CRISTINA MEYER

DERIVADA/RETA TANGENTE:

Imagem Conceitual e Definição Conceitual

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2003

CRISTINA MEYER

DERIVADA/RETA TANGENTE:

Imagem Conceitual e Definição Conceitual

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Prof.a. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

PUC/SP

São Paulo

2003

Banca Examinadora

Dedicatória.

Aos meus pais e familiares,
com quem aprendi a buscar o que
de melhor existe nas pessoas, no mundo
e em mim mesma.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Senhor da Esperança, por fazer-me acreditar ser possível a realização desse trabalho.

À minha Orientadora, Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori, pela oportunidade de trabalharmos juntas, mas com autonomia, na elaboração dessa dissertação.

Às Professoras Doutoras Lulu Healy, Márcia Maria Fusaro Pinto, Silvia Dias de Alcântara Machado e Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, pelas contribuições oferecidas a este estudo.

A todos os professores do Programa, pois foram em suas aulas que aprendi a apreciar mais aos problemas que às soluções, mais às perguntas que às respostas, mais ao por descobrir do que ao já descoberto.

À amiga Carmen Silvia Pires Martins e ao meu irmão Eduardo May Meyer pela compreensão, amizade e ajuda.

À CAPES, pela bolsa concedida, sem a qual seria difícil a realização da pesquisa.

Aos alunos que participaram deste estudo.

À professora Mercedes, pela leitura e revisão deste texto.

A todos aqueles que estiveram comigo, neste caminho, e me fizeram crescer.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Esta é uma pesquisa de caráter diagnóstico. Objetiva investigar elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. É referenciada na teoria de David Tall e Shlomo Vinner sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual*.
Os sujeitos investigados são estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma Universidade particular do Estado de São Paulo, que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II. Dois tipos de instrumentos metodológicos foram utilizados: questionário e entrevista. Entre as conclusões, destacamos: interpretação da equação da reta tangente ao gráfico da função f como sendo a função derivada de f; interpretação da derivada da função f no ponto de abscissa x = a como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta tangencia o gráfico da função f; existência de sujeitos que verbalizam uma *definição conceitual,* relativa ao conceito de derivada, cujos elementos estão coerentemente relacionados com a “definição geométrica” desse conceito, mas ignorada por eles no momento da elaboração das respostas às questões propostas.

Palavras Chave: imagem conceitual, definição conceitual, derivada, reta tangente.

ABSTRACT

This is a diagnostic research. The objective of this research is to investigate elements of the concept image and concept definition related to the concept of derivative while interpreted geometrically. It is based on the David Tall and Shlomo Vinner theory about concept image and concept definition. The investigated persons are students of the Formation Course for Mathematic Teachers in a private university of the State of São Paulo, who already had attended classes of Calculus I e II. Two kind of methodological instruments were used: questionnaire and interview. Among the conclusions we detach: the interpretation of the equation of the tangent straight line to the graph of function f as being the function derived from f; the interpretation of the derivative of function f in the point of absciss x = a, as being the y coordinate b of the point (a,b) in which the straight line is tangent to the graph of function f; the existence of persons that verbalize a concept definition related to the derivative concept whose elements are related of a coherent form with the “geometric definition” of this concept, which is ignored by them at the moment of the elaboration of the answers to the proposed questions.

Key Words: concept image, concept definition, derivative, tangent line.

APRESENTAÇÃO

Este estudo tem um caráter diagnóstico e fundamenta-se nas noções teóricas da *imagem conceitual* e *definição conceitual*, relativas a uma noção científica, que foram desenvolvidas por TALL e VINNER(1981). Essas noções teóricas pontuam a diferença existente entre os conceitos matemáticos, quando formalmente definidos, e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos, distinguindo a matemática como uma atividade mental, da matemática como um sistema formal. Admitindo-se a existência dessa distinção, inserimos nossa pesquisa em um contexto no qual a importância de considerar-se a forma individual de se pensar em um conceito matemático é evidenciada.

No âmbito do ensino do Cálculo é sabido que as noções fundamentais desse ramo da matemática, dentre elas a noção de derivada, são fontes de dificuldades aos estudantes que cursam o ensino superior. Existem várias pesquisas no contexto do ensino/aprendizagem do Cálculo, indicando que os estudantes apresentam bons resultados quando realizam tarefas que enfocam os aspectos operatórios, e resultados menos satisfatórios, se essas tarefas enfocam aspectos conceituais (ORTON (1983); TUFTTE (1988); TALL e VINNER (1981)). Esse fenômeno tem relações com a existência de um tipo de conhecimento matemático, relacionado à compreensão dos conceitos, e com um outro, relacionado aos procedimentos adotados para realizar tarefas matemáticas. Assumimos que a compreensão de um conceito matemático, está associada ao estabelecimento de conexões entre as diversas partes do conhecimento matemático, relativo a esse conceito.

Nesta pesquisa, buscamos uma melhor compreensão do processo de estabelecimento das conexões entre as diversas partes do conhecimento matemático, relativo ao conceito de derivada, por meio da elaboração de um diagnóstico sobre elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos sujeitos pesquisados, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. Consideramos que poder inferir aspectos da *imagem conceitual* relativa a uma noção matemática, é um meio de poder inferir como o sujeito concebe essa noção. Assim, consideramos que a inferência de aspectos da *imagem conceitual* é necessária para enfrentar dificuldades de aprendizagem. Objetivamos com essa pesquisa, inferir como estudantes universitários que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II concebem e expressam o conceito de derivada quando, interpretado geometricamente.

A investigação foi realizada em duas fases (fase I e fase II). A fase I foi realizada em duas etapas (etapa 1 e etapa 2). Na etapa 1, um grupo de estudantes, organizados em duplas e ternas, respondeu por escrito a um questionário, com questões abertas para serem justificadas. Na etapa 2, um outro grupo de estudantes respondeu ao mesmo questionário individualmente, também por escrito. Na fase II, baseando-nos nas informações obtidas na fase I, selecionamos sujeitos dos dois grupos citados para serem entrevistados. Por meio da análise dos dados obtidos nas fases I e II elaboramos um levantamento de aspectos sobre a *imagem conceitual* e a *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos pesquisados.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. No Capítulo I, apresentamos a **Problemática e Quadro Teórico.** Nele, discutimos as noções teóricas de *imagem conceitual, definição conceitual* e *imagem conceitual evocada*. Apresentamos o problema de pesquisa, inserido-o no âmbito do referencial teórico escolhido.

No Capítulo II, são apresentados os **Procedimentos Metodológicos** utilizados na pesquisa. Nele, foram caracterizados os sujeitos pesquisados, descrevemos a realização das diversas fases e etapas da pesquisa, e analisamos os instrumentos de coleta de dados utilizados (questionário, questão motivadora e entrevista).

No Capítulo III, apresentamos a **Análise dos Resultados**. Nesse capítulo, são inferidos e analisados elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos pesquisados.

O Capítulo IV apresenta as **Considerações Finais.** É seguido pelas **Referências** e pelos **Apêndices** e **Anexos** referentes ao questionário, questão motivadora, transcrições das discussões ocorridas nos grupos, transcrições das entrevistas e protocolos dos estudantes.

CAPÍTULO I PROBLEMÁTICA E QUADRO TEÓRICO

1.1 INTRODUÇÃO:

O processo de ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tem sido alvo de interesse de pesquisadores da Educação Matemática de vários países. Esse interesse se deve à constatação de que as noções fundamentais desse ramo da matemática (números reais, funções, limite, derivada e integral) têm sido fonte de dificuldades aos estudantes que cursam o ensino superior.MITCHELMORE e WHITE (1996, p.79) afirmam que:

> A pesquisa dentro da compreensão do Cálculo tem mostrado um amplo espectro de conceitos que causam problemas para os estudantes. Em particular, a dificuldade dos estudantes com os conceitos abstratos de taxa de variação (Orton, 1984), limite (Cornu, 1981, Tall e Vinner, 1981), tangente (Vinner, 1982, Tall, 1987b), e funções(Dreyfus e Eisenberg, 1982; Even, 1993; Vinner, 1983; Vinner e Dreyfus, 1989) estão bem documentadas.

Essas dificuldades de compreensão podem ser resultantes de diversas causas e, investigá-las, é um dos objetivos fundamentais dos pesquisadores da Educação Matemática. AMIT e VINNER (1990, p. 3), por exemplo, referenciam-se, como segue, sobre dificuldades da aprendizagem da derivada: “O conceito de derivada é especialmente importante. Se este conceito não é bem entendido, então suas relações com velocidade, taxa de variação etc. não podem ser entendidas nas Ciências Naturais, e suas relações com o conceito de Valor Marginal não podem ser entendidas na Economia e na Administração de Negócios. “. Essa afirmação pode ser estendida às demais noções. Nossa atenção restringe-se à noção de derivada, objeto deste estudo.

ORTON (1983), ao estudar a compreensão dos estudantes sobre diferenciação, apresenta resultados indicando que estes têm bom desempenho em tarefas algorítmicas, tais como: determinação de derivadas por meio do uso de regras de derivação ou cálculo do coeficiente angular de uma reta tangente por meio da determinação da função derivada num ponto. No entanto, os mesmos estudantes apresentam dificuldades para interpretar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto específico, como um limite de uma função que expressa as inclinações das retas secantes que passam por este ponto de tangência.

ARTIGUE (1991, p.176) sintetiza os resultados obtidos por Orton em sua tese (1980), afirmando que a pesquisa mostra a presença de "um razoável domínio algorítmico algébrico em termos do cálculo de derivadas e primitivas, pelo menos para as funções simples", e "uma significante dificuldade em conceitualizar os processos de limite subjacentes às noções de derivada e integral". Tal pesquisa (Orton 1980)) fundamenta a elaboração do artigo "*A compreensão dos estudantes sobre diferenciação"* (Orton,1983), citado anteriormente.

AMIT e VINNER (1990) analisam em seu artigo as respostas de um único estudante a um questionário composto por duas questões sobre o conceito de derivada. Tais análises revelam que, apesar de alguns elementos das respostas desse estudante indicarem um bom entendimento do conceito em questão, existem outros que indicam a presença de uma "concepção inadequada" em referência às concepções aceitas pela comunidade matemática, relativas ao conceito de derivada. Tal concepção, que parece conduzir a linha de pensamento deste estudante quando ele tenta resolver um problema conceitual não rotineiro, é indicada pelos autores como uma possível causa para a produção de respostas insatisfatórias, do ponto de vista matemático, para a questão proposta.

Como professora de Cálculo Diferencial e Integral confirmo o que AMMIT e VINNER apresentam nesse artigo. Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal da derivada de uma função. Mas, freqüentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto, não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. Quando um estudante associa a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de derivada, o que é bastante freqüente em nossos cursos de Cálculo, tal processo de significação não o impede de ter sucesso na realização de tarefas ditas operatórias, mas pode contribuir para o insucesso na realização de tarefas que envolvam aspectos conceituais.

VINNER (1989), em uma investigação realizada junto a estudantes universitários cuja nota de matrícula em Matemática foi "A", propôs a seguinte questão: "O que é uma derivada?". As respostas fornecidas revelaram que somente

25% desses alunos conheciam a interpretação geométrica da derivada e apenas 6% conheciam a algébrica (a derivada como um limite).

Com o exposto objetivamos indicar a importância do tema escolhido para esta pesquisa e a oportunidade de sua realização.

1.2 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA NO ÂMBITO DE UM REFERENCIAL TEÓRICO.

No âmbito do ensino do Cálculo, é sabido que os estudantes apresentam bons resultados na realização de tarefas que enfocam os aspectos operatórios, e resultados menos satisfatórios se essas tarefas enfocam aspectos conceituais. AMIT e VINNER (1990), referenciando-se à pesquisa desenvolvida por TUFTE (1988), afirmam que a taxa de sucesso dos estudantes investigados em tarefas que abordam itens relativos à utilização de técnicas em Cálculo está entre 73% e 92%, enquanto que esta taxa mantém-se entre 7% e 22% quando as tarefas envolvem itens conceituais relativos ao Cálculo.

Este fenômeno evidencia uma questão amplamente debatida ao longo dos anos, que diz respeito à existência de diferentes tipos de conhecimento matemático: um deles relacionado à compreensão dos conceitos matemáticos, e o outro, aos procedimentos adotados para resolver tarefas matemáticas.

HIEBERT e LEFEVRE (1986) usam os termos "*conhecimento conceitual*" e "*conhecimento processual*" para referir-se a estes tipos de conhecimento matemático, e os define como segue:

> *Conhecimento conceitual* é caracterizado mais claramente como conhecimento que é rico em relações. Pode ser pensado como uma teia conectada de conhecimentos, uma cadeia na qual as relações são tão proeminentes quanto às partes discretas da informação. Relações penetram os fatos individuais e proposições de forma que todas as partes da informação estão ligadas a alguma cadeia. De fato, uma unidade do conhecimento conceitual não pode ser uma parte isolada da informação; por definição, é uma parte do conhecimento conceitual somente se o proprietário reconhece suas relações com outras partes da informação. (HIEBERT e LEFEVRE, 1986, pp. 3-4)

> Conhecimento processual... é formado de duas partes distintas. Uma parte é composta da linguagem formal, ou sistema de representação simbólica da matemática. A outra parte consiste dos algoritmos, ou regras, para completar tarefas matemáticas. (HIEBERT e LEFEVRE, 1986, p. 6)

Os autores evidenciam a importância de estabelecer-se uma melhor distinção entre os conhecimentos do tipo processual e conceitual, bem como a necessidade de melhor compreender as relações existentes entre conceitos e procedimentos, sustentando que cada tipo de conhecimento beneficia o outro, uma vez que o conhecimento matemático abarca a ambos. Eles afirmam que

> Nem todo conhecimento pode ser proveitosamente descrito como conceitual ou processual. Algum conhecimento parece ser um pouco de ambos, e algum conhecimento parece ser nenhum (dos dois tipos). Contudo, nós acreditamos que é possível distinguir entre os dois tipos de conhecimento e que tal distinção provê uma forma de interpretar o processo de aprendizagem que pode ajudar-nos a melhor entender as falhas e sucessos dos estudantes. (HIEBERT e LEFREVE, p. 3)

Nesta pesquisa, interessa-nos investigar o processo de estabelecimento de relações entre as várias partes da informação que constituem o conhecimento matemático. O estabelecimento de tais conexões caracteriza o que chamamos de compreensão conceitual. HIEBERT e LEFEVRE (1986, p. 4) afirmam que “talvez ‘compreensão’ seja o termo usado mais freqüentemente para descrever o estado do conhecimento quando uma nova informação matemática é apropriadamente conectada ao conhecimento existente.”.

TALL e VINNER (1981) constatam que, mesmo estudantes considerados bons (Conceito A ou B em avaliações institucionais), têm dificuldades em lidar com tarefas que necessitem de uma compreensão conceitual. Para eles, essas dificuldades podem residir na existência de conflitos quando se estabelecem divergências entre elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* de um mesmo sujeito sobre uma determinada noção científica.

As noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual* apresentadas por TALL e VINNER (1981) pontuam a diferença existente entre os conceitos matemáticos quando formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos, ou seja, é estabelecida uma distinção entre a matemática como uma atividade mental e a matemática como um sistema formal.

Para TALL e VINNER(1981, p. 152) “*imagem conceitual* descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais, as propriedades associadas e os processos”, isto é, tal estrutura pode conter imagens de representações visuais, impressões e experiências. Esta *imagem conceitual* é construída ao longo dos anos e vai modificando-se quando o indivíduo entra em contato com novos estímulos. Neste processo de formação da *imagem conceitual o* sujeito atribui ao conceito um símbolo ou um nome como apoio para a comunicação e manipulação mental. (TALL e VINNER, 1981, pp.151-152)

Ao desenvolver-se, a *imagem conceitual* não precisa ser coerente todo o tempo. Impulsos sensoriais excitam certos caminhos neuronais do cérebro e inibem outros, e assim, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da *imagem conceitual*. Para se referir a uma porção da *imagem conceitual* que é ativada em dado momento, utiliza-se o termo *imagem conceitual evocada.* Em diferentes momentos, imagens aparentemente em conflito podem ser evocadas. (TALL e VINNER, 1981, p. 152)

O termo *definição conceitual* é utilizado para indicar a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. (TALL e VINNER, 1981, p. 152).

Esta *definição conceitual*, segundo os autores, pode ser aprendida pelo indivíduo de uma forma "rotinizada" ou de uma forma mais significativa, relacionando-se em maior ou menor grau com a definição formal do conceito científico. Pode também constituir uma reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a *definição conceitual* é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua *imagem conceitual (*evocada). Se uma definição conceitual é construída pelo estudante ou lhe é dada, ele pode variá-la de tempos em tempos, e, desta forma, uma ***pessoal*** *definição conceitual* pode diferir de uma ***formal*** *definição conceitual,* sendo esta última a *definição conceitual* que é aceita pela comunidade matemática atual. Em alguns indivíduos a *definição conceitual* pode ser vazia ou virtualmente inexistente e, em outros, pode estar ou não coerentemente relacionada com outras partes da *imagem conceitual*. (TALL e VINNER, 1981, p. 152).

Convém, aqui, ressaltar a existência de dois diferentes significados atribuídos ao termo *imagem conceitual*, na literatura: um deles concebido por David Tall e, o outro, por Shlomo Vinner. TALL fornece os seguintes esclarecimentos ao comentar sobre a *imagem conceitual* e a *definição conceitual* como um de seus temas de pesquisa:

> Eu gostaria de declarar que isso tem levado a dois diferentes significados dados à imagem conceitual, na literatura. A definição de Shlomo foi filosoficamente baseada e foi um experimento pensado para analisar o que acontece quando estudantes focam de forma diferente sobre imagens e definições. Minha percepção foi humanamente baseada, de forma que onde Shlomo falava sobre ‘a mente’ e a pensava separada do cérebro em um sentido cartesiano, eu sempre pensei na mente como a forma do cérebro trabalhar, de forma que ela é uma parte indivisível da estrutura do cérebro. Shlomo tem escrito sempre sobre ‘imagem conceitual’ e ‘definição conceitual’ como sendo ‘duas células distintas’ o que o capacita a fazer análises refinadas das diferentes formas de trabalhar as duas idéias distintas. Como a ‘definição conceitual’ é uma forma de palavras que pode ser escrita ou falada, eu considero esta uma parte e parcela da total ‘imagem conceitual’ na mente/cérebro. (TALL, 2002)

Nós consideramos a definição de *imagem conceitual* apresentada por TALL e VINNER (1981) mais abrangente do que a apresentada por VINNER (1991), permitindo-nos conceber a *definição conceitual* como parte da *imagem conceitual*. Tal característica parece tornar tais noções mais operacionais, uma vez que busca contornar a questão do acesso às mesmas em outros indivíduos, isto é, busca contornar o problema do como investigar noções não verbais.

Nossas análises consideram *imagem conceitual* e *definição conceitual* como definidas em TALL e VINNER (1981).

Tendo como objeto de pesquisa a compreensão conceitual de noções científicas restringimos a investigação ao processo do ensino/aprendizagem do Cálculo, em especial, à noção de derivada.

Referenciamos nossa pesquisa na teoria de David Tall e Shlomo Vinner sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual,* buscando responder à seguinte questão:

Que *imagem conceitual* e *definição conceitual* podem ser inferidas de estudantes que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II, a partir dos aspectos relativos ao conceito de derivada, mobilizados por eles na resolução de tarefas que envolvam tal conceito? Que tipos de relações existem entre *imagem conceitual, definição conceitual* e a definição formal de derivada?

O conceito de derivada pode ser interpretado sob pontos de vista diversos. ARTIGUE (1991, p. 175), ao tratar das concepções dos estudantes sobre as noções de derivada relaciona algumas destas interpretações, afirmando que a derivada da função f em x = a pode ser vista como:

- O limite da razão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *quando h tende a zero.*

- O coeficiente de primeira ordem da expansão limitada a ordem 1 da função em a.(como no programa contemporâneo Francês).

- O coeficiente do termo de primeira ordem na expansão em série de f na vizinhança de a (ponto de vista de Lagrange).

- A inclinação da tangente em a.

- O número ou a função obtida pela aplicação de regras usuais de diferenciação conhecendo-se as derivadas das funções elementares.

Estes diversos pontos de vista coexistem nas concepções de vários professores, e preferir um ou outro deles pode ter relações com o contexto matemático abordado ou com preferências individuais. Desta forma, consideramos a existência de uma significativa diversidade de abordagens do conceito de derivada entre os professores de Cálculo em suas aulas, podendo ser dispensada uma maior atenção a este ou aquele aspecto do conceito de derivada que for julgado mais importante.

Para contribuir com esta multiplicidade de aspectos associados ao conceito de derivada, alguns livros didáticos atuais têm abordado essa diversidade de interpretações e aplicações da derivada em diferentes contextos. Paulo Boulos, em seu livro didático *Cálculo Diferencial e Integral – v. 1*, destina um dos tópicos do Capítulo 2 para discutir a derivada como uma taxa de variação. Neste tópico, a derivada é associada a outros conceitos, tais como: velocidade, aceleração, vazão, densidade linear e outros. No livro didático *Cálculo e Aplicações-v.1*, de autoria de Debora H. Hallet et al. , a derivada da função f em um ponto determinado é definida a partir da discussão dos conceitos de velocidade média, velocidade instantânea, taxa de variação média e taxa de variação instantânea, incluindo um tópico que trata de diversas interpretações para o conceito de derivada.

Desta forma, podemos supor a existência de uma ampla diversidade de representações visuais, imagens mentais e coleções de impressões e experiências relativas ao conceito de derivada, constituindo a *imagem conceitual* a ser investigada em alunos que já cursaram as disciplinas de Cálculo I e II.

Em vista da existência de múltiplos aspectos associados ao conceito de derivada, e da dificuldade de coordenar uma investigação que abarque a todos, decidimos focar nossa atenção na interpretação geométrica do conceito de derivada, redefinindo nossa questão de pesquisa para:

Que *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, podem ser inferidas a partir de aspectos da noção de derivada, mobilizados por estudantes na resolução de tarefas que envolvam tal conceito ?

Segundo VINNER (1991, p.73), ao tentar solucionar um problema específico, o indivíduo mobiliza uma parte da sua *imagem conceitual* (uma *imagem conceitual evocada) e n*ão se pode afirmar que sob diferentes circunstâncias a mesma imagem será evocada novamente. Assim sendo, esta pesquisa não pretende avaliar o sistema cognitivo do indivíduo pesquisado no que diz respeito ao conceito de derivada, mas somente a parte do sistema cognitivo que venha a ser ativado pelos problemas propostos.

O conhecimento de aspectos da *imagem conceitual* sobre uma noção matemática é um meio de conhecer como um sujeito que aprende concebe essa noção, informação necessária para enfrentar dificuldades de aprendizagem.

VINNER (1991, p. 67) afirma que, para entender sentenças do contexto da vida diária, não é necessário consultar definições, uma vez que muitas palavras utilizadas na linguagem cotidiana não têm definições. Assim, para compreender a sentença "Dentre os carros do estacionamento o meu carro verde é o melhor", não é necessário consultar definições. No entanto, quando se está em um "contexto técnico", definições devem ser consultadas; caso contrário, erros podem ser cometidos. Por exemplo, as definições matemáticas de quadrado e retângulo devem ser consultadas para que se possa entender a sentença "Dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área" Segundo o autor, as definições "têm o potencial de salvar você de muitas armadilhas que são reservadas pela *imagem conceitual*".(VINNER, 1991, p. 69)

VINNER (1991, p. 72) evidencia a dificuldade de treinar um sistema cognitivo a agir contra a sua natureza e forçá-lo a consultar definições, ou quando forma uma imagem conceitual ou quando trabalha em uma tarefa cognitiva. Para o autor "não existe força aparente que possa mudar os hábitos de pensamento do dia-a-dia, os quais são, em princípio, inapropriados para os contextos técnicos" (VINNER, 1991, p. 72).

No entanto, muitos professores de Cálculo continuam esperando, de forma não interveniente, que seus alunos consultem as definições formais para responder às questões que lhe são propostas, enquanto ignoram o papel da estrutura individual conceitual no processo de construção dos conceitos que subsidiam a formulação das respostas às referidas questões.

TALL (1991, p. 3) afirma que um fator que distingue o pensamento matemático avançado é a possibilidade da existência da definição formal e da dedução, destacando, também, possíveis deficiências nos métodos de apresentação dos conhecimentos matemáticos avançados. O autor ressalta que uma apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do aprendiz.

Tal discussão é retomada pelo autor (TALL, 1991, p. 7) que, inserindo-a no âmbito das noções da *imagem conceitual* e *definição conceitual*, sustenta que o matemático experiente não está livre da presença de conflitos internos, isto é, de ter em sua imagem conceitual elementos contraditórios relativos a um dado conceito. Porém, este matemático está capacitado a relacionar uma grande porção de conhecimentos dentro de uma seqüência de argumentos dedutivos. Para tais pessoas parece muito mais fácil categorizar seus conhecimentos de uma forma logicamente estruturada. Assim, um matemático experiente pode considerar útil a apresentação de um conteúdo matemático aos estudantes, de uma forma que evidencie a lógica existente. Por sua vez, o estudante, sem a experiência do professor que compartilha a compreensão matemática com a comunidade matemática, pode encontrar inicialmente dificuldades com a abordagem formal. Este fenômeno muitas vezes é visto pelo professor como falta de experiência ou entendimento da parte do estudante. Tal visão não é realista no contexto mais amplo das necessidades dos estudantes. Para estes estudantes o que é essencial é uma abordagem para o conhecimento matemático que se desenvolva como ele, estudante, se desenvolve, isto é, a presença de uma abordagem cognitiva que leve em conta sua estrutura de conhecimento e seus processos de pensamento.

É nesse contexto da abordagem do pensamento matemático avançado, descrito por David Tall, o qual evidencia a importância de considerar-se a forma individual de se pensar um conceito, que inserimos nosso trabalho de pesquisa.

1.3 OBJETIVO DA PESQUISA.

O objetivo desta pesquisa é investigar elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente por estudantes que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II, que podem ser inferidos a partir de aspectos da noção de derivada mobilizados por estudantes na resolução de tarefas que envolvam tal conceito.

CAPÍTULO 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 DESCRIÇÃO GERAL

Os sujeitos desta pesquisa são alunos de ciclos terminais do curso de Licenciatura em Matemática, que já cursaram a disciplina de Cálculo I e Cálculo II. A escolha por ciclos terminais visa encontrar indivíduos cuja *imagem conceitual* referente à noção de derivada possa estar enriquecida por experiências e aplicações desta noção em diversos contextos, uma vez que a *imagem conceitual* é construída ao longo dos anos, modificando-se conforme o indivíduo experimenta novos estímulos. (TALL e VINNER, 1981, p. 152)

É uma pesquisa de caráter diagnóstico, elaborada em duas fases distintas (fase I e fase II). A fase I foi estruturada em duas etapas. Na etapa 1, estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular do Estado de São Paulo, organizados em duplas e ternas, responderam por escrito a um questionário com questões abertas e justificadas. Na etapa 2, estudantes do terceiro ano do mesmo curso e universidade responderam ao mesmo questionário, individualmente e também por escrito.

O questionário foi elaborado de acordo com alguns aspectos metodológicos apresentados por VINNER (1991) em seu artigo e tomou por referência duas questões apresentadas por AMIT e VINNER (1990) em sua investigação.

Baseando-nos na análise dos dados obtidos na fase I, selecionamos sujeitos do terceiro ano e do quarto ano para participarem da fase II. Na segunda fase, os sujeitos selecionados foram entrevistados de forma individual ou em duplas, permitindo-nos coletar dados adicionais para a elaboração de um diagnóstico sobre aspectos específicos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente.

2.2 FASE I

2.2.1 Objetivo

Esta fase de pesquisa tem como objetivo realizar um levantamento inicial de elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos sujeitos pesquisados, relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente, bem como obter informações que orientem a elaboração de entrevistas e a escolha dos indivíduos participantes da fase II da pesquisa.

2.2.2 Descrição dos Procedimentos

Na etapa 1 fase I, aplicou-se um questionário (Apêndice 1) a sete alunos do quarto ano, presentes à aula, naquele dia. A aplicação do questionário ocorreu em horário de aula, durante duas aulas (cerca de 100 minutos) de uma das disciplinas do curso cuja professora responsável concordou em cedê-las, e foi gerida pela pesquisadora sem a participação de observadores. A professora manteve-se presente durante a aplicação, só intervindo uma única vez quando, por solicitação do pesquisador, respondeu a uma questão colocada por um dos sujeitos pesquisados sobre o significado matemático do termo “interceptar”, conforme consta na transcrição das discussões da dupla G-A. (Apêndice 4)

Os alunos agruparam-se espontaneamente em três grupos, G-A, G-B e G-C, sendo dois deles compostos por uma dupla de estudantes (G-A e G-B) e o terceiro (G-C), por uma terna. As discussões desenvolvidas durante a aplicação do questionário foram audiogravadas, e posteriormente transcritas. Para a terna G-C foram utilizados dois gravadores. Cada estudante entregou individualmente sua folha de respostas.

A opção por agrupar os sujeitos pesquisados e audiogravar as suas discussões, objetiva a obtenção de informações que possam esclarecer as formas de pensar e os pontos de vista desses indivíduos, bem como as dúvidas originadas pelas questões propostas. Tais elementos podem não aparecer nos registros escritos.

Consideramos que o ato de discutir permite a cada indivíduo uma análise crítica da sua resposta, podendo levá-lo a uma reformulação da mesma em uma forma diferente da que seria se respondesse ao questionário individualmente. Desse modo, decidimos pela realização de uma segunda etapa (Etapa 2), na qual os estudantes respondessem ao questionário de forma individual. Assim, na etapa 2 da fase I, aplicamos o mesmo questionário da etapa 1, com algumas modificações (Apêndice 2), a todos os nove estudantes do terceiro ano, presentes à aula, naquele dia, que foi respondido individualmente e por escrito.

Na etapa 2, a aplicação do questionário deu-se nas mesmas condições relatadas na etapa 1, isto é, em horário de aula, no período de duas horas/aula, gerida pela pesquisadora, sem a participação de observadores, e na presença da professora da disciplina.

Na etapa 1, obtivemos informações mais detalhadas sobre aspectos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada dos indivíduos pesquisados, por meio da análise das informações obtidas pela gravação das discussões. Na etapa 2, foi possível investigar aspectos da *imagem conceitua*l e *definição conceitual* a partir de dados coletados junto a cada indivíduo, sem a interferência das discussões em duplas, abrindo-se, assim, um maior leque de possibilidades para obtenção de informações relevantes.

A análise das respostas obtidas nas etapas 1 e 2 da fase I permitiu-nos a obtenção de um levantamento inicial de elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos sujeitos pesquisados, relativas ao conceito de derivadas quando interpretado geometricamente, bem como o fornecimento de dados que viabilizaram a elaboração das entrevistas que constituem a fase II da pesquisa.

2.2.3 Caracterização dos Sujeitos de Pesquisa.

Etapa 1

Da etapa 1 participaram sete alunos que compunham o quarto ano de Licenciatura em Matemática, período noturno, de uma universidade particular do

Estado de São Paulo. Tais alunos foram caracterizados por um de seus professores como “bons”, “participativos” e de “bom rendimento”.

Foram abordados de forma não voluntária, isto é, solicitou-se que todos os estudantes presentes à aula participassem da atividade proposta.

Um questionário foi entregue a cada sujeito no início da aula e foi pedido que formassem duplas para discutir as questões, especificando-se que cada um deveria preencher seu questionário, não sendo necessário que as respostas às questões representassem um consenso do grupo.

Como nos foi informado que a turma era composta por oito alunos, um dos sujeitos iniciou a resolução das questões individualmente, aguardando a chegada do oitavo.componente da turma, o que não ocorreu. Posteriormente, este indivíduo juntou-se a uma dupla existente, ficando o grupo G-C com três componentes.

Durante a aplicação do questionário, os estudantes mostraram-se empenhados em resolver as questões propostas, mantendo longas discussões durante o processo de formulação de respostas. Realizaram a atividade de maneira autônoma, isto é, poucos esclarecimentos foram pedidos, mantendo as discussões restritas aos grupos de trabalho. Houve relutância por parte de alguns sujeitos em entregar o questionário incompleto, isto é, com algum item em branco. Os três grupos utilizaram cerca de 100 minutos para responder ao questionário.

A presença do gravador provocou, em alguns, uma reação de inibição, levando-os a comunicar-se em voz baixa, o que acarretou trechos de gravações inaudíveis.

Etapa 2

Da etapa 2 participaram nove alunos de uma turma do terceiro ano de Licenciatura em Matemática, período noturno, da mesma universidade da etapa 1. Foram caracterizados pelo mesmo professor citado na etapa 1 como sendo alunos “fracos” e “pouco participativos”. Como na etapa 1, a abordagem foi feita de forma não voluntária.

Um questionário foi entregue a cada sujeito, sendo-lhes solicitado que fosse resolvido de forma individual, após serem fornecidas informações gerais sobre os objetivos da pesquisa.

Durante a aplicação do questionário, muitos deles mostraram-se constrangidos pela impossibilidade em formular respostas para as questões propostas, mostrando-se pouco à vontade diante de questões não convencionais. Algumas respostas apresentam justificativas, citando a impossibilidade de determinação da derivada da função f em um ponto x = a, devido à ausência de uma lei de correspondência para f, e foi constante a presença de questões sem solução (em branco).

Os estudantes desenvolveram suas atividades de forma autônoma e poucos foram os pedidos de esclarecimento sobre as questões. Apenas um sujeito questionou uma possível imprecisão no gráfico apresentado na Q–1.

Alguns deles concluíram rapidamente a atividade proposta, entregando os seus questionários com quase a totalidade das questões em branco, enquanto outros, empenharam-se mais em buscar soluções, ou ao menos, em comentar as razões pelas quais não conseguiram resolver as questões propostas. Os estudantes que buscaram completar a atividade proposta levaram cerca de 80 minutos para concluí-la. Alguns estudantes comentaram sobre dificuldades ocorridas no desenvolvimento do curso de Cálculo I, justificando com esse argumento o insucesso na realização da tarefa.

Foi-nos informado pelos próprios sujeitos e confirmado por um dos professores da Instituição que durante o primeiro ano do curso, três professores distintos foram, sucessivamente, designados para dar o Curso de Cálculo Diferencial e Integral I dessa turma.

2.2.4 Questionário

O questionário foi composto por cinco questões, relacionadas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente (Apêndice 1).

Pesquisas que investigam formas de conceber e expressar conceitos matemáticos (VINNER, 1991; AMIT e VINNER, 1990; TALL e VINNER, 1981) e questões presentes em manuais didáticos utilizados no Brasil (STEWART, James. Cálculo, vol 1; BOULOS, Paulo. Cálculo Diferencial e Integral – vol 1) foram tomadas como referência para elaboração das questões propostas.

Observamos o sugerido por VINNER (1991, p.74), buscando elaborar questões diretas para obter informações sobre a *definição conceitual* e questões indiretas para a obtenção de informações sobre aspectos da *imagem conceitual* de um indivíduo, relativa a um dado conceito.

Consideramos as questões diretas, tais como, “O que é uma derivada?” ou “O que é uma função?”, mais adequadas para estimular o sujeito a verbalizar a sua forma de conceber um conceito, enquanto que as questões indiretas são consideradas mais adequadas para estimular o sujeito a expor impressões, propriedades associadas e imagens relativas ao conceito abordado, que estejam sendo mobilizadas para resolução dessas questões.

Diferindo um pouco do proposto por VINNER (1991, p.74) para as questões diretas, evitamos perguntar “O que é derivada em um ponto qualquer?”, pois consideramos que, em nosso sistema educacional, tal pergunta pode remeter o estudante à busca, em memória, de uma definição formal para o conceito de derivada, afastando-o, talvez, de sua própria reconstrução pessoal da definição do conceito questionado, ou levando-o a não respondê-la, caso não se lembre da definição formal. Julgamos a forma alternativa “O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer? Defina ou explique como desejar” mais convenientes para investigar-se aspectos da *definição conceitual.* Não pretendemos com esta mudança evitar a definição formal, mas apenas confirmar a existência de um espaço para a verbalização do conceito abordado conforme o sujeito o conceba, mesmo que não tenha em memória a sua definição formal.

Assim as questões Q-1, Q-2, Q-3, e Q-5 são indiretas e objetivam informar aspectos da *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada, enquanto a questão Q-4 é direta, pois pretende investigar aspectos da *definição conceitual* relativa ao referido conceito.

As questões Q-1, Q-2 e Q-3 objetivam abordar a interpretação geométrica do conceito de derivada, isto é, pretendem verificar as relações estabelecidas entre o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado ponto, a tangente trigonométrica do ângulo formado por essa reta tangente e o eixo x, orientado no sentido anti-horário, e o valor numérico da função derivada neste ponto.

A Q-5 visa investigar as relações estabelecidas entre a interpretação geométrica do conceito de derivada e seu significado como taxa de variação instantânea.

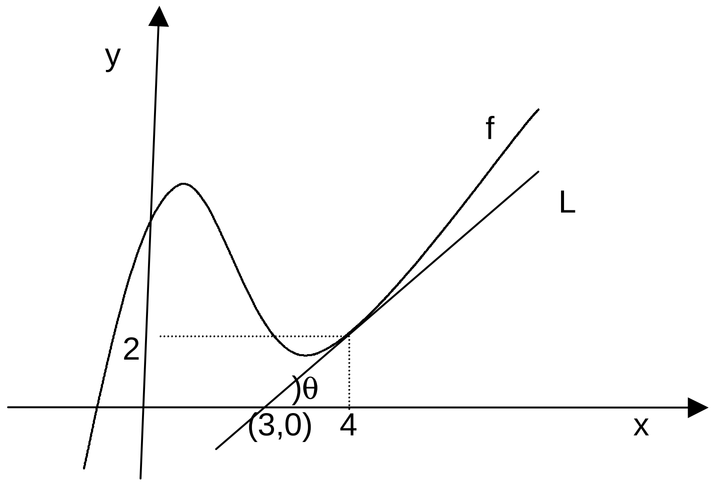
Para evidenciar tais aspectos da *imagem conceitual*, as questões Q-1, Q-2 e Q-5 utilizam-se de uma figura como meio de mobilização de uma representação visual do conceito de derivada. Existe a expectativa de que o conceito de derivada esteja associado a essa representação visual, o qual seria evocado pela figura da reta L tangenciando o gráfico da função f no ponto (a,b) e mobilizado para formular as respostas a estas questões.

A questão Q-3 não apresenta um gráfico representativo das funções envolvidas no problema proposto, possibilitando-nos verificar se o indivíduo mobiliza ou não a interpretação geométrica do conceito de derivada, na ausência do estímulo visual fornecido por uma figura.

2.2.5 Análise das Questões

Questão 1 (Q-1)

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (4 ,2).



a) Determine $f'(4)$.
b) Determine $tg\theta$.
Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a “passo a passo”.

A questão Q-1 é uma adaptação de uma das questões apresentadas por AMIT e VINNER (1990, p.5) em uma pesquisa na qual investigavam algumas "concepções inadequadas" em referência às concepções aceitas pela comunidade matemática relativas ao Cálculo Diferencial e Integral.

Esta questão admite mais de um tipo de solução. Pode-se determinar a equação da reta L cujo coeficiente angular é a derivada da função f em x = 4. Para tal, pode-se utilizar a forma reduzida da equação de uma reta dada por y = mx + n válida para os pontos (3,0) e (4,2), ou o cálculo do determinante da matriz real formada pelos pontos pertencentes à reta, cujos componentes são $a_{11} = 3$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = x$, $a_{32} = y$, $a_{33} = 1$.

Uma outra solução é determinar-se a tangente trigonométrica do ângulo identificado na representação gráfica por meio do quociente entre as medidas do cateto oposto e cateto adjacente do triângulo retângulo formado pela reta L, o eixo x e a reta x = 4, associando-a ao valor da derivada da função f em x = 4.

A solicitação da tangente trigonométrica no item b pretende favorecer uma possível mobilização de uma im*agem conceitual evocada,* relativa ao *conceito de derivada* que inclua a derivada de f em x = 4 como sendo o valor da tangente trigonométrica do ângulo θ, podendo funcionar como um estímulo à memória do sujeito pesquisado. Esperamos que os procedimentos de resolução adotados pelos sujeitos relacionem os itens a e b possibilitando a identificação das relações estabelecidas entre a tangente trigonométrica, o coeficiente angular da reta fornecida pela equação da reta tangente e a função derivada no ponto especificado. Admitimos, aqui, a possibilidade de alguns sujeitos conceberem o valor do coeficiente angular da reta tangente L como sendo um procedimento no qual é calculado um quociente entre as variações Δy e Δx, não relacionando tal quociente à tangente trigonométrica do ângulo θ.

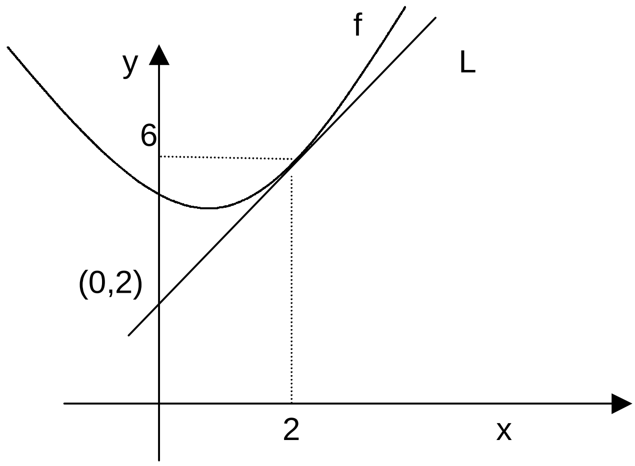
As duas variáveis: escolha dos pontos e escolha da reta L, foram controladas por nós. Os pontos foram escolhidos com coordenadas que sejam números inteiros e positivos, de modo que, operados aritmeticamente, produzam, como resultado, números inteiros, evitando-se os possíveis erros que possam advir das operações com números racionais fracionários. As coordenadas do ponto de interseção da reta L com eixo x foram explicitadas no gráfico na forma de par ordenado, de modo a evitar-se erros na sua representação, ou seja, buscou-se evitar que o sujeito, ao invés de indicar o referido ponto pelo par (3,0), utilizasse a indicação incorreta (0,3). Temos encontrado em nossa prática docente alunos que produzem este tipo de erro ao representarem, na forma de par ordenado, um ponto pertencente a um dos eixos coordenados de um gráfico.

Evitamos a utilização de retas cujo coeficiente angular m fosse 1, pois temos encontrado, em nossa prática docente, alunos que apresentam dificuldades em identificar o valor do coeficiente angular de retas com equação $y = x+b$. Caso os sujeitos pesquisados adotassem procedimentos para resolver a questão nos quais encontrassem uma equação do tipo $y = x + b$ para a reta L, uma identificação incorreta do valor do coeficiente angular desta reta poderia contribuir para a produção de uma resposta incorreta, do ponto de vista matemático.

Convém ressaltar que a questão foi elaborada com a expectativa de que os sujeitos determinassem a equação da reta e, a partir desta, obtivessem o coeficiente angular, ou calculassem o coeficiente angular por meio da tangente trigonométrica de θ. Buscou-se controlar as variáveis citadas de acordo com estas expectativas. Porém, os sujeitos adotaram procedimentos de resolução não previstos por nós, como, por exemplo, tomar a ordenada $y = 2$ do ponto de tangência como a derivada da função f em $x = 4$. Como resultado da não previsibilidade de tomar a ordenada do ponto de tangência como solução do item “a”, a escolha dos valores das coordenadas do ponto de tangência mostrou-se inadequada, pois produziu uma coincidência de resultados não desejada, a saber, a ordenada do ponto de tangência $y = 2$ coincidiu com o valor da derivada de f em $x = 4$. Por isso, os valores foram modificados no questionário aplicado na etapa 2 da fase I.

Questão 2 (Q-2)

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo .



A questão Q-2 é uma variação da questão Q-1, pois nela é omitida a interseção da reta tangente L com o eixo x, a fim de favorecer a escolha de procedimentos que utilizem a determinação da equação da reta tangente L e, a partir desta, a identificação do seu coeficiente angular como sendo a derivada da função f no ponto x = 2. Consideramos que a ausência de uma indicação explícita do ângulo formado pela reta L e o eixo x é um elemento que desfavorece o uso da tangente trigonométrica como procedimento de resolução.

Os mesmos procedimentos de controle para as variáveis escolha do ponto e escolha da reta, citados em Q-1, foram adotados em Q-2.

Pretendemos, por meio da análise dos procedimentos de resolução, apresentados nesta questão, verificar se o sujeito investigado associa o coeficiente angular da reta tangente L ao gráfico de f no ponto (2,6) à derivada $f'(2)$, e de que forma esta associação é estabelecida.

Questão 3 (Q-3)

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A (4, 2) e B (10,20) . Calcule a derivada da função f em $x_0 = 3$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

A questão Q-3 foi elaborada tomando-se por referência questões presentes no livro didático brasileiro "Cálculo Diferencial e Integral - vol. 1" de autoria de Paulo Boulos (p. 197). Possibilita mais de um tipo de solução. Pode-se determinar a equação da reta tangente e tomar seu coeficiente angular como a derivada da função f em x = 3. A equação pode ser obtida tomando-se os dois pontos dados , seja por meio da forma reduzida y = mx+n ou pelo cálculo do determinante da matriz real formado pelas coordenadas dos pontos pertencentes à reta.

Outra solução possível é calcular o valor do coeficiente angular m da reta tangente utilizando-se o quociente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Não é um dado desta questão uma representação gráfica. Desta forma, pretendemos verificar se o indivíduo mobiliza ou não a interpretação geométrica do conceito de derivada ao formular a resposta, apesar da ausência do estímulo visual fornecido pela figura. Os fatores de estímulo para a mobilização de elementos da *imagem conceitual:* as expressões "reta tangente" e "derivada da função f no ponto x = 3", são verbais.

Os mesmos procedimentos de controle para as variáveis escolha do ponto e escolha da reta, citado em Q-1, foram adotados em Q-3.

Questão 4 (Q-4)

a)O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer ? Defina ou explique como você desejar. b)Para você, o que significa dizer que a derivada de f(x) = x^2 é $2x$, no ponto x ?

A questão Q-4 tem por objetivo investigar aspectos da *definição conceitual* relativa ao conceito de derivada. Após a proposição de três questões que favorecem o uso da interpretação geométrica do conceito de derivada, esperamos que tal conceito seja expresso em função da interpretação geométrica.

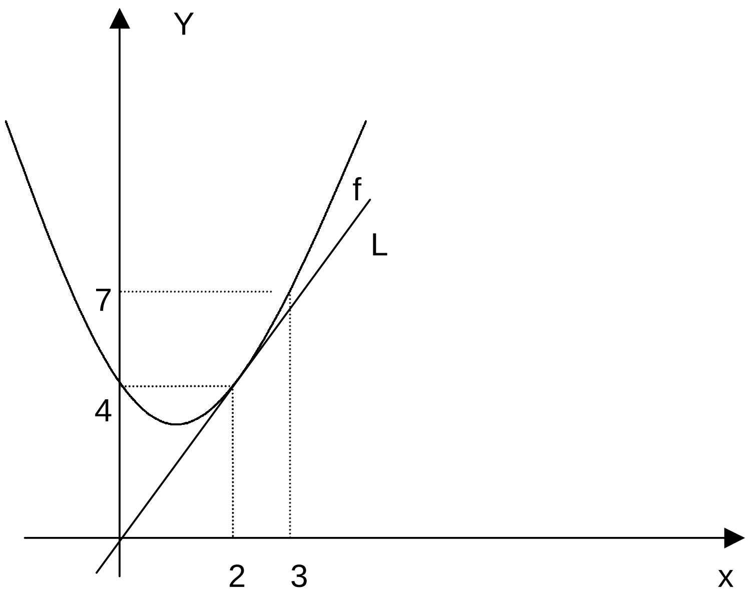
Esta questão é uma adaptação dos itens *A* e *B* da questão 2, apresentada por AMIT e VINNER (1990, p.5) em seu artigo.

É possível que a utilização do termo "defina" no item "a" estimule a busca em memória da "definição geométrica" do conceito de derivada. A presença de "explique como você desejar” visa favorecer a expressão de uma reconstrução pessoal da definição de derivada, quer o sujeito lembre ou não da definição do conceito em questão, possibilitando-nos a obtenção de informações que possam caracterizar como os indivíduos pesquisados verbalizam o conceito de derivada quando interpretado geometricamente.

A inclusão do item “b” na questão Q-4 deu-se como resultado do processo de reprodutibilidade dos procedimentos adotados por AMIT e VINNER (1990) em sua investigação. A análise dos resultados demonstrou que esse item mostrou-se pouco eficiente para cumprir a sua função de revelar aspectos da *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente.

Questão 5 (Q- 5)

A reta L de equação y = 2x é tangente ao gráfico da função f no ponto (2,4).



a)Determine a taxa de variação média da função no intervalo [2,3]
b)Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa x = 2.
c)Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.
d)Calcule f(2,08). Seja o mais preciso quanto possível e explique como você obteve a solução encontrada.

Os itens b e c da questão Q-5 visam identificar relações que possam ser estabelecidas entre a equação da reta tangente ao gráfico da função f num ponto dado, a derivada da função na abscissa deste ponto e a taxa de variação instantânea da função no referido ponto.

Esta questão constitui uma adaptação da questão apresentada na investigação de AMIT e VINNER (1990, p.5) citada em Q-1, acrescida de itens que visam investigar as relações que podem ser estabelecidas entre a taxa de variação instantânea da função f em um determinado ponto e a interpretação geométrica da derivada da função nesse ponto .

A inclusão do item “a” na questão Q-5 no qual é solicitado o cálculo da taxa de variação média da função no intervalo [2,3], visa evidenciar a existência de duas taxas de variação distintas, a média e a instantânea, sendo esta última aquela que se relaciona com a derivada da função f em x = 2.

Ao pedir-se no item “b” a taxa de variação instantânea e posteriormente no item “c” a determinação de $f'(2)$, pretende-se investigar se o estudante irá estabelecer uma relação entre a taxa de variação e o valor do coeficiente angular da reta tangente do enunciado, ou se mobilizará outro tipo de procedimento. Pretendemos, com o item “c” , investigar as relações estabelecidas pelo indivíduo entre a taxa de variação instantânea de f em x = 2 e $f'(2)$.

O item “d” tem por objetivo verificar relações que são estabelecidas entre a equação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto de abscissa x = x_0 , a função derivada de f e a função f. Esse item pode ser resolvido por meio da relação f($x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$, ou utilizando-se o significado da taxa de variação instantânea em x = x_0, ou seja, a taxa de variação de y em relação a x em x = x_0, por unidade de x. Assim, pode-se estabelecer uma relação proporcional na qual para 1 unidade de variação em x tem-se 2 unidades de variação em y ; então, para 0,08 unidades de variação em x tem-se 0,16 unidades de variação em y. Consequentemente, f(2,08) = f(2) + 0,16.

É possível que estudantes busquem encontrar a lei de correspondência que define f, a partir da equação da reta tangente fornecida, por meio do uso da primitiva da função y = 2x.

2.3 FASE II

2.3.1 Objetivo

A fase II tem por objetivo complementar as informações obtidas na fase I, por meio da realização de entrevistas com sujeitos selecionados segundo critérios específicos, buscando-se ampliar os conhecimentos sobre elementos que constituem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente pelos sujeitos pesquisados.

2.3.2 Descrição dos Procedimentos

Participaram da fase II dois grupos de sujeitos. O grupo 1, composto por três indivíduos selecionados dentre os estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura que participaram da etapa 1, e o grupo 2, com dois sujeitos selecionados dentre os estudantes do terceiro ano do curso de Licenciatura, participantes da etapa 2.

A seleção dos sujeitos de cada grupo (grupo 1 e 2) baseou-se nas informações obtidas pela análise dos dados coletados na fase I. Esta análise indicou a possibilidade de existência de associações entre determinados elementos da *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada, bem como evidências da presença de conflitos entre elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* sugeridos por algumas respostas dadas. Deste modo, foram selecionados sujeitos cujas respostas ao questionário contemplassem estes dois aspectos evidenciados pela análise elaborada na fase I.

Os sujeitos do grupo 1 foram entrevistados individualmente, uma vez que responderam ao questionário em duplas e ternas, buscando-se, desta forma, uma melhor caracterização dos elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativos ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente, sugeridos pelas respostas escritas e registros das discussões presentes nos conteúdos das fitas audiogravadas.

Os sujeitos do grupo 2 foram entrevistados em dupla, uma vez que responderam ao questionário individualmente. Esperávamos que as discussões pudessem revelar novos aspectos relativos às referidas *imagem conceitual* e *definição conceitual,* bem como possíveis conflitos provenientes de divergência de opiniões.

2.3.3 As Entrevistas

As entrevistas com os sujeitos do grupo 1 e 2 ocorreram em data e horário previamente agendados, de forma não coincidente com atividades escolares, e foram realizadas nas instalações da Universidade em que estudam. Ocorreram cerca de 30 dias após a aplicação do questionário que constitui a fase I.

Grupo 1 (Entrevista individual)

As entrevistas foram elaboradas tomando-se por base uma mesma tarefa proposta para cada um dos três sujeitos pesquisados, constituída de uma questão com cinco itens (Apêndice 3) , a qual foi chamada de questão motivadora.

Em um primeiro momento, solicitamos que o sujeito resolvesse por escrito a referida questão, sendo-lhe informado que intervenções poderiam ser feitas pelo entrevistador no sentido de esclarecer junto a ele as razões pelas quais adotou determinado procedimento ou forneceu determinada justificativa durante a resolução da questão motivadora. As intervenções realizadas objetivaram melhor caracterizar os elementos da *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada que poderiam estar sendo mobilizados pelo sujeito ao responder aos itens da questão proposta.

Em um segundo momento, apresentamos para o sujeito a sua folha de respostas ao questionário da fase I, sendo-lhe indagados alguns elementos registrados em algumas das respostas fornecidas, solicitando-se, em alguns casos, que confrontasse as respostas dadas na fase I com as respostas dadas à questão motivadora.

Cada entrevista realizada foi audiogravada e transcrita (Apêndice 5), sendo administrada em um único período de 20 a 30 minutos.

Grupo 2 (Entrevista em dupla)

Utilizamos, para entrevistar os dois elementos do grupo 2, procedimento semelhante ao utilizado para entrevistar os indivíduos do grupo 1, e passamos a descrevê-los.

Em um primeiro momento, cada sujeito participante da dupla recebeu uma folha de atividades contendo a mesma questão motivadora proposta ao grupo 1, sendo-lhe informado que essa deveria ser discutida em dupla e respondida individualmente. Foi-lhe esclarecido que as respostas à questão motivadora não precisavam ser um consenso da dupla, caso houvesse discordância quanto às respostas dadas.

As intervenções realizadas pelo pesquisador durante a entrevista ocorreram nas mesmas condições e com o mesmo objetivo citados para as entrevistas do grupo 1.

Em um segundo momento, entregou-se a cada sujeito da dupla o questionário que havia sido resolvido por ele na fase I. Solicitamos que os sujeitos comparassem e discutissem entre si as respostas que deram às questões Q-1, Q-2, Q-3, Q-4a e Q-5c, bem como comparassem essas com aquelas fornecidas à questão motivadora, e caso desejassem modificar alguma das respostas dadas a estas questões, o fizessem em uma outra folha de resposta que lhes foi fornecida, na qual constavam os enunciados das questões Q-1, Q-2, Q-3, Q-4a, Q-5c do questionário da fase I.

A entrevista foi audiogravada e transcrita (Apêndice 6), sendo administrada em um único período de 50 a 60 minutos.

Durante a entrevista, a dupla manteve amplas discussões, permutando momentos de trabalho individual com momentos de trabalho coletivo conforme pode ser observado na transcrição dos conteúdos das discussões (Apêndice 6).

CAPÍTULO 3 ANÁLISE DOS RESULTADOS.

As análises dos resultados foram realizadas em momentos diferentes e a partir da observação de dados obtidos por meio de instrumentos diagnósticos diferentes.

Procuramos levantar elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* desses sujeitos, evidenciando as interpretações dadas ao conceito de derivada, bem como as propriedades e procedimentos associados que foram mobilizados na formulação das respostas analisadas. Expomos, a seguir, nossos procedimentos.

As análises referentes à etapa 1 foram elaboradas a partir das respostas dadas por escrito, bem como do conteúdo presente nas transcrições (Apêndice 4) das audiogravações das discussões, que ocorreram durante a aplicação do questionário. Os dados extraídos das transcrições contribuíram para uma melhor avaliação dos elementos que podem compor a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos sujeitos pesquisados, sugeridos pelas respostas escritas. Em algumas situações pudemos ter acesso a aspectos da *imagem conceitual* de alguns indivíduos o que, possivelmente, não teríamos, caso nos restringíssemos a analisar apenas informações obtidas a partir das respostas escritas.

As análises relativas à etapa 2 foram subsidiadas pelas informações obtidas por meio das respostas ao questionário, fornecidas por escrito.

As análises sobre a fase II baseiam-se nas informações contidas nas transcrições (Apêndices 5 e 6) dos conteúdos das entrevistas audiogravadas , bem como nos registros escritos das respostas dadas à tarefa proposta durante as entrevistas. Essas análises possibilitaram-nos complementar as informações obtidas na fase I sobre elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos investigados.

3.1 FASE I – ETAPA 1 (ESTUDANTES REUNIDOS EM DUPLAS OU TERNAS)

3.1.1 Análise das Respostas ao Questionário.

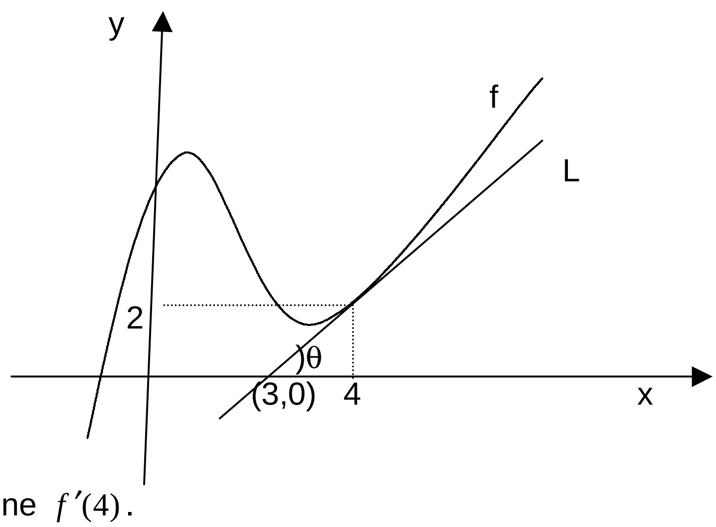
Referenciando-nos nas respostas fornecidas pelos sujeitos pesquisados, e nas informações obtidas pela audiogravação das discussões, inferimos elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada que tais respostas podem sugerir.

A dupla indicada por G-A foi composta pelos sujeitos identificados por SA1 e SA2; a dupla indicada por G-B foi composta por sujeitos identificados por SB3 e SB4; e a terna indicada por G-C, pelos sujeitos identificados por SC5, SC6 e SC7.

Apresentamos, a seguir, as transcrições das respostas dadas por cada sujeito às questões propostas, os elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* associados a essas respostas e uma análise das informações obtidas, relativas a cada questão.

Questão Q-1.

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (4,2).



c) Determine $f'(4)$.

d) Determine $tg\theta$.

Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a “passo a passo”.

TABELA 1 – RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-1A E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
A derivada de f em x = a é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em x = a .	SA1 e SA2: y – f(p) = f ’(p) (x – p) p = 4 0 – 2 = f ’(4) (3 – 4) f (p) = 2 - 2 = f ’(4) (-1) y = 0
A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	SB3: Como f ’(x) é a derivada de f(x) e a derivada é a reta tg a f(x) então f ’(4) = 2.
Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f ’(a) = b.	SB4: Se L é tangente a curva f(x) no ponto (4,2) então ambas dividem os mesmos pontos de abscissa e ordenada portanto f ’(4) = 2. SC6: f ’(4) é igual a f(4) pois a reta L é tg ao gráfico no ponto (4,2) portanto f ’(4) = 2..

TABELA 2 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-1 B E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.	SA1: $tg\theta = \frac{2}{1} = 2$ SA2: $tg\theta = \frac{co}{ca} = \frac{2}{1} = 2$ SB3: $tg\theta = \frac{cat.oposto}{cat.adj.}$ $tg\theta = \frac{2}{1} = 2$ SB4: $tg\theta = \frac{cat.op}{cat.adj.} = \frac{2}{1} = 2$ SC6: $tg\theta = \frac{cat.op}{hip}$ $tg\theta = \frac{2}{1}$ $tg\theta = 2$, 2 é a inclinação da reta tangente. SC7: $tg\theta = \frac{c.o.}{c.a.} = 2$ Inclinação da reta tangente.
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual	SC5: $tg\theta = 2$

Análise relativa à questão Q-1.

A análise relativa à questão Q-1 foi elaborada levando-se em consideração todas as informações obtidas por meio da aplicação do questionário, e não apenas às respostas transcritas nas tabelas 1 e 2.

A resposta fornecida pelos sujeitos SA1 e SA2 ao item a da Q-1 sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada*, compatível com a "definição geométrica" do conceito de derivada. A análise das respostas escritas a essa questão pode sugerir que tais sujeitos mobilizam uma *imagem conceitual* que não apresenta elementos conflitantes com a "definição geométrica" do conceito de derivada. No entanto, o conteúdo das discussões audiogravadas (Apêndice 4) nos fornece informações de que os sujeitos SA1 e SA2 respondem, inicialmente, às questões Q-1, Q-2 e Q-5, mobilizando uma *imagem conceitual evocada*, relativa ao conceito de derivada, que inclui uma propriedade segundo a qual, se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b); então, $f(a) = f'(a)$, ou seja, o elemento da *imagem conceitual*, que é mobilizado no momento em que as respostas às questões citadas são formuladas, é incompatível com a "definição geométrica" do conceito de derivada. Em dado momento da resolução da Q-4b, o sujeito SA1, percebendo o seu erro ao interpretar geometricamente o conceito de derivada segundo a citada propriedade, passa a reformular as respostas que haviam sido dadas anteriormente, tomando por referência a resposta dada à questão Q-3, na qual a derivada da função f em x = a é concebida como sendo a tangente trigonométrica do ângulo que a reta tangente ao gráfico de f em (a,b) determina com o eixo x.

Consideramos que a resposta registrada por esta dupla de sujeitos à questão Q-1 constitui o resultado de um processo reflexivo que se desenvolveu no decorrer da resolução das questões do questionário. A comparação entre respostas dadas às questões propostas possibilitou-os identificar a utilização da citada propriedade, relativa ao conceito de derivada, como inadequada do ponto de vista matemático. O abandono dessa interpretação inadequada e a posterior mobilização da interpretação da derivada de f em x = a como sendo a tangente trigonométrica do ângulo que a reta tangente L forma com o eixo x, permitiu que esses sujeitos respondessem com sucesso à maioria das questões propostas. Neste caso, a mobilização de elementos conflitantes da *imagem conceitual* favoreceu a modificação dos procedimentos de resolução adotados pelos sujeitos para resolução das questões propostas.

As respostas dos sujeitos SB4, SC6 e SC7 à questão Q-1a sugerem a utilização de uma propriedade pertencente à *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente por esses sujeitos, segundo a qual, se L é a reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b); então, $f(a) = f'(a)$ = b, isto é, a derivada de f em x = a é interpretada como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b). É possível que tais respostas estejam relacionadas a uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente ao gráfico desta função, num ponto determinado, como sendo a função derivada.

Essa possibilidade é investigada na fase II por meio da realização de entrevistas com os sujeitos citados.

Analisando os dados fornecidos pela transcrição da discussão da terna G-C (Apêndice 4), conjuntamente com o protocolo do sujeito SC7 (Anexo 1), pode-se inferir que esse sujeito, inicialmente, concebe a derivada da função y = 2x - 6, cuja representação gráfica é a reta tangente L, como sendo a derivada de f em x = 4, isto é, $f'(4) = 2$, pois $y' = 2$. Em seu protocolo, em anotações laterais, ele determina a equação da reta y = 2x – 6 , deriva a função dada por essa equação e indica que $y' = 2$. Porém, esta interpretação dada à derivada de f em x = a não foi utilizada na justificativa dada para a resposta à questão Q-1. A sua justificativa, registrada na resposta da Q –1A, sugere a mobilização de uma i*magem conceitual evocada* que inclui a derivada de f no ponto de abscissa x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b).

Em vista do exposto, consideramos que o SC7, inclui em sua *imagem conceitual*, as duas formas de interpretar a derivada de f em x = a, isto é, ele interpreta a derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b) ou como sendo a derivada da função cuja representação gráfica é a reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b). Esta última interpretação volta a ser mobilizada pelo sujeito SC7 quando discute com SC6 as possíveis soluções para a questão Q-3.

A resposta fornecida pelo sujeito SC5 sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função f em x = a como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b).

No entanto, o procedimento adotado para determinar a inclinação não foi expresso pela resposta escrita, isto é, não existem registros na folha de resposta ou informações nas transcrições das fitas que indiquem como tal sujeito determinou o valor do que ele chama de "inclinação". Convém ressaltar que este sujeito iniciou a resolução do questionário, individualmente, conforme foi relatado no item 2.2.2 do capítulo 2, juntando-se, posteriormente, aos demais componentes do grupo C. Desta forma, o conteúdo da transcrição das discussões não apresenta muitas informações sobre as respostas às questões iniciais (Q-1, Q-2, Q-3 e Q-4) fornecidas por este sujeito. Pretendia-se melhor investigar suas respostas por meio da realização de entrevista individual, porém, esse sujeito não se mostrou disponível a participar da fase II da pesquisa.

As respostas dos sujeitos SC6 e SC7 ao item b da questão Q-1 indicam o conhecimento da relação existente entre o valor da tangente trigonométrica e o valor do coeficiente angular da reta tangente, ainda que esta informação não tenha sido utilizada explicitamente para obter as respostas que foram fornecidas.

Os registros escritos das respostas dos sujeitos participantes da etapa 1 ao item b da Q-1, à exceção do sujeito SC5, sugerem que eles procederam o cálculo da tangente do ângulo indicado, identificando as medidas dos catetos oposto e adjacente. Não existem evidências de que uma relação entre a derivada da função f no ponto x = 4 e o valor da $tg\theta$ tenha sido estabelecida. Apenas o sujeito SA1 indica estabelecer tal relação ao discutir o cálculo da tangente de θ com o sujeito SA2, afirmando que "...tangente de θ é igual a dois dividido por 1 que dá 2. É óbvio 'cara'... f '(4) tem que ser igual a tangente. ".Os demais sujeitos não apresentam nem respostas e nem comentários que possam indicar, de forma explicita, a relação entre a derivada da função f em x = 4 e a $tg\theta$. Nenhum dos sete participantes utilizaram a resposta dada a um dos itens propostos na Q-1 para responder outro.

O sujeito SC5 não justificou sua resposta ao item b, impossibilitando-nos inferir que elementos da *imagem conceitual* foram mobilizados.

Questão Q-2.

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta, explicando-a passo a passo .

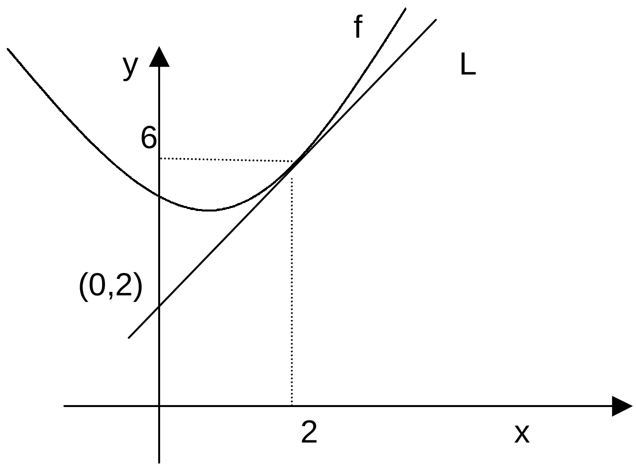


TABELA 3 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-2 E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
A derivada da função f em x = a é a tangente do ângulo θ determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x.	SA1: $f'(2) = tg\theta = \dfrac{6-2}{2-0}$ $f'(2) = 2$ SA2: $tg\theta = \dfrac{c.o.}{c.a.} \Rightarrow tg\theta = \dfrac{4}{2} \Rightarrow tg\theta = 2$ $f'(2) = 2$ O cálculo da tangente da reta tangente no ponto dado é igual a derivada.
Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	SB3: Quando a reta é tg a um ponto, significa que f(x) tem o mesmo valor de $f'(x)$ .Nesse caso, $f'(2) = f(2) = 6$. SB4: Se uma reta é tangente a uma função num determinado ponto então elas tem suas imagens iguais naquele ponto $f(x) = f'(x)$. Portanto nesse caso $f(2) = f'(2) = 6$. SC6: $f'(2) = f(2) = 6$ Mesma justificação do item "a" da Q-1. SC7: $f'(2) = 6$ Sendo o ponto (2,6) a tangente no ponto 2 é 6 que é a derivada.
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	SC5: $f'(2) = 6$ Idem a 1.

