VANIA DE ANDRADE LUZ

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: DA REFORMA DA MATEMÁTICA MODERNA AOS DIAS ATUAIS

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

VANIA DE ANDRADE LUZ

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: DA REFORMA DA MATEMÁTICA MODERNA AOS DIAS ATUAIS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.***

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

_____

_____

_____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

AGRADECIMENTO

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, os quais cito nominalmente na ordem dos cursos que tive o privilégio de freqüentar:

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Profa. Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho

Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente

Profa. Dra. Anna Franchi

Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy

Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado

Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva

Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Às professoras doutoras, que participaram do exame de qualificação apresentando valiosas sugestões, as quais cito na ordem de seu pronunciamento no exame:

Profa. Dra. Arlete de Jesus Brito

Profa. Dra. Maria Inez Rodrigues Miguel

Às pessoas que gentilmente emprestaram materiais, especialmente livros didáticos, as quais faço opção em não citar nominalmente por receio de incorrer em omissões imperdoáveis.

Aos colegas de quem espero que a parceria do curso se torne profunda amizade.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pela maneira como conduziu o trabalho e, principalmente, pela coerência demonstrada entre o discurso e a prática.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS 8
RESUMO 10
ABSTRACT 11
INTRODUÇÃO 12

1º capítulo – Fundamentações teórica e metodológica e questões da pesquisa 13
1.1 Teoria Antropológica do Didático 13
1.1.1 Organização praxeológica 15
1.1.2 Momentos de estudo 18
1.2 Metodologia e questões da pesquisa 21

2º capítulo – Estudo da Organização Matemática 26
2.1 Transformações geométricas 26
2.1.1 Translações 30
2.1.2 Rotações 30
2.1.3 Reflexões 31
2.2 Breve relato do desenvolvimento da geometria 34
2.2.1 Geometria euclidiana 35
2.2.2 Geometria analítica 35
2.2.3 Geometria projetiva 36
2.2.4 Felix Klein 38
2.3 Transformações geométricas e o ensino 39
2.4 Sobre o uso da palavra *simetria* 40

3º capítulo – Estudo da Organização Didática 42
3.1 Trabalhos desenvolvidos sobre Transformações Geométricas 42
3.2 A reforma da Matemática Moderna 49
3.2.1 Alguns aspectos do movimento de reforma na França 49
3.2.2 Alguns aspectos do movimento de reforma nos Estados Unidos 52
3.2.3 Alguns aspectos do movimento de reforma no Brasