIDA DE ÁREA		UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA	
	Alunos							
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
(d) Triângulo	22	75,5	24	82,5	15	52	16	55
(e) Hexágono	20	69	19	66	10	34	15	52
(f) Quadrilátero	21	72,5	20	69	3	10,5	11	38

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: participaram desta atividade 29 alunos.

TABELA.23 - DIFICULDADES NA RECONFIGURAÇÃO, CÁLCULO DE MEDIDA DE ÁREA E USO DE UNIDADE DE MEDIDA.

SITUAÇÃO: FIGURAS	TRAÇOS NA FIGURA		CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA		DIFERENÇA: ÁREA DE PERÍMETRO		UNIDADE DE MEDIDA ÁREA	
	Alunos*							
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
(d) Triângulo	4	14	9	31	5	17	6	21
(e) Hexágono	5	17	9	31	6	21	4	14
(f) Quadrilátero	3	10,5	17	58,5	4	14	5	17

FONTE: ficha de resolução dos alunos.
NOTA: participaram desta atividade 29 alunos.

As dificuldades ocorridas no processo de resolução dessa atividade (Tabela 21 e 23), poderiam ser trabalhadas na institucionalização dos conteúdos e em atividades de familiarização dos elementos e/ou situações de resolução, que se tornam ferramentas para estudos posteriores.

Tendo em vista o interesse dos alunos em concluírem a resolução dos exercícios, e o prolongamento das discussões dos grupos no decorrer da execução dos mesmos, a institucionalização ocorreu somente na aula seguinte. O professor utilizou debate coletivo e apresentação das resoluções pelos próprios alunos no quadro.

Contudo, se observarmos os resultados obtidos com as estratégias, utilizadas no processo de reconfiguração de figuras planas, para determinar perímetro, área e desenvolver o cálculo da medida de área, constataremos um grau de compreensão dos alunos bastante significativo.

Podemos considerar, o nosso objetivo atingido nessa proposta de ensino-aprendizagem, que pretendeu evidenciar o processo de reconfiguração de figuras planas por meio da decomposição e composição para possibilitar a compreensão de medida de área e área como grandeza autônoma.

Portanto, a proposta é válida para subsidiar a didática do professor bem como instigar os alunos a refletirem num processo de construção de um raciocínio lógico e adequado à resolução de problemas que envolvem cálculos com medidas de figuras geométricas.

Fechando a seqüência de atividades, apresentamos aos alunos a atividade 7, que trabalha com o mesmo raciocínio da atividade 6, mas com figuras mais complexas, para explicitar a eles que o uso adequado desse processo de reconfiguração é pertinente em qualquer figura geométrica, independente de seu grau de complexidade.

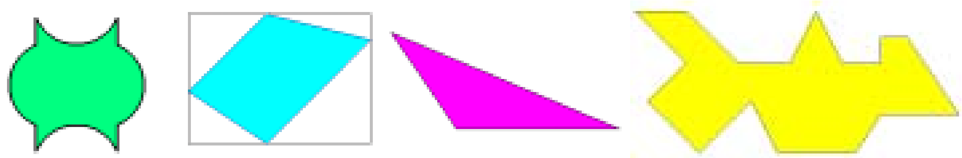
4.9. ATIVIDADE 7 - Composição e decomposição de figuras

A fim de reforçar o conteúdo estudado, a atividade 7 foi elaborada com figuras geométricas mais complexas, objetivando aumentar o grau de reflexão dos alunos. Procuramos mais uma vez, instigar os alunos a utilizar o processo de reconfiguração da figura por meio de sua decomposição e composição com traços externos e/ou internos na figura de partida.

A atividade compreendeu as figuras abaixo explicitadas:

Determine a medida da área das figuras coloridas abaixo:

a) b) c) d)



Como podemos observar, as figuras são de um grau de complexidade que tornam dificultosos a reconfiguração e o cálculo da medida de área. O grau de complexidade ocorre por apresentar o exercício: (a) uma figura com formas circulares, (b) um quadrilátero inscrito em um retângulo, (c) um triângulo que não é retângulo e (d) uma figura que estiliza um pássaro em pleno vôo.

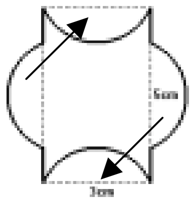
Nosso objetivo com esta atividade é que os alunos apliquem os conhecimentos já adquiridos com um pouco mais de reflexão, tendo em vista situações que exigem um cálculo mais aprofundado da medida da área.

O objetivo também diz respeito aos alunos evidenciarem, de forma gradativa, que qualquer figura geométrica plana pode ser decomposta e/ou composta em várias subfiguras, para possibilitar o cálculo da medida de área.

Para que esta atividade se desenvolva a contento, a presença do professor nas orientações e discussões é de suma importância, como também na introdução dessa atividade com uma síntese do conteúdo visto na atividade anterior e no fechamento com a institucionalização, para que não permaneça, nos alunos, dúvidas que venham a prejudicar a compreensão desse conteúdo.

Na figura (a), que apresenta formas circulares, caso os alunos componham um retângulo de 3 cm por 5 cm, trabalharão com medidas exatas. Dessa forma, acreditamos que o índice de dificuldades será pequeno, tendo em vista ser o processo de reconfiguração de figuras planas, por meio da decomposição e composição de figura, familiar a eles.

Para o cálculo da medida de área, item (a), os alunos poderão efetuar a multiplicação das medidas dos lados do retângulo para constatar que a medida de área tanto do retângulo quanto da figura de partida é 15 cm², conforme mostra a Figura 49.



$3cm \times 5cm = 15cm^2$

FIGURA 49 - EXEMPLO DE RECONFIGURAÇÃO DE FIGURA PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

Na figura (b), o formato e as medidas dos lados permitirão aos alunos desenvolver a decomposição de forma a utilizar ou não o retângulo circunscrito no quadrilátero dado. Acreditamos que, com os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, os alunos poderão desenvolver o processo da reconfiguração da figura de partida conforme uma das resoluções abaixo explicitadas para constatar o resultado de 17,5 cm² para a medida de área.

Resolução 1.

a) Decompor o quadrilátero em retângulos com traços internos;
b) considerando somente a região azul da figura de partida, calcular a medida de área de cada triângulo “azul”, para obter as medidas de área 4,5 cm², 2 cm², 8 cm² e 3 cm²;
c) efetuar a soma das medidas de cada triângulo e obter 17,5 cm² como resultado da medida de área do quadrilátero “azul”.

Equacionando e visualizando na figura de partida o acima exposto apresentamos a Figura 50.

$(3 \times 3)cm^2 : 2 = 4{,}5cm^2$

$(4 \times 1)cm^2 : 2 = 2\ cm^2$

$(4 \times 4)cm^2 : 2 = 8\ cm^2$

$(3 \times 2)cm^2 : 2 = 3\ cm^2$

$4{,}5\ cm^2 + 2\ cm^2 + 8\ cm^2 + 3\ cm^2 = 17{,}5\ cm^2$

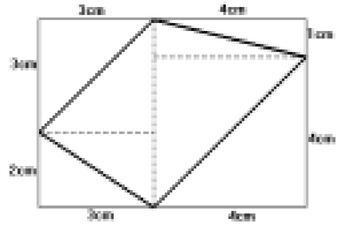


FIGURA. 50 - EXEMPLO DE RECONFIGURAÇÃO DO QUADRILÁTERO PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

Resolução 2.

a) Calcular a área do retângulo 7 cm por 5 cm para obter 35 cm² de área.
b) Calcular a medida da área dos triângulos externos à figura colorida para obter 17,5 cm².
c) Efetuar a subtração da medida da área do retângulo circunscrito na figura dada e a soma das medidas das áreas dos triângulos que compõem a figura dada, para obter a medida de área do quadrilátero "azul" igual a 17,5 cm².

Equacionando e visualizando na Figura 51, o acima exposto:

$(7 \times 5)\ cm^2 = 35\ cm^2$

$(3 \times 3)cm^2 : 2 = 4{,}5cm^2$

$(4 \times 1)cm^2 : 2 = 2\ cm^2$

$(4 \times 4)cm^2 : 2 = 8\ cm^2$

$(3 \times 2)cm^2 : 2 = 3\ cm^2$

$35cm^2 - 17{,}5cm^2 = 17{,}5\ cm^2$

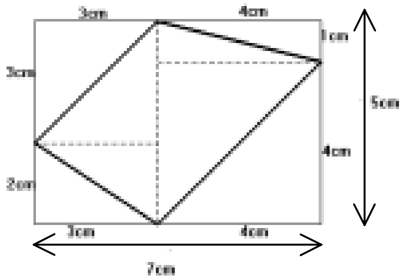


FIGURA. 51 - EXEMPLO DE RECONFIGURAÇÃO DO QUADRILÁTERO PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

No exercício (c), apresentamos um triângulo com a mesma forma do triângulo da atividade anterior, mas em posição diferente. Esse triângulo, que não é retângulo por se apresentar nessa posição, foi didaticamente escolhido para que os alunos compreendam que, independente da posição da figura, podem utilizar o processo da reconfiguração por meio da decomposição e composição de figuras planas para subsidiar o cálculo da medida de área.

Acreditamos que os alunos poderão efetuar uma das resoluções abaixo explicitadas:

Resolução 1.

a) Juntar figuras ao triângulo até torná-lo um triângulo retângulo de medidas 7 cm por 3 cm, com medida de área igual a 10,5 cm²;
b) calcular a medida da área do triângulo, de medidas 2 cm por 3 cm, externo à figura colorida;

c) subtrair as medidas das áreas do triângulo maior e do triângulo menor, para obter a medida da área da figura colorida igual a 7,5 cm².

Equacionando e visualizando na Figura 52 o acima exposto:

(7 x 3) cm² : 2 = 10,5 cm²

(3 x 2) cm² : 2 = 3 cm²

10,5 cm² - 3 cm² = 7,5 cm²

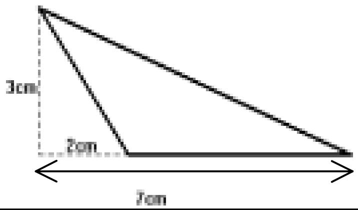


FIGURA. 52 - EXEMPLO DE RECONFIGURAÇÃO DO TRIÂNGULO PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

Resolução 2.

a) Decompor a figura de partida em dois triângulos retângulos menores de medidas 3 cm por 2 cm e 4,5 cm por 2 cm;
b) efetuar o cálculo da medida de área de cada triângulo, obtendo a medida de suas áreas ,3 cm² e 4,5 cm²;
c) efetuar a soma dessas medidas de áreas, obtendo a medida de área do triângulo dado igual a 7,5 cm².

Apresentamos o exposto acima na Figura 53.

(3 x 2) cm² : 2 = 3 cm²

(4,5 x 2) cm² : 2 = 4,5 cm²

3 cm² + 4,5 cm² = 7,5 cm²

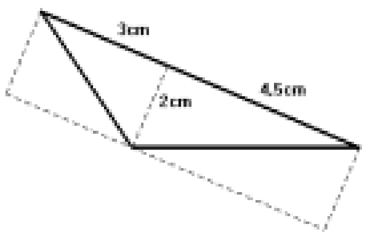


FIGURA. 53 - EXEMPLO DE RECONFIGURAÇÃO DO TRIÂNGULO PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

Em relação ao exercício (d), acreditamos ser um desafio para alunos de 5ª série, por se tratar de uma figura bastante irregular, que necessita de várias decomposições para o cálculo da medida da área total.