Análise relativa à questão Q-2.

A análise relativa à questão Q-2 foi elaborada levando-se em consideração todas as informações obtidas por meio da aplicação do questionário, e não apenas as respostas transcritas na tabela 3.

O que difere Q-2 de Q-1 é que a interseção da reta tangente L com o eixo x é omitida. Pretendia-se, com essa omissão, favorecer o uso de procedimentos que busquem determinar a equação da reta L e, a partir desta, a identificação do coeficiente angular da reta L como sendo a derivada de f em x = 2, ao invés de determinar a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta L e o eixo x, conforme discussão apresentada no Capítulo 2, item 2.2.5. Porém, as maiorias dos sujeitos pesquisadas não buscaram a determinação da equação da reta L como estratégia para solucionar a questão Q-2 e, neste caso, ambas as questões passam a representar o mesmo tipo de ocorrência. Muitos dos sujeitos pesquisados reproduziram a mesma estratégia de resolução utilizada em Q-1a para responder a Q-2. Este foi o caso dos sujeitos SB4, SC6 e SC7 que apresentaram justificativas para a Q-2 que sugerem a mobilização da mesma *imagem conceitual evocada* para responder a Q-1a.

A resposta do sujeito SC7 indica a presença de uma ambigüidade quanto ao significado da utilização do termo "tangente". Ele pode estar se referindo à reta tangente, ou pode estar se referindo à tangente trigonométrica do ângulo que a reta L determina com o eixo x. Porém, este sujeito não mobilizou nenhum procedimento que indicasse o uso do cálculo da tangente trigonométrica, pois, neste caso, obteria um outro valor para a derivada de f, neste ponto. Desta forma, consideramos que sua resposta sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* na qual a derivada da função f em x = a é interpretada como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f.

Os sujeitos SA1 e SA2 apresentam uma estratégia para responder à questão Q-1a e outra para responder à Q-2. Por iniciativa do sujeito SA1 a questão Q-1a foi resolvida utilizando-se a equação da reta tangente L como meio de determinação da derivada de f em x = 2 enquanto, nas demais questões (Q-2 e Q-5), foi utilizada a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta L e o eixo x. As informações obtidas nas respostas escritas e no conteúdo das transcrições não são suficientes para que possamos construir argumentos que justifiquem tais escolhas. Porém, convém observar que a *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada desses sujeitos inclui ambos os elementos que são sugeridos por um ou outro tipo de resposta, isto é, eles concebem a derivada de f em x = a como sendo o coeficiente angular da reta tangente L ou como sendo a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta L e o eixo x. Diferentemente dos demais, esses sujeitos utilizaram estratégias distintas para responder às questões Q-1a e Q-2, mobilizaram diferentes elementos pertencentes a sua *imagem conceitual* para respondê-las e produziram respostas corretas, do ponto de vista matemático, para ambas as questões.

Questão Q-3.

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A (4,2) e B (10,20). Calcule a derivada da função f em $x_0 = 3$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

TABELA 4 – RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-3 E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

(Continua)

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	SB3: $y - y_0 = tg\theta(x - x_0)$ $y - 2 = 3(x - 4)$ $y - 2 = 3x - 12$ $y = 3x - 10 \rightarrow$ reta $tg \equiv$ derivada $y = 3 \cdot 3 - 10 = -1 \rightarrow f'(x_0)$ $x_0 = 3$ SB4: $y - y_0 = tg\theta(x - x_0)$ $y - 2 = 3(x - 4)$ $y - 2 = 3x - 12$ $y = 3x - 10$ $f'(x) = 3x - 10$ $y = -1$ SC6: $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ $m = \frac{18}{6}$ $m = 3$ $y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 2 = 3(x - 4)$ $y - 2 = 3x - 12$ $y = 3x - 10$ $f'(x) = 3x - 10$ $f'(3) = -1$ Mesma justificativa do item “a” da Q – 1 $f(3) = f'(3) = -1$ SC7: $m = \frac{10-4}{20-2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{y-2}$ $3x - 12 = y - 2$ $y = 3x - 10$ (equação da reta tangente) $f'(3) = -1$ Acha-se a equação da reta tangente pelos pontos pertencentes a ela e substitui-se o x = 3 para achar o y = -1.

TABELA 4 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-3 E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

(Conclusão)

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
A derivada da funçõ f em x = a é a tangente do ângulo θ determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x.	SA1: Seja r a reta que passa pelos pontos A e B. $f'(3) = tg\theta = \frac{20-2}{10-4} = \frac{18}{6} = 3$ SA2: $tg\theta = \frac{20-2}{10-4} = \frac{18}{6} = 3$ O cálculo da tangente da reta tangente a função dada nos dá a derivada.
As informações são insuficientes para que possamos inferir os elementos da imagem conceitual	SC5: Não me lembro.

Análise relativa à questão Q-3.

A análise relativa à questão Q-3 foi elaborada levando-se em consideração todas as informações obtidas por meio da aplicação do questionário, e não apenas as respostas transcritas na tabela 4.

As respostas obtidas para a questão Q-3 sugerem que a ausência de uma representação gráfica, como um dado da questão, não desfavoreceu a mobilização de uma interpretação geométrica do conceito de derivada pelos sujeitos pesquisados. Essa interpretação foi mobilizada por todos os sujeitos que responderam à referida questão.

Houve um predomínio da mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f, ao respondê-la. Observamos, ainda, que os sujeitos SB4, SC6 e SC7 que haviam interpretado a derivada de f no ponto de abscissa x = a como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f, ao responder às questões Q-1a e Q-2, na ausência de representação gráfica, situação caracterizada pela questão Q-3, mobilizaram uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente L como sendo a derivada da função f.

O conteúdo das audiogravações contendo as discussões ocorridas durante a resolução do questionário evidenciam que os sujeitos SA1 e SA2, em dado momento, resolveram as questões Q-1 e Q-2 interpretando a derivada de f em x = a

como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico de f, mas não utilizaram esta interpretação para resolver a questão Q-3.
Tal questão foi a única cuja resposta não precisou ser reformulada após o sujeito SA1 verificar estar interpretando de forma inadequada, do ponto de vista da matemática científica, o conceito de derivada.

Em vista do exposto, é possível que, para os sujeitos SA1, SA2, SB6, SC6 e SC7, o estímulo visual de uma única reta L, tangenciando o gráfico de f no ponto (a,b), presente nas questões Q-1 e Q-2, seja um fator que favoreça a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), uma vez que, na ausência da referida representação gráfica (Q-3), a citada interpretação para a derivada de f em x = a não foi mobilizada pelos sujeitos investigados.

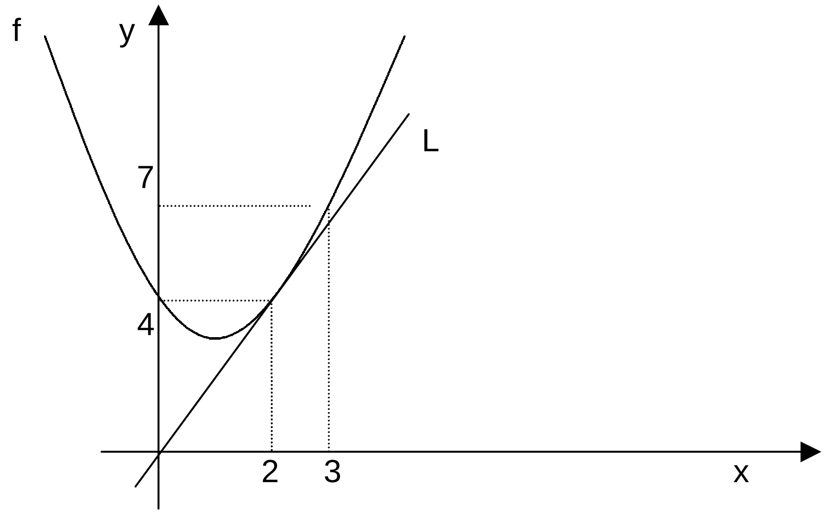
Neste sentido, TALL e VINNER (1981, p.172) afirmam que a *imagem conceitual* não precisa ser coerente o tempo todo. Impulsos sensoriais excitam certos caminhos neuronais do cérebro e inibem outros e, assim, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da *imagem conceitual*, acrescentando ainda que, em diferentes momentos, imagens aparentemente em conflito podem ser evocadas. A análise dos procedimentos adotados pelos sujeitos SA1 e SA2, ao responder ao questionário, está em concordância com tal afirmação. Eles evocam, em momentos diferentes, elementos conflitantes da sua *imagem conceitual,* isto é, mobilizam a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico de f ao elaborarem inicialmente respostas para as questões Q-1 , Q-2 e, logo em seguida, mobilizam a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta L e o eixo x, ao responderem à questão Q-3.

A transcrição das discussões audiogravadas da dupla G-B fornece informações que evidenciam um outro aspecto sobre os elementos da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, mobilizados pelo sujeito SB4 ao responder à questão Q-3. Ao discuti-la, o sujeito SB4 menciona poder encontrar a lei de correspondência da função f por meio da primitivação da função y = 3x – 10 cuja representação gráfica é a reta tangente L, isto é, se $f'(x) = 3x - 10$; então, sua primitiva fornece a lei de correspondência da função f. A adoção desse tipo de procedimento para solucionar essa questão foi considerado por AMIT e VINNER

(1990) como um indicador de que esse sujeito pode conceber a equação da reta tangente como sendo a derivada da função f.

Questão Q-5.

A reta L de equação y = 2x é tangente ao gráfico da função f no ponto (2,4).



a) Determine a taxa de variação média da função f no intervalo [2,3].
b) Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa x = 2.Por favor, justifique a sua resposta explicando-a passo a passo.
c) Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.
d) Calcule f (2,08). Seja o mais preciso quanto possível e explique como você obteve a solução encontrada.

TABELA 5 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5A E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceituial evocada	***Respostas***
A taxa de variação média de uma função em um certo intervalo é a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta secante que passa pelos pontos (2,4) e (3,7) e o eixo x.	SA2: $T_{VM} = \frac{c.o.}{c.a.} \Rightarrow T_{VM} = \frac{3}{1} = 3$ SC6: Tx Média = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-4}{3-2} = 3$
A taxa de variação média de uma função em um certo intervalo é um quociente entre variações.	SA1: $V_M = \frac{7-4}{3-2}$ $V_M = \frac{3}{1}$ $V_M = 3$ SC5: Taxa = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Taxa = $\frac{7-4}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$ SC7: T = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-4}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	SB3 e SB4: Não sei o que é taxa de variação média.

TABELA 6 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5B E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada (taxa de variação instantânea)	Imagem conceitual evocada (derivada de f em x = a)	***Respostas***
A taxa de variação instantânea da função f em x = a é a derivada de f em x = a.	$f'(a)$ é a tangente do ângulo determinado pela reta L tangente ao gráfico de f em (a,b) e o eixo x.	SA1: Para x = 3 $y = 2 \cdot 3 = 6$ $v_i = f'(2) = \dfrac{6-4}{3-2}$ $v_i = \dfrac{2}{1} = 2$ $v_i = 2$
	A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	SC5: $x = 2$ $y = 2 \cdot 2 = 4$ Taxa de variação instantânea é o limite quando $h \to 0$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(h)}{h}$ SC6: Taxa de variação instantânea é a derivada da função f, no caso y = 2x, portanto igual a 4. É o $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(h)}{h}$ SC7: Taxa de variação instantânea no x = 2 é 4. $T(2) = 2 \cdot 2 = 4$
	Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b),então, $f(a) = f'(a) = b$	SA2: A taxa de variação instantânea é a derivada do gráfico da função f no ponto pedido. Portanto $f'(x)$ no ponto x = 2 é igual a 4, pois a abscissa da reta L no ponto x = 2 é 4.
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada		SB3: idem a. SB4: Não sei o que é taxa de variação instantânea.

TABELA 7 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5C E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	SB3: $y = 2x$ $y = 2 \cdot 2 = 4$ $f'(2) = 4$ SB4: $y = 2x$ $y = 4$ SC5: $f'(2) = 4$ $y = 2x$ $y = 2(2)$ $y = 4$ SC6: $f'(2) = 4$ pois a derivada é $y = 2x$
Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, $f(a) = f'(a) = b$	SC7: $f'(2) = 4$. O ponto (2,4) pertence a reta L.
$f'(a)$ é a tangente do ângulo determinado pela reta L tangente ao gráfico de f em (a,b) e o eixo x.	SA1: $f'(2) = 2$ SA2: Já determinamos no item b. $f'(2) = 2$

TABELA 8 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5D E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	**Respostas**
A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x = a é uma aproximação da função f para pontos próximos de a.	SA1 e SA2: Como L é a reta tangente no ponto de abscissa x = 2 ela pode ser considerada uma aproximação de f nos pontos próximos da abscissa x = 2. $f(2{,}08) \cong 2(2{,}08) = 4{,}16$
A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	SB3: Se a derivada $\equiv tg$, logo $f'(x) = 2x$. Assim $f(x) = x^2$ $f(2{,}08) = (2{,}08)^2 = 4{,}3264$ SB4: $f'(x) = 2x$ $f(x) = \int 2x$ $f(x) = x^2$ $f(2{,}08) = 4{,}3264$
O processo de determinação do valor numérico da função f está associado à necessidade da existência de uma lei de correspondência para a função f.	SC7: $f(x) = \dfrac{3x^2 + 8}{5}$ chutei a função e acertei! $x = 2{,}08$ $f(2{,}08) = 2{,}46528$
Não são fornecidas informações que nos permitam inferir elementos da imagem conceitual evocada.	SC5: Em branco. SC6: Em branco.

Análise relativa à questão Q-5.

A análise relativa à questão Q-5 foi elaborada levando-se em consideração todas as informações obtidas por meio da aplicação do questionário, e não apenas as respostas transcritas nas tabelas 5, 6, 7 e 8.

A transcrição da resposta do sujeito SA1 ao item a da questão Q-5 não contém informações que nos permitam inferir o que representa para este sujeito o quociente $V_M = \frac{7-4}{3-2}$. No entanto, ao discutir tal questão com o sujeito SA2, ele afirma que "... você pega esse dividido por esse. A variação... pela variação".(Apêndice 4). Desta forma, consideramos sua resposta à questão Q-5a sugerindo uma *imagem conceitual evocada,* relativa ao conceito de derivada, que inclui a taxa de variação média de uma função em um certo intervalo como sendo um quociente entre variações. O sujeito SA2 comenta a afirmação do sujeito SA1 citada dizendo que "Aí, você tem a tangente... Vai ser a mesma coisa." Consideramos que esse sujeito associa a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta secante que passa pelos pontos (2,4) e (3,7) e o eixo x, ao quociente entre as variações Δy e Δx.

A transcrição da resposta do sujeito SC6 ao item a da questão Q-5 registra que a taxa de variação média é dada pelo quociente entre as variações Δy e Δx, no entanto, ao discutir esta questão ele, inicialmente, questiona: "Taxa de variação média é a tangente, não é? $\frac{\Delta x}{\Delta y}$?...Não é?". Logo em seguida, afirma que " Taxa de Variação média é a tangente...", e auto corrige-se afirmando: "Não... Δy sobre Δx." (Apêndice 4). De acordo com estas afirmações, consideramos que esse sujeito associa o quociente entre variações à tangente trigonométrica e, portanto, tal associação constitui um elemento da sua *imagem conceitual* relativa ao conceito de taxa de variação média de uma função em um determinado intervalo.

Os sujeitos SA1, SA2, SC5, SC6 e SC7 indicam, por meio de suas discussões sobre as possíveis soluções para a questão Q-5 (Apêndice 4), que os conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea mantêm algum vínculo com os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea. Para o sujeito SA1, a velocidade média está associada ao quociente entre variações; para o sujeito SA2, ao cálculo da tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta secante e o eixo x. Para ambos os sujeitos da dupla G-A, a velocidade instantânea está associada ao cálculo da derivada.

Os sujeitos SA2 e SC6 mencionam o uso da interpretação algébrica da derivada, isto é, a derivada definida como um limite de função, ao discutir a questão Q-5. SC6 afirma “Oh! Lembra, quando você tem a equação de espaço, você vai calcular a velocidade. Por que você derivava? Porque você queria a velocidade naquele ponto, que era quando o espaço tendia para zero”.(Apêndice 4). Ainda que estas relações não estejam estabelecidas de forma precisa do ponto de vista matemático, tais elementos, isto é, a associação dos conceitos de taxa de variação média e instantânea de uma função às idéias relativas à velocidade média e instantânea, bem como, à interpretação algébrica do conceito de derivada, fazem parte da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de taxa de variação de uma função desses sujeitos.

As respostas fornecidas pelos sujeitos SA1, SA2, SC5, SC6 e SC7 sugerem que a *imagem conceitual evocada*, mobilizada por eles ao responder o item b da questão Q-5, inclui a taxa de variação instantânea da função f em x = a como sendo a derivada de f em x = a. Porém, os procedimentos adotados para a determinação da derivada de f em x = a sugerem que esta derivada é concebida de diferentes formas, conforme especificado na tabela 6.

A análise do conteúdo das discussões sobre a questão Q-5 evidencia a presença de outros elementos que não os sugeridos pelas respostas escritas, compondo a *imagem conceitual*, relativa ao conceito de taxa de variação instantânea de alguns sujeitos.

Os sujeitos SC5 e SC6 sugerem conceber, em um dado momento das discussões, a taxa de variação instantânea como sendo a derivada de segunda ordem de uma função dada. Assim SC6 afirma “Taxa de variação instantânea da função. Quando o limite tende pra zero. Deriva de novo... É a derivada segunda... quando o limite tende igual a zero... taxa instantânea...”. O sujeito SC5, de forma concordante diz que “A taxa de variação instantânea é a derivada segunda quando o limite está indo para zero”.Tal forma de conceber a taxa de variação instantânea não é efetivamente mobilizada para responder à questão Q-5, uma vez que não é fornecida uma lei de correspondência para a função f.

Os sujeitos SB3 e SB4 registram respostas escritas para o item b da questão Q-5 (Tabela 5) que sugerem a existência de uma *imagem conceitual* vazia, relativa ao conceito de taxa de variação instantânea de uma função em um determinado ponto, isto é, sugerem poder não existir elementos associados a tal conceito na estrutura cognitiva de tais indivíduos. No entanto, analisando as discussões destes durante a realização do questionário, o sujeito SB3 afirma "... Então, primeiro vamos fazer a taxa de variação como sendo a derivada. A taxa de variação instantânea deve ser a derivada ao quadra... a derivada da derivada, vai..." (Apêndice 4) , ou seja, tal afirmação sugere que este sujeito também, em dado momento, concebe a taxa de variação instantânea como sendo a derivada de segunda ordem da função f. Esta *imagem conceitual evocada* possivelmente não foi mobilizada para a formulação de uma resposta, pois seria necessário conhecer a lei de correspondência para a função f, que não foi fornecida.

Convém ressaltar que nenhum dos sujeitos pesquisados relacionou a taxa de variação instantânea de f no ponto x =2 com o coeficiente angular da reta tangente L já fornecida pela equação y = 2x.

As respostas dadas ao item c da questão Q-5 sugerem a mobilização de elementos da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, já sugeridos por respostas dadas às questões anteriores, conforme especificado na tabela 7.

Os sujeitos SB4 e SC6 fornecem respostas à Q-1a e à Q-2 que sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada de f em x = a como sendo a ordenado b do ponto de tangência (a,b) . Estes mesmos sujeitos respondem às questões Q-3 e Q-5c, mobilizando uma imagem conceitual evocada que inclui a equação da reta tangente como sendo a função derivada de f. Já o sujeito SB3 indica mobilizar uma *imagem conceitual evocada* que inclui a ordenada b do ponto de tangência (a,b) como sendo $f'(a)$ ao responder à questão Q-2, enquanto suas respostas às questões Q-1 a, Q-3, Q-4, Q-5c e Q-5d sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente como sendo a função derivada de f.

Consideramos a alternância na mobilização desses dois elementos da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, ao responder às questões citadas, como um fator indicador de uma possível existência de associação entre os mesmos, constituindo um elemento da referida *imagem conceitual* dos sujeitos SB3, SB4 e SC6, quando interpretam geometricamente o conceito de derivada. Essa possibilidade é investigada na fase II da pesquisa por meio da realização de entrevistas individuais com alguns dos sujeitos citados.

As respostas escritas fornecidas pelos sujeitos SA1 e SA2 ao item c da questão Q-5 não contêm informações suficientes que nos permitam inferir elementos da *imagem conceitual* mobilizados. No entanto, a análise do conteúdo das transcrições das discussões indicam que esses sujeitos utilizam-se da resposta obtida no item b da Q-5 para responder ao item c da mesma questão e, portanto, na nossa análise, associamos a tal resposta à mesma *imagem conceitual evocada*, sugerida pela resposta obtida na questão Q-5b, conforme indicado nas tabelas 6 e 7.

O sujeito SA2 responde por escrito à questão Q-5c, afirmando utilizar-se do resultado obtido em Q-5b. Porém, no seu questionário, a resposta registrada na Q-5b é diferente daquela registrada no item c da mesma questão. Convém lembrar que as respostas dadas a várias questões foram reformuladas pela dupla após o sujeito SA1 reconhecer haver interpretado de maneira inadequada, do ponto de vista matemático, o conceito de derivada. Desta forma, é possível que o sujeito SA2, por alguma razão não identificada, não tenha registrado em seu questionário a reformulação da resposta fornecida para questão Q-5b e, ao responder ao item c, ele forneceu a resposta dada ao item b pelo sujeito SA1 ($f'(2)=2$) com quem discutia a questão, e não a resposta ao item b da questão Q-4, registrada em seu questionário ($f'(2)=4$).

A resposta fornecida pelos sujeitos SA1 e SA2 ao item d da questão Q-5 sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x = a como sendo uma aproximação de f para pontos próximos de a. Tal interpretação para a reta tangente L produz o mesmo valor para f(2,08), caso seja utilizada a aproximação dada por $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

Os sujeitos SB3 e SB4 fornecem respostas à questão Q-5d que sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada*, que inclui a equação da reta tangente como sendo a função derivada; portanto, sob esta concepção, a antiderivada de y =2x é a função f. É possível que tal *imagem conceitual evocada* também associe a determinação do valor numérico da função f à necessidade da existência de uma lei de correspondência para a função f.

Questão Q-4

a) O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer? Defina ou explique como você desejar.
b) Para você, o que significa dizer que a derivada de f(x) = x^2 é $2x$, no ponto x ?

Respostas obtidas no item a:

SA1: É a taxa de variação instantânea da função f.

SA2: Entendo que naquele ponto qualquer passa uma reta tangente a função dada.

SB3: A derivada é a reta tg a função f no ponto (x,y).

SB4: Não sei.

SC5: É a inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele determinado ponto pedido.

SC6: É a inclinação da reta tangente a f(x) em um ponto qualquer.

SC7: Esse ponto qualquer é o ponto de tangência entre a reta tangente ao gráfico de f. Esse ponto tem ordenada x e abscissa y. A derivada de f(x) é y.

Respostas obtidas no item b:

SA1: Que no ponto x a taxa de variação instantânea é 2x.

SA2: significa dizer que a derivada no ponto x é o dobro de x e também significa dizer que a tangente de θ é sempre igual a 2 independente do x que eu pegue.

SB3 e SB4: Não sei dizer.

SC5: É a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto x.

SC6: Mesma resposta da anterior, só que para o ponto x.

SC7: O mesmo que (a) só que y = 2x.

Análise relativa à questão Q-4.

Esta questão foi elaborada objetivando inferir a *definição conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretada geometricamente. Ressaltamos que, nesta pesquisa, consideramos a *definição conceitual* conforme apresentada por TALL e VINNER (1981), concebendo-a como parte da *imagem conceitual*.

Ao analisar as respostas dadas ao item a da questão Q-4, evidencia-se um processo de expressão individual da *definição conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. Apesar de trabalharem em duplas e ternas, dentre aqueles que verbalizaram uma *definição conceitual,* apenas dois sujeitos fornecem o mesmo tipo de resposta (SC6 e SC5) que diferem na forma, mas sugerem um mesmo tipo de *definição conceitual.*

As respostas dos sujeitos SA2, SB3 e SC7 à questão Q-4 sugerem a presença de um caráter de reconstrução pessoal de uma definição dada, citada por TALL e VINNER (1981, p.152). Sendo esses sujeitos, estudantes do quarto ano, é possível que durante 3 anos de estudos acadêmicos a definição formal, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, discutida no primeiro ano, tenha sido transformada pelas experiências posteriores vividas em novos contextos nos quais o conceito de derivada foi sendo abordado. O resultado deste processo pode ser uma pessoal *definição conceitual* que difere da formal *definição conceitual* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. É possível, também, que os elementos presentes na pessoal *definição conceitual,* sugeridos pelas respostas ao item a da Questão Q-4 dos sujeitos SA2, SB3 e SC7, tenham sido construídos ao longo de discussões ocorridas durante a aplicação do questionário. Para o objetivo ao qual esta pesquisa se destina, importante é ressaltar que, para esses sujeitos, a pessoal *definição conceitual* difere da formal *definição conceitual.*

A definição conceitual expressa pela resposta do sujeito SC7 ao item a da questão Q-4 está associada a uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), no qual a reta tangente tangencia o gráfico de f. Este mesmo aspecto da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente por este sujeito, é mobilizado ao responder às questões Q-1a, Q-2 e Q-5c.

A definição conceitual expressa pela resposta do sujeito SB3 ao item a da questão Q-4 está associada a uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente ao gráfico da função f em (a,b) como sendo a função derivada de f. Tal *imagem conceitual evocada* também é mobilizada por este sujeito para responder às questões Q-1a, Q-3, Q-5c, Q-5d.

A definição conceitual expressa pela resposta do sujeito SA2 à questão Q-4a associa-se a uma *imagem conceitual* que mantém algum vínculo entre a reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e a derivada de f em x = a. As respostas desse sujeito às questões Q-2 e Q-3 sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função f em x = a como sendo a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x. Sua resposta à questão Q-1a sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada de f em x = a como sendo o coeficiente angular da reta tangente L. A resposta dada à questão Q-5b sugere que ele concebe a derivada de f em x =a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), enquanto que sua resposta à questão Q-5d sugere a interpretação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x = a como sendo uma aproximação da função f para pontos próximos de a.

As respostas ao item a da Q-4 fornecidas pelos sujeitos SC5 e SC6 expressam uma *definição conceitual* compatível com a "definição geométrica" do conceito de derivada, segundo o qual a derivada da função f em um ponto é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f neste ponto, constituindo-se, portanto, em uma formal *definição conceitual.* No entanto, estes sujeitos não mobilizam os elementos pertinentes a esta *definição conceitual* para responder às demais questões. As respostas do sujeito SC6 às outras questões do questionário mobilizam uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), ou a equação da reta tangente como sendo a função derivada de f, dependendo da questão que lhe foi proposta. Esta última interpretação para a função derivada de f também é sugerida pelas respostas apresentadas pelo sujeito SC5 às questões Q-5c e Q-5d. Portanto, apesar desses sujeitos apresentarem respostas à Q-4a que expressam uma *definição conceitual* compatível com a "definição geométrica" do conceito de derivada, tal *definição conceitual* não é consultada quando eles resolvem as questões propostas. Tal resultado está em concordância com os apresentados por VINNER (1991). Segundo esse autor, ao resolver problemas em um contexto técnico, em geral, a maioria dos estudantes não usa as definições, isto é, eles não consultam uma definição conceitual relativa ao conceito envolvido naquele problema. Mantendo seus hábitos de pensamento do cotidiano, eles costumam consultar sua *imagem conceitual*, relativa ao conceito abordado pela questão proposta, uma vez que, na maioria dos problemas da vida diária, a referência à *imagem conceitual* é suficiente para se ter sucesso na solução do problema encontrado. Para VINNER (1991, p.73) "não existe força aparente que possa mudar os hábitos de pensamento do dia-a-dia, os quais são, em princípio, inapropriados para os contextos técnicos".

A resposta do sujeito SA1 ao item a da questão Q-4 expressa uma *definição conceitual* que está associada a uma *imagem conceitual evocada*, relativa ao conceito de derivada da função f no ponto (x, y), segundo a qual esta derivada é concebida como sendo a taxa de variação instantânea de f em (x,y). Tal *definição conceitual* é compatível com as interpretações dadas ao conceito de derivada pela comunidade matemática atual, portanto, constituindo-se em uma formal *definição conceitual.* Essa *imagem conceitual* foi também mobilizada para responder às questões Q-4b e Q-5b. As respostas deste sujeito às questões Q-2, Q-3 e Q-5b sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função f em x = a como sendo a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x. Sua resposta à questão Q-1a sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada de f em x = a como sendo o coeficiente angular da reta tangente L. Sua resposta à questão Q-5d sugere a interpretação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x = a como sendo uma aproximação da função f para pontos próximos de a.

Os resultados expostos acima evidenciam alguns aspectos relativos à relação existente entre a *definição conceitual* referente ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, inferida a partir das respostas obtidas na questão Q-4a e elementos da *imagem conceitual* referentes ao referido conceito, inferidos a partir das respostas fornecidas para as demais questões, que discutiremos a seguir.

Uma formal *definição conceitual* pode não estar coerentemente relacionada a partes da *imagem conceitual* em questão. Como, por exemplo, no caso dos sujeitos

SC5 e SC6, no qual sua resposta a Q-4a sugere uma formal *definição conceitual* que não se relaciona de forma coerente com elementos da imagem conceitual mobilizados ao responder às questões Q-1a, Q-2, Q-3, Q-5b, Q-5c, no caso do sujeito SC6, e às questões Q-5b e Q-5c, no caso do sujeito SC5. As respostas dadas às citadas questões não tratam a derivada de f em x = a como sendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b). Neste sentido, TALL e VINNER (1981, p.152) afirmam que a definição conceitual "... pode estar ou não coerentemente relacionada com outras partes da *imagem conceitual*".É provável que estes sujeitos tenham aprendido esta *definição conceitual* de uma forma "rotinizada" e não significativa.

Uma pessoal *definição conceitual* pode diferir da "definição geométrica" do conceito de derivada e, no entanto, estar coerentemente relacionada a elementos presentes na *imagem conceitual evocada*, mobilizada para responder a determinadas questões. Como é o caso do sujeito SB3 cujas respostas às questões Q-1a, Q-3, Q-4a, Q-5c, Q-5d sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual* que inclui a equação da reta tangente como sendo a função derivada de f. Neste sentido, TALL e VINNER (1981) afirmam que uma *definição conceitual* pode constituir uma reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Neste caso, a *definição conceitual* é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua *imagem conceitual (*evocada). Consideramos que o sujeito SB3 reconstruiu a "definição geométrica" do conceito de derivada em termos diferentes da formal *definição conceitual* constituindo a sua pessoal *definição conceitual* que está coerentemente associada à *imagem conceitual evocada*, que é mobilizada ao responder às questões citadas.

As respostas dadas ao item b da questão Q-4 revelam uma inadequação na formulação da questão no que diz respeito à capacidade de evidenciar uma *definição conceitual* dos sujeitos pesquisados, relativa ao conceito de derivada. Dentre sete indivíduos, apenas dois (SA1 e SA2) apresentaram respostas com informações que nos permitam inferir uma *definição conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos pesquisados, e uma *imagem conceitual evocada*, associada a esta *definição conceitual*.

A resposta do sujeito SA2 à questão Q-4b apresenta uma leitura e interpretação da lei de correspondência que define a função derivada no ponto x. Neste caso, consideramos que a *definição conceitual* expressa por tal resposta está associada a uma *imagem conceitual* que inclui a função derivada como uma fórmula, uma lei de correspondência.

A resposta do sujeito SA1 ao item b da questão Q-4 representa uma adaptação da resposta dada por ele ao item a da mesma questão, que sugere uma *imagem conceitual* que inclui a derivada f em x como sendo a taxa de variação instantânea de f em x , não acrescentando nenhum aspecto novo sobre a *definição conceitual*, relativa ao conceito de derivada que havia verbalizado anteriormente.

Em vista da inadequação da questão, não aprofundaremos as análises das respostas obtidas no item b.

3.2 FASE I – ETAPA 2

3.2.1 Análise das Respostas ao Questionário

Referenciando-nos nas respostas fornecidas pelos nove sujeitos pesquisados na etapa 2, inferimos elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual*, relativas ao conceito de derivada, que tais respostas podem sugerir.

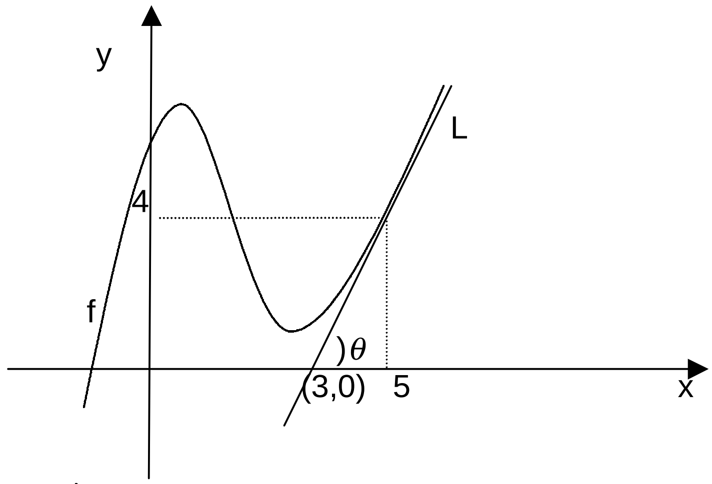
As respostas dos sujeitos participantes a cada questão proposta foram transcritas e associadas a elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* sugeridos por tais respostas.

Os sujeitos que participaram dessa etapa realizaram a tarefa de forma individual, sendo identificados na análise pelos códigos: S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8 e S9.

Apresentamos, a seguir, as transcrições das respostas dadas por cada sujeito ás questões propostas, os elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* associados a essas respostas, e uma análise das informações obtidas, relativas a cada questão.

Questão 1 (Reformulada).

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (5 ,4).



e) Determine $f'(5)$.

f) Determine $tg\theta$.

Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a "passo a passo".

