JOÃO PEDRO MARQUEZE

AS FACES DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIA ESFÉRICA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

JOÃO PEDRO MARQUEZE

AS FACES DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profª. Drª. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

_____

_____

_____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Loca e Data**: _____

Aos meus pais, que me ensinaram a trilhar o caminho certo da vida, dedico este trabalho.
(*in memoriun*)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS iv

RESUMO v

ABSTRACT vi

APRESENTAÇÃO 1

CAPÍTULO I 5

CAPÍTULO II 47

CAPÍTULO III 77

CAPÍTULO IV 94

CAPÍTULO V 105

CAPÍTULO VI 146

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 155

ANEXOS 162

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS iv
RESUMO v
ABSTRACT vi
APRESENTAÇÃO 1
CAPÍTULO I 5
1. APRESENTANDO A PESQUISA 6
1.1. Problemática 10
1.2. Objetivos 18
1.2.1. Objetivos de Natureza Matemática 18
1.2.2. Objetivos de Natureza Educacional 19
1.3. Algumas Dissertações que tratam das Geometrias Não-Euclidianas 19
1.4. Contribuições destas Dissertações para esta Pesquisa 45
CAPÍTULO II 47
2. FALANDO DE GEOMETRIA 48
2.1. Esboço Histórico da Geometria 48
2.2. Um pouco mais do V Postulado de Euclides 52
2.3. A Geometria de Riemann 55
2.4. Noções Básicas de Geometria Esférica 56
2.5. Geometria Euclidiana e Geometria Esférica 68
2.6. Conceitos Matemáticos necessários para a tesselação da esfera 72
2.6.1. O que significa tesselar? 72
2.6.2. Tesselando a superfície plana 72
2.6.3. Os Poliedros de Platão 73
2.6.4.Tesselando a superfície esférica 74
CAPÍTULO III 77
3. REFERENCIAL TEÓRICO 78
3.1. Piaget: Dados Bibliográficos 79
3.2. Vygotsky: Dados Bibliográficos 80
3.3. Contribuições de Piaget e Vygotsky para esta pesquisa 81
3.3.1. Contribuições da Teoria de Piaget 81
3.3.2. Contribuições da Teoria de Vygotsky 83
3.3.2.1. Instrumentos 84
3.3.2.2. Signos 84
3.3.2.3. Os Sistemas Simbólicos e o Processo de Internalização 85
3.3.2.4. A Importância da Socialização e da Linguagem 86
3.3.2.5. Os Níveis de Desenvolvimento 87
3.3.2.5.1. Nível de Desenvolvimento Efetivo ou Real 88
3.3.2.5.2. Nível de Desenvolvimento Potencial 89
3.2.2.6. Zona de Desenvolvimento Proximal 89
3.3.2.7. Conceitos Espontâneo e Científico 90
CAPÍTULO IV 94
4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 95
4.1. Metodologia de Pesquisa 95
4.2. Metodologia de Ensino 98

CAPÍTULO V 105
5. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 106
5.1. Sujeitos da Pesquisa 106
5.2. As Atividades 108
5.2.1. Primeira Atividade 108
5.2.2. Segunda Atividade 116
5.2.3. Terceira Atividade 118
5.2.4. Quarta Atividade 119
5.2.5. Quinta Atividade 120
5.2.6. Sexta Atividade 121
5.2.7. Sétima Atividade 123
5.2.8. Oitava Atividade 124
5.2.9. Nona Atividade 127
5.2.10. Décima Atividade 129
5.2.11. Décima Primeira Atividade 135
5.2.11.1. Octaedro Esférico 135
5.2.11.2. Cubo Esférico 136
5.2.11.3. Tetraedro Esférico 137
5.2.11.4. Dodecaedro Esférico 139
5.2.11.5. Icosaedro Esférico 141
5.2.12. Décima Segunda Atividade 141
CAPÍTULO VI 146
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 147
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 155
ANEXOS 162
Anexo I: Primeira Atividade 163
Anexo II: Segunda Atividade 164
Anexo III: Terceira Atividade 165
Anexo IV: Quarta Atividade 166
Anexo V: Quinta Atividade 167
Anexo VI: Sexta Atividade 168
Anexo VII: Sétima Atividade 169
Anexo VIII: Oitava Atividade 170
Anexo IX: Nona Atividade 171
Anexo X: Décima Atividade 172
Anexo XI: Décima Primeira Atividade 173
Anexo XII: Décima Segunda Atividade 175

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Obra Artística I 7
Figura 2: Obra Artística II 7
Figura 3: Retas não-Paralelas 51
Figura 4: Círculos Máximos 57
Figura 5: Geodésicas Perpendiculares 58
Figura 6: Pólos das Geodésicas 59
Figura 7: Arco Geodésico 60
Figura 8: Ângulo Esférico 60
Figura 9: Triângulo Esférico I..... 61
Figura 10: Lados e Ângulos de um Triângulo Esférico 61
Figura 11: Triângulo Esférico II 62
Figura 12: Triângulo Retângulo Esférico 63
Figura 13: Retângulo 63
Figura 14: Quadrilátero..... 64
Figura 15: Biângulo Esférico 66
Figura 16: Fuso Esférico 66
Figura 17: Triângulo Esférico ABC 67
Figura 18: Tesselação do Plano com Triângulos 73
Figura 19: Tesselação do Plano com Quadrados 73
Figura 20: Tesselação do Plano com Hexágonos 73
Figura 21: Pentágonos não Tesselam o Plano 73
Figura 22: Poliedros de Platão 74
Figura 23: Poliedros de Platão Esféricos 76
Figura 24: I Protocolo Grupo Green Day..... 109
Figura 25: I Protocolo Grupo Bears 110
Figura 26: I Protocolo Grupo Loka e Lokos 110
Figura 27: II Protocolo Grupo Green Day..... 112
Figura 28: II Protocolo Grupo Bears 112
Figura 29: II Protocolo Grupo Loka e Lokos 113
Figura 30: III Protocolo Grupo Green Day..... 121
Figura 31: Transferidor Esférico 129
Figura 32: Octaedro Esférico I..... 134
Figura 33: Octaedro Esférico II 135
Figura 34: Cubo Esférico 137
Figura 35: Tetraedro Esférico 138
Figura 36: Dodecaedro Esférico 139
Figura 37: Icosaedro Esférico 141
Figura 38: Alunos Tesselando a Bola de Futebol 142
Figura 39: Tesselação das Faces dos Sólidos Platônicos na Superfície Esférica 142
Figura 40: Bola de Futebol I 143
Figura 41: Bola de Futebol II 143
Figura 42: Bola de Futebol III 144
Figura 43: Bola de Futebol IV 144
Figura 44: Bola de Futebol V 145
Figura 45: Bola de Vôlei I 153
Figura 46: Bola de Vôlei II 153
Figura 47: Bola de Vôlei III 154

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é apresentar uma seqüência de atividades, por meio de resolução de problemas, numa abordagem qualitativa, visando a investigar como esta seqüência pode contribuir para que alunos do ensino médio apreendam conceitos básicos da Geometria Esférica enquanto resgatam conceitos da Geometria Plana. Para tanto procuramos responder a seguinte pergunta norteadora: ***Que contribuições uma seqüência de atividades que tem como proposta a tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino-aprendizagem de Geometria Esférica?*** Apelamos para a paixão do povo brasileiro, o futebol, para contextualizar o tema no cotidiano dos aprendizes. Neste cotidiano não só a bola de futebol está presente, mas também, a bola de tênis, de vôlei, etc. O uso de materiais concretos como: esferas de isopor, régua flexível, canetas coloridas, compasso, barbantes, alfinetes e outros materiais de fácil acesso, além dos tradicionais lápis e papel, levou o aluno a representar, inspirado nas faces dos sólidos platônicos, base de compreensão para esta tarefa, a bola de futebol em uma superfície esférica. Acreditamos que a utilização destes materiais e a forma diferente da tradicional como é tratado o tema despertam no aluno o interesse para a compreensão não só da Geometria Plana, mas sim de outras Geometrias, neste caso, a Geometria Esférica. Compilamos neste estudo um referencial teórico à luz do sócio-construtivismo, que acreditamos proporciona um trabalho de interação, dinamizando, assim, o ambiente de ensino-aprendizagem. Concluímos, no final desta pesquisa, indícios animadores de que é possível o ensino-aprendizagem da Geometria Esférica, como foi proposto.

Palavras-chave: Geometria Esférica, Geometria Plana, Sócio-construtivismo, Situação-problema.

ABSTRACT

The aim of this study is to present a sequence of problem solving activities through a qualitative approach whose aim is to study how this sequence can allow high school students to learn basic concepts of Spherical Geometry while reviewing Plane Geometry. That is why we are trying to respond to the following basic question: ***"What contributions a sequence of activities that has as a proposal the tessellation of the phases of the platonic solids on superficial sphere can allow for the teaching and learning of basic notions of Spherical Geometry?"*** We appeal to the passion of the Brazilian people, soccer, in order to contextualize the topic in an ordinary way for the learners. In this ordinary example, not only a soccer ball is included, but also a tennis ball, volleyball, etc. The use of tangible materials such as polystyrene spheres, flexible rulers, colored pens, compasses, strings, pins and other materials that are easy to find, in addition to the traditional pen and paper, can all be used by students in learning about the phases of platonic solids, basis for understanding this task, to tessellate a soccer ball on a spherical surface. We formulate the hypothesis that the utilization of these materials and the departure from traditional methods that have been used will stimulate the interest of the students and create more understanding not only of Plane Geometry, but also Spherical Geometry as in the example above. We have compiled in this study a theoretical reference that includes socioconstructivism, which we believe created more interaction, and therefore made the teaching and learning environment more effective. We ended, in the end of this research, exciting indications that it is possible the teaching-learning of the Spherical Geometry, as it was proposed.

Keywords: Spherical Geometry, Plane Geometry, Socioconstructivism, Problem Solving

APRESENTAÇÃO

Todos nós temos um sonho. Uns de construir uma família. Outros de conseguir um bom emprego. Muitos de ganhar na loteria. Poucos de plantar uma árvore. O meu? ... Ser um educador-pesquisador. Há anos tenho este sonho.

Desde os meus tempos de primário era apaixonado pelos números e resolvia problemas como ninguém, tanto que nas festas de finais de ano na escola era premiado por ter sido um bom aluno. Esta paixão me acompanhou pelo ginásio e também no colegial. Não restou alternativa senão fazer um curso superior que cuidava das ciências exatas. No primeiro ano do curso fui obrigado a trabalhar, pois não teria como prosseguir nos estudos sem recursos financeiros para manter-me. Era o ano de 1973. Deparei-me com um anúncio de jornal que tratava de um concurso público na Câmara Municipal de Santo André. Entre muitos candidatos fui aventurar-me a uma das três vagas que havia. Saí desolado da prova, pois achei que não tinha ido bem em Conhecimentos Gerais e em Língua Portuguesa. Pensei, não vou ver o resultado, pois entre tantos candidatos, achei que não teria chances. Mas como todo bom brasileiro, curioso que é, fui verificar o resultado. Qual não foi a surpresa quando verifiquei que lá estava meu nome. Surpresa maior ainda foi a de constatar que ele era o primeiro da lista. Já empregado, tive acesso à prova do concurso e pude então constatar o porquê de ser o primeiro colocado. Dos dez problemas matemáticos que constavam na prova, acertei todos. Quando meus alunos me perguntam onde irão usar o que está aprendendo em Matemática, conto-lhes esta história.

Era um ótimo emprego, mas para crescer na carreira tinha que ser graduado em Ciências Econômicas e Ciências Contábeis. Terminada a licenciatura em Matemática, prossegui meus estudos graduando-me nos cursos que me permitiram fazer carreira como funcionário público, o que, de uma certa maneira, me fez afastar, temporariamente, do meu sonho. Novos empecilhos houve. Depois de dez anos formado é que tive a oportunidade de adentrar em uma sala de aula, por um convite de uma amiga minha, que na época estava grávida, e pediu-me para que eu fosse substituí-la. Este fato ocorreu em 1986 e desde então, continuo lá, na mesma escola onde comecei. Quando quero saber quantos anos tenho de magistério, pergunto para minha amiga: *Quantos anos têm sua filha*? Eu me sentia feliz em uma sala de aula, mas não podia abandonar meu outro emprego, já que tinha firmado uma carreira sólida. Então, trabalhava na Câmara Municipal durante o dia e à noite, por prazer, ia ministrar aulas de matemática. No ano de 2000 aposentei-me na Câmara Municipal de Santo André. Era uma oportunidade para realizar meu sonho, pois

teria o dia livre para realizar minha pesquisa. Mas como bom funcionário que era fui contratado para trabalhar mais dois anos. Como a oferta de salário era irrecusável adiei a realização do meu sonho por mais este período. Passados estes dois anos senti-me livre e pronto para a realização do meu sonho. Dirigi-me então a Unesp, onde tudo começou. Durante um ano e meio fui aluno especial em Educação Matemática naquela universidade. Cursei disciplinas ministradas pelos Drs. Rômulo Lins, Mirian Penteado Godoy e Claudemir Murari. Foi na disciplina deste último, Fundamentos da Geometria, que me deparei pela primeira vez com a Geometria Esférica. Pensei, meu Deus, lido com a Matemática faz mais de vinte anos e só agora é que estou conhecendo que existem outras Geometrias, além daquela que já conhecia: a Euclidiana. Isto começou a incomodar-me e a questionar-me: *Será que só eu não conheço esta Geometria?* Percebi que não, que entre os vinte alunos que cursavam aquela disciplina, a maioria também não conhecia. Interessei-me pelo assunto e entre os variados temas que a disciplina oferecia para o trabalho final de conclusão de curso um deles tratava das Geometrias Não-Euclidianas. Mais que depressa me propus a realizar o trabalho neste tema e comecei a acreditar em amor à primeira vista. Fiquei apaixonado pela Geometria Esférica.

Mas o fato de eu ser apresentado a esta Geometria depois de vinte anos ainda me incomodava e continuei a investigar mais. Percebi então, nas dissertações já realizadas no Brasil que tratam do assunto, que esta Geometria é novidade para muitos e o mais surpreendente é que entre estes muitos, estão professores de Matemática.

Por motivo de força maior não pude continuar na Unesp. No ano de 2004 entrei no Programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática na PUC-SP. Fiquei indeciso, pois se ficasse um ano a mais na Unesp, teria grandes chances de entrar no Programa. Numa conversa informal com o Professor Ubiratan D'Ambrósio entre continuar na UNESP ou ficar na PUC, este categoricamente afirmou: *Você não tem nada a perder, se ficar na UNESP ganha e se vier para a PUC, ganha também.* Era o ano da instituição da bolsa de estudo pelo Estado e este fato, mais a conversa com o Dr. D'Ambrósio me fizeram optar pela PUC. As palavras da Profa. Dra. Miriam Penteado Godoy, também me encorajaram nesta decisão, já que ela enalteceu a gama de professores da PUC, dizendo-me: *João Pedro vá sem medo, lá há grandes mestres* - citando o nome de alguns deles que, após a minha entrada no Programa, pude constatar que ela tinha razão.

Inicia-se então no ano de 2004, a minha jornada na PUC, início também de um sonho a realizar.

Fui apresentado à minha orientadora Dra. Celina Abar que logo no nosso primeiro encontro percebeu minha paixão pela Geometria Esférica e prontamente apoiou a minha idéia de elaborar minha pesquisa neste tema. Mas um problema surgiu: Havia pesquisas já realizadas sobre este assunto, inclusive uma, recentemente defendida na própria PUC, intitulada *"Geometria Esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar"*, de autoria de Irene Pataki, defendida no ano de 2003. Mas na primeira disciplina cursada no Programa, ministrada pelo Dr. Wagner este problema foi sanado, pois pude perceber que não importa a quantidade de pesquisas num determinado assunto, o que realmente importa é que você veja o problema sob uma nova perspectiva, ou seja, com um novo olhar, neste caso, com o meu olhar.

Passei então a inteirar-me das dissertações já desenvolvidas no assunto, refletindo sobre o que elas poderiam contribuir para a minha pesquisa e eu como pesquisador, que contribuição poderia oferecer com o meu trabalho.

Revisadas as investigações realizadas na última década no Brasil que tratam das Geometrias Não-Euclidanas, encontrados a problemática, o referencial teórico e as metodologias de pesquisa e ensino norteadoras dessa pesquisa, surgiu a seguinte pergunta diretriz:

Que contribuições uma seqüência de atividades que tem como proposta a tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino-aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica?

Procurando responder a esta pergunta este trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo I constam a Apresentação, a Problemática e os Objetivos. Constam, também, as revisões de algumas investigações sobre Geometrias Não-Euclidianas realizadas no Brasil na última década.

No Capítulo II são apresentados os aspectos históricos das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas e ainda noções básicas de Geometria Esférica.

No Capítulo III, aborda-se o referencial teórico, em especial, Piaget e Vygotsky, adotados como suporte para este trabalho.

No Capítulo IV são mostradas as metodologias de pesquisa e de ensino utilizadas. Optou-se por uma pesquisa qualitativa, cujos dados analisados originaram-se da aplicação de uma seqüência de atividades a respeito de situações-problema.

No Capítulo V é apresentada a seqüência de atividades, como também, sua análise através de uma abordagem qualitativa.

No Capítulo VI são feitas as considerações finais.

Capítulo I

1. APRESENTANDO A PESQUISA

Acredito que uma das maneiras de tornar o ensino da Geometria Esférica significativo é inseri-la no contexto cultural do aluno, de tal maneira a levá-lo a construir um artefato que possa não somente proporcionar-lhe o prazer de ter construído alguma coisa pelas suas próprias mãos, como também o prazer de estar mostrando este artefato a outras pessoas e sentir o orgulho de dizer: *"olha, fui eu quem fez"*.

Então, qual seria este elemento de cultura, que faça parte do desejo do aluno do ensino médio, para uma possível introdução aos conceitos elementares da Geometria Esférica? Como começar o ensino desta Geometria? Talvez lançando uma pergunta que desperte o interesse do aluno, que desperte a sua curiosidade, que seja significativo e que tenha a ver com o seu dia a dia. Que tal esta: Vamos tesselar[1] a superfície esférica de modo que esta superfície tenha a aparência de uma bola de futebol?

No Brasil o futebol é a alegria do nosso povo. É a alegria das crianças e estudantes brasileiros. A bola representa a expressão máxima do futebol. Toda criança e todo adolescente têm a bola como um conceito internalizado desde seus tenros anos. Porque então não tomar este artefato que é a bola de futebol como ponto de partida para o estudo de uma nova Geometria?

A Copa do Mundo cativa a população do mundo inteiro. A Alemanha, país que sediou a Copa do Mundo de 2006 tem no programa cultural do evento, um convite que consiste em uma visita ao mundo do futebol. Este mundo está dentro de uma bola, criada pelo artista austríaco André Heller. Neste aspecto:

> Todos sabem que o mundo é uma bola. Mas o artista André Heller, contratado para o programa cultural da Copa do Mundo de 2006, parece que quis provar o inverso e instalou o mundo – ou falando artisticamente, fez uma instalação do mundo, ao menos o do futebol, dentro de uma bola.(...) A 15 metros do chão, o globo de 60 toneladas apresenta-se de dia como uma enorme bola de futebol e à noite, iluminado por 20 mil lâmpadas LED, brilha como o planeta Terra.[2]

É inegável a presença, tanto da bola, como do globo terrestre em nosso cotidiano e ambos ao mesmo tempo é um e o outro, na bela obra de arte de André Heller. As figuras 1

[1] Tesselar uma superfície (plana ou esférica) significa cobrir esta superfície com figuras (planas ou esféricas), de modo que não existam espaços entre elas e nem sobreposições.
[2] retirado do site: www.dw-world.de/brazil/, acessado em 12.09.2005

e 2 abaixo mostram esta obra apagada (Fig. 1), a bola de futebol, e iluminada (Fig. 2), brilhando no esplendor do azul do planeta terra.

Figura 1[3]: Obra Artística I

Figura 2[4]: Obra Artística II

A bola de futebol (e o globo terrestre) que contextualiza o tema esteve presente também no ano de 2005 em outra paixão do povo brasileiro: o carnaval.

É tão real a forma esférica no cotidiano do povo brasileiro que a tradicional escola de samba Império Serrano, na Comissão de Frente, trouxe para a Marquês de Sapucaí (2005), o globo terrestre. Embora se saiba que a terra é achatada nos pólos, ali, na avenida, ela rolava sem nenhuma saliência, refletindo assim, o conceito cotidiano das pessoas, que a terra é redonda.

Em São Paulo, o mesmo ocorreu. O globo terrestre surgiu na passarela do Sambódromo. A Escola X-9 (2005) trouxe-o num carro alegórico, dando um brilho maior às suas alegorias. Mais uma vez a forma esférica enchia os olhos do povo.

No Rio a Caprichosos de Pilares (2005) trazia uma ala toda com adornos de bola de futebol na cabeça de seus integrantes, numa explosão de hexágonos brancos e pentágonos pretos, figuras esféricas que constam da bola de futebol. *Será que os nossos alunos sabem que estas figuras são esféricas?* Acredito que não, mas devem saber o que é um pentágono e o que é o hexágono, o que, possibilita uma comparação entre a Geometrias Euclidiana e Esférica. Esta escola também trazia, em um dos seus carros, um globo terrestre camuflado, pois ao mesmo tempo em que parecia ser o globo, era também uma bola de futebol. A magia desta festa, na imensidão de suas cores, brilhos, paetês, purpurina e alegria,

[3] Ibidem
[4] Ibidem

contemplam o povo brasileiro, com as maravilhas que só uma outra festa pode oferecer: o futebol.

É inegável a presença da bola de futebol e do globo terrestre em nosso dia a dia, o que, não pode deixar-nos calado à seguinte questão: *Porque a forma esférica tão presente no nosso cotidiano está ausente das grades curriculares do ensino do nosso povo?*

Acredito que a tesselação na superfície esférica das faces do icosaedro truncado (bola de futebol), seria o artefato ideal a ser construído para o objetivo a que estou me propondo, qual seja, dar significado à Geometria Esférica para os alunos do ensino médio.

A Geometria de Riemman[5], acredito, levará o aluno à Geometria que tem a forma parecida com o espaço em que ele vive, respira e se move. Utilizo a Geometria (espaço e plano) por que ela se presta muito bem para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas que sendo feitas com os próprios olhos e mãos pode ser mais convincente. É neste ponto que entram os teóricos por mim contemplados, pois todos eles, de uma forma ou de outra, sustentam que o aluno deve ser o elemento ativo da construção do seu conhecimento.

Desta maneira, os teóricos Piaget e Vygotsky darão sustentação para o desenvolvimento deste trabalho. Recorrerei também a outros autores, entre eles, Lénárt (1996), para buscar as ferramentas necessárias para a construção do conhecimento matemático que permeia o ensino desta Geometria. É da sua obra também, que veio a inspiração para a feitura de toda a seqüência de atividades desta pesquisa. Este trabalho me fez mergulhar nas idéias destes teóricos sem, entretanto, nelas afogar-me.

De uma maneira geral, através de leituras que venho realizando em Piaget e Vygotsky, vejo o educando como um sujeito inteligente, social e que possui seus próprios desejos e a sua cultura. Vejo também que, para que um ambiente de aprendizagem se torne facilitador e significativo deve, minimamente, atender duas condições. Em primeiro lugar, a aprendizagem tem que ter significado para o aluno e este significado deve estar vinculado à sua funcionalidade, ou seja, os conhecimentos adquiridos devem ser efetivamente utilizados. Em segundo lugar, o processo mediante o qual se produz a aprendizagem requer uma intensa atividade por parte do educando, tanto de natureza ""mentefatos"[6] como de natureza "artefatos"[7]. Por esta razão a atividade pedagógica deverá ter cunho investigativo, uma vez que ela favorece a construção de objetos, a exploração, a descoberta de conceitos

[5] Geometria de Riemann = Geometria Esférica
[6] D'Ambrosio (2003) mentefatos: pensamento abstrato
[7] D'Ambrosio (2003) artefatos: mentefatos expresso em forma concreta.

matemáticos embutidos, a conjectura de situações que surgem no decorrer da intervenção, sejam elas intencionais ou não. O aprendiz, desta maneira, torna-se um sujeito ativo na sua aprendizagem, apropriando-se do saber, ao tornar esse processo uma viagem única e intransmissível.

Espero que o aluno construa os conceitos básicos de Geometria Esférica, pondo a "mão na massa", ou seja, trabalhando com materiais concretos, como: esferas de isopor, barbantes, elásticos coloridos, alfinetes, bexigas etc., corroborando, assim Maltempi (2004), quando diz: *"O aprendizado deve ser um processo ativo, em que os aprendizes colocam a mão na massa (hands-on) no desenvolvimento de projetos, em vez de ficarem atentos à fala do professor"* (p. 265).

Diz ainda este mesmo autor, que quando o aluno se sente compenetrado em construir alguma coisa feita por ele mesmo e também de seu interesse, ocorrem situações favoráveis ao aprendizado.

Este trabalho de construção de conceitos básicos de Geometria Esférica se dará em grupos de pelo menos três alunos. Acredito que a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) terá muita importância no trabalho em grupo, pois os alunos poderão uns auxiliar os outros, não podendo perder de vista a contribuição do professor, que estará interagindo como mediador na produção do conhecimento de seus alunos, proporcionado um ambiente de aprendizagem favorável à investigação e à descoberta. Não estou querendo dizer que a ZDP emerge apenas porque as pessoas trabalham em grupos, mas sim que é possível que ela apareça, o que vai ao encontro da ZDP desenvolvida por Vygotsky (1991) que, para ele, é aquilo que a criança, além de seu desenvolvimento atual pode fazer com o auxílio de adultos, ou ***junto com outras crianças*** (o grifo é meu).

O professor também, como mediador neste processo, não pode considerar o aluno como uma tábula rasa. Deve sim, ouvir o aluno a respeito do seu cotidiano, e usar isto como um forte argumento para a construção de conceitos científicos. Deve considerar que o aluno já traz consigo o œnceito cotidiano do que é uma bola de futebol. Nada mais evidente do que se aproveitar deste conceito para falar da esfera, ou seja, para cientificamente conceituar o que é uma esfera.

Este conceito espontâneo que o aluno já traz consigo, sobre o que lhe vai ser ensinado, será de suma importância para o aprendizado, muito embora, tais concepções sejam consideradas errôneas do ponto de vista científico; estes conhecimentos sempre devem ser levados em consideração pelo professor.

Aprender uma nova Geometria não significa deixar a Geometria Euclidiana ao descaso, ao contrário, significa resgatá-la. Para apreensão de conceitos em Geometria Esférica se faz necessário sua base de compreensão, ou seja, os conceitos da Geometria Euclidiana.

O objetivo deste trabalho é dar minha contribuição no sentido de mostrar que é possível e interessante introduzir o ensino e aprendizagem da Geometria Esférica. Um passeio por outras dissertações que tratam desta Geometria ajudaram-me a trilhar um caminho, diverso daquele então até agora trilhado.

1.1. Problemática

A Geometria, parte essencial da Matemática é fascinante. Porém, a forma como ela é ensinada, quando é ensinada, parece não causar fascínio.

Nas avaliações[8] do ensino fundamental feita pelo Estado de São Paulo, foi quase nulo o acerto de questões em assuntos geométricos por parte de nossos alunos. Eles não sabem Geometria? Como poderiam saber se não aprenderam.

Neste aspecto, Lorenzato (1995) assim se pronuncia: *"a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la"*. Afirma também que *"é preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro da Geometria escolar"*.

Embora este quadro seja de uma década atrás, parece que não houve mudanças, pois em uma pesquisa que Leite (2004) realizou com 17 professores de 5ª. à 8ª. séries, de 17 escolas da rede pública de ensino da cidade de São Paulo, que dão aula de ciências há no mínimo dez anos, constatou que setenta e seis por cento dos pesquisados afirmam que o Sol é plano assim como a Terra e *"que mesmo conhecendo o modelo teórico que diz que nosso planeta é esférico, eles não conseguiam explicar porque isso é possível"*, conta Leite. Conta mais: *"eles não concebiam um universo tridimensional e não sabiam como se posicionar nele. Como conseqüência eles têm dificuldades de explicar a seus alunos fenômenos como as estações do ano, as fases da Lua e os eclipses"*.

Fica evidente então de acordo com Leite (2004) que a falta de conhecimento da Geometria Esférica, implica também na má qualidade do ensino de Astronomia, já que para localizar um astro no céu precisamos usar de um sistema de coordenadas esféricas.

[8] SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (1997).

Barrantes e Blanco (2004) também evidenciam que este quadro infelizmente não mudou. Vão mais longe, dizendo que a situação perdura desde a década de 70. Estes autores assim se pronunciam:

> Na década de setenta, a Matemática Moderna, em seu auge, fez com que a Geometria, que até esses anos tinha sido uma matéria importante, passasse a ser uma matéria escolar de segundo plano, ocupando os últimos capítulos dos livros texto, aos quais, na maioria das vezes não dava atenção (p. 37).

Estes mesmos autores afirmam que os professores formados nesta época tinham conhecimento nulo em Geometria. Assim não sabiam como ensinar, ocasionando, desta feita, um círculo vicioso.

Prosseguem dizendo que nos dias atuais estas circunstâncias deveriam ter se modificado face às influências das propostas curriculares aprovadas na década de noventa. Fato que não ocorreu e citam:

> [...] nosso estudo mostra que, apesar dos esforços dos investigadores para apresentar novos métodos, recursos ou materiais sobre ensino da Geometria, muitos estudantes continuam a chegar às Universidades com as mesmas experiências, falta de conhecimentos e com concepções sobre a Geometria e o seu ensino de anos atrás, o que indica que se continua a ensinar da mesma maneira de antes de tais reformas (p. 37).

Uma avaliação recente feita pelo SARESP (2000), mostrou também um pequeno número de acertos em questões que tratavam de Geometria. Nesta avaliação participaram 32.568 alunos do terceiro ano do ensino médio na qual se constatou que grande parte destes alunos apresentava muita dificuldade nas questões que cuidavam de figuras planas e não-planas. Verificou-se também nesta avaliação que os alunos misturavam conceitos trabalhados desde o ensino fundamental (como o de perímetro e área) e, ainda apresentaram o pior desempenho médio no conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo.

A grande realidade é que a Geometria é deixada em segundo plano e entre muitas razões estão sua ausência quase que completa no currículo escolar real, isto é, aquilo que efetivamente acontece na sala de aula.

Dante (1985) afirma que:

> a) A maioria dos professores e dos livros didáticos dão mais importância à Aritmética e à Álgebra, deixando a Geometria à margem.

> b) Deixar os assuntos geométricos para o final do ano letivo é prejudicial pois nem sempre sobra tempo hábil para ensiná-los.
> c) Para alguns professores, alguma Geometria é necessária ser ensinada, mas não sabem exatamente qual.
> d) A formação inicial do professor e insuficiência de formação continuada, faz com que muitos professores não ensinem Geometria.

Lorenzato (1995), nesta mesma linha de raciocínio, lista alguns motivos que determinam o descaso para com a Geometria, quais sejam:

> a) a falta de conhecimentos geométricos necessários para a perfeita efetivação de suas atividades profissionais, por parte dos professores, decorrente de uma formação deficiente;
> b) a elevada importância que se dá ao livro didático, que apresenta o ensino da Geometria como uma coleção de definições e fórmulas sem nenhuma ligação com o cotidiano do aluno e totalmente desligado dos fatos e idéias históricas, havendo ainda, outros que apresentam apenas um número mínimo de aplicabilidade ao mundo físico. Além disso, a Geometria é quase sempre apresentada na última parte do livro, aumentando a possibilidade de não vir a ser estudada por falta de tempo letivo;
> c) o desconhecimento, por parte dos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, da escola e do professor sobre a importância desse conhecimento para a vida do aluno;
> d) a falta de disciplinas que trabalhem a Geometria nos cursos que formam professores para atuarem no ensino básico;
> e) a ausência de propostas metodológicas de ensino adequadas para desenvolver no aluno, as habilidades e competências decorrentes do aprendizado da Geometria;
> f) a apresentação da Geometria de forma desligada da Aritmética e da Álgebra, como também, de outras áreas de conhecimento;
> g) a inversão de momentos, quando o ensino é feito partindo de situações particulares para situações gerais, quando o indicado seria o contrário (*apud* Gouvêa, 2005, p. 6).

Pavanello (1989), assim se manifesta: *"este costume de programar a Geometria para o final do ano letivo é, de outro modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que pude observar, abordam esses temas quase sempre por último"*.

Embora todos os fatores citados contribuem para um ensino de má qualidade, parece que o mais angustiante é a *maneira que usamos para ensinar Geometria*.

Dante (1985) nos diz que em todos os níveis de ensino, é comum que professores e textos resolvam algum "exercício – modelo" mostrando como se faz, pedindo em seguida que o estudante resolva dezenas de problemas semelhantes. Por "falta de tempo" preferem o "é assim que se faz" ao invés de deixar que os estudantes pensem por si próprios, experimentando suas idéias, dêem ouvidos à sua intuição. Melhor seria se o professor fosse

mais um incentivador, um burilador das idéias e iniciativas dos estudantes. Esta ênfase no "é assim que se faz", que encontramos no ensino atualmente, vem acompanhada de um exagero na repetição e na imitação. A justificativa apresentada pelo professor é a de que "a repetição leva à fixação". Sim, mas leva à automatização e às mecanizações cegas. Apesar de certa necessidade de automatização, um caminho mais significativo é o de aproveitar a curiosidade do aluno, especialmente nos primeiros níveis, incentivar suas iniciativas de exploração e redescoberta de conceitos, leis, padrões de regularidade, etc.

Facilitar a participação ativa do aluno na resolução de problemas através do pensamento reflexivo, incentivá-lo a fazer perguntas, propor outras soluções a um determinado assunto, justificar suas afirmações, explorar de modo independente uma determinada questão, elaborar pequenos projetos de pesquisa e redigi-los, tudo isso pode auxiliar o professor nesse mister. Mas isto não é suficiente, é preciso mais.

Os métodos tradicionais até então usados, levam sempre, parodiando a própria matemática, a um denominador comum, ou seja, a lugar nenhum.

É neste contexto que este trabalho toma força, pois a Geometria até agora referida foi a Geometria Euclidiana. Sendo assim uma pergunta se faz necessária para dar continuidade a este trabalho: *Se a Geometria escolar é a Geometria Euclidiana e esta Geometria não é ensinada como deveria, como estaria então o ensino das Geometrias Não-Euclidianas? Por quê estas Geometrias não são ensinadas?*

Parece óbvio que não é difícil dar uma resposta a esta pergunta. Se a Geometria que consta dos livros escolares, do currículo educacional é a Geometria Euclidiana e esta está em descaso, imagine então em que nível de conhecimento por parte de nossos alunos, especialmente dos ensinos fundamental e médio, estaria uma Geometria que muitos, inclusive os próprios professores de Matemática, nunca ouviram falar.

Eu, como um desses professores, deparei-me pela primeira vez com a Geometria de Riemman cerca de três anos atrás o que me fez sentir um pouco desolado e também preocupado, pois trabalhava há mais de vinte anos como professor de Matemática e, sendo assim, achava que era inadmissível não conhecer esta Geometria. Mas esta desolação e preocupação foram aos poucos desaparecendo, visto que eu não era uma gota do oceano. Havia muitas outras gotas neste oceano. Comecei a investigar este assunto e percebi que muitos professores de Matemática, assim como eu, também não tinham conhecimento desta Geometria.

A cada vez que meu contato com a Geometria Esférica tomava maiores proporções percebia que o número de pessoas que a ignorava era maior do que eu imaginava. Pensei

então: alguma coisa deve ser feita! Como uma Geometria que pode explicar tantos fatos relacionados com a física, com a marinha, com a aviação, enfim com tantas utilidades, pode estar fora da sala de aulas dos nossos alunos. Comecei então prestar atenção nos inúmeros livros de Matemática, e por incrível que pareça, em nenhum deles é mencionada a Geometria numa superfície esférica, tanto no ensino fundamental como no médio. Somente nos livros do ensino médio é que se fala da Esfera, mas não da Geometria na sua superfície, e sim do sólido esférico, o qual não é o objeto do nosso estudo. O que queremos pesquisar é a Geometria da superfície esférica, a superfície que tem a forma da terra em que vivemos e que, infelizmente, não consta dos nossos currículos escolares, nem do ensino fundamental e nem tão pouco do médio. Este é um problema muito sério que não pode ficar sem solução.

Ao ingressar na PUC, no ano de 2004, comecei a participar do grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática – TecMEM. Minha orientadora sugeriu que eu fizesse minha pesquisa baseada em uma *WebQuest*. Preparei um artigo intitulado "*WebQuest - Uma proposta metodológica para o ensino-aprendizagem da Geometria Esférica"*, o qual apresentei no "VIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM", em novembro de 2004. Percebi, porém que a Geometria Esférica que eu queria ensinar através da manipulação de objetos concretos, não se adequava a uma *WebQuest* que é, segundo seu criador Bernie Dodge: "*uma investigação orientada na qual algumas ou todas as informações são originadas de recursos da Internet"* (Bernie, 1995)[9]

Abar[10], assim se manifesta a respeito da *Webquest:*

> A *Webquest* é uma metodologia inovadora de fazer uso da Internet e de outros recursos de multimídia de modo construtivo [...] Sempre é bom lembrar que a *webquest* é um recurso metodológico presencial. O acompanhamento e a orientação do professor no desenvolvimento da Tarefa são fundamentais.