Para a resolução desse exercício, os alunos vivenciarão todas as especificidades da apreensão operatória descritas por DUVAL (1994), ou seja, trabalharão a decomposição da figura dada em partes, que se faz em função da relação entre parte e todo (mereológica); a reconfiguração da figura inicial (visual) ou farão correspondência e deslocamentos por rotação, translação entre outras situações (posicional).

Esperamos que nesse exercício, os alunos apresentem a decomposição da figura em subfiguras com respectivos cálculos de medida de área. Pelo grau de complexidade da figura, acreditamos que os alunos apresentarão dificuldades para constarem a medida de área correta da figura de partida.

Acreditamos que, no primeiro momento da análise, os alunos poderão fazer a decomposição e denominarão as subfiguras numerando-as. Num segundo momento, poderão efetuar os cálculos das subfiguras, conforme explicitamos como exemplo na Figura 54 abaixo. E, no terceiro momento, os alunos somarão todos os resultados para obterem como medida da área da figura de partida o resultado 36,625 cm².

(1) (2 x 3)cm² :2 = 3cm²
(2) (1 x 3)cm² = 3cm²
(3) (1 x 2)cm² = 2cm²
(4) (2 x 2)cm² = 4cm²
(5) (4 x 2)cm² = 8cm²
(6) (1 x 1,5)cm² :2 = 0,75cm²
(7) (3 x 1,5)cm² = 4,5cm²
(8) (1 x 2)cm²:2 = 1cm²
(9) (2 x 2)cm² = 4cm²
(10) (3,5 x 1,5)cm² = 5,25cm²
(11) (1,5 x 1,5)cm² :2 = 1,125cm²

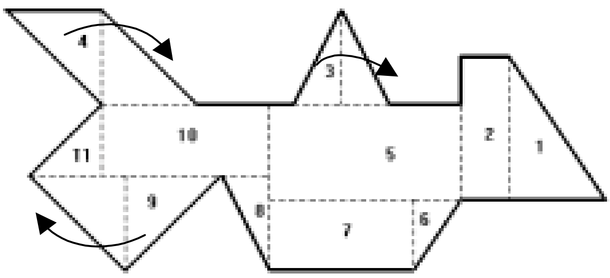


FIGURA. 54 - EXEMPLO DE RECONFIGURAÇÃO DA FIGURA IRREGULAR PARA O CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA.

Consideraremos como resposta correta todos os resultados compreendidos entre 36 cm² e 37 cm² para a medida da área da figura (d).

Aplicação da atividade aos alunos: resultados e discussões

O professor fez no início da aula uma síntese oral do conteúdo da atividade 6. Essa introdução foi esclarecedora para os alunos para trabalharem o processo de reconfiguração das figuras da atividade 7.

Após essas explanações, o professor desenhou no quadro uma figura qualquer e solicitou aos alunos que a reconfigurassem. Os alunos foram receptivos, pois a revisão feita, permitiu que refletissem sobre os procedimentos para chegarem ao cálculo da medida de área por meio da decomposição e composição das figuras.

Essas ações possibilitaram aos alunos uma reflexão sobre o conteúdo e, conseqüentemente, os resultados significativos quanto à viabilidade da proposta para o ensino-aprendizagem do conceito de área e medida de área, conforme Tabela 24.

TABELA 24 - RECONFIGURAÇÃO DE FIGURAS PLANAS, CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA E UNIDADE DE MEDIDA.

SITUAÇÃO: EXERCÍCIOS	TRAÇOS NA FIGURA.		CÁLCULO DA MEDIDA DE ÁREA		CÁLCULO CORRETO DA MEDIDA DE ÁREA		UNIDADE DE MEDIDA DE ÁREA	
	Alunos							
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
(a)	30	100	30	100	24	80	30	100
(b)	25	83,5	27	90	16	53,5	24	80
(c)	27	90	21	70	5	16,5	15	50
(d)	08	26,5	04	13,5	-	-	03	10

FONTE: Ficha de resolução dos alunos.
NOTA: Participaram desta atividade 30 alunos

Conforme observamos nos dados acima, os alunos não apresentaram dificuldades em desenvolver o processo de reconfiguração traçando subfiguras internas e externas à figura de partida. Pudemos constatar que a maioria dessas reconfigurações foi adequada a um possível cálculo da medida de área, conforme Figura 55, 56 e 57.

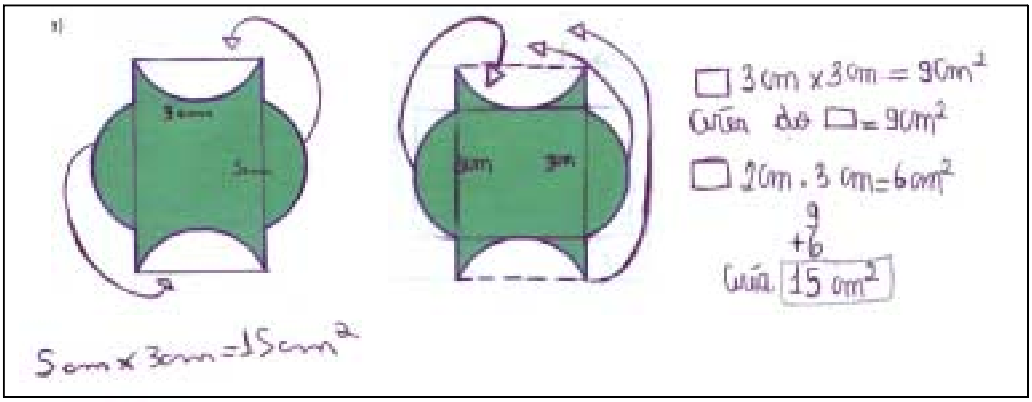


FIGURA 55 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTES AO EXERCÍCIO(A) DA ATIVIDADE 7.

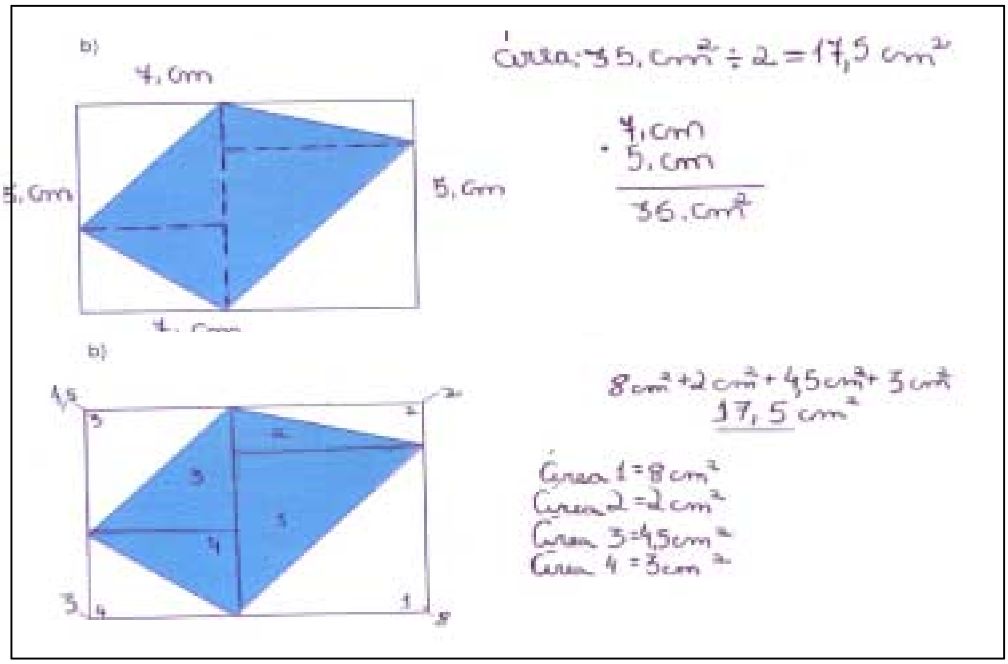


FIGURA 56 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTES AO EXERCÍCIO(B) DA ATIVIDADE 7.

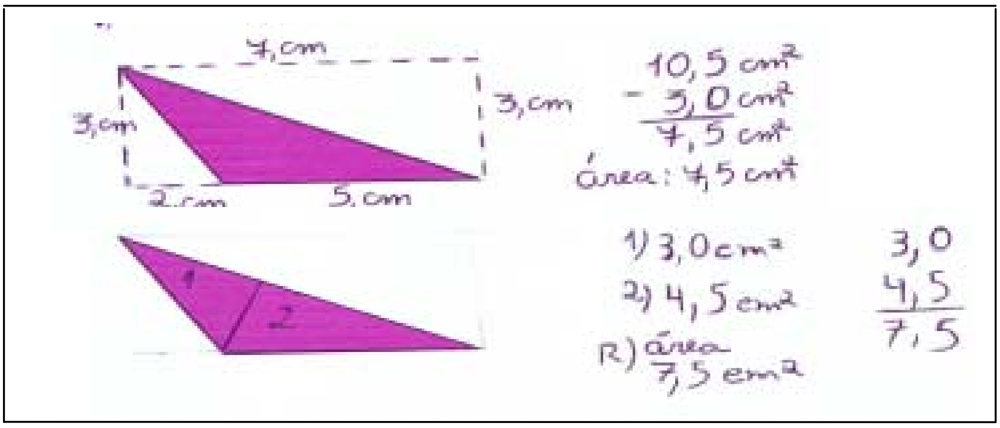


FIGURA 57 - PROTOCOLOS DE ALUNOS REFERENTES AO EXERCÍCIO(C) DA ATIVIDADE 7.

Quanto ao cálculo da medida de área do item (a), constatamos que somente seis dos 30 alunos erraram. Contudo, conforme as figuras se complexavam, o índice de erros com relação ao cálculo aumentava gradativamente. No exercício (b) 11 alunos dos 27 que calcularam não conseguiram acertar o cálculo da medida de área da figura de partida; no exercício (c), 16 dos 21 alunos também não conseguiram.

Quanto ao exercício (d), somente quatro alunos tentaram resolvê-lo tendo em vista o pequeno espaço de tempo reservado para a atividade (somente duas aulas) e a complexidade das figuras, que exigia mais raciocínio.

Contudo, acreditamos que o uso do processo de reconfiguração da figura por meio da decomposição e compensação delas, como também o cálculo da medida de área, feito nas subfiguras para constatarem o da figura de partida, foram satisfatoriamente desenvolvidos pelos alunos, conforme confirmam resultados da Tabela 23.

Observamos durante a execução das sete atividades, um acentuado progresso nos alunos quanto à diferenciação entre perímetro e área como também quanto à execução do cálculo de medida de área.

Constatamos que os alunos identificaram a área como uma grandeza autônoma, pois, na verificação da decomposição e composição das figuras de partida, eles já não confundiam superfície, perímetro e área, pois tomavam a área da figura como sendo além do espaço interno da figura o elemento que o preenchia. Logo, entendiam que a área de uma figura dada se tornava equivalente à área das subfiguras, tendo em vista o elemento que a preenche, ou seja, a unidade de medida.