TABELA 9 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-1A E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
O processo de determinação da derivada de f em x = a está associado à necessidade da existência de uma lei de correspondência para f.	S7: Para determinar o f '(5) necessito do f (x) , sem o mesmo, não consigo resolver. S9: Não me lembro como se monta a função para fazer a derivada.
Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b	S2: f '(5) = 4 Olhando pelo gráfico a imagem do 5 na reta.
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	S1: A letra a eu não consegui. S3: Acho que a resolução é feita a partir da equação da reta tangente. Não me lembro ao certo.
	S4, S5, S6, S8: Em branco

TABELA 10 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-1B E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	Respostas
A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.	S2: $tg\theta = \frac{c.o.}{c.a.} = \frac{4}{2}$ $tg\theta = 2$ S4: Tangente de um ângulo é definida como cateto oposto dividido pelo cateto adjacente. Portanto: $tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ S7: $tg\theta = \frac{4}{2}$ $tg\theta = 2$ No gráfico irá formar um triângulo retângulo, sendo assim, através do gráfico é possível saber que um dos catetos é 4 e o outro é 2. E também sabendo que $tg\theta$ é cateto oposto dividido pelo cateto adjacente, eu chego ao resultado acima.
A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e da hipotenusa.	S1: $a^2 = b^2 + c^2$ $\quad tg\theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $a^2 = 2^2 + 4^2$ $a^2 = 20$ $a = 2\sqrt{5}$
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	S9: Não consigo interpretar.
	S3, S5, S6, S8: Em branco.

Análise relativa à questão Q-1.

Por meio da análise da transcrição das discussões da dupla G-A durante a realização da tarefa proposta, identificamos a presença de um fato relevante relativo à questão Q-1 item a do questionário aplicado na etapa 1 desta pesquisa. Nela, o valor da derivada da função f em x = 2 coincide com o valor numérico de f em x = 2, ou seja, $f(2) = f'(2)$. Como vários sujeitos que participaram da etapa 1 forneceram respostas que sugerem a interpretação da derivada de f em x =a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), isto é, mobilizaram a propriedade segundo a qual se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b) então, $f(a) = f'(a) = b$ para responder a algumas das questões propostas, decidimos reformular a Q-1 do questionário a ser aplicado na Etapa 2, evitando-se tal coincidência.

A resposta fornecida pelo sujeito S2 à questão Q-1a sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função f em x = a como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico de f. Portanto, mesmo após a reformulação da questão Q-1 da etapa 1, tal aspecto da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, continua sendo mobilizado para respondê-la.

As respostas dos sujeitos S2 e S7 ao item b da questão Q-1 sugerem que, para o contexto proposto em Q-1, não foi estabelecida uma relação de igualdade entre a derivada de f em x = 5 e o valor da $tg\theta$. O sujeito S2 considera, no item a, $f'(5) = 4$, ou seja, o valor da derivada de f em x = 5 é diferente do valor obtido para a $tg\theta$, enquanto que o sujeito S7 não determina a derivada de f em x = 5, justificando necessitar de uma lei de correspondência para a função f. Em ambos os casos, caracteriza-se que a referida relação de igualdade não foi estabelecida.

As respostas dos sujeitos S4 e S1 ao item b indicam a presença de inconsistências na compreensão do conceito de tangente trigonométrica. Ambos os sujeitos que apresentaram tais respostas não responderam ao item a da mesma questão, sugerindo que, nesta situação, não foi estabelecida uma relação de igualdade entre a derivada da função f em x = 5 e o valor da $tg\theta$; caso contrário, poderiam ter utilizado no item a, a resposta obtida no item b.

Questão Q-2.

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo .

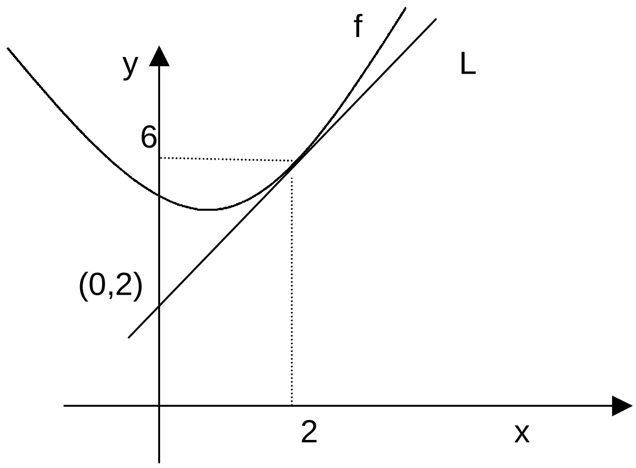


TABELA 11 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q – 2 E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	Respostas
Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f (a) = f'(a) = b.	S2: f'(2) = 6 Pelo mesmo motivo da primeira questão.
O processo de determinação da derivada de f em x = a está associado à necessidade da existência de uma lei de correspondência para f.	S7: Poderia achar o f'(2) se eu soubesse qual é o f (x), sem este, não sei como resolver esse exercício. S9: Não entendo a função.
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	S3: idem a 1. S1: $y = ax^2 + bx + c$ O gráfico é uma parábola com concavidade para cima. $y' = 2ax + b$ $y' = 2a \cdot 2 + b$ $y' = 4a + b$ $A = \frac{B+b}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$
	S4, S5, S6, S8: Em branco.

Análise relativa à Q –2.

O sujeito S7 respondeu à questão Q-2 com a mesma justificativa utilizada para responder à questão Q-1 a. Consideramos que tal justificativa sugere a mobilização da mesma *imagem conceitual evocada* para responder à Q-1a, a qual associa ao processo de determinação da derivada da função f em x =a, a necessidade da existência de uma lei de correspondência para f.

Levando-se em consideração que as questões Q-1a e Q-2 representam contextos semelhantes nos termos explicitados na análise relativa à Q-2 da etapa 1, consideramos que a resposta fornecida pelo sujeito S9 à questão Q-2, na qual afirma não entender a função, sugere a mobilização do mesmo elemento da *imagem conceitual evocado* por ele para responder à questão Q-1a, isto é, o processo de determinação da derivada de f em x = a está associado à necessidade da existência de uma lei de correspondência para f.

O sujeito S2 reproduziu a mesma estratégia de resolução utilizada em Q-1a para responder a Q-2, o que sugere a mobilização da mesma *imagem conceitual evocada* para responder a Q-1a.

Em vista do exposto concluímos que, para os sujeitos que responderam às questões citadas, essas favoreceram a adoção dos mesmos procedimentos de resolução, bem como a mobilização dos mesmos elementos da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada.

Questão Q-3.

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A (4,2) e B (10,20) . Calcule a derivada da função f em x_0 = 3. Por favor , justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

TABELA 12 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q – 3 E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	Respostas
A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	S2: $ax + b = y$ $4a + b = 2(-1)$ $10a + b = 20$ $-4a - b = -2$ $10a + b = 20$ $6a = 18$ $a = 3$ $4 \cdot 3 + b = 2$ $12 + b = 2$ $b = -10$ $f'(x) = 3x - 10$ $f'(3) = 3 \cdot 3 - 10$ $f'(3) = -1$
O processo de determinação da derivada de f em x = a está associado à necessidade de uma lei de correspondência para f.	S7: Para este exercício, digo o mesmo que o exercício anterior. S8: Para obter a derivada de uma função eu preciso da função e no enunciado não dá, apenas diz "uma função f". Se tem como achar essa função pelo enunciado ou aplicando alguma propriedade, então eu realmente não sei fazer o exercício.
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	S1: Não sei explicar.
	S3, S4, S5, S6, S9: Em branco.

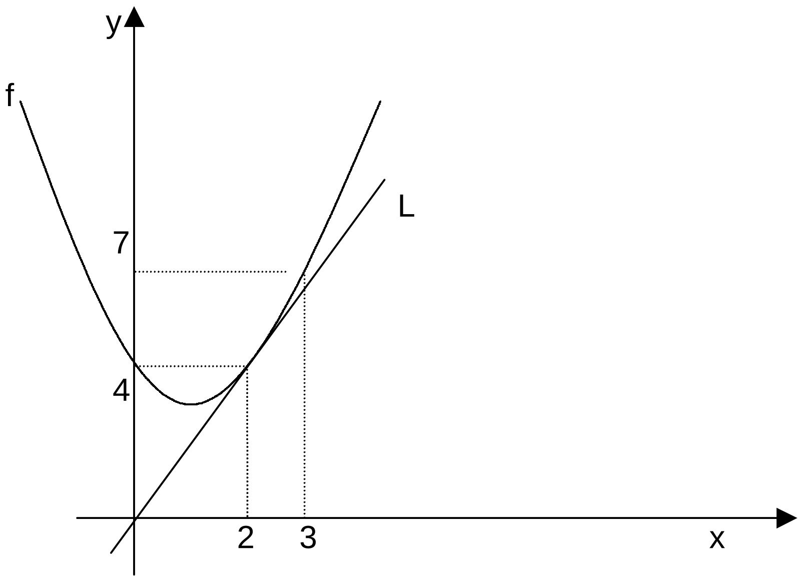
Análise relativa à Q-3.

A resposta do sujeito S2 à questão Q-3 vem fortalecer a possibilidade levantada na etapa 1, segundo a qual, para as questões propostas, a mobilização da *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada de f no ponto de abscissa x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), pode estar associada à *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente ao gráfico de f em (a,b), como sendo a função derivada de f.

O sujeito S2, assim como os sujeitos SB4, SC6, SC7 que participaram da etapa 1, ao responder às questões Q-1 a e Q-2, mobiliza uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função f no ponto de abscissa x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), enquanto que, ao responder às questões Q-3 e Q-5c, esse sujeito interpreta a equação da reta tangente como sendo a derivada da função f. Portanto, existem sujeitos participantes da etapa 1 e etapa 2 cujas respostas sugerem uma associação entre estes dois aspectos da imagem conceitual, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente.

Questão Q-5.

A reta L de equação y = 2x é tangente ao gráfico da função f no ponto (2,4).



a)Determine a taxa de variação média da função f no intervalo [2,3].
b)Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa x = 2. Por favor, justifique a sua resposta explicando-a passo a passo.
c)Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.
d)Calcule f (2,08). Seja o mais preciso quanto possível e explique como você obteve a solução encontrada.

TABELA 13 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5A E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	Respostas
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	S1: $V_M = \frac{3-2}{7-4} = \frac{1}{3} = 0{,}33$ S2: Não tenho a menor idéia de como faz a taxa de variação. S3: idem 1. S7: Não imagino como resolver este exercício. S9: Não sei.
	S4, S5, S6, S8: Em branco.

TABELA 14 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5B E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	Respostas
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	S1: Essa eu não sei explicar. S2: A mesma da anterior. S9: Não sei.
Apresenta algum vínculo com o conceito de velocidade instantânea.	S4: O que me lembro sobre taxa de variação instantânea é a variação num intervalo de tempo muito pequeno.
	S3, S5, S6, S7, S8: Em branco.

TABELA 15 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5C E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceitual evocada	Respostas
A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	S2: $y = 2(2)$ É a imagem do ponto 2 na reta tangente. $y = 4$
Mantém algum vínculo entre o valor da derivada da função f em x = a e a tangente do ângulo determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x.	S1: $f'(2) = tg\theta = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 2$ (eu acho)
A equação da reta tangente L é a função f.	S8: $f' = 2$ é uma constante portanto qualquer valor dado sempre será 2. S9: $f(x) = 2x$ $f'(x) = 2$ $f'(2) = 2$
	S3, S4, S5, S6, S7: Em branco.

TABELA 16 - RESPOSTAS DADAS À QUESTÃO Q-5D E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LA.

Imagem conceiitual evocada	Respostas
A equação da reta tangente L é a função f.	S8: $f(2{,}08) = 2x$ $f(2{,}08) = 2(2{,}08)$ $f(2{,}08) = 4{,}16$ Eu peguei a função f (x) e substitui o 2,08 onde tinha x na função. S9: $f(x) = 2x$ $f(2{,}08) = 2 \cdot 2{,}08$ $f(2{,}08) = 4{,}16$ Na função dada substitui-se o valor de x por 2,08 e multiplica-se pela constante.
O processo de determinação do valor numérico da função f está associado á necessidade da existência de uma lei de correspondência para a função f.	S1: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(2{,}08) = a(2{,}08)^2 + b(2{,}08) + c$
As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	S2: Não consigo fazer porque o que me recordo é fazendo integral.
	S3, S4, S5, S6, S7: Em branco.

Análise relativa à Q – 5.

A resposta do sujeito S1 ao item a da questão Q-5 não contém informações que nos permitam inferir o que representa para este sujeito o quociente $V_M = \frac{3-2}{7-4}$. É possível que ele esteja interpretando a taxa de variação média de uma função em um certo intervalo como sendo um quociente entre variações, ainda que o procedimento adotado para o cálculo deste quociente seja incorreto, do ponto de vista matemático, uma vez que Δx foi dividido por Δy, e não Δy por Δx. Esta inversão pode ser um indicador de que o sujeito não tem uma compreensão completa do significado de uma taxa de variação de uma função em um dado intervalo. É possível, também, que este sujeito esteja interpretando a taxa de variação média como sendo a tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta secante que passa pelos pontos (2,4) e (3,7) e o eixo x, e o procedimento adotado para o cálculo da tangente seja incorreto do ponto de vista matemático. Desta forma, consideramos insuficientes as informações fornecidas pela resposta deste sujeito para que possamos inferir que elementos da *imagem conceitual* estão sendo mobilizados para respondê-la.

A resposta do sujeito S2 ao item c da questão Q-5 sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente ao gráfico de f em (a,b) como sendo a função derivada de f. Ele explicita em sua resposta o uso da equação da reta tangente y =2x para obter o valor que fornece como sendo a derivada de f em x = 2. Consideramos que a adoção de tal procedimento sugere que a equação da reta tangente está sendo concebida como a derivada da função f. No entanto, a sua justificativa indica ser o valor obtido (y = 4) a "... imagem do ponto 2 na reta.", isto é, tal justificativa sugere que a derivada de f em x =2 está sendo concebida como a ordenada 4 do ponto de tangência (2,4). A presença desses dois aspectos da *imagem conceitual* do sujeito S2 em uma mesma resposta, ou seja, evocados simultaneamente, é um fator indicador da possibilidade de existência de uma associação entre esses dois elementos da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente.

As respostas dos sujeitos S8 e S9 ao item c da questão Q-5 sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente como sendo a função f, isto é, a derivada da função y = 2x , é concebida como sendo a derivada de f, ou seja $f'(x) = 2$. Para x = 2 tem-se $f'(2) = 2$.

A resposta do sujeito S1 ao item c da questão Q-5 sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que mantém algum vínculo entre o valor da derivada da função f no ponto x = a, e a tangente do ângulo determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x. Porém, os procedimentos adotados para calcular a tangente são inconsistentes, associando-a à medida da área de um triângulo. Na fase II desta pesquisa é realizada uma investigação mais completa junto ao sujeito que forneceu tal resposta, buscando-se uma melhor caracterização dos elementos da *imagem conceitual evocada* por este sujeito, ao responder à questão citada.

As respostas dos sujeitos S8 e S9 ao item d da questão Q-5 sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente ao gráfico de f em (a,b) como sendo a função f. É possível que tais sujeitos concebam a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) como uma aproximação para f nos pontos próximos de x = a. Porém , em vista das respostas apresentadas por eles ao item c da questão Q-5, na qual a equação da reta tangente L é considerada como sendo a função f, consideramos que não existem evidências nas respostas apresentadas por esses sujeitos à questão Q-5d que indiquem que eles interpretam a reta tangente ao gráfico de f em (a,b) como uma aproximação para f nos pontos próximos de x = a.

A resposta fornecida, ainda que incompleta, pelo sujeito S1 ao item d da Q-5 sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que associa ao processo de determinação do valor numérico da função f para x = a a necessidade da existência de uma lei de correspondência para f. Ele busca determinar esta lei de correspondência a partir da equação geral de uma função quadrática, uma vez que a representação gráfica da mesma é uma parábola com eixo de simetria, paralelo ao eixo y. Procedimento semelhante foi executado pelo sujeito SC7 ao responder a esta mesma questão e item, na etapa 1 desta pesquisa.

A resposta do sujeito S2 ao item d da Q-5 não fornece informações suficientes para que possamos inferir que elementos da *imagem conceitual evocada* estão sendo mobilizados para respondê-lo. No entanto, levando-se em consideração as respostas dadas pelos sujeitos SB3 e SB4 a essa questão e item, na etapa 1 desta pesquisa, e os resultados apresentados por AMIT e VINNER (1990) em seu artigo, no qual o sujeito pesquisado busca encontrar uma lei de correspondência para f a partir do cálculo da primitiva da função cuja representação gráfica é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), podemos sugerir que a menção ao uso da integral presente na justificativa do sujeito S2, esteja relacionada à mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f. Esse sujeito mobilizou tal elemento da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, para responder às questões Q-3, Q-4 e Q-5c.

As respostas fornecidas pelos sujeitos S2, S3, S5, S6, S7, S8 e S9 aos itens a e b da questão Q-5 sugerem que, nenhum elemento da estrutura cognitiva desses indivíduos, relacionado aos conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea, foi mobilizado para responder aos referidos itens . É possível que tais sujeitos tenham uma *definição conceitual* vazia em relação aos conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea.

Questão Q-4.

a)O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer? Defina ou explique como você desejar. a) Para você, o que significa dizer que a derivada de f(x) = x^2 é $2x$, no ponto x ?

Respostas obtidas no item a:

S1: Eu entendo que ela nos fornece o coeficiente da reta tangente naquele ponto.

S2: Não me recordo muito bem, mas lembro que é a reta tangente ao ponto da curva na função e que é usado para calcular a velocidade instantânea.

S4: O que me lembro de derivada em qualquer ponto é uma associação com Física. Tendo uma equação do movimento derivando uma vez obtenho a velocidade e derivando a segunda vez obtenho a aceleração.

S7: Bom, eu sei que se eu tenho, por ex. Uma função do tipo $ax^n + b$, o expoente n passa multiplicando com o a, e o b por ser um número e não estar multiplicando uma incógnita ele tende a zero. Sendo assim, eu tenho que a derivada da função citada acima é anx.

S8: Apenas sei fazer a conta, mas um significado não sei.

S9: Não entendo.

S3, S5 e S6: Em branco.

Respostas obtidas no item b:

S1: $f(x) = x^2$ Não sei te explicar.

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2$

$f'(2) = 4$

$f'(3) = 6$

S2: A única coisa que me lembro é que a função é crescente.

S3: Lembro de algo em Física, que diz que se derivarmos a função(espaço) temos a velocidade num determinado instante. Fora isso não tenho a menor idéia.

S7: O mesmo que disse no exercício anterior.
S8: Não sei o que significa, só sei o método de derivar.
S9: Não entendo, pois não foi explicado o que é uma derivada.
S4, S5 e S6: Em branco.

Análise relativa à questão Q-4.

A resposta ao item a da questão Q-4, fornecida pelo sujeito S1, ainda que imprecisa, pois não identifica o coeficiente citado como sendo o coeficiente angular da reta tangente, expressa uma *definição conceitual* compatível com a “definição geométrica” do conceito de derivada, constituindo-se, portanto, em uma formal *definição conceitual.* No entanto, esse sujeito não mobiliza essa definição para responder às demais questões propostas. Ele apresenta respostas cujas informações são insuficientes para que possamos inferir uma *imagem conceitual evocada* associada às mesmas, para as questões Q –1a, Q-2, Q –3, Q-5b e Q-5d. Sua resposta à questão Q-5c fornece informações que sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui algum vínculo entre a derivada de f em x = a e a tangente trigonométrica do ângulo determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x. Porém, em nenhuma dessas respostas existem elementos evidenciando que a formal *definição conceitual*, fornecida por ele ao responder à questão Q-4a, tenha sido consultada. Tal fato também foi evidenciado e discutido ao analisarmos as respostas fornecidas pelos sujeitos SC5 e SC6, participantes da etapa 1, à essa mesma questão e item, conforme relatado na análise relativa à questão Q-4 , no item 3.1.1 deste capítulo.

A resposta do sujeito S2 à questão Q-4a expressa uma *definição conceitual* que está associada a uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente ao gráfico da função f em (a,b) como sendo a função derivada de f. Tal *imagem conceitual evocada* também é mobilizada por este sujeito para responder as questões Q-3 e Q-5c . Evidenciamos, portanto, uma situação na qual uma pessoal *definição conceitual*, difere da formal *definição conceitua*l relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. Tal resposta também mobiliza uma relação presente na *imagem conceitual evocada* por este sujeito, a qual associa a derivada da função f em um ponto específico à determinação da velocidade instantânea de uma função neste ponto.

A resposta do sujeito S7 ao item a da questão Q-4 apresenta uma *definição conceitual* que sugere a mobilização de uma *imagem conceitual* que inclui a função derivada em x = a como sendo uma lei de correspondência obtida a partir da utilização de uma regra de derivação sobre a função f. É provável que, nesta situação proposta, o sujeito não esteja distinguindo a derivada da função f em x = a da função derivada f'.

As respostas dos sujeitos S4 à questão Q-4a, bem como a resposta do sujeito S3 à questão Q-4b, fornecem informações que sugerem uma *imagem conceitual evocada* que inclui a associação do conceito de derivada aos conceitos de velocidade e aceleração. Na etapa 1, durante as discussões das possíveis respostas para a Q-5, a dupla G-A e terna G-C também fornecem informações que sugerem a mobilização de *uma imagem conceitual evocada* que inclui esta mesma associação citada. É possível que a presença de tal elemento, compondo a *imagem conceitual* desses sujeitos, esteja relacionado a uma "interpretação cinemática" do conceito de derivada, isto é, uma interpretação da derivada da função horária do movimento como sendo a velocidade escalar no instante t, freqüentemente abordada nos cursos de Cálculo e nos manuais didáticos adotados no país, como por exemplo, nos títulos STEWART, James. Cálculo, vol1; FLEMMING D. Marília, GONÇALVES, B. Míriam. Cálculo A: Funções, Limites, Derivação e Integração; BOULOS, Paulo. Cálculo Diferencial e Integral – vol 1.

As demais respostas aos itens a e b da questão Q -5 não nos possibilita inferir *que definição conceitual* está sendo sugerida.

3.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA FASE I

A partir da análise dos dados obtidos nas etapas 1 e 2 da fase I de pesquisa foi possível inferir elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos pesquisados . Alguns desses elementos parecem ser os responsáveis pela produção de respostas inválidas, do ponto de vista matemático, às questões propostas. São eles:

1- A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) é concebida como sendo a função derivada de f, quando se deseja determinar $f'(a)$.
2- A propriedade segundo a qual se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, $f(a) = f'(a) = b$, isto é, a derivada de f em x = a é interpretada como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b) , quando se deseja determinar $f'(a)$.
3- O processo de determinação da derivada de f em x = a está associado à necessidade de uma lei de correspondência para a função f.

Informações obtidas possibilitaram a inferência de alguns elementos que compõem a *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. Apesar de produzirem respostas cujos valores coincidem com aqueles obtidos nas respostas corretas, tais elementos são considerados incoerentes, do ponto de vista matemático-. São eles:

1- A equação da reta tangente ao gráfico da função f em (a,b) é concebida como sendo a própria função f , quando se deseja determinar o valor numérico de f para um valor específico de x.
2- A derivada da função afim, representada graficamente pela reta tangente ao gráfico de f em (a,b) é concebida como sendo a derivada de f em x = a, quando se deseja determinar $f'(a)$.

Alguns elementos que compõem a *imagem conceitual* relativa aos conceitos de taxa de variação média e instantânea, foram inferidos a partir de informações obtidas nesta fase. São eles:

1- A existência de uma associação entre os conceitos de taxa de variação média e instantânea e velocidade média e velocidade instantânea.

2- A taxa de variação instantânea da função f para um determinado valor de x é concebida como sendo o valor numérico da derivada de segunda ordem desta função para este valor de x.

Tais elementos, na etapa 1, não foram mobilizados para responder às questões propostas, enquanto, na etapa 2, estes elementos foram mobilizados para responder às questões Q-4 a, Q-4b e Q-5b.

A análise relativa às respostas fornecidas à questão Q-4a levantou possíveis relações existentes entre a *definição conceitual*, referente ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, e elementos da *imagem conceitual*, relativas ao referido conceito, inferidos a partir das respostas fornecidas para as demais questões propostas. Neste sentido, encontramos as seguintes situações relatadas:

1 - A resposta do sujeito à questão Q-4a apresenta uma formal *definição conceitual* que não é consultada para a formulação das respostas fornecidas por ele às demais questões propostas. Esta formal *definição conceitual* inclui elementos que não estão coerentemente relacionados com as partes da *imagem conceitual* que são evocadas para responder às demais questões.

2- A resposta do sujeito à questão Q-4a apresenta uma pessoal *definição conceitual* que difere da "definição geométrica" do conceito de derivada e, no entanto, está coerentemente relacionada aos elementos que compõem a *imagem conceitual evocada,* mobilizada por ele para responder à maioria das questões propostas.

Dentre todos os sujeitos pesquisados nas etapas 1 e 2, apenas os sujeitos SA1 e SA2 apresentaram respostas escritas e comentários audiogravados que fornecem evidências de que uma relação entre a derivada de f em x = a e a tangente do ângulo formado pela reta tangente L e o eixo x foi estabelecida, isto é, reconheceram que $f'(a) = tg\theta$ para as situações propostas. O sujeito S1, participante da etapa 2, fornece uma resposta à questão Q-5c que sugere uma referência vaga de que tal relação pode ter sido estabelecida.

Uma relação de igualdade entre a tangente trigonométrica e o coeficiente angular da reta tangente L foi mencionada pelos sujeitos SA1, SC6 e SC7. Porém, os sujeitos SC6 e SC7 não mobilizaram tal relação para responder às questões propostas.

Alguns sujeitos da etapa1 (SB3, SB4, SC6, SC7) e o sujeito S2 da etapa 2 , ora apresentam respostas que sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente como sendo a derivada da função f, ora fornecem respostas que sugerem a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b). A partir desses resultados sugerimos a existência de uma associação entre estes dois aspectos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente. Tal possibilidade é um dos nossos objetos de investigação da fase II desta pesquisa.

Tendo-se em vista os dados obtidos nas etapas 1 e 2, podemos considerar que, na etapa 1, as questões propostas permitiram-nos a inferência de uma diversidade de elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada dos sujeitos pesquisados. No entanto, para os sujeitos investigados na etapa 2, essas questões não foram tão propícias para possibilitar-nos inferir os elementos da referida *imagem conceitual,* mobilizados por esses sujeitos, ao respondê-las, visto que obtivemos um número expressivo de respostas em branco ou pouco informativas no que tange à inferência de elementos da *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente.

3.4 CONCLUSÃO – FASE I

A síntese dos resultados obtidos na fase I nos fornece um levantamento inicial da forma de expressar e conceber o conceito de derivada quando interpretado geometricamente por esses sujeitos pesquisados.

Dos resultados obtidos destacamos dois aspectos sobre elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, que constituem o objeto de investigação da fase II desta pesquisa, a saber:

- Algumas situações nas quais a resposta do sujeito à questão Q-4a apresenta uma formal *definição conceitual* que não é consultada para a formulação das respostas fornecidas por ele às demais questões propostas. Esta formal *definição conceitual* inclui elementos que não estão coerentemente relacionados com as partes da *imagem conceitual* que são evocadas para responder às demais questões.

- A possibilidade de existência de uma associação entre a interpretação da equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) como sendo a função derivada de f, e a interpretação da derivada da função f em x =a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b).

Por meio de uma investigação mais específica destes dois aspectos sobre os elementos da *imagem conceitual* e *definição conceitual,* mencionados acima, pretendemos obter um diagnóstico mais amplo sobre elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos pesquisados.

3.5 FASE II

3.5.1 Introdução:

A análise relativa à fase II busca complementar as informações sobre elementos que compõem *a imagem conceitual* e *definição conceitual* de alguns sujeitos pesquisados, relativas ao conceito de derivada, evidenciadas na fase I, focalizando os dois aspectos específicos dessa *imagem conceitual* e *definição conceitual* citados no item 3.4 no qual consta a conclusão da fase I. Tais aspectos referenciam a elaboração dos critérios de seleção dos sujeitos pesquisados e conseqüente escolha desses sujeitos.

3.5.2 Seleção dos sujeitos para entrevista.

Utilizamos os seguintes critérios para selecionar sujeitos para entrevista:

1) Sujeitos que fornecem, para algumas questões propostas na fase I, respostas que sugerem a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a ordenada b do ponto de tangência (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico de f como sendo a função derivada de f em x = a , enquanto outras respostas sugerem a interpretação da equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) como sendo a função derivada de f, isto é, o sujeito mobiliza um ou outro elemento da *imagem conceitual* citado, dependendo da questão proposta.

2) Sujeitos cuja resposta à questão Q-4a apresenta uma formal *definição conceitual* que não é consultada para a formulação das respostas fornecidas por ele a outras questões propostas, a qual inclui elementos que não estão coerentemente relacionados com outros elementos da *imagem conceitual* que são mobilizados para responder às demais questões.

Por meio do critério 1 selecionamos sujeitos cujas entrevistas nos permitam aprofundar a investigação da possibilidade de existência de uma associação entre dois elementos específicos da *imagem conceitual,* mobilizados por eles para responder ao questionário aplicado na fase I. São esses elementos: a interpretação do conceito de derivada na qual a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto (a,b) é concebida como sendo a função derivada de f, e a forma de conceber a derivada da função f no ponto de abscissa x = a como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta tangencia o gráfico da função f.

Por meio do critério 2 selecionamos sujeitos cujas entrevistas propiciem condições para que elementos conflitantes da *imagem conceitual* e *definição conceitual* sejam evocados simultaneamente pelos mesmos, de modo a possibilitar a investigação de possíveis modificações nos procedimentos adotados por eles para responder a determinadas questões propostas na fase I, quando tais sujeitos são confrontados com a presença desses elementos conflitantes.

Em concordância com os dois critérios de seleção citados acima foram selecionados os sujeitos SB4, SC5, SC6 e SC7, participantes da etapa 1 da fase I, para entrevista individual, e os sujeitos S1 e S2, participantes da etapa 2 da fase I, para uma entrevista com a dupla.

Informamos que, dentre os seis indivíduos selecionados, apenas o sujeito SC5 não se mostrou disponível para a realização da entrevista, não participando da fase II da pesquisa.

Relacionamos, a seguir, as respostas dadas por cada sujeito selecionado às questões propostas na fase I, indicando, quando possível, as *imagens conceituais evocadas,* sugeridas por tais respostas, de modo a caracterizar a sua seleção, segundo os critérios estabelecidos.

TABELA 17 - RESPOSTAS DO SUJEITO SB4 AO QUESTIONÁRIO APLICADO NA FASE I E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LAS

Imagem conceitual evocada	Respostas
Q-1a: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f ‘(a) = b.	Se L é tangente a curva f(x) no ponto (4,2) então ambas dividem os mesmos pontos de abscissa e ordenada portanto f ‘(4) = 2.
Q-1b: A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.	$tg\theta = \frac{cat.op.}{cat.adj.} = \frac{2}{1} = 2$
Q-2: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f ‘(a) = b.	Se uma reta é tangente a uma função num determinado ponto então elas tem suas imagens iguais naquele ponto f(x)= f ‘(x). Portanto nesse caso f(2) = f ‘(2) = 6.
Q-3: A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	$y - y_0 = tg\theta(x - x_0)$ $y - 2 = 3(x - 4)$ $y - 2 = 3x - 12$ $y = 3x - 10$ $f'(x) = 3x - 10$ $y = -1$
Q-5a: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	Não sei o que é taxa de variação média.
Q-5b: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imgem conceitual evocada.	Não sei o que é taxa de variação instantânea.
Q-5c:A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	y = 2x y =4
Q-5d:A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	$f'(x) = 2x$ $f(x) = \int 2x$ $f(x) = x^2$ $f(2{,}08) = 4{,}3264$

Respostas obtidas na questão Q-4

Item a: Não sei

Item b: Não sei dizer.

Justificativa para a seleção do sujeito: Critério 1.

TABELA 18 - RESPOSTAS DO SUJEITO SC5 AO QUESTIONÁRIO APLICADO NA FASE I E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LAS

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
Q-1a: A derivada de f em x = a é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em x = a	$f'(4)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto (4,2). $f'(4)=2.$
Q-1b: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	$tg\theta = 2$.
Q-2: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	f '(2) = 6. Idem a 1.
Q-3. As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	Não me lembro.
Q-5a: A taxa de variação média de uma função em um certo intervalo é um quociente entre variações.	Taxa = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Taxa = $\frac{7-4}{3-2}=\frac{3}{1}=3$
Q-5b:(derivada de f em x = a) A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	x =2 y = 2.2 = 4. Taxa de variação instantânea é o limite quando h → 0 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$
Q-5c: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	f '(2)= 4 y = 2x y = 2(2) y = 4
Q-5d:Não são fornecidas informações que nos permitam inferir elementos da imagem conceitual evocada.	Em branco.

Respostas obtidas na questão Q-4.

Item a: É a inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele determinado ponto pedido.

Item b: É a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto x.

Justificativa para a seleção do sujeito*:* Critério 2.

TABELA 19 - RESPOSTAS DO SUJEITO SC6 AO QUESTIONÁRIO APLICADO NA FASE I E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LAS

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
Q-1 a: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	f '(4) é igual a f(4) pois a reta L é tg ao gráfico no ponto (4,2) portanto f '(4) = 2.
Q-1b: A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.	$tg\theta = \frac{cat.op}{hip}$ $tg\theta = \frac{2}{1}$ $tg\theta = 2$, 2 é a inclinação da reta tangente.
Q-2: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	f '(2) = f(2) = 6 Mesma justificação do item "a" da Q-1.
Q-3: A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	: $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ $m = \frac{18}{6}$ $m = 3$ $y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 2 = 3(x - 4)$ $y - 2 = 3x - 12$ $y = 3x - 10$ $f'(x) = 3x - 10$ $f'(3) = -1$ Mesma justificativa do item "a" da Q – 1 $f(3) = f'(3) = -1$
Q-5a: A taxa de variação média de uma função em um certo intervalo é a tanngente trigonométrica do ângulo formado pela secante que passa pelos pontos (2,4) e (3,7) e o eixo x.	$T_{VM} = \frac{c.o.}{c.a.} \Rightarrow T_{VM} = \frac{3}{1} = 3$
Q-5b: (derivada de f em x = a) A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	Taxa de variação instantânea é a derivada da função f, no caso y = 2x, portanto igual a 4. É o $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}$
Q-5c: A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	f '(2)= 4 pois a derivada é y = 2x.
Q-5d : Não são fornecidas informações que nos permitam inferir elementos da imagem conceitual evocada.	Em branco.

Respostas Obtidas na questão Q – 4.

Item a: É a inclinação da reta tangente a f(x) em um ponto qualquer.

Item b: Mesma resposta da anterior, só que para o ponto x.

Justificativa para a seleção do sujeito: Critério 1 e critério 2.