Meu objetivo era trabalhar com objetos que pudessem ser manipulados pelo aluno, pensamento que corrobora Lénárt (1996) que acredita na exploração da Geometria Esférica através de material concreto. Para ele, manuseando estes materiais o aluno experimenta, mede e realiza comparações com os conceitos de Geometria Plana.

[9] http://webquest.sdsu.edu/webquest.html , acessado em 23.05.05
[10] http://webquest.sp.senac.br/textos/quem, acessado em 23.05.05

Em Lénárt (1996), descobri atividades que estavam de acordo com as minhas pretensões, entre elas, a tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica, base da compreensão para se representar a bola de futebol. Comecei assim adaptar aquelas atividades, de modo que meu objetivo fosse atingido, ou seja, ensinar conceitos da Geometria Esférica resgatando conceitos da Geometria Euclidiana e, com estas informações, tesselar as faces dos sólidos platônicos na superfície esférica e a partir delas, a bola de futebol.

Comecei aplicando o clássico problema do urso[11], de forma adaptada, no meu grupo de pesquisa e constatei que entre dez participantes, oito apresentaram solução como se estivessem trabalhando na superfície plana.

O problema apresentado:

"Um navio parte de um determinado ponto e navega por 100 milhas em direção ao sul. Depois vira ao leste e navega mais 100 milhas. Em seguida vira novamente e navega por mais 100 milhas em direção ao norte. Descreva, através de uma representação gráfica, a trajetória do navio".

Apenas dois descreveram a trajetória do navio em uma superfície esférica correta. Destes, constatei depois, que um deles estava às vésperas de defender dissertação em Geométrica Hiperbólica, sendo óbvio então que conhecesse as Geometrias Não-Euclidianas. Em uma das respostas dadas um participante anotou na folha da questão proposta: *"Considerei a navegação em linha reta. (trajetória retilínea)"* Este problema deixa claro que as pessoas que o fizeram poderiam até conhecer a Geometria Esférica, mas suas cabeças estão impregnadas da Geometria Euclidiana que até esquecem da existência de outras Geometrias.

Em julho de 2005, ministrei um mini-curso sobre Geometria Esférica no XI Encontro Baiano de Educação Matemática intitulado *Geometria Esférica de Forma Lúdica*. Presentes estavam 13 universitários e professores do ensino fundamental e médio da área de ciências exatas. Apresentei a eles o problema do urso. O mesmo resultado foi constatado. Duas pessoas apenas apresentaram a resposta correta. Uma delas porque estava fazendo uma monografia sobre Geometria Esférica. A outra que também respondeu corretamente, tinha um motivo muito especial, o qual, achei muito engraçado. No período da tarde também havia um outro mini-curso sobre Geometrias Não-Euclidianas (o meu ocorreu no período da manhã). Inscrito que estava, pois estava pesquisando estas

[11] Este problema consta em Lénárt (1996) e Martos (2002).

Geometrias, lá fui eu fazer o curso. Na entrada da sala estava este outro aluno que havia respondido corretamente a pergunta. Brinquei com ele questionando: *Você gosta das Geometrias Não-Euclidianas, pois também está inscrito neste curso, não é meu rapaz?* E ele respondeu: *Não professor, eu não vou assistir às aulas, sou quem vai dar o curso*. Não preciso nem mais explicar o porquê deste aluno ter dado a resposta certa.

Ao final de seis horas do mini-curso por mim ministrado, divididos em duas manhãs, foi solicitado aos participantes manifestar, anonimamente, uma opinião sobre o trabalho desenvolvido.

Alguns pronunciamentos deixam claro o desconhecimento da Geometria Esférica, que abaixo transcrevo:

> *"Esse mini curso foi muito interessante porque introduziu um assunto que até então eu não conhecia. Foi dado de forma clara, dinâmica e objetiva, tanto que permitiu com que houvesse melhor entendimento para o aprofundamento no assunto"*.
>
> *"O primeiro dia do curso foi bem interessante, fiquei sabendo de coisas da Geometria que não sabia. Por exemplo, que há uma grande relação entre as Geometrias Euclidiana e Esférica, fazendo com que eu tivesse uma outra forma de observar a Geometria Plana"*.
>
> *"Eu gostei do curso, porquê foi mais uma Geometria que vou tentar aprender, mas acredito que conseguirei. Essa Geometria será a quinta que irei estudar e estou entusiasmada porquê é um estudo diferente das outras Geometrias, e, além disso, adoro quando vejo coisas novas, como a Geometria Esférica"*.
>
> *"Tinha medo e dúvida em fazer minha monografia na área de Geometria. Adorei ter conhecido uma outra área da Geometria que ainda não havia explorado e acho que em um mini curso não dá para se aprender tudo, porém, serviu para me definir melhor"*.

> *"Gostei do mini-curso. A respeito do conteúdo gostei muito e achei interessante conhecer uma nova Geometria"*.

Um outro pronunciamento mostra que o participante conhecia a Geometria Esférica e que o mini-curso proporcionou-lhe uma melhor compreensão desta Geometria. Conforme o seguinte relato:

> *"O curso foi legal. Despertou-me para conhecer melhor a Geometria Esférica"*.

Alguns outros relatos mostram que a metodologia aplicada no mini-curso indica indícios de resultados satisfatórios para o ensino-aprendizagem desta Geometria. Eis os relatos:

> *"Achei muito interessante o trabalho. É uma forma inovadora de se ensinar Geometria, desprendendo-se de modelos tão ultrapassado que ainda existem hoje"*.

> *"Eu gostei do mini-curso. Mostra relações importantes entre os sólidos geométricos e planificações na Geometria Esférica. Traz um material novo: compasso e transferidor esférico"*.

> *"O curso foi excelente! Encontrei o que estava procurando. Meu projeto de pesquisa estava faltando um pouco desta parte metodológica prática que foi desenvolvida na sala.*

Tendo em vista a obtenção de resultados positivos no mini curso e constatado mais uma vez, através dos depoimentos que acabamos de citar, que muitos ainda não conhecem esta Geometria, me senti encorajado a prosseguir minha pesquisa nesta linha, qual seja, propor atividades envolvendo a Geometria Esférica, por intermédio de materiais concretos, visto que os depoimentos mostraram também que estes materiais indicaram indícios de ensino-aprendizagem da Geometria Esférica.

Quando do IX EBRAPEM[12] - FEUSP, na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, nos dias 12 a 14 de novembro de 2005, de posse da construção das bolas de futebol tratada no Capítulo V desse trabalho, apresentei estes artefatos neste encontro, através de Comunicação Oral. O trabalho apresentado tinha por título *"Nas trilhas da Geometria Esférica"* e como debatedora a Dra. Adair Mendes Nacaratto, que resumiu minha apresentação nas palavras *"Estou encantada com o seu trabalho"*, o que me deixou lisonjeado e feliz. Fiquei feliz também com os comentários dos estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática presentes no Encontro e mais uma vez, encorajado de que estava, parodiando o próprio título da minha apresentação, nas trilhas da Geometria Esférica.

Como explanado, a Geometria Não-Euclidiana que quero abordar é a Geometria Esférica que não consta dos currículos educacionais brasileiro, o que para mim, é descabido, pois acredito que seu estudo além de proporcionar o conhecimento de outras Geometrias, contribui para dar significado à Geometria de Euclides.

1.2. Objetivos

Com este trabalho pretendo atingir alguns objetivos, com o fim de responder a minha questão de pesquisa: ***Que contribuições uma seqüência de atividades que tem como proposta a tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino-aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica?***

1.2.1. Objetivos de Natureza Matemática

Para o Aluno

- Construir conceitos básicos de Geometria Esférica.
- Revisitar conceitos da Geometria Euclidiana.
- Comparar semelhanças e diferenças entre estas Geometrias.

[12] IX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática

Para o Professor

? Propor uma alternativa de se introduzir noções básicas de Geometrias Euclidiana e Esférica, de maneira a dispensar o método tradicional: giz, apagador e quadro-negro.

1.2.2. Objetivos de Natureza Educacional

Contribuir para que professor e aluno tenham instrumentos e recursos didáticos de modo que permitam uma integração interdisciplinar com as seguintes disciplinas:

Geografia: Conceitos desta disciplina que acreditamos irão surgir no desenvolvimento das atividades.

Desenho Geométrico: Resgate do uso da régua e do compasso.

Educação Artística: Criar e colorir as bolas de futebol, no sentido de desenvolver os sensos artístico, criativo e estético.

1.3. Algumas Dissertações que tratam das Geometrias Não-Euclidianas

Acreditamos[13] que uma revisão abarcando algumas dissertações que tratam das Geometrias Não-Euclidianas ajudar-nos-á a trilhar um caminho com o propósito de auxiliar na resposta à nossa pergunta diretriz.

Assim, apresentamos a seguir cinco dissertações cujo enfoque são as Geometrias Não-Euclidianas, as quais, passamos a analisar.

Autora:
ARLETE DE JESUS BRITO
Título:
Geometrias Não-Euclidianas: Um Estudo Histórico-Pedagógico

[13] A partir daqui usaremos a primeira pessoa do plural, pois este não é um trabalho individual e sim de muitas pessoas.

Tipo:

Dissertação de Mestrado (UNICAMP / CAMPINAS-SP – 1995)

Objetivo da Pesquisa

A autora busca em sua dissertação:

- ✍ Desenvolver e propiciar aos alunos de um curso de graduação em Matemática, um ambiente no qual eles percebam a si e ao conhecimento científico como sendo histórico e culturalmente condicionados.
- ✍ Compartilhar com os demais elementos do grupo as posturas filosóficas frente ao mundo, que permitam criar um pensamento crítico às suas concepções matemáticas, com o propósito de superá-las.

Metodologia

O estudo desenvolve-se em forma de um diálogo imaginário entre a professora e um grupo de alunos de uma disciplina de Geometrias Não-Euclidianas, do curso de licenciatura em Matemática. Esse processo permite que sejam expostas diferentes posturas frente aos problemas analisados pelo grupo, e permite também, uma melhor avaliação destas posturas no processo pedagógico.

Além dos procedimentos citados acima, o referencial teórico que pôde contribuir em maior escala com esse estudo, foi a metodologia arqueológica de pesquisa, desenvolvida por Foucault em: *"A arqueologia do saber"*.

Referencial Teórico

Foram utilizadas neste estudo, diversas obras de autores nacionais e estrangeiros:

- ? Para embasar um estudo histórico pedagógico;
- ? Para a demonstração do quinto postulado de Euclides;
- ? Para a produção de uma nova Geometria;
- ? Para o embasamento do ensino da Geometria Não-Euclidiana e
- ? Outras obras ainda sobre a arte do *"Diálogo"*.

Análise da Dissertação

Neste estudo histórico-pedagógico o eixo central são as condições em que se dá o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas. Desta forma foi feita uma contextualização desta Geometria, na qual ficam visíveis os elos de ligação entre a verdadeira concepção grega e a Geometria Não-Euclidiana.

O estudo foi dividido em 4 capítulos, e durante o seu desenvolvimento a autora buscou criar no diálogo entre a professora e alunos, uma linha de raciocínio cuja idéia principal para a qual se buscava resposta, era a desconfiança sobre a possibilidade de demonstração do quinto postulado de Euclides.

No capítulo I da dissertação, a autora explora os conhecimentos dos alunos com relação à Geometria. Procura desenvolver os principais conceitos geométricos. Há uma discussão acerca do postulado e axiomas, finalizando com a enunciação dos quatro primeiros postulados de Euclides.

Ainda no primeiro capítulo, a autora se dedica à tarefa de examinar o quinto postulado. Ela se remete às provas diretas e indiretas, e faz um estudo das propriedades da lógica, além de provar alguns teoremas. Na segunda parte da dissertação, a autora aborda as várias demonstrações do quinto postulado, entre elas a demonstração de Legendre (1752-1833) e Wallis (1616-1703).

Vamos verificar a seguir, como está estruturada a dissertação de Brito (1995).

No primeiro capítulo *"Contextualizando a Geometria Euclidiana"* foram abordadas:

- As definições de paralelas e do quinto postulado;
- Uma observação feita por Geminus (Séc. I a C), geômetra e filósofo grego, sobre retas paralelas é discutida, tentando esclarecer a situação fictícia representada por uma professora;
- Uma definição de paralelas como retas que, estando num mesmo plano, não se encontram, se prolongadas indefinidamente;
- As introduções do quinto postulado de Euclides e do postulado de Playfair.

No segundo capítulo *"Tentando Demonstrar o Quinto Postulado"*:

- Ocorrem demonstrações por parte dos alunos, sobre os postulados de Euclides e de Playfair;

- ✍ Percorrem-se as demonstrações feitas por Sacheri, Lambert (1727-1777).
- ✍ Desenvolvem-se questionamentos que remetem ao surgimento da Geometria Esférica.

No terceiro capítulo *"Produzindo novas Geometrias"*:

- ✍ São trabalhados os estudos de Gauss, Lobatchevski e Bolyai.
- ✍ Ocorre uma discussão sobre os temas *"espaço e matéria"*, tendo por base a afirmação de Descartes, sobre a identidade entre estes elementos.
- ✍ São abordados os conceitos de pseudo-esfera e tractriz, que remetem para questões de pintura e do nascimento da Geometria Projetiva.
- ✍ Há uma discussão sobre o sistema axiomático retomando-se o estudo das análises sintática e semântica, trabalhadas no início da dissertação da autora, e os alunos têm a função de apresentar uma prova lógica da consistência das Geometrias Não-Euclidianas e descobrem que não há nenhuma demonstração para o quinto postulado de Euclides.

No quarto e último capítulo a autora apresenta as suas conclusões e sugestões.

A autora deixa claro em seu estudo que um dos objetivos e a maior motivação de seu estudo, não foi simplesmente aprender a usar a Matemática de maneira usual, comum e mecânica, mas a fazer, criar, inventar caminhos para o ensino da matemática no geral, inclusive da Geometria Não-Euclidiana, que é pouquíssimo explorada atualmente, no período em que se deu o desenvolvimento do estudo, no ano de 1995.

Durante o diálogo, a professora afirma que a aceitação pela comunidade matemática das Geometrias Não-Euclidianas e a utilização de seu discurso para refutar o apriorismo kantiano insere-se em um contexto maior do que somente uma disputa entre matemáticos kantianios e não-kantianos. A professora conta que até 1870, as Geometrias Não-Euclidianas eram consideradas como verdadeiras aberrações do conhecimento matemático. Nesse mesmo período os ideais do naturalismo científico, o liberalismo econômico, e a teoria da evolução de Darwin começaram a questionar algumas leis da ética. O universo e suas verdades absolutas e incontestáveis, representadas pela Geometria Euclidiana perdeu seu pé de apoio. Nesse contexto as Geometrias Não-Euclidianas ganharam status de saber científico e foram utilizadas para rebater as teses apresentadas por Kant na estética transcendental.

A coerência refere-se à lógica, enquanto, que a partir das Geometrias Não-Euclidianas - que revolucionaram a Matemática - a verdade na matemática começou a ser entendida como a correspondência entre os conceitos abstratos e a realidade empírica.

Brito (1995) considera que a educação não deve ser entendida como uma simples transmissão de conteúdos separados em matérias ou disciplinas e séries. Essa transmissão de conhecimento exige um sujeito ativo que transmite e um passivo que recebe. Toda educação deve proporcionar situações nas quais o indivíduo possa refletir sobre suas crenças, perceber as origens destas, e poder optar de forma consciente entre superá-las ou não.

Contribuição da Autora para o Ensino

Em sua dissertação a autora destaca que uma das importantes contribuições que a Geometria Não-Euclidiana trouxe para o ensino da Geometria Esférica foi a associação e utilização da pseudo-esfera, que serve de modelo de superfície no qual não há pontos singulares.

Assim, a Geometria sobre a pseudo-esfera é diferente da realizada sobre o plano ou sobre o cilindro, e ambas diferem da realizada sobre a esfera, e esta será diferente da Euclidiana, pois:

a) Na Geometria Euclidiana por um ponto fora de uma reta podemos traçar somente uma reta que não intercepta a reta dada.
b) Na Geometria Hiperbólica, por um ponto fora de uma reta podem-se traçar infinitas retas que não cortam a reta dada.
c) Na Geometria sobre a esfera não existe uma reta que passe por um ponto fora de uma reta dada que não a encontre, porque nesta Geometria as retas não são infinitas e o segundo postulado não é válido.

Continuando o diálogo com os alunos, a professora conta que Riemann parte do primeiro, do terceiro e do quarto postulados de Euclides, além de um outro que afirma que "*por um ponto tomado fora de uma reta não se pode tirar uma paralela a essa reta*" e constrói uma Geometria inteiramente lógica, onde a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos.

Por Quais Razões a Geometria Esférica deve ser Ensinada?

Para Brito (1995) o estudo da Geometria Esférica pode proporcionar a superação do senso comum do que seja a Geometria pura e simples, e possibilita que o professor tenha condições de tecer ligações não somente entre figuras-figura, ou figuras-propriedade, propriedades-propriedade, mas também entre sistemas axiomatizados-sistemas alcançando assim, um estudo chamado Metageometria, no qual os objetos de estudo são os próprios sistemas geométricos.

Autora:
MÁRCIA CRISTINA GARRIDO SOUZA
Título:
O 5º Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico
Tipo:
Dissertação de Mestrado (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO / RJ – 1998)

Objetivo da Pesquisa

Verificar o impacto do 5º Postulado de Euclides na Matemática, no ensino da matemática e na Geometria com o auxílio da história da Matemática.

- ✍ Analisar a capacidade de argumentação lógico-matemática de professores quando deparados com tentativas de demonstração realizadas por outros matemáticos.
- ✍ Analisar como os livros didáticos exploram o conteúdo de Geometria, verificando se citam, ou não, a problemática em torno do postulado das paralelas.
- ✍ Valorizar o estudo das Geometrias Não-Euclidianas, mediante o mundo atual.

Metodologia

A autora iniciou a investigação do estudo e os trabalhos em sala com 35 alunos de graduação e 20 professores de Matemática, e utilizou como instrumentos, na coleta de dados, fontes primárias e secundárias e procedimentos específicos para pesquisas qualitativas, por meio de:

- ✍ Observação e análise de fontes de referência (livros antigos de Geometria).
- ✍ Aplicação de entrevistas e questionários semi-abertos e estruturados.
- ✍ Análise documental, com atividades de reconhecimento e demonstração de argumentação.

As entrevistas foram realizadas durante os meses de outubro e novembro de 1997 e janeiro de 1998, e cada uma teve a duração de aproximadamente 30 minutos.

Referencial Teórico

A autora neste estudo desenvolveu um direcionamento bastante interessante, no qual procurou observar sua pesquisa sob três pontos de vistas:

1. O primeiro ponto de vista deu ênfase às Geometrias Não-Euclidianas de Lobachetvsky e Riemann;
2. O segundo ponto de vista, teve um foco mais histórico-matemático, que foi utilizado como um elo de ligação entre o passado e o presente da Geometria Não-Euclidiana, em que se buscou descobrir por quais motivos a escola ainda resiste ao ensino destas Geometrias.
3. O terceiro ponto de vista, teve o seu foco no ambiente qualitativo.

A autora utilizou como suporte ao conteúdo deste estudo:

- ✍ A história da Matemática, procurando situar o público nas origens das Geometrias Não-Euclidianas.
- ✍ A Geometria Diferencial que forneceu base e ferramentas úteis para o desenvolvimento de outras formas de Geometria.
- ✍ A própria Geometria Não-Euclidiana, tendo como foco estudos sobre o 5º Postulado.

Análise da Dissertação

Este trabalho, realizado pela autora no ano de 1998, analisa o 5º postulado de Euclides sob três aspectos:

1. matemático.
2. histórico.
3. qualitativo.

O estudo teve seu foco de pesquisa no conhecimento dos professores sobre a problemática gerada por este postulado, a influência dos livros-didáticos no ensino da Geometria, e a importância das Geometrias Não-Euclidianas para a atualidade.

Alguns questionamentos que deram origem ao estudo foram:

- ✍ Quais desdobramentos surgiram para a matemática, a partir dos estudos sobre o 5º Postulado?
- ✍ Como os professores de Geometria vêem a problemática gerada pelo Axioma das Paralelas?
- ? Com um enfoque histórico-social, como os livros didáticos têm abordado a Geometria?

No capítulo 1 a autora apresenta uma exposição histórica do problema do 5º postulado, e aborda os conceitos básicos dessa Geometria desde "*Os Elementos*" de Euclides até a reformulação feita por Hilbert, apresentando e informando os leitores quais foram os matemáticos que contribuíram para o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas.

Neste capítulo ainda é tratado o 5º Postulado, e suas implicações para o desenvolvimento de outras áreas da Matemática.

No capítulo 2, é feita uma apresentação das Geometrias Hiperbólica e Diferencial, com o intuito de confirmar que essas Geometrias são completas, tal como a Euclidiana.

A partir deste momento o estudo começa a receber um tratamento de caráter qualitativo, e verificam-se algumas implicações sobre o 5º Postulado.

Na primeira parte do capítulo 3, discute-se a situação atual dos professores com relação a esta parte da Geometria. Esta discussão está baseada em questionários e depoimentos concedidos em entrevistas, direcionadas exclusivamente para este estudo.

A segunda parte do capítulo 3 contém a descrição das atividades de demonstração, argumentação e aplicação desenvolvidas com os professores, e ainda são analisados os livros didáticos utilizados em sala de aula, nas matérias de Geometria.

No capítulo 4 é feita uma análise geral do trabalho. A autora dividiu esse capítulo em duas partes, sendo que na primeira são estudados os participantes, suas posições e opiniões, e a segunda parte trata das conclusões e das sugestões da pesquisa.

De acordo com Souza (1998), a Geometria ganhava ou perdia espaço no ensino, de acordo com os livros adotados para o ensino. Assim, a autora decidiu fazer uma análise criteriosa das obras utilizadas para o ensino da Matemática, escolheu diversas coleções de cada período pedagógico, para ter noção correta da linha de pensamento adotada em cada coleção. Nesta análise, a autora buscou:

- Verificar de acordo com o ano e a série, o conteúdo trabalhado;
- Comparar o que tem ocorrido com o conteúdo de Geometria com o passar dos anos;
- Observar em que época os livros começaram a explorar ou mencionar a problemática do 5º Postulado, e em que parte da matéria de Geometria isso ocorre.

Percebe-se neste levantamento extremamente interessante, enriquecedor e útil a todos os professores de Matemática no geral, as modificações estruturais ocorridas, as mudanças pedagógicas e histórico-sociais pelas quais passou o sistema educacional, com a evolução dos tempos.

Abaixo apresentamos um resumo com a opinião da autora da pesquisa, para cada coleção analisada e na ordem em que foram publicadas e citadas.

Relação das Obras e Resumo

1) Matemática – 3º Edição Livraria Francisco Alves, ano 1933, SP.
Autores: Cecil Thiré & Mello e Souza (Coleção em 5 volumes – 2º ano)

Para a época de sua publicação o livro traz idéias inovadoras, preocupando-se com a metodologia usada para transmitir as informações com qualidade, que resultaria em um ensino forte. A obra não só apresenta o 5º Postulado, como faz comentários sobre as tentativas de demonstração deste, e ainda da existência das Geometrias Não-Euclidianas. Mas guarda grandes semelhanças no tocante à abordagem tradicional do ensino.

2) Matemática – 56º Edição Companhia Editora Nacional, ano 1958, SP.
Autor: Ary Quintella (Obra de 5ª a 8ª série em 4 volumes)

Esta coleção tem forte foco teórico em Matemática abordando de maneira abstrata o seu ensino, e utilizando-se de um grande número de exercícios para o suporte do aluno. Apesar de três dos quatro livros da coleção explorarem o ensino da Geometria, para a 7ª série, não enfatiza a relação da Geometria com a realidade, na época de sua publicação, e tem um grande número de páginas reservadas a problemática gerada pelo 5º Postulado de Euclides, citando também outras Geometrias.

3) Matemática Moderna – Distribuidora Record, ano 1971, SP.
Autor: Agrícola Bethlem (Obra de 5ª a 8ª série em 4 volumes)

Pode ser considerada uma inovação para a época de sua publicação, aborda a Geometria desde a 5ª série, mas prende-se muito na sistematização dos conceitos obtidos e no grande número de cálculos feitos. Apesar do nome, o livro segue a linha utilizada antigamente, não citando outras Geometrias e nem a problemática do 5º Postulado de Euclides.

4) Matemática Atual – Editora Atual, ano 1994, SP.
Autor: Antonio José Lopes Bigode (Obra de 5ª a 8ª série em 4 volumes)

Aborda a Geometria desde a 5ª série, e prende-se muito pouco na história da matemática, apresentando-a de forma bem experimental e interessante aos alunos, sugerindo ainda, a criação de um laboratório para a melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Busca despertar os alunos para realizar as idéias e não apenas ter conteúdos sem sentido. Não explora as Geometrias Não-Euclidianas.

5) Matemática e Vida – 7ªEdição, Editora Ática, ano 1995, SP.
Autores: Bongiovanni, Vissoto e Laureano (Obra de 5ª a 8ª séries em 4 volumes).

Tem um bom foco na história da Matemática e aborda a Geometria de forma experimental em grande parte de seus ensinamentos e não cita as Geometrias Não-

Euclidianas. A abordagem da Geometria não é muito diferente das demais que foram analisadas nos outros livros. Na página 121 do livro de 5ª série há a definição de retas paralelas como *"Duas retas distintas, que estão em um mesmo plano e não têm ponto em comum, são chamadas de retas paralelas"*. Os autores sugerem a leitura de paradidáticos e em todos os volumes, isto é, da 5ª a 8ª séries fala-se de Geometria.

6) Matemática – Editora Scipione, ano 1997, SP.

Autores: Imenes e Lellis (Obra de 5ª a 8ª série em 4 volumes)

Tem grande abordagem de Geometria em todos os livros da coleção, e os assuntos que direcionam o ensino, partem sempre de fatos e objetos reais. Ressalta quais são os objetivos da educação, e aborda a Geometria desde a 5ª série. Possibilita a interação livro-aluno-professor, mas aborda somente a Geometria Plana.

Após a análise das coleções, a autora destaca que no início os livros preocupavam-se apenas em transmitir os conteúdos do currículo e com o passar do tempo houve grande preocupação em compartilhar o conhecimento, apesar de seguirem uma linha tradicional de ensino, e conseqüentemente, a formação que hoje se oferece aos alunos ainda está baseada em moldes ultrapassados. Completa seu raciocínio dizendo que a concepção dos professores de Matemática tendem a estar fortemente marcadas pelos modelos de ensino tradicionais, até mesmo quando são confrontados com o estabelecimento de novos objetivos e metodologias para um conteúdo programático direcionado para o ano letivo. Afirma que esse estímulo tradicional vem com a existência do material do apoio, que como vimos tem todo um histórico tradicional.

Souza (1998) finaliza o seu estudo concluindo que se sabe que o estudo matemático das Geometrias, estruturalmente falando, é bastante complexo, e não é possível de ser realizado antes da universidade devido a abrangência de seus conteúdos, mas esse fato segundo a autora, não exclui que suas noções básicas sejam exploradas desde as séries iniciais.

Por Quais Razões a Geometria Esférica deve ser Ensinada?

A autora reconhece na pesquisa, que a Geometria que é transmitida nas escolas, a Geometria Euclidiana, é na verdade apenas uma pequena parte do seu universo, ou seja, apenas a ponta do *iceberg.*

Segundo a autora, existe uma outra parte das Geometrias, uma parte que é muito maior, mas que infelizmente poucos têm acesso, que muitas vezes não alcança os professores, quanto mais os alunos.

Souza (1998) afirma que a Geometria Euclidiana já não é suficiente para demonstrar o mundo atual, como muitas pessoas consideram. Ela julga importante o fato do avanço tecnológico e considera que esta é umas das principais razões pelas quais as Geometrias Não-Euclidianas devam ser ensinadas, uma vez que muitos dos conhecimentos e aplicações da física estão baseados na aplicabilidade das outras Geometrias.

Considera também, a autora, que atualmente não existem razões e motivos para que tais informações não sejam transmitidas aos alunos, uma vez que estes serão futuros professores, e cita Kasner e Newman (1968, p. 149-150) como referencial e base à sua opinião.

> O que se vê é que a Geometria de Euclides é a mais conveniente e, em conseqüência, a que continuaremos a usar para construir nossas pontes, túneis, edifícios e rodovias. As Geometrias de Lobachevsky, ou a de Riemann, se devidamente utilizadas, serviriam da mesma forma. Nossos arranha-céus se manteriam, assim como nossas pontes, túneis e rodovias; nossos engenheiros não. A Geometria de Euclides é mais fácil de ensinar, enquadra-se mais rapidamente no bom senso mal orientado, e acima de tudo, é mais fácil de usar. Contudo, nossas perspectivas foram ampliadas e nossa visão esclarecida.

Souza (1998) afirma ainda que a Geometria Euclidiana facilita uma série de conjecturas práticas, mas não todas, pois afinal o mundo não é plano.

Contribuição da Autora para o Ensino

Ficou claro neste estudo que a autora procurou ressaltar a importância dos professores trabalharem no ensino das noções de Geometria desde as séries iniciais, incorporando também aos trabalhos de sala de aula, com a apresentação de atividades adequadas ao nível de cada uma das escolas.

Souza (1998) cita inúmeros exemplos para o ensino e a utilização das Geometrias Não-Euclidianas nas escolas, tanto de nível médio, quanto para a universidade. Um dos exemplos citados faz referência à entrevista concedida por uma professora que participou da pesquisa para o desenvolvimento do estudo, argumentando que esta possui uma visão ampla com sugestões bastante coerentes para o ensino, mas que a escola de nível médio está muito afastada da universidade e, por conta disso, a possibilidade da

conexão entre as partes fica muito complicada, contudo esse é o caminho para se atingir os objetivos dos professores.

Continuando com o exemplo, a professora mostra-se receosa quanto à abordagem da Geometria Não-Euclidiana em um nível que não seja o universitário. Mas a professora afirma que esta é uma questão paradoxa, pois *"nós não vivemos em um mundo plano, e sim em um mundo de forma esférica"*. Desta forma o professor pode utilizar exemplos deste porte para dar noções de Geometrias Não-Euclidianas até mesmo no ensino fundamental.

Por fim, Souza (1998) destaca a grande contribuição que esta professora tem fornecido para o ensino da Matemática e principalmente das Geometrias Não-Euclidianas e que o professor deve ter ousadia para ensinar e levar os seus alunos a pensar, a argumentar, a refletir e a questionar a validade das informações que são apresentadas. Esse processo além de permitir um maior aprendizado, estará formando melhor os futuros professores.

Autora:
ISABEL PASSOS BONETE
Título:
Geometrias Não-Euclidianas: Uma Perspectiva para o seu Ensino
Tipo:
Dissertação de Mestrado (UNICAMP / CAMPINAS-SP E UNICENTRO / GUARAPUAVA-PR – 1999)

Objetivo da Pesquisa

Como as Geometrias Não-Euclidianas surgiram de uma dúvida levantada por matemáticos e filósofos a respeito de um dos postulados que fundamentavam a Geometria de Euclides, o ensino das Geometrias Não-Euclidianas só é possível de ser realizado a partir do conhecimento de alguns conceitos da Geometria Euclidiana.

Logo, o objetivo geral desta dissertação é elaborar uma proposta para o ensino das Geometrias Não-Euclidianas, que a partir de uma postura construtivista, inicia-se pela reconstrução dos conceitos da Geometria Euclidiana que são indispensáveis para a construção do conceito da Geometria Não-Euclidiana.

Por outro lado, com um objetivo específico, este estudo pretende desenvolver uma proposta para levar ao conhecimento do aluno, os aspectos intuitivo, experimental, teórico e dedutivo das Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas.

Metodologia

A autora utilizou-se de uma metodologia bibliográfica para alcançar seus objetivos.

- Primeiramente realizou um estudo histórico sobre a evolução e desenvolvimento da Geometria.
- Em seguida elaborou um estudo específico sobre as Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, no sentido de estruturá-las e diferenciá-las.
- O passo seguinte foi uma fundamentação teórica da educação escolar no Brasil, e a coleta de materiais a serem utilizados nas experiências em sala de aula.

Referencial Teórico

Para conseguir êxito em seu estudo, a autora precisou atingir alguns outros objetivos, entre eles, o de fundamentar teoricamente a pesquisa. Para tanto discorreu sobre situações como:

- A Educação no Brasil, desde a chegada dos jesuítas em 1549 até os dias atuais;
- A Matemática e seu ensino no mundo desde o seu surgimento e;
- A Geometria, seu ensino e as diferentes concepções que lhe foram atribuídas no decorrer da história da humanidade.

Além dessa fundamentação teórica, também foi necessário conhecer as diferentes concepções que foram atribuídas à Geometria no decorrer da história, seu desenvolvimento através dos tempos, para que fosse possível situar a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas no contexto histórico-social e assim diferenciar a Geometria Euclidiana, das Geometrias Não-Euclidianas.

Análise da Dissertação

Esta dissertação apresentou uma proposta para o ensino das Geometrias Não-Euclidianas, para os cursos de licenciatura, de onde sairão os futuros professores de Matemática. Após a graduação, os professores serão capazes de legar seu conhecimento das Geometrias aos alunos do ensino fundamental e médio. Com esse pensamento, a autora realizou um estudo teórico sobre o desenvolvimento da Geometria desde a antiguidade até os dias atuais, ano de 1999, período em que foi desenvolvida a dissertação, bem como um estudo específico sobre as Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas.

O capítulo 1 trata da situação da educação no Brasil, da situação da Matemática e do seu ensino, e da situação da Geometria seu ensino e as diferentes concepções atribuídas no decorrer da história. Este capítulo aborda as diferentes teorias educacionais que influenciaram e que ainda estão influenciando a prática escolar, principalmente o fracasso do movimento da Matemática Moderna.

Neste capítulo discute-se sobre o abandono do ensino da Geometria no ensino fundamental, médio e superior e as possíveis causas para este abandono.

O capítulo 2 traz o desenvolvimento da Geometria desde a antiguidade até os dias atuais. Situa a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas no contexto histórico-social e busca compreender as possíveis origens da Geometria, a partir da qual Euclides organizou e sistematizou a Geometria Euclidiana.

O capítulo 3 tem um estudo específico da Geometria Euclidiana e da Não-Euclidiana. Apresenta suas estruturas e permite compreender o porquê e como se deu a reformulação da Geometria Euclidiana. Este capítulo apresenta também, as diferentes tentativas de demonstração do 5º Postulado de Euclides, que levaram os matemáticos e filósofos a acreditarem que se tratava de um teorema e que então poderia ser demonstrado. Percebe-se aqui o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas, o que, permitiu determinar as diferenças e semelhanças entre estas Geometrias e a Geometria Euclidiana.

No capítulo 4 está a apresentação da proposta para o ensino das Geometrias Não-Euclidianas, com uma análise realizada em livros didáticos de diferentes décadas e os resultados das experiências realizadas em sala de aula, os quais são descritos por meio de um diálogo entre aluno e professor.

No desenvolvimento do seu estudo a autora considera que o preparo adequado dos futuros professores da disciplina de Matemática, permitiria melhorar a qualidade do

ensino da Geometria Euclidiana, além da possibilidade de inclusão do ensino das Geometrias Não-Euclidianas no ensino fundamental e médio.

A autora toma por base em sua dissertação a citação de Lima (1995, p. 01), que diz que a falta de conscientização do povo e dos representantes políticos, de que a educação não é só um meio de acesso para o bem-estar, mas também um direito do cidadão e um dever do Estado, vêm gerando resultados insatisfatórios no sistema atual de ensino, a ponto de se considerar que todo o ensino vai mal. Com isso, Bonete (1999) apresenta fatos e argumentos que comprovam que o ensino da Geometria tem sofrido, em diversas partes do mundo, inclusive no Brasil, um abandono nas últimas décadas, e que isso tem levado os educadores matemáticos a uma preocupação quanto aos rumos do seu ensino. O que ensinar, como ensinar e quando ensinar, são as principais argumentações desta preocupação e vários motivos têm sido apresentados para esse abandono. A autora destaca os principais como:

- Insegurança e despreparo dos professores de Matemática; e denuncia que em alguns cursos de licenciatura a Geometria e o seu ensino não fazem parte da formação do professor;
- Falta de tempo, uma vez que normalmente o ensino da Geometria é deixado para o final do ano letivo;
- Falta de clareza quanto à importância da Geometria na formação e no desenvolvimento de um pensamento visual, crítico;
- O motivo que exige maior atenção é que, com o desenvolvimento atual da Matemática, o ensino das Geometrias deixou de ser considerado necessário.

Bonete (1999) alerta neste estudo, para que sejam adotadas posturas mais firmes com relação ao ensino da Geometria, pois os motivos acima, não justificam o abandono. Eles apenas refletem a necessidade de pesquisas que provoquem mudanças nas concepções dos professores, e que levem ao conhecimento deles próprios, bem como dos alunos, novas estratégias metodológicas, a fim de que a Geometria e o seu ensino passe a ocupar um espaço de grande importância, não só nos currículos escolares, mas dentro da sala de aula do ensino fundamental, médio e superior.

Por Quais Razões a Geometria Esférica deve ser Ensinada?

Embora se saiba hoje, 1999, que a Geometria Euclidiana é a mais conveniente para ser usada na resolução dos problemas, a introdução das Geometrias Não-Euclidianas em qualquer dos níveis de ensino, proporcionará uma visão mais real do nosso mundo, uma vez que a maioria dos objetos usados no dia-a-dia com suas formas mais diversas demonstram superfícies com curvaturas diferentes das formas que a Geometria sempre ensinou.