Portanto, podemos concluir que esta proposta de atividades muito contribuirá para o estudo do conceito de área.

CAPÍTULO V

5. Considerações Finais

Esse trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área enquanto grandeza, por meio de uma seqüência de atividades, voltadas ao processo de decomposição e composição de figuras planas, a fim de facilitar ao professor o ensino desse conteúdo e, ao aluno, o aprendizado.

De acordo com análises feitas nas respostas do teste-piloto, aplicado por nós aos alunos de 5ª série do ensino fundamental, constatamos, de início, um grau de dificuldade relevante nos alunos para diferenciarem perímetro e área. Esse grau evoluía à proporção que os exercícios do teste exigiam um pouco mais de conhecimento do conteúdo área e sua medida.

Com essas análises e resultados de pesquisas sobre o tema, levantamos a seguinte questão de pesquisa: uma seqüência de atividades com o uso da decomposição e composição de figuras planas, como processo de ensino-aprendizagem, facilitaria o aprendizado do aluno ao conceito de área?

Por meio dessa questão de pesquisa procuramos confirmar a hipótese de que uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área como grandeza, voltado a reconfiguração de figuras planas por meio da decomposição e composição dessas figuras, facilitaria o processo aprendizagem-aprendizado do aluno como também subsidiaria o professor em suas escolhas didáticas para o ensino de conteúdos relacionados à área.

Reconhecemos como fundamentais à realização desse trabalho, as teorias de Raymond DUVAL (1988, 1991, 1994 e 1995), Régine DOAUDY (1986) e Régine DOAUDY e Marie Jeanne PERRIN-GLORIAN, (1989).

Assim nossa seqüência de atividades apoiou-se nas representações semióticas de forma e conteúdo, que tornam possível a construção dos conhecimentos, e, na reconfiguração de figuras como parte integrante do processo ensino-aprendizagem e do raciocínio lógico-dedutivo (DUVAL).

No decorrer da aplicação da seqüência, enfatizamos, comparando, reforçando e debatendo com os alunos o processo de decomposição e composição de figuras planas, evidenciando as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e seqüencial, de DUVAL, na resolução de situações em que a figura possui um papel heurístico.

A metodologia adotada nessa seqüência fundamentou-se também no trabalho de Régine DOAUDY e Marie Jeanne PERRIN-GLORIAN, que define a área como uma classe de equivalência a partir de uma função medida, para evidenciar a mesma área a partir do recorte-colagem ou da medida de figuras planas.

Para tanto, organizamos na seqüência de atividades, os processos de comparação/sobreposição/decomposição/composição de figuras planas (DOUADY) e configurações mereológicas em uma figura de partida (DUVAL).

O desenvolvimento dos alunos, durante a fase de aplicação da seqüência de atividades, e os resultados apresentados explicitaram que essa metodologia muito contribuiu para promover a evolução pessoal e intelectual desses alunos.

No início da aplicação da seqüência, percebemos que houve um certo entusiasmo da turma de alunos, tendo em vista à novidade quanto ao material e à técnica, utilizados nas duas primeiras atividades. Notamos que a turma trabalhava bem em grupos de três alunos, pois discutiam entre si e entre-grupos as solicitações dos exercícios, as resoluções, enfim, trocavam idéias para chegarem à solução dos problemas. Contudo, quando tinham de apresentar por escrito as conclusões e justificativas, não se sentiam à vontade, ocorrendo assim, exercícios incompletos ou em branco.

Durante as resoluções, muitas vezes os alunos ficavam à espera do professor para receberem orientações quanto ao procedimento a ser adotado ou aguardando uma explicação sobre alguma dúvida no decorrer do exercício. Entretanto, notamos que vários alunos desenvolveram com autonomia as atividades, procurando resolverem sozinhos os problemas expostos e discutirem com o grupo as soluções elaboradas.

Podemos inferir que essas habilidades foram possíveis, tendo em vista o tipo de atividade que investiu em uma maneira prática de representar uma situação e pelos procedimentos solicitados na resolução do problema por meio de questionamentos.

Vale salientar que quando o professor interferia com exemplos modelos, facilitava o raciocínio dos alunos, mas podava-lhes a criatividade. Entretanto, o papel do professor na aplicação das atividades foi fundamental nas fases de introdução e institucionalização dos conteúdos estudados. Nas atividades em que não ocorreu a institucionalização do conteúdo, explicitando síntese, discussão de resoluções e de soluções dos problemas trabalhados, as dificuldades nas atividades posteriores foram enfáticas, como também a familiarização do conteúdo ficou prejudicada.

Todavia, observando as análises dos resultados dos alunos, percebemos que eles procuraram resolver as questões, visto que a porcentagem de questões sem fazer foi baixa em relação ao número de alunos que participaram das atividades. Em todas as atividades, considerando a complexidade de cada uma, o índice de acertos foi significativo, otimizando a proposta quanto a sua viabilidade.

Por outro lado, tecemos críticas ao termo “quantidade de papel” para representar a área enquanto grandeza, tendo em vista a ambigüidade que o termo possa provocar, gerando obstáculos do tipo confundir medida de área com volumes entre outros. Sugerimos que o termo seja substituído por área.

O exercício 2 item b da atividade 3 apresenta aspectos negativos. Nesse exercício os alunos precisariam ter conhecimentos prévios quanto ao uso da régua de polegadas e o cálculo com medidas fracionárias. Pelo fato dos alunos envolvidos nessa pesquisa não possuírem esses conhecimentos, observamos que a resolução do problema ficou bastante prejudicada. Esse exercício exige mais de uma apreensão discursiva, pois os alunos deveriam ler, interpretar, fazer a conversão para o registro numérico e para o registro simbólico (polegada), como também realizar os tratamentos necessários para chegar à solução do problema.

Outras atividades, que também ficaram prejudicadas, foram as Lições de Casa I e II. Segundo o professor, os alunos não tinham o hábito de fazer “tarefas” e, como não houve um estímulo, por parte do professor, do tipo avaliar, corrigir e ou discutir as resoluções com os alunos em aulas posteriores, a maioria não devolveu as atividades para análise.

Discorrendo sobre os obstáculos epistemológicos e didáticos, citados no capítulo III dessa pesquisa, enfatizamos os didáticos como os principais desencadeadores de fatos que prejudicaram e ou retardaram o processo ensino-aprendizagem; o fato da pouca argumentação do professor durante as explanações em sala e a não realização da institucionalização (síntese e discussão), no final de cada atividade, dos conteúdos estudados.

No decorrer das análises e discussões, registramos nesse trabalho nossas considerações, após cada exercício resolvido pelo aluno, sobre a aplicação das atividades, os procedimentos e discussões dos alunos e professor, como também sobre a postura do professor mediante ao conteúdo, à atividade e aos alunos.

Das questões que exigiam melhor capacidade de apreensão operatória, decorrentes da necessidade de decomposição de figuras por meio de traços ou identificação de medida de área ou cálculo de área em figuras mais complexas, embora apresentando índices baixos de acertos, podemos concluir que, o caminho de resolução dos problemas foi se tornando cada vez mais fácil para os alunos. Esse fato foi possível tendo em vista à aplicabilidade dos procedimentos exigidos para o cálculo da medida de área.

Isso valida nossas hipóteses de que:

- a escolha de situações-problema envolvendo determinação de áreas de figuras geométricas, em particular áreas de polígonos, possibilita as comparações dessas figuras em termos de área como grandeza.
- O uso de uma seqüência de atividades, voltada à composição e decomposição de figuras planas para alunos da 5ª série do ensino

fundamental, facilitaria o processo ensino-aprendizagem do conceito de área.

Tornando isso concreto, podemos dizer que, ao iniciarmos a seqüência com atividades que investiram na comparação de figuras por sobreposição para a identificação de área (igual ou diferente) e, conseqüentemente, à diferenciação de perímetro e área, os alunos começaram a se familiarizar com a estratégia da compensação de partes, para visualizarem uma figura de fácil análise (quadrado, retângulo, triângulo retângulo).

A partir de então, elaboramos figuras mais complexas para provocar no aluno a reflexão e instigá-los à decomposição e composição de figuras por meio de traços internos e/ou externos a elas. Conseqüentemente, essas ações os levariam à compreensão do conteúdo em questão: conceber área enquanto grandeza, por meio da aferição de sua medida.

Entendemos, portanto, que a ferramenta-objeto – que para nós são os conceitos matemáticos que estão por trás da decomposição e composição – e o jogo de quadros – que se refere às identidades do figural (geométrico) e à aferição da unidade de medida de área (numérico) – viabilizam a compreensão do conceito de área, de medida de área, perímetro e superfície.

Entendemos ainda que as representações semióticas de forma e de conteúdo, explicitadas nas figuras estudadas, subsidiadas pelas apreensões, observadas por DUVAL, evidenciam uma evolução de construção de sentido e de operações, ou seja, de interpretação de raciocínio e de resoluções, que possibilitam a compreensão do problema e a sua solução.

Quanto à viabilidade da seqüência de atividades enquanto proposta de ensino-aprendizagem para o conceito de área.

Constatamos pelos resultados da aplicação da seqüência que as atividades nela constantes são significativas para uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área.

Isso valida nossa hipótese de que uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área enquanto grandeza subsidiaria a escolha didática do professor como estratégia de ensino para conteúdos que se relacionam à área.

Entretanto, para que essa proposta atinja seu pleno objetivo: facilitar o ensino e a aprendizagem do conceito de área, por meio do processo de reconfiguração de figuras e do uso do jogo de quadros, alterações devem ser feitas em alguns exercícios, tais como:

Atividade 1, exercícios 3, 4 e 5, substituir o termo “quantidade de papel” por “área”;

Atividade 2 - exercício 1, item (b) também substituir o termo “quantidade de papel” por “área”;
- exercício 2, reformular o enunciado para “As figuras do painel têm a mesma área? Como foi que você chegou a essa resposta?”

Atividade 3- exercício 2 item (b) substituir medidas fracionárias por medidas inteiras;
- exercício 2, colocar o item (c) antes do (b)

Lição de casa I - colocar exercício 2 antes do 1

Atividade 5 - exercícios 1, 2, 3 e 4, unir os itens (c) e (d) e reformular o enunciado para “c) Calcule a medida da área das superfícies das duas figuras: a do exercício item (a) e a que você desenhou, utilizando o cm² como medida de área”.

Nas atividades que for solicitada “Qual a medida da área...”, substituir esse enunciado por “Calcule a medida da área...”.

Sugerimos ainda que o professor, quando observar um grau elevado de dificuldade dos alunos, reforce o conteúdo com explanações e exercícios para fixação. Sugerimos também que o professor corrija esses exercícios num processo de institucionalização (síntese, discussão e conclusão) dos conteúdos.

Frente a algumas dificuldades constatadas no decorrer da aplicação dessa seqüência de atividades, é de nosso interesse continuar os estudos sobre a proposta de se trabalhar o processo de reconfiguração de figuras planas bem como o jogo de quadros, procurando aperfeiçoar os exercícios sob os pontos de vista didático e matemático.

O que se refere às finalidades, acreditamos ser preciso dar atenção a outro problema: a necessidade de melhor capacitar o professor para trabalhar a reconfiguração de figuras por meio do processo de decomposição-composição-compensação de figuras, para garantir um bom aprendizado nos alunos.