TABELA 20 - RESPOSTAS DO SUJEITO SC7 AO QUESTIONÁRIO APLICADO NA FASE I E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LAS

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
Q-1a: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	Se o ponto é (4,2) ele pertence a reta tangente e a derivada de 4 é 2 .
Q-1b: A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.	$tg\theta = \frac{c.o.}{c.a.} = 2$. Inclinação da reta tangente.
Q-2: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	f '(2) = 6 Sendo o ponto (2,6) a tangente no ponto 2 é 6 que é a derivada.
Q-3: A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	$m = \frac{10-4}{20-2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{y-2}$ $3x - 12 = y - 2$ $y = 3x - 10$ (equação da reta tangente) $f'(3) = -1$ Acha-se a equação da reta tangente pelos pontos pertencentes a ela e substitui-se o x = 3 para achar o y = -1.
Q-5a: A taxa de variação média de uma função em um certo intervalo é um quociente entre variações.	$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-4}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$
Q-5b: (derivada de f em x = a) A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	Taxa de variação instantânea no x = 2 é 4. T(2) = 2.2 = 4.
Q-5c: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, f(a) = f '(a) = b.	f '(2) = 4. O ponto (2,4) pertence a reta L..
Q-5d: O processo de determinação do valor numérico da função f está associado à necessidade de existência de uma lei de correspondência para a função f.	$f(x) = \frac{3x^2 + 8}{5}$ chutei a função e acertei ! x = 2,08 f(2,08) = 2,46528.

Respostas obtidas na questão 4:

Item a: Esse ponto qualquer é o ponto de tangência entre a reta tangente ao gráfico de f. Esse ponto tem ordenada x e abscissa y. A derivada de f(x) é y.

Item b: O mesmo que "a" só que y = 2x.

Justificativa para a seleção do sujeito: Critério 1.

TABELA 21 - RESPOSTAS DO SUJEITO S1 AO QUESTIONÁRIO APLICADO NA FASE I E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LAS

Imagem conceitual evocada	**Respostas**
Q-1a: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	A letra a eu não consegui.
Q-1b: a tangente do ângulo θ é o queociente entre a medida ddo cateto oposto e da hipotenusa.	$a^2 = b^2 + c^2$ $tg\theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $a^2 = 2^2 + 4^2$ $a^2 = 20$ $a = 2\sqrt{5}$
Q-2: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	$y = ax^2 + bx + c$ $y' = 2ax + b$ $y' = 2a \cdot 2 + b$ $y' = 4a + b$ $A = \frac{B+b}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$ O gráfico é uma parábola com concavidade para cima.
Q-3: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	Não sei explicar.
Q-5[a]: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	$V_M = \frac{3-2}{7-4} = 0{,}33$
Q-5b: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual evocada.	Essa eu não sei explicar.
Q-5c:Mantém algum vínculo entre o valor da derivada da função f em x = a e a tangente do ângulo determinado pela reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,b) e o eixo x.	$f'(2) = tg\theta = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 2$ (eu acho)
Q-5d: O processo de determinação do valor numérico da função f está associado à necessidade da existência de uma lei de correspondência para a função f.	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(2{,}08) = a(2{,}08)^2 + b(2{,}08) + c$

Respostas obtidas na questão Q-4.

Item a: Eu entendo que ela nos fornece o coeficiente da reta tangente naquele ponto.

Item b: $f(x) = x^2$ Não sei te explicar.

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2$

$f'(2) = 4$

$f'(3) = 6$

Justificativa para a seleção do sujeito: Critério 2.

TABELA 22 - RESPOSTAS DO SUJEITO S2 AO QUESTIONÁRIO APLICADO NA FASE I E ELEMENTOS DA *IMAGEM CONCEITUAL* MOBILIZADOS PARA RESPONDÊ-LAS

Imagem conceitual evocada	***Respostas***
Q-1a: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b) então f(a)=f '(a) = b.	f '(5) = 4 Olhando pelo gráfico a imagem do 5 na reta.
Q-1b: A tangente do ângulo θ é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente.	$tg\theta = \frac{c.o}{c.a.} = \frac{4}{2}$ $tg\theta = 2$
Q-2: Se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b) então f(a)=f '(a) = b.	f '(2) = 6 Pelo mesmo motivo da primeira questão.
Q-3: A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	$ax + b = y$ $\quad 4 \cdot 3 + b = 2$ $4a + b = 2(-1)$ $\quad 12 + b = 2$ $10a + b = 20$ $\quad b = -10$ $-4a - b = -2$ $10a + b = 20$ $\quad f'(x) = 3x - 10$ $6a = 18$ $\quad f'(3) = 3 \cdot 3 - 10$ $a = 3$ $\quad f'(3) = -1$
Q-5a: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	Não tenho a menor idéia de como faz a taxa de variação.
Q-5b: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	A mesma da anterior.
Q-5c: A equação da reta tangente L é a função derivada de f.	y = 2(2) y = 4 É a imagem do ponto 2 na reta tangente.
Q-5d: As informações são insuficientes para que possamos inferir elementos da imagem conceitual.	Não consigo fazer porque o que me recordo é fazendo integral.

Respostas obtidas na questão Q-4.

Item a: Não me recordo muito bem, mas lembro que é a reta tangente ao ponto da curva na função e que é usado para calcular a velocidade instantânea.
Item b: A única coisa que me lembro é que a função é crescente.

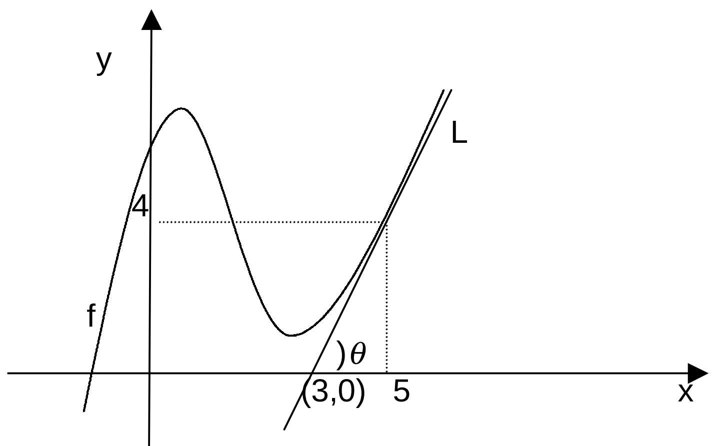
Justificativa para a seleção do sujeito: Critério 1.

3.5.3 A Questão Motivadora. (Apêndice 3)

A inclusão na entrevista de uma questão motivadora, objetiva tornar sua realização mais eficaz em direção a uma investigação mais específica de determinados aspectos da *imagem conceitual* e *definição conceitual,* relativas ao conceito de derivada, evidenciados pelas investigações realizadas na fase I, e citados na definição dos critérios de seleção dos sujeitos para entrevista.

Com esse objetivo, elaboramos a seguinte questão motivadora:

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (5,4).



a) Determine $tg\theta$.
b) Determine $f'(5)$.
c) É possível determinar-se f' (a função derivada de f)? Se sim, determine-a. Se não, explique por quê.
d) É possível determinar-se $f'(2)$. Se sim, determine-a. Se não, explique por quê.
e) Você conseguiria calcular a $tg\theta$ sem utilizar-se das medidas dos catetos do triângulo retângulo determinado pela reta L e o eixo x ? Em caso afirmativo, como o faria?

Análise da questão motivadora.

A questão motivadora é uma adaptação da questão Q-1 do questionário aplicado na etapa 2, da fase I da pesquisa. Os valores das coordenadas dos pontos indicados no gráfico foram mantidos como os indicados no questionário da etapa 2 de modo que o valor da tangente do ângulo θ difere do valor da ordenada do ponto de tangência. Com isso, objetivamos verificar se os sujeitos entrevistados que participaram da etapa 1, ao respondê-la, mobilizam ou não os mesmos elementos da *imagem conceitual* que foram mobilizados para responder à Q-1 do questionário da etapa 1, na qual os valores citados eram coincidentes.

Os itens a e b da questão motivadora foram mantidos idênticos aos itens a e b da questão Q-1 da etapa 2 da fase I, efetuando-se apenas uma inversão entre eles, com vista a verificar se alteraria em algum aspecto os elementos da *imagem conceitual* evocados para respondê-los. Pretende-se, com a inclusão de tais itens, investigar se os sujeitos selecionados mobilizam ou não os mesmos elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geométricamente, que foram mobilizados para responder às questões Q-1 e Q-2.

Os itens c e d da questão motivadora visam investigar se as respostas dadas a estes itens, pelos sujeitos selecionados, sugerem ou não a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente como sendo a função derivada de f.

O item e foi incluído com o objetivo de investigarmos se o sujeito estabelece ou não uma relação de igualdade entre o valor da tangente trigonométrica do ângulo θ e o valor da derivada da função f no ponto de abscissa x = 5. Espera-se que ele se utilize do item b para responder ao item e, caso sua *imagem conceitual* inclua uma relação de igualdade entre estes elementos.

Na fase I, os sujeitos SB4, SC6, SC7 e S2 responderam às questões Q-1a e Q-2, mobilizando uma *imagem conceitual evocada,* que inclui a ordenada b do ponto de tangência (a,b), como sendo a derivada de f no ponto de abscissa x = a, e a questão Q-3, interpretando a equação da reta tangente L, como sendo a função derivada de f. Pretendemos investigar se tais sujeitos, ao responderem aos itens a, b, c, d da questão motivadora, mobilizam ambos os elementos da *imagem conceitual* citados, para responder a uma mesma questão cuja representação gráfica é utilizada como elemento de estímulo para que o conceito de derivada, na sua interpretação geométrica, seja evocado. Desta forma podemos inferir a possibilidade de existência, para esses sujeitos, de uma associação entre esses dois elementos da *imagem conceitual*, quando respondem a este tipo de questão.

3.5.4 Análise das entrevistas.

A análise das entrevistas dos grupos 1 (entrevistas individuais) e 2 (entrevista com a dupla) foram subsidiadas pelas respostas dadas à questão motivadora (Apêndice 3), pela transcrição dos conteúdos das fitas audiogravadas. (Apêndices 5 e 6) e pelas informações obtidas na fase I .

Entrevistas Individuais. (Apêndice 5).

Transcrevemos as respostas de cada sujeito à questão motivadora.

TABELA 23 - RESPOSTAS DO SUJEITO SB4 Á QUESTÃO MOTIVADORA.

Item	***Resposta***
a	2. pelo triângulo $\frac{4}{2} = \frac{cat.op}{cat.adj} = 2$.
b	f ‘(5) = 4.
c	$y - y_0 = m(x - x_0)$ y – 4 = 2(x – 5) f ‘(x) = 2x – 10 + 4 f ‘ (x) = 2x – 6
d	f ‘(x) = 2x – 6 $\Rightarrow$ f ‘(2) = 4 – 6 = -2
e	Em branco.

TABELA 24 - RESPOSTAS DO SUJEITO SC6 Á QUESTÃO MOTIVADORA.

Item	**Resposta**
a	$tg = \frac{cop}{cad}$ $tg = \frac{4}{2}$ $tg = 2$
b	f '(5) = 4
c	Sim. X = 5 y = 4 X = 3 y = 0 Y = ax + b b = -3 a y = 2x – 6. 4 = 5 a + b 4 = 5 a – 3 a 0 = 3 a + b a = 2 e b = -6
d	Sim. f '(2) = -2
e	Sim, $tg\theta$ é o coeficiente angular do f '(x).

TABELA 25 - RESPOSTAS DO SUJEITO SC7 Á QUESTÃO MOTIVADORA.

Item	Resposta
a	$m = tg\theta \rightarrow tg\theta = 2$ $y - y_0 = m(x - x_0)$ 4 = m(2) m = 2
b	f '(5) = 4
c	y = 2(x – 3) f '(x) = 2x – 6
d	f '(2)= -2
e	e = a

As respostas dos sujeitos SB4 e SC6 aos itens a e b da questão motivadora sugerem a mobilização dos mesmos elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, mobilizados para responder às questões Q-1 e Q-2 da fase I (Tabelas 17 e 19), apesar do valor da tangente trigonométrica pedida diferir do valor da ordenada 4 do ponto de tangência (5,4). Sobre a resposta ao item b, o sujeito

SB4 afirma que “Dá quatro porque... tangencia aqui nesse ponto... é a mesma imagem”, enquanto o sujeito SC6 diz “Aí, eu... peguei o quatro, porque o quatro é a imagem...” (Apêndice 5). Consideramos que eles continuam concebendo a derivada da função f em x = a como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f.

O sujeito SC6, ao responder ao item e da questão motivadora, afirma que “...Aqui no c eu determinei a equação da f ‘ ... a equação da reta tangente... você está perguntando se eu não conseguiria determinar a tangente de θ, eu determinei... é o coeficiente angular dessa equação aqui. “ (Apêndice 5). Essa resposta nos permite afirmar que esse sujeito concebe o coeficiente angular da reta tangente L como sendo a tangente do ângulo θ, indicado no gráfico, porém, não existem elementos nas respostas fornecidas por ele (exceto na questão Q-4a) que indiquem o estabelecimento de uma relação entre a derivada da função f em x =5 e o valor da referida tangente trigonométrica, ou entre a derivada de f em x = 5 e o coeficiente angular da reta tangente L.

A ausência de uma resposta para o item e da questão motivadora sugere que o sujeito SB4 não relaciona a tangente trigonométrica do ângulo θ com a derivada da função f no ponto de abscissa x = 5, ou com o coeficiente angular da reta tangente L, uma vez que ambos elementos haviam sido calculados nos itens b e c desta questão e não foram utilizados para responder ao item e.

As respostas dos sujeitos SB4 e SC6 aos itens c e d da questão motivadora sugerem que, mesmo quando a questão proposta utiliza uma representação gráfica que indica de forma explícita o valor da ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f, esses sujeitos interpretam a equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f. Ao responder ao item c da referida questão, o sujeito SB4 afirma que “ Dá pra determinar. Tem dois pontos da reta... f ‘ você determina pela equação da reta... “, enquanto o sujeito SC6, ao responder o item d, diz que “ Aqui no c, eu determinei a equação da f ‘... a equação da reta tangente...” (Apêndice 5).

Referenciando-nos nas respostas desses sujeitos aos itens b, c e d da questão motivadora, e nas respostas ao questionário aplicado na fase I, as quais sugerem uma alternância na mobilização de dois elementos específicos da *imagem conceitual*, a saber, a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), e a interpretação da equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f, consideramos que, para tais sujeitos, a *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, inclui uma associação entre esses dois elementos sugeridos por tais respostas.

O sujeito SC6 forneceu uma resposta à questão Q-4a do questionário da fase I que expressa uma formal *definição conceitual*. Durante a entrevista, este sujeito indica compreender, de forma satisfatória, do ponto de vista matemático, os elementos que compõem tal resposta, ao afirmar que a derivada "é a tangente da inclinação da reta tangente a f(x) em um ponto qualquer". No entanto, ao ser motivado a comparar as respostas dadas ao questionário da fase I (Tabela 19), bem como a resposta dada ao item b da questão motivadora (Tabela 24), com a resposta dada à questão Q-4a da fase I, esse sujeito não percebe a existência de elementos incompatíveis, do ponto vista matemático, em tais respostas, recusando a oportunidade de modificá-las. Em vista do exposto, consideramos que esse sujeito, mesmo sendo estimulado a evocar simultaneamente elementos conflitantes da sua *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, não manifesta vivenciar uma situação de conflito. Parece-nos que esses elementos permanecem desconectados na *imagem conceitual* deste sujeito, ainda que ele seja estimulado a evocar simultaneamente tais elementos conflitantes.

O sujeito SC7 fornece uma resposta para o item a da questão motivadora que sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a tangente trigonométrica do ângulo θ como sendo o coeficiente angular da reta tangente L. A associação entre o valor da referida tangente trigonométrica e o coeficiente angular da reta L é novamente mobilizada por esse sujeito para responder ao item e da questão motivadora. Esse elemento da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, não é evocado por esse sujeito ao responder a Q-1b do questionário da fase I (Tabela 20).

A resposta do sujeito SC7 ao item b da questão motivadora sugere a mobilização da mesma *imagem conceitual evocada,* mobilizada para responder às questões Q-1a e Q-2 na fase I (Tabela 20). Ao ser questionado sobre o que pensa quando diz que f '(5) = 4, esse sujeito começa a refletir sobre sua resposta e manifesta vivenciar uma situação de conflito que se estende enquanto busca soluções para o item c e d da questão motivadora. Ele afirma, em dado momento da entrevista, não poder encontrar o valor da derivada de f em x = 2, uma vez que não lhe foi fornecida a reta tangente ao gráfico de f em x = 2. Afirma, também, que f ‘(5) não pode ser 4, uma vez que o valor da derivada da função y = 2x – 6, cuja representação gráfica é a equação da reta tangente L, é 2. Logo em seguida esclarece sua própria dúvida afirmando “ Ah, não, é esse aqui. O dois é só o coeficiente.”. Posteriormente, afirma ser a equação da reta L (y = 2x - 6) a função derivada de f, o que é questionado logo em seguida pelo próprio sujeito, dizendo: “ ...A reta tangente à função é a função derivada? Está me dando um nó... essa aqui já é a derivada?”. (Apêndice 5)

Ao analisarmos tal episódio concluímos que a proposta da questão motivadora, associada às intervenções do entrevistador durante a entrevista, estimularam tal sujeito a evocar vários elementos da sua *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada. Dentre esses, destacamos: a interpretação da derivada da função f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b) , a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a derivada da função cuja representação gráfica é a reta tangente L ao gráfico de f em (a,b), e a interpretação da equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f.

A mobilização simultânea de tais elementos parece favorecer o estabelecimento de uma sensação de conflito que é claramente manifestada pelo sujeito SC7, quando afirma: “Eu fico sempre confuso... eu volto toda hora, bato em algumas coisas... eu entendo na hora, resolvo. A gente estuda só para prova, né? Fica bitolado para estudar, quer saber como é que é para resolver...resolve um calhamaço de exercícios, e depois, pra saber...vir de novo aqui... tem que ver tudo de novo.” . No entanto, a situação de conflito vivenciada pelo sujeito durante a entrevista não o motivou a modificar os procedimentos adotados para responder aos itens b, c e d da questão motivadora, os quais sugerem a mobilização dos mesmos elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, evocados por ele para responder às questões Q-1, Q-2, Q-3, Q-5b e Q-5c.(Tabela 20).

Entrevista com a dupla de sujeitos S1 e S2. (Apêndice 6)

As respostas de cada sujeito à questão motivadora foram transcritas abaixo.

TABELA 26 - RESPOSTAS DO SUJEITO S1 Á QUESTÃO MOTIVADORA.

Item	Respostas
a	$tg\theta = \frac{4}{2} = 2$
b	f '(5) = 4
c	Y = ax + b a.3 + b = 0 a.5 + b = 4 8 a = 4 – 2b a = $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}b$ $3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}b\right) + b = 0$ $\frac{3}{2} - \frac{3}{4}b + \frac{b}{1} = \frac{0}{4}$ $\frac{6-3b+4b}{4} = \frac{0}{4}$ b = - 6 $a = \frac{1}{2} + \frac{6}{4}$ $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ a = 2 f '(x) = 2x - 6
d	f '(2) = 2.2 – 6 f '(2) = -2
e	Em branco.

TABELA 27 - RESPOSTAS DO SUJEITO S2 Á QUESTÃO MOTIVADORA.

Item	Respostas
a	$tg\theta = \frac{4}{2} = 2$
b	f '(x) = 4
c	3 a + b = 0 5 a + b = 4 (-1) 3 a + b = 0 - 5 a – b = - 4 -2 a = - 4 a = 2 3.2 + b = 0 b = - 6 É possível. f '(x) = 2x – 6.
d	f '(2) = 2.2 – 6 f '(2) = 4 – 6 f '(2) = -2
e	Deve haver mais eu não sei.

As respostas aos itens a e b da questão motivadora, fornecidas pelo sujeito S2, sugerem a mobilização dos mesmos elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, evocados para responder às questões Q-1 e Q-2 do questionário da fase I (Tabela 22).

As respostas fornecidas pelo sujeito S1 aos itens a e b da questão motivadora sugerem a mobilização de outros elementos da sua *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, que não haviam sido evocados por ele ao responder às questões Q-1 e Q-2, propostas na fase I (Tabela 21). São esses: a interpretação da tangente trigonométrica do ângulo θ como sendo o quociente entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente, e a interpretação da derivada da função f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f.

Os sujeitos S1 e S2, em entrevista, indicam utilizar, para responder ao item b da questão motivadora, um procedimento no qual buscam determinar, em um primeiro momento, a equação da reta tangente L para posterior substituição do valor de x por 5 e, em um segundo momento, afirmam ser tal procedimento desnecessário, uma vez que, por meio da reta tangente L, é possível determinar-se a ordenada 4 do ponto de tangência (5,4), que é considerada por eles como sendo a derivada da função f em x = 5. A adoção desse procedimento por esses sujeitos sugere a mobilização simultânea de dois elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, a saber, a interpretação da equação da reta tangente como sendo a função derivada de f, e a interpretação da derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b).

As respostas dadas pelos referidos sujeitos aos itens c e d da questão motivadora sugerem a interpretação da equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f .

Em vista do exposto, consideramos a alternância na mobilização dos citados elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, evocados para responder aos quatro primeiros itens da questão motivadora, como sendo um fator indicador de que a *imagem conceitual* dos sujeitos S1 e S2 inclui uma associação entre tais elementos da *imagem conceitual* desses sujeitos.

Ao buscar uma solução para o item e da questão motivadora, o sujeito S2 parece evocar simultaneamente dois elementos conflitantes da sua imagem conceitual, relativa ao conceito de derivada. Ele afirma, em entrevista, que “ A tangente de θ é a derivada da função no ponto ... “ e, logo em seguida, abandona esta interpretação, questionando “ ...não , não é... sabe por quê ? Porque o ponto é 5. E quanto que vale a derivada no ponto 5? “. Parece-nos que, ao identificar valores distintos em seus resultados obtidos para a tangente trigonométrica pedida no item a e para a derivada de f em x = 5 pedida no item b, esse sujeito abandona a interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função em um determinado ponto que é aceita pela comunidade matemática, e que, de alguma forma, foi evocada pelas discussões sobre as possíveis respostas para o item e da questão motivadora, para mobilizar a sua forma pessoal de interpretar o referido conceito, ao responder aos questionamentos que lhe são propostos ao longo da entrevista.

Os sujeitos S1 e S2, ao realizarem a tarefa proposta pelo entrevistador, na qual deviam comparar e discutir as respostas dadas às questões Q-1, Q-2, Q-3, Q-4 a e Q-5c do questionário da fase I, procederam de formas diferentes.

O sujeito S2, modificou, de forma não significativa, a sua resposta dada à questão Q-4 a, após a entrevista. Na fase I, esse sujeito afirmou ser a derivada de uma função f em um ponto determinado “... a reta tangente ao ponto da curva na função ...”, enquanto, na fase II, a resposta reformulada que fornece para a questão Q-4a afirma que a derivada de f em um ponto determinado “É a equação da reta tangente no ponto.” (Anexo 2). As demais respostas às questões selecionadas pelo entrevistador não foram modificadas após a entrevista, isto é, para esse sujeito, discutir as respostas dadas ao questionário da fase I com o sujeito S1, não favoreceu o estabelecimento de situações de conflito, bem como, não o motivou a modificar os procedimentos adotados para solucionar as citadas questões.

Para o sujeito S1, discutir com o sujeito S2 as respostas dadas a tais questões, motivou-o a modificar as respostas dadas às questões Q-1, Q-2, Q-3, Q-4a e Q-5c (Anexo 2), bem como favoreceu o estabelecimento de situações de conflito, sugerindo novos elementos da sua *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada. Por exemplo, ao ser questionado pelo entrevistador, sobre a possibilidade de determinar-se a função derivada de f na questão Q-3, o sujeito S1 sugere mobilizar uma *imagem conceitual evocada* que inclui a derivada da função cuja representação gráfica é a reta tangente L (y = 3x-10) como sendo a derivada de f em x = 3. No entanto, o sujeito S1, durante a entrevista, não mobiliza esta interpretação para a derivada de f em x = 3, fornecendo para a questão Q- 3 uma resposta que sugere a mobilização de uma *imagem conceitual evocada* que inclui a equação da reta tangente L como sendo a função derivada de f. Nenhum desses elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, parecem ter sido mobilizados por ele para responder ao questionário durante a fase I.

Ao ser questionado, durante a entrevista, sobre a resposta dada à questão Q-5c na fase I (Tabela 21), o sujeito S1 indica mobilizar elementos conflitantes de sua *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada. Ele reflete sobre sua resposta, dizendo "... tangente de θ não me dá a derivada da função ? Foi isso que eu pensei ... aí, eu fiz... f ' no ponto é igual a tangente de θ ..." e menciona não saber explicar porque indicou o cálculo da área de um triângulo. Porém, afirma: "Mas isso, para mim, continua a mesma coisa na minha cabeça...". Logo em seguida, calcula o valor da tangente de θ, afirmando " f '(2) ... isso sobre isso... 4 sobre 2... mas tá dando a mesma coisa, tangente θ ...4 sobre esse pedaço sobre 2 que vai dar 2. E a f '(2) ? f '(2) dá 4. Não dá a mesma coisa ... ou eu fiz errado?". Sua resposta escrita, fornecida para esta questão Q-5c durante a entrevista, evidencia essa situação de conflito registrando os resultados f '(2) = 4, f '(x) = 2x , f'(2) = tgθ e tgθ = 2 e não destacando nenhum deles como sendo a resposta à questão proposta. (Anexo 2).

Na fase I, o sujeito S1 fornece para a questão Q-4a uma resposta que expressa uma formal *definição conceitual*. Ao longo da entrevista tal definição não é mobilizada por ele para responder a nenhum item da questão motivadora, como também não é consultada para reformular as respostas dadas às questões do questionário da fase I que foram selecionadas para serem discutidas. Ao discutir a resposta dada a essa questão com o sujeito S2, o sujeito S1 mobiliza elementos conflitantes da sua *imagem conceitual*, pois, ao mesmo tempo que concorda com o sujeito S2 ser a derivada da função f, em um determinado ponto, a equação da reta tangente L nesse ponto, ele afirma que a derivada é "o coeficiente da reta tangente no ponto.". Parece-nos que esse sujeito não identifica elementos conflitantes nessas duas respostas. Ao reformular a resposta dada à questão Q-4a, durante a entrevista, ele abandona a formal *definição conceitual* que havia dado na fase I e afirma que a derivada "... nos fornece a função da reta tangente".

3.6 CONCLUSÃO – FASE II

Por meio da análise dos resultados obtidos na fase II podemos afirmar que todos os sujeitos participantes da etapa 1 da fase I que participaram da fase II, ao responder ao item b da questão motivadora, mobilizaram a mesma *imagem conceitual evocada*, que havia sido mobilizada para responder à questão Q-1 da fase I, mesmo não havendo resultados coincidentes para a tangente trigonométrica do ângulo θ e a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f. Tal elemento da *imagem conceitual*, quando mobilizado por esses sujeitos, produziu respostas insatisfatórias, do ponto de vista matemático, para várias das questões propostas.

Os sujeitos que, ao responder ao questionário da fase I, mobilizaram, de forma alternada, ora uma *imagem conceitual* evocada que inclui a equação da reta tangente ao gráfico de f como sendo a função derivada de f, ora interpretaram a derivada de f em x = a como sendo a ordenada b do ponto de tangência (a,b), continuaram alternando a mobilização desses mesmos elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, ao responderem à questão motivadora. Tal fato levou-nos a considerar a existência de uma associação entre esses elementos como um aspecto da referida *imagem conceitual* desses sujeitos.

Analisando o comportamento dos sujeitos selecionados para participarem da fase II quanto a modificarem ou não as respostas dadas anteriormente, após discussão das mesmas e estabelecimento de uma situação de conflito, concluímos que, à exceção do sujeito S1, os demais que vivenciaram durante a entrevista situações de conflito pouco ou nada modificaram as respostas dadas anteriormente, isto é, parece-nos que apenas vivenciar uma situação de conflito não é suficiente, no caso desses sujeitos, para que ocorra uma mudança significativa no processo de mobilização dos elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceituo de derivada, quando interpretado geometricamente, ao responderem questões do tipo, apresentadas nesta pesquisa.

CAPÍTULO 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

As análises relativas às fases I e II possibilitou-nos inferir elementos que compõem a *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente pelos sujeitos investigados, que foram mobilizados por eles ao responder às questões propostas nas duas fases da pesquisa. São eles:

4- A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto (a,b), é concebida como sendo a função derivada de f, quando se deseja determinar $f'(a)$.

5- A propriedade segundo a qual se L é a reta tangente ao gráfico de f em (a,b), então, $f(a) = f'(a) = b$, isto é, a derivada de f em x = a é interpretada como sendo a ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta tangencia o gráfico da função f, quando se deseja determinar $f'(a)$.

6- O processo de determinação da derivada de f em x = a está associado à necessidade de uma lei de correspondência para a função f.

7- A equação da reta tangente ao gráfico da função f em (a,b) é concebida como sendo a própria função f, quando se deseja determinar o valor numérico de f para um valor específico de x.

8- A derivada da função afim, representada graficamente pela reta tangente ao gráfico de f em (a,b), é concebida como sendo a derivada de f em x = a, quando se deseja determinar $f'(a)$.

9- A derivada de f em x =a é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa x =a.

10- A derivada da função f em x = a é a tangente do ângulo θ determinado pela reta tangente ao gráfico da função f, no ponto (a,b) e o eixo x, tomado no sentido anti-horário.

Consideramos que os sujeitos (SB4, SC6, SC7, S1, S2) que alternam a mobilização dos elementos 1 e 2, citados acima, ao responder a questões propostas nas duas fases de pesquisa apresentam, no período em que foram investigados, uma *imagem conceitual* relativa ao conceito de derivada que inclui uma associação entre tais elementos.

Como nossa pesquisa não pretende uma investigação mais profunda sobre as relações estabelecidas entre elementos da *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, mobilizados pelos sujeitos investigados, adotamos procedimentos metodológicos que não nos permitem identificar que tipo de associação está sendo estabelecida. Parece-nos que os sujeitos que interpretam a equação da reta tangente L ao gráfico da função f, como sendo a função derivada de f, estão mais propensos a mobilizar a interpretação da ordenada b do ponto (a,b) no qual a reta L tangencia o gráfico da função f como sendo a derivada de f no ponto de abscissa x = a, quando respondem a questões que apresentam elementos gráficos nos moldes propostos nesta pesquisa. Consideramos que essa possibilidade pode ser investigada em futuras pesquisas.

Dentre os sujeitos pesquisados, apenas o sujeito SA1 fornece respostas e comentários que sugerem uma *imagem conceitual* que inclui o estabelecimento de uma relação de igualdade entre o valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela reta L, tangente ao gráfico da função f no ponto (a,b) e o eixo x, o coeficiente angular dessa reta tangente L e a derivada da função f no ponto de abscissa x = a. Consideramos que, dentre os sujeitos pesquisados, é freqüente a presença de *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, que inclui a ausência de relação ou uma fraca relação entre a derivada de uma função no ponto de abscissa x = a e o coeficiente angular da reta L que tangencia o gráfico de f no ponto (a,b), como um aspecto característico.

Identificamos um sujeito (SC6) cuja *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, inclui elementos conflitantes, tais como os elementos 1 e 7 ou 2 e 7, citados acima. Esse sujeito, mesmo estimulado a evocar esses elementos conflitantes simultaneamente, não parece vivenciar sensações de conflito. Concluímos que, para ele, tais elementos parecem estar desconectados na sua *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada.

Os sujeitos SC7 e S2, ao evocarem simultaneamente elementos conflitantes da sua *imagem conceitual,* relativa ao conceito de derivada, vivenciam uma situação de conflito. No entanto, tal conflito não é suficiente para motivá-los a modificar os procedimentos adotados para resolver as questões responsáveis pela mobilização de tais elementos conflitantes. Dessa forma, acreditamos que apenas inserir estudantes em contextos capazes de motivá-los a mobilizar elementos conflitantes da sua *imagem conceitual*, relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, não seja o suficiente para promover a aquisição de uma compreensão conceitual, relativa ao conceito de derivada.

Em concordância com o sustentado por Vinner, identificamos sujeitos (SC6, S2, SC5) que expressam uma *definição conceitual,* relativa ao conceito de derivada, quando interpretado geometricamente, que não é consultada por esses sujeitos, ao responder às demais questões propostas. Segundo VINNER (1991), em geral, os estudantes, mesmo inseridos em um contexto técnico no qual não consultar definições pode levá-los a cometer erros, não consultam sua *definição conceitual,* relativa a um determinado conceito; ao invés disso, mobilizam elementos da sua *imagem conceitual,* relativa a esse conceito, para responder às questões que lhes são propostas.

Nesse sentido, acreditamos ser um próximo passo para novas pesquisas a busca de uma melhor compreensão da natureza dos conflitos vivenciados por alguns desses sujeitos pesquisados, a busca de sistemas de instruções capazes de minimizar os efeitos de tais conflitos no processo de aquisição do conceito de derivada, bem como, a busca da produção de sistemas de instruções capazes de minimizar essa ausência de conexões entre as partes de informação armazenadas no sistema cognitivo do estudante, relativas ao conceito de derivada.

REFERÊNCIAS

AMIT, M.; VINNER, S. Some Misconceptions in Calculus-Anecdotes or the Tip of Iceberg?. In: PROCEEDINGS FOURTEENTH PME CONFERENCE. 14, v.1. 1990. México. p. 3 –10.

ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 167–198.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and Procedural Knowledge: The Case for Mathematics.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. p. 1-27.

MITCHELMORE, M.; WHITE, P. Conceptual knowledge in introductory Cauculus. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 27, No.1, p. 81-95. 1996.

ORTON, A. Studentes' Understanding of differentation. **Educational Studies in Mathematics**, v.14, p. 235 – 250, 1983.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v.12, p. 151 – 169, 1981.

TALL, D. The Psychology of advanced mathematic thinking. In: TALL,D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 3 – 21.

TALL, D. **Concept Image and concept Definition.** Disponível em:< http:// www. warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image>Acesso em 28/11/2002.

VINNER, S. Mathematics Service Courses – Lip Service. THE PROCEEDINGS OF SECOND JERUSALEM CONVENTION ON EDUCATION, 2, 1989, Jerusalem. p. 397– 405.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics, In: Tall D.O. (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking**. Dodretch: Kluwer academic Publishers, 1991. p. 65–81.

OBRAS CONSULTADAS

ANTON, H. *Cálculo, um novo horizonte*. v. 1. Trad. Cyro de C. Patarra e Márcia Tamanaha. 6ª.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ACUÑA, C. High School Students' Identification of Equal Slope and Y-Intercept in Different Straight Lines. In: POCCEDINGS OF THE 26th ANUAL CONFERENCE - PME 26, v. 2, 2002. United Kingdom. pp. 1-9.

BOULOS, P. *Cálculo Diferencial e Integral.* v. 1. São Paulo: Makron Books,1999.