Bonete (1999) considera que o ensino da Geometria é um dos temas essenciais na formação do jovem do século XXI e que por essa razão a Matemática deve ser vista, segundo D'Ambrosio (1996, p. 07), como *"uma estratégia desenvolvida pelos humanos ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural"*.

A autora completa seu pensamento dizendo que, se o ensino da Matemática continuar se prendendo a moldes tradicionais de ensino, nos quais o professor não justifica a relevância do que está sendo ensinado, o aluno não conseguirá compreender que a Matemática faz parte da construção de todo o conhecimento humano. Além do mais, se o professor se mantiver distante do aluno, não conhecendo nem os aspectos psicológicos e nem os conceitos que o aluno já traz de sua vivência, a Matemática e o seu ensino jamais poderão auxiliar na melhoria da qualidade de vida da população.

Contribuição da Autora para o Ensino

A proposta desta dissertação é de grande relevância e tem grande colaboração para o ensino, tanto da Matemática quantos das Geometrias, a partir do momento em que preparando os professores no ensino superior é que se conseguirá tirar a Geometria Euclidiana do abandono, melhorar a sua qualidade e implantar a Geometria Não-Euclidiana no ensino fundamental e médio.

Implantar a Geometria Não-Euclidiana não significa dizer que a Geometria de Euclides, que sempre foi contemplada nos currículos do ensino fundamental, médio e superior, deva ser substituída, mas sim que ela deve ser complementada. E embora a Geometria de Euclides seja a mais prática para ser aplicada aos fenômenos naturais, não é

a que melhor representa estes fenômenos, devido as suas limitações. A Geometria, de acordo com Hogben (1970, p. 123):

> Cessa de ser útil, quando se trata de se determinar a posição da mais distante nebulosa da constelação da Ursa Maior. Essas nebulosas distam de nós, mais de trezentos anos luz. A luz, com sua velocidade de dezoito milhões de quilômetros por minuto, leva trezentos anos para percorrer o espaço que delas no separa.

Autora:

ZIONICE GARBELINI MARTOS

Título:

Geometrias Não-Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino Fundamental

Tipo:

Dissertação de Mestrado (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA / RIO CLARO-SP – 2002)

Objetivo da Pesquisa

O objetivo deste estudo é de contribuir para o ensino-aprendizagem da Geometria Esférica. Com isso a autora buscou desenvolver um experimento de ensino através de atividades comparativas das Geometrias Plana e Esférica, utilizando a abordagem de Lénárt (1996). A proposta deste trabalho, então, vem ao encontro da necessidade de trabalhar as Geometrias Plana e Esférica, visando o ensino-aprendizagem da Geometria Plana.

Este trabalho pretende também, apresentar uma proposta didática ao ensino da Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana para o Ensino Fundamental.

Metodologia

A metodologia utilizada pela autora em sua pesquisa foi uma adequação às características da escola atual, e partiu da abordagem de Lénárt (1996) quando este procurou tornar a Geometria Esférica mais acessível aos seus educandos.

A autora apresentou situações-problema contidas em fichas e utilizou outros recursos para desenvolver um método de pesquisa do tipo qualitativo com intervenção em

sala de aula. O propósito era investigar como o conhecimento geométrico poderia ser introduzido nas classes, além do fato de que, a pesquisa em sala de aula permitiria avaliar a prática docente e buscou motivar os professores para a adoção de metodologias inovadoras, visando melhorar o ensino da Matemática e mais especificamente o ensino da Geometria.

Referencial Teórico

Com foco nos objetivos a serem alcançados, e a partir da metodologia desenvolvida por Lénárt (1996), foi elaborado um estudo que visava a articulação entre a Geometria Esférica e a Geometria Euclidiana. Através da primeira, estudada com a segunda, o aluno terá melhor compreensão de ambas. É também objetivo deste estudo o desenvolvimento significativo destas Geometrias e, por esse motivo, foi utilizada como metodologia de pesquisa, a pesquisa-ação e o referencial teórico está baseado na formação de conceitos, da obra "Pensamento e Linguagem" de Vygotsky (1996). Neste propósito, vê-se a necessidade de um trabalho baseado na problematização (Mendonça, 1993) e na possibilidade de negociação de significados.

A problematização permite ao aluno e ao professor criarem um ambiente favorável à aprendizagem. Assim, autora tem como principal referência teórica, os ensinamentos de Mendonça (1993) que afirma:

> É um processo de ordem transdiciplinar, não só porque o conjunto de perguntas e respostas que a constituem transitam por diversos campos de estudo, como também, é produto da superposição de sistemas internos ao indivíduo: o cognitivo, o emocional, o afetivo, o cultural, entre outros [...]. Problematizar é então um processo natural de articulação, com base no diálogo da relação do indivíduo com o meio e consigo mesmo.

Análise da Dissertação

No início de seu estudo a autora procura esclarecer o entendimento sobre a educação, para depois prosseguir em sua metodologia no ensino das Geometrias Não-Euclidianas.

A autora demonstrou grande preocupação com o modo pelo qual poderiam ser trabalhados os conceitos da Geometria Esférica com a Geometria Euclidiana em sala de aula, e a principal pergunta que a autora buscou responder com o procedimento da

intervenção, foi: É possível aos alunos do Ensino Fundamental produzirem significados em Geometria Esférica?

No primeiro capítulo é apresentado o plano de pesquisa, sua trajetória, a descrição e contextualização dos locais de intervenção.

No segundo capítulo, são analisadas as contribuições dos estudiosos em Geometria Esférica, no sentido de fundamentar os conceitos a serem trabalhados com os alunos no ensino fundamental.

No terceiro capítulo é feita a descrição e a análise dos dados coletados em uma classe de 8ª série. Neste capítulo são discutidas as fichas de trabalho e confrontadas com a teoria de Vygotsky (1996) sobre a formação de conceitos.

No quarto e último capítulo, são apresentadas as considerações finais da autora.

No desenvolvimento de sua pesquisa, Martos (2002) percebeu que as mudanças devem ocorrer primeiramente com o professor, com a conscientização do papel político que exerce e, a partir disso, que essas ocorram na escola.

Com esse direcionamento, a pesquisa se iniciou com a troca de *e-mails* com o Prof. Lénárt, que aconselhou a autora a utilizar o seu material no estudo. Assim, segundo Martos (2002) seu trabalho foi realizado em duas escolas e em processos distintos, mas que se completavam um ao outro.

- Na primeira intervenção, chamado de projeto-piloto, foi feito um trabalho com alunos, o que possibilitou traçar planos e avaliar os métodos utilizados.
- Na segunda intervenção foi feita uma pesquisa que contemplou uma sala com grande número de alunos em turnos normais de sala de aula, e com todas as suas características peculiares.

Durante a intervenção a autora explicou que os alunos tiveram grandes dificuldades para trabalhar em grupo, e que foi necessário haver diversas reuniões com todos os grupos para que fossem resolvidos os problemas entre os integrantes.

A autora cita Pavanelo (1993) quando faz referência às transformações sofridas pela Geometria, sob a influência da Matemática Moderna, e diz que ainda hoje existem resquícios dessa influência. Por esse motivo, os professores apresentam resistência no ensino da Geometria, porque julgam que não há tempo hábil para se trabalhar os conceitos de maneira correta, uma vez que estes são apresentados somente no final do livro, ou ainda, como diz Perez (1995, p. 57).

> [...] Quer seja por falta de tempo; por estar sempre no final dos livros; pela preferência dos professores por Aritmética ou Álgebra; por ser muito extenso em cada série o programa de Matemática; pelo fato de a quantidade de aulas semanais de Matemática em cada série ser insuficiente para cumprir todo o programa.

Mesmo considerando essas razões, a autora demonstra no estudo, a sua preocupação para que o ensino da Geometria seja abordado de forma que o aluno consiga compreender tal aprendizado.

Para a autora do estudo, o fato de a Geometria Não-Euclidiana ainda não ter encontrado o seu espaço, mesmo depois de já ter passado mais de um século do seu surgimento, é culpa dos professores que não buscam novos meios, metodologias e instrumentos para acompanhar o desenvolvimento matemático.

Por Quais Razões a Geometria Esférica deve ser Ensinada?

O trabalho pedagógico com esse outro modelo de Geometria, a Esférica, faz com que os alunos possam vislumbrar o planeta em que vivem de uma forma mais real, e assim estabelecer relações com os conceitos geográficos através da Matemática.

Quando os conceitos da Geometria Esférica são abordados em grupos de estudo, e em conjunto com outros recursos, com o uso de materiais manipulativos e principalmente com discussão entres os grupos, permite-se uma aprendizagem com significados. Neste ponto, o professor tem papel fundamental, que é conduzir o aluno nesse processo através da fala, expressando os seus conhecimentos, que irão permitir um maior entrosamento dos grupos, e que facilitará a troca de informações e condução do aprendizado.

Contribuição da Autora para o Ensino

A formação de grupos foi um dos fatores que possibilitaram a interação verbal e a social na sala de aula, onde cada grupo teve a oportunidade de verbalizar seus pensamentos sobre a Geometria Não-Euclidiana.

Logo, a autora percebeu que este tipo de trabalho ou estudo quando são feitos em grupo, produz resultados melhores, pois permite que sejam expressas e debatidas as idéias e dúvidas que os alunos têm sobre as Geometrias Não-Euclidianas.

Esse tipo de procedimento, segundo Martos (2002) é um recurso que deve ser utilizado pelos professores, porque à medida que o professor reflete sobre a sua ação, sua compreensão amplia, ocorrem análises, críticas e a incorporação de novos conceitos que podem ajudar a respaldar o significado e a escolha das ações futuras.

Finalizando essa pesquisa a autora conclui que através da educação pode-se modificar o mundo, iniciando pela sala de aula, um espaço social onde deve reinar a solidariedade, a harmonia e o compromisso social e político. Em sua opinião, as transformações não ocorrem com grandes gestos, mas sim, com iniciativas cotidianas. Desta forma, segundo ela, o trabalho coletivo é uma das preocupações, já que o aluno passa boa parte de sua vida dentro da escola.

Autora:

IRENE PATAKI

Título:

Geometria Esférica para a formação de Professores: Uma Proposta Interdisciplinar.

Tipo:

Dissertação de Mestrado (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – PUC - SP – 2003)

Objetivo da Pesquisa

Essa dissertação tem como objetivo propor uma interdisciplinaridade, com uma seqüência de ensino constituída de uma situação-problema e oito atividades, cuja elaboração e experimentação estão fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas, que permeia o processo de ensino e aprendizagem com situações de ação, de formulação, de validação e da institucionalização do conhecimento.

O objetivo e a proposta desta pesquisa é abordar o tema Geometria Esférica para a formação de professores e tem ainda outros objetivos a serem alcançados:

- Propor aos professores uma seqüência didática, com atividades que mostrem a relação interdisciplinar existente, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados, possibilitando uma aprendizagem motivadora.
- Proporcionar reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino da Geometria Esférica.

Trata-se de um tema que visa a interação da Geometria, Trigonometria, Geografia e História.

Metodologia

Sendo o conceito de Engenharia Didática de Artigue (1988) utilizado como uma metodologia de pesquisa, a autora comparou o processo metodológico do desenvolvimento de seu estudo, com o trabalho de um engenheiro que desenvolve um projeto e tem que lidar com objetos que a ciência pode ou não conseguir manipular.

A Engenharia Didática tem como característica ser um método experimental realizado em sala de aula, ou seja, está baseada na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino, e pelos registros dos estudos feitos por meio da consideração e validação interna, que permite a confrontação de uma primeira análise, com uma análise *posteriori.* Esse processo ainda é completado por dois níveis de seqüência: a micro-engenharia que considera os fenômenos ocorridos em sala de aula, e a macro-engenharia que está ligada à duração do ensino e a sua aprendizagem.

Referencial Teórico

Nesta pesquisa foram utilizados como referencial teórico, principalmente:

- A Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), por ser uma das teorias que direcionam esta investigação no aprendizado e formação de professores, e que possibilitou o controle dos processos: concepção, realização, observação e análise da situação das atividades da engenharia didática;
- As pesquisas de Barth (1993), no que diz respeito à concepção de professor como um profissional reflexivo e investigador de sua prática. Barth expõe a construção do saber e, para tanto, direciona seus estudos para a compreensão no processo de ensino e aprendizagem por meio de uma reflexão sobre o saber e sua elaboração, como também, a respeito das condições que permitirão direcionar o processo de construção de sentido, articulando com o papel de mediador que o professor pode ter neste processo;

- ✍ Além de Lorenzato (1995), Fainguelernt (1997), Boyer (2001) e diversos outros autores, que, por meio de seus conhecimentos e ensinamentos, contribuíram com o desenvolvimento do estudo e permitiram que fossem examinadas: a origem, o desenvolvimento e as implicações para o ensino e aprendizagem da Geometria Esférica, durante o desenvolvimento deste estudo.

Análise da Dissertação

Desde os tempos remotos os homens têm procurado uma linguagem universal e sintética, e suas investigações o levaram a descobrir imagens e símbolos que exprimem as realidades mais ricas e mais complexas, e para interpretá-las deve-se dar forma, pois elas não significarão nada enquanto houver limites para estudá-las.

Percebe-se pela observação da história e do desenvolvimento da Geometria, que os astrônomos gregos do século IV a.C. afirmavam que a terra era redonda, e por outro lado, os livros de História nos contam que Fernão Magalhães empreendeu a primeira viagem de circunavegação do mundo, em 1519, comprovando a teoria esférica da Terra. Contudo, para Euclides, a superfície era um plano, mas no decorrer do tempo, os matemáticos provaram que a esfera da Terra possui curvatura constante positiva. Fato que levou a autora a afirmar em sua tese que com a evolução da Ciência, a Terra não é uma esfera perfeita e que somos seres de três dimensões, vivendo em um mundo de três dimensões.

Por isso, diante dos fatos acima e de outros que podemos citar, a autora diz crer que não se pode continuar limitando o pensamento do homem, quando diante dele existem fatos que a Geometria Euclidiana não explica. Desta forma o professor precisa valer-se de outras Geometrias relacionadas com o dia-a-dia e, em conjunto com o aluno, buscarem comprovações e justificativas.

O desenvolvimento desta pesquisa ocorreu em três fases:

1. Elaboração de estudos preliminares relevantes à experimentação.
2. Execução da experimentação.
3. Análise dos resultados obtidos, com articulação e confronto de resultados com etapas anteriores.

No capítulo I - Geometria Esférica - procurou-se analisar o ponto de vista filosófico gerador de uma posição única do pensamento matemático, bem como suas

implicações no progresso desse pensamento e o surgimento de novas idéias de matemáticos arrojados, que se propuseram a indagar sobre a incerteza/veracidade de um paradigma sobre as Geometrias Não-Euclidianas. Também foram exploradas as concepções dos professores acerca das Geometrias Não-Euclidianas, seus pontos de vista e a prática da teoria pedagógica.

No capítulo II - A problemática e seus efeitos - têm por base os estudos preliminares, nos quais foram definidas: a problemática, as hipóteses bem como a metodologia de pesquisa.

No capítulo III - Formação de professores - teve como suporte uma das teorias para alicerçar esta pesquisa para a formação dos professores, elaborada por Barth (1993).

No capítulo IV do estudo - A experimentação - é desenvolvida uma seqüência didática, a partir de uma situação problema, a qual aborda inúmeros conceitos geométricos, numa superfície esférica, procurando harmonizar com a realidade atual.

No capítulo V, a autora apresenta suas considerações finais enfatizando a importância da metodologia adotada, faz algumas comparações dos resultados obtidos com as teorias que teve por base e apresenta algumas sugestões para estudos futuros.

A autora conduz o desenvolvimento do texto, voltando no tempo para mostrar que a tentativa de demonstração do quinto postulado de Euclides atingiu diferentes culturas em épocas diversas.

Com relação à formação dos professores, a autora pesquisou profundamente a formação dos professores, com o desafio de *"conseguir suscitar uma mudança conceitual na relação com o saber e a sua elaboração*". Para tanto a autora levanta questões como:

- Sob que forma o saber se apresenta no decorrer da ação educativa?
- Afinal o que é o saber?

Pataki (2003) por meio de suas bases teóricas, conclui que o saber é qualificado como estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo, conforme se pode observar em alguns dos aspectos apresentados. Como exemplo a autora apresenta:

- O saber é estruturado, porque se estrutura como uma rede de interconexões, no qual cada pessoa cria sua própria rede associando tudo o que sabe ou sente em relação a uma idéia.
- O saber é evolutivo, pois é sempre provisório, não tem fim e é produzido segundo uma ordem pessoal e segundo a experiência de cada um.

- O saber é cultural, porque se constitui pela interação com os outros membros da nossa cultura e não existe de modo isolado, sempre será partilhado e transformar-se-á a partir de trocas de experiências e reflexões coletivas com outros.
- O saber é contextualizado, porque ele é pessoal e surge em circunstancias afetivas, sociais e cognitivas.

A autora conta que sua orientação partiu para a elaboração de uma seqüência didática, devido aos resultados dos estudos preliminares realizados que trataram desde a análise histórica e epistemológica da Geometria Esférica, até a análise de algumas concepções dos professores acerca dessa referida Geometria, passando também pelas análises das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e das publicações científicas a respeito da Geometria Esférica.

Segundo a autora, a seqüência de ensino desenvolvida nessa pesquisa foi elaborada para que os professores fossem conduzidos a refletir e questionar os aspectos da Geometria de Riemann, com base na Teoria das Situações didáticas de Brousseau, no qual as análises das atividades foram orientadas pela metodologia de Artigue (1988), e quanto à formação dos professores foi utilizada a teoria de Barth (1993).

Por fim, a autora conclui que sua dissertação mostrou que é possível o professor introduzir os conteúdos abordados aos seus planos de aula, articulando teoria e prática, ensino e aprendizagem, com a interdisciplinaridade e contextualização, buscando um ensino no qual seja possível associar o velho conhecimento com o novo saber.

Por Quais Razões a Geometria Esférica deve ser Ensinada?

A autora, para justificar o ensino da Geometria, toma por orientação as palavras de Lorenzato (1995, p. 5) que afirma:

> A Geometria está por toda parte, desde antes de Cristo, mas é preciso enxergá-la, e sem o estudo desse componente não há o desenvolvimento do pensamento geométrico ou o raciocínio visual, e é impossível compreender e resolver questões de outras áreas e conhecimento.

Contribuição da Autora para o Ensino

Durante o desenvolvimento desta pesquisa e por meio das análises, bem como da aplicação da experimentação em sala de aula com o grupo de professores, ocorreram diversas interações entre a pesquisadora e os professores-aluno, que levaram ao resultado de apropriação/modificação de um conhecimento/saber através da investigação/reflexão, que, se aliada à crítica, poderão certamente auxiliar o professor em sua aplicação pedagógica, da mesma forma em que foram vivenciadas durante este estudo, em todas as fases propostas por Brousseau (1986), a saber: de ação, de formulação, de validação do conhecimento/saber.

Pataki (2003) utiliza as palavras de Ferry *"Formar-se, educar-se nada mais é senão um trabalho sobre si mesmo, livremente imaginado, desejado e procurado, realizado através dos meios que são oferecidos ou que o próprio procura"*, para reforçar a importância de seu estudo em contribuição para o ensino, de forma geral. Nesse ponto, afirma a autora que o papel do professor é de fundamental importância para o aluno, quando surgem dificuldades de aprendizagem, pois, nesse momento o professor deverá encorajar o aluno a usar o seu potencial de aprendizado, eliminando a incapacidade que julga ter. O efeito disso, segundo Pataki (2003), é a modificação de atitudes e valores que traz a autoconfiança e o sentimento de prazer na busca e compartilhamento das soluções que o aluno obtém.

I.4. Contribuições destas Dissertações para esta Pesquisa

As dissertações que acabamos de analisar serviu-nos como uma revisão de literatura acerca das investigações realizadas no Brasil na última década. Estas investigações têm como foco principal o estudo das Geometrias Não-Euclidianas. Assim, estes trabalhos foram de importância substancial para esta pesquisa, pois contribuíram para:

a) Definir o público alvo desta investigação. Verificamos que nenhuma delas cuidou da Geometria Esférica para o ensino médio. Visto esta lacuna, optamos em focar nossos estudos nesta direção.

b) Perceber o quanto é importante a trajetória histórica do conteúdo que se quer abordar. Assim optamos por situar historicamente um pouco das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana neste trabalho.

c) Elaborar a nossa seqüência didática. As pesquisas de Martos (2002) e Pataki (2003) nos deram um forte alicerce para que as atividades fossem ao encontro de nossos objetivos.

d) Sugerir o suporte do referencial matemático que as atividades requerem.

e) Consolidar o Referencial Teórico por nós escolhido, visto que em todos os trabalhos é forte a presença do construtivismo e do sócio-construtivismo.

f) Fortalecer a nossa Problemática, já que todos os trabalhos analisados apontam o descaso com o ensino-aprendizagem da Geometria.

g) Acreditar que a resolução de problemas aponta indícios de resultados positivos para o ensino-aprendizagem de Geometria.

h) Dar também a nossa contribuição para o ensino-aprendizagem da Geometria.

Neste Capítulo cuidamos da nossa trajetória pessoal, da problemática e objetivos desta pesquisa, e, ainda, da análise das dissertações sobre Geometrias Não-Euclidianas produzidas no Brasil na última década, o que, nos proporcionou muitas contribuições.

A seguir, no Capítulo II, faremos um esboço histórico das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas. Falaremos também, de noções básicas de Matemática, necessárias para o desenvolvimento e a realização das atividades de que trata este trabalho.

Capítulo II

2. FALANDO DE GEOMETRIA

A Matemática é uma ciência construída ao longo do tempo. Alguém no passado, no presente e no futuro, fez, faz ou fará parte deste processo de construção. Queremos que o nosso aluno também participe desse processo. Achamos importante este breve passeio pela Geometria de Euclides e pelas Geometrias Não-Euclidianas, para que entendamos como estas Geometrias surgiram e como elas foram construídas ao longo do tempo. Importante também porque, por várias vezes em nossa seqüência de atividades, esta abordagem histórica se fez necessária.

D'Ambrosio (2003) assim se manifesta a respeito da história da Matemática: *"Uma percepção da história da Matemática é essencial em qualquer discussão sobre a Matemática e seu ensino"* (p. 29). Diz mais: *"Conhecer, historicamente, pontos altos da Matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da Matemática de hoje"* (p. 30).

2.1. Esboço Histórico da Geometria

Desde os primórdios da história da humanidade, os conceitos geométricos foram contemplados nas diversas aproximações do ser humano com as formas, dimensões e representações no cotidiano de suas vidas. O homem pré-histórico incorporou suas observações de distância, visualização dos elementos da natureza, formatação de espaços para o abrigo das intempéries climáticas, observação da vegetação, dos animais, da topografia da terra em que vivia, entre outros, como importantes componentes de sua percepção de mundo (Capra, 1996). No entanto, a conceituação da palavra Geometria (geo-terra/metria-medir), veio caracterizar-se posteriormente, com as antigas civilizações egípcias, sendo seu emprego originário da necessidade de medição das terras que margeavam o Rio Nilo, nos períodos intercalados de inundações e secas, objetivando a sua demarcação para a atividade agrícola.

Esta Geometria produziu-se com notado componente experimental e prático, não só nas civilizações egípcias, como também nas regiões mesopotâmicas, às margens dos rios Tigre e Eufrates, junto aos rios Indo e Ganges no centro-sul da Ásia. O fato dos egípcios registrarem seus trabalhos em papiros e pedras, aliados ao clima seco de sua região e dos babilônicos utilizarem-se de tábulas de argila cozida, extremamente resistentes ao tempo, contribuiu para que um maior número de dados relativos às suas representações escritas

fossem preservados, se comparados às culturas da Índia e da China, que produziram as suas representações em materiais perecíveis, como fibra de entrecasca de árvores e bambu (Eves, 1992).

Na Antigüidade os caldeus empregavam fórmulas da Geometria devido a necessidade de se calcular áreas e volumes. Na mesma época os egípcios e os mesopotâmicos precisavam construir os primeiros templos dentro de projeções uniformes e precisas e, para que os seus sonhos fossem realizados, adotaram fórmulas geométricas, deixando bem evidente que já resolviam problemas relacionadas com a Geometria.

Os gregos herdaram dos babilônios e, habituados ao uso dos ângulos por sua longa experiência astronômica, introduziram muito cedo, na Matemática, a idéia de ângulo, sabendo-se que na época clássica eram definidos apenas ângulos inferiores a dois retos, ou seja, menores que 180º.

Na Antigüidade, não existia clareza quanto à distinção entre as noções de deslocamentos e movimentos, e a idéia de transformação aplicada a todo espaço, mantém-se distante do pensamento matemático até o final do século XVIII. Por outro lado, a teoria dos polígonos regulares e, mais ainda, a teoria dos poliedros regulares, são certamente um dos mais notáveis capítulos de toda a Matemática grega. A teoria das cônicas foi a última das contribuições essenciais dos gregos.

Com o intercâmbio comercial, esses conhecimentos passaram para os habitantes da península e ilhas gregas cerca de 800 a.C., dando início a um grande movimento de caráter cultural, com reflexos até na língua grega. As ciências receberam dos gregos as primeiras tentativas de sistematização. Thales de Mileto provou que algumas propriedades das figuras geométricas podiam ser deduzidas de outras. Pitágoras deu novo impulso à pesquisa de relações lógicas entre as proposições matemáticas, e é considerado por alguns como o pai da sistematização da Matemática. Hipócrates, Platão, Aristóteles e outros sucessores de Pitágoras contribuíram de maneira significativa para o desenvolvimento da Geometria, como também, para sua organização como ciência.

À Aristóteles, freqüentador assíduo da Academia de Platão, deve-se a divisão das proposições de qualquer ciência em duas espécies: primárias e secundárias.

- As primárias são aquelas aceitas sem prova, ou evidentes (axiomas) ou tomadas como verdadeiras (postulados).
- As secundárias são as proposições deduzidas das anteriores mediante raciocínio lógico (teoremas).

Por quase dois mil anos, a Geometria Euclidiana ocupou uma posiçãoabsoluta na ciência Matemática, colocando-se como modelo de abordagem Matemática. O nome de Euclides, matemático grego que viveu em Alexandria por volta de 300 a.C. (Século de Ouro), eternizou-se através de "Os Elementos", texto matemático mais influente de todos os tempos. A obra de Euclides teve sua primeira impressão em 1482 e desde então foram mais de mil edições impressas em todo mundo. Trata-se, também, do mais antigo texto matemático na forma axiomático-dedutiva de que se têm notícias. A obra "Os Elementos" é dividida em treze livros e contém 465 proposições, sendo 93 problemas e 372 teoremas. Toda esta obra foi desenvolvida e apoiada em um grupo de definições, quase todas resultantes de observações experimentais, e em dez[14] proposições primárias, chamadas de noções comuns "axiomas" e "postulados", a saber:

- Livro I ao VI: Geometria Plana;
- Livro VII ao IX: Teoria dos Números;
- Livro X: Números Incomensuráveis;
- Livro XI ao XIII: Geometria Espacial.

Esta obra é introduzida pelos famosos postulados/axiomas que reproduzimos a seguir, que foram, mais especificamente o quinto postulado, motivo de intensas controvérsias e investigações nos séculos posteriores (Boyer, 2001, p. 73):

> Postulados:
>
> 1. Traçar uma reta de qualquer ponto.
> 2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
> 3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> 4. Que todos os ângulos retos são iguais.
> 5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos (Fig.3).

[14] Em algumas traduções são cinco axiomas e cinco postulados. Em outras são nove axiomas e cinco postulados.

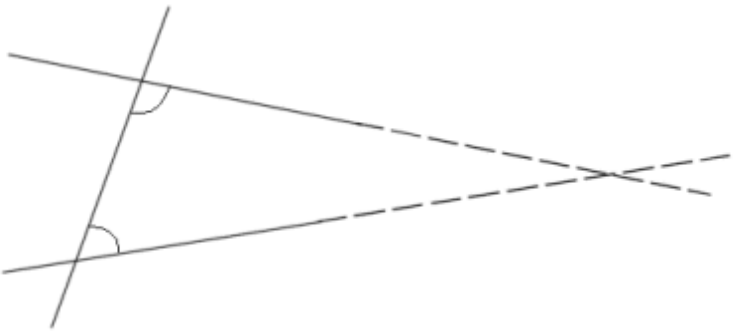


Figura 3[15]: Retas não-Paralelas

Axiomas:
1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

O Século de Ouro da Geometria grega contou ainda com Apolônio que deixou um famoso tratado sobre as cônicas em oito livros, dos quais somente sete chegaram até nossos dias. Foi o primeiro geômetra a imaginar as seções de um cone de base circular e não de revolução, obtendo as famosas curvas cônicas, que desempenharam papel fundamental no desenvolvimento de várias ciências, especialmente da astronomia.

A Geometria passa, após o Século de Ouro, por uma longa fase de estagnação. O Ocidente ficou reduzido ao básico da Matemática, durante aproximadamente dois mil anos, apesar dos estudiosos da Índia e da Arábia manterem esta ciência viva, copiando as fórmulas dos manuscritos gregos que tinham restado, começando a reinventar a maioria dos teoremas perdidos. Os estudos começam a tomar tônica principalmente no renascimento; quando dos estudos dos trabalhos gregos na Europa, ocasionando, desta maneira, novos horizontes para a ciência. Os postulados e axiomas de Euclides foram submetidos a um estudo crítico com mais profundidade, e o quinto postulado, das paralelas, teve um estudo especial. Com o passar dos séculos ocorreram várias tentativas de sua demonstração, começando pelos gregos.

Na Itália surgiram matemáticos sábios da Renascença, tais como, Cataldi, Commandido, Borelli e Vitalle, que deixaram grande quantidade de estudos e pesquisas sobre o quinto postulado, no final do século XVI e início do século XVII.

[15] Figura extraída do site http://www.prof2000.pt, consulta feita em 04.06.06

Ademais, outros postulados surgiram, sempre com o objetivo de substituir o de Euclides, como o de Gergonne, matemático francês e o de Joseph Bertrand, matemático suíço. Johann-Heinrich Lambert partindo do princípio de que o postulado de Euclides era indemonstrável admitiu, como ponto de partida, o quadrilátero tri-retângulo de Lambert, ou seja, um quadrilátero com três ângulos retos.

Joseph-Louis Lagrange apresentou à Academia de Ciências de Paris uma memória sobre o problema das paralelas, que teve a sua apresentação interrompida**.** E assim, o postulado de Euclides continuou resistindo a todos os esforços dos geômetras. As tentativas dos grandes mestres, como: Carnot, Laplace, Fourier, Legendre, Bertrand e muitos outros que abordaram com entusiasmo o problema das paralelas continuavam levando-os a serem cada vez mais perseverantes. Fourier propôs para aperfeiçoar a teoria das paralelas, refugar as velhas concepções e dar novas definições para os conceitos de retas e de plano; Carnot e Laplace, baseado no modelo de Wallis, queriam substituir o postulado de Euclides por outro que "assegurava a existência de figuras semelhantes".

Na primeira metade do século XIX, surge Gauss, matemático alemão, considerado por muitos como o maior geômetra do século XIX, provando que o postulado das paralelas de Euclides não era uma conseqüência lógica dos anteriores, ou seja, não constituía um teorema; apenas sua inclusão no grupo dos postulados é indispensável para a teoria do paralelismo, segundo Euclides. Gauss provou também que a substituição desse enunciado por outras hipóteses diferentes da formulada por Euclides constituiria, com os demais postulados, novo grupo de postulados compatíveis, que serviria de base para a organização de Geometrias Anti-Euclidianas que posteriormente foi chamada de Astral e atualmente conhecida, como Geometrias Não-Euclidianas, por não aceitarem o postulado das paralelas (Bonola, 1951, p.67).

A Geometria, no século XIX, passa pela sua maior reestruturação desde os seus estudos iniciados na Grécia Antiga. Todos os raciocínios estabelecidos, até então, eram baseados no postulados do grego Euclides, através de sua obra "Os Elementos", e por nós conhecida como Geometria Euclidiana.

2.2. **Um pouco mais do V Postulado de Euclides**

"Quem não aceite o postulado das paralelas que estabeleceu o divino Euclides, se afogará na ignorância e no erro, viverá uma vida sem luz, e todos seus atos, tanto na Geometria como fora dela, serão guiados pelo demônio". Esta incisiva afirmação da

Encyclopedia of Spurious Science (edição de 1822) tinha pouco futuro: como sempre, a Enciclopédia se pronunciava contra as correntes principais de sua época (Boyer, 2001).

Cerca do ano 300 antes de Cristo, na cidade da Alexandria, que então era a capital intelectual do mundo helenístico, Euclides tinha escrito seus famosos elementos de Geometria, que recolhiam todo o saber geométrico acumulado pela cultura grega.

"Os Elementos" estavam estruturados de uma maneira rigorosamente lógica; partia-se de um grupo de axiomas e de um grupo de postulados, que se consideravam como proposições primárias e que não necessitam demonstração, e a partir deles, por estrita dedução lógica, derivam-se as diferentes propriedades geométricas, como, por exemplo, o teorema de Pitágoras, ou o fato de que os ângulos interiores de um triângulo somem cento e oitenta graus.

Euclides resumiu em "Os Elementos" o que em seu tempo sabiam os gregos sobre a Geometria. Seu tratado é, como os *Principia*, ou os livros de Maxwell sobre a teoria eletromagnética, ou *A origem das espécies* de Darwin, um livro de síntese, onde se compilam os conhecimentos de uma ciência e se relacionam feitos na aparência desconexos. Em seu livro, Euclides formula as premissas fundamentais da Geometria, com o uso de postulados e axiomas. Destes, o que alcançou uma maior notoriedade foi o quinto postulado, que se refere à unicidade de uma linha paralela a outra, quer dizer, de duas linhas retas que não se cortam. Segundo o quinto postulado, por um ponto fora de uma reta só se pode traçar uma única paralela a esta última.

No quinto postulado, que Euclides formulou de maneira complicada, está implícito o conceito de infinito, e por isso desde tempos muito remotos se tratou de expressá-lo de maneira diferente para eliminá-lo ou deduzi-lo de outros axiomas. Em seus intentos, muitos matemáticos substituíram o quinto postulado por outras asseverações que logo procuravam demonstrar. Um exemplo dessas afirmações é: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

Muitos foram os que tentaram demonstrar o quinto postulado, deduzindo-o a partir dos outros. Em 1733 Gerolamo Saccheri publicou seu *Euclides vindicatus*, onde tentava uma demonstração pelo absurdo: suponhamos que o quinto postulado seja falso, dizia Saccheri, sigamos raciocinando e vejamos o que acontece; se nos precipitarmos no erro, isso provará que o quinto postulado tem que ser verdadeiro.

Poucos anos depois de Saccheri, o matemático francês Lambert fez uma tentativa idêntica. Mas, tanto a um como a outro, escapou uma idéia sutil: obtinham resultados

estranhos, sim, mas esses resultados eram estranhos, nada mais; de maneira nenhuma encerravam contradições, que são as que desqualificam um raciocínio matemático.

Mas a idéia não escapou ao grande matemático Gauss, que escreveu em seus cadernos de notas: *"Estou convencido de que prescindir do postulado das paralelas não leva nenhuma contradição, embora se obtenham (conclusões) que se apresentem paradoxais"* (Boyer, 2001). Gauss substituiu o quinto postulado de Euclides por outro: existem triângulos com áreas tão grandes quanto possíveis. Parece ser que o grande Gauss chegou a expor corretamente a questão e decidiu abandonar o quinto postulado. Não se atreveu a publicar suas deduções, talvez por temor às críticas que resultariam se alguém como ele se desviasse de uma verdade absoluta tão evidente.

O jovem matemático russo Nikolai Lobachevsky, em 1826 afirmou que o quinto postulado não pode ser deduzido das outras proposições fundamentais da Geometria e se atreveu a negar a "verdade evidente" desse postulado de Euclides. Tomou como certa a proposição contrária: por um ponto fora de uma linha reta, pode-se traçar não uma, mas ao menos duas linhas paralelas a ela. Desde aí deduziu uma larga série de teoremas, sem chegar a contradição alguma. Com seu trabalho, Lobachevsky mostrou não só que o quinto postulado é indemonstrável, mas também algo ainda mais importante: de um ponto de vista estritamente lógico, podem-se conceber várias Geometrias - a de Euclides cede seu lugar como verdade absoluta.

Como outros grandes avanços no conhecimento, as idéias de Lobachevsky não foram aceitas imediatamente; idéias tão radicais, que iam de encontro às crenças de quase todos os matemáticos, não teriam que se ancorar facilmente como parte da ciência (Montgomery e Shulte, 1996).

Entretanto, Lobachevsky defendeu suas idéias, que ficaram como a essência de uma grande revolução na Geometria. Como aconteceu com outros grandes marcos na ciência, por exemplo, com o cálculo diferencial que foi descoberto quase ao mesmo tempo por Newton e Leibniz, a idéia de uma Geometria Não-Euclidiana surgiu de muitos autores. Gauss e o matemático húngaro Bolyai descobriram a impossibilidade de provar o quinto postulado e este último publicou seus resultados em um apêndice ao tratado sobre Geometria comunicando este fato em uma carta que enviou a seu pai em 1823, três anos antes de Lobachevsky. Nesta carta Bolay escreveu: *"Resolvi publicar um trabalho sobre a teoria das paralelas tão logo tenha o material organizado... o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas... do nada criei um universo"*. E o pai de Bolay respondeu: *"Pelo amor de Deus, eu lhe*

peço, desista! Tema, tanto isto quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida!" (Coutinho, 2001, p.39).

Além de Bolyai, os matemáticos alemães Schweikart e Taurinus seguiam também caminhos parecidos. Não obstante, o jovem russo publicou primeiro e por isso a nova Geometria leva seu nome.

Eram Geometrias perfeitamente lógicas e não contraditórias. Eram, simplesmente, Geometrias Não-Euclidianas. Em uma Geometria deste tipo, por exemplo, as medidas dos ângulos interiores de um triângulo somam menos de cento e oitenta graus.

No preciso instante em que se substitui o quinto postulado de Euclides pelo de Lobachevsky, as figuras geométricas que tanto ajudam para entender melhor a Geometria elementar deixam de ser úteis.

A folha de caderno que usamos na escola é um plano euclidiano. Nessa folha é impossível construir esquemas como os propostos por Lobachevsky. Para isso seria necessária uma superfície em forma de corneta, que tecnicamente se chama pseudo-esfera. Se em lugar de linhas retas usamos as linhas mais curtas na pseudo-esfera – linhas geodésicas –, a Geometria intrínseca coincide com a de Lobachevsky, plano em que por um ponto fora de uma reta pode ser traçada mais de uma linha paralela a ela.

Em 1854, Riemann, em uma célebre dissertação *"Sobre as hipóteses em que se funda a Geometria"*, introduziu uma Geometria correspondente que substitui o postulado das paralelas pelo seguinte enunciado: Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar uma outra reta paralela a uma reta dada. Em sua Geometria não havia, igualmente, nenhuma contradição: deixou de ser uma "ciência natural", que descrevia verdades para converter-se em uma concepção abstrata.

Em 1868, o geômetra italiano Beltrami apresentou um modelo que mostrava a consistência dessa nova Geometria e a atitude dos matemáticos mudou de repente: de algo fictício, a Geometria Não-Euclidiana de Lobachevsky se tornou algo real.

2.3. A Geometria de Riemann (Esférica)

Na versão moderna da Geometria Euclidiana o quinto postulado corresponde à afirmação de que por um ponto fora de uma reta não há mais que uma paralela a essa reta.

Num curioso exemplo de descobertas simultâneas, as Geometrias Não-Euclidianas surgem na primeira metade do século dezenove, entre elas, a Geometria Esférica ou

Elíptica, através de Bernhard Riemann, em 1859. A aceitação da Geometria de Riemann só aconteceu após 1870, quando a geração posterior a Riemann começou a entender o seu significado. Há também, um sentido mais restrito atribuído à expressão Geometria Riemanniana[16] nos dias de hoje, que consiste interpretar o plano como a superfície de uma esfera e uma reta como um círculo máximo sobre essa esfera. Neste caso, a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos.

Riemann apresenta em seus trabalhos a importante distinção entre "infinito" e "ilimitado". Os círculos máximos de uma esfera (as retas ou geodésicas) são finitos (percorrendo-os sempre se volta ao ponto de partida), mas ilimitados (pode-se percorrê-los indefinidamente). Com o intuito de evitar contradições, verifica-se aqui, novamente, dois pontos de discordância com a Geometria Euclidiana: as retas passam ser finitas (porém ilimitadas) e podem, eventualmente, interceptar-se em mais de um ponto – os círculos máximos sempre se interceptam em dois pontos.

O desenvolvimento das Geometrias Não-Euclidianas mostrou porque falharam as tentativas de provar o postulado das paralelas de Euclides. Mas a sua relevância vai mais além. O desenvolvimento de outras Geometrias consistentes a partir dos quatro primeiros postulados de Euclides e da substituição do quinto postulado por outro incompatível com ele serviu, especialmente, para demonstrar que o quinto postulado de Euclides é, de fato, independente dos outros e, por isso, não podia ser provado. Isso contribuiu para que se fizesse sentir a necessidade de um exame mais cuidadoso dos fundamentos da Matemática. Contribuiu, ainda, para o desenvolvimento da Geometria que aqui vamos abordar: a Geometria Esférica.

2.4. Noções Básicas de Geometria Esférica

Vamos expor, neste item, noções matemáticas básicas da Geometria Esférica, entre as quais, algumas serão trabalhadas na seqüência de atividades que abordaremos no Capítulo V. Para este feito, tomamos estes conceitos emprestados de Lénárt (1996), Lima (2000), Baragar (2001), Coutinho (2001) e Martos (2002).

Neste primeiro momento é importante compreender que as noções de ponto, reta, segmento de reta da Geometria Euclidiana são considerados como ponto, geodésica

[16] A Geometria Esférica é também conhecida por Geometria Riemanniana ou Geometria Elíptica.

(círculo máximo ou grande círculo) e arco da geodésica na superfície esférica, conforme mostra o quadro a seguir.

Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
Plano	Superfície esférica
Ponto	Ponto
Reta	Geodésica, Círculo Máximo ou Grande Círculo
Segmento de reta	Arco da geodésica
Dois pontos determinam uma reta	Dois pontos determinam uma (reta) geodésica

Na Geometria Esférica o plano euclidiano é substituído pela superfície esférica. Os pontos desta Geometria são os pontos da superfície esférica e as figuras geométricas são traçadas sobre esta superfície.

As geodésicas são os círculos máximos (grandes círculos) obtidos pelos planos que interceptam a esfera passam pelo seu centro. Os outros círculos são menores quando não for esse o caso (Fig.4).

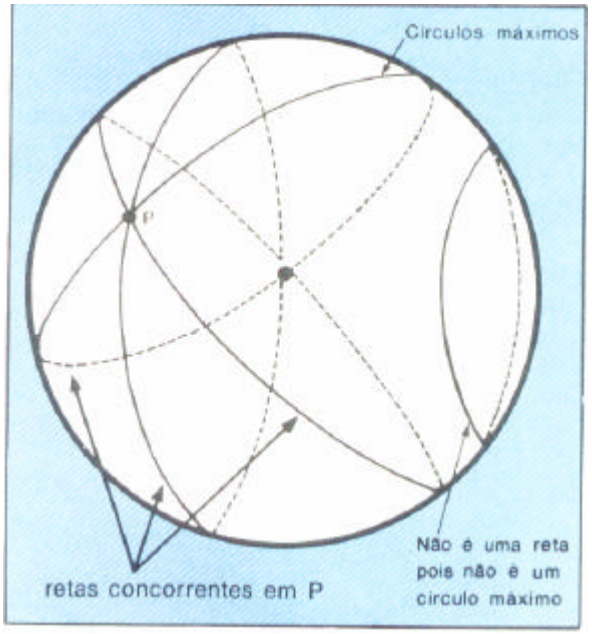


Figura 4[17]: Círculos Máximos

[17] Figura extraída de Oliveira, (1976, p. 100).

Desse modo, na superfície de uma esfera a reta pode ser chamada além de geodésica, como círculo máximo ou grande círculo e são determinadas por dois pontos como na Geometria Euclidiana.

A partir daí, é perceptível que uma reta na superfície esférica possua propriedades próprias. Ela deixa de ser infinita e torna-se ilimitada.

Duas geodésicas são perpendiculares se formam um ângulo reto quando se interceptam.

Enquanto na Geometria Euclidiana retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si, na Geometria Esférica isto não acontece pois as geodésicas perpendiculares a uma geodésica Z não são paralelas entre si, mas sim, concorrentes, isto é, todas as geodésica perpendiculares a Z tem um ponto comum chamado de pólo de Z.

A Figura 5 mostra as geodésicas ACA' e ADA', perpendiculares à geodésica BCDE.

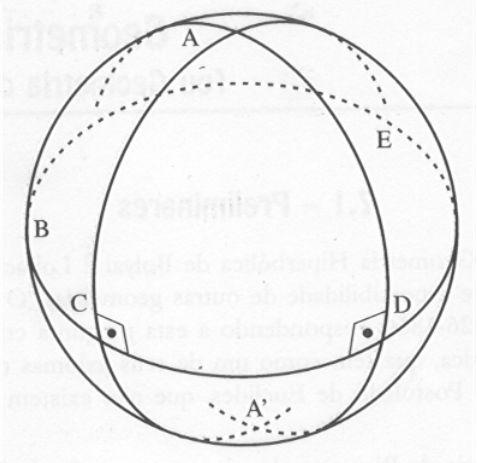


Figura 5[18]: Geodésicas Perpendiculares

Na verdade, na superfície esférica, quaisquer dois círculos máximos são secantes, ou seja, se interceptam, aliás, em dois pontos e evita-se esse inconveniente considerando-se idênticos os dois pontos de intersecção. Isto é observado também na Figura 5, onde os círculos máximos, ou seja, as geodésicas ACA' e ADA', perpendiculares à geodésica BCDE, interceptam-se nos pontos antípodas A e A'(extremidades de um mesmo diâmetro da esfera). A geodésica BCDE, perpendicular às geodésicas ACA' e ADA' é a polar comum dos pontos A e A', e estes dois pontos são pólos dessa geodésica.

[18] Figura extraída de Coutinho, (2001, p. 74).

Assim, quaisquer duas retas na superfície esférica têm um ponto de encontro (postulado de Riemann).

Observa-se que a distância de A ou A' a qualquer ponto da geodésica BCDE é constante e esta constante é denominada de distância polar. As duas geodésicas ACA' e ADA', que são secantes, têm em comum uma única geodésica perpendicular BCDE.

Considere na Figura 6, HI e KJ duas retas na Geometria Esférica, tais que H e I são pólos de KJ e, K e J são pólos de HI. A distância de qualquer reta na superfície esférica a seu pólo é uma constante igual para todas as retas e, assim, uma reta na superfície esférica tem um comprimento finito que é quatro vezes a distância polar.

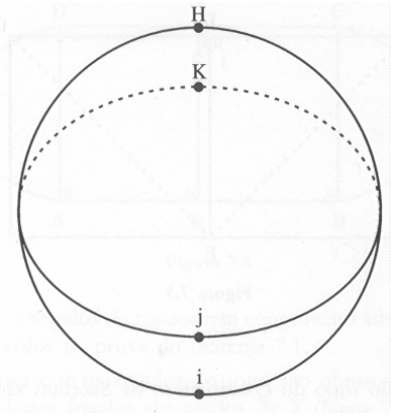


Figura 6[19]: Pólos de Geodésicas

Embora uma reta na Geometria Esférica, tenha um comprimento finito, não pode ser enclausurado por uma curva da superfície. Não há como rodear, isto é, dar uma volta em torno de um círculo máximo, sem interceptá-lo.

Outro ponto importante a considerar é que, na Geometria Esférica não existem retas paralelas nem retas não secantes, pois quaisquer duas retas dessa Geometria sempre se encontram.

Se tomarmos dois pontos quaisquer sobre uma superfície esférica, a menor distância entre eles é dada pelo segmento de reta que os une, que é sempre um trecho da geodésica. (Fig. 7), denominado arco da geodésica.

[19] Ibidem, p. 75.

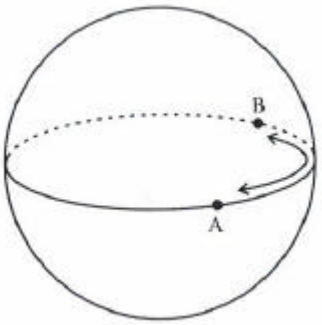


Figura 7[20]: Arco Geodésico

Para as atividades desenvolvidas neste trabalho há necessidade de se definir e medir ângulos sobre a superfície esférica. Sendo os círculos máximos as "retas" da superfície esférica, define-se ângulo esférico como sendo a intersecção de dois círculos máximos e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes à superfície esférica pelo ponto de intersecção, como se vê na Figura 8.

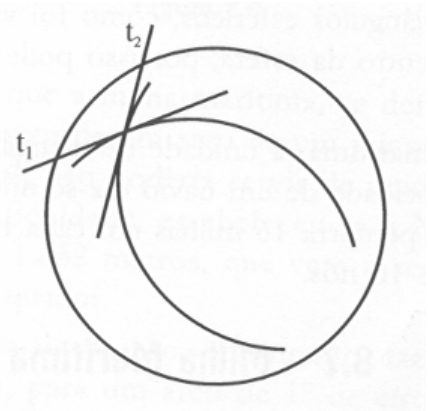


Figura 8[21]: Ângulo Esférico

Denomina-se polígono esférico a porção da superfície esférica limitada exclusivamente por arcos da circunferência máxima.

Sejam A, B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes ao mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico ABC. Estes arcos são os lados do triângulo esférico. (Fig. 9)

[20] Ibidem, p. 83.
[21] Ibidem, p. 83.

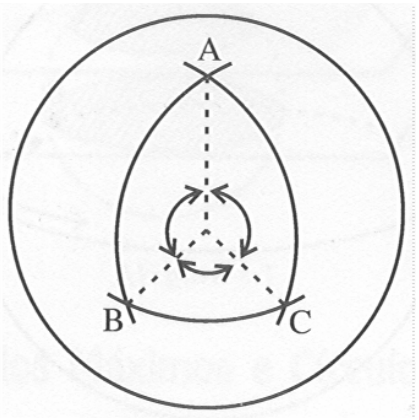


Figura 9[22]: Triângulo Esférico I

Os arcos geodésicos BC, AC e AB são os lados do triângulo esférico (Fig. 10) denotados, respectivamente, por *a*, *b* e *c* e, suas medidas, são as medidas dos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera. Os ângulos do triângulo ABC são os ângulos esféricos A, B e C, que também podem ser BÂC, ABC e ACB, respectivamente.

Assim, um triângulo esférico é a porção da superfície esférica compreendida entre três arcos de circunferências máximas.

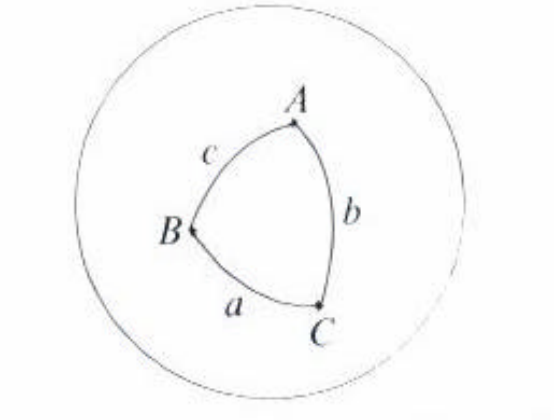


Figura 10[23]: Lados e Ângulos de um Triângulo Esférico

Além dos lados e ângulos, os triângulos esféricos possuem três alturas, três bissetrizes, três medianas, enfim, todos esses elementos são definidos igualmente como se faz na Geometria Euclidiana para os triângulos planos, com a diferença que para aqueles triângulos fala-se em retas e, na superfície esférica, são geodésicas.

Os lados dos triângulos esféricos, como já visto, subentendem ângulos com vértices no centro da esfera (Fig. 11), por isso podem ser medidos em graus ou radianos.

[22] Ibidem, p. 84.
[23] Figura extraída de Ryan, (1986, p. 108).

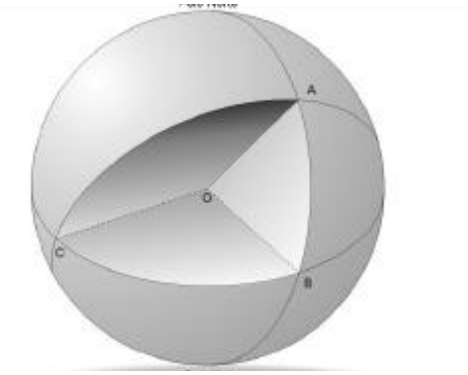


Figura 11[24]: Triângulo Esférico II

A Geometria Esférica sendo independente do quinto postulado de Euclides impõe que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico não seja constante, isto é, varie entre 180^0 e 540^0. Dado um triângulo esférico ABC (Fig. 10), o máximo que se pode afirmar sobre a soma das medidas de seus ângulos está expresso na dupla desigualdade:

$$180^0 < \hat{A} + B + C < 540^0$$

Logo, em relação à soma da medida dos lados *a*, *b*, *c* (Fig. 10) persiste, também, uma faixa de variação de extremos entre 180^0 e 360^0, ou seja:

$$180^0 < a + b + c < 360^0,$$

sendo que nenhuma das medidas dos lados pode ser maior que 180^0.

Ao contrário dos triângulos planos, os esféricos podem ter três ângulos retos medindo cada um 90^0.

Temos, assim, algumas propriedades:

I - A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo esférico (Fig. 12) é maior que 180^0.

[24] Figura extraída do site http://www2.prudente.unesp.br/dcartog/arana/TrigEsf.pdf, consulta feita em 31.07.06

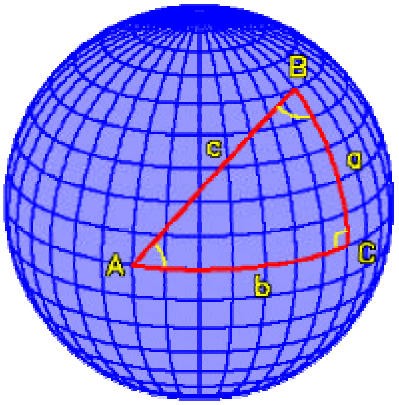


Figura 12[25]: Triângulo Retângulo Esférico

Dem: Seja ABC um triângulo retângulo (Fig 13) e suponha, por absurdo, que A + B + C = 180^0. Traçam-se as retas CD e BE, formando com BC os ângulos X e Y congruentes, respectivamente, aos ângulos 1 e 2. De acordo com o caso ALA (Ângulo, Lado e Ângulo) de congruência, o triângulo BCI vem a ser congruente ao triângulo ABC, obtendo um retângulo, o que seria um absurdo, pois não existe retângulo na Geometria Esférica, pelo fato de não existir retas paralelas na superfície esférica. Ou seja, não há nesta superfície, um quadrilátero que tenha os quatro ângulos retos, de acordo com a definição de retângulo na Geometria Euclidiana. Portanto Â + B + C > 180^0.

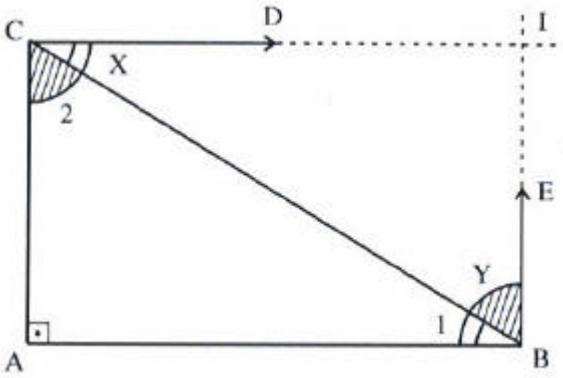


Figura 13[26]: Retângulo

Com este resultado pode-se verificar ainda que:

II - A soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é maior do que 180^0.

[25] Figura extraída do site http://fermi.jhuapl.edu, consulta feita em 04.06.06
[26] Figura extraída de Coutinho, (2001, p. 78).

Dem: Desde que qualquer triângulo possa ser dividido em dois triângulos retângulos, as somas das medidas dos ângulos destes triângulos é maior que 360^0 e, assim, a soma das medidas dos ângulos do triângulo primitivo é maior que 180^0.

III - A soma das medidas dos ângulos de qualquer quadrilátero é maior que 360^0.

Dem: Seja ABCD um quadrilátero qualquer (Fig. 14). Traça-se a reta AC, dividindo o quadrilátero nos dois triângulos ABC e ACD. Como a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é maior que 180^0, tem-se $\hat{A} + B + C + D > 360^0$.

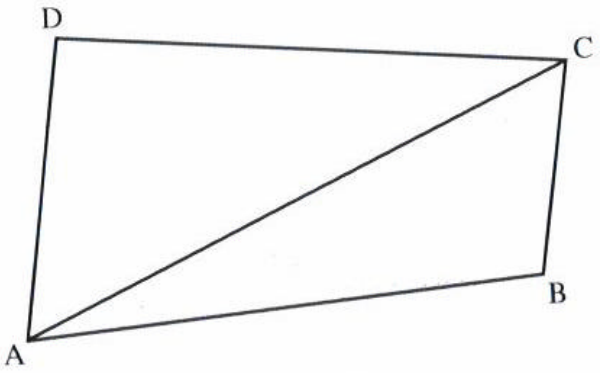


Figura 14[27]: Quadrilátero

IV – Na superfície esférica, a soma das medidas dos ângulos exteriores[28] varia de 0^0 a 360^0.

Dem: Sejam Â, B e C as medidas dos três ângulos de um triângulo. Os ângulos exteriores respectivos medem $180^o - \hat{A}$, $180^o - B$, $180^o - C$, tanto no plano como na superfície esférica. Se a soma dos ângulos de um triângulo no plano mede sempre 180^o, a soma das medidas dos ângulos exteriores é $(180^o - \hat{A}) + (180^o - B) + (180^o - C) = 540^o - (\hat{A} + B + C) = 540^o - 180^o = 360^o$. Na superfície esférica a soma das medidas dos ângulos exteriores varia entre $540^o - 180^o = 360^o$ e $540^o - 540^o = 0^o$, isto é, entre 0^o e 360^o.

Pode-se classificar os triângulos esféricos, de acordo com a medida de seus ângulos ou lados, comparando-os com os da Geometria Euclidiana, conforme mostra o quadro a seguir:

[27] Ibidem, p. 79.
[28] Define-se ângulos exteriores esféricos igualmente como se define ângulos exteriores na Geometria Euclidiana.

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	
Geometria Esférica	**Geometria Euclidiana**
-retângulo - um ângulo reto.	-retângulo - um dos ângulos é reto.
-biretângulo - dois ângulos retos.	-acutângulo – os três ângulos são agudos.
-triretângulo - três ângulos retos.	-obtusângulo - um ângulo obtuso.
Classificação dos triângulos quanto aos lados	
Geometria Esférica	**Geometria Euclidiana**
-retilátero - um lado medindo 90^0.	-eqüilátero - três lados congruentes.
-biretilátero - dois lados medindo 90^0.	-isósceles - dois lados congruentes.
-triretilátero - cada lado medindo 90^0.	-escaleno - três lados de medidas diferentes.

Convém notar que, se um triângulo esférico é triretângulo, sê-lo-á também triretilátero e, reciprocamente, ou seja, trata-se de um triângulo que cobre exatamente a oitava parte da superfície esférica associada.

No quadro seguinte têm-se alguns resultados que apontam condições que garantem a congruência de triângulos, tanto na Geometria Euclidiana como na Geometria Esférica.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
As seguintes combinações de lados e ângulos congruentes garantem a congruência de triângulos: LLL, LAL, ALA, LAA_o.	As seguintes combinações de lados e ângulos congruentes garantem a congruência de triângulos: LLL, AAA, LAL, ALA.
A condição LLA garante a congruência somente para certos triângulos (retângulos).	As condições LLA e AAL não garantem a congruência de triângulos.
A correspondência AAA garante que dois triângulos sejam semelhantes.	Não há triângulos semelhantes na esfera.

V – A área da superfície esférica de raio unitário é 720^0.

Dem: Sabe-se que a área da superfície esférica de raio r é : $(A_s = 4pr^2)$[29]. Se a esfera tem raio unitário, a medida da área da esfera em graus é, então, igual a 720^o.

[29] Demonstração em Paiva, (1995, p 526).

VI - A área de um triângulo esférico ABC numa esfera de raio *r* é:

$$(a + ß + ? - 180^0)\, r^2 = A_t$$

Se a esfera tem raio unitário, a área do triângulo esférico é, então:

$$A_t = a + ß + ? - 180^0.$$

Dem: Sejam dois ângulos de um biângulo esférico (mesma medida) Na Figura 15 está representado um biângulo esférico de abertura (ângulo) ß[30].

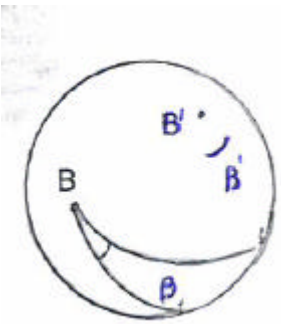


Figura 15[31]: Biângulo Esférico

Note que a área do fuso esférico[32] é proporcional à abertura ß, isto é, quanto maior a abertura ß do biângulo, maior será a área da superfície da esfera coberta pelo fuso.

Além disso, sabemos que a área da superfície esférica vale $4pr^2$, então para obter a área do fuso esférico pela aplicação da regra de três simples.

abertura	área
ß	$A_ß$
2p	$4pr^2$

A parte vermelha da Figura 16 mostra um fuso esférico. Imagine a mesma parte vermelha oposta a esta. Esta parte vermelha que estamos visualizando na Figura 16 mais a parte vermelha oposta a esta formam um fuso esférico duplo.

Figura 16[33]: Fuso Esférico

[30] Mantivemos a notação de ângulo usada por Souza, (1998).
[31] Figura extraída de Souza, (1998, p. 64).
[32] Fuso esférico = biângulo
[33] Figura extraída do site http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos2.html#3, consulta feita em 03.06.06

Assim, a área delimitada por um fuso duplo é dada por $A_ß = 2. ß. 4pr^2 / 2p$, ou seja $A_ß = 4. ß.r^2$

Considere agora um triângulo ABC sobre uma superfície de uma esfera de raio *r*. Feito isto, prolongue seus lados de modo a obter três grandes fusos duplos de abertura a, ß e ?, que são os três ângulos internos do triângulo ABC, conforme mostra a Figura 17.

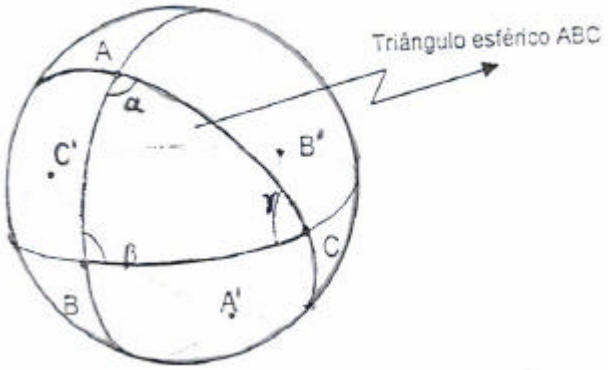


Figura 17[34]: Triângulo Esférico ABC

Agora, ao somar as áreas desses três fusos duplos obtem-se:

$A_a + A_ß + A_? =$ área da esfera + 2.área do ?ABC + 2.área do ?A'B'C'.

Isto é válido porque os três fusos duplos juntos cobrem toda esfera e ainda duas vezes mais a área do triângulo ABC e do triângulo A'B'C', devido ao fato de cada um ser contado três vezes, uma vez em cada fuso duplo.

Assim, como as áreas do triângulo ABC e A'B'C' são iguais, pois são subtendidas por abertura iguais a, ß e ?, temos que:

$$A_a + A_ß + A_? = \text{área da esfera} + 2.\text{área do } ?ABC + 2.\text{área do } ?A'B'C'$$

$$4ar^2 + 4ß\, r^2 + 4?\, r^2 = 4pr^2 + 4.\ \text{área do } ?ABC$$

$$ar^2 + ß\, r^2 + ?\, r^2 = pr^2 + \text{área do } ?ABC$$

$$(a + ß + ? - p).\, r^2 = \text{área do } ?ABC$$

Deste modo, a área do triângulo esférico é $(a + ß + ? - 180^0).r^2 = A_t$ e, se a esfera tem raio unitário, a área do triângulo esférico é, então:

$$A_t = a + ß + ? - 180^0.$$

[34] Figura extraída de Souza, (1998, p. 64).

A seguir apresentamos uma comparação mais ampla entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica.

2.5. Geometria Euclidiana e Geometria Esférica

Os quadros seguintes mostram uma comparação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica.

RETAS	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
-Um segmento de reta é o caminho mais curto entre dois pontos.	-Um arco do circulo máximo é o caminho mais curto entre dois pontos.
-Uma reta é infinita.	-Um círculo máximo é finito.
-Uma reta não tem centro.	-Um circulo máximo tem dois centros, que são os pólos.
-Duas retas podem ser paralelas;	-Dois círculos máximos nunca são paralelos.
-Duas retas não-paralelas se interceptam em um ponto.	-Dois círculos máximos se interceptam em dois pontos.
-Percorrendo uma reta, a partir de um ponto, nunca se retorna a este ponto.	-Percorrendo um circulo máximo, a partir de um ponto, sempre se retorna a este ponto.
-Por dois pontos, passa uma única reta, estes pontos dividem a reta em duas semi-retas e um segmento.	-Por dois pontos, passa um único círculo máximo. Se estes pontos forem os pólos, então passam infinitos círculos máximos. -Dois pontos dividem o círculo máximo em dois arcos finitos.

DISTÂNCIA	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
-Não existe distância máxima entre dois pontos.	-A distância máxima entre dois pontos é de 180^0.
-Entre dois pontos tem-se apenas um modo de medir a distância entre eles, que é o mais curto.	-Entre dois pontos tem-se apenas um modo de medir a distância entre eles, que é o mais curto, caso estes pontos não sejam os pólos,

	caso contrário, existem infinitos, o que dará sempre 180^0.

INTERSECÇÃO ENTRE DUAS RETAS	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
-Duas retas paralelas nunca se interceptam.	-Círculos máximos nunca são paralelos.
-Duas retas distintas e não paralelas têm exatamente um ponto em comum.	-Dois círculos máximos nunca podem ter apenas um ponto em comum.
-Duas retas distintas e não paralelas nunca têm mais de um ponto em comum.	-Dois círculos máximos sempre têm dois pontos em comum.

RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
-Um par de retas perpendiculares forma quatro ângulos retos e divide o plano em quatro regiões infinitas.	-Um par de círculos máximos perpendiculares, forma oito ângulos retos e divide a esfera em quatro regiões finitas.
-Retas paralelas têm infinitas perpendiculares em comum.	-Retas paralelas não existem na esfera.

DOIS SEGMENTOS DE RETAS (ARCOS GEODÉSICOS) COM A ORIGEM EM COMUM	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
-Dois segmentos de reta com a origem em comum nunca se encontram.	-Dois arcos de círculo máximo se encontram nos pólos formando um biângulo.
-É impossível criar um polígono de dois lados.	-É possível criar um polígono de dois lados, chama-se biângulo - tem dois lados e dois ângulos congruentes. Cada lado mede 180^0.
-Dois segmentos de reta com a origem em comum dividem o plano em duas regiões infinitas.	-Dois meridianos[35] com origem em comum dividem a esfera em dois biângulos (finitos).

[35] É a distância entre os dois pólos do arco da geodésica.

TRÊS RETAS DISTINTAS	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
-Se três retas distintas têm um ponto em comum, então elas dividem o plano em seis infinitas regiões.	-Se três círculos máximos têm um ponto em comum, um pólo, então, eles se interceptam nos dois pólos, dividindo a esfera em seis biângulos finitos. Cada par de biângulos opostos é congruente.
-Se cada reta intercepta as outras duas, sem que as três tenham o mesmo ponto em comum, então as retas dividem o plano em seis regiões infinitas e uma região finita (triangular).	-Se cada círculo máximo intercepta os outros dois, sem que os três tenham o mesmo ponto de intersecção comum, eles dividem a esfera em oito triângulos de arco finito. Os pares de triângulos no lado oposto da esfera são triângulos reflexivos (congruentes). Os três círculos máximos criam quatro pares de triângulos reflexivos (congruentes).
-Se duas retas são paralelas, elas dividem o plano em três infinitas regiões. Se três retas forem paralelas, geram quatro infinitas regiões.	-Círculos máximos não podem ser paralelos.

TRIÂNGULOS E POLÍGONOS	
Geometria Plana	**Geometria Esférica**
-Um par de pontos pode ser conectado por um único segmento de reta, três pontos não colineares determinam um único triângulo.	-Um par de pontos que não são os pólos, podem ser ligados por dois arcos do círculo máximo. Como resultado, três pontos não colineares determinam oito triângulos esféricos diferentes. -Se um par de pontos for o pólo, o triângulo não é único.
-A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^0;	-A soma dos ângulos internos varia e depende do tamanho desse triângulo, mas é maior que 180^0.

-Um triângulo tem no máximo um ângulo reto.	-Um triângulo pode ter um, dois, ou três ângulos retos.
-É possível ter polígonos semelhantes no plano.	-Não é possível ter polígonos semelhantes na superfície esférica.
-O caso AAA, no plano, não garante a congruência de dois triângulos.	-O caso AAA garante a congruência de triângulo para dois triângulos esféricos.

QUADRADOS E ÁREAS	
Geometria Plana	**Geometria Esférica**
-É possível construir um quadrado[36].	-Não é possível construir um quadrado, contudo pode-se construir um quadrilátero com quatro lados congruentes e quatro ângulos congruentes (porém não retos).
-Um quadrado pode ser dividido em quadrados menores congruentes entre si e semelhantes ao primeiro.	-O quadrilátero acima mencionado pode ser dividido em quadriláteros menores congruentes, contudo apenas os ângulos são iguais, os lados não.
-A área é medida em unidades de área.	-A área é medida em graus.
-A área de um triângulo é o produto da medida da base pela medida da altura, dividida por dois.	-Para se calcular a área de um triângulo esférico, deve-se encontrar a soma das medidas de seus ângulos internos e subtrair 180^0, multiplicando este resultado por r^2.
-Pode-se encontrar a área de um polígono por triangulação, somando-se a área dos triângulos que dividem o polígono.	-Pode-se encontrar a área de um polígono por triangulação, somando-se a área dos triângulos que dividem o polígono.

2.6. Conceitos Matemáticos necessários para a tesselação da esfera

Como despertamos o interesse do aluno no sentido de tesselar a bola de futebol na superfície esférica, tratamos a seguir de alguns conceitos necessários para este fim.

[36] Definimos quadrado como sendo o quadrilátero que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos retos.

2.6.1. O que significa tesselar?

Tesselar uma superfície plana significa cobrir a superfície com figuras planas, de modo que não existiam espaços entre elas e nem sobreposições.

Já tesselar uma superfície esférica tem o mesmo significado e as figuras deixam de ser planas e passam serem esféricas.

Há infinitas maneiras de se tesselar tanto a superfície plana como a superfície esférica. Aqui iremos tratar somente da tesselação dessas superfícies através das faces dos polígonos regulares, cujos lados e ângulos têm a mesma medida.

2.6.2. Tesselando a superfície plana

Apenas três tipos de polígonos regulares tesselam o plano, quais sejam, o triângulo eqüilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Para que um polígono regular possa pavimentar[37] o plano é necessário que seu ângulo interior seja submúltiplo de 360^o. Todo polígono regular de n $(n ? 3)$ lados pode ser decomposto em $(n–2)$ triângulos regulares e a soma das medidas dos ângulos de cada um desses triângulos é 180^o.

Desta maneira, temos que a medida de cada ângulo interior de cada polígono é:

$\frac{(n ? 2)180^o}{n}$, onde n representa o número de lados do polígono.

Como esta medida precisa ser submúltiplo de 360^o, temos:

$\frac{360^o}{\frac{(n ? 2)180^o}{n}} ? \frac{2n}{n ? 2} ? k$, onde k é um número inteiro positivo maior que 2.

Assim, k só pode assumir os valores 3, 4, e 6, respectivamente lados dos polígonos: triângulo, quadrado e hexágono.

A seguir mostramos, através das figuras 18, 19 e 20 abaixo, como ficam estas tesselações.

[37] Pavimentar (ladrilhar) significa o mesmo que tesselar.

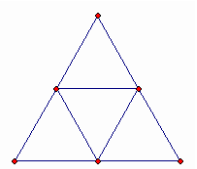


Figura 18[38]: Tesselação do Plano com Triângulos

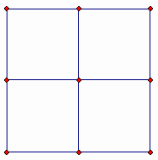


Figura 19[39]: Tesselação do Plano com Quadrados

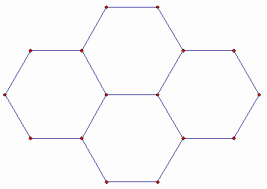


Figura 20[40]: Tesselação do Plano com Hexágonos

Um polígono regular que seja diferente dos três citados não tessela o plano. Exemplificamos através do pentágono regular, polígono de 5 lados. Se colocarmos mais um pentágono ele sobreporá os outros. Com se vê na Figura 21, três pentágonos não formam a soma de 360º, logo não tesselam o plano, deixando um "buraco" entre eles.

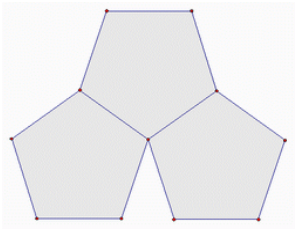


Figura 21[41]: Pentágonos não Tesselam o Plano

2.6.3.Os poliedros de Platão

Os Poliedros de Platão serão usados como referência para a tesselação da superfície esférica. Assim, iremos comentar um pouco a respeito desses sólidos.

Mas, o que é um poliedro? Podemos dizer que poliedro é um sólido completamente limitado por polígonos planos.

Num poliedro há de se considerar os vértices, as arestas, as faces e os ângulos.

As intersecções das faces são as arestas do poliedro. As intersecções das arestas são os vértices do polígono, que resultam num ângulo poliédrico, também chamado de "bico".

Um poliedro que tenha como faces apenas polígonos regulares congruentes e que também apresente todos os ângulos poliédricos congruentes recebe o nome de poliedro regular.