Destacamos também a necessidade de se dar mais importância aos estudos da Geometria, reservando um espaço maior na carga horária do curso, para que o professor consiga trabalhar com mais argumentação e discussão os conteúdos, como também diversificar estratégias para uma apreensão mais concreta dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.* CEMA (Caderno de educação matemática), v.3. São Paulo: PUC. 1997.

_____. *Fundamentos da Didática da Matemática:* Educação Matemática, PUC/SP. 2000

BALTAR, P. M. "*Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes:* une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège". 1996.Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble.

BELLEMAIN, P. M. B. *Elaboração e experimentação de uma engenharia de formação continuada de professores de Matemática relativa ao ensino-aprendizagem do conceito de área.* Livro de resumos do I SIPEM – Serra Negra-SP. 2000, p.304-310.

_____. *Estudo de situações problema relativas ao conceito de área.* Anais do 10º ENDIPE - Rio de Janeiro, 2000.

BELLEMAIN, P & LIMA, P. *Análises prévias à concepção de uma engenharia de formação continuada para professores de matemática do ensino fundamental.* Anais da 23ª reunião anual da ANPED – Caxambu. 2000.

_____. *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental.* Ed. Geral: John A. Fossa – Natal: SBHMat. 2002.

BIANCHINI, E.; MIANI, M. *Construindo Conhecimentos em Matemática* 5ª série. São Paulo: Moderna, 2000.

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim* 5ª série, São Paulo: FTD, 2000.

BONGIOVANNI,V.; VISSOTO,O. R.; LAUREANO, j. L. *Matemática e vida* 5ª série. São Paulo: Ática, 1995.

BOYER, C. B*. "História da Matemática"*, São Paulo: Edgard Bluche, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. *Lês obstacles épistemologiques et lês problems em mathématiques*", RDM, vol 4 nº2, 1983.

CHACE, A. B.(TRAD). *THE RIND MATHEMATICAL PAPYRUS*. (Classics in mathematics education; v.8). Reprint of the 1927-1929 ed, Published by Mathematical Associattion of América, Oberlin, Ohio. 1986, p. 115-122.

CHIUMMO, A. *O conceito de Áreas de Figuras Planas*: Capacitação para Professores do Ensino Fundamental*.* 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/São Paulo.

DOUADY, R. *Um exemple d'ingéniere didactique où sont à l'oeuvre jeux cadres et dialectique outil-objet.* Seminaires de didactique de mathematiques, Année, IRMAR de Rennes 1, 1986.

_____*Rapport enseigenement apprentissage: Dialectique outil-objet, jeux de cadres.* Cahier de didactiques, nº 3, 1987.

DOUADY, R. et GLORIAN, Marie-Jeanne Perin.*"Mesure des longueurs et des aires",* Institute de Recherche sur L'enseigment des Mathematiques, 1983.

_____ *Um processus d'apprentissage du concpt d'aire de surface plane",* Educational Studies in Mathematics 20, Kluwer Academic Publishers, Netherlands. 1989, p. 387-424.

DUVAL, R. *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence*. Annales de Didactique et de Sciences Cognititives, v.1. IREM de Strasbourg, 1988, p.57-74.

_____ *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.5. IREM de Strasbourg, 1993, p.37-65.

_____ *Les différents fonctionnememts d'une figure dans une démarche géométrique.* Nº 17 . IREM de Strasbourg, 1994, p.121-137.

_____*Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Paris: Peter Lang, 1995.

EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula-História da Geometria*. São Paulo: Atual. Editora, 1992.

_____ *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FRANÇA E. et al. *Matemática na vida e na escola* 5ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1999.

FRANCHI, A. et al. *Geometria no 1º grau: da composição a decomposição de figuras às fórmulas de áreas",* CLR Baileiro Editores Ltda, 1992.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI Jr, J. R. *A conquista da Matemática – Nova* 5ª série. São Paulo: FTD, 1998.

GIOVANNI, J. R.; PARENTE, E. *Aprendendo Matemática* 5ª série. São Paulo: FTD,1999.

GOUVÊA, F.A. T. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração*: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/ São Paulo.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática* 5ª série. São Paulo: Scipione, 1997.

LIMA, E. L. *"Áreas e Volumes",* Fundamentos da Matemática Elementar, Ao Livro Técnico S.A, 1973, p.1-22.

_____*Medida e Forma em Geometria.* Editora Lamgraf Artesanato Gráfico LTDA, 1991, p. 1-55.

LIMA, P. F. *Considerações sobre o ensino do conceito de áreas.* LEMAT, 1995, p.1-10.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília MEC/SEF. 1997. Matemática. Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.

NUNES, T: LIGHT, P; MASON, j. *Tools for thougth: the measurement of length and área.* Learning and Instruction, n.3. 1993, p. 39-54.

OBENGA, Théophile. *La géometrie égyptienne*: Contribution de l'Afrique antique à la Mathématique mondiale. Paris: Edition L' HARMATTAN, 1995, p. 73-91.

PERRIN-GLORIAN, M.J. *Representation de Fractions et des Nombres Decimaux Chez des Eleves de* CM_2 *et du College*. Petit X, nº10. 1986, p.5-29.

_____ *Aires de Surfaces Planes et nombres Decimaux Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM –6ème.* Thèse de doctorat d´état. Paris VII. 1992

PONTE, J. P. da. *A investigação sobre o professor de matemática.Problemas e perspectivas.* Livro de resumos do I SIPEM – Serra Negra-SP. 2000, p 7-12.

PREFEITURA MUNICIPAL DE SÃO PAULO, Secretaria Municipal de Educação, “*Matemática-Relatos e Práticas 4/8”,* Movimento de Reorientação Curricular – DOT, Documento 6, 1992.

ROBERT, A. *Outils d´analyse des Contenus Mathématiques à enseigner en Lycée et à L´université.* In Recherches en Didactiques des Mathématiques. 1998, 18/2, 139-190.

ROBINS, G. *The Rhind mathematical papyrus:* en ancient Egyptian text. London: Britsh Museu. 1987, p. 47-49.

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação.*Proposta Curricular para o Ensino de Matemática 1º Grau.* Coordenadoria e Estudos de Normas Pedagógicas – 4ª ed. 1992.

SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação. *Experiências Matemáticas.* 5ª série. Versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996.

SILVA, M. J. F da. *Sobre a Introdução do Conceito de Número Fracionário.* 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - PUC São Paulo.

SOUZA, M. H.; SPINELLI, W. *Matemática* 5ª série. São Paulo: Ática, 1999.

ANEXOS

Anexo I

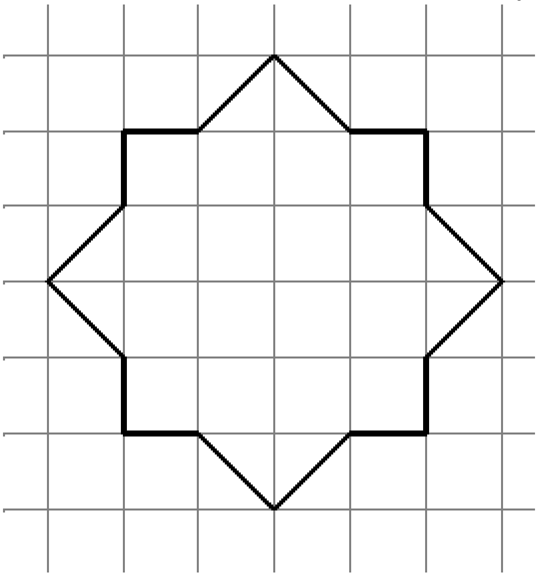
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
PROEM-PUC-SP / FAPESP

Projeto de Pesquisa:

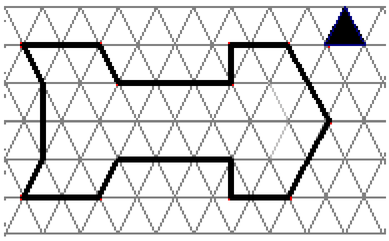
ESTUDO DE FENÔMENOS DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE NOÇÕES GEOMÉTRICAS.

TESTE DIAGNÓSTICO PARA PESQUISA DO ESTUDO DE ÁREAS

1) Calcule a área das figuras abaixo:
   a) utilize como unidade de medida o quadradinho da malha.

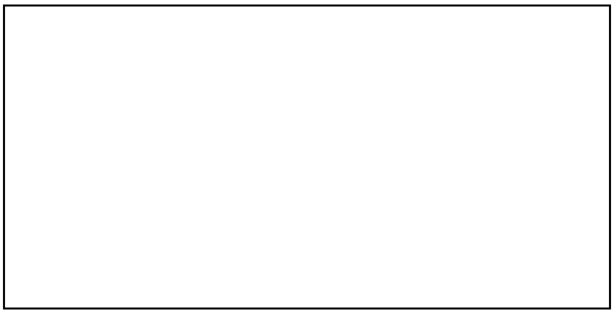


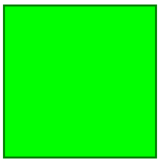
b) utilize como unidade de medida o triângulo da malha.



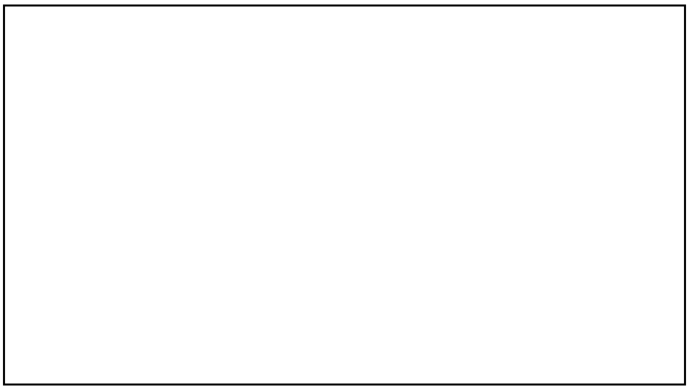
2) Calcule a área das figuras abaixo, utilizando o quadradinho que você recebeu como unidade de media de área.

a)



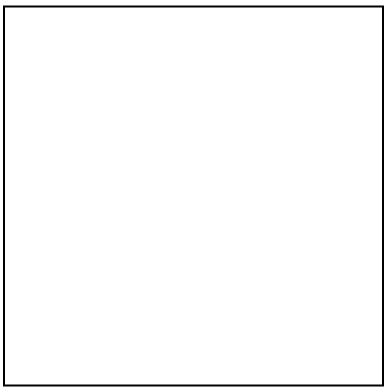


b)

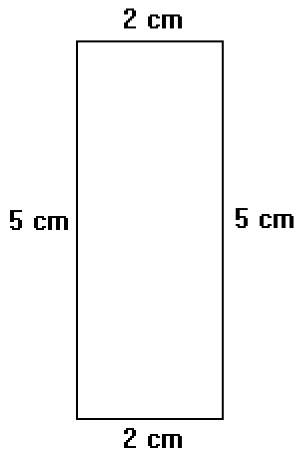


3) Calcule a medida de área das figuras abaixo:

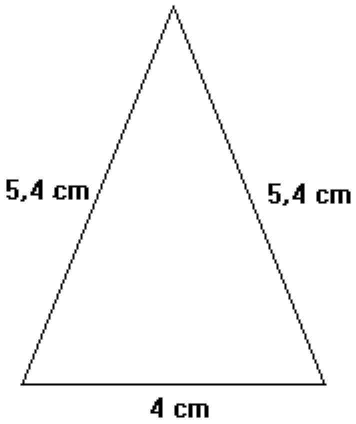
a)



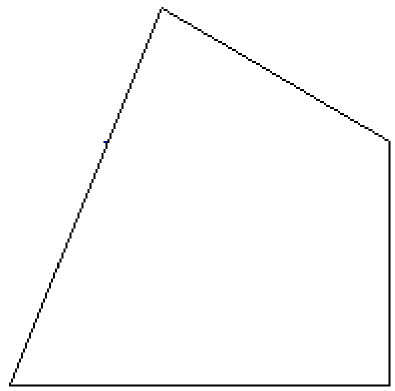
b)



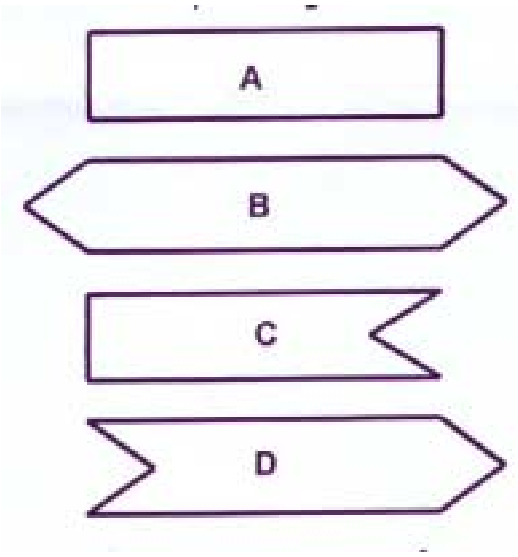
c)



d



4) Observe as quatro figuras abaixo[1]:



a) Identifique estas figuras da que tem a menor área à que tem a maior área. Justifique sua resposta.

b) Entre elas há figuras que têm a mesma área? Justifique sua resposta.

c) Identifique estas figuras da que tem o menor perímetro à que tem maior perímetro. Justifique sua resposta.

d) Entre elas há figuras que têm mesmo perímetro? Justifique sua resposta.

[1] Os exercícios 4, 5 e 6 foram retirados da tese de doutorado de Paula Moreira Baltar (1996, p. 21,27 anexos).

5) Desenhe duas figuras que tenha a mesma área e perímetros diferentes. Justifique sua resposta.

6) Desenhe duas figuras que tenha o mesmo perímetro e áreas diferentes. Justifique sua resposta.

Anexo II

FICHA DE OBSERVAÇÃO - ALUNOS

Turma: 5ª C

Grupo:____ Data: ___/___/___

Atividade 6

1) Relacionaram a figura (a) como metade de um retângulo?
( ) não. ( ) sim. Observações:

2) Registraram a medida dos lados do triângulo?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

3) Calcularam a medida da área da figura (a)?
( ) não. ( ) sim. Observações:

4) Apresentaram dificuldades para o cálculo da medida da área da figura (a)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

5) Efetuaram a decomposição da figura (b)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

6) Houve discussão no grupo em relação à decomposição da figura (b)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

7) Calcularam a medida da área de cada parte da figura (b)?
( ) não. ( ) sim. Observações:

8) Apresentaram dificuldades para calcular a medida da área da figura (b)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

9) Fizeram a decomposição da figura (c)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

10) Houve discussão no grupo em relação à decomposição da figura (c)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

11) Calcularam a medida da área de cada parte da figura (c)?
( ) não. ( ) sim. Observações:

12) Apresentaram dificuldades para calcular a medida da área da figura (c)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

13) Fizeram a decomposição da figura (d)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

14) Relacionaram a figura (d) como dois triângulos em composição com retângulos?
( ) não. ( ) sim. Observações:

15) Calcularam a medida da área de cada parte da figura (d)?
( ) não. ( ) sim. Observações:

16) Apresentaram dificuldades para calcular a medida da área da figura (d)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

17) Fizeram a decomposição da figura (e)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

18) Calcularam a medida da área de cada parte da figura (e)?
( ) não. ( ) sim. Observações:

19) Apresentaram dificuldades para calcular a medida da área da figura (e)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

20) Registraram a unidade de medida de área nas respostas?
( ) não. ( ) sim. Em que letra? Observações:

21) O grupo solicitou a presença do professor?
( ) não. ( ) sim. Observações:

22) Houve imposição de algum aluno no grupo?
( ) não. ( ) sim. Observações

23) Houve divergências no grupo?
( ) não. ( ) sim. Como trabalharam essas divergências? Observações:

24) Houve orientação do professor para o grupo em relação a alguma letra da atividade?
( ) não. ( ) sim. Em que momento? Observações:

26) Houve interferência feita pelo professor no grupo em relação a alguma letra da atividade?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

27) Como reagiram em relação à decomposição da figura (f)?

28) Calcularam a medida da área de cada parte da figura (f)?
( ) não. ( ) sim. Observações:

29) Apresentaram dificuldades para calcular a medida da área da figura (f)?
( ) não. ( ) sim. Qual? Observações:

Outras observações:

Anexo III

Nome:______________________________________ **Série:** ____

ATIVIDADE 1

1) Você recebeu dois objetos construídos com materiais diferentes: um com varetas e outro com cartolina.

Descreva as diferenças que você percebe nos dois objetos que recebeu.

____

____

____

____

2) a) Com as varetas que você recebeu, construa duas figuras diferentes, podendo ou não utilizar todo o material.

b) Faça um desenho dessas figuras e pinte sua região interna.

3) Recorte as figuras da **página 3** e responda as perguntas:

a) As figuras têm a mesma forma?

b) A quantidade de papel utilizada em cada uma delas é a mesma? Por quê?

4) Recorte as figuras da **página 4** e responda as perguntas:

a) As figuras têm a mesma forma?

b) A quantidade de papel utilizada em cada figura é a mesma? Por quê?

c) O que você pode concluir.

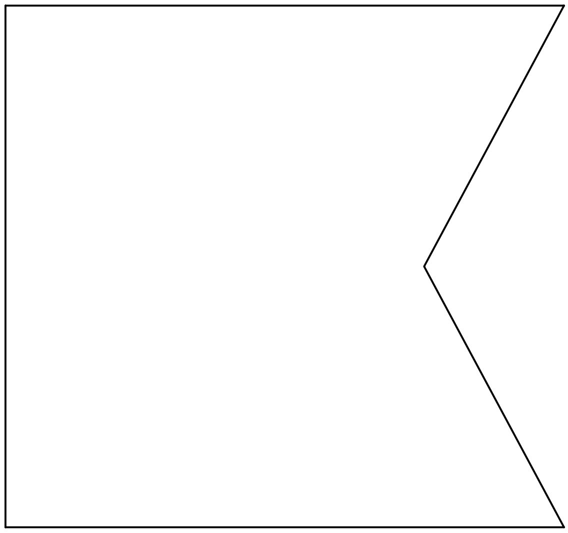
5) Recorte as figuras da **página 5** e responda as perguntas:

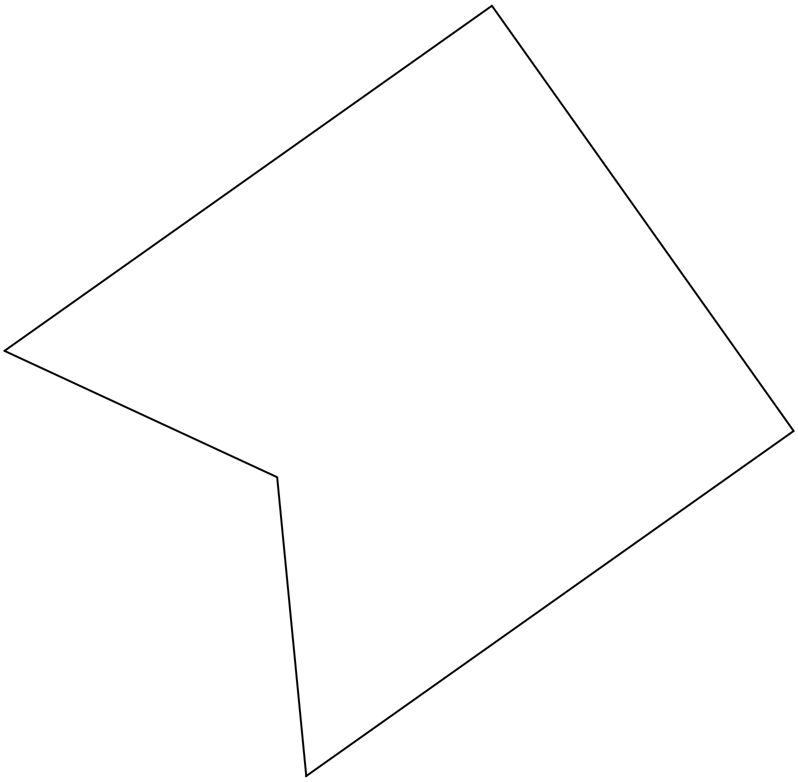
a) As figuras têm a mesma forma?

b) A quantidade de papel utilizada em cada figura é a mesma? Por quê?

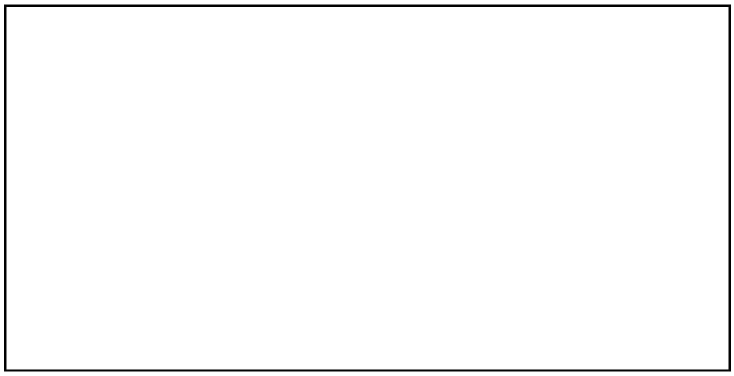
c) O que você pode concluir.

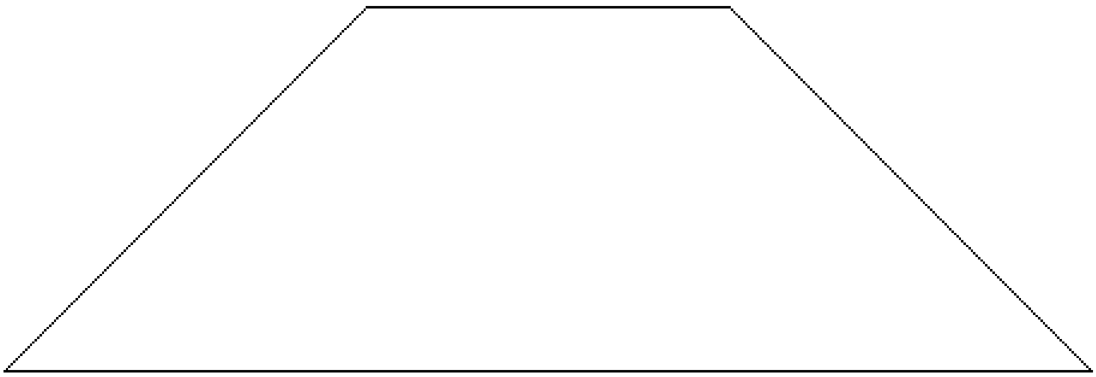
Figuras do exercício 3.