FLEMMING, D. M. ; GONÇALVES, B. M. *Cálculo A: funções, limite, derivação,* Integração. 5ª.ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

HUGHES-HALLETT, D. et al. *Cálculo.v 1.,* Trad. Ricardo G. Camelier e Ivan Albuquerque. Rio de Janeiro : LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1997.

LINS, R. C. Por que discutir Teoria do Conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (Ed.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 75 – 94.

PINTO, M.M.F., **Students' understanding of real analysis.** Warwick, 1998. 166f. Thesis (Doctor of Philosophy) – Institute of Education, University.

STWART, J. *Cálculo V. 1.,* 4 ed. reimp. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

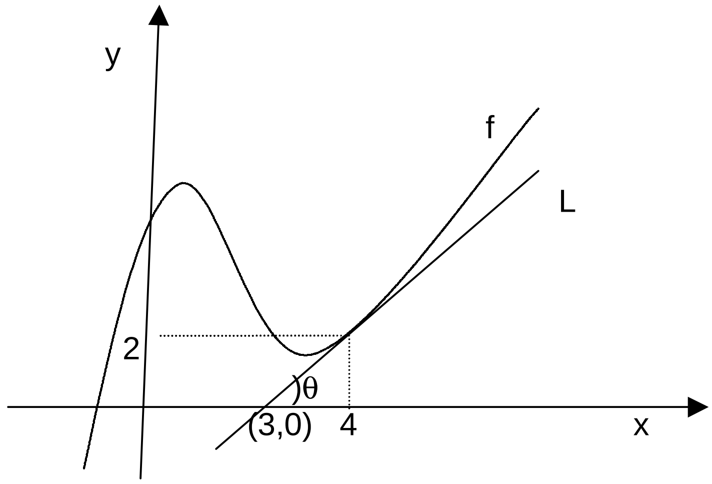
TALL, D. Concept image and concept definition. **Senior Secondary Mathematics Education.** (Ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), 1988, OW & OC Utrecht, p. 37 – 41.

APÊNDICE 1 - QUESTIONÁRIO DA ETAPA 1 – FASE I

NOME:____.

Q–1

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (4,2).



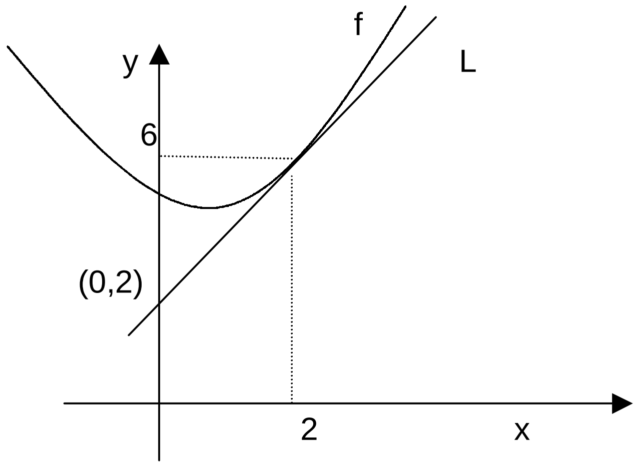
g) Determine $f'(4)$.

h) Determine $tg\theta$.

Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a “passo a passo”.

Q–2

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo .



Q–3

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A(4,2) e B(10,20).Calcule a derivada da função f em x_0 = 3. Por favor , justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

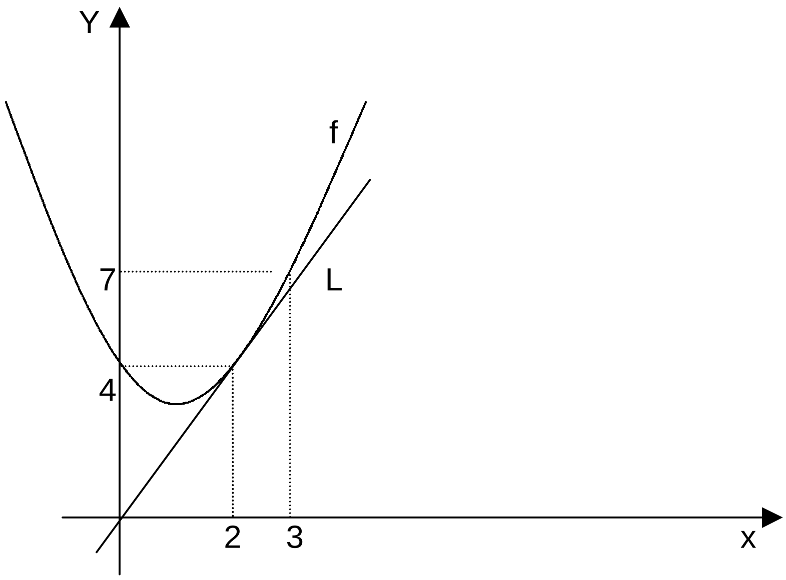
Q–4

c) O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer? Defina ou explique como você desejar.

d) Para você, o que significa dizer que a derivada de f(x) = x^2 é $2x$, no ponto x ?

Q–5

A reta L de equação $y = 2x$ é tangente ao gráfico da função f no ponto (2,4).



a) Determine a taxa de variação média da função f no intervalo [2,3].

b) Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa $x = 2$.
Por favor, justifique a sua resposta explicando-a passo a passo.

c) Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.

d) Calcule f(2,08). Seja o mais preciso quanto possível e explique como você obteve a solução encontrada.

ALGUMAS INFORMAÇÕES

a) Solicitamos a sua colaboração para nossa pesquisa respondendo às questões propostas. Nos comprometemos a omitir sua identificação pessoal (nome e universidade) dos resultados apresentados neste trabalho.

b) Os estudantes podem reunir-se em duplas para discussões das questões, porém cada um deve preencher o seu questionário individualmente. Não se faz necessário que as respostas às questões representem um consenso da dupla.

c) Para cada dupla será utilizado um gravador a fim de registrar informações sobre as discussões ocorridas, pois estas podem esclarecer formas de pensar, pontos de vista e dúvidas originadas pelas questões propostas. Tais informações podem ser úteis no desenvolvimento da pesquisa.

d) Esta pesquisa não objetiva verificar acertos e erros. O seu maior interesse é investigar o que pensam estudantes que já cursaram Cálculo I e II sobre o conceito de derivada. Portanto, dentro do possível, procure descrever e explicar o que você está pensando ao resolver cada item proposto. Ou então registre porque não conseguiu resolver determinado item.

e) As questões podem ser resolvidas a lápis, se quiser.

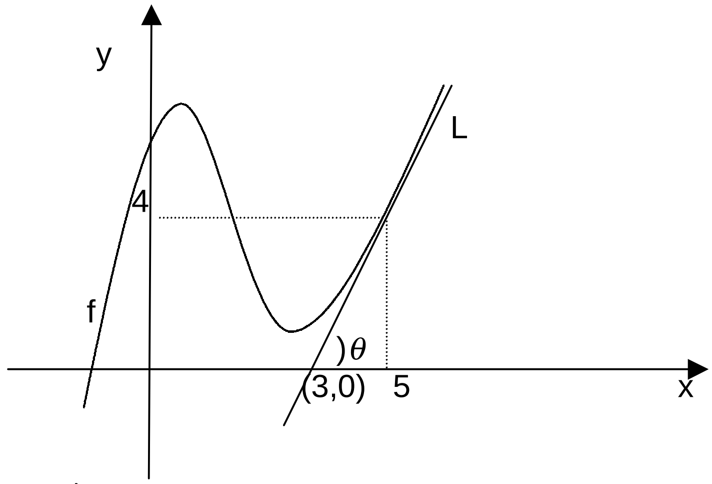
f) Desde já agradecemos a sua colaboração.

APÊNDICE 2 – QUESTIONÁRIO DA ETAPA 2 – FASE I.

NOME:____.

Q–1

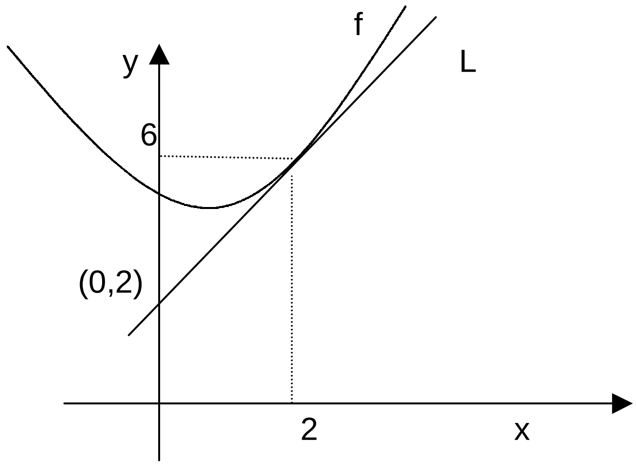
A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto(5,4).



a) Determine $f'(5)$.
b) Determine $tg\theta$.
Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a “passo a passo”.

Q–2

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto(2,6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo .



Q–3

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A(4,2) e B(10,20). Calcule a derivada da função f em x_0 = 3. Por favor , justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

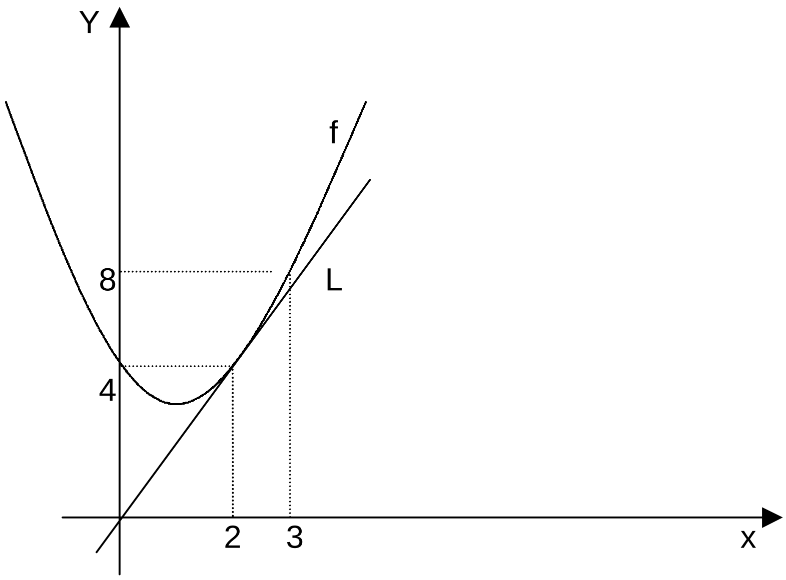
Q–4

a) O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer? Defina ou explique como você desejar.

b) Para você, o que significa dizer que a derivada de f(x) = x^2 é $2x$, no ponto x?

Q–5

A reta L de equação y = 2x é tangente ao gráfico da função f no ponto(2,4).



a) Determine a taxa de variação média da função f no intervalo [2,3].

b) Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto de abscissa x = 2.
Por favor, justifique a sua resposta explicando-a passo a passo.

c) Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.

d) Calcule f(2,08). Seja o mais preciso quanto possível e explique como você obteve a solução encontrada.

ALGUMAS INFORMAÇÕES

a) Solicitamos a sua colaboração para nossa pesquisa respondendo às questões propostas. Nos comprometemos a omitir sua identificação pessoal (nome e universidade) dos resultados apresentados neste trabalho.

b) Os estudantes podem reunir-se em duplas para discussões das questões, porém cada um deve preencher o seu questionário individualmente. Não se faz necessário que as respostas às questões representem um consenso da dupla.

c) Para cada dupla será utilizado um gravador a fim de registrar informações sobre as discussões ocorridas, pois estas podem esclarecer formas de pensar, pontos de vista e dúvidas originadas pelas questões propostas. Tais informações podem ser úteis no desenvolvimento da pesquisa.

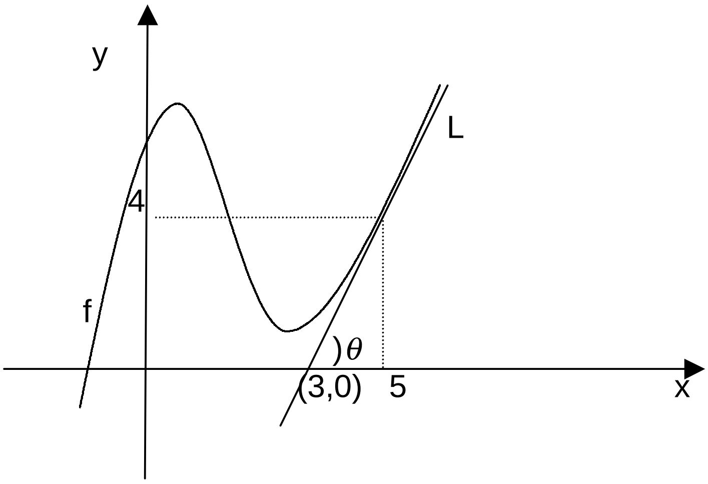
d) Esta pesquisa não objetiva verificar acertos e erros. O seu maior interesse é investigar o que pensam estudantes que já cursaram Cálculo I e II sobre o conceito de derivada. Portanto, dentro do possível, procure descrever e explicar o que você está pensando ao resolver cada item proposto. Ou então registre porque não conseguiu resolver determinado item.

e) As questões podem ser resolvidas a lápis, se quiser.

f) Desde já agradecemos a sua colaboração.

APÊNDICE 3 – QUESTÃO MOTIVADORA – FASE II.

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto(5,4).



a) Determine $tg\theta$.
b) Determine $f'(5)$.
c) C) É possível determinar-se f' (a função derivada de f)? Se sim, determine-a. Se não, explique por quê.
d) D) É possível determinar-se $f'(2)$? Se sim, determine-a. Se não, explique por quê.
e) E) Você conseguiria calcular a $tg\theta$ sem utilizar-se das medidas dos catetos do triângulo retângulo determinado pela reta L e o eixo x? Em caso afirmativo, como o faria?

APÊNDICE 4 - TRANSCRIÇÃO DAS DISCUSSÕES – FASE I – ETAPA 1.

Transcrevemos, a seguir, o conteúdo das audiogravações das discussões que ocorreram durante a aplicação do questionário da fase I, com os sujeitos reunidos em duplas e ternas. Realçamos, em negrito, as informações que foram consideradas importantes para a elaboração da análise dos resultados obtidos.

DUPLA G-A (Sujeitos: SA1 e SA2)

PQ: Pesquisador.   PF: Professora.

SA1: Precisa calcular a reta tangente.
SA2: É a L.
SA1: Eu sei.
SA2: Calcular f'(4).
SA1: f '(4) é 2, porque a derivada no ponto 4 ela pede f '(4) no ponto 4, f ' é igual a f (x). Só nesse ponto aqui. Se a função for contínua Ricardo f'(p) é igual a f(p).
SA2: É lógico. Você está respondendo formalmente?
SA1: Sei lá... Ela pede que determine... Então, f '(4) é igual a 2. Letra b.
SA2: Pronto. Morreu.
SA1: Qual a tangente de θ . A tangente de θ ... (silêncio).
SA2: Nossa vai ser igual a 2 também, ok! Ela quer que justifique passo a passo.
SA1: f '(4) é igual a 2.
SA2: Pois f ' é a derivada no ponto 4 e a reta tangente coincide com a função dada. Pronto...
SA1: Pois é, quando a função é contínua em c igual a 4 e L a reta tangente e f(4) é igual a 2 e f '(4) igual a f(b), portanto f '(4) igual a f(4) igual a 2. Tangente de θ é igual a dois dividido por 1 que dá 2. É óbvio, cara ... f ' (4) tem que ser igual à tangente.
SA2: Nossa, olha o que eu coloquei, f ' é a derivada da função f. E para x igual a 4 a imagem igual a 2 coincide com a imagem da reta L tangente que é a derivada. Será que ela vai entender o que eu escrevi?...(Risos)...Oh, f '(4) é igual a 2, f ' é a derivada da função f...Até aí, beleza...e para x = 4 a imagem 2 ...
SA1: Mas aí que tá... você tem que tomar cuidado...
SA2: Coincide com a imagem da reta...a imagem 2 de f coincide com a imagem da reta L que é tangente, que é a derivada. É... a tangente de θ ...
SA1: Triângulo retângulo...cateto oposto
SA2: Sobre cateto adjacente... que dá a mesma coisa... 2 .
SA1: É óbvio que dá 2... , porque a... derivada tem de ser igual a isso . A tal...
SA2: É a mesma coisa que o primeiro, f'(2) = 6.
SA1: Por quê?
SA2: Porque é a derivada... É a mesma coisa... Não é? (longo silêncio) Não, isso aí não é intercepta. Interceptar é... cortar...

SA1: Não.
SA2: Quando você encosta você não está interceptando...
SA1: Tá bom. Aqui tem que ter um ponto em comum SA2. Se tiver um ponto em comum...
SA2: Mas eu acho que isso não é interceptar. Por exemplo, você tem...você não está interceptando...(trecho inaudível).
Só uma dúvida de português que surgiu aqui na discussão: Por exemplo: a reta tangente naquele ponto, ela intercepta a função? Interceptar significa só cruza ou se encontra? Eu queria usar esta palavra, intercepta significa cruza ou só se encontra? (dirigindo-se ao pesquisador)
PQ: O que você acha, Professora?
PF: Interceptar é ter um ponto em comum.
SA2: Não significa cruzamento. Quando eu tenho uma função... a derivada... a reta tangente naquele ponto intercepta a função?
PF: Isso aí você que sabe. Interceptar é ter um ponto em comum... matematicamente falando. Intercepta em um ponto... intercepta em dois pontos...(trecho inaudível).
SA2: Eu quero usar esta palavra para não ficar redundante.
SA1: Fica frio(a). A reta tangente tangencia... fica feio "pra caramba".
SA2: Eh... Pronto...coloca que tangencia e vamos em frente.(silêncio).
Pois no ponto dois b a reta L tangencia a função no ponto...
SA1: Ponto SA2? Tem reta tangente diferente. Eu preciso saber qual a reta que eu estou trabalhando. Têm várias retas tangentes.
(Longo silêncio)
SA1: Eh! A tangente dessa reta... f '(3) é igual à tangente da reta que é igual a 20 – 2 dividido por 10 – 4 . Aqui SA2... O que é que nós fizemos para calcular a derivada? Calculamos a tangente.
SA2: A gente vai calcular a tangente!
SA1: Nós vamos ter um ponto aqui e outro ponto aqui e um triângulo retângulo? Essa aqui é a derivada do ponto 3. Essa reta tangente aqui no ponto 3 aqui. Mas... 2 aqui, oh! Esse ponto A e esse ponto B. Isso que está acontecendo. Ela não te falou...
SA2: Você vai precisar desse valor daqui, oh, para calcular o negócio...
SA1: Por que precisar de SA2? Esse ângulo aqui não é o mesmo ângulo da reta?
SA2: Não, isso aí é óbvio!
SA1: Sim, o que não é óbvio? O que não está óbvio? Você tinha dois pontos. É o que ela deu para gente... Ela não me deu esse cara aqui. Esse cara aqui eu não sei quem é... Mas ela fala que esse ponto aqui é o 3, não é? Se você calcular a inclinação da reta...
SA2:... Meu ponto é 3.
SA1: Então... A reta tangente ao gráfico da função no ponto 3. Então, aqui no ponto 3...Aqui é o ponto.
SA2: Ela quer a derivada nesse ponto.
SA1: Isso... Exatamente.
SA2: Você precisa calcular a tangente, mas aí é o seguinte... Quando se faz aqui, oh...
SA1: Vem cá. Imagine que você tivesse colocado esse triângulo aqui. Esse ângulo aqui não é o mesmo desse ângulo aqui, SA2?
SA2: Lógico! Mas a tangente vai ser diferente... dependendo do triângulo.

SA1: Mas se o ângulo é o mesmo, a tangente vai ser diferente?
SA2: E se eu montasse um triângulo retângulo diferente...Se eu montasse um triângulo retângulo aqui, oh! Ele seria diferente...
SA1: O que você acha? Esse ângulo é noventa graus, esse ângulo aqui é comum para os dois triângulos...
SA2: Ah! Lado, ângulo, lado.
SA1: O que você acha? A inclinação é sempre a mesma. Por isso, vale aquele problema lá, você pega dois pontos e determina uma reta. Quaisquer dois pontos dessa reta ela está determinada...
SA2: Tá certo...certo... (silêncio).
SA1: O que você entende por derivada em um ponto qualquer...
SA1: Você não tem essa função f(x), você não vai poder chutar essa função...
SA2: Mas é só pra mim entender.
SA1: Tá Bom.
SA2: Então, eu vou ter uma reta tangente que passa em dois pontos.
SA1: Mas não dois pontos do gráfico...é isso que eu quero que você entenda...Ela deu dois pontos daquela reta. Ela tá falando o seguinte: você tem aqui a abscissa 3, você tem um ponto e a reta tangente. Ela me deu dois pontos dessa reta. Não me deu dois pontos do gráfico.
SA2: Eu tenho infinitas retas tangentes...
SA1: Claro...em cada ... a gente pode ter uma reta tangente diferente.
SA2: Só faltava isso, então é no ponto 3.
SA1: Exatamente. Ela me deu dois pontos e essa reta tangente.
SA2: Como é que você faz para calcular a derivada nesse ponto 3 se você só tem a tangente? Esse...
SA1: Então, nesse ponto 3... como ela está dizendo que esse ponto 3 .... (inaudível), lembra a reta tangente é a derivada no ponto 3 é igual à tangente do ângulo? Basta calcular a tangente. Como ela pediu no 3; se ela pedisse em outro ponto, eu não conseguia fazer...
SA2: Então, como é que você fez?
SA1: Eu calculei a tangente. Como é que se calcula a tangente? Você tem dois pontos e uma reta. Aí é o m. x – x_0 , ioiô mi xoxô... E tem a inclinação da reta. Você lembra; portanto, m é a tangente.
SA2: Isso eu lembro... Eu tinha que calcular, isso não era no ponto 3?
SA1: Aí que tá, SA2. Eu tenho dois pontos, o...
SA2: Os dois pontos...
SA1: SA2, vem cá. O que é que nós tínhamos visto primeiro?
SA2: Que a inclinação da reta é a tangente.
SA1: Calcula aqui; eu preciso desse ponto aqui, SA2? Se eu conhecer dois pontos da reta? Eu preciso conhecer essa informação aqui, SA2? Você precisa conhecer essa aqui.
SA2: Qual?
SA1: Essa aqui. f(4). E se eu tiver esse outro valor aqui, você não vai ter um triângulo equivalente, o ângulo não é o mesmo? A tangente não é a mesma? E se eu tiver esse outro ponto aqui.
SA2: E se aqui eu traçar uma outra reta tangente...
SA1: Não. Não... A reta tangente já está montada... Ela deu o ponto...
SA2: A reta tangente vai ser em relação a esse ponto aqui.
SA1: Exatamente.

SA2: Agora foi... Tangente é o cateto oposto pelo cateto adjacente.
SA1: O que você entende por derivada de uma função em um ponto qualquer. Eu acho que é a (inaudível) definição...(Silêncio).
SA2: Qual foi a justificativa que você colocou? Que a reta tangente no ponto é igual à derivada?
SA1: Só falei assim oh... a reta .... Só coloquei aqui, SA2. Passo a passo eu fiz os cálculos.
SA2: a reta tangente...
(Longo silêncio)
SA2: Tá na b? (silêncio)
SA2: Você pulou**?**
SA1: É teórica... eu quero fazer logo as contas...depois eu penso nessa. (silêncio)
Você lembra... A velocidade média você pega esse por esse...
SA2: Instantânea você calcula a derivada, né? A instantânea é a derivada nesse ponto.
SA1: A instantânea... A média...
SA2: É o limite...
SA1: Éh! Mas você pega esse dividido por esse. A variação... pela variação...
SA2: Aí você tem a tangente... Vai ser a mesma coisa...
SA1: Não... Eu tô pegando aqui, oh! Na função. Essa é a velocidade média. A instantânea eu pego aqui... Que aí vai dar a tangente...
SA2: Não tem como você calcular o limite?
SA1: Não...
SA2: Quando você faz na Física mesmo... Você calcula o limite... Aí você acha a aceleração...
SA1: Mas que limite... Limite do que... limite quando delta t tende a zero de velocidade de t sobre delta t isso aqui é a aceleração.
SA2: Aí vai dar 1...
SA1: Não...
SA2: Aqui ela não manda explicar, então letra b. (Risos)
(silêncio)
SA1: Ah! L é igual a tanto que é igual a dx.... Que vai dar...?
SA2: Não é velocidade... É taxa de variação média. É TVM.
(longo silêncio)
SA2: Você não justificou e nem vai justificar, né?
SA1: Não.
SA2: Já determinamos na letra b.
SA1: Então...
SA2: f '(2) é igual a 2. f(2,08) ?
SA1: Essa reta tangente, aqui, não é uma aproximação? Se você pegar aqui f de dois virgula oito vai dar aqui, oh...bem pertinho...
SA2: Não... Não é isso, mas...
SA1: E aí, SA2, essa é para você... o que significa dizer que f de x igual a x quadrado... que a derivada de x quadrado é dois x?
SA2: No ponto x...Para mim, isso significa o seguinte: no ponto x para toda função f de x ao quadrado...dado épsilon maior que zero...existe um delta que está dentro de uma vizinhança...que não é ponto de acumulação...

SA1: Pára...pára...pára...significa que quando a função varia a x quadrado a derivada varia a dois x. (silêncio)
SA2: Ah, eu acho que é o seguinte. Para todo ponto da função x^2 que eu escolher e passar a reta tangente...naquele ponto a... a derivada.....
SA1: Ah... "pera aí "...Aqui na terceira...pegou esse ponto aqui...Não...
SA2: Tá certo.
SA1: Dois sobre um dá dois... pela tangente...dois ... zero... Deixa eu ver uma coisa aqui. Aqui dá 4 e aqui dá 2 (relativo a 1) Tá furado... Aqui não é 6. Sabia que aqui estava errado.... aqui 6 –2 = 4 , 2 – 0 = 2 , 4 por 2 dá 2.
SA2: Então, a gente errou uma pá de coisa.
SA1: Não, a gente só errou aqui... Aqui nós fizemos certo, calculamos a tangente... Aqui fizemos errado.
SA2: Mas a reta L oh! Corta aqui...
SA1: E aqui também... Se for lá, SA2, é tangente aqui.
SA2: Mas a gente não estava fazendo onde a reta L interceptava? Como você escreveu aqui, oh! Intercepta?
SA1: Então, então... tá furada essa resposta. Tá furada...porque a tangente não tem nada a ver com esse valor... a derivada está ligada com essa inclinação aqui ... Aqui (Q – 1a) foi uma "sacanagem" de coincidência, que a inclinação aqui deu dois. Dois dividido por um deu dois. Por um acaso deu o mesmo ponto aqui... Mas não tem que ser igual, não. Os outros estão certos... Nós calculamos pela tangente... Não tinha gráfico, não...
SA2: Esse aqui foi também...
SA1: Esse aqui não... é...sim... mais ou menos...Esse aqui está errado... A resposta tinha que estar no Cálculo 2. Você nem me corrigiu...Eu te perguntei...vai copiando tudo que eu escrevi...
SA2: Imagina, essa resposta eu fiz sozinho(a)...
SA1: Qual? Nós fizemos...nós pensamos junto antes de escrever. Não foi?
SA2: O que tem a ver Cálculo 2 com isso?
SA1: Isso aqui o SA2, falou para mim em cálculo 2 de novo, mas era para ser em Cálculo 1?
SA2: Isso aqui é Cálculo 1.
SA1: Não... Esse aqui está certo... determine f '(4). (silêncio). Se esse aqui está certo... o outro também está.
SA2: A gente usou o mesmo raciocínio para responder a letra a.
SA1: Não...Não...isso aqui, SA2, pode acontecer... esse valor aqui ser o mesmo da inclinação. Por que, não? A inclinação dar o mesmo valor numérico?
SA2: Não adianta a gente trocar o raciocínio. O raciocínio que a gente fez para usar nesse daí foi o mesmo do outro.
SA1: Então...O que nós fizemos aí está errado... Lembra aquele velho problema...Para você provar alguma coisa, você tem que provar para todos e para você provar que é falso basta um contra-exemplo. Nós caímos em um incrível contra exemplo...entre aspas. Por isso que eu não posso falar que vale para todos...mas não vale... foi uma coincidência esse valor bater com esse valor... Não é isso... Se ela perguntasse qual o valor da reta no ponto 4, estaria certo, mas ela perguntou o valor da derivada... A resposta que nós demos dá o valor da reta... Isso não serve...O resto está tudo certo... Esse aqui tá errado... (silêncio)
SA1: Vamos lá, cara... vamos escrever de novo.

SA2: Eu acho o seguinte... Se ela perguntar isso aqui... oh!... Eu acho que tem alguma coisa errada... Agora esse aqui já foi...
SA1: O que SA2, isso aqui? Claro que não? Você tá afirmando que a derivada aqui é 6 e não é.... A derivada é a tangente aqui. Calcule a tangente... vê se vai dar 6. O que nós escrevemos atrás é absurdo... Agora vamos ver de novo...
SA1: Derivada é a tangente de θ. E eu só lembro como calcula isso pela tangente. (silêncio)
Pera aí, eu to construindo a equação da reta tangente, cara. y menos f(p) é igual a f '(p) vezes x menos p. [$y - f(p) = f'(p) \bullet (x - p)$], p é igual a 4, f (p) é igual a 2. Ele chutou o valor aqui... y é 3, y é 0 e x é igual a 3. Certo, SA2, é só substituir aqui. Zero menos dois é igual a f '(2) vezes...
SA2: Aí você deixa f '(p) como...
SA1: Isso... 3 menos 4.
SA2: Não... Mas péra aí... Você colocou 2 no f (p).
SA1: f(p), esse é o p. Quem é o f(p)? É 2. f '(p) eu não sei quem é. Desculpe, é f de quatro ... então aqui p é 4. Quem é f(p) SA2?.
SA2: Tá certo... p é 4 e quem é x... x é 3; então, pegando um ponto qualquer que eu conheço... que viagem ... eu estou passando mal ...Então f' de quatro vezes menos 1 então f ' de 4 é igual a 2. Vou colocar aqui na observação, nunca ia lembrar disso.
(silêncio)
SA1: Ela pede aqui só a tangente...f ' (2) é igual à tangente do ângulo θ que é igual a 6 – 2 sobre 2 – 0; então, f '(2) é igual a 2 .
SA2: Só falta fazer aquela outra lá. Aqui dá pra fazer pela tangente...
SA1: É exatamente isso. Pela tangente.
SA2: Pensei que você tinha calculado aquele "bagulho monstro" que você calculou. Nossa, eu não lembrava mais da equação da reta tangente.
SA1: E da reta normal? é só colocar no lugar de f '(p), menos 1 sobre f '(p).
SA2: Reta normal ao plano?
SA1: Não. Reta normal a um ponto dado. Você tem aqui a reta tangente... a reta normal está aqui..
SA2: Tá.. tá... Vale pra aquele bagulho de G.A ?
SA1: Reta normal a plano é outra conversa. Você vai ter que fazer um produto vetorial, aí você acha um vetor...
SA2: Chega! Obrigado. Quatro... Tem que justificar. A tangente da reta tangente... (Risos). A redundância que eu falei.
SA2: Eu vou colocar isso mesmo... A tangente da reta tangente... no ponto dado é igual a derivada. (silêncio)
SA1: Oi, SA2, essa aí é para você? O que significa dizer que a derivada da função x^2 é 2x.no ponto x?
SA2: Eu já sei o que significa...significa que o cálculo da tangente da reta tangente em qualquer ponto dado vai ser o dobro da abscissa calculada...
SA1: Sim, a derivada é o dobro da abscissa.
SA2: Então é isso aí.
SA1: Mas eu estou querendo alguma relação com a resposta do a...
(Longo silêncio)
SA2: É só escrever aí o que eu acabei de "vomitar". O cálculo da tangente...
(Longo silêncio)

SA2: Aqui também a tangente é cateto oposto sobre cateto adjacente. A tangente aqui vai ser sempre igual a 2.
SA1: Vai ser sempre igual a 2.
(Longo silêncio)
SA2: Pode entregar?

DUPLA G-B (Sujeitos: SB3 e SB4)

SB3: É a mesma coisa que em cima só que você põe no ponto x. (silêncio). No ponto x. É, no ponto que está pedindo...
SB4: É no intervalo, é?
SB3: No intervalo [2, 3]. Ah, esse é mais legal, não é? (silêncio)
SB4: Se L é tangente ao gráfico em f(x), nesse ponto x, aqui, x igual a 4 , as duas ...dividem o mesmo ponto. (silêncio)
SB3: f(x) é a tangente?
SB4: f ’(x) é a derivada...da tangente...
SB3: Então, é a tangente. f(4) é igual a igual a 2. Como f ’(x) é a derivada de f(x) e a derivada é a reta tangente a f(x); então, f ’(4) é igual a 2. Pronto...(silêncio)
Determine a tangente de θ ... De 3 a 4 dá 1. A tangente é cateto oposto sobre cateto adjacente. Então, a tangente de θ é igual a 2.(silêncio)
SB3: Mas que chique, heim? Pra que colocar tudo isso? Muito chique você...
SB4: Abscissa é embaixo?
SB3: É isso... ordenada no y e abscissa no x. (silêncio) . Ah, anda logo, SB4. Ok. Agora é tangente, é cateto oposto sobre adjacente.
SB4: Mas tangente não é outra coisa?
SB3: Mas tangente não é isso? Não é cateto oposto sobre adjacente? Oh... Aqui eu tenho 1, aqui tem 2. Cateto oposto é 2 sobre 1. Não é? Então,.vai ...escreve aí, oh. Vou passar... vou deixar você para trás.(silêncio).
SB4: Mas...(trecho inaudível).
SB3: Mas ela não perguntou o que a tangente vai dar... ela perguntou: determine a tangente de θ .(silêncio). SB4, como é que se explica passo a passo... Eu não sei explicar passo a passo. Determine f ’(2). Peraí...x é 2... A gente até sabe o que é f’(2), mas tipo... eu não vou saber explicar passo a passo.
SB4: Dá para coisar por isso aqui... tem dois pontos... Dá pra gente achar a reta tangente...
SB3: Adianta muito né?...Pra que a gente pode achar o coeficiente da reta tangente?
SB4: Trecho inaudível...
SB3: Para que você vai querer isso? ...Se responder o que ela está perguntando, tudo bem, mas a gente nem respondeu ainda.
(longo trecho inaudível)
SB4: Se a derivada é a reta tangente num ponto qualquer, se ela é tangente naquele ponto, elas dividem o mesmo ponto.
SB3: Eu não entendi, o que é elas dividem o mesmo ponto. Quer dizer que a curva... e a reta tangente...
SB4: Oh! Você tem a curva... aqui você tem o mesmo ponto, não tem? Tem que ser tangente.