---

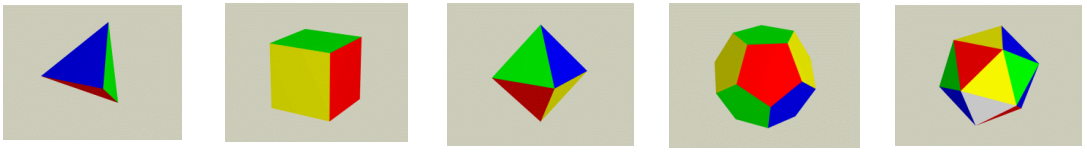
[38] Figura extraída do site http://membros.aveiro-digital.net/santosdossantos/bau2003/padroes.htm, consulta feita em 03.05.05
[39] Ibidem
[40] Ibidem
[41] Ibidem

Platão estudou certa classe de poliedros, por volta do século IV a.C, que posteriormente, vieram ser conhecidos como Poliedros de Platão, entre os quais, se incluem os poliedros regulares.

De um poliedro de Platão exige-se que:

- Todas as faces sejam polígonos, regulares ou não, mas com o mesmo número de lados;
- Todos os ângulos poliédricos sejam formados com o mesmo número de arestas.

Para o nosso estudo, atentamo-nos somente aos Poliedros de Platão que apresentam todas as faces formadas por polígonos regulares. Estes recebem o nome de poliedros regulares e são os mostrados na Figura 22.



Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Figura 22[42]: Poliedros de Platão

2.6.4.Tesselando a superfície esférica

Vamos retomar alguns conceitos da Geometria Esférica, colocados anteriormente:

Uma reta na superfície esférica, como já visto, é chamada de geodésica, círculos máximos ou grande círculo e se obtém através da intersecção do plano passando pelo centro da esfera. Um exemplo de grande círculo é a linha do equador do globo terrestre.

A intersecção de *n* desses grandes círculos formam polígonos esféricos com *n* vértices e *n* lados.

Diferentemente da superfície plana a superfície esférica tem uma área finita que é igual a 720^{o}[43], logo a soma dos *n* polígonos que cobrirão a esfera terá que ter área igual a 720^{o}. Da mesma forma que tesselamos o plano com polígonos regulares, perguntamos: De quantas maneiras é possível tesselar a esfera com polígonos esféricos regulares. Como veremos a seguir, só é possível tesselar a superfície esférica com triângulos, quadriláteros e pentágonos regulares.

[42] Figura extraída do site http://avrinc05.no.sapo.pt/, acesso em 15.10.2005.
[43] Consideramos o raio da esfera unitário, quando dizemos que a área da superfície esférica é igual a 720^{o}.

Vejamos o porquê:

Sabemos que a área da superfície esférica é de 720º e que a área de um triângulo esférico é a soma das medidas dos ângulos desse triângulo menos 180º. Representamos esta soma através da letra ß, logo a área do triângulo esférico é (ß - 180º). Um polígono esférico então terá área igual a A = $[\beta - (n - 2)180^o]$, desde que o polígono possa ser decomposto em (n-2) triângulos esféricos congruentes.

Para darmos seqüência ao que queremos mostrar representamos por ***n*** o número de lados, ***f*** o número de faces e ***v*** o número de vértices do polígono esférico.

Vimos que a área da superfície esférica é 720º e como os polígonos esféricos são congruentes temos que: Af = 720º. Como A = $[\beta - (n - 2)180^o]$, temos:

$$[\beta - (n - 2)180^o]f = 720^o \text{, onde vem que } f = \frac{720^o}{\beta - n180^o + 2.180^o}.$$

Como os ângulos dos polígonos esféricos são congruentes e necessitamos que cada ângulo desse polígono seja da forma 360º/v, temos que ß, precisa ser (360º/v)n. Substituindo esta equação em f tem-se:

$$f = \frac{720^o}{\frac{2.180^0 n}{v} - n180^0 + 2.180^0}$$

$$= \frac{4.180^0 v}{2.180^0 n - vn180^0 + 2.180^0 v}$$

$$= \frac{4v}{2n - vn + 2v}$$

$$= \frac{4v}{4 + 2n - vn + 2v - 4}$$

$$= \frac{4v}{4 - (vn - 2n - 2v + 4)}$$

$$= \frac{4v}{4 - (v - 2)(n - 2)}$$

Como f tem que ser um número positivo e 4v também, temos que 4 – (v-2)(n-2) precisa ser maior que zero, o que, implica que v e n são iguais ou menores que 5.

Então para criar um polígono esférico regular que tessele a esfera v e n necessitam ser maiores ou iguais a 3. Daí os polígonos regulares que tesselam a esfera somente são: triângulos, quadriláteros e pentágonos, como queríamos mostrar.

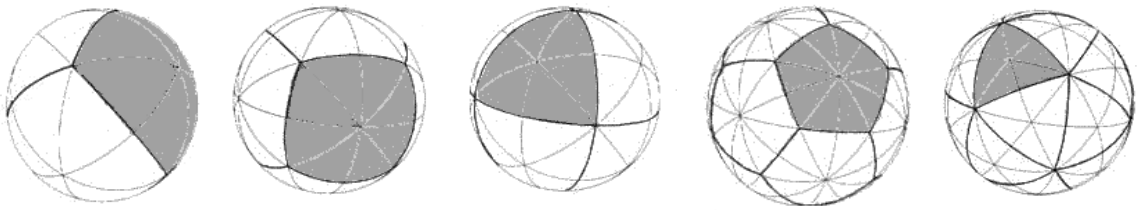
Podemos combinar estes polígonos de tal maneira que tenhamos na superfície esférica a tesselação das faces dos sólidos platônicos. Como vimos acima, os sólidos platônicos são formados com as mesmas faces dos polígonos esféricos que tesselam a esfera, logo podemos projetar as faces daqueles poliedros na superfície esférica, de tal maneira que os seus "bicos" possam, na esfera, serem planificados, ou seja, que a soma das medidas dos ângulos que compõem o "bico" seja 360^o.

Um ponto no plano está rodeado por um ângulo de 360^o. O mesmo acontece com um ponto na superfície esférica.

Na seqüência de atividades, veremos então como tesselar a esfera de modo que as faces dos sólidos platônicos passem agora a serem faces da superfície esférica, de maneira a cobri-la por inteiro, ou seja, tesselá-la, o que esperamos, contribuir para que o aluno perceba as diferenças e semelhanças entre as Geometrias Plana e Esférica.

A base de todas as tesselações das faces dos sólidos platônicos na esfera é o octaedro. Ele é a geratriz de todos os outros sólidos e suas faces são as mais fáceis de representar na superfície esférica.

São cinco os Sólidos Platônicos Esféricos, resultantes da tesselação das faces dos Sólidos Regulares de Platão na superfície esférica. A Figura 23 mostra estes cinco sólidos.



Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Figura 23[44]: Poliedros de Platão Esféricos

Aqui, neste Capítulo, deixamos registrado um panorama histórico das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas. Apresentamos também, algumas noções básicas de Geometria Esférica. Tanto a história destas Geometrias como o apoio teórico matemático, foram tratados de maneira que permitirão dar o suporte necessário para este trabalho.

Prosseguindo, abordaremos no próximo Capítulo nosso referencial teórico que se baseia principalmente no sócio-construtivismo de Vygotsky.

[44] Figura extraída do site http://www.miracerros.com/artwork/g_sphere_layout.htm, consulta em 11.03.06

Capítulo III

3. REFERENCIAL TEÓRICO

Nas leituras que temos feito, vemos em Piaget e Vygotsky um forte alicerce para a sustentação teórica deste trabalho. Assim, beberemos em suas fontes, tomando o cuidado de não nos embriagar.

Não queremos, de forma alguma, colocar em confronto as idéias destes teóricos, mas sim aproveitar o que eles têm em comum, ou seja, fazermos uma interação destas idéias.

Nossos olhos vêem Piaget e Vygotsky como os fundadores do construtivismo. Interessa à educação, de uma maneira geral, as contribuições destes teóricos naquilo em que elas se completam: Piaget com os aspectos cognitivos e Vygotsky com os aspectos sócio-históricos. O que é bom para a ação pedagógica é a posição interacionista que eles mantém no sentido de que o sujeito é o elemento ativo na construção de seu conhecimento, e esta construção só é possível na interação do sujeito com o objeto, fato este que tanto Piaget quanto Vygotsky tinham como ponto central de suas teorias.

Ver oposição e antagonismo entre Piaget e Vygotsky é miopia. É *"falta de maior reflexão e aprofundamento dessas teorias"*, como denuncia Souza e Silva (1994).

Piaget e Vygotsky concordam que o desenvolvimento e aprendizagem não são resultantes só dos estímulos externos (objetos), nem só da produção da razão (sujeito), mas fruto da interação dos dois (sujeito e objeto).

Oliveira (2003) resume as semelhanças e diferenças entre estes dois teóricos com as seguintes palavras:

> Embora haja uma diferença muito marcante no ponto de partida que definiu o empreendimento intelectual de Piaget e Vygotsky – o primeiro tentando desvendar as estruturas e mecanismos universais do funcionamento psicológico do homem e o último tomando o ser humano como essencialmente histórico e, portanto sujeito às especificidades de seu contexto cultural – há diversos aspectos a respeito dos quais o pensamento desses dois autores é bastante semelhante. Ambos enfatizam a necessidade de compreensão da gênese dos processos que estão sendo estudados tanto filogenéticos como ontogenéticos. Ambos utilizam uma metodologia qualitativa em seus estudos, buscando captar mecanismos psicológicos em processo e não resultados estáticos expressos em medidas quantitativas. Tanto Piaget como Vygotsky são interacionistas, postulando a importância da relação entre indivíduo e ambiente na construção de processos psicológicos; nas duas abordagens, portanto, o indivíduo é ativo em seu próprio processo de desenvolvimento: nem está no sujeito apenas mecanismos de maturação, nem submetido passivamente a imposições do ambiente. Ambos, ainda, consideram que o aparecimento de representação

> simbólica, evidencia particularmente pela aquisição da linguagem, marca um salto qualitativo no processo de desenvolvimento do ser humano (p. 103-104).

Estamos falando de construtivismo, mas o que é construtivismo?

Para Becker (1994):

> Construtivismo significa isto: a idéia de que nada, a rigor, está pronto, acabado, e de que, especificamente, o conhecimento não é dado, em nenhuma instância, como algo terminado. Ele se constitui pela interação do indivíduo com o meio físico e social, com o simbolismo humano, com o mundo das relações sociais; e se constitui por força de sua ação e não por qualquer dotação prévia, na bagagem hereditária ou no meio, de tal modo que podemos afirmar que antes da ação não há psiquismo nem consciência e, muito menos, pensamento (p. 88-89).

Nesta mesma linha de raciocínio, Matui (2003), assim se expressa:

> O Construtivismo é uma teoria do conhecimento que engloba numa só estrutura dois pólos, o sujeito histórico e o objeto cultural, em interação recíproca, ultrapassando dialeticamente e sem cessar as construções já acabadas para satisfazer as lacunas ou carências (necessidades).

Vejamos, agora, com mais detalhes, um pouco da contribuição destes teóricos.

3.1. Jean Piaget (1896-1980): Dados Bibliográficos

Suíço, nascido em Neuchâtel, em 09 de agosto de 1896, Jean Piaget se formou em história natural, e, três anos depois, recebeu o grau de doutor, com uma tese sobre moluscos.

A partir da adolescência e pelo resto da vida, Piaget também manteve especial interesse pela filosofia. Havia mergulhado nas leituras de Bérgson, Comte, Spencer, Le Damtec e, finalmente, Kant. Essas leituras, aliadas à biologia, deram-lhe a convicção de que se pode relacionar biologia com problemas epistemológicos.

Após o doutorado, ainda sem muita definição sobre hipóteses de trabalho, Piaget perambulou por centros e laboratórios da Europa. Merece destaque sua estada em Zurique, onde entrou em contato com o método clínico, e em Paris, onde trabalhou na padronização do teste de Burt às crianças parisienses. Durante a aplicação do teste, Piaget ficou

impressionado não com as respostas em si, mas com os processos através dos quais a criança chegava às respostas. Piaget tinha descoberto o seu campo de trabalho: a psicogênese do pensamento na criança.

A partir daí Piaget iniciou um período de estudos e publicações que durou até meados da década de 1930, quando elaborou, segundo ele mesmo, livros um "pouco adolescentes". A obra *A linguagem e o pensamento na criança*, que Vygotsky critica muito é desse período (1923).

Outras contribuições surgem na segunda metade de 1930, com *O nascimento da inteligência na criança* e *A construção do real na criança*, além de estudos sobre as construções das noções de conservação, reversibilidade, classificação, número, acaso, etc.

Entre os colaboradores de Piaget, merece destaque Barbel Inhelder, com quem publicou *Gênese das estruturas lógicas elementares*, *Da lógica da criança à lógica do adolescente* e tantos outros livros e artigos abordando os processos pelos quais a criança e o adolescente pensam e assimilam os conhecimentos.

A última grande obra Piaget escreveu com o físico argentino Rolando Garcia, *Psicogênese e história das ciências*. Concluída pouco tempo antes de sua morte, é a última síntese das suas descobertas epistemológicas e destaca, certamente muito a propósito, a psicogênese dos conhecimentos físicos.

3.2. Lev Semyonovitch Vygotsky (1896-1934): Dados Bibliográficos

Lev Semyonovitch Vygotsky era russo. Nasceu em 5 de novembro de 1896 e morreu em 11 de junho de 1934.

Na época de Vygotsky, a psicologia já estava em crise. De um lado, passando por Wundt, Ebbinghaus e outros, havia chegado até Watson, que tentara transformá-la em ciência natural, como a física. O resultado não foi outro que a exclusão dos estudos de todos os processos psicológicos superiores, incluindo as ações conscientemente controladas, a atenção voluntária, a memorização ativa e o pensamento abstrato. De outro lado, com os trabalhos de Dithey, Spranger e outros, passou a ser o estudo dos valores, desejos, atitudes, raciocínios abstratos. Mas, limitados pelo método fenomenológico, esses trabalhos foram puramente descritivos.

Baseado no marxismo (materialismo histórico), Vygotsky propõe-se resolver essa crise e projeta uma nova psicologia, que consistia em estudar a transformação dos

processos psicológicos elementares em processos complexos ou funções psicológicas superiores: memória, pensamento, atenção, fala, consciência.

Todas as correntes da psicologia tradicional buscam as atividades mentais dentro do organismo, isto é, subjetivamente. Vygotsky abandonou este subjetivismo e tratou as funções psicológicas superiores como produto da história social ou reflexo das atividades interpessoais e das condições materiais, chamando essa psicologia de instrumental, cultural e histórica.

É instrumental porque as funções psicológicas superiores, que pertencem exclusivamente ao homem, têm natureza mediadora. São elos entre o sujeito e o mundo externo.

É cultural porque envolve meios socialmente estruturados, pelos quais a sociedade organiza os tipos de tarefa ou atividade a que a criança em crescimento precisa se dedicar. Por essas razões, a linguagem é a unidade celular dessa nova psicologia.

É histórica em sentido duplo. De um lado, os instrumentos usados pelo homem para dominar a natureza são inventados e sofrem alterações ao longo da história. Por outro, os instrumentos culturais alterados expandem enormemente os poderes humanos.

Segundo Vygotsky (1991), a passagem das funções psicológicas elementares (motricidade, percepção, sentimentos, etc.) para as funções psicológicas superiores faz-se por internalização. Por isso a mente é de formação social.

3.3. Contribuições de Piaget e Vygotsky para esta Pesquisa

3.3.1. Contribuições da Teoria de Piaget

A fundamentação teórica desse trabalho está calcada, principalmente, nas idéias de Vygotsky, portanto no sócio-construtivismo que, assim como o construtivismo de Piaget, são teorias interacionistas.

Citamos Piaget, pela inegável contribuição que este deu à ponte construtivismo – sócio-construtivismo, o que, é relevante para a compreensão desta última teoria. Tanto que Vygotsky, em sua obra Pensamento e Linguagem, faz referências à teoria de Piaget, ora para refutar, ora para sustentar suas idéias. Dentre essas referências Vygotsky (1996) cita:

> Como muitas outras grandes descobertas, a idéia de Piaget é tão simples quanto óbvia. Já havia sido expressa nas palavras de Rousseau, citadas pelo

> próprio Piaget, no sentido de que a criança não é um adulto em miniatura, assim como sua mente não é uma mente de adulto em escala menor. Por trás dessa verdade, para a qual Piaget forneceu provas experimentais, encontra-se outra idéia, também simples – a idéia de evolução, que projeta um brilho incomum sobre todos os estudos de Piaget (p. 9).

Buscamos em Becker (1994), uma maneira simplista de elucidar Piaget.

Piaget vai mostrar que o homem, logo que nasce, apesar de trazer uma fascinante bagagem hereditária que remonta a milhões de anos de evolução, não consegue emitir a mais simples operação de pensamento ou o mais elementar ato simbólico. Vai mostrar ainda que o meio social, por mais que sintetize milhares de anos de civilização, não consegue ensinar a esses recém-nascidos o mais elementar conhecimento objetivo. Isto é, o sujeito humano é um processo a ser construído. Sujeito e objeto não têm existência prévia, *a priori*: eles se constituem mutuamente, na interação. Eles se constroem. Como?

O sujeito age sobre o objeto, assimilando-o: essa ação assimiladora transforma o objeto. O objeto ao ser assimilado, resiste aos instrumentos de que o sujeito dispõe no momento. Por isso, o sujeito reage refazendo esses instrumentos ou construindo novos instrumentos, mais poderosos, com os quais se torna capaz de assimilar, isto é, de transformar objetos cada vez mais complexos. Essas transformações dos instrumentos de assimilação constituem a ação acomodadora. Conhecer é transformar o objeto e transformar a si mesmo. (O processo educacional que nada transforma está negando a si mesmo). O conhecimento não nasce no indivíduo, nem é dado pelo meio social. O sujeito constrói seu conhecimento na interação com o meio tanto físico como social. Essa construção depende, portanto, das condições do sujeito – indivíduo sadio, bem alimentado, sem deficiências neurológicas, etc – e das condições do meio.

Assim, o construtivismo de Piaget pode ser perfeitamente compreensível com o sócio-construtivismo no sentido de que ambos tem tendências comuns na insatisfação com um sistema educacional que teima (ideologia) em continuar essa forma de transmissão que é a Escola, que consiste em fazer repetir, recitar, aprender, ensinar o que já está pronto, em vez de fazer, agir, operar, criar, construir a partir da realidade vivida por alunos e professores, isto é, pela sociedade – a próxima e, aos poucos, as distantes. A Educação deve ser um processo de construção de conhecimento ao qual ocorrem, em condição de complementaridade, por um lado, os alunos e professores e, por outro, os problemas sociais atuais e o conhecimento já construído ("acervo cultural da Humanidade").

Segundo Piaget (1975), o aluno é um sujeito cultural ativo cuja ação tem dupla dimensão: assimiladora e acomodadora. Pela dimensão assimiladora produz transformação no mundo objetivo, enquanto pela dimensão acomodadora produz transformações em si mesmo, no mundo subjetivo. Por isso, é inadmissível que o professor aceite que seu aluno fique passivo ouvindo sua fala ou repetindo lições que consistem em dar respostas mecânicas para problemas que não assimilou, ou seja, em problemas que não transformou para si. Assim o movimento próprio do conhecimento deve impregnar a sala de aula, em particular, e o sistema educacional, em geral. A sala de aula deve ser inserida na História e no espaço social. O compromisso da Escola deve ser o de (re)construir o novo, superando o arcaico, e não de repetir, interminavelmente, o antigo.

Nas palavras de Piaget (1975):

> As relações entre o sujeito e o seu meio consistem numa interação radical, de modo tal que a consciência não começa pelo conhecimento dos objetos nem pela atividade do sujeito, mas por um estado indiferenciado; e é desse estado que derivam dois movimentos complementares, um da incorporação das coisas ao sujeito, o outro da acomodação às próprias coisas (p. 389).

E sobre a construção do novo diz: *"a organização de que a atividade assimiladora é testemunha é, essencialmente, construção e, assim, é de fato intervenção, desde o princípio"* (p. 389).

Assim, construtivismo é visto como a forma de conceber conhecimento, sua gênese e seu desenvolvimento e, por conseqüência, um novo modo de ver o universo, a vida e o mundo das relações sociais.

3.3.2. Contribuições da Teoria de Vygotsky

Será importante, para esta pesquisa, pontuar alguns aspectos fundamentais da obra de Vygotsky: desenvolvimento, aprendizado, zona de desenvolvimento proximal (ZDP) e conceitos espontâneos e científicos, aspectos estes que se relacionam entre si, ocasionando deste relacionamento, aquilo que o autor chama de mediação.

Oliveira (2003) assim se manifesta sobre mediação, na visão de Vygotsky: *"A relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas uma relação mediada, sendo os sistemas simbólicos os elementos intermediários entre o sujeito e o mundo"* (p.24). Fala mais: *"Mediação, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um*

elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento" (p. 26).

Mas quais são estes sistemas simbólicos de que fala a autora?

Estes sistemas simbólicos, de acordo com Vygotsky (1991), são distinguidos por dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos e os signos. Embora exista uma analogia entre estes dois tipos de mediadores, eles têm características bem diferentes e merecem serem tratados separadamente.

3.3.2.1. Instrumentos

É por meio do trabalho que o homem cria e recria instrumentos e interfere na natureza, transformando-a. Essa ação transformadora entre homem e natureza garante a produção da história e da cultura da humanidade, esse processo dar-se-á de forma coletiva e social. O instrumento é feito ou buscado para um certo objetivo. Ele carrega consigo, portanto, a função para a qual foi criado e o modo de utilização desenvolvido durante a história do trabalho coletivo. É, pois, um objeto social e mediador entre indivíduo e o mundo.

3.3.2.2. Signos

Os signos, chamados por Vygotsky de "instrumentos psicológicos", são análogos aos instrumentos auxiliares nas ações concretas, pois de acordo com Oliveira (2003): "*são ferramentas que auxiliam nos processos psicológicos*" (p.30).

O homem inventa e cria signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico como, por exemplo, lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, dentre outros.

A memória mediada por signos é, pois, mais poderosa que a memória não mediada por eles (os signos). Esta afirmação é confirmada por Vygotsky e seus colaboradores. Desta experiência concluiu-se que o processo de mediação "*possibilitou um comportamento mais controlado, uma ação motora dominada por uma escolha prévia. A ação psicológica tornou-se mais sofisticada, menos impulsiva*" (Oliveira, 2003, p. 32).

3.3.2.3. Os Sistemas Simbólicos e o Processo de Internalização

Como foi visto, Vygotsky considera a função mediadora – instrumentos e signos – como ferramenta auxiliar na ação do indivíduo.

O uso de signos no processo de evolução da espécie e do desenvolvimento de cada indivíduo sofrerá mudanças qualitativas, segundo Vygotsky.

Para Oliveira (2003):

> Ao longo da evolução da espécie humana e do desenvolvimento de cada indivíduo, ocorrem, entretanto, duas mudanças qualitativas fundamentais no uso de signos. Por um lado, a utilização de marcas externas vai se transformando em processos internos de mediação; esse mecanismo é chamado por Vygotsky, de **processo de internalização.** Por outro lado, são desenvolvidos sistemas simbólicos, que organizam os símbolos em estruturas complexas e articuladas. (p. 34)

Segundo esta autora, com o passar do tempo, o indivíduo, em seu processo de desenvolvimento, deixa de necessitar de marcas externas, passando a utilizar signos internos, ou seja representações mentais que substituem os objetos do mundo real: os signos internalizados são como as marcas exteriores, elementos que representam objetos, eventos, situações. Essa capacidade possibilita o homem libertar-se do espaço e do tempo presentes, fazer relações mentais na ausência das próprias coisas, imaginar, fazer planos e ter intenções. Sendo assim, a operação mental garante ao homem libertar-se da necessidade de interação concreta com os objetos, pois a relação é mediada pelos signos internalizados que representam os elementos do mundo.

Os processos mentais (processos superiores), considerados tipicamente humanos garantem ao homem criação de sistemas simbólicos e instrumentos de trabalho, tornando-se símbolos compartilhados pelo conjunto de membros do grupo social, permitindo a comunicação entre os indivíduos e o aprimoramento da interação social.

É o grupo cultural que irá fornecer ao indivíduo dados (sistemas de representação da realidade) para que ele possa perceber e organizar o real onde está inserido, constituindo seus instrumentos psicológicos que irão mediar sua relação com o mundo. Enquanto mediadores entre indivíduos e o mundo real, esses sistemas de representação da realidade consistem numa espécie de "filtro" através do qual o homem será capaz de ver o mundo e operar sobre ele. É a partir da experiência com o mundo objetivo e do contato com as formas culturalmente determinadas de organização do real (e os signos fornecidos pela

cultura) que os indivíduos vão construir seus sistemas de signos, o qual consistirá numa espécie de "código" para decifração do mundo. Assim os grupos culturais, onde as crianças nascem e crescem, funcionam para estas no sentido de produzirem adultos que operam psicologicamente de maneira particular, em concordância com os modos culturalmente construídos de ordenar o real.

Ao falar em cultura, Vygotsky, argumenta:

> Não está se reportando apenas a fatores abrangentes como o país onde o indivíduo vive, seu nível sócio-econômico, a profissão do grupo cultural como fornecendo ao indivíduo um ambiente estruturado onde todos os elementos são carregados de significado. Toda vida humana se está impregnada de significações e a influência do mundo social se dá por meio de processos que ocorrem em diversos níveis (*apud* Oliveira, 2003, p.37-38).

Oliveira (2003) continua afirmando que, sob às lentes de Vygotsky, este processo se dá de fora para dentro. Primeiro o indivíduo realiza ações externas, estas são interpretadas por pessoas com as quais convive, de acordo com o que é estabelecido culturalmente, atribuindo significados às ações do sujeito que desenvolve seu processo psicológico. Conclui, então:

> As origens das funções psicológicas superiores devem ser buscadas, assim, nas relações sociais entre o indivíduo e os outros homens: para Vygotsky o fundamento do funcionamento psicológico tipicamente humano é social e, portanto, histórico (p. 38).

3.3.2.4. A Importância da Socialização e da Linguagem

Para Vygotsky (1991), o despertar dos processos internos e de desenvolvimento do indivíduo se dará a partir do aprendizado. Ocorrendo desde o nascimento, é definido, em parte, pelo processo de maturação orgânica e pelas relações sociais.

A inter-relação que ocorre no ambiente sociocultural dá à criança instrumentos para construir suas estruturas psicológicas, essa construção é característica exclusiva do ser humano que cria e recria sua cultura. Esta se caracteriza, principalmente, pela utilização da linguagem.

A linguagem é a forma de comunicação mais utilizada entre as pessoas, que, por sua vez, são fontes de informações específicas do mundo exterior para a criança – conhecimento social.

De acordo com Oliveira (2003), Vygotsky reconhece duas funções básicas na linguagem:

1. A de intercâmbio social – é para se comunicar com seus semelhantes que o homem cria e utiliza os sistemas de linguagem.

2. A de pensamento generalizante – a linguagem ordena o real, agrupando todas as ocorrências de uma mesma classe de objetos, eventos, situações, sob uma mesma categoria conceitual.

Vygotsky (1991), diz que o desenvolvimento mental humano se origina na comunicação verbal entre a criança e o adulto. Para ele, o desenvolvimento das funções psicointelectuais superiores na criança dá origem à seguinte lei: todas as funções psicointelectuais superiores aparecem duas vezes no decurso do desenvolvimento da criança: a primeira vez, nas atividades coletivas, nas atividades sociais, isto é, como funções interpsíquicas; e depois, no nível individual, no interior da criança, ou seja, funções intrapsíquicas.

Vygotsky (1991) ilustra a importância do pensamento generalizante. Para ele, as palavras desempenham um papel central não só no desenvolvimento do pensamento, mas também na evolução histórica da consciência como um todo. A palavra é o microcosmo da consciência humana.

Ao apoderar-se deste aprendizado – linguagem – a criança entra no mundo convencional, e internaliza as representações do seu real: valores, normas, costumes, regras etc. Com isso, sente-se representada no mundo, comunica-se com ele, compreenderá e confrontará os valores vividos e conceituais. Conseqüentemente, entrará no mundo da cultura humana.

3.3.2.5.Os Níveis de Desenvolvimento

Para Matui (2003), o termo desenvolvimento é utilizado tanto por Vygotsky como por Piaget:

> O desenvolvimento é a condição para a aprendizagem no sentido restrito; no sentido construtivista; esta não ocorre sem aquele. O desenvolvimento é

> justamente a construção da função simbólica, da estrutura mental e da própria personalidade. A aquisição das estruturas próprias de cada nível, fase ou período é que capacita o sujeito a novas e mais amplas aprendizagens. O desenvolvimento é a estrutura que oferece condição para um aluno fazer idéia de um problema e compreendê-lo (p. 114).

Vygotsky e Piaget tinham a mesma visão a respeito do significado de desenvolvimento. Ambos achavam que não havia aprendizagem sem desenvolvimento e que este era peça fundamental para ocorrer a aprendizagem.

3.3.2.5.1. Nível de Desenvolvimento Efetivo ou Real

Matui (2003), afirma que Vygotsky reconhece, como Piaget, que a aprendizagem deve ser coerente com o nível de desenvolvimento da criança *"Existe uma relação entre determinado nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem"*; *"O ensino deve orientar-se baseando-se no desenvolvimento já produzido, na etapa já superada"* (Vygotsky et al, p. 111 e 113).

O nível de desenvolvimento efetivo ou real é o desenvolvimento das funções psicointelectuais da criança, que se estabelecem como resultado de certos ciclos ou de um processo de desenvolvimento específico.

Para Vygotsky (1996), quando definimos a idade mental de uma criança, com auxílio de testes, estamos identificando o respectivo nível de desenvolvimento efetivo ou real.

Oliveira (2003) defende que o termo "aprendizado" traduz melhor o que Vygotsky entende por "aprendizagem" e escreve:

> Aprendizado ou aprendizagem é o processo pelo qual o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes, valores, etc., a partir de seu contato com a realidade, o meio ambiente, as outras pessoas. É um processo que se diferencia dos fatores inatos (a capacidade de digestão, por exemplo, que já nasce com o indivíduo) e dos processos de maturação do organismo, independentes da informação, do ambiente (a maturação sexual, por exemplo). Em Vygotsky, justamente por sua ênfase nos processos sócio-históricos, a idéia de aprendizado inclui a independência dos indivíduos envolvidos no processo. O termo que ele utiliza em russo (obuchenie) significa algo como "processo de ensino-aprendizagem", incluindo sempre aquele que aprende, aquele que ensina e a relação entre essas pessoas. Pela falta de um termo equivalente em inglês, a palavra obuchenie tem sido traduzida ora como ensino, ora com aprendizagem e assim retraduzida para o português. Optamos aqui pelo uso da palavra aprendizado, menos comum que aprendizagem, para auxiliar o leitor a lembra-se que o conceito em

> Vygotsky tem um significado mais abrangente, sempre envolvendo interação social (p. 57).

O nível de desenvolvimento efetivo ou real define o estado alcançado pelo desenvolvimento (produto da aprendizagem), ou seja, o estado das funções que já amadureceram. São funções mentais que, segundo Vygotsky (1991), *"se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimento já completados"*. É o processo de desenvolvimento já realizado.

O nível de desenvolvimento efetivo é o mesmo que "desenvolvimento" para Piaget, o estado de amadurecimento das estruturas mentais.

3.3.2.5.2. Nível de Desenvolvimento Potencial

O nível de desenvolvimento potencial para Vygotsky é um importante nível de desenvolvimento e se refere ao nível que a criança pode alcançar em matéria de aprendizagem, com o auxílio do professor e de outras pessoas.

Para descobrir a relação entre o processo de desenvolvimento e a capacidade de aprendizagem não basta determinar o nível de desenvolvimento efetivo ou real; é necessário também descobrir o nível de desenvolvimento potencial.

Os testes psicológicos e, especificamente, a identificação da idade mental definiam apenas os limites de aprendizagem: a idade mental determinava o que poderia ser dado no programa de ensino. Estabelecido o limite, dele não se poderia passar. Estava errado. Vygotsky toma a idade mental como ponto de partida e quer saber até onde o aluno pode chegar. O que ele encontra é uma variabilidade muito grande entre as crianças.

O nível de desenvolvimento potencial, isto é, até onde o aluno potencialmente pode ir, é determinada por intermédio de solução de problemas sob a orientação do professor e sob mediação dos seus pares.

3.3.2.6. Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)

Um conceito genial e grandemente aplicável, a Zona do Desenvolvimento Proximal (ZDP) é, para Vygotsky:

> A distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de

> desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob orientação de adultos ou em colaboração com os companheiros mais capazes (1991, p. 97).

A ZDP compreende funções mentais ou operações mentais ou operações mentais em amadurecimento. Corresponderia, sob a ótica de Piaget, às que estão no nível intermediário de desenvolvimento.

Segundo Vygotsky, a zona de desenvolvimento proximal: *"define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de amadurecimento, funções que amadurecerão, mas estão presentemente em estado embrionário"*. (1991, p. 97). São processos que estão em estado de formação, que estão apenas começando a amadurecer e a se desenvolver. São "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, que não sejam "frutos".

A área de desenvolvimento proximal, como também é chamada a ZDP, é hoje o estado dinâmico de desenvolvimento e, amanhã, será o nível de desenvolvimento real. É o desenvolvimento mental prospectivo.

Estas noções permitem a Vygotsky pensamentos e afirmações absolutamente construtivistas, quais sejam: *"o único bom ensino é o que adianta o desenvolvimento"*; *"uma correta organização da aprendizagem da criança, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento"* (Vygotsky et al, 1988, p.114 e 115).

3.3.2.7. Conceitos Espontâneo e Científico

Vygotsky mostra duas linhas de formação de conceitos: a dos conceitos espontâneos e a dos conceitos científicos. São linhas distintas e independentes, que se desenvolvem paralelamente, embora uma influencie a outra.

De acordo com Vygotsky, a construção de conceitos, na qualidade de instrumentos de pensamento, se dá pelo indivíduo tanto através de experiências individuais, isto é, na interação social imediata (conceito espontâneo), como a partir dos conhecimentos transmitidos, em especial, na escola (conceito científico).

As pessoas, de um modo geral, desenvolvem conceitos espontâneos no transcorrer de atividades práticas, no sentido de ter relação direta com o objeto (concreto/particularidade), sem nenhum conceito intermediando e não tendo consciência do conceito. Assim a atenção destas fica centrada no objeto ao qual o conceito se refere e nunca ao próprio pensamento.

Já o conceito científico submete as pessoas a processos deliberados de instrução escolar, pois é adquirido por meio do ensino. Estes fazem parte de um sistema organizado de conhecimentos relevantes para a sociedade e tem a ver com o pensamento (abstração, generalidade), e desde o início há um outro conceito intermediando sua relação com o objeto ao qual o conceito se refere. Difere do conceito espontâneo, pois a atenção fica agora centrada no próprio pensamento e não no objeto ao qual o conceito se refere.

Estes conceitos se diferenciam, porque um tem desenvolvimento ascendente e o outro, descendente. Na visão Vygotskiana, o conceito espontâneo vai evoluindo – ascendendo – de modo que a pessoa passa a tomar consciência dele, a ponto de tornar-se capaz de defini-los com palavras ou operar com este conceito à vontade. Esta tomada de consciência propicia ao sujeito, desenvolver-se deste para um conceito científico. O conceito científico, geralmente abordado na escola pela sua definição, seguida de aplicação não-espontâneas (formais ou científicas), carece de conteúdo fruto da experiência pessoal. Mas, à medida que é trabalhado, vai adquirindo aspectos mais concretos, sensíveis, palpáveis, ou seja, se encaminha – descendendo – na direção do espontâneo. Nas palavras de Vygotsky (1996): "[...] *o desenvolvimento dos conceitos espontâneos das crianças é ascendente, enquanto que o desenvolvimento de seus conceitos científicos é descendente, para um nível mais elementar e concreto"* (p. 93).

Vygotsky mostra que a questão decisiva na formação de conceitos e, de modo particular, na formação de conceitos espontâneos, é a mediação através de signos e palavras. Assim este pensador diz que a linguagem do grupo cultural onde a criança se desenvolve dirige o processo de formação de conceitos, e a trajetória de desenvolvimento de um conceito já estão predeterminadas pelo significado que a palavra que o designa tem na linguagem dos adultos, pois a cultura deve ser tomada como parte essencial da constituição do ser humano, num processo em que o biológico se transforma no sócio-histórico.

Estes conceitos, embora distintos, estão intimamente relacionados, uma vez que, de um certo modo, a introdução de um conceito científico depende que um conceito espontâneo correlato tenha se desenvolvido. Do espontâneo espera-se chegar ao científico e, a partir do científico, tornar ao espontâneo, ou seja, há uma relação ascendente e descendente entre ambos. Em outras palavras, que os conceitos espontâneos se desenvolvam no sentido de se tornar cada vez mais abstratos e os científicos se desenvolvam no sentido de tornar-se cada vez mais concretos.

Assim, Vygotsky (1996) pronuncia:

> A criança adquire consciência de seus conceitos espontâneos relativamente tarde; a capacidade de defini-los por meio de palavras, de operar com eles à vontade, aparece muito tempo depois de ter adquirido os conceitos. Ela possui o conceito [...], mas não está consciente do seu próprio ato de pensamento. O desenvolvimento de um conceito científico, por outro lado, geralmente começa com sua definição verbal e com sua aplicação em operações não-espontâneas [...]. Poder-se-ia dizer que o desenvolvimento de conceitos espontâneos da criança é ascendente (indutivo), enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente (dedutivo) (p. 93).