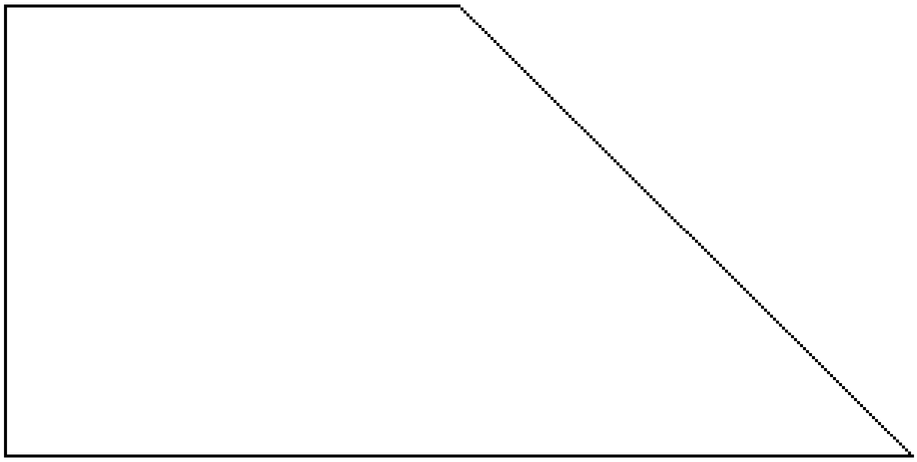


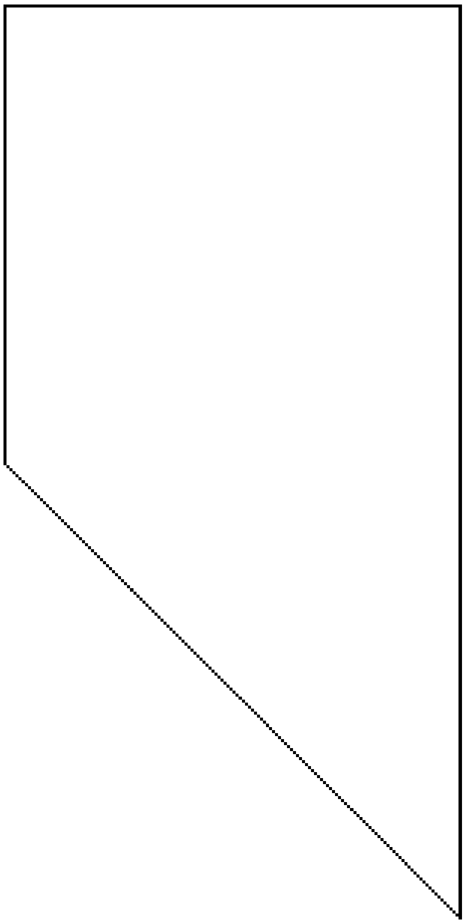
Figuras do exercício 4.





Figuras do exercício 5.



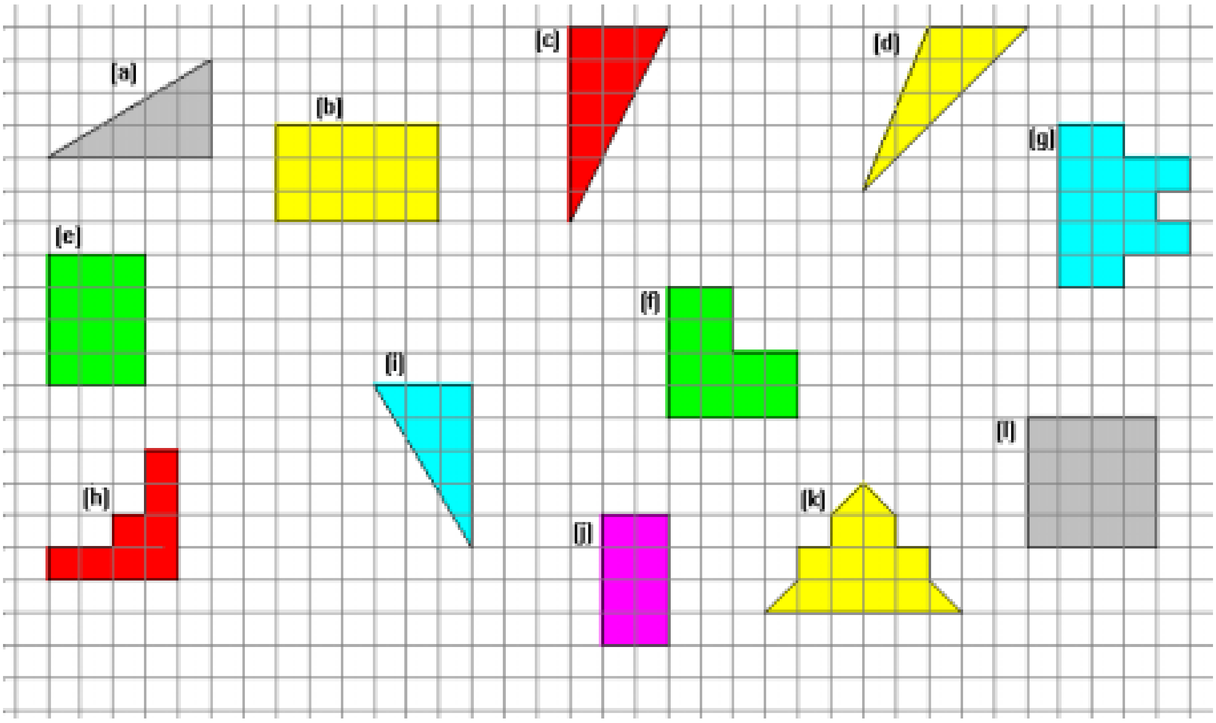


Anexo IV

Nome: ___________________________________ **Série:** _______

ATIVIDADE 2

1) Observe as figuras abaixo.



a) Identifique aquelas que têm a mesma forma.

____

____

b) Identifique as que têm mesma quantidade de papel.

____

____

c) A área depende da forma da figura? Dê um exemplo.

____

2) Mostre que as figuras 2, 3, 4 e 5 têm a mesma área que a figura 1.[2]

Figura 1

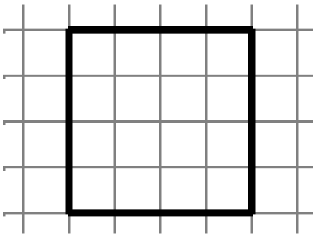


Figura 2

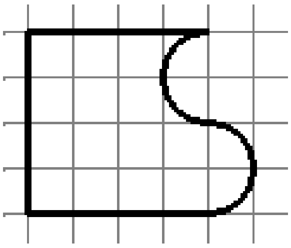


Figura 3

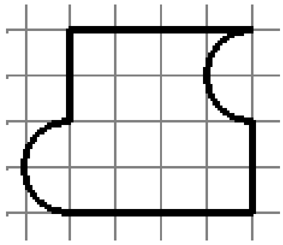


Figura 4

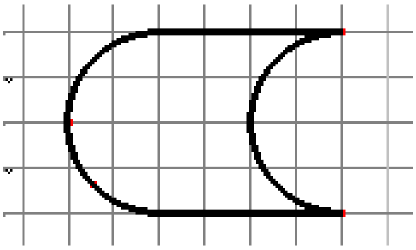
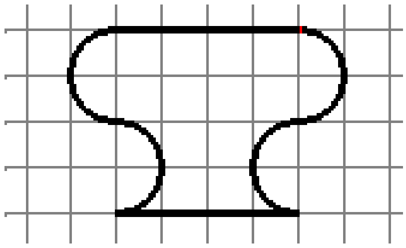


Figura 5



3) a) Utilizando a área da superfície do quadradinho de cada figura como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área tem cada figura.

Figura 1

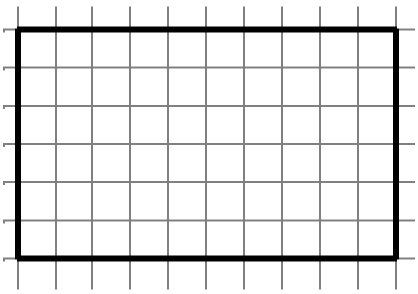


Figura 2

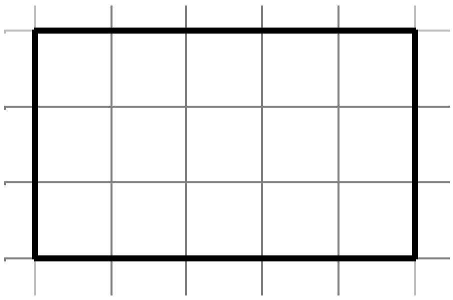


Figura 3

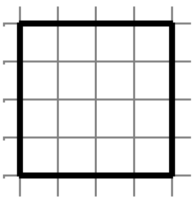
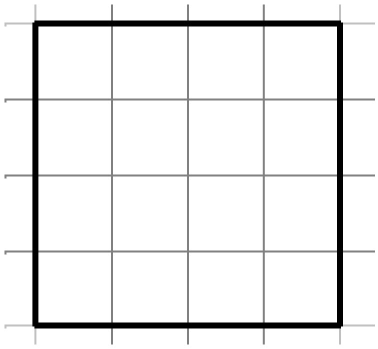


Figura 4



[2] Adaptado do livro *Mathématiques, Alpha Math 6^e*, de Pierre Curel e outros, Editora Hatier, 1995, p. 193.

b) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 1 e 2?

c) Que conclusões você pode tirar observando as figuras 3 e 4?

4) a) Utilizando a área da superfície do triângulo da malha como unidade de medida, verifique quantas unidades de medida de área contém cada figura abaixo.

Figura 1

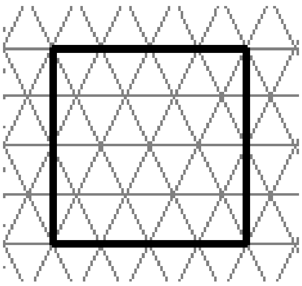


Figura 2

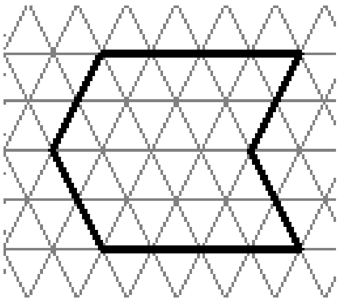
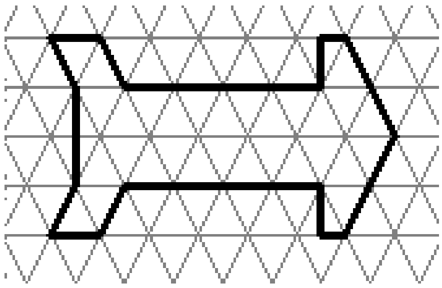
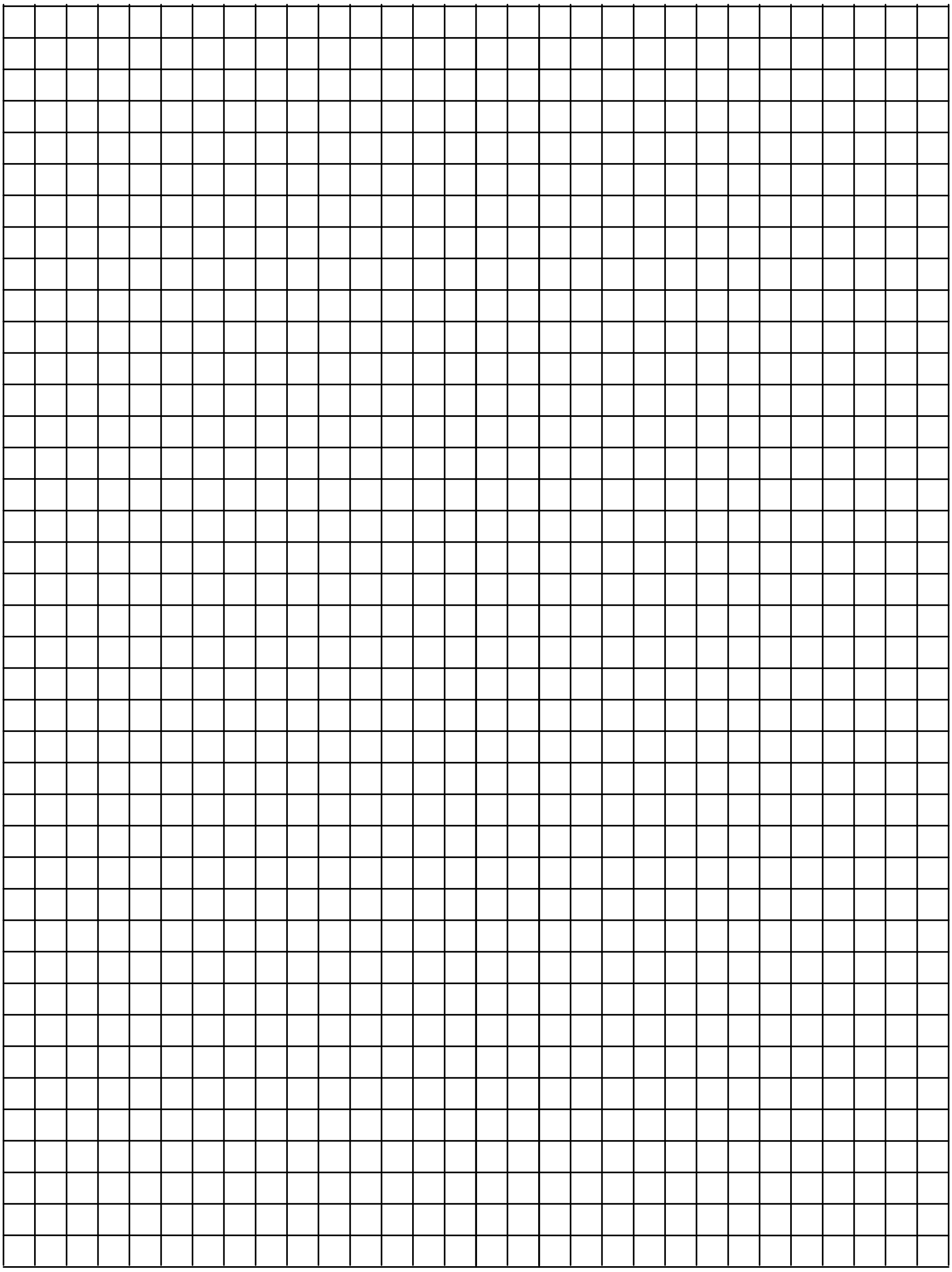


Figura 3



b) Anote aqui suas observações desta atividade.

5) Utilizando a área da superfície do quadradinho da malha como unidade de medida, desenhe figuras que tenha formas diferentes com 12 unidades de medida de área cada uma.



Anexo V

Nome: ____ Série: _____

ATIVIDADE 3

1) a) Construa abaixo, com régua e esquadro, um retângulo com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.

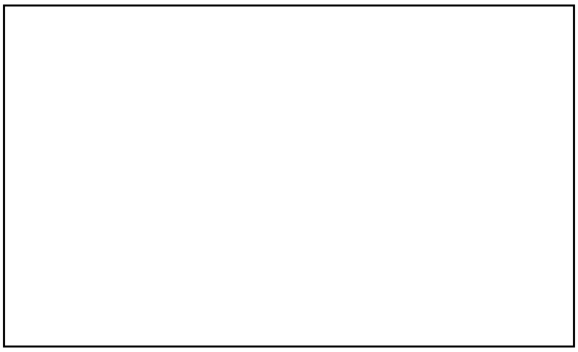
b) Quadricule a região interna desse retângulo e determine a medida de sua área.

c) Que medida você encontrou para essa área?

d) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por um quintal retangular com 8 m de comprimento e 4 m de largura?

e) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por uma reserva indígena com 8 km de comprimento e 4 km de largura?

2) a) Meça os lados do retângulo abaixo com uma régua em cm e calcule sua medida de área.



b) Você recebeu uma régua diferente das que conhece. Em vez de ter centímetros como unidade ela tem polegadas.

Utilizando a régua em polegadas determine a medida dos lados do retângulo acima e calcule a medida de sua área, considerando como unidade de área a superfície de um quadrado de lado medindo 1 polegada e representando por polegada ^{2} (pol^2).

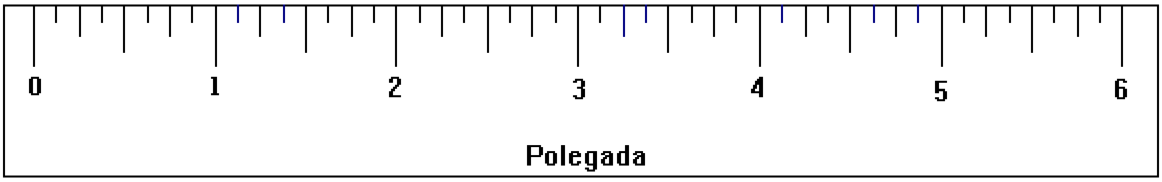
c) Você recebeu outra régua diferente das que conhece. Em vez de ter centímetro ou polegadas ela tem luas.

Com esta régua determine a medida dos lados do mesmo retângulo utilizado no item a e b e calcule a medida de sua área, considerando como unidade de área a superfície de um quadrado de lado medindo 1 lua e representando por lua ^{2}.

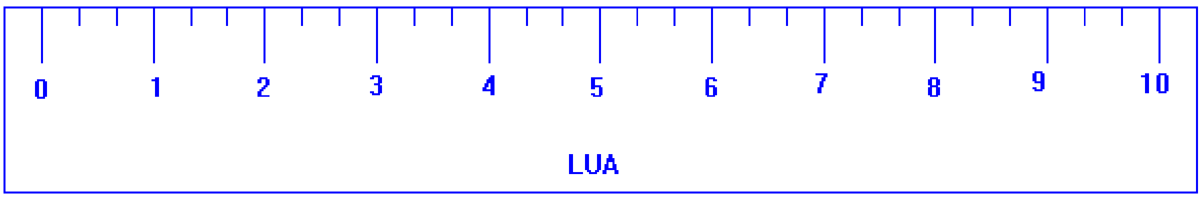
Material entregue aos alunos

(recortado)

1) Régua em polegadas - exercício 2 (b).



2) Régua em luas - exercício 2 (c).



Anexo VI

Nome: ____ Série: ____

ATIVIDADE 4

Você recebeu três pedaços de barbante, uma placa quadriculada e alfinetes para fixação.

a) Construa três figuras de formas diferentes usando o barbante e o alfinete para fixá-lo na placa.

b) Desenhe no espaço abaixo o contorno das figuras construídas. Identifique suas figuras numerando-as.

c) Qual a soma das medidas dos lados dessas figuras construídas?

Chamamos de **PERÍMETRO** de um polígono a soma das medidas de seus lados.

d)Qual a medida da área das superfícies que as figuras construídas determinam?

e) Anote aqui seus comentários sobre a atividade.

Anexo VII

Nome: ____ **Série:** ____

LIÇÃO DE CASA – I[3]

1) Desenhe no papel quadriculado, cinco retângulos que tenham perímetros iguais a 20 unidades e complete a tabela abaixo.
Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento e a superfície do quadradinho como unidade de medida de área.

	Comprimento	Largura	Perímetro	Medida da área
Retângulo A				
Retângulo B				
Retângulo C				
Retângulo D				
Retângulo E				

[3] Adaptado do livro: Experiências Matemáticas – 5ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. p.241

2) Desenhe no papel quadriculado, quatro retângulos que determinam superfícies que tenham áreas com medidas iguais a 36 unidades e complete a tabela abaixo. Considere o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento e a superfície do quadradinho como unidade de medida de área.

	Comprimento	Largura	Perímetro	Medida da área
Retângulo A				
Retângulo B				
Retângulo C				
Retângulo D				

Anexo VIII

Nome: ____ **Série:** ___

ATIVIDADE 5

Você está recebendo um jogo, chamado Tangram, contendo 7 peças.
Forme figuras com as peças do Tangram, obedecendo as seguintes regras:

- não deve haver sobreposição de peças;
- um lado de uma peça deve encostar-se a um lado de outra peça.

1) a) Forme figuras utilizando somente os dois triângulos pequenos.

b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma das figuras que você formou e pinte suas superfícies.
Identifique suas figuras numerando-as.

c) Qual a medida da área da superfície de cada figura construída?

d) Qual o perímetro dessas figuras?

2) a) Agora, forme figuras utilizando os dois triângulos pequenos e um triângulo médio.

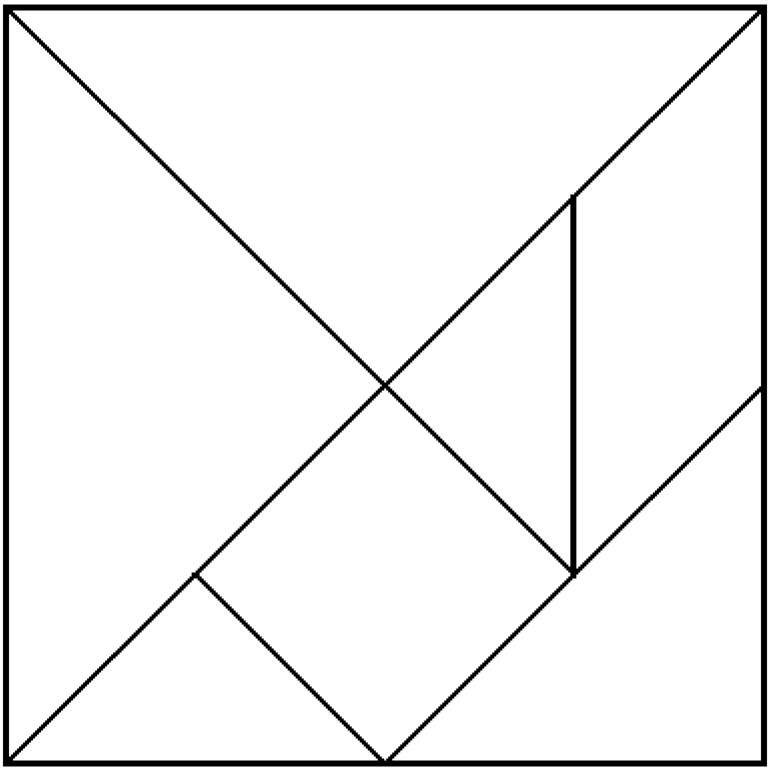
b) Registre no espaço abaixo o contorno de cada uma das figuras que você formou e pinte suas superfícies.
Identifique suas figuras numerando-as.

c) Qual a medida da área da superfície de cada figura construída?

d) Qual o perímetro dessas figuras?