SB3: Mas o que é divide o mesmo ponto? O ponto da curva e o ponto da reta vão dividir o mesmo ponto... É isso?
SB4: Vão ter mesma coordenada e abscissa...
SB3: E daí...E no que é que isso influencia?
SB4: Que f '(2) vai ser 6. E f '(2) é y.
SB3: Pois é, mas aqui ele não falou que f '(2) é 6... Ah, ele falou que o ponto é (2,6), né?
SB4: No 2 da 4. Se eu derivar ele aqui dá 2x. 2 vezes 2 dá 4. x^3...
SB3: Tudo bem... O que eu estou querendo dizer é o seguinte: Aqui, oh...Não, mas olha só...
Aqui ele põe no ponto (2,6) significa que o f(x) igual a 2 é igual a 6 ?... Então... como a derivada... Ah, eu entendi, a tangente naquele ponto é a derivada; então, a gente vai ter... vai ter tipo assim... o f '(x) vai ser igual ao f(x). Vai ter o mesmo valor de f(x); então, f(2) vai ser igual a 6 e o f '(2) também, nesse caso, vai ser igual a 6. Agora, para escrever isso...
SB4: Acho que vai ser a mesma coisa... Aqui é 3x? Quando a derivada dá 2 e 2 vezes 1 é 2.
SB3: E daí?
SB4: Cai nessa teoria...
SB3: Mas isso aí que você está fazendo não tem nada a ver... Essa aí é uma função. Não precisa ser x^2, pode ser $x^2 + 3$, pode ser... Você tem que pegar a tangente a ela...
(Longo silêncio)
SB3: Olá...vê se isso tá bom, aqui, oh. (silêncio). Olá a questão 3. A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x igual a 3 passa pelos pontos (4,2) e (10,20). Calcule a derivada da função f em x_0 igual a 3. Justifique sua resposta, explicando passo a passo.... Acho que eu preciso fazer o gráfico...
(Longo silêncio)
SB4: Aqui é o contrário... f '(2) é igual a... (inaudível)... calcule a derivada da função f(x) ... Falei pra ti. Aqui a gente vai ter de achar o coeficiente.
SB3: Não adianta achar o coeficiente aqui, tem que achar a reta.
SB4: .... ioiô mi xoxô lá... é...
SB3: É $y - y_0 = m (x - x_0)$.
(trecho inaudível)
SB3: Nossa Senhora... agora pegou... vamos pegar a questão 5 . A questão 5 é melhor... A reta tangente L de equação y igual a 2x é tangente ao gráfico da função no ponto (2,4). Determine a taxa de variação média da função f no intervalo [2,3].
SB4: A reta L de equação y igual a 2x.
SB3: Essa daqui.
SB4: É tangente ao gráfico da função no ponto (2,4).
SB3: É esse aqui.
SB4: Taxa de variação média da função f no intervalo [2,3].
SB3: É aquele... Δ , pega esse aqui menos esse...esse aqui menos esse. Que nem taxa de variação de tempo... variação de não sei o que... É sim...no Intervalo...(silêncio) Ah SB4, é fácil. entre dois e três . A taxa de variação neste ponto 7.
SB4: Taxa de variação instantânea. Taxa de variação instantânea deve ter alguma coisa a ver com o quadrado.

SB3: Ah! É mesmo... Então, primeiro vamos fazer a taxa de variação como sendo a derivada. A taxa de variação instantânea deve ser a derivada ao quadrado... a derivada da derivada, vai...
SB4: Mas eu tenho que ter a equação... Se eu integrar isso daqui eu acho a função?
SB3: Na onde... Por quê? Eu não entendi o que você falou...
SB4: A reta L... é a função.
SB3: Ela não vai querer que use integral. O trabalho dela é sobre derivada? (silêncio) Ah, vamos continuar...(trecho inaudível)
SB3: O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer. Defina ou explique como você desejar. Danou-se... eu não entendo... Vamos lá...SB4 vamos fazer as outras e depois a gente volta para os comentários. A quatro é melhor...
SB4: Você não entendeu nada...
SB3: Não...Entendi, sim... A gente não sabe definir, a gente só sabe fazer... Como é que vai definir isso... O que você entende por derivada de uma função em um ponto qualquer? É a tangente ao gráfico da função lá nesse ponto qualquer...Não é isso? Não?
SB4: Não, lembro mais o conceito de derivada...
SB3: Se a gente não sabe o conceito... a gente não sabe o conceito.
(Trecho inaudível).
SB3: O único(a) que tem cacife para fazer isso aqui é o SA1. (silêncio). Para você entender que a derivada de f(x) é igual a 2x... você tem ...é a reta tangente ... dela...
SB4: Esse 2x é se ele tivesse todos os pontos, não é a equação da reta...
SB3: Não entendi o que você disse
(Trecho inaudível)
SB3: Esse tipo de gráfico, ele não vai ser uma curva? Esse 2x vai te dar a reta tangente em cada ponto... Ele não vai ser uma única reta... Cada ponto vai ter uma reta tangente correspondente... Então? Qual é o problema?
SB4: Então...
SB3: O que é que tu vê de errado aí?... Significa que a reta tangente é dessa forma?
SB4: (trecho inaudível)
SB3: É isso que eu estou te falando...Ela vai ser uma reta que vai ter coeficiente positivo... Ah! Significa a “regra do tombo também...”.
SB4: (trecho inaudível)
SB3: A imagem de que é dada...
SB4: A imagem desse ponto...
SB3: Mas não é f(x), é f ’(x). Então... f ’ é a imagem?
SB4: Vai levar a derivada...
SB3: A derivada...a derivada... mas não da função...(silêncio)
SB4: x = 3 que leva no 6...
SB3: Tá errado...
SB4: Por quê?
SB3: Ela é tangente nesse ponto... do jeito que você fez, ela nem vai ser tangente...Para ser tangente aí tinha que ser assim, oh!...
(Trecho inaudível)
SB3: Primeira coisa que significa que ela usou a “regra do tombo”. Essa está muito difícil... passa para outra...
(Longo silêncio)

SB3: O que é que você está falando... ainda é disso?
SB4: Não a... (silêncio). Mas aqui, oh... vai dar...
SB3: Mas pra que vai te adiantar isso?
SB4: Trecho inaudível...
SB3: Que vai te adiantar isso? É isso que eu estou te falando... Não vai dar em nada...
SB4: Mas não é a...
SB3: O quê? O que é que vai te dar?
SB4: Essa equação aqui...
SB3: Como? Você tem y e y_0 ... grande coisa...
(Longo silêncio)
SB4: 3 vezes 6 é 18, né?
SB3: 18.
SB4: 18 sobre 6. Passa para 10 vezes x menos f zero, quatro....
SB3: Essa é a reta... a função não, né?
SB4: Essa é a reta tangente... 3 vezes 3 dá 9 menos 10 é igual a –1 .Calcule a derivada da função f (x) é igual a isso daqui. Se eu sei isso daqui, se eu integrar... isso dá x^3 menos 10x . f ' de x é igual a 3x menos 10.
SB3: Por que 3x?
SB4: Então, f (x) é igual à derivada de 3x menos 10 é igual...
SB3: Você está devaneando... Eu não estou vendo o que você está fazendo... mas ela não quer a derivada? Ah, você quer achar a função, né?
SB4: É integrar isso daqui... $3x^2$ sobre 2 menos 10x agora no ponto....
SB3: Não entendi... Você achou a função, mas ela quer a derivada da função... Calcule a derivada da função. Não sei por que você está voltando tudo... Para mim, tinha acabado aqui, igual a –1. A derivada é a reta tangente... A gente acha a reta tangente e acabou...
SB4: Eu vou achar f(x)... f(x) não interessa... (silêncio).
SB3: Essa é a reta tangente que é igual a quê? À derivada... Então, a derivada em x_0 vai ser igual a 3 vezes 3 menos 10. (silêncio). Uau... chega, SB3, vamos acabar...vamos terminar logo.
SB4: Mas eu não fiz...
SB3: Fez, sim... tá bom..
SB4: Não é isso aqui, não...
SB3: Vai ser meu, filho(a)... a reta L de equação tal é tangente ao gráfico... eu não sei o que é taxa de variação média. Eu não tive isso. Não sei como funciona isso. Como eu acho isso...Eu não sei o que é taxa de variação... Determine f '(2).
SB4: Você entendeu essa daqui?
SB3: Ai, SB4, larga essa daí... acabou já... tira isso daqui, não tem nada a ver... acabou... chega. Esse aqui, determine f '(2). Você sabe?
SB4: Qual? Aonde?
SB3: f'(2) é igual a 4 .
SB4: Aonde...
SB3: Aqui, oh.
SB4: Por que...
SB3: Por causa da reta tangente... A reta tangente não é no ponto (2,4)? Então, f ' de 2 é igual a 4. Sem contar que a equação é y igual a 2x; ela já falou que a tangente é essa...

SB4: No ponto...
SB3: 2... Então, vai ficar... certo...

TERNA G-C (Sujeitos: SC5, SC6 e SC7)

SC6: É só achar a equação da reta tangente, aqui, oh! Tem dois pontos dela.
SC7: Esse três zero é esse aqui?
SC6: x é 3 e y é zero, " ioiô mi xoxô" .
SC7: É isso aqui? É o x ou o y que é em cima?
SC6: Tá certo, tá certo... x em cima.
SC7: Não... você falou mi xoxô. Então y, é aqui em cima.
SC6: Não precisa nem fazer, oh, aqui, oh. Derivada no ponto quatro é 2. f '(4) é 2. Aqui, oh! Quatro, dois, é o mesmo ponto. Não precisa nem fazer a equação da reta.
SC7: f' (4) é 2?
SC6: Aqui, oh! Não é o mesmo ponto? Reta tangente no ponto (4,2) f '(4), aqui, oh, é o mesmo ponto?
SC7: Da reta, né?
SC6: Ah! Tem de justificar, né.
(Longo silêncio)
SC6: Aqui, SC7, tá fazendo a equação?
SC7: Tou.
SC6: Não precisa. Não é esse ponto aqui, oh? É esse ponto aqui, pô! Tangente no ponto (4,2)? A tangente é o quê? A tangente é 2. A tangente é 2.
SC7: Por quê?
SC6: A tangente não é a inclinação da função, aqui? Então, é 2. Ou, então, tu faz: tangente é cateto oposto sobre a hipotenusa... Cateto oposto 2 sobre hipotenusa... não sobre o adjacente que é 1. Ou, então, aqui, inclinação da reta... tangente é a inclinação da reta.
SC7: Como é que é a inclinação?
SC6: Aqui, oh!
SC7: Eh!
SC6: Eh! Então, tu põe aqui, oh! (longo silêncio).
SC7: Oh! SC6! A derivada é 2 mesmo...
SC6: Você fez esse monte de contas...(risos).
SC7: A coisa tá na cara, né?
SC6: Tá na cara.
SC7: A coisa tá na cara e a gente fica querendo complicar fazendo conta... (silêncio) Não precisa explicar...já tem a conta.
SC6: Eu expliquei... A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6)... Determine f '(2). (silêncio) L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6). Determine f '(2), a derivada de f no ponto 2. É o mesmo.
(Longo silêncio)
SC6: É a mesma justificativa da anterior, não é? (silêncio)

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A(4,2) e B(10,20).Calcule a derivada da função f em x_0 igual a 3.

SC7: Isso aqui é igual à derivada?
SC6: No ponto 1.
SC7: Aquele negócio da integral que é a área...
SC6: Reta tangente ao gráfico de f no ponto... Tá vendo... Se liga , aqui é o mesmo caso. Reta tangente ao gráfico de f... Só que está sem o gráfico. Mas é o mesmo caso.
SC7: Só que não tem o gráfico. (silêncio). Ah, ponto (10,20)...(longo silêncio)
SC6: Tá aí ainda? Vai fazer o desenho? Não precisa, não? Vira aqui, oh! Vira a outra.
SC7: Ela não fala o ponto? Qual é o y?
SC6: x é igual a 3 . É o mesmo que aqui... Ah!... Ela pede para calcular... né?
SC7: É a derivada.
SC6: Ah! Se ela pede para calcular, a gente vai ter que achar a equação da reta.
SC7: Ela vai dar o x e a gente vai achar o y.
SC6: É! A gente vai ter que achar a equação, então. Você tem razão. (silêncio). y menos y_0 é igual a m vezes x menos x_0. (longo silêncio).
SC7: É 3x menos 10 ? (3x – 10).
SC6: Não sei... vou ver agora... menos quanto?
SC7: Menos 10.
SC6: Deu também? Beleza... Agora a gente acha o...
SC7: Agora deriva...né?
SC6: Eh! f '(3), 9 menos...
SC7: Ah, não... joga o x... joga o x...
SC6: Então... Joga x e vai dar -1 . Quanto deu? Que foi? Algum problema aí?
SC7: Aqui, quando você deriva dá 3. Se deriva isso aqui dá 3. x = 3 , y = 3.
SC6: É o m, não, não, quando você deriva aqui vai dar 3; é o m. Aqui, oh! Esse daqui é o f '(x)... inclinação da reta tangente.(longo silêncio).
SC6: Qual é a definição de derivada? (silêncio).
SC7: Tá errado.
SC6: Por que não? Que foi?
SC7: A derivada é -1? f '(x) é –1?
SC6: É substitui o 3 lá pô! f de 3?
SC7: Mas f '(x) não é 3x menos 10 , f '(x) é 3. Se o y é isso? Ah! Não...
SC6: Oh! A reta tangente ao gráfico. Oh, essa aqui já é a reta tangente ao gráfico, a reta que passa por aqui oh... é a reta tangente.
SC7: Não. Mas dizer que y , a derivada de y é quem? Não é 3? Deriva isso aqui, oh! Não é 3?
SC6: Não, não, não... Oh, aqui a reta tangente ao gráfico de uma função tal tal... passa pelos pontos. Então, se você acha a equação dessa reta aqui, você já acha a derivada da função. Você não está achando a função, você está achando a derivada da função... Você já está achando a derivada da função. Entendeu?
SC7: Tá, então; não é f '(x), é f '(3).
SC6: Aqui é f'(x), f '(3) está aqui embaixo.
SC7: Isso aqui não é f de x?

SC6: Não, isso não é f de x, essa é a equação da... isso já é a derivada aqui oh! A reta tangente ao gráfico de uma função. A reta tangente ao gráfico, já é... Entendeu?
(Longo silêncio)
SC6: O que você entende por derivada? É a equação da reta tangente...
(Longo silêncio)
SC6: Em qual que você tá? Você já tá na frente?(silêncio). Você ainda está teimando nessa aí? Você é teimoso(a)...
(Trecho inaudível)
SC6: Ela está perguntando o que é a derivada.
SC5: É...Entendeu?
SC6: Você está colocando é a derivada... não adianta...
SC5: A reta L é a derivada mesmo?
SC6: A derivada é...é a inclinação da reta tangente no gráfico...
SC5: E como é que eu vou explicar isso?
SC6: Vai explicar o quê? Eu só vou colocar isso...(silêncio)
SC5: É a inclinação da...
SC6: É a inclinação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Deixa eu me lembrar para ver se é isso mesmo... Se eu derivar,... é que eu não tenho nenhuma função. Só se eu pegar uma função e rabiscar, se eu pegar uma x^2, por exemplo. Não é isso mesmo... eu vou fazer... É isso mesmo. Se eu colocar outra, vai ser diferente. É isso mesmo...
É a inclinação da reta tangente a f(x) em um ponto qualquer... (ditando a resposta). Que você está escrevendo aí? Ah tá.
Para você, o que significa dizer que a derivada de f de x é 2x no ponto x?
Vou colocar aqui. Se substituirmos o valor de x, encontraremos a inclinação. É, mas isso vai ser a mesma coisa de cima.
(Longo silêncio)
SC6: Taxa de variação média é a tangente, não é? $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ **?Não é?**
SC5: No ponto, né... a derivada no ponto...
SC6: Tá vendo o intervalo, oh?
SC5: No intervalo [2,3].
SC6: A taxa de variação média é a tangente...
SC5: Tangente...
SC6: Não... Δy **sobre** Δx **. (silêncio) Ah, esse aqui é quando limite tende para zero (referente ao item b). E aí, SC7?**
Taxa de variação média é igual Δy **sobre** Δx **é igual a 7 menos 4 sobre 3 menos 2.**
(silêncio)
Taxa de variação instantânea da função. Quando o limite tende pra zero. Deriva de novo... É a derivada segunda...quando o limite tende igual a zero... taxa instantânea...
SC5: Ah, é?
SC6: Taxa instantânea, quando o limite tende igual a zero.
SC5: Deriva duas vezes... .
SC6: Lembra...velocidade média... não sei o que...taxa de variação instantânea da função.

SC5: Num ponto x igual a 2.
SC6: Deixe eu ver como eu justifico. Ah! É quando o limite tende igual a zero.
SC5: A taxa de variação instantânea é a derivada segunda quando o limite está indo para zero.
SC6: Isso...tem de colocar a definição de derivada. Sabe como é a definição de derivada quando h tende para zero? Pera aí, deixe eu lembrar...(silêncio)
SC5: Taxa de variação instantânea é a derivada segunda...
SC6: É... mas eu queria colocar a definição de limite. Lembra? f(x) sobre h quando h tende para zero. ...Já lembrei...
SC5: f(x)... (silêncio). Tá errado o que eu coloquei? É a derivada primeira, quando o limite tende a zero?
SC6: Aí, não tem nada a ver.
SC5: Não tem nada a ver, né...(trecho inaudível)
SC6: Limite quando h tende a zero...f(x) menos h, menos f(h)...(silêncio)
SC5: Acho que está faltando coisa...
SC6: Acho que é isso mesmo, fazendo o gráfico aqui, oh! f(x + h)? Não, não. É f(x + h).
SC5: Ah, tá.
(Longo silêncio)
SC6: Não, não... Tá errado, tá errado. É da função, é da função, essa aqui é da função, essa equação aqui é da tangente, já é a derivada já; então, é 4. É da função no ponto... Já tem a derivada ali.
SC7: Não é o quatro?
SC6: É o quatro. É o quatro. (silêncio)
SC5: Tá errado se eu deixar assim? Do jeito que a gente fez...
SC6: Não, eu derivei de novo aqui, eu vou colocar a equação agora...
SC7: Você tem que fazer isso aqui? Somar h?
SC6: Não, isso aqui é a definição de derivada, lembra?
SC7: Tem que calcular por aí?
SC5: E isso aqui? Tá certo?
SC6: Oh! Lembra: quando você tem a equação de espaço, você vai calcular a velocidade. Por que você derivava? Porque você queria a velocidade naquele ponto, que era quando o espaço tendia para zero.
SC5: Entendi.
(Longo silêncio)
SC5; Calcule f ‘(2)... Justifique a resposta... como é que eu vou justificar isso?
(longo silêncio)
SC7: Tinha um exercício assim? Eu não lembro...
SC6: Isso aí tinha que colocar f (x) igual a 2 e f (h) é igual a 0,8, lembra?
SC7: Éh! 0,08... Ah...
SC5: Isso aqui é do primeiro caso...
SC6: É isso aí é o problema da derivada... Espera aí, isso... Como é que você colocou aqui?
SC5: Aqui não é 4?
SC6: É só colocar como no anterior...
(Silêncio)
SC5: Aqui já está derivado, não tá?
SC6: Huhum...
SC5: Então, é só colocar o 2, não é? Mas ela quer que explique.

SC6: Espera aí... espera aí, deixa eu voltar aqui... calma aí.
SC7: Aqui não é... (não audível). Esse ponto tinha que ser nessa reta para fazer isso? Não tinha que ser da reta L? Não é... é de f. Igual a 3, 3 X 2 é 6. Ah, não é da função f.
SC5: Mas não é a mesma coisa? Eu acho que é a mesma coisa.
SC6: Eu estou pensando aqui... Calma aí... Mas deu, sim, mas... eu estou pensando... (longo silêncio). Ah, eu acho que nesse aqui, que a gente calculava...para calcular esse 2,08 Oh! Usa a definição de limite...
SC5: Nossa, mas eu pensei que aqui só fosse substituir f (x) para x = 2,08.
SC6: A função não é 2x...
SC5: A derivada, né?
SC6: A derivada que é 2x.
SC5: Então, a função?
SC6: Só que você pode calcular a integral, mas você não tem a constante... lembra...
SC5: É mesmo, tem que ter a constante... A constante... some, né? Mas a gente tem que falar em x^2... E aí é a constante... Você lembra como faz? Não, não isso não é...
SC6: É porque esse aqui a gente tem que calcular por aquele... por essa definição de derivada...Que foi a que a gente colocou... a gente calculou...sai pela definição de derivada, lembra?
SC7: x é igual x_0 + h e o h é 0,08.
SC6: Isso. Tem que saber a definição de derivada.
SC7: Tem que saber o f (0,08) ?
SC6: Hum ?(longo silêncio)
SC7: x é 2?
SC6: Hum?
SC7: Não pode ser assim?
(longo silêncio)
SC5: Como a gente esquece as coisas... não?
(Longo silêncio)
SC5: Tem que ter a função, né?(silêncio)
SC6: Lembrou? Tem que usar a definição de derivada... A derivada eu tenho... Só que eu não tenho o f (x)...
SC7: Ele só deu um exemplo desse no caderno...
SC6: Eu lembro.
SC7: Decoreba o bagulho.(silêncio) Nem depois da prova eu não lembrava mais...(silêncio) Não vinha na seqüência???
SC6: Não.
SC7: Eu lembro até a posição que estava no caderno...
(Longo silêncio)
SC6: Espera aí, volta aqui... A equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto (2,4). Eu não consegui fazer a conta errada aqui, não? Essa aqui é a reta tangente... a reta tangente...a equação da reta tangente é diferente da derivada... Porque a equação da reta tangente já é com um ponto...
(Silêncio)
SC6: Não...Analisa... Analisa... Eu esqueci... Esse traço, aqui oh...(silêncio)
SC7: Tinha um lance de raiz quadrada...
SC6: Mas aí é quando era raiz...(longo silêncio)
Esse daqui é tangente no ponto x igual a 2 ... Se essa fosse no ponto x igual a 4 ?

SC7: f (x_0 + h) ...
SC6: Oh! Tá vendo aqui... Essa aqui é a tangente no ponto 2. Ele já derivou... e já jogou o ponto 2. Se você achar no ponto... (inaudível) dá o mesmo valor.
SC5: É certeza? Dá o mesmo valor?
(Longo silêncio)
SC5: Calcule f(2,08)...é a mesma resposta desta SC6... É a mesma resposta dessa...
SC6: Por quê?
SC5: O que ele quer é f(2,08)...e aqui é f(2) praticamente...f ‘(2).
(Longo silêncio)
SC6: Quer saber de um negócio, vou responder a...
SC7: Pera aí...
SC6: Por quê?
SC7: Deixa eu ver... Tá.
SC6: Vou responder essa e essa...
SC7: É isso aí que tem que fazer.
SC6: Eu sei que é isso aí, mas não pode colocar nessa função?
SC7: h mais h?
SC6: x_0 mais h ... Tira um h aqui...
SC7: Não. Por que esse aqui é o cara... é o f (x)...(silêncio) Essa deve pegar todo mundo... Não lembra... Fica... (longo silêncio). E se você integrar ela?
SC6: Se você integrar ela você vai achar uma constante, lembra? E não vai dar para achar ela...
SC7: Dá x^2 que vai ficar... (silêncio)... É x^2 + 4? Pô, dá para saber, oh...
SC6: É uma função do 2º grau... Como é que você vai achar com dois pontos só? Tem que ser no mínimo três. (longo silêncio).
SC5: Calcule f(2,08)... É a mesma resposta dessa SC6? É a mesma resposta dessa.
SC6: Por quê?
SC5: Ela quer a derivada em 2,08 e é praticamente...
SC7: Achei... É sério... Você joga o dois dá quatro, você joga o três dá sete? (silêncio)...Tá certo...(silêncio). Chutar é com ch, né?
SC6: É... Cansei.
SC7: A função essa aqui mesmo... dois... dois ao quadrado é quatro.
SC6: Mas tem que justificar, SC7... Como é que você vai colocar a função aí?
SC7: Ah! Eu achei a função.
SC6: Eu sei...Mas tem que justificar.
SC7: Mas eu não lembro como é que é...você fez a 2,08? Pô... como é que é esse raio? X igual a x_0 mais h...
SC6: Pô SC7, faz o negócio sério... depois a gente vê...
SC7: Não. Eu não vou fazer... o meu já está feito aqui... eu só queria que ele(a) me falasse depois...é que eu fiquei curioso(a) ...eu não lembro como é que é a situação..
SC6: É pela derivada, não é? Pode parar a fita?

APÊNDICE 5 - TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS INDIVIDUAIS - FASE II

Transcrevemos, a seguir, o conteúdo das audiogravações das entrevistas realizadas individualmente com sujeitos selecionados dentre aqueles que responderam ao questionário da fase I, reunidos em duplas e ternas. Realçamos, em negrito, as informações que foram consideradas importantes para a elaboração da análise dos resultados obtidos.

SUJEITO SB4

E: Entrevistador. SB4: Sujeito SB4.

SBA: Posso fazer aqui no papel?
E: Pode fazer aí mesmo, não tem problema nenhum... Qualquer coisa que você queira perguntar... sem problemas.
SB4: É só colocar as respostas direto?
E: Na hora que você for resolvendo, tendo alguma coisa que eu não entenda, eu te pergunto.
(Silêncio)
SB4: Posso colocar aqui?
E: Pode. (Silêncio). Onde você achou esse dois? Você fez “de cabeça?”.
SB4: Fiz “de cabeça”.
E: Então, escreve só como é que você fez? ...tudo bem... Já entendi.
SB4: Dá quatro porque... tangencia aqui nesse ponto... é a mesma imagem...
E: Então, dá quatro porque quando tangencia nesse ponto...
SB4: No ponto (5,4)... a imagem é a mesma.
(silêncio)

SB4: O f ’ você quer que determine através dessa função?
E: É. Com isso que você tem. Com que eu tenho é possível determinar f ’ ou... se você acha que sim, determine-a , se não ... porque não é.
SB4: Dá pra determinar. Tem dois pontos da reta... f ’, você determina pela equação da reta... “normal”.
E: Determine, para mim, então, a equação.
SB4: Fiz isso aqui anteontem... tenho que lembrar.
E: É tranqüilo, porque não é muita coisa que a gente tem que trabalhar.
SB4: Resolve isso aqui? Ou...
E: Aí, quem seria o f ‘?
SB4:... Sobre quatro...
E: Por que dividido por quatro?
SB4: Dividido nada... que viagem...
E: É possível determinar-se f ‘(2)?
SB4: Claro. Como não?
E: Quanto que dá?
SB4: Quatro menos seis. menos dois.

E: Escreve para mim.
SB4: Estou com problema de espaço...
E: Ele(a) é econômico(a).
(Silêncio)
SB4: Estava muito fácil...
E: É só para você pensar... você lembra de outra forma...
SB4: Ou seja,... pelo que é dado...
E: Com isso aqui... é possível você calcular a tangente?
SB4: Tirando... eu tiro a reta tangente... e fico só com...
E: O que eu quero saber é: Com esses dados que estão aí, a reta tangente, os pontos... tudo...é possível você calcular a tangente sem obrigatoriamente utilizar os catetos... ou não? Você lembra ou sabe outro jeito... ?(silêncio)
SB4: Bom... Se tem eu não me recordo...
E: Eu tenho mais uma pergunta para você. Na questão Q-3 do seu questionário... Dê uma relida para você lembrar o que é.
(Silêncio)
SB4: Eu também já estou mais influenciado, pois eu acabei de ver isso agora ainda...
E: Hum...
SB4: Eu tenho que pegar uns dois ou três livros e ler a parte teórica...
E: Você fez isso aqui, tá... O que eu quero saber é o seguinte: nessa situação, você teria como me dizer quem é f ’?
SB4: Nós temos aqui...
E: Então, coloca para mim... f ’ seria quem, no caso?
SB4: Como assim... quem é f ’ ...
E: Sim, quem é f ‘.
SB4: f ‘ é 3x menos 10.
E: Obrigada. Era só isso que eu queria mesmo discutir com você hoje.

SUJEITO SC6.

E: Entrevistador SC6: Sujeito SC6.

E: Se eu quiser perguntar alguma coisa ou não entender alguma coisa que está aí eu te aviso...Pode escrever aí embaixo.
SC6: Se eu errar isso aqui a professora vai me matar...
(Longo silêncio)
E: Por que f ’(5) é igual a 4?
SC6: A tangente... a tangente desse ponto que tá aqui... Lá ...
E: Hum...
SC6: Aí eu... peguei o quatro, porque o quatro é a imagem... depois você me fala o que você... você não vai falar?
E: Depois que a gente acabar, eu converso com você...
(Silêncio)
SC6: Eu estou nervoso(a)... estou ficando nervoso(a)...
E: Deixe de ser bobo(a)... O que está me interessando é o que você tem... (silêncio).

SC6: Pelos dados... tem de achar a equação dessa reta...
E: Humhum...
SC6: Eu já tenho o coeficiente angular...voltar... eu tenho o coeficiente angular já ...(silêncio)
Há... há... espera aí... calma aí...
(Silêncio)
E: Então, esse y igual a 2x menos seis é então o quê?
SC6: A tangente... É a equação da reta tangente...
E: Eu perguntei determine f ’... Então, quem é a f ’?
SC6: f ’ é ela...
E: Eu só estava querendo saber se era isso que você estava querendo me dizer... e o c... quer dizer o d?(silêncio)
SC6: Bom. Aqui no c eu determinei a equação da f ’... a equação da reta tangente...você está perguntando se eu não conseguiria determinar a tangente de θ , eu determinei... é o coeficiente angular dessa equação aqui...
E: Então...você pode colocar aí... a tangente de θ ...(silêncio). Está bom...
SC6: Dá para entender.
E: Dá para entender perfeitamente. Só isso...Obrigada... Agora...vou te dar isso aqui (o questionário que respondeu na fase I) para você dar uma olhada...quando você aqui fez...você me respondeu a questão 2 dessa forma, tá. Tem ali a tangente... você vê que é parecida...Agora... nessa aqui (Q–3)... dê uma lida...
SC6: A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x igual a 3... passa pelos pontos A...calcule a derivada... você quer saber o que eu fiz aqui ?
E: Não, eu quero primeiro que você olhe o que fez e eu vou te fazer uma pergunta.
(silêncio)
SC6: Tá...
E: Então, foi isso que você fez... eu queria te fazer a seguinte pergunta: Você pode determinar esse f ’? Por que você colocou esse f de 3 aqui? Por que você indicou isso aqui, f (3) é igual a f ’(3)?
SC6: Ah, tá. Porque a reta tangente... o ponto da função coincide com a da equação da reta tangente...
E: Essa informação é essencial para você determinar o que foi pedido?
SC6: Não. Pelo que eu me lembro isso aqui eu coloquei...acho que foi só para confirmar depois o que eu fiz.
E: Pra poder...
SC6: Acho que eu coloquei... acho que eu fiz isso primeiro e depois eu fiz...
E: Entendi... Agora, na quarta questão, eu perguntava assim o que você entende por derivada em um ponto qualquer. Você me disse: é a inclinação da reta tangente a f de x em um ponto qualquer. Eu quero saber para você o que é inclinação da reta tangente?
SC6: Então a inclinação... para mim.... eu errei aqui... para mim a inclinação é o ângulo de inclinação da reta com a abscissa...só que, aqui, eu teria que colocar a tangente da inclinação.
E: Então, você tem claro que a inclinação, então, seria.
SC6: O ângulo...
E: Então, você redefiniria o que é uma derivada em um ponto qualquer?
SC6: Eu escreveria assim...
E: Então, escreve aqui...

SC6: Eu escreveria assim: é a tangente da inclinação da reta tangente a f de x em um ponto qualquer.
E: Você disse que a derivada é isso... no ponto qualquer... você respondeu que a derivada em 5 é 4. São compatíveis essas duas coisas? Dê uma olhada.
SC6: Isso aqui que eu falei aqui?
E: Você falou para mim que f '(5) é 4. Como falou para mim na 2ª questão que f '(2) é 6.
O que eu quero saber é... Olhando o que você me escreveu aqui(item b da questão motivadora da entrevista) e o que você me escreveu aqui (Q-4a do questionário da fase I) se você mudaria alguma coisa. (Silêncio)
SC6: Não.
E: Obrigada.

SUJEITO SC7.

E: Entrevistador. SC7: Sujeito SC7.

SC7: Posso fazer aqui mesmo?
E: Pode ser.
(Silêncio)
SC7: Então, espere aí... nesse ponto...(silêncio). É o coeficiente desta reta aqui. Se eu tenho dois pontos posso usar aqui, oh... Posso usar borracha?
E: Eu preferia que você fizesse um risco assim... e escreve na linha de baixo o que você queria escrever.
(silêncio)
SC7: O outro teste era pra ver se estava certo ou estava errado ou...era pra ver...
E: A idéia não é ver se está certo ou errado. Por isso que eu optei por pedir que vocês fizessem junto comigo para que pudesse entender o que você pensa quando faz.
(Longo silêncio)
SC7: Ah, é aqui a tangente; a gente podia também fazer aqui, né...cateto oposto ....
E: No triângulo retângulo... você usou a equação da reta. Sem problema. O importante é achar. Você associou...
(Longo silêncio)
SC7: Aqui no f '(2) eu não posso ver o 2 no eixo x e vir até a reta aqui? Por exemplo, o f '(5) não é 4?
E: Humhum.
SC7: Se eu tivesse marcado 2 aqui, oh... eu vinha até a reta, aqui, e achava, aqui, em y. Não em y não... aqui no...
E: f '(2).
SC7: É...
E: Quando você diz para mim que f '(5) é igual a 4, você está pensando o quê? (silêncio)
SC7: A reta não é tangente nesse ponto?
E: É.

SC7: Então, se eu quisesse... qualquer ponto no x se eu encontrar aqui a reta nesse ponto, a f ' desse ponto vai ser esse daqui.
E: Que é a ordenada?
SC7: É.
E: Entendi.
(Silêncio)
SC7: Ah, não... Não só no ponto... é porque ela é tangente nesse ponto aqui...não é... que eu posso dizer que... no outro ponto não... f '(6)...Ah, não... A reta tangente...
(Longo silêncio)
SC7: Se eu tivesse uma outra reta tangente em um outro ponto dessa função aqui... (silêncio) o f ' desse 2... por exemplo, se eu tivesse o ponto 2 aqui, oh?
E: Então... eu perguntei : é possível determinar f '(2); se sim, determine-a , se não...
SC7: Achando uma reta tangente no ponto 2 e alguma outra coisa aqui... Aí sei lá. Tinha que ter uma outra reta tangente aqui no ponto 2, daí eu ia achar o f ' .
E: Então, como está aí, você acha que não dá para fazer? No caso o f '(2).
(Longo silêncio)
SC7: Acho que não. Eu ia ter que ter outra reta tangente...
E: E não foi dada. Tudo bem...
SC7: Tem um outro caminho para achar? A minha resposta já é essa, eu não vou mudar nada.
E: Vamos combinar o seguinte: a gente vê tudo e depois eu converso com você sobre a questão item a item. Tá bom?
SC7: Tá.
E: Então, no item b, coloca a...
SC7: Se é possível...
E: Esse é o item c...
(Longo silêncio)
SC7: Se a derivada da função é isso daqui por que f '(5) dá 4? Isto está errado...
E: E quando você deriva isso, o que é que você está fazendo? Deixe-me ver o que você está pensando. Você achou a equação dessa reta tangente... aí você a derivou...deu 2. Esse dois o que ele é?
SC7: Ah, não é esse aqui. O dois é só o coeficiente.
E: Hum... Agora esse 2x menos 6 que você encontrou... ele é o quê?
SC7: A equação dessa reta aqui...
E: E você está achando a equação dessa reta... porque... para te dar o quê?
SC7: Que é a função derivada...
(Silêncio)
A reta tangente à função é a função derivada? Está me dando um nó... essa aqui já é a derivada?
(Longo silêncio)
SC7: A letra "e" já é a letra "a".
E: Você já respondeu que achou por outro jeito ali... não tem problema nenhum...não é só isso.
(Silêncio)
E: O que você tinha feito na outra questão?
(Silêncio)

E: Você não está satisfeito ou...?
SC7: Eu fico sempre confuso(a)... eu volto toda hora, bato em algumas coisas... eu entendo na hora, resolvo. A gente estuda só antes da prova, né? Fica bitolado(a) para estudar , quer saber como é que é para resolver... resolve um calhamaço de exercício e depois pra saber... vir de novo aqui...tem que ver tudo de novo.
E: Entendi. Bom. No momento ficaria assim?
SC7: É.
E: Certo...Aqui (Q-2 do questionário respondido por ele(a) na fase I) você tem essa situação...
SC7: O que eu tinha falado sobre essa?
E: Não... eu só quero lhe perguntar o seguinte: quando você fala sendo o ponto (2,6) a tangente no ponto... essa tangente é que tangente, a reta? A tangente trigonométrica?
SC7: O valor da tangente...
E: O correspondente?
SC7: É
E: Ah, tá bom... você tinha colocado a tangente e eu não tinha certeza se era a tangente trigonométrica, a reta tangente... então, eu entendi... na verdade, então, é o correspondente da reta tangente.
SC7: Humhum.
E: Tudo Bem. Nessa aqui (Q-3 do questionário) eu dei dois pontos A e B e disse que a reta passa por aí e essa reta tangencia o gráfico da função f. Eu quero saber qual é a derivada em 3... Da função f em x igual a 3. Você desenvolveu esta dessa forma, tá? Achou o m, determinou a equação da reta... aqui é possível determinar f'(x)? Determinar f '?
SC7: É essa daqui, não é?
E: Então é a 3x menos 10. Tudo bem... Isso o que você fez aqui... você fez também aqui nessa primeira questão ... Tá vendo...Acho que quando você respondeu aqui... você não usou nada disso ... não sei ... eu queria que você desse uma olhada, tá? É a questão 1 (Q-1 do questionário da fase I), é um gráfico bem parecido com esse...você estava em dúvida se era y ou x... você testou...aí, depois, você derivou isso aqui (a equação da reta tangente), acho que era a mesma idéia...
SC7: Aí, eu vi que acaba caindo no m e e é a tangente.
E: Tudo bem. Aí, você viu e partiu para dar outra justificativa... certo .

APÊNDICE 6 - TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM A DUPLA DE SUJEITOS S1 E S2 FASE II

Transcrevemos, a seguir, o conteúdo da audiogravação da entrevista realizada com a dupla formada pelos sujeitos S1 e S2 , selecionados dentre aqueles que responderam ao questionário da fase I, individualmente. Realçamos, em negrito, as informações que foram consideradas importantes para a elaboração da análise dos resultados obtidos.

Devido a problemas operacionais, parte do conteúdo da audiogravação desta entrevista foi perdido. Decidimos, então, fazer uma descrição do ocorrido durante o período não audiogravado.

Inicialmente foi esclarecido para os dois sujeitos participantes como seria realizada a sessão. Informamos que, em um primeiro momento, seria proposta uma questão para ser discutida em dupla e respondida individualmente. Em um segundo momento, entregaríamos o questionário que havia sido resolvido anteriormente para que discutissem, em dupla, as respostas dadas a algumas questões que seriam especificadas, dando-lhes a oportunidade de modificar ou não as respostas dadas.

Entregamos a cada sujeito uma folha contendo uma questão semelhante à questão Q-1 apresentada no questionário (Apêndice 3). Esclarecemos que as respostas dadas por cada sujeito aos diversos itens da questão não precisavam ser um consenso da dupla, caso houvesse discordância.

O sujeito S1 iniciou o item “a” buscando utilizar a relação $tg\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, informando que o gráfico lhe fornecia a medida do cateto oposto , do cateto adjacente, mas não sabia a medida da hipotenusa. Neste instante, foi interrompido pelo sujeito S2 que afirma ser a tangente de θ o quociente entre a medida do cateto oposto(CO) e a medida do cateto adjacente(CA), escrevendo na folha de resposta de S1 a relação $\frac{CO}{CA}$. O sujeito S1 aceita a sugestão e a utiliza, determinando de forma correta a tangente pedida.

Ao iniciar o item b, o sujeito S1 afirma ser necessário conhecer a função f para poder substituir x = 5 em sua derivada, interrogando o entrevistador se isso estava correto. Este, por sua vez, informou que a questão não fornece a lei de correspondência de f. O sujeito S2 inicialmente afirma não saber como resolver este item. Ambos os sujeitos continuam a tentar descobrir uma solução. O sujeito S2 passa a determinar a equação da reta tangente L utilizando a equação da reta y = ax + b e os pontos (3,0) e (5,4) pertencentes a ela, porém acaba enganando-se no procedimento adotado para resolver o sistema de equações e obtém a equação $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ que não representa a reta L fornecida. Nesta equação substitui x por 5, e antes de obter o valor correspondente, interrompe o sujeito S1 que também estava desenvolvendo o mesmo procedimento adotado por S2 e resolvia o sistema de equações, dizendo... "Não precisa fazer a conta....Olha aqui a reta.... para x = 5, y = 4, $f'(5)$ é 4. O sujeito S1 concorda com S2, mas passam a comparar os resultados obtidos na resolução do sistema de equações e percebem a existência de respostas diferentes. Revendo a resolução do sistema de equações, acabam por obter a resposta correta y = 2x – 6 (Anexos 2) . Tanto o sujeito S1 como o sujeito S2 fornecem como resposta ao item b que $f'(5)$ é 4.

Passam à leitura do item c e, neste momento, estão trabalhando juntos(as) , isto é, discutindo a resposta a ser dada antes de elaborá-la, e não apenas discutindo as respostas que foram elaboradas individualmente. O sujeito S2 afirma que a equação da reta tangente é a função derivada de f, e esta já foi calculada, indicando que vão passar ao item seguinte. O entrevistador pede para que destaquem a resposta dada ao item c, sendo que ambos os sujeitos circulam a resolução do sistema na folha de resposta, a identificam com a letra c e acrescentam, em local diferente daquele circulado, a resposta c) $f'(x) = 2x - 6$.

A seguir, passamos a transcrever o conteúdo da audiogravação que retrata as discussões ocorridas durante a resolução dos demais itens da questão motivadora, bem como as discussões sobre as respostas dadas ao questionário propostos na fase I desta pesquisa.

TRANSCRIÇÃO DO CONTEÚDO DAS DISCUSSÕES

Legenda: E: entrevistador S1: sujeito S1 S2: sujeito S2.

S2: É isso S1... seja mais confiante....
S1: Agora ela quer $f'(2)$... agora ...(inaudível)

Já sei, ela quer aqui. Em d ela quer $f'(2)$... então no lugar do x eu coloco 2. (silêncio) Duas vezes x menos 6. Não é isso???
E: Você concorda com ele(a)? (pergunta dirigida a S2)
S2: Concordo.
S1: É possível determinar $f'(2)$...? Aí no lugar do...
S2: Ah, tá igual... Vá, agora vem a última... você conseguiria calcular ...(passa a murmurar a leitura do item e...).
E: Eu vou explicar melhor esta questão: eu estou querendo dizer... caso você não use esta relação que você usou aqui... o que você fez aqui... usou esta relação, não tem problema nenhum, é um jeito de fazer. Agora, por um acaso vocês conhecem um outro meio que eu poderia, com este gráfico, com esta situação calcular a tangente?
S2: A tangente de θ é a derivada da função no ponto... É...
E: S1?
S1: É, eu acho que é...
S2: Eu acho igual a S1 porque S1 é cheio de bola...
Não, agora papo sério...Não, não é, sabe por quê? Porque o ponto é 5, e quanto que vale a derivada no ponto 5?
S1: Mas tinha alguma coisa que nós fazíamos no ponto e conseguíamos alguma coisa...
S2: É achar. a derivada... a derivada da função no ponto é a velocidade no ponto...
S1: É... deriva duas vezes dá a aceleração....
S2: Isso...
S1: Eu não sei...
S2: Não...Vamos parar pra pensar... quando a gente pensava em lançamento de corpos... O ângulo servia para quê? A gente calculava este ângulo...Quanto em x... quanto em y....
S1: Não tem nada a ver...
S2: Eu não sei S1... Eu queria copiar do dele(a)... mas... Deve haver... Acabou?
S1: Isso não deve ser uma coisa que seja tão difícil assim. Nós já vimos isso.
S2: Já vimos...eu tenho certeza...
S1: E a área...que é que nós fazíamos com a área? Quando nós calculávamos a área de uma figura...
S2: Ah, mais aí é integral...Área é integral...
S1: Não fazíamos para nada pela área?
O que é que a gente achava mesmo? (silêncio)
E: Não tem problema... se vocês não vão conseguir relacionar..., lembrar..., não tem problema nenhum...
S1: Depois você me conta...
E: Bom, a próxima proposta que eu tenho para vocês é a seguinte...eu estou colocando para vocês as respostas que vocês .... o mesmo questionário. Mas eu estou me fixando em algumas questões que eu quero novamente discutir com vocês...É a questão 1, é a questão 2, a 3 , a 4 item "a" só e a 5, só me interessa a 5 c. São essas as questões que estão reproduzidas aqui(uma outra folha de respostas)... o que eu quero? Eu quero... eu quero que você olhe a tua resposta..., olhe a resposta que a outro(a) deu também, troque "uma idéia" e veja... será que eu mantenho o que eu respondi ou eu prefiro..., ou cheguei à conclusão que quero mudar, enfim , entenderam qual é a proposta? Então... dê uma "olhadinha", verifique

o que vocês fizeram... você olha o que ele(a) fez, ele(a) olha o que você fez, olhem o que fizeram aqui também...(na questão motivadora)
S2: Não, mas aqui(na questão motivadora) você pôs um monte de perguntinhas ....
E: É...aqui tinha outras questões... Na verdade, eu peguei esta questão e inclui mais dois itens...
S2: É então... aí facilitou tudo...não, mas eu acho que respondi certo isso.
S1: Não, eu acho que eu não respondi certo...
E: **Então, eu só vou pedir o seguinte... se quiser mudar, não muda aqui(na folha de resposta do questionário da fase I) não, muda na de cá(folha de respostas com a reprodução das questões selecionadas para discussão), para eu poder ter referência do que você mudou daqui para cá.**
S2: Eu pensei igualzinho...
S1: Não, eu não pensei não...
E: Então, se você quiser mudar, reescreve...
S1: Não... eu não quero mudar.
S2: É mas você acha que essa está errada ou aquela está errada? É para tu pôr o que acha que está certo agora, entendeu?
S1: Ah...aí eu fiz... ah está errado...
S2: Você pode pegar esse primeiro(Q-1)... eu vou explicar para você rapidinho... Você viu que eu, fazendo aqui, como funciona...
S1: Hunhum...
S2: Olha lá S1... (silêncio)
S1: Não, mas está errado aí... o f era primeiro ...(inaudível).
S2: Acabou...Agora qual é...
S1: É a 2.
S2: A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2,6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta, explicando passo a passo.
E: Inclusive, aqui na 1, você manteria a mesma justificativa que você deu, ou trocaria a justificativa?
S2: Ah, eu nem olhei isso aí...
E: Você olhou a justificativa?
S2: O que eu coloquei... Olhando pelo gráfico...
É a mesma coisa...aí eu justifiquei...
E: Não, porque tudo bem... aqui, na verdade a justificativa está aqui...
S1: Ah, eu acho...
S2: Ah então eu vou colocar...
S1: Afinal, você vai me responder... eu calculo a área em alguma coisa, não calculo?
S2: Vamos S1, vamos tentar juntar...
E: Você aí (S1), o que você pensou... buscou a área...por que você associou a alguma coisa que você fazia?
S1: Só se for integral, meu...
S2: Como é que a gente fez? Olha lá S1, o que é que ele pede aqui (Q-2)?
S1: $f'(2)$**.**
S2: Qual é o $f'(2)$**? Qual é a função** f'**? Qual é a reta da** f'**? Não é a tangente?**
S1: É.
S2: Quanto vale no 2?
S1: 5. Tá... eu não estou entendendo por que eu fiz a área...

E: Às vezes acontece... você associou alguma outra coisa na hora... você não está conseguindo lembrar o que você fez.
S1: É... eu queria....
E: Depois você pode olhar com calma pra você lembrar...
S2: Eu tenho um bom poder de persuasão...Se eu tiver errada...
A reta tangente ao gráfico de uma função f... (inaudível).
(Silêncio)
S1: Eu não sei explicar o que eu coloquei, não.
S2: Eu não sei nem o que eu fiz lá. Não é que o "a" é diferente!
Faço aqui, e depois comparo?
E: É o que estou falando... se você acha que esse exercício que você desenvolveu aqui (Q-3) ..., é o que você faria...
S2: É exatamente...
E: Então é só copiar...Não precisa fazer tudo de novo...
S2: Mas, e se as contas estiverem erradas? Pra conferir...
(Longo silêncio).
S1: Posso montar este gráfico deste jeito que estou montando?(relativo a Q-3).
E: Sim.
S1: A reta tangente ao gráfico de uma função f... ele quer saber se a gente pode...
S2: Eu achei que...(inaudível)...a esse aqui.
S1: A reta tangente ao gráfico da função neste ponto passa por estes pontos.
(Silêncio)
S2: AH, mas eu não...Ah então... aqui é a reta tangente, são esses pontos...agora, calcula a função...Foi o que eu fiz no outro...
S1: Eu sei, mas nós vimos...
S2: Tu tem o valor de x e tem o valor de y...
S1: Eu sei tá marcada aí.
S2: Então... qual é a função da reta... não é ax mais b ? O que tu fez lá?
S1: Não, eu não fiz nada...
S2: Ah, tá...
S1: Eu estou tentando fazer agora...
S2: Então...qual é o gráfico da reta.. Você sabe que ela passa aqui nos dois pontos...Não é ax mais b? Se tem o valor de x ... é igual a y... Aí vá lá... 4x mais...
S1: 4a mais b
S2: 4a mais b igual a quanto? Igual a 2. 10a mais b igual a 20.
E agora, se a gente estiver errando... eu estou fazendo você errar todas...
S1: É, estou vendo...
S2: Eu achei que o x igual a 3 é só para dizer que ela passa no x = 3 e quer saber o valor dela...ele disse ó... A reta tangente ao gráfico f em x igual a 3 passa pelos pontos tal tal , determine f de x_0 igual a 3
S1: Em x_0 igual a 3, depois que nós acharmos a função, a gente põe o 3 lá no "negocinho..."
S2: Então acabou... ok acha a função....
S1: Deixe eu fazer...
(Silêncio)
S2: O que você entende por derivada de uma função... (Q-4 a).

Ah, eu não quero responder essa...Só isso que eu sei...sinceramente só isso que eu sei sobre derivada...

Ah, S1 por que você faz isso dessa forma? Não é mais fácil do que fazer por substituição. Você tem b nos dois... vai dar o maior trabalho...

S1: Nem todos os alunos são iguais... você faz seu “negocinho” assim e eu faço do jeito que eu sei...

S2: Pô, mas isso aí é maior grande.

S1: Pô, mas se sair o negócio certo é valido, não é válido?

S2: Ela nem quer que saia muito certo. Ela quer saber como a gente pensa e eu estou te convencendo a pensar do meu jeito.

S1: Mas eu sei fazer sistema assim. Tá vendo porque que não dá certo nós dois(duas) junto?

S2: Não, a gente dá certo...Agora eu estou vendo porque ela escolheu a gente, porque era tudo muito diferente... e eu estou te convencendo em tudo... e se estiver tudo errado... vão pensar que você é o(a) mais “pato(a) “ de todos(as)...

S1: Calma... deixe eu fazer o negócio aqui... no lugar do a eu vou substituir os “caras”..., pera aí...

E: S2, deixe eu lhe fazer uma pergunta. Nesta questão aqui (Q-3) é possível determinar f'?

S2: Qual é? Eu fiz agora...Agora eu fiz... agora eu escrevi...(mostrando-me a expressão $f'(x) = 3x - 10$)

E: Tá bom...

S1: Quanto deu teu a e teu b?

S2: Deu 3 e –10...

Tenta fazer agora e por substituição, pra ver se não fica mais fácil

S1: (Longo Silêncio). Donde vem este 4 a - 2b ...

S1: Ah, você somou...

S2: Que é que você tá fazendo?

S1: Eh, tá errado isso aí...

S2: E... tá tudo errado... como é que você soma o “bagulho” e depois faz substituição? Não pode fazer isso... Ou você soma ou faz substituição...

S1: Peraí...(longo silêncio), b = -10, quanto deu teu b?

S2: Deu, deu, deu...certinho, S1. Vamos...Agora, qual a pergunta do “bagulho”?

S1: Então f em x_0 é igual a b, então eu tenho a e tenho b, ax mais b ...ax menos 10... só que ela quer no (inaudível) igual a 3, então tenho f de 3 ...9 .... – 1.

E: Agora eu vou fazer para S1 a mesma pergunta que eu fiz para você (S2). É possível determinar-se f'(a função derivada de f). Se sim determine-a; se não, explique-me por quê. Nesta situação. Dá para achar...? Não dá...?

S2: Quem é f'?

S1: f'...

S2: Quem é f'? No Q-3...

S1: Você quer $f'(3)$?

E: Não.

S2: Qual é f'? Qual a função... derivada...

S1: Teria que derivar isso aqui (y = 3x – 10), não? Não é?

S2: É ou não é... você tem que escolher...

S1: Eu colocaria que é isso aqui...

E: Eu quero saber o que você colocaria...
S1: Você quer que eu escreva...
E: Sim...Tá bom...Agora...
S2: Então essa (Q-4 a) aí a gente cola... vamos... rapidinho...
S1: Qual é...
S2: Essa aqui... essa que estou te esperando...
S1: A derivada de uma função em um ponto qualquer...Essa eu acho que não é esse pouquinho não...
S2: Vamos lá...O coeficiente da reta...
S1: O m... o declive...
S2: Não... Não... O declive é o “a”. Lembra...
S1: Ela quer saber sobre isso... sobre a derivada da função...
S2: Eu coloquei, só que é a reta tangente. Mas não é... é a função da reta tangente no ponto. É isso...
S1: É...pode ser isso.
S2: É a função da reta tangente no ponto.
S1: O coeficiente da reta tangente naquele ponto.
S2: Pensa nas coisas que você já fez...
S1: Acho que isso aqui está errado.
S2: S1 só fala acho...
(Silêncio)
E: Você muda... você deixa...o que é que você pensa...decida e fique à vontade...
S1: Mas tem alguma coisa a ver...
S2: É a função...
S1: Reta tangente...(silêncio)
Depois você vai me falar quando eu entregar essa folhinha...ou não?
E: Depois, tudo o que vocês quiserem saber aqui eu converso com vocês.
S1: Falta mais alguma...
E: Falta só uma... é a 5-c. Da questão 5 eu só estou interessada no item 5 – c.
S1: $f'(2)$...
S2: Deixe eu te fazer uma pergunta...Este quatro está aqui?
E: Sim. Então está bom...
S1: Falta mais alguma???
S2: Ela vai te fazer a pergunta...Se agora ela te perguntasse qual é a derivada da função no ponto...É isso?
E: Não. É possível determinar essa f'. Se é possível, determine para mim.
S1: Determinar f' ?
E: Quem é a f'? Se é possível determine... se não, me explique por que não é possível.
S1: Não foi o que nós estávamos fazendo até agora?
S2: Ela só está perguntando qual é o f'.
S1: Não sei...
S2: Pensa... Pensa...
S1: Eu sei... mas eu acho que não é isso...montar de novo 2 a + ...não sei o que...
S2: Não, Pensa.
S1: Eu tenho a y!
S2: Ela não estava nem prestando atenção no que estou fazendo.

(longo silêncio).
S1: Eu acho que não sei...
S2: Ou S1, quem é a derivada da função no ponto? Qual que é essa reta aqui?
S1: É a "bendita" tangente.
S2: Tá. E qual é a função dessa reta aqui... (silêncio). f' de 2 dá 4. Como que f' de 2 dá 4? Por que que f' de 2 dá 4?
S1: Porque é o negócio da reta...
S2: Então, aqui o 2 e o 4. Tá bom. E tu jogou esse 2 aonde? Ah, tu olhou aqui então... e qual a função?
S1: Eu posso também jogar o 2 aqui(na equação y = 2x) também dá 4.
S2: É? Por que será? Aqui não é L? Qual a função da L?
S1: A reta L de equação y = 2x.
S2: Então?
S1: Então?
S2: S1! Qual é a equação desta reta? Essa reta é o quê? Não é a derivada da função no ponto?
S1: Sim.
S2: E qual é a função dela?
S1: y igual a 2x.
S2: Então? Qual a derivada da função?
S1: y' vai ser 2.
S2: Não, 2x...E!
S1: Essa aqui já é a derivada?
S2: Essa é a derivada dessa função.
S1: Eu não tinha entendido isso...Mas estou entendendo.
S2: Você entendeu o que eu falei?
S1: Entendi agora... mas eu não tinha entendido isso.
S2: Agora a gente pode perguntar?
E: Qual seria a f' ?
S1: y'.
S2: y ele está colocando numa outra função. Põe isso na forma de f'?
S1: Você quer que eu faça o quê?
S2: Que você escreva o f' no lugar do y.
S1: Ai meu Deus do céu...
S2: Acabou? Posso perguntar?
S1: Peraí... falta alguma coisa...
E: Você chegou a comparar com o que você fez...Eu queria dar uma olhadinha novamente neste gráfico aqui.(Q-5c do questionário) você escreveu que a f'(2) é a $tg\theta$ ...
S1: Mas não... aí eu coloquei a área...
E: E isso aqui... essa idéia aqui.... $f'(2) = tg\theta$ ...você concorda com ela...por exemplo...você colocou .... $f'(2) = tg\theta$ ...mas aqui você trabalhou com a área...mas...eu estou tentando justamente entender de onde você tirou esta idéia...
S1: Porque aqui eu pensei assim... tangente de θ não me dá a derivada da função? Foi isso que eu pensei...aí eu fiz ... f' no ponto é igual à tangente de θ .Só que aí que daqui pra cá eu já não...

E: Já mudou o raciocínio...
S1: Mas isso, para mim, continua a mesma coisa na minha cabeça...
E: Então, seguindo esta sua linha de raciocínio, nesta situação , calcula para mim quem seria a tangente de θ .
S1: Então, eu coloquei lá... $f'(2) = tg\theta$.
S2: $f'(2) = 4$
E: Quem é a tangente de θ .
S1: Como que eu calculo a tangente...
S2: Cateto oposto sobre cateto adjacente...
S1: $f'(2)$ ... isso sobre isso.... 4 sobre 2...mas tá dando a mesma coisa: tangente de θ Ó...4 esse pedaço sobre 2 que vai dar 2. E a $f'(2)$? $f'(2)$ dá 4. Não dá a mesma coisa...ou eu fiz errado?
S2: Você não tem nem opinião...
S1: Tangente de θ ...
S2: Então...você está procurando a tangente de θ , você está procurando a tangente desse ângulo...a tangente de θ é a tangente do ângulo ...é a inclinação da reta...não a reta.
Dois... olha só o que eu descobri... a tangente de θ é o m.
S1: Mas é o m, S2...pelo amor de Deus deixe eu pensar....
S2: Eu não sabia disso... Então um outro jeito de tu achar o ax mais b é esse aqui.
S1: Deixe eu iluminar minha cabeça pra gente...tá ligado com a derivada.
S2: Então...Mas está... lógico, pois a inclinação da derivada é o m.
Isso não é igual ao ax mais b? "a" é a tangente de θ , a é 2. (S2 escrevendo na folha de S1)
E: Então, me expliquem melhor...
S2: O m é a tangente de θ que é o coeficiente angular da reta que é a derivada.

ANEXO 1 – PROTOCOLO DO SUJEITO SC7 – QUESTIONÁRIO (Q-1) – FASE I.

QUESTÕES – FASE 1

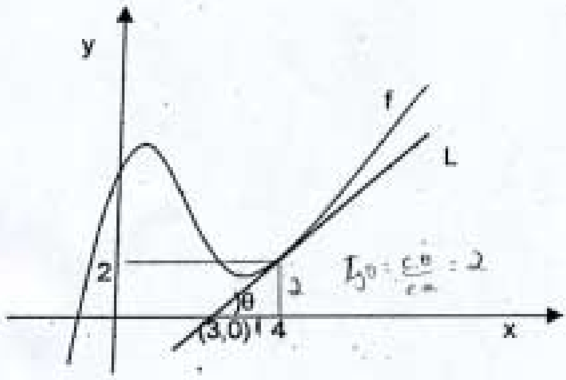
NOME:____

$2 = \frac{y-0}{x-3} \; ; \; y = 2(x-3)$

Q – 1

$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{2-0}{4-3} = \frac{2}{1}$

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (4 , 2).



$m = \frac{x-x_0}{y-y_0} = \frac{3-4}{0-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{x-3}{y-0}$

$y = (x-3) \cdot 2$

$y = 2x - 6$

$y' = 2$

a) Determine $f'(4)$. $= 2$

b) Determine $tg\theta$. $= 2$

Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a "passo a passo".

(b) inclinação da reta tangente.

(a) no ponto é (4,2) ele pertence a reta tangente e a derivada de 4 é 2

ANEXO 2 – PROTOCOLOS DOS SUJEITOS S1 E S2 – QUESTIONÁRIO (Q-1, Q-2, Q-3, Q-4a, Q-5c) – RESPOSTAS REFORMULADAS DURANTE A ENTREVISTA – FASE II.

SUJEITO S1

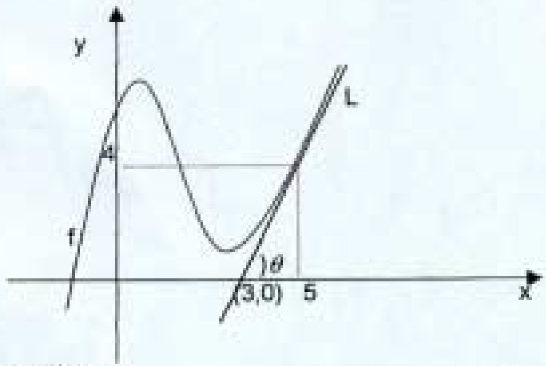
2

QUESTÕES

NOME:____

Q – 1

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (5 , 4).



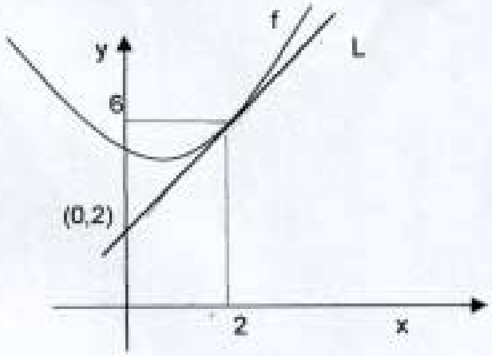
a) Determine $f'(5)$.
b) Determine $tg\theta$.
Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a "passo a passo".

b) $tg\theta = \frac{4}{2} = 2$

a) $f'(5) = 4$

Q– 2

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2, 6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo .



$f'(2) = 6$

pela verificação do gráfico.

Q – 3

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa $x = 3$ passa pelos pontos A (4, 2) e B (10,20) . Calcule a derivada da função f em $x_0 = 3$. Por favor , justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

$ax + b = y$

$4a + b = 2$

$10a + b = 20$

$4a = 2 - b$

$\boxed{a = \frac{1}{2} - \frac{b}{4}}$

$10\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{4}\right) + b = 20$

$\frac{5}{1} - \frac{5b}{2} + \frac{b}{1} = \frac{20}{1}$

$10 - 5b + 2b = 40$

$-3b = 40 - 10$

$-3b = 30$

$\boxed{b = -10}$

$a = \frac{1}{2} + \frac{10}{4}$

$a = \frac{2 + 10}{4}$

$a = \frac{12}{4} = 3$

$\boxed{a = 3}$

$y = 3x - 10$ essa é a $f'(x)$

$f(3) = 3 \cdot 3 - 10$

$\boxed{f(3) = -1}$

Q – 4

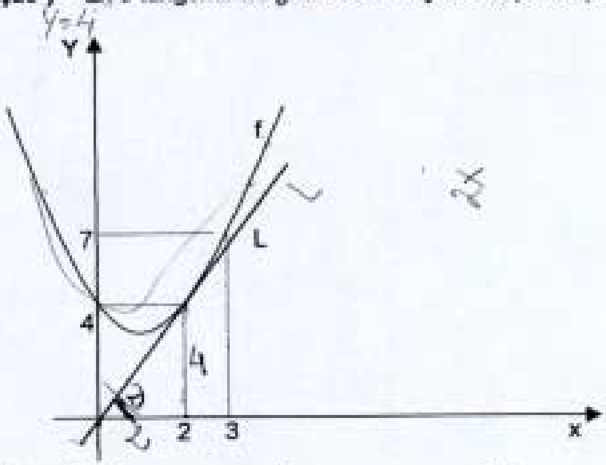
O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer ? Defina ou explique como você desejar.

~~Ela nos fornece o coeficiente da reta tangente naquele ponto~~

Ela nos fornece a funç da reta tangente

Q – 5

A reta L de equação y = 2x é tangente ao gráfico da função f no ponto (2, 4).



2x

c) Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.

$f'(2) = 4$

2c+

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = tg\theta$

$f'(2) = 4$

$tg\theta = \frac{4}{2} = 2$

$\boxed{m = 2}$

$y = ax + b$

$y = 2x + b$

SUJEITO S2

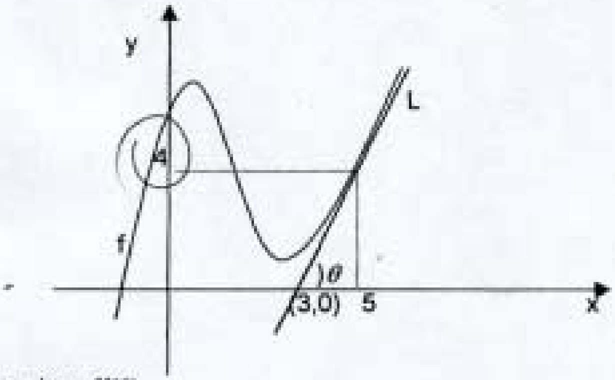
2 F

QUESTÕES

NOME:_______________________________________.

Q – 1

A reta L é tangente ao gráfico de y = f(x) no ponto (5 , 4).



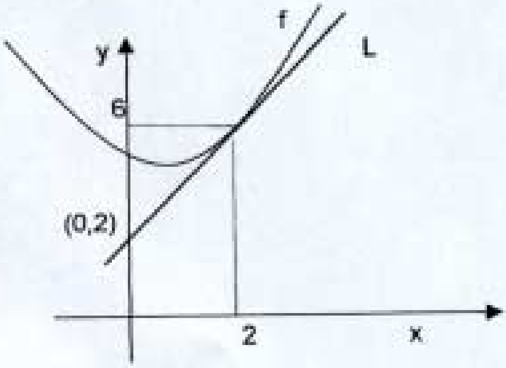
a) Determine $f'(5)$.
b) Determine $tg\theta$.
Por favor, justifique a solução encontrada para cada item, explicando-a "passo a passo".

a) $f'(5) = 4$ → olhando o gráfico

b) $tg\theta = \frac{4}{2}$ $tg\theta = 2$ _ $\frac{CO}{CA}$

Q– 2

A reta L é tangente ao gráfico de f no ponto (2, 6). Determine $f'(2)$. Por favor, justifique sua resposta explicando-a passo a passo .



$f'(2) = 6$

olhando o gráfico

Q – 3

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto de abscissa x = 3 passa pelos pontos A (4, 2) e B (10,20) . Calcule a derivada da função f em $x_0 = 3$. Por favor , justifique sua resposta explicando-a passo a passo.

$4a + b = 2 \quad (-1)$

$10a + b = 20$

$-4a - b = -2$

$10a + b = 20$

$6a = 18$

$a = 3$

$4a + b = 2$

$4.3 + b = 2$

$12 + b = 2$

$b = -10$

$f'(x) = 3x - 10$

$f'(x) = 3.3 - 10$

$f'(x) = -1$

Q – 4

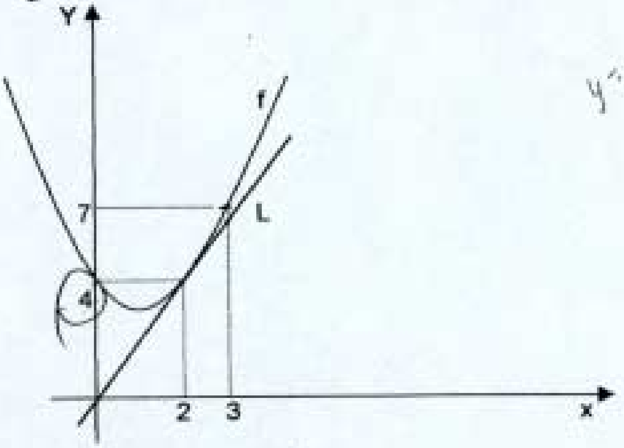
O que você entende por derivada de uma função f em um ponto qualquer ? Defina ou explique como você desejar.

é a função da reta tangente no ponto sem efeito

É a (equação da Reta tangente no ponto

Q – 5

A reta L de equação y = 2x é tangente ao gráfico da função f no ponto (2, 4).



$y = 2x$

c) Determine $f'(2)$. Justifique sua resposta.

$f'(2) = 4$ olhando no gráfico $\quad f'(x) = y = \underline{2x}$

$2a + b = 4$

$3a + b$

$0a + 0 + 0$