O professor não deve, também, esquecer que o aluno já traz consigo um conhecimento espontâneo sobre o que lhe vai ser ensinado, muito embora, tais concepções sejam consideradas errôneas do ponto de vista científico; estes conhecimentos sempre devem ser levados em consideração pelo professor.

Neste aspecto Vygotsky (1991) assim se manifesta:

> Para elucidar a originalidade dos conceitos científicos, seria natural que escolhêssemos as vias de estudo comparadas dos conceitos, cotejando aqueles adquiridos pela criança na escola com seus conceitos espontâneos, ou melhor, o caminho do conhecido ao desconhecido.

Na visão de Matui (2003) os conceitos que o sujeito vai formando abrangem tanto o desenvolvimento como o conhecimento. Não se trata de reducionismo, mas, de fato, a construção de conceitos compreende o processo e o produto de construção, ou seja, para que ocorra o desenvolvimento, antes deve ocorrer a aprendizagem, o que, vai ao encontro do que preceitua Vygostsky (1996) a respeito da aprendizagem:

> O aprendizado é uma das principais fontes de conceitos da criança em idade escolar, e é também uma poderosa atividade que direciona o seu desenvolvimento, determinando o destino de todo o seu desenvolvimento mental.

Vygotsky acreditava na construção ativa do sujeito e defendia que a aprendizagem caminha à frente do desenvolvimento, servindo-lhe de guia.

Desta feita, a educação não fica à espera do desenvolvimento intelectual do sujeito e sim o leva adiante, pois quanto mais o sujeito aprende, mais se desenvolve mentalmente.

Falamos aqui de Piaget e Vygotsky que nos dão o suporte teórico para validar esta pesquisa. No Capítulo V, quando da aplicação e análise de nossas atividades, veremos que

o sócio-construtivismo de Vygotsky aparece, sobremaneira. Um passeio pelo Capítulo V permitirá uma visão mais apurada do que preceitua este pensador.

Queremos deixar claro que não queremos nos aprofundar no sócio-construtivismo de Vygotsky, mas sim tomar emprestados alguns dos seus pressupostos teóricos, como os que expomos no presente Capítulo, com o fim de nos auxiliar a entender como o trabalho em grupo associado ao manuseio de materiais concretos e através de situações-problema, pode proporcionar o ensino-aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica.

O aspecto sócio-construtivista que queremos abordar tem estreita ligação com a resolução de situações-problema. Assim analisamos as atividades de que tratam o Capítulo V sob este ponto de vista.

No desenrolar de nossas atividades fica evidente também a contribuição da Teoria de Piaget, principalmente no que se refere ao que este teórico chama de assimilação e acomodação (Piaget 1975). Isto é percebido quando a situação-problema que envolve a Geometria Esférica é apresentada ao aluno que nunca teve contato com os seus conceitos e assim, tenta adaptar os conceitos da Geometria Plana para solucionar o problema. Esse processo de usar informações que o aluno já conhece para construir outras informações é chamado de assimilação por Piaget (1975).

De outro modo, quando o aluno percebe que os conceitos de Geometria Euclidiana que possui não são suficientes para resolver a situação-problema e busca alternativas, este aluno modifica o conhecimento que possui para assim adaptar-se à Geometria Esférica. Ocorre, desta feita, o que Piaget (1975) chama de acomodação.

As atividades de que tratam o Capítulo V procuram abordar o que Piaget (1975) entende por aprendizagem, a qual, segundo ele, acontece quando ocorrem a assimilação e a acomodação, processos estes que são complementares.

A seguir, corroborando o nosso referencial teórico, explanaremos os procedimentos metodológicos que adotamos para esta pesquisa.

Capítulo IV

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Vivemos hoje um momento em que as ciências em geral tendem buscar áreas de intersecção, formas de integrar o conhecimento acumulado, de modo a alcançar uma compreensão mais completa dos objetos. A abordagem qualitativa e resolução de problemas têm, pois, forte apelo para o pensamento contemporâneo.

O construtivismo de Piaget e o sócio-construtivismo de Vygotsky, referenciais teóricos desta pesquisa, proporcionam estes dois aspectos. Assim, neste trabalho, a metodologia de pesquisa será qualitativa e a metodologia de ensino utilizará a resolução de problemas, que entendemos também como situações-problema[45].

4.1. **Metodologia de Pesquisa**

Procurando responder a pergunta: ***Que contribuições uma seqüência de atividades que tem como proposta a representação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino-aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica?,*** que direciona este trabalho, será analisada uma seqüência de atividades para alunos do ensino médio, abordando conceitos da Geometria Esférica, por intermédio de situações problemas.

Optamos por uma abordagem qualitativa de pesquisa, que segundo Bogdan e Biklen (1991), apresenta cinco características básicas:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Os investigadores introduzem-se e desprendem grandes quantidades de tempo em escolas, famílias, bairros e outros locais tentando elucidar questões educativas.
> 2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavra ou imagem e não de números. O resultado escrito da investigação contém citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação, os dados incluem transcrições e entrevistas, notas de campos, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais.

Neste trabalho é tomada uma postura descritiva, recolhendo os dados apresentados em forma de textos, desenhos, fragmentos de comunicação oral, transcrição de falas, entrevistas, diários reflexivos, caderno de campos, fitas de áudio e de vídeo.

[45] Para Dante (2003) problema = situação-problema

Na investigação qualitativa é interessante o processo, isto é, a trajetória dos acontecimentos, do que simplesmente os resultados. Foi verificado como os alunos do ensino médio de uma Escola Estadual do município de Santo André se depararam frente à situações-problema, independentemente se eles conseguiam ou não resolvê-las.

> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados obtidos.

Os dados foram analisados de forma que pudemos conhecer os procedimentos que os alunos tomam ao deparar-se com situações-problema envolvendo conceitos de Geometria Esférica. Sendo assim, não se pretendeu confirmar ou refutar hipóteses.

> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisarem os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou refutar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos forem se agrupando.

O significado atribuído pelos alunos frente às situações-problema é de substancial importância para a pesquisa qualitativa.

> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas.

Esta investigação vem ao encontro do pensamento de D'Ambrosio (2003, pp.103-104), que segundo ele, uma pesquisa qualitativa compreende:

> 1. Formulação de questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;

Como visto no capítulo anterior, aspectos das teorias de Piaget e Vygotsky estão presentes e sustentam uma seqüência de atividades que procurará responder à nossa questão de pesquisa.

> 2. Seleção dos locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco de investigação;
> 3. Identificação das relações entre estes elementos;

O local selecionado foi uma escola estadual do município de Santo André; os sujeitos, alunos do ensino médio e os objetos serão detalhados na interpretação dos dados, onde ocorrerá, também, a identificação da relação entre esses elementos. E ainda:

> 4. Definição de estratégia de coleção e análise de dados;
> 5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;
> 6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2
> 7. Redefinição de estratégias definidas no item 4;
> 8. Coleta e análise de dados.

Com relação às questões acima apontadas por D'Ambrosio (2003), estas terão um tratamento especial no Capítulo V deste trabalho.

Para este autor a validação da pesquisa qualitativa é menos direta que uma pesquisa quantitativa. Ressalta que, nesta última, os critérios matemáticos são sempre utilizados. Assim a pesquisa quantitativa é, por vezes, chamada de positivista.

Ainda segundo D'Ambrosio (2003), o registro dos dados deve ser o mais referenciado possível: se escrito, data, local e hora das anotações, com elementos identificadores dos locais e objetos descritos e dos indivíduos entrevistados; se gravado ou fotografado, as fitas devem ter esses mesmos dados.

Na análise dos dados de nossa pesquisa levaremos também em consideração, as idéias de Alves-Mazzotti (2004), que corroboram tudo o que foi aqui tratado, neste Capítulo:

> Pesquisas qualitativas tipicamente geram um enorme volume de dados que precisam ser organizados e compreendidos. Isto se faz através de um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado. Isto é um processo complexo, não-linear, que implica um trabalho de redução, organização e interpretação de dados que se inicia já na fase exploratória e acompanha toda a investigação. À medida que os dados vão sendo coletados, o pesquisador vai procurando tentativamente identificar temas e relações, construindo interpretações e gerando novas questões e/ou aperfeiçoando as anteriores, o que, por sua vez, o leva a buscar novos dados complementares ou mais específicos, que testem suas interpretações, num processo de "sintonia fina" que vai até a análise final (p. 170).

Desta feita, em nossa seqüência de atividades, não tínhamos "*a priori*" estabelecidas nenhuma hipótese e assim, os acontecimentos ocorriam de uma maneira não-linear, característica própria das metodologias de pesquisa qualitativa.

Nesta mesma linha de idéias, Goldemberg (2003), afirma que:

> Os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los (p. 53).

Queremos aqui ressaltar que numa investigação qualitativa, o pesquisador deve estar imerso no contexto de interação com os participantes do estudo, procurando aprender o significado por eles atribuídos aos fenômenos estudados e, ainda, o foco de estudo se ajusta durante a pesquisa, sendo os dados dela predominantemente descritivos e expresso através de palavras, corroborando, desta maneira, as idéias de Alves (1991). Desta feita, o significado das respostas dadas pelos alunos pesquisados, foi tratado de uma maneira especial.

Alves (1991) também menciona que o pesquisador é considerado como principal instrumento de pesquisa. A este respeito o professor deve então, aprender a usar sua própria pessoa como o mais confiável instrumento de observação, seleção, coordenação e interpretação de seus dados.

Esta pesquisa percorreu caminhos tortuosos, encontrou obstáculos na capacidade do conhecimento parcial e limitado do pesquisador, e chegou-se aos resultados de que trata o Capítulo V desta dissertação.

Assim é que concordamos com Goldemberg (2003), quando ressalta:

> Nenhuma pesquisa é totalmente controlável, com início, meio e fim previsíveis. A pesquisa é um processo em que é impossível prever todas as etapas. O pesquisador está sempre em estado de tensão porque sabe que seu conhecimento é parcial e limitado – o "possível" para ele (p.13).

4.2. **Metodologia de Ensino**

Vemos na metodologia de ensino que envolve resolução de problemas, caminhos para a apreensão de conceitos básicos em Geometria Esférica, já que esta metodologia está intrinsecamente de acordo com o aspecto construtivista que queremos abordar.

Desta feita, estamos priorizando o que dita os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que devemos questionar a realidade do aluno, no sentido de lhes apresentar problemas, o que, por sua vez, para resolvê-los ocasiona a criatividade, a intuição, o pensamento lógico, enfim, tudo aquilo que a teoria construtivista procura abarcar.

Os PCN+ do Ensino Médio (2002) ressaltam que a resolução de problemas é peça fundamental para o ensino da Matemática, e que faz o aluno engajar ativamente no processo de construção do conhecimento, mobilizando, desta feita o pensar e o fazer, e resume: *"o que se espera é que o aluno seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelos menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar de Matemática"* (p. 112).

Ressalta, ainda, que o fracasso do aluno em Matemática se dá pela sua incapacidade de resolver problemas, o que o impede de analisar situações onde devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Esta incapacidade se dá porque, quando possui informações e conceitos, o aluno não os mobiliza, não os combinam eficientemente e, desanimado, espera que o professor resolva por ele. Ao aluno, então, não é dado o direito de errar, de agir, pois a ele falta a confiança em sua própria forma de pensar. Cabe ao professor, intervir neste processo, no sentido de colocar o aluno diante de situações-problema que tenha sentido para o aluno, que tenha a ver com o seu cotidiano, que faça parte da sua realidade, e acreditando que a Geometria Esférica proporciona tudo isso é que optamos pela resolução de problemas. Vemos nesta perspectiva metodológica, uma postura de investigação que leva o aluno a pensar por si mesmo, introspectivo que estará diante de situações desafiadoras. Acreditamos que assim, vamos ao encontro dos PNC+, que também ressalta:

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações versificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido (p. 113).

Mas o que é um problema? Para Dante (2003, p. 9): *"é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la"* (p. 9). E um problema matemático, o que é? Este mesmo autor afirma que: *"é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la"*.

Veja que o autor fala em situação que exija a maneira matemática de pensar. Neste sentido é que vamos denominar os nossos problemas de situação-problema. Onde escrevermos problema, leia-se: situação-problema.

Neste aspecto Butts (1997) cita Henry Pollak que adverte: Em vez de dizer aos alunos: *"Eis um problema; resolvam-no, diga-lhes: Eis uma situação; pensem nela"* (p. 36).

Segundo Dante (2003), a oportunidade de usar os conceitos matemáticos no seu dia-a-dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à Matemática. Diz ele: *"o único veículo que permite apresentar as aplicações da Matemática é a resolução de problemas"*. Não basta fazer mecanicamente as operações, é preciso saber como e quando usá-las convenientemente na resolução de situações-problema.

Apesar da importância da Matemática, quer pelo desenvolvimento de raciocínio que proporciona ao aluno, quer por suas aplicações nos problemas da vida diária, em geral, os alunos, logo nos primeiros contatos com essa ciência começam a detestá-la ou tornam-se indiferentes a ela. Isso é atribuído ao exagero no treino de algoritmos e regras desvinculadas de situações reais, além do pouco envolvimento do aluno com aplicações da Matemática que exijam o raciocínio e o modo de pensar matemático para resolvê-las. Esta falta de empatia para com o pensamento matemático produz a incompreensão em relação aos métodos matemáticos e faz com que o aluno não compreenda seu método de raciocínio particular e se desinteresse; e, mesmo sendo compreendida em seus métodos, a Matemática é vista como pouco útil para a sua realidade cotidiana. Isso mantém íntima relação com a resolução de problemas: a atenção é despertada para a busca de uma solução, quando o aluno compreende que o problema está, de alguma forma, relacionado à sua vida cotidiana e, mais especificamente, profissional.

Polya (1997) coloca que resolver problemas era o tema mais importante para se fazer Matemática, e ensinar o aluno a pensar era sua importância primeira. Assim, acreditamos que ensinar o aluno a pensar frente às novas situações é de suma importância para o aprendizado de uma "nova" Geometria, qual seja: a Esférica.

Assim, para Polya (1997):

> Resolver problemas é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem. A capacidade de contornar um obstáculo, empreender um caminho indireto, onde nenhum caminho direto se apresenta, coloca o ser inteligente acima do estúpido, coloca o homem

> muito acima dos mais inteligentes animais e homens de talento acima de seus próximos (p. 2).

Concordamos com Freitas (2002), quando fala que a resolução de problemas deve ter uma abordagem construtivista, com problematizações adequadas e compatíveis com o referencial teórico. Entre os recursos didáticos que poderiam ser utilizados cita, por exemplo: problematização matemática a partir de exploração de material concreto de manipulação ou de situações problemas contextualizadas.

Compactuamos também com o pensamento de Onuchic (1999) quando diz

> Ao se ensinar Matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas com respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve de exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos) (p.207).

Ao encontro da abordagem construtivista de resolução de problemas deparo com as idéias de Van De Walle (2001) que apresenta uma visão construtivista de aprendizagem por intermédio da resolução de problemas e assim se pronuncia para que o ensino de Matemática aconteça:

> Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer (apud Onuchic e Allevato, 2004, p.221).

De acordo com esse mesmo autor, para que isso ocorra, toda a aula deve estar compreendida por três etapas importantes: antes, durante e depois.

Na primeira etapa, “antes”, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na etapa “durante”, os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho. Finalmente, na etapa “depois”, o professor aceita a solução dos alunos sem

avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza novos conceitos e novos conteúdos construídos, segundo esta linha de orientação.

Elaboramos uma seqüência de atividades, tais que, o aluno, nos conceitos que vai formando cria um objeto final que é a bola de futebol. Neste caminho ele será então o protagonista, e o professor como mediador neste processo, trabalha no papel de coadjuvante. É assim, como se fosse num filme, onde uma história deve ser contada, com um começo, um meio e um fim. No desenrolar desta história o aluno, no início, depara-se com a situação-problema, em seguida tenta solucioná-la para, no término, como na maioria dos filmes, o mocinho tenha um final feliz que é a construção de seu artefato (a bola de futebol), artefato este imbuído de vários conceitos geométricos que construiu durante a história desse filme. Mas é um filme que tem uma seqüência, os conceitos nele construídos serão necessários para que os próximos tenham tanto êxito como o anterior. Desta maneira, o roteiro, proporciona ao aluno sua expressão de criatividade, buscando, ele próprio, apresentar suas idéias matemáticas e conjecturas, desenvolvendo, desta feita, o raciocínio lógico.

Para que a situação acima tenha êxito, e visto que o aluno é o ator principal da história, o professor, no papel de coadjuvante, deve elaborar atividades que envolvam ativamente os alunos no processo de construção de seus conhecimentos. Problemas de modo a tirar o aluno da passividade, levando-o a ser um sujeito ativo frente a uma situação-problema. Assim é que o professor, na qualidade de mediador da construção do aprendizado deve atuar neste filme, criando situações desafiadoras que levem os alunos a trabalharem com todas as armas (estratégias) que possuem, no sentido de apresentar uma solução ao problema que o desafiou, pois todo mocinho de um filme é desafiado e desafiado que é, luta até o fim para, desta maneira, ter um final vitorioso.

Neste sentido, Gouvea (2005) diz que: *"Considerando a Geometria como um assunto importante para a formação Matemática dos alunos, cabe aos professores a responsabilidade de viabilizar este processo por meio de metodologias alternativas"* (p. 86).

Na mesma linha de raciocínio, Miskulin (1999) assim se pronuncia:

> O ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só, não é suficiente para promover contextos propícios para a construção do conhecimento. Neste sentido, a mediação do professor desempenha um papel determinante, na medida em que o professor cria as situações desafiantes;

> recorta esta situação de vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem muitas vezes do problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhe a busca de novos caminhos e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-se, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento (p. 88).

Ninguém discorda de que um dos objetivos do ensino de Matemática é o de preparar o aluno para resolver problemas da vida real através do desenvolvimento do raciocínio lógico. O que se constata na prática em sala de aula, entretanto, é a existência de fortes dificuldades para que esse raciocínio seja utilizado nas interpretações dos problemas. Além disso, não basta apenas propor questões ou responder satisfatoriamente a elas. Tais procedimentos seriam um mero retorno a uma postura típica do ensino tradicional, em que se esperava que o aprendizado se fizesse pela repetição ou pelo cansaço. Esclarecendo este ponto: o ensino deve perseguir a contínua participação do aluno. O ensino expositivo – a técnica de o professor explicar os métodos e os alunos repetirem em exercícios, tem eficácia limitada. Não importa que se ensine o método mais moderno ou a teoria mais revolucionária: importa que se incentive a participação do aluno, e que a passividade típica de uma aula expositiva seja evitada.

Queremos nos convencer de que a sala de aula é, por excelência, o lugar onde devem ser questionadas as respostas dadas, pois o aprendizado ocorre pela comparação das semelhanças e diferenças entre diversas situações-problema. Sem essa premissa básica, o aluno acaba adotando uma postura de conformismo e acomodação diante de tudo aquilo que já vier pronto.

Fazer o aluno pensar, construindo seu próprio conhecimento matemático e, por conseguinte, seu próprio mecanismo lógico de pensamento, constitui-se, portanto, num dos objetivos principais do ensino da Matemática. Para que este processo se desenvolva de maneira satisfatória um caminho muito usado é envolver o aluno em situações-problema que o desafie e o motive a querer resolvê-las. Isso, ao mesmo tempo, amplia sua habilidade para usar o raciocínio lógico e para fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis. Desta forma, poder-se-á estabelecer um elo entre o saber escolar e os problemas cotidianos e, portanto, o aluno proporá soluções adequadas às questões que surgem em seu dia-a-dia. Esta é uma das razões pelas quais a resolução de problemas tem sido reconhecida como uma técnica muito eficiente de aprendizagem da Matemática. Para preparar um caminho vinculador entre a escola e o cotidiano, um método bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas.

Onuchic (1999) ainda nos dá a seguinte contribuição, quando afirma:

> Os estudos e as pesquisas em Resolução de Problemas sofreram influências de teorias construtivistas que, em anos recentes, tiveram considerável aceitação na Educação Matemática. Na perspectiva construtivista, o aluno deve ser engajado ativamente na construção de seu próprio conhecimento. Construtivismo e teorias de processamento de informação são as teorias mais usadas para se tirar implicações sobre o modo de pensar dos alunos. Estas teorias incorporam a idéia de que estudante não são recipientes vazios a serem preenchidos com pedaços não relacionados de informação, mas que, antes, devem ser vistos como seres pensantes capazes de interpretar e se lembrar de fatos baseados em seu conhecimento e em suas experiências passadas (p. 210).

É assim que, conforme a metodologia de pesquisa mostrada neste Capítulo, pretendemos conduzir este trabalho, numa perspectiva sócio-construtivista, através da abordagem de resolução de situações-problema.

A seguir, apresentamos nossa seqüência de atividades, onde os conteúdos que foram tratados neste e nos capítulos anteriores se completam, resultando na aplicação e análise das atividades de que trata esta investigação.

Capítulo V

5. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

O objetivo principal da seqüência de atividades é apresentar uma "nova" Geometria aos alunos, de modo que eles possam apreender conceitos básicos de Geometria Esférica e ainda, estabelecer conexões com conceitos da Geometria Euclidiana. Para isso necessário se faz que esta Geometria se torne atraente para os aprendizes, de modo que tenha relação com o seu cotidiano.

Como já citado na Apresentação deste trabalho, acreditamos que uma das maneiras de tornar o ensino da Geometria Esférica significativo é inseri-la no contexto cultural do aluno, com o propósito de levá-lo a construir um artefato que possa não somente proporcionar-lhe o prazer de ter construído alguma coisa pelas próprias mãos, como também o prazer de estar mostrando este artefato a outras pessoas e sentir o orgulho de dizer: *"olha, fui eu quem fez"*.

Nossa intenção será proposital, isto é, o artefato que o aluno irá construir, estará impregnado de conceitos que ele, sem se dar conta, se apossará de conhecimentos de outra Geometria e ainda, fortalecerá os conceitos da Geometria (achamos) que já conhece.

Pensamos que a tesselação na superfície de uma esfera que tenha como fim a representação de uma bola de futebol, seria o artefato ideal a ser construído para o objetivo a que estamos propondo, qual seja, dar significado à Geometria Esférica para os alunos do ensino médio.

Nossa seqüência de atividades baseia-se, a princípio, em introduzir conceitos básicos da Geometria Esférica para o aluno, entre eles: ponto, reta, plano, polígonos, etc. A seguir, estaremos propondo que eles tesselem na superfície esférica as faces dos sólidos platônicos para assim, construir o artefato final que é a bola de futebol. Nosso intuito é que, ao final deste processo, o aluno não só estará conhecendo uma "nova" Geometria, como também, terá resgatado conceitos da Geometria que já conhecia, a Euclidiana.

5.1. Sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi proposta para um grupo de oito alunos do ensino médio. São alunos da Escola Estadual Prof. José Henrique de Paula de Silva, localizada no município de Santo André, no Bairro Parque Novo Oratório.

Decidimos que as atividades iriam realizar-se em grupos, indo desta maneira ao encontro do nosso referencial teórico. O trabalho em grupo permite a abertura nas Zonas de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky, 1991).

Foram formados três grupos, um grupo com dois alunos e dois grupos com três. Resolvemos então formar estes grupos por série. O primeiro grupo foi formado pelos alunos da primeira série: Eduardo, Diego e Gabriela e estes deram ao grupo o nome de Green Day. O segundo grupo formado pelos alunos da segunda série, Vinícius e Rafael, recebeu o nome de Bears e o terceiro grupo formado pelos alunos: Fábio, Rodrigo e Viviane, nomeado Loka e Lokos, alunos da 3ª série.

No nosso primeiro encontro, dissemos que estávamos fazendo uma pesquisa de ensino, objeto de nossa dissertação de mestrado, e que esta pesquisa tinha como objetivo apresentar aos alunos conceitos de uma "nova" Geometria, no sentido de compará-los com aqueles por eles até então conhecidos. Lançamos então o desafio:

- Pessoal, que tal construirmos uma bola de futebol?

Todos gostaram da idéia e sentimos um grande entusiasmo por parte dos alunos. Quando entramos na sala de aula e os alunos nela se encontravam, brincávamos com uma bola de futebol e a lançamos para um determinado aluno propondo que ele ficasse com a bola, estimulando-o a identificar e estudar as figuras nela encontradas. Esta rotina repetiu-se nos próximos sete encontros sendo que, em um deles, um aluno questionou:

- Professor o dia que o senhor for dar a bola para mim eu não quero a de futebol e sim a de vôlei.

Dissemos-lhe que não, porque o que estamos propondo era a construção da bola de futebol e não a de vôlei. No penúltimo dos nossos encontros pudemos perceber o porquê do interesse do aluno pela bola de vôlei, o que, nos deixou surpresos e mais, extrapolou os limites da nossa pesquisa. Voltaremos ao assunto em nossas considerações finais. Para identificar este episódio o chamaremos de *caso da bola de vôlei*.

Comentamos que antes que a bola de futebol pudesse ser construída eles deveriam conhecer muitos conceitos e que teríamos uma seqüência de doze atividades, distribuídas em doze encontros, com duração de uma hora cada. Todos assumiram o compromisso de estarem presentes em todos os encontros.

Devemos deixar claro que os doze encontros previstos, na realidade, somaram quatorze, tendo em vista alguns empecilhos e surpresas encontradas no percurso do caminho.

A Décima Primeira Atividade que, programada para ser realizada em apenas um encontro necessitou, na realidade, de dois. Um outro encontro extra se fez necessário para debatermos um acontecimento não esperado que denominamos de *caso da bola de vôlei*.

O primeiro encontro ocorreu no dia 01 de agosto de 2005, às 16:00 horas, segunda-feira. Ficou estabelecido que todas os outros encontros ocorreriam no mesmo horário, de segunda a sexta-feira.

Antes da aplicação de nossas atividades faz-se necessário elucidar que toda a sua seqüência foi adaptada de Lénàrt (1996), sendo que a primeira delas, além de constar na obra deste autor, consta também em Martos (2002).

5.2. As Atividades

5.2.1. Primeira Atividade (realizada em 01.08.05 – segunda-feira)

O objetivo principal desta atividade foi apresentar aos alunos que existem outras Geometrias, além daquela que eles já conhecem. Neste caso foi o de apresentá-los à Geometria Esférica.

O professor-pesquisador localiza historicamente as Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas, tomando-se como referência o que dita os dados históricos apontados no Capítulo II. Feito isto, pede para que os grupos se posicionem em três lugares distintos da sala de aula (este posicionamento ocorreu na maioria das atividades) e entrega para cada grupo uma folha de sulfite, onde se encontra o enunciado da situação-problema:

> "Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 km. ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou por mais 100 km. Então virou novamente e caminhou por mais 100 km ao norte. Qual não foi a sua surpresa quando descobriu que voltara novamente para a sua casa".

Pedimos aos componentes do grupo que lessem com atenção o enunciado do problema e ao primeiro item solicitado.

Questão 1:

- Esboce numa folha de sulfite o percurso do urso. Comente com os seus colegas de grupo as conclusões que chegaram. Anote-as.

Questão 2:

- É possível o urso chegar ao mesmo lugar de partida de acordo com o enunciado do problema? Comente com os seus colegas de grupo, anotando as conclusões.

Protocolo: Grupo Green Day (Fig. 24)

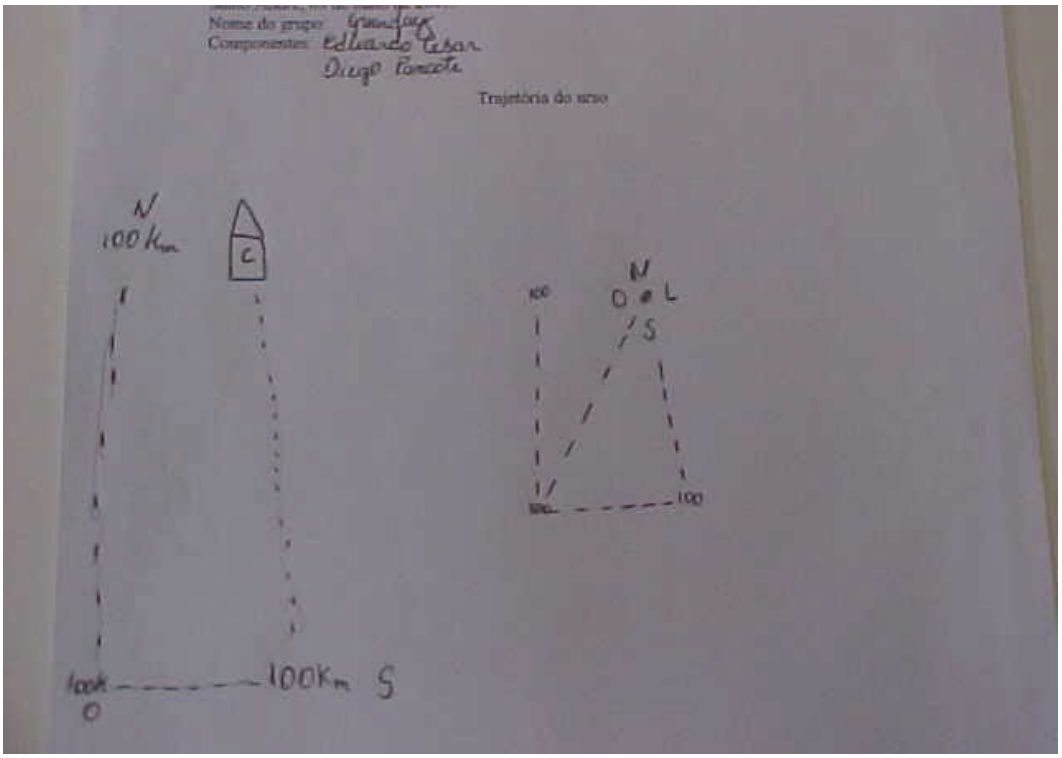


Figura 24: I Protocolo Grupo Green Day

Conclusão do grupo

Questão 1: *O urso não chegou ao lugar de partida, pois ficou a 100 km a oeste de sua casa.*

Questão 2: *Não é possível, pois ele teria ainda que andar 100 km para o leste.*

Protocolo: Grupo Bears (Fig. 25)

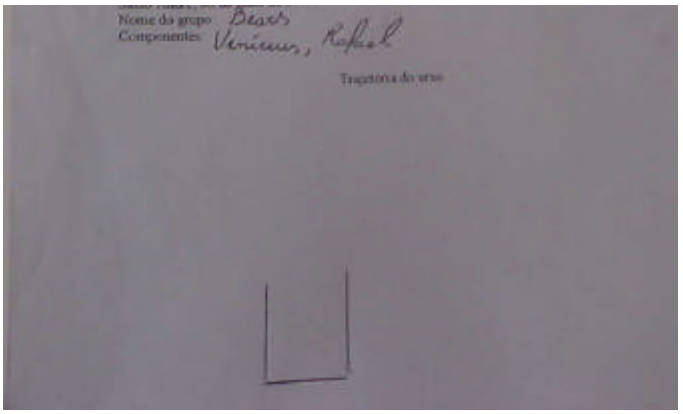


Figura 25: I Protocolo Grupo Bears

Conclusão do grupo

> Questão 1: *Não é possível, pois depende da superfície. Numa superfície plana não é possível o urso retornar ao local de partida.*
>
> Questão 2: *Não, pois seria necessário que ele andasse mais 100 km para o leste.*

Protocolo: Grupo Loka e Lokos (Fig. 26)

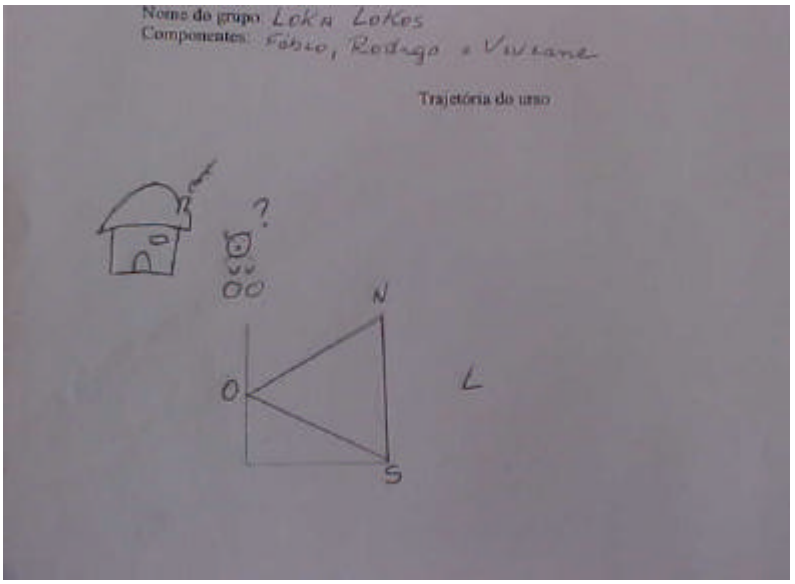


Figura 26: I Protocolo Grupo Loka e Lokos

Conclusão do grupo

> Questão 1: *O urso pode fazer seu percurso de tal maneira que forme um triângulo.*
>
> Questão 2: *Sim, é possível ao urso voltar ao lugar de partida, pois sua trajetória é um triângulo.*

Pudemos constatar que dois grupos perceberam, com exceção do terceiro, que numa superfície plana, de acordo com os dados do problema, não é possível o urso retornar ao ponto de partida. Com relação ao grupo que disse que era possível o urso chegar ao ponto de partida, pois o percurso era um triângulo, acreditamos que isso se deu por conta do enunciado do problema, que aos nossos olhos, parece induzir o aluno que o urso deve chegar ao ponto de partida.

Passamos então às mãos dos grupos esferas de isopor e canetinhas coloridas e pedimos a eles que esboçassem na esfera a trajetória do urso para, assim, responder as seguintes questões:

Questão 3:

Esboce agora na esfera que receberam, a trajetória do urso. Comente com os seus colegas as conclusões que chegaram. Anote-as.

Questão 4:

De acordo com a trajetória desenhada na esfera, é possível o urso chegar no mesmo lugar de partida? Justifique sua resposta.

Protocolo: Grupo Green Day (Fig. 27)

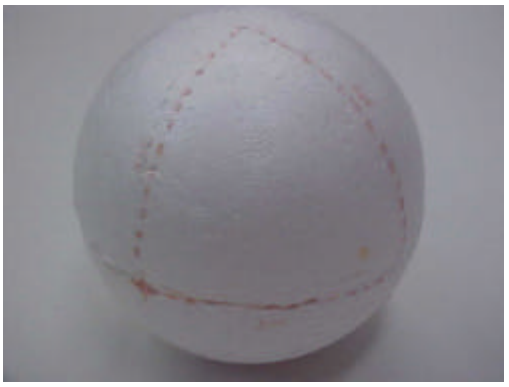


Figura 27: II Protocolo Grupo Green Day

Conclusão do Grupo

Questão 3: *Vendo através de uma esfera é possível ele chegar ao ponto de partida.*

Questão 4: *Sim é possível o urso chegar ao ponto de partida porque a esfera não é um plano reto como a folha de sulfite.*

Protocolo Grupo Bears (Fig. 28)

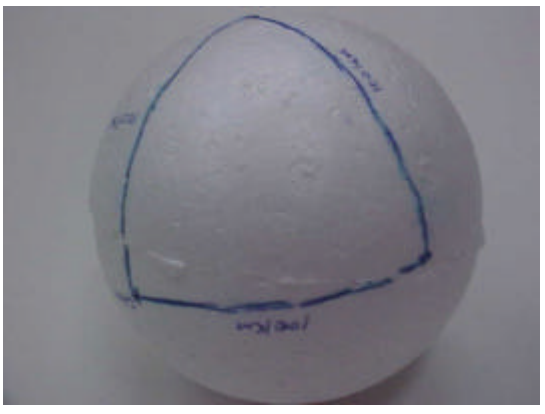


Figura 28: II Protocolo Grupo Bears

Conclusão do Grupo

Questão 3: *Em uma esfera a trajetória fica correta e o urso consegue voltar para a sua casa.*

Questão 4: *Sim, na superfície esférica é possível se chegar ao ponto de partida com três, duas e até uma reta.*

Protocolo Grupo Loka e Lokos (Fig. 29)

Figura 29: II Protocolo Grupo Loka e Lokos

Conclusão do grupo

Questão 3: *A trajetória é um triângulo parecido com o do papel, só que com uma inclinação.*

Questão 4: *Sim, pois não importa a superfície em que ele esteja.*

Verificamos novamente que os dois primeiros grupos conseguiram perceber as diferenças entre as trajetórias na superfície plana e na esférica. Novamente o terceiro grupo não conseguiu enxergar da mesma maneira. Diante deste fato, propusemos aos grupos que perceberam as diferenças interar-se com o grupo que não percebeu, de modo que emergisse a Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky, 1991), o que realmente foi constatado.

Um fato que chamou a nossa atenção foi a resposta dada na questão quatro pelo Grupo Bears:

- Sim, na superfície esférica é possível se chegar ao ponto de partida com três, duas e até uma reta.

Interrogamos então o grupo e pedimos para que ele nos explicasse o porquê daquela resposta.

Responderam:

> *- Não consideramos aí os dados do problema, mas percebemos que o urso numa superfície esférica pode, ao sair de sua casa, voltar novamente nela, sem voltar pelo mesmo caminho, através de:*
> *3 retas: Foi o trajeto que desenhamos na esfera de isopor.*
> *2 retas: (mostrou desenhando na esfera) Verificamos que o aluno representou um biângulo, sem ainda ter este conceito formalizado.*
> *1 reta: O aluno desenhou uma volta completa na esfera, não tendo, ainda, o conceito de círculo máximo formalizado.*

À luz dos teóricos por nós contemplados, vimos que os alunos através da palavra, isto é, da interação através do diálogo, ferramenta de suma importância da teoria de Vygostky, já na primeira atividade conseguiram estabelecer conexões entre as Geometrias Plana e Esférica.

Percebemos assim, nesta atividade, que os alunos apresentaram pistas no sentido de atingir o objetivo esperado, que era o de deparar com uma "nova" Geometria. Desde modo, estavam previamente construindo conceitos que seriam objetos das próximas atividades, o que, ao nosso ver, os farão ir ao encontro dos conceitos científicos (aqueles que se aprendem na escola), outro ponto relevante para Vygotsky.

Outra constatação importante, também à luz da teoria de Vygotsky, foi a mediação feita pelos alunos através de instrumentos, ou seja, a simples mudança do plano (papel sulfite) para a superfície esférica (bola de isopor) proporcionou ao aluno verificar, por intermédio do diálogo (troca de palavras) entre eles que as superfícies são diferentes (diálogo surgido porque mudou o contexto do problema), e o que acontece no plano, no caso a caminhada do urso, não acontece na superfície esférica, emergindo, desta feita, conceitos diferenciados nestas Geometrias. Com relação a este fato, Vygotsky (1996) diz:

> Todas as funções psíquicas superiores são processos mediados, e os signos constituem o meio básico para dominá-las e dirigi-las. O signo mediador é incorporado à sua estrutura como uma parte indispensável, na verdade a parte central no processo como um todo. Na formação de conceitos, esse signo é a palavra, que em princípio tem o papel do meio na formação do conceito e, posteriormente, torna-se o seu símbolo (p. 48).

Vimos também, nesta atividade, o que Piaget (1975) chama de assimilação e acomodação, pelo fato dos alunos usarem conhecimentos da Geometria Plana para descobrir uma "outra" Geometria.

Questão 5:
Qual a cor do urso? Justifique sua resposta.

Somente o grupo Green Day chegou à conclusão que a cor do urso era branco e justificaram:

> *- Ora professor, se a casa dele é no pólo norte o urso só pode ser branco, porque no pólo norte só vive ursos brancos.*

Os outros dois grupos ficaram surpresos, dizendo:

> *- Porque não pensamos nisso antes!*

Aproveitamos o momento desta discussão para fazer uma interdisciplinaridade com Geografia, validando o que o Grupo Green Day havia falado a respeito dos ursos brancos, ou seja, que viviam no pólo norte. Pedimos aos componentes dos grupos que comentassem a questão com os seus professores. Para a nossa surpresa, viemos saber, em encontros posteriores, que outros conhecimentos foram agregados em relação ao hábitat dos ursos polares, comprovando, então, a interdisciplinaridade esperada. Ficaram sabendo que numa experiência, colocaram pingüins no pólo norte e ursos polares no pólo sul. Devido às diferenças climáticas entre os dois pólos, nem um e nem outro conseguiram adaptar-se. Assim, esses alunos, puderam saber mais a respeito das diferenças climáticas em nosso globo terrestre, conhecimento este gerado através de uma atividade envolvendo conceitos geométricos e que proporcionou outros conhecimentos, gerando, desta forma a interdisciplinaridade.

Esta mesma atividade aplicada com professores dos ensinos fundamental e médio, quando da realização do nosso mini-curso no XI Encontro Baiano de Educação Matemática, mostrou-nos evidências de que os alunos somente puderam concluir que o urso poderia chegar ao lugar de partida quando de posse da esfera de isopor. Quando

esboçaram o percurso do urso no papel sulfite não conseguiram ver que o urso poderia chegar ao lugar de onde partiu, pelo fato de conceitos da Geometria Plana estarem enraizados em suas mentes. Acreditamos que a troca de material, do sulfite para a esfera é que proporcionou aos professores estabelecerem as diferenças entre superfícies plana e esférica.

5.2.2. Segunda Atividade (realizada em 02.08.05 – terça-feira)

Foram utilizados para a realização desta atividade os polígonos: triângulo, quadrado, pentágono e hexágono. Estes polígonos eram regulares (3 cm. de lado) e foram confeccionados com cartolina pelo professor-pesquisador.

Vocês têm em mãos vários polígonos regulares.

1) Usando apenas um tipo de polígono, é possível encaixá-los de modo que um não sobreponha o outro e não sobre espaço vazio entre eles?
2) Quais os polígonos que você verificou que ocorre a situação da primeira questão?
3) É possível verificar que polígonos se encaixam em torno de um vértice comum?
4) Se você verificou que polígonos se encaixam em torno de um vértice comum, preencha a tabela abaixo, descobrindo a medida do ângulo interno do polígono e o número de polígonos usados em torno do ponto de encaixe (vértice comum). Tente estabelecer uma relação e preencha a tabela abaixo.

Polígono	Ângulo Interno	Número de Polígonos
Triângulo		
Quadrado		
Pentágono		
Hexágono		

5) Agora responda: o que é necessário para que o encaixe entre polígonos regulares seja perfeito em torno de um ponto, sem que haja falhas ou sobreposição entre eles?
6) Respondam ainda, quais os polígonos regulares que podem pavimentar o plano?

O objetivo desta atividade foi preparar os alunos para que, no momento em que eles deparassem com a tesselação da superfície esférica, pudessem fazer uma analogia com o ladrilhamento na superfície plana e, portanto, tivessem uma melhor compreensão do assunto. Ao mesmo tempo, trazer à tona alguns conceitos básicos de Geometria Plana.

Os alunos resolveram esta atividade sem dificuldades, porque já tinham assimilado (Piaget, 1975) os conceitos para realizá-la a contento. Ao mesmo tempo descobriram outros, acomodação (Piaget, 1975). Nas atividades 9 e 10 dessa seqüência fica visível que os conceitos aqui tratados foram apreendidos pelos alunos.

Pode-se notar, ainda, nesta atividade que todos tinham conhecimento que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo (no plano) era 180^o e também que a soma dos ângulos internos dos outros polígonos regulares que eles usaram para esta atividade poderia ser obtida pela triangulação, fato este que permitiu os alunos descobrir a medida dos ângulos internos dos polígonos. Mostramos a seguir um diálogo neste sentido.

> Professor-pesquisador (dirigindo-se a todos os grupos): *Quanto mede cada ângulo do triângulo que vocês tem em mãos?*
>
> Todos os grupos: *60^o*.
>
> Professor-pesquisador: *Porque mede 60^o?*
>
> Todos os grupos: *Porque se o polígono é regular cada ângulo tem a mesma medida. Como a soma dos três é 180^o, cada ângulo desse polígono vai medir 60^o*.
>
> Professor-pesquisador: *E dos outros polígonos como vocês descobriram a medida do ângulo interno.*
>
> Grupo Green Day*: Porque, por exemplo, dividimos o quadrado em dois triângulos (estavam se referindo ao método da triangulação), então se um triângulo a soma é 180^o e aqui temos dois triângulos é lógico que a soma dos ângulos desses dois será 360^o, então a soma dos ângulos do quadrado é 360^o. Como eles têm quatro ângulos, cada um vai medir 90^o*.

Professor-pesquisador: *Os outros grupos concordam?*

Todos os outros grupos concordaram, dizendo que haviam aprendido com a professora da 8ª série e que tinham usado este aprendizado para descobrir a medida dos ângulos internos do polígono.

Vygotsky conceitua este fato como zona de desenvolvimento real, isto é, conceitos que já estão internalizados, enraizados e que não precisam da intervenção de uma pessoa mais capaz para que o aluno possa resolver. Neste caso, não foi necessária a intervenção do professor para que as questões fossem solucionadas, a mediação se deu através dos elementos do próprio grupo.

Já para Piaget (1975) este processo é chamado de assimilação, pois o aluno usou de conhecimentos que já possuía para resolver a situação-problema.

5.2.3. Terceira Atividade (realizada em 03.08.05 – quarta-feira)

Nesta atividade procurou-se evidenciar a diferença entre esfera e superfície esférica, tendo em vista facilitar a compreensão, em atividades futuras, de superfícies plana e esférica. Eis a atividade:

Vocês têm em mão dois objetos (bolinha de pingue-pongue e bola de sinuca):

a) qual a forma geométrica desses objetos?

b) vocês notam alguma diferença entre estes dois objetos? Em caso positivo, descreva.

c) Vocês conhecem outros objetos com esta forma geométrica? Quais?

Na situação *a*, todos os grupos foram unânimes em responder que os dois objetos tinham a forma de uma esfera.

Na situação *b*, o que mais chamou a atenção foi que todos os grupos atribuíram o fator peso, como diferença entre os dois objetos.

O professor-pesquisador, na condição de mediador, usou da palavra “peso” citado por todos os alunos para falar sob o seu significado no sentido que estes compreendessem que a superfície esférica era uma espécie de “casca” que cobria a esfera, enquanto que a esfera compreendia o “miolo” mais a “casca”.

Por fim, na situação *c*, dois grupos citaram a bola de futebol e um deles citou o globo terrestre, mostrando assim, que os conceitos cotidianos de que fala Vygotsky, foram

importantes para o objetivo desta atividade, qual seja, diferenciar superfície esférica de esfera.

As próximas atividades têm como objetivo principal estabelecer relações entre as Geometrias Euclidiana e Esférica e com isso levar o aluno a perceber as semelhança e diferenças existentes entre elas.

5.2.4. Quarta Atividade (realizada em 04.08.05 – quinta-feira)

O objetivo desta atividade foi levar o aluno a perceber que o ponto na superfície plana e na superfície esférica tem o mesmo significado.

Para esta atividade foram dados aos alunos alfinetes com cabeças coloridas (ponto), folha de papel sulfite (superfície plana) e esferas de isopor (superfície esférica).

a) Represente um ponto no plano.

b) Represente um ponto na superfície esférica.

c) Comente suas conclusões a respeito destas representações.

Todos os alunos representaram o ponto nas superfícies plana e esférica, chegando a conclusão que o ponto tem o mesmo significado, tanto na superfície plana quanto na superfície esférica.

Observe, através da fala dos integrantes do Grupo Loka e Lokos, como a interação do grupo contribuiu para a apropriação de conceitos.

> Fábio: *Ponto no plano é plano e na esfera é esférico.*
>
> Viviane: *Para mim ponto é ponto em qualquer lugar.*
>
> Fábio: *Aqui no plano ele tá retinho e na esfera ele tá inclinado.*
>
> Viviane: *Eu acho que ponto na superfície plana e na superfície esférica é apenas um ponto...já era...não importa onde está...um ponto é um ponto, não importa em que superfície está.*

Rodrigo: *Se fosse uma reta seria diferente...mas não é uma reta, é um ponto e ponto é a mesma coisa nas duas superfícies.*

Na folha de respostas da atividade o Grupo Loka e Lokos respondeu que ponto na superfície esférica e na superfície plana significava a mesma coisa, constatando assim que o Grupo chegou a esta conclusão, o que, fica evidente no diálogo acima transcrito.

Nesta atividade notamos também o que Piaget (1975) chama de assimilação e acomodação.

5.2.5. Quinta Atividade (realizada em 05.08.05 – sexta-feira)

Esta atividade teve como objetivo mostrar aos alunos que tanto na superfície plana como na esférica, a distância entre dois pontos, são respectivamente segmentos de reta e arcos.

Para a sua realização foram utilizados esferas de isopor, papel sulfite, alfinetes, barbantes e canetinhas coloridas.

a) Marque dois pontos distintos em uma superfície plana. Qual a menor distância entre estes dois pontos?

b) Marque dois pontos distintos em uma superfície esférica. Qual a menor distância entre estes dois pontos?

Respostas dadas pelo Grupo Green Day:

- *Uma reta* (item a) e *Uma linha curva em direção ao outro ponto* (item b).

Na transcrição de fitas quando da resolução desta atividade, ouvimos o seguinte diálogo de um dos integrantes do Grupo Green Day:

- Se eu andar assim, o caminho é mais longo, se eu andar em linha reta o caminho é mais curto. Então, o caminho mais curto entre dois pontos é uma reta.

Pedimos então, ao aluno, que mostrasse numa folha de sulfite, o que ele quis dizer, o que, podemos constatar no seguinte protocolo (Fig. 30).

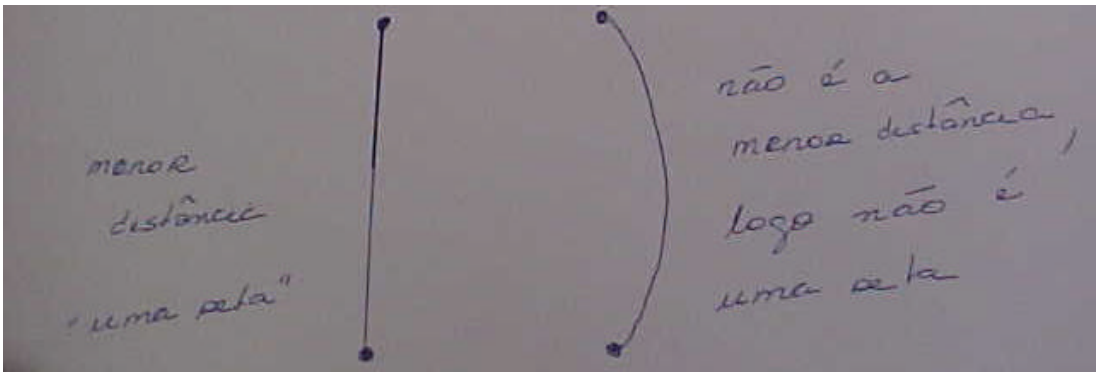


Figura 30: III Protocolo Grupo Green Day

E o grupo chegou à seguinte conclusão:

> - *Uma reta* (item a) e *Uma linha curva* (item b).

A conclusão do Grupo Loka e Lokos foi:

> - *Ele só consegue ir de um ponto ao outro, sendo a menor distância, ou de se perder no infinito* (item a). *Têm duas possibilidades, ou ir apenas de um ponto ao outro ou dar a volta na esfera inteira para chegar finalmente ao outro ponto* (item b).

Tendo em vista as respostas dadas, o professor-pesquisador como mediador interveio, discutindo com todos os alunos as respostas dadas pelos grupos, já que o Grupo Loka e Lokos, ao nosso ver, parecia não estar atento ao enunciado da questão, que era a menor distância entre os dois pontos. O grupo ateve-se simplesmente à distância entre dois pontos, não importando se era a menor, a maior, ou infinita. Essa mediação, segundo Vygostsky, é primordial para a compreensão dos conceitos que a atividade propunha.

5.2.6. Sexta Atividade (realizada em 08.08.05 – segunda-feira)

O objetivo desta atividade foi o de introduzir os conceitos de geodésica nas superfícies plana e esférica e as diferenças entre elas.

Foram utilizados para a sua realização, esfera de isopor, papel sulfite, alfinete, barbantes e canetinhas de isopor.

a) Represente uma caminhada no papel sulfite de modo que o início seja um dos pontos marcados no item *a* da atividade cinco até o outro. Imagine agora que você continue sua caminhada. Represente-a no papel sulfite.

b) Repita esta mesma caminhada numa superfície esférica. Desenhe sua caminhada na esfera de isopor que receberam.

c) Escrevam suas conclusões.

O professor-pesquisador após verificar as conclusões dadas pelos alunos, transcritas abaixo, interveio no sentido de esclarecer aos alunos os conceitos que a atividade propunha.

Conclusão do Grupo

> Green Day: *Na esfera, voltamos ao ponto de partida e na reta não. A caminhada na superfície plana é infinita.*
>
> Bears: *Numa superfície plana nossa caminhada não tem fim. Já na superfície esférica, saímos de um ponto e retornamos a este mesmo ponto (ponto de partida).*
>
> Loka e Lokos: *No caso no plano podemos nos perder no infinito. No caso da esfera podemos dar volta na superfície inteira para finalmente chegar ao mesmo ponto. É como um planeta rodando em volta da lua.*

Pelas respostas dadas pelos grupos, ficou fácil para o professor-pesquisador formalizar (Van De Walle, 2001) para os alunos os conceitos de retas na superfície plana e na esférica. O contato do grupo com o material concreto indicou indícios de compreensão da resolução da atividade. Percebemos ainda, que o grupo Loka e Lokos, usou

conhecimentos de Geografia para a resolução da situação-problema proposta, o que, nos leva a concluir que a conexão com outras disciplinas é de suma importância para a formação de conceitos.

Após formalizar (Van De Walle, 2001) os conceitos de geodésica, o professor-pesquisador deixou claro para o grupo que a palavra "geodésica" tem o significado de reta e que, para diferenciar reta de plano e da superfície esférica, usará a palavra "reta" quando se tratar de reta no plano e "geodésica" quando se tratar de reta na superfície esférica. Estas formalizações foram feitas utilizando-se os conceitos abordados no Capítulo II desta dissertação.

Aqui, nesta atividade, o professor-pesquisador usou dos apontamentos feitos no Capítulo II, a respeito do retrospecto histórico das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas, no sentido de ressaltar o conceito de retas nestas Geometrias.

5.2.7. Sétima Atividade (realizada em 09.08.05 – terça-feira)

O objetivo desta atividade foi o de mostrar que na superfície esférica não existem retas paralelas, contrastando assim com a superfície plana, onde existem retas paralelas.

Para realizar esta atividade os alunos usaram esferas de isopor, barbantes, alfinetes, canetinhas coloridas e papel sulfite.

a) Represente uma reta na superfície plana. Trace uma reta paralela à reta que você acabou de representar.

b) Represente agora uma reta (geodésica) na superfície esférica. Trace uma geodésica paralela a que você acabou de representar.

c) A respeito dos itens a e b, o que se pode concluir?

Conclusão do Grupo

> Green Day: *No item a é possível fazer uma reta paralela a outra, já no item b não.*

> Bears: *A conclusão é que na superfície plana as retas ficam uma do lado da outra e na superfície esférica fica uma em cima da outra.*
>
> Loka e Lokos: *No plano é possível colocar uma reta paralela a outra, já na superfície esférica não é possível porque se você colocá-las paralelamente vão deixar de ser retas para serem apenas circunferências, pois não são mais círculos maiores da esfera.*

Pelas respostas dadas percebe-se que os grupos empiricamente, ou seja, através do manuseio com materiais concretos, puderam enxergar a possibilidade de se traçar retas paralelas no plano, o que, não é possível na superfície esférica.

O professor-pesquisador, após discutir as respostas dadas pelos grupos, ateve-se à resposta dada pelo Grupo Loka e Lokos, o que, proporcionou-lhe a falar dos "paralelos" do Globo terrestre, que são círculos paralelos, mas não podem ser considerados como "geodésicas", pois para serem geodésicas teriam que ser os círculos maiores da circunferência, proporcionando, desta feita, interdisciplinaridade com Geografia.

Esta resposta dada pelo Grupo Loka e Lokos, permitiu que emergisse a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky, pois através da interação, isto é, o trabalho em grupo, pode-se estender o conhecimento dos componentes de um grupo aos componentes dos outros.

Nesta atividade foi de suma importância levar o aluno conhecer, através da história, o postulado das paralelas e a revolução ocasionada neste postulado com o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas, o que, foi possível fazê-lo com sustentação nos apontamentos históricos de que tratam o Capítulo II desta pesquisa.

5.2.8. Oitava Atividade (realizada em 10.08.05 – quarta-feira)

Tendo em vista os conceitos de "reta" e "geodésica" discutidos nas atividades anteriores, esta atividade tem como objetivo elucidar semelhanças e diferenças entre estes dois conceitos.

Os materiais usados para a realização desta atividade foram: papel sulfite, canetinhas coloridas, esferas de isopor, barbantes e alfinetes.

Discutiremos por itens:

a) Represente dois pontos distintos no plano. Quantas retas vocês conseguem representar de tal maneira que contenha, ao mesmo tempo, estes dois pontos?

Nesta questão, todos os grupos foram unânimes em responder que só conseguiam representar uma única reta.

b) Represente dois pontos distintos que não sejam os pólos em uma superfície esférica. Quantas geodésicas vocês conseguem representar de tal maneira que contenha, ao mesmo tempo, estes dois pontos?

Aqui também todos os grupos responderam apenas uma geodésica.

c) E se os dois pontos representados na superfície esférica forem os pólos, quantas geodésicas vocês conseguem representar que contenha, ao mesmo tempo, estes dois pólos?

Todos os grupos responderam que pode se representar infinitas geodésicas.

Com relação aos itens *a*, *b* e *c* pudemos observar que os grupos conseguiram apreender os conceitos de "reta" e "geodésica", visto que as situações-problema apresentadas nesta atividade permitiram que eles expressassem corretamente a representação solicitada. O uso do papel sulfite (plano) para representar a reta e a esfera de isopor (superfície esférica), acreditamos, indicou pistas para esta compreensão.

d) No plano, qual o menor número de lados que contém uma figura? Isto é verdadeiro na superfície esférica? É possível formar uma figura nesta superfície com apenas dois lados?

O Grupo Green Day respondeu:

> *- No plano o menor número de lados de uma figura é três. Não é possível formar uma figura com dois lados na superfície esférica.*

A resposta dada pelo Grupo Bears foi:

- No plano o menor número de lados é três. Sim é possível formar uma figura com dois lados na superfície esférica.

Já o Grupo Loka e Lokos respondeu:

- Na superfície plana são necessários, no mínimo, três ângulos para se formar uma figura. Sim, na superfície esférica pode ser formada uma figura com dois ângulos.

Face às respostas dadas pelos grupos, o professor-pesquisador resolveu colocá-las em discussão, abrindo, desta forma um debate com o grupo, onde com a interação do grupo (Piaget e Vygotsky) ficaram formalizados (Van De Walle, 2001) os conceitos de triângulo na superfície plana e biângulo na superfície esférica. Houve também a formalização do conceito de pólo, servindo-se aí o professor-pesquisador, do conteúdo tratado no Capítulo II desta pesquisa.

e) O que é ângulo para você?

Respostas dadas pelos grupos:

Green Day*: É o encontro de duas retas.*

Bears*: É quando duas retas se encontram.*

Loka e Lokos: *É a medida em graus de duas retas que saem do mesmo ponto.*

Novamente o professor-pesquisador interveio, colocando em discussão as respostas dadas, resgatando, desta feita, o conceito de ângulo. Pediu então aos alunos que representassem um ângulo na superfície esférica, o que, fez com que eles verificassem que ângulo tanto na superfície esférica como na superfície plana tem o mesmo significado.

f) Se você representar trezentas e sessenta geodésicas que contenha os mesmos pólos, qual a medida do ângulo formado por duas destas geodésicas consecutivas?

Todos os grupos foram unânimes em responder que a medida era de um grau, levando assim a supor que eles haviam associado o conceito de ladrilhamento do plano ao conceito de tesselagem da superfície esférica. Em ambos os casos, a soma dos ângulos que rodeiam um ponto comum deve ser 360^o.

g) Se considerarmos a área em graus de um biângulo como a soma de seus dois ângulos, pergunta-se: qual será a área da superfície esférica, em graus?

Novamente, nesta atividade, podemos concluir que os alunos entenderam o conceito de tesselagem da superfície esférica, pois todos os grupos foram unânimes em responder que a área da superfície esférica em graus era de 720^0.

5.2.9. Nona Atividade (realizada 11.08.05 – quinta-feira)

Esta atividade teve como objetivo apresentar aos alunos conceitos de Geometria Espacial, como também, diferenciar uma figura plana de uma figura espacial, necessários para uma melhor compreensão da tesselagem na superfície da esfera.

Vocês estão diante de várias figuras planas regulares, coplanares (todas as faces estão no mesmo plano). Através de dobraduras, tentem transformá-las em figuras espaciais (as faces não estão no mesmo plano).

a) O que acontece com a soma das medidas dos ângulos que formam o "bico" dessas figuras?

Todos os grupos foram unânimes em responder que a soma teria que ser menor que 360^o, pois se a soma fosse 360 graus, os polígonos não formariam bicos, ou seja, a figura não seria espacial, o que, nos leva a concluir que os alunos entenderam o conceito de ladrilhamento do plano.

b) Com quais polígonos é possível formar os "bicos" dessas figuras?

Todos também, sem exceção, responderam triângulo, quadrado e hexágono. Acreditamos que a compreensão desta atividade deve-se ao fato do manuseio com

materiais concretos (Piaget e Vygotsky), facilitando assim a visualização, fator de suma importância para que ocorra a aprendizagem.

c) Qual o número mínimo de polígonos necessário para se formar um "bico"?

Responderam, os grupos, que o número mínimo de polígonos é três. Novamente o manuseio dos materiais concretos proporcionou o desenvolvimento desta atividade.

d) Vocês conseguem formar "bicos" com hexágonos? Justifiquem sua resposta.
Responderam

> Grupo Green Day: *Não, porque a soma dos ângulos do hexágono, em torno de um ponto comum é 360º.*
>
> Grupo Bears: *Não, porque a soma dos ângulos vai ser igual a 360º e não formará bicos.*
>
> Grupo Loka e Lokos: *Não, porque a soma dos ângulos é igual a 360º, ou seja, sempre vai ficar no plano.*

Percebeu-se, pelas respostas dadas que os alunos conseguiram diferenciar figuras espaciais de figuras planas, que era um dos objetivos da atividade.

e) Qual dessas figuras que vocês formaram aproxima-se mais de uma bola de futebol? Justifique sua resposta.

> Grupo Green Day: *A figura feita com pentágonos, pois aparenta ser menos "bicuda", ou seja, está mais perto de uma superfície lisa.*
>
> Grupo Bears: *A figura formada por pentágonos, porque entre todas elas é a que mais se aproxima de 360º.*
>
> Grupo Loka e Lokos: *É a figura formada por pentágonos, porque: Ela rola com mais facilidade.*

A soma dos graus das figuras que formam os "bicos" é a que mais se aproxima de 360^o.
O "bico" é menos pontudo.

Ficou claro nesta atividade que o fator visualização, ocasionado através do manuseio de materiais concretos e o conceito cotidiano de que os alunos têm de uma bola de futebol, permitiram o desenvolvimento do processo de aprendizagem (Vygotsky, 2001).

O professor-pesquisador aproveitou-se da oportunidade para revisitar alguns conceitos de Geometria Espacial, tais como ângulo poliédrico, faces e arestas.

5.2.10. Décima Atividade (realizada em 12.08.05 – sexta-feira)

Esta atividade e as próximas, embora pareçam situação-problema de caráter fechado, não o é, pois a intervenção do professor-pesquisador é indispensável para que elas se tornem de caráter aberto e através de questionamentos aos seus alunos, chegar ao objetivo a que elas se propõem, qual seja, o de estabelecer relações com as Geometrias Euclidiana e Esférica.

Para a sua realização os grupos receberam, esferas de isopor, alfinetes, barbantes e transferidor esférico. Este transferidor é mostrado na Figura 31 (construída pelo professor-pesquisador) e encontra-se sobre uma superfície esférica.

Figura 31: Transferidor Esférico

De acordo com Rodrigues (1992): *"Problemas em aberto são os que não contém no seu enunciado pista alguma para a sua solução"*. Então segundo este autor os problemas fechados são aqueles que fornecem pistas para a sua solução. Para Buriasco (2002) os problemas fechados são aqueles que são resolvidos por algoritmos ou conhecimentos matemáticos específicos e admitem apenas um caminho para a sua solução. São problemas que ditam uma receita; o aluno não desenvolve estratégias para resolvê-lo, não verifica hipóteses, enfim nada cria e nada constrói.

Eis a atividade:

Divida uma superfície esférica em:

a) duas partes iguais.

> Professor-pesquisador: *Com vocês fariam para dividir a superfície esférica em duas partes iguais?*
>
> Grupo Bears: *Ora Professor é só traçar uma geodésica.*
>
> Professor-pesquisador: *Todos concordam com a resposta dada pelo Grupo Bears?*
>
> Os outros grupos*: Sim.*

O professor-pesquisador aproveita então o momento para revisitar o conceito de geodésica, dizendo que a resposta do Grupo Bears estava correta.

b) quatro partes iguais

> Professor-pesquisador: *E em quatro partes iguais, como vocês fariam?*

Os grupos ficaram em silêncio e após alguns minutos um dos integrantes do Grupo Loka e Lokos respondeu:

> Grupo Loka e Lokos: *Passando uma geodésica perpendicular à geodésica já traçada.*

Um dos integrantes do Grupo Green Day interveio.

> Grupo Green Day: *O que é perpendicular, eu não me lembro mais.*

O professor-pesquisador solicita ao componente do Grupo Loka e Lokos que havia dado solução à situação problema que forneça a resposta ao colega.

> Grupo Loka e Lokos: *Ora é quando as geodésicas se encontram e nesse encontro elas formam um ângulo de* 90^o.

O professor-pesquisador concorda com a resposta e aproveita o momento para formalizar (Van De Walle, 2001) o conceito de perpendicular, ressaltando as semelhanças e diferenças de perpendicular nas superfícies plana e esférica.

c) oito partes iguais

> Professor-pesquisador: *E agora pessoal, para dividir em oito partes iguais, o que vocês fariam?*

Após tentativas no manuseio do material concreto que os alunos estavam de posse, um aluno do grupo Green Day, o mesmo que não se lembrava mais do conceito de perpendicular respondeu:

> Grupo Green Day*: Não é passando uma perpendicular comum as duas já traçadas?*

> Professor-pesquisador: *Parabéns. É isso mesmo.*

Após formalizar o conceito de perpendiculares comuns, o professor intervém e questiona.

Professor-pesquisador: *Pessoal vocês acabam de tesselar uma superfície esférica. Alguém pode me dizer o porquê?*

Percebeu-se um grande alvoroço entre os componentes dos grupos e estes após, troca de palavras e da visualização do material concreto que haviam manuseado, responderam que era porque aquela figura estava totalmente coberta por figuras iguais, no caso por oito triângulos, não havendo entre eles nenhum espaço e nenhum estava sobrepondo o outro.

O professor-pesquisador aproveita o momento propício, tendo em vista que os alunos compreenderam o significado de tesselagem e questiona mais.

Professor-pesquisador: *O que acontece com as figuras em torno de um ponto comum?*

Grupo Loka e Lokos: *Elas formam um ângulo de 360^o.*

Professor-pesquisador: *Vocês lembram da atividade onde vocês ladrilharam o plano?*

Grupo Green Day: *Sim professor, acontecia a mesma coisa que está acontecendo aqui, a soma dos ângulos das figuras em torno de um ponto comum tem que dar 360^o.*

Professor-pesquisador: *Então tesselar a superfície plana e tesselar a superfície esférica tem o mesmo significado?*

Todos os Grupos: *Sim.*

Sentindo que os alunos haviam compreendido o significado de tesselagem na superfície esférica, o professor-pesquisador no intuito de verificar se outros conceitos já estavam efetivamente formalizados continuou com os questionamentos.

Professor-pesquisador: *O que acontece quando duas geodésicas se encontram?*

Grupo Bears: *Formam um ângulo de 90^o***?**

Professor-pesquisador: *Neste caso sim, mas isto sempre acontece?*

Grupo Bears *(manuseando as geodésicas): Nem sempre acontece, seu eu mudá-las de posição, o ângulo pode ser maior ou menor que 90^o***.**

Professor-pesquisador: *É isso mesmo, o que está acontecendo então é que vocês quando fazem isso estão diante de um ângulo esférico.*

O professor-pesquisador formaliza então o conceito de ângulo esférico e aproveita o momento para revisitar o conceito de ângulo da Geometria Plana e continua.

Professor-pesquisador: *Verifiquem as figuras que vocês formaram e que tesselaram a superfície esférica? Que figuras são essas?*

Todos os Grupos*: São triângulos.*

O professor-pesquisador formaliza (Van de Walle, 2001) então o conceito triângulo esférico e prossegue.

Professor-pesquisador: *Quanto mede cada ângulo desses triângulos?*

Todos os grupos*: 90^o***.**

Professor-pesquisador: *Ora, se cada ângulo mede 90^o***,** *qual é a soma dos ângulos internos de cada um desses triângulos?*

Todos os grupos: *270^o***.**

Professor-pesquisador: *Mas a soma dos ângulos internos de um triângulo não é sempre 180^o?*

O professor-pesquisador percebe uma inquietação entre os alunos e ao mesmo tempo uma surpresa entre eles por estarem diante de um fato que para eles tinha um outro significado, diferente daquele que os alunos haviam enraizado e explica, mostrando várias triângulos esféricos, através de manuseio na esfera de isopor.

> Professor-pesquisador: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o somente no plano. Na superfície esférica esta soma é maior que 180^o, não superando 540^o.*

d) Compare a figura obtida com as que vocês produziram através de dobraduras e digam com qual ela mais se assemelha. Justifique sua resposta.

Os grupos foram unânimes em responder que assemelhava ao octaedro e o professor-pesquisador aproveita então o ensejo para formalizar o conceito de octaedro esférico. A Figura 32, construída pelo Grupo Bears, mostra este octaedro esférico.

Figura 32: Octaedro Esférico I

O objetivo desta atividade foi fazer com que o aluno estabelecesse relações com as Geometrias Eucliana e Esférica e perceber, ainda, que a tesselação do octaedro esférico acaba de ser feita, o que, acreditamos, deu-se face ao exposto pelas transcrições.

5.2.11. Décima primeira atividade (realizada em 15 e 16.08.05 – segunda e terça-feiras)

O objetivo desta atividade é aplicar os conceitos da Geometria Esférica apreendidos com as atividades anteriores e, ainda, revisitar conceitos da Geometria Euclidiana, através da tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica.

Os alunos utilizaram para realizá-la, esfera de isopor, barbantes, alfinetes, compasso e canetinhas coloridas.

Achamos, a princípio, que apenas um dia era necessário para desenvolver esta atividade, o que não aconteceu. Foram necessários dois dias para desenvolvê-la.

5.2.11.1. Octaedro Esférico

1) Construa um círculo máximo.

2) Construa um outro círculo máximo perpendicular ao primeiro.

3) Construa um terceiro círculo máximo, perpendicular aos dois já construídos.

Assim, ficam representadas as faces do octaedro na superfície esférica, conforme mostra a Figura 33, construída pelo Grupo Green Day.

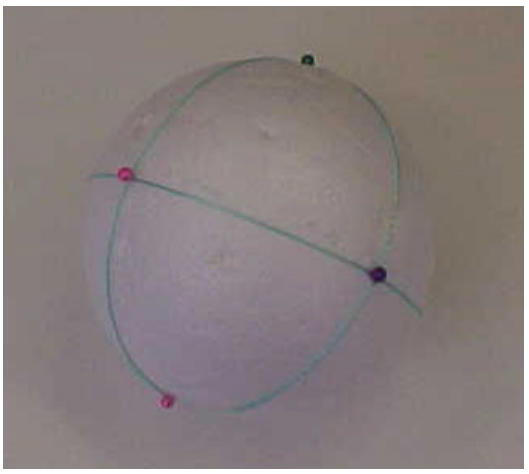


Figura 33: Octaedro Esférico II

Esta atividade foi discutida no item anterior.

5.2.11.2. Cubo Esférico

1) Construa o baricentro[46] de cada um dos triângulos do octaedro esférico.

Grupo Green Day: *Professor, o que é baricentro?*

Professor-pesquisador: *Alguém pode me dizer o que é baricentro?*

Grupo Loka e Lokos: *É o ponto de encontro das medianas de um triângulo?*

Professor-pesquisador: *De que triângulo você está falando, do triângulo no plano ou na superfície esférica.*

Grupo Loka e Lokos: *Eu aprendi que é no triângulo no plano.*

Professor-pesquisador: *Será que isso também é válido para o triângulo esférico?*

Nesta interação com o grupo (Vygotsky, 2001) o professor revisita o conceito de baricentro e aproveita para comparar este conceito com o da Geometria Esférica, levando os alunos a compreender que baricentro tanto na Geometria Plana como na Esférica tem o mesmo significado.

2) Una cada baricentro com os baricentros adjacentes.

Grupo Bears: *Professor, o que significa a palavra adjacente?*

O professor-pesquisador informa o aluno o significado da palavra adjacente. Às vezes um problema não é compreendido pelo aluno por não saber o significado de algumas palavras em português, o que mostra que a interdisciplinaridade é muito importante para o

[46] Baricentro é o ponto de intersecção das medianas do triângulo esférico.

desempenho do aluno em qualquer área do ensino. Mostra também a importância que a linguagem (Vygotsky, 1996) tem para que uma situação-problema seja compreendida.

3) Elimine as arestas (retirando os barbantes que representam estas arestas) do octaedro esférico.

A Figura 34, construída pelo Grupo Loka e Lokos, mostra o cubo tesselado na superfície esférica.

Figura 34: Cubo Esférico

Esta atividade, embora pareça de caráter fechado fez com que, através da interação (Vygotsky, 2001) professor e alunos, os componentes dos grupos revisitassem conceitos da Geometria Plana e, ao mesmo tempo, comparassem estes conceitos com os da Geometria Esférica.

5.2.11.3 Tetraedro Esférico

1) Selecione uma face do cubo esférico e trace uma diagonal nesta face.

2) Trace diagonais em todas as faces restantes, de modo que, no vértice da face que termina uma diagonal, tenha início a diagonal da outra face.

3) Elimine as arestas do cubo esférico, terminando, desta maneira, o tetraedro esférico, conforme mostra a Figura 35, construída pelo Grupo Bears.

Figura 35: Tetraedro Esférico

Esta atividade não apresentou nenhum entrave para a sua solução, mostrando que os alunos aplicaram corretamente os conceitos das Geometrias Plana e Esférica, necessários para resolvê-la, o que indica que para que uma situação-problema seja bem sucedida, há necessidade da aplicação de conceitos antigos para ser chegar à sua solução. Nesta atividade, todos os alunos puderam revisitar o conceito de diagonal (Geometria Plana) e perceberem que tem o mesmo significado na Geometria Esférica.

5.2.11.4 Dodecaedro Esférico

1) Meça com um compasso a aresta da face do cubo esférico por vocês construído. Cubra a superfície esférica com triângulos eqüiláteros, cujos lados tenham a medida desta aresta.

2) Construa o baricentro de cada um desses triângulos.

3) Una os vértices desses triângulos ao baricentro.

4) Tendo em vista que a distância do vértice do triângulo ao baricentro é a aresta do pentágono e que a soma dos ângulos da união resultante no item 3 é 360^o (portanto cada ângulo mede 120^o), termine a construção do dodecaedro esférico.

O resultado é mostrado abaixo, fruto do trabalho do Grupo Green Days. (Fig. 36)

Figura 36: Dodecaedro Esférico

Nesta atividade, houve somente um questionamento por parte do Grupo Bears, no sentido de revisitar o conceito de aresta, abaixo transcrito.

> Grupo Bears: *Professor, o que é aresta, não me lembro de ter aprendido?*
>
> Professor-pesquisador: *Alguém sabe dizer o que á aresta?*
>
> Grupo Loka e Lokos*: Professor aresta já foi discutido na atividade em que nós formamos aquelas figuras espaciais* (e pegando o cubo esférico que havia construído apontou)*...é a medida do lado deste quadrado...não é a mesma coisa?* (estava se referindo a aresta dos sólidos platônicos).

O professor-pesquisador reconhece a importância do debate e aproveita o momento oportuno para formalizar (Van de Walle, 2001) os comentários do grupo.

Viu-se aí que os alunos conseguiram estabelecer relações entre os polígonos que formavam as faces dos sólidos espaciais com as faces dos polígonos que tesselavam a superfície esférica, onde entendemos o aparecimento da Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky, 1991).

5.2.11.5. Icosaedro Esférico

1) Selecione uma face do dodecaedro esférico e construa a mediatriz de cada uma de suas arestas. Faça o mesmo em todos as outras faces.

Professor-pesquisador: *Vocês lembram o que significa mediatriz?*

Grupo Green Day*: Sim.*

Professor-pesquisador: *Então, o que é?*

Grupo Green Day: *É uma perpendicular que passa pelo meio de um segmento de reta.*

2) Una o circuncentro[47] de cada uma dessas faces, por intermédio dessas mediatrizes.

Grupo Green Day*: Professor, mediatriz eu sei o que é, mas circuncentro eu não me lembro mais. O que é?*

Professor-pesquisador: *Alguém se lembra?*

Grupo Loka e Lokos: *Por acaso não é o ponto de encontro dessas mediatrizes?*

Professor-pesquisador: *Correto. É isso mesmo.*

3) Elimine as arestas do dodecaedro e o icosaedro esférico está pronto, conforme mostra a Figura 37, construída pelos integrantes do Grupo Bears.

[47] Circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes de um triângulo esférico.

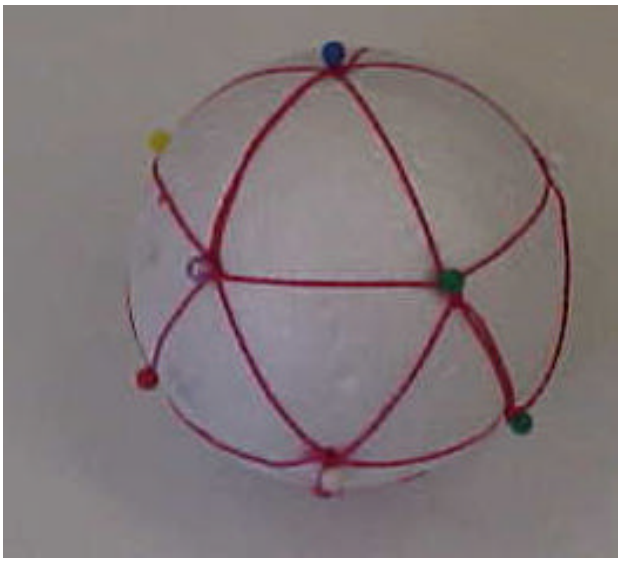


Figura 37: Icosaedro Esférico

Nesta atividade, pode-se notar a interação (Vygotsky, 2001) dos grupos e do professor-pesquisador, de modo que conceitos da Geometria Euclidiana fossem resgatados e comparados com os da Geometria Esférica.

7.2.12. Décima segunda atividade – (atividade realizada em 17.08.05 – quarta-feira)

Esta atividade teve como objetivo a construção da bola de futebol, ou seja, tesselar as faces da bola de futebol na superfície esférica. Para tanto, pedimos aos alunos que:

1) Divida cada aresta da face do icosaedro esférico em três partes iguais, marcando os respectivos pontos.

2) Una os pontos marcados ao redor de cada vértice do icosaedro esférico. A tesselação da bola de futebol está pronta.

Não houve dificuldade, nesta atividade no sentido de confeccionar a bola de futebol, já que os conhecimentos necessários para tal objetivo, foram apreendidos nas atividades anteriores.

A Figura 38 mostra dois alunos do Grupo Loka e Lokos tesselando a superfície esférica, no sentido de construir a bola de futebol.

Figura 38: Alunos tesselando a Bola de Futebol

Todos os grupos construíram esta figura. A que está sendo mostrada (Fig. 39), a seguir, refere-se ao trabalho do Grupo Bears.

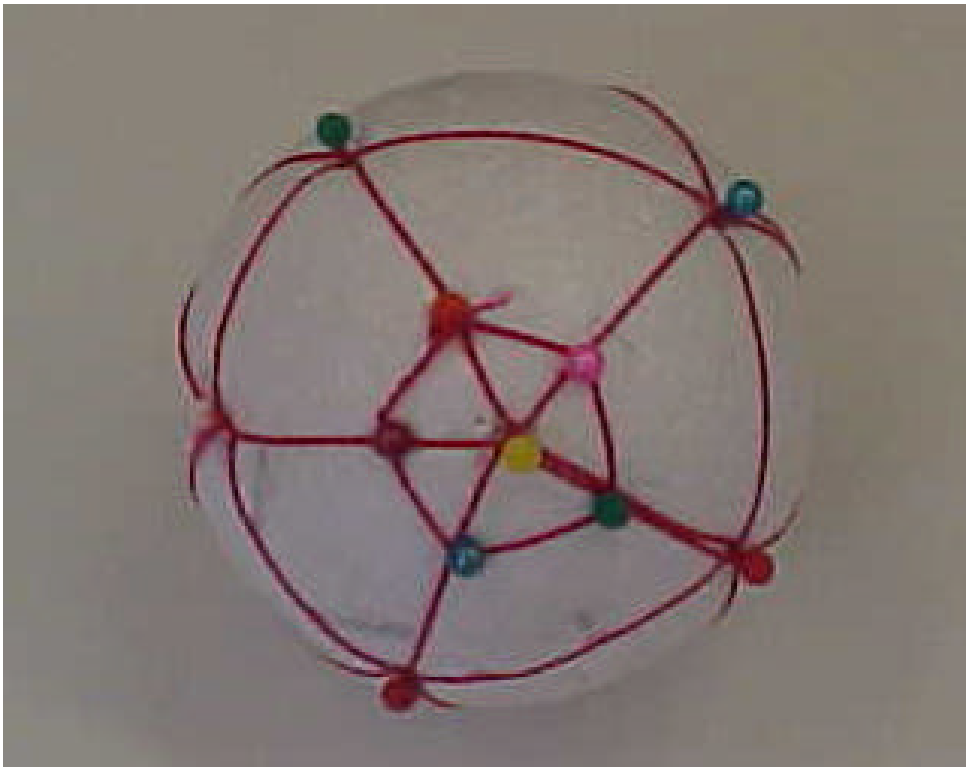


Figura 39: Tesselação das Faces da Bola de Futebol na Superfície Esférica

A Figura 40, mostra a bola de futebol construída pelo Grupo Green Day.

Figura 40: Bola de Futebol I

A Figura 41 mostra a bola de futebol construída pelo Grupo Bears.

Figura 41: Bola de Futebol II

As próximas três figuras (42, 43 e 44) são as bolas de futebol construídas pelos alunos do Grupo Loka e Lokos. Cada componente do grupo decidiu construir sua própria bola.

Figura 42: Bola de Futebol III

Figura 43: Bola de Futebol IV

Figura 44: Bola de Futebol V

Neste Capítulo apresentamos uma seqüência de atividades proposta por meio de resolução de situações-problema, e à luz do referencial teórico com base no construtivismo de Piaget e no sócio-construtivismo de Vygotsky. Fizemos uma análise destas atividades, embasados numa metodologia de pesquisa qualitativa.

Os resultados apresentados indicaram indícios animadores de que a seqüência apresentada conduz ao ensino-aprendizagem de conceitos básicos de Geometria Esférica permitindo, ainda, revisitar e consolidar conceitos de Geometria Euclidiana.

No Capítulo seguinte procuramos responder nossa questão norteadora de pesquisa: ***Que contribuições uma seqüência de atividades que tem como proposta a tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino-aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica?***

Capítulo VI

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve o propósito de apresentar uma seqüência de atividades, com o objetivo de tesselar as faces dos sólidos platônicos na superfície esférica, visando, desta feita, contribuir para o ensino-aprendizagem de conceitos básicos da Geometria Esférica, revisitando e consolidando conceitos da Geometria Euclidiana.

À luz de uma pesquisa do tipo qualitativa, com base nos pressupostos teóricos do construtivismo e, principalmente, do sócio-construtivismo, estruturamos as atividades através de situações-problema, por acreditarmos serem estratégias de ensino-aprendizagem que melhor promovem uma interação entre alunos e professor.

Propusemo-nos então a responder a seguinte questão norteadora: ***Que contribuições uma seqüência de atividades que tem como proposta a tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino-aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica?***

Com o decorrer da aplicação das atividades pudemos perceber que os alunos ao trabalharem com uma "nova" Geometria, conseguiram fazer relações entre as Geometrias Plana e Esférica, no sentido de compará-las, diferenciá-las e apreender os seus conceitos. A seqüência de atividades, de maneira progressiva em relação aos conteúdos, permitiu-nos concluir que houve indícios de que os conceitos estudados foram compreendidos pelos alunos. Quando havia dúvidas em relação a algum conceito, colocávamo-no em debate com os grupos sendo que, no final, era formalizado pelo professor-pesquisador, indo ao encontro dos pressupostos teóricos de Van de Walle (2001).

Muitas dificuldades houve no percurso do desenvolvimento das atividades. Por várias vezes o professor precisava improvisar atividades para que o aluno fosse buscar conceitos da Geometria Euclidiana que ele não conhecia, pelo fato de não ter aprendido.

Em algumas atividades algum aluno não comparecia. Mas este fato pode ser tanto considerado como um entrave para o entendimento das outras atividades como não. O fator negativo do aluno não ter comparecido em uma atividade era compensado nas atividades seguintes por um fator positivo, visto que, os integrantes do grupo, que tinham um ótimo entrosamento, levavam o aluno faltante a interar-se do assunto que ele havia perdido. Esta interação social ficou evidente em todas as atividades, fazendo sentir-nos ancorados pelo referencial teórico que permeia este trabalho.

As atividades foram de um modo geral desenvolvidas por todos os alunos. Para isso vários fatores contribuíram. Um deles foi a forma como foi apresentada a seqüência de

atividades e a maneira como os alunos trabalharam. O trabalho em grupo e o aspecto descontraído que o ambiente oferecia, contribuíram, ao nosso ver, para que as atividades fossem desenvolvidas de modo satisfatório, o que, culmina com os nossos pressupostos teóricos, em especial, Vygotsky.

As atividades ofereciam situações que permitiam aflorar a Zona de Desenvolvimento Proximal. Em muitas atividades vimos que os alunos apreendiam conhecimentos com a interação com o próprio colega ou com o professor-pesquisador, o que, privilegiavam a interação social, permitindo assim, o surgimento de Zonas de Desenvolvimento Proximal.

A linguagem utilizada nas atividades foi também fator importante para a compreensão das mesmas, o que, novamente nos remete a Vygotsky, visto ter este teórico dado atenção especial à questão da linguagem para que a aprendizagem pudesse ocorrer. Esta linguagem, usada também de modo acessível por parte do professor-pesquisador aos alunos, permitia que estes fossem se relacionar com conceitos espontâneos que já possuía, a fim de construir e reconstruir outros conceitos, que de acordo com Vygotsky são os conceitos científicos.

Acreditamos que a utilização de materiais diferentes do tradicional e a contextualização do tema, a bola de futebol, foram outros fatores que permitiram um ensino-aprendizagem de alguns conceitos de Geometria mais interessante, participativo e motivador. Interpretamos estes materiais como sendo, à luz do empréstimo teórico que obtivemos de Vygotsky, como instrumentos e signos usados pelos alunos, com o fim de propiciar os fatores que permitiram mostrar pistas de que realmente houve o enraizamento de noções básicas de Geometria Esférica na mente dos nossos sujeitos de pesquisas.

Além disso, a metodologia de ensino por nós adotada, que envolve o aluno em situações-problema, permitiu que eles se empenhassem na busca de informação com o professor-pesquisador ou com o próprio colega, remetendo-nos mais uma vez a Vygotsky, onde em sua teoria, a interação social, ocupa lugar de destaque.

Percebemos também, na maioria das atividades, a presença de dois processos complementares: a assimilação e a acomodação, que, de acordo com Piaget é necessário que ocorram estes dois processos para que a aprendizagem se efetive.

Pelo que foi citado, sentimo-nos encorajados a responder nossa questão norteadora: são muitas as contribuições que a nossa seqüência proporcionou para o ensino-aprendizagem de noções básicas da Geometria Esférica, contribuições estas que são

mostradas com mais detalhes no decorrer da análise das atividades feitas no Capítulo anterior e que, sob às nossas lentes, pensamos termos atingidos os objetivos almejados.

Com relação aos objetivos de ordem Matemática os alunos conseguiram mostrar indícios de aprendizagem de conceitos básicos de Geometria Esférica, pois pudemos sentir no transcorrer das atividades que os nossos sujeitos de pesquisa reinvestiam o que acabavam de incorporar, em situações novas, o que, proporcionava o (re)descobrimento de novos conhecimentos. Conseguiram também estabelecer relações desta Geometria com a Geometria Plana e ainda, revisitar e apreender seus conceitos.

Para o professor, pensamos que contribui para que este tenha um método alternativo para ensinar Geometria, dispensando, desta maneira, o método tradicional, onde giz, apagador, e quadro-negro encontram lugar de destaque.

Quanto aos objetivos de natureza educacional acreditamos ter dado nossa contribuição para que tanto aluno como professor tenham instrumentos e recursos didáticos de modo a proporcionar o ensino-aprendizagem da Geometria Esférica. Pensamos ter contribuído também com fatores que permitiram a integração interdisciplinar com as seguintes disciplinas:

Desenho Geométrico: Algumas de nossas atividades proporcionavam o uso da régua e compasso, materiais estes que causaram a princípio certa estranheza pelo fato de seu uso ter caído no esquecimento. O resgate do uso destes materiais proporcionou ao aluno revisitar e apreender conceitos de Geometria Euclidiana, tais como: bissetriz, baricentro, perpendicular, entre outros.

Educação Artística: Os alunos mostraram sua criatividade, desenvolvendo seu senso artístico e criativo, quando coloriam suas bolas de futebol, remetendo, desta forma, à disciplina Educação Artística que têm como característica principal despertar a criatividade no aluno, o que também, vai ao encontro dos nossos pressupostos teóricos.

Geografia: Nossas atividades não foram contempladas com assuntos de Geografia em razão de já terem sido explorados em Martos (2002) e Pataki (2003). Naturalmente surgiu uma discussão a respeito dos ursos polares, onde os alunos puderam saber do hábitat destes animais, conhecendo assim, um pouco do nosso Planeta. Surgiu também uma discussão na atividade que tinha o objetivo de conceituar retas paralelas, que permitiu remeter os alunos ao conceito de paralelos no Globo terrestre, que são círculos que são paralelos, mas que não podem ser consideradas retas paralelas nesta surpefície, tendo em vista que a nesta superfície somente um destes círculos é máximo, qual seja: a linha do Equador.

Pensamos assim ter atingido os objetivos que nossa pesquisa propôs. Paralelamente, fomos contemplados com a ocorrência de um fato não previsto em nossos objetivos, que acreditamos, veio ainda dar mais credibilidade a esta pesquisa: a descoberta da tesselação da bola de vôlei na superfície esférica, descoberta esta oriunda da interação dos grupos e do professor-pesquisador. Denominamos este fato no decorrer do nosso trabalho como *caso da bola de vôlei* que agora relataremos com detalhes.

Quando da construção da bola de futebol que originou através do octaedro esférico um aluno questionou (o mesmo que havia solicitado ao professor a bola de vôlei):

> *Professor, se a bola de futebol a gente consegue fazer através do octaedro esférico, será que não dá prá fazer a bola de vôlei através do cubo esférico?*

A pergunta nos pegou de surpresa e como não tínhamos nenhuma bola de vôlei disponível no momento dissemos ao aluno que poderíamos marcar um encontro extra, já que a pergunta surgiu no nosso último encontro, para discutir o assunto. Todos gostaram da idéia e no dia seguinte lá estávamos nós.

De posse de uma bola de vôlei, começamos a estudá-la e verificar que o aluno tinha razão no seu questionamento.

No dia do encontro, que ocorreu numa quinta-feira (18.08.05), reunimo-nos em uma mesa redonda e pedimos aos alunos que observassem a bola de vôlei. Perguntamos então ao aluno que havia feito o questionamento.

> Professor-pesquisador: *Por que você acha que podemos construir uma bola de vôlei através do cubo esférico?*
>
> Aluno: *O cubo esférico não tem seis partes iguais? A bola de vôlei também tem.*
>
> Professor-pesquisador: *Sim, mas são diferentes das faces das figuras que cobrem a bola de vôlei.*
>
> Aluno: *Mas a gente pode fazer com que as faces do cubo fiquem iguais as faces da bola de vôlei.*

Professor-pesquisador: *Como?*

Houve um tempo de silêncio e o professor-pesquisador continuou questionando.

Professor-pesquisador: *Pessoal, alguém consegue fazer com que as faces das figuras do cubo esférico fiquem iguais as faces da bola de vôlei?*

Os alunos começaram a examinar a bola de vôlei e então um outro aluno questionou.

Aluno: *Professor, as faces só diferem nos seus lados opostos. Aqui* (mostrando a bola de vôlei), *os arcos são para dentro da face, já aqui os arcos são para fora da face. A gente pode traçar estes arcos, não pode?*

Professor-pesquisador: *Você pode me mostrar como?*

Aluno: *A gente precisa achar o centro de cada face, mas eu não me lembro como.*

Professor-pesquisador: *Quem ajuda o colega?*

Um terceiro aluno se manifesta.

Aluno: *Basta traçar as diagonais da face, o ponto de encontro dessas diagonais é o centro da face.*

O professor-pesquisador parabeniza o aluno pela resposta dada e volta a questionar o aluno que disse que bastava achar o centro da figura.

Professor-pesquisador: *Pronto, o centro da figura foi determinado e agora o que fazemos?*

Aluno: *Com um compasso, com a ponta seca no centro de cada face, colocamos a outra ponta do compasso na extremidade da aresta da figura e traçamos o arco, ligando uma extremidade à outra. Fazemos a mesma coisa com a aresta oposta. Os arcos ficam para fora da face. Para traçarmos os arcos que ficam para dentro da face, fazemos o mesmo procedimento na face vizinha, só que agora traçamos arcos nas arestas que ainda não foram utilizadas. Repetimos este procedimento até traçarmos os arcos em todas as arestas.*

Professor-pesquisador: *Está começando a ficar parecido com uma bola de vôlei, mas ainda falta uma coisa. Cada face da bola de vôlei está divida em três partes. Como vamos fazer para dividi-las?*

O professor temendo que esta resposta não viria ficou surpreso com a rapidez com que foi respondida pelo mesmo aluno da fala anterior.

Aluno: *Basta dividir a parte do meio da face com um biângulo. Conseqüentemente acham-se as outras duas faces.*

Professor-pesquisador: *Mas qual a medida do ângulo do biângulo?*

Aluno: *Podemos pegar uma bola de vôlei, achar este biângulo e medir o ângulo.*

Feito isso, concluiu-se que o ângulo media 30^{o}.

O professor-pesquisador solicita então aos grupos que construam uma bola de vôlei, quando surgiu a seguinte questão de um outro aluno.

Aluno: *Eu já vi bola de vôlei onde as faces não são divididas em três partes.*

Professor-pesquisador: *Ótimo, seu grupo* (Green Day) *se preferir, constrói a bola de vôlei da maneira como você está falando.*

E as bolas de vôlei, conforme mostram as figuras seguintes, foram construídas.

Grupo Bears (Fig. 45):

Figura 45: Bola de Vôlei I

Grupo Green Day (Fig. 46):

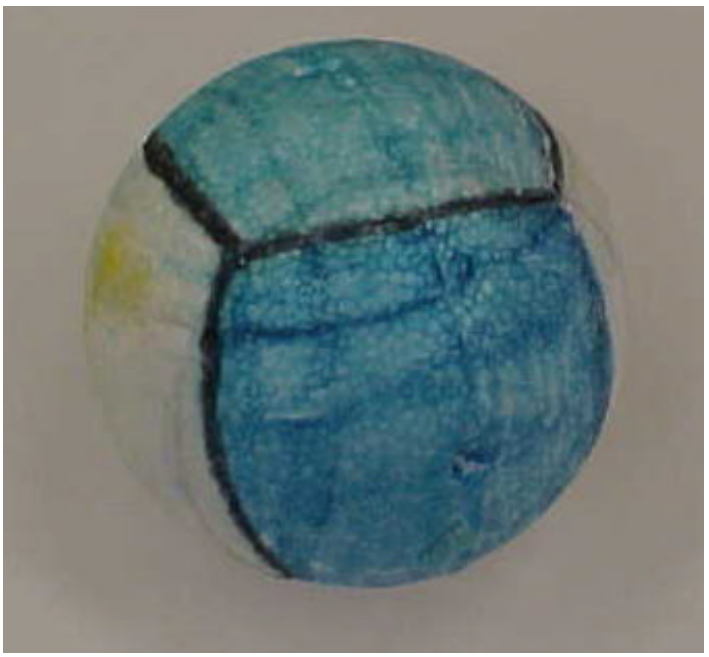


Figura 45: Bola de Vôlei II

Grupo Loka e Lokos (Fig. 47):

Figura 47: Bola de Vôlei III

Não pretendemos, em momento algum, esgotar o tema com a presente proposta e sim estarmos contribuindo para que, a Geometria Esférica encontre-se inserida nos currículos da Educação Matemática Brasileira. Nossas crianças devem desde cedo, familiarizar-se com a Geometria que tem a forma do espaço no qual elas vivem, que tem a ver com o seu cotidiano, que tem a ver enfim com o contexto onde ela está inserida.

Ficaríamos felizes se, num futuro próximo, Professores de Matemática tirarem proveito desta pesquisa, no sentido de aplicar nossas atividades em suas aulas de Geometria. Mais felizes ainda, se outros, assim como nós, se inteirassem das pesquisas a respeito do ensino da Geometria e, em especial, das Geometrias Não-Euclidianas.

Percebemos no final dos nossos encontros, tanto por parte dos alunos como do professor-pesquisador, um gostinho de *quero mais.*

Pensamos que este trabalho, além de ter contribuído para o ensino-aprendizagem da Geometria Esférica, abre caminhos para futuras pesquisas. Acreditamos que explorar as tesselações das faces dos sólidos platônicos, aqui tratadas, através de programas de Geometria como, pro exemplo, o *Cabrit 3D* ou o *Cinderella* podem proporcionar excelentes momentos de interação e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, A.J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas em Educação. In: **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo (77): 53-61, maio 1991.

ALVES-MAZZOTTI, A.J. O Planejamento de Pesquisas Qualitativas. In: ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira, 2004.

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique.** Recherches em Didactique des Mathématiques, Paris: v. 9, n. 3, 1988.

BARAGAR, A. **A Survey of Classical and Modern Geometries**: with computer activies, New Jersey: Prentice-Hall, 2001.

BARBOSA, R.M. **Descobrindo Padrões em Mosaicos**. São Paulo: Atual, 1994.

BARRANTES M.; BLANCO L.J. Estudo das Recordações, Expectativas e Concepções dos Professores em Formação sobre Ensino-Aprendizagem da Geometria. In: **Educação Matemática em Revista**. Ano 11, nº 17. São Paulo: SBE, 2004.

BARTH, B-H**. O Saber em Construção.** Lisboa: Piaget, 1993.

BECKER, F. O que é construtivismo? In: **Idéias**: construtivismo em revista. 2. ed. São Paulo: FDE, 1994.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à Teoria dos Métodos. Portugal: Porto, 1991**.**

BONETE, I.P. **As Geometrias Não-Euclidianas:** uma perspectiva para o seu ensino. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro Oeste. Guarapuava, 1999.

BONOLA, R. **Geometrias no euclidianas**. Buenos Aires: Espasa-Calpes, 1951.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 2001.

BRASIL, Ministério de Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros curriculares nacionais (PCN):** ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRITO, A. de J. **Geometrias não-Euclidianas:** Um estudo Histórico-Pedagógico. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques**. v.7. n.2. pp.33-115. Grenoble, 1986.

BURIASCO, R. Sobre avaliação em matemática: uma reflexão. In: **Educação em Revista**. nº 36, p.255-265, Belo Horizonte, 2002.

BUTTS, T. Formulando Problemas adequadamente. In: **A** KRULIK. S.; REYS, R.E. **A resolução de problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

CÂNDIDO, S.L. **Formas num mundo de formas**. São Paulo: Moderna, 1997.

CAPRA, F. **A Teia da Vida**: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: Cultrix, 1996.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 10. ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DANTE, L.R. Como ensinamos. In: **Revista do Professor de Matemática.** nº 6. 1ºsemestre de 1985.

_____. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 6. ed. São Paulo: Ática, 2003.

EVES, H. **História da Geometria**. São Paulo: Atual, 1992.

FAINGUELERNT, E.K. O Ensino da Geometria e a Teoria das Inteligências Múltiplas: uma experiência com Informática no Colégio Santa Úrsula, no Rio de Janeiro. In: **Pátio Revista Pedagógica**. nº 1. Porto Alegre, 1997.

FAINGUELERNT, E. K. et al. **Trabalhando com Geometria**. São Paulo: Ática, 1989.

FREITAS, J.L.M. Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A. (Org). E**ducação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002

GOLDEMBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

GOUVEA, F.R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática**: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Globo, 1970.

KASNER E. ; NEWMAN J. **Matemática e Imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

LEITE, C. A Lua, em show real e virtual. Artigo publicado In: **O Estado de São Paulo**. p. A-15, edição: 27/10/2004.

LÉNÁRT, I. **Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere:** activities comparing planar and spherical geometry. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.

LIMA, E.L. Sobre o Ensino da Matemática. In: **Revista do Professor de Matemática**. nº 28, 1995.

_____. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBEM, 2000.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: ano III, 1. sem. 1995.

MACHADO, N.J. **Os poliedros de Platão e os dedos da mão**. São Paulo, Scipione: 1996.

MALTEMPI, M.V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática In: BICUDO, M.A.V; BORBA, M.C. (Org). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

MARTOS, Z.G. **Geometrias não-euclidianas**: uma proposta metodológica para o ensino da geometria no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MATUI, J. **Construtivismo**: Teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino. São Paulo: Moderna, 2003.

MENDONÇA, M.C.D. **Problematização**: Um caminho a ser percorrido em Educação. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação), Faculdade de Educação, Unicamp. Campinas, 1993.

MISKULIN, R.G.S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino-aprendizagem da Geometria**. Tese (Doutorado), Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, 1999.

MONTGOMERY M. e SHULTE, A. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Editora Atual, 1996.

NIELSEN, K.L. **Modern Trigometry**. New York: Barnes and Noble, 1966.

OLIVEIRA, A. M. de. **Nova Matemática Moderna**. São Paulo: Lisa, 1976.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 2003.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V; BORBA, M.C. (Org). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem de geometria através da resolução de problemas. In: BICUDO, M.A.V. (Org). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: EDUNESP, 1999.

PAIVA, M. **Matemática**: Volume 2. São Paulo: Moderna, 1995.

PATAKI, I. **Geometria esférica para a formação de professores**: uma proposta interdisciplinar. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2003.

PAVANELLO, R.M. **O Abandono do Ensino da Geometria**: uma visão histórica. Dissertação de Mestrado, Unicamp, 1989.

_____. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. In: **Revista Zetetiké**, Campinas, ano I, n.1, p-7-17. UNICAMP, 1993.

PEREZ, G. **A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus no Estado de São Paulo**. São Paulo, Ano III, p. 54-62, 1º sem. 1995.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. São Paulo: Zahar, 1975.

_____. **A construção do real na criança**. 3ª.ed. São Paulo: Ática, 2003.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK S.; REYS R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

RYAN, P.J. **Euclidean and non-Euclidean Geometry**: an analytic approach. New York: Cambridge University Press, 1986.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação do Estado. **SARESP** – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. São Paulo: FDE, 1997.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação do Estado. **SARESP** – Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. São Paulo: FDE, 2000.

SOUZA, M.C.G. **O 5º Postulado de Euclides**: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico. Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

SOUZA E SILVA, M.A.S. A linguagem escrita numa perspectiva interacionista: embates e similaridades. In: **Idéias**: construtivismo em revista. 2. ed. São Paulo: FDE, 1994.

RODRIGUES, V. **Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1992.

VAN DE WALLE, J.A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001.

VYGOTSKY, L.S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_____. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

_____. **A Formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L.S et al. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone/EPU, 1988.

Anexos

ANEXO I: Primeira Atividade

> "Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 km. ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou por mais 100 km. Então virou novamente e caminhou por mais 100 km ao norte. Qual não foi a sua surpresa quando descobriu que voltara novamente para a sua casa".

Questão 1:

- Esboce numa folha de sulfite o percurso do urso. Comente com os seus colegas de grupo as conclusões que chegaram. Anote-as.

Questão 2:

- É possível o urso chegar ao mesmo lugar de partida de acordo com o enunciado do problema? Comente com os seus colegas de grupo, anotando as conclusões.

Questão 3:

Esboce agora na esfera que receberam, a trajetória do urso. Comente com os seus colegas as conclusões que chegaram. Anote-as.

Questão 4:

De acordo com a trajetória desenhada na esfera, é possível o urso chegar no mesmo lugar de partida? Justifique sua resposta.

Questão 5:

Qual a cor do urso? Justifique sua resposta.

Anexo II: Segunda Atividade

Vocês têm em mãos vários polígonos regulares.

1) Usando apenas um tipo de polígono, é possível encaixá-los de modo que um não sobreponha o outro e não sobre espaço vazio entre eles?

2) Quais os polígonos que você verificou que ocorre a situação da primeira questão?

3) É possível verificar que polígonos se encaixam em torno de um vértice comum?

4) Se você verificou que polígonos se encaixam em torno de um vértice comum, preencha a tabela abaixo, descobrindo a medida do ângulo interno do polígono e o número de polígonos usados em torno do ponto de encaixe (vértice comum). Tente estabelecer uma relação e preencha a tabela abaixo.

Polígono	Ângulo Interno	Número de Polígonos
Triângulo		
Quadrado		
Pentágono		
Hexágono		

5) Agora responda: o que é necessário para que o encaixe entre polígonos regulares seja perfeito em torno de um ponto, sem que haja falhas ou sobreposição entre eles?

6) Respondam ainda, quais os polígonos regulares que podem pavimentar o plano?

Anexo III: Terceira Atividade

Vocês têm em mão dois objetos (bolinha de pingue-pongue e bola de sinuca):

a) qual a forma geométrica desses objetos?

b) vocês notam alguma diferença entre estes dois objetos? Em caso positivo, descreva-os.

c) Vocês conhecem outros objetos com esta forma geométrica? Quais?

Anexo IV: Quarta Atividade

a) Represente um ponto no plano.

b) Represente um ponto na superfície esférica.

c) Comente suas conclusões a respeito destas representações

Anexo V: Quinta Atividade

a) Marque dois pontos distintos em uma superfície plana. Qual a menor distância entre estes dois pontos?

b) Marque dois pontos distintos em uma superfície esférica. Qual a menor distância entre estes dois pontos?

Anexo VI: Sexta Atividade

a) Represente uma caminhada no papel sulfite de modo que o início seja um dos pontos marcados no item *a* da atividade cinco até o outro. Imagine agora que você continue sua caminhada. Represente-a no papel sulfite.

b) Repita esta mesma caminhada numa superfície esférica. Desenhe sua caminhada na esfera de isopor que receberam.

c) Escrevam suas conclusões.

Anexo VII: Sétima Atividade

a) Represente uma reta na superfície plana. Trace uma reta paralela à reta que você acabou de representar.

b) Represente agora uma reta (geodésica) na superfície esférica. Tente traçar uma geodésica paralela a que você acabou de representar.

c) A respeito dos itens a e b, o que se pode concluir?

Anexo VIII: Oitava Atividade

a) Represente dois pontos distintos no plano. Quantas retas vocês conseguem representar de tal maneira que contenha, ao mesmo tempo, estes dois pontos?

b) Represente dois pontos distintos que não sejam os pólos em uma superfície esférica. Quantas geodésicas vocês conseguem representar de tal maneira que contenha, ao mesmo tempo, estes dois pontos?

c) E se os dois pontos representados na superfície esférica forem os pólos, quantas geodésicas vocês conseguem representar que contenha, ao mesmo tempo, estes dois pólos?

d) No plano, qual o menor número de lados que contém uma figura? Isto é verdadeiro na superfície esférica? É possível formar uma figura nesta superfície com apenas dois lados?

e) O que é ângulo para você?

f) Se você representar trezentas e sessenta geodésicas que contenha os mesmos pólos, qual a medida do ângulo formado por duas destas geodésicas consecutivas?

g) Se considerarmos a área em graus de um biângulo como a soma de seus dois ângulos, pergunta-se: qual será a área da superfície esférica, em graus?

Anexo IX: Nona Atividade

Vocês estão diante de várias figuras planas regulares, coplanares (todas as faces estão no mesmo plano). Através de dobraduras, tentem transformá-las em figuras espaciais (as faces não estão no mesmo plano).

a) O que acontece com a soma das medidas dos ângulos que formam o "bico" dessas figuras?

b) Com quais polígonos é possível formar os "bicos" dessas figuras?

c) Qual o número mínimo de polígonos necessário para se formar um "bico"?

d) Vocês conseguem formar "bicos" com hexágonos? Justifiquem sua resposta.

e) Qual dessas figuras que vocês formaram aproxima-se mais de uma bola de futebol? Justifique sua resposta.

Anexo X: Décima Atividade

Divida uma superfície esférica em:

a) duas partes iguais.

b) quatro partes iguais

c) oito partes iguais

d) Compare a figura obtida com as que vocês produziram através de dobraduras e digam com qual ela mais se assemelha. Justifique sua resposta.

Anexo XI: Décima Primeira Atividade

Octaedro Esférico

1) Construa um círculo máximo.

2) Construa um outro círculo máximo perpendicular ao primeiro.

3) Construa um terceiro círculo máximo, perpendicular aos dois já construídos.

Cubo Esférico

1) Construa o baricentro de cada um dos triângulos do octaedro esférico.

2) Una cada baricentro com os baricentros adjacentes.

3) Elimine as arestas (retirando os barbantes que representam estas arestas) do octaedro esférico.

Tetraedro Esférico

1) Selecione uma face do cubo esférico e trace uma diagonal nesta face.

2) Trace diagonais em todas as faces restantes, de modo que, no vértice da face que termina uma diagonal, tenha início a diagonal da outra face.

3) Elimine as arestas do cubo esférico, terminando, desta maneira, o tetraedro esférico.

Dodecaedro Esférico

1) Meça com um compasso a aresta da face do cubo esférico por vocês construído. Cubra a superfície esférica com triângulos eqüiláteros, cujos lados tenham a medida desta aresta.

2) Construa o baricentro de cada um desses triângulos.

3) Una os vértices desses triângulos ao baricentro.

4) Tendo em vista que a distância do vértice do triângulo ao baricentro é a aresta do pentágono e que a soma dos ângulos da união resultante no item 3 é 360^o (portanto cada ângulo mede 120^o), termine a construção do dodecaedro esférico.

Icosaedro Esférico

1) Selecione uma face do dodecaedro esférico e construa a mediatriz de cada uma de suas arestas. Faça o mesmo em todos as outras faces.

2) Una o circuncentro de cada uma dessas faces, por intermédio dessas mediatrizes.

3) Elimine as arestas do dodecaedro e o icosaedro esférico está pronto.

Anexo XII – Décima Segunda Atividade

1) Divida cada aresta da face do icosaedro esférico em três partes iguais, marcando os respectivos pontos.

2) Una os pontos marcados ao redor de cada vértice do icosaedro esférico. A tesselação da bola de futebol está pronta.