Material entregue aos alunos

(recortado e colorido)

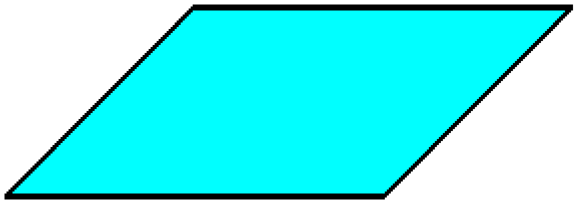


Anexo IX

Nome: ____ **Série:** _____

LIÇÃO DE CASA – II

1) a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura colorida?

e) Alterar a forma da figura, altera também a medida de sua área? Justifique sua resposta.

____

____

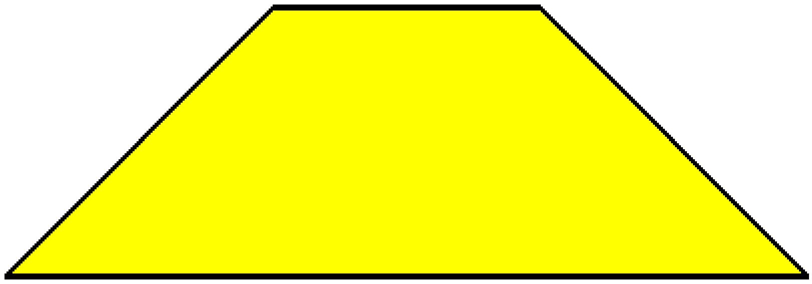
____

f) Alterar a forma da figura, altera também a medida de seu perímetro? Justifique sua resposta.

____

____

2) a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:

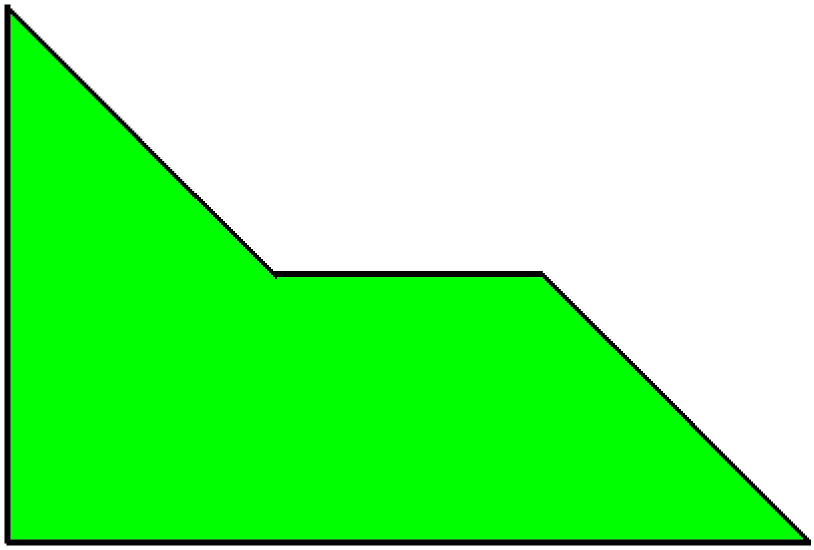


b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura colorida?

3) a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:

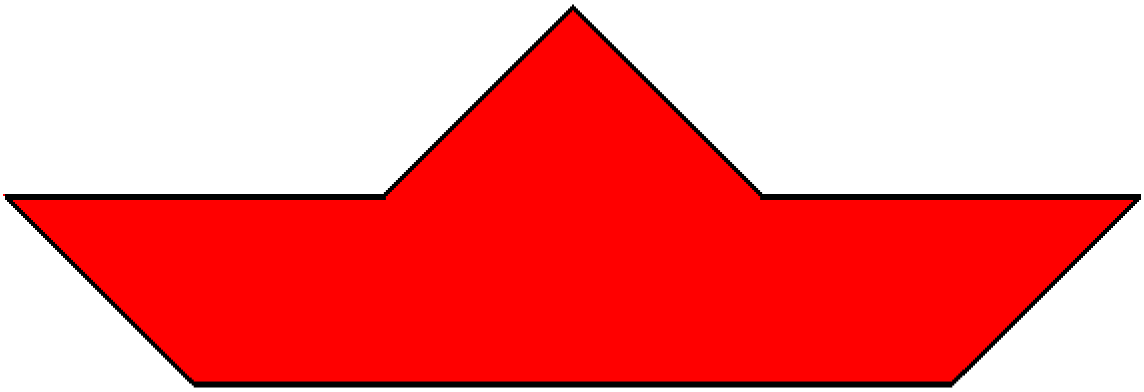


b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura colorida?

4) a) Utilizando o Tangram que você recebeu, verifique quais peças foram utilizadas para formar a figura abaixo:



b) Utilize as mesmas peças para formar um retângulo. Desenhe e pinte essa superfície retangular.

c) Qual a medida da área dessa superfície retangular?

d) Qual a medida da área da superfície da figura colorida?

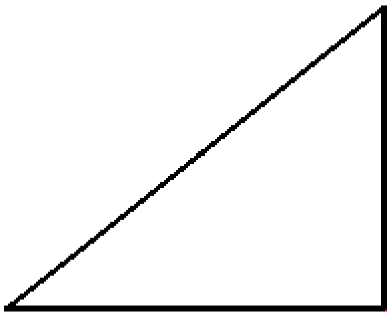
Anexo X

Nome: ____ **Série:** ____

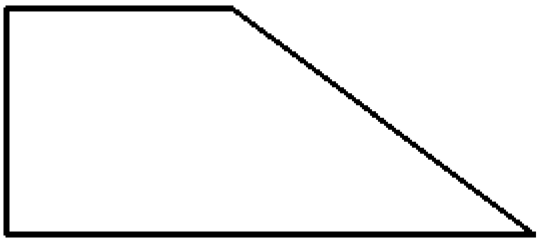
ATIVIDADE 6

1) Utilizando uma régua desenhe traços para decompor a figura quando achar necessário e calcule a medida de sua área.

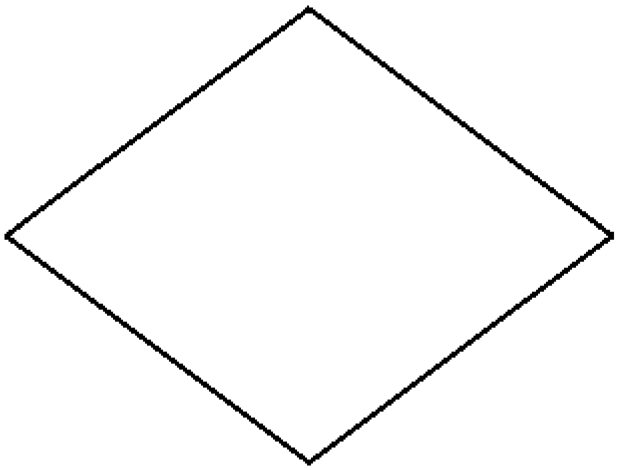
a)



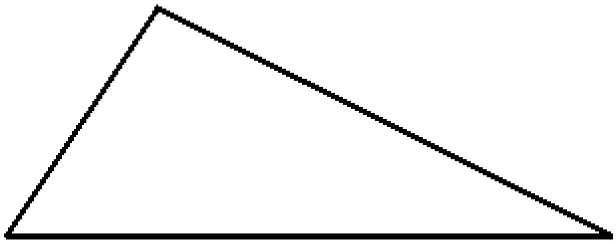
b)



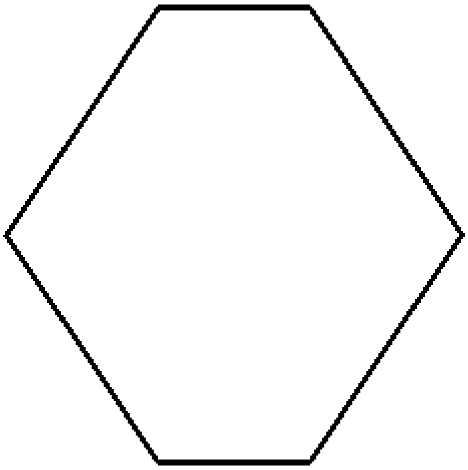
c)



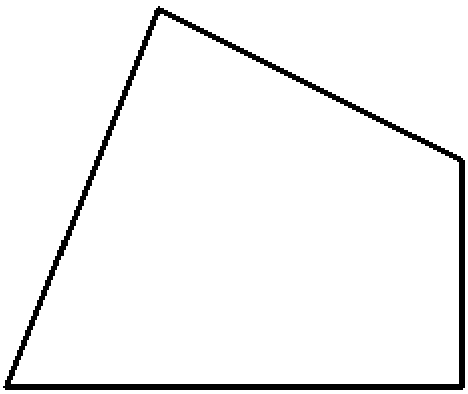
d)



e)



f)



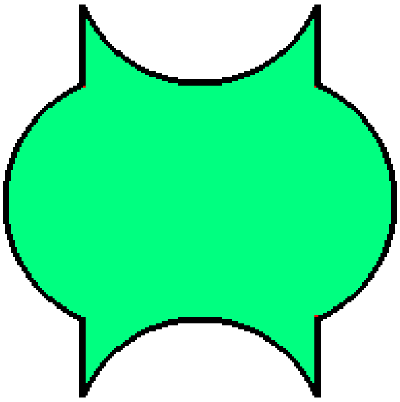
Anexo XI

Nome:____**Série:** ____

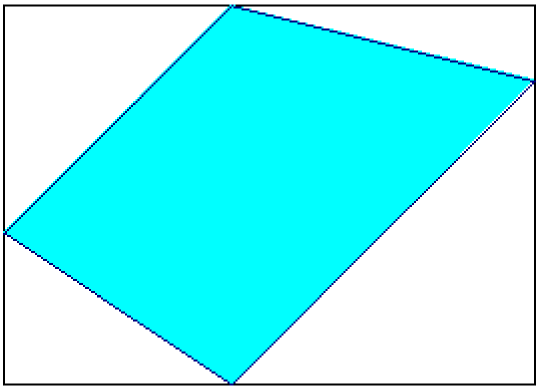
ATIVIDADE 7

1) Determine a medida da área das figuras coloridas abaixo:

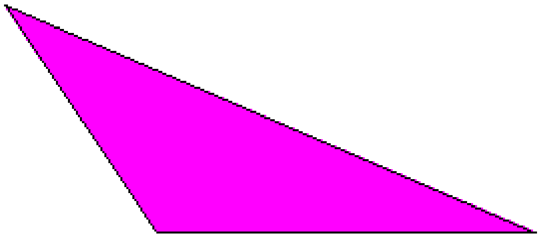
a)



b)



c)



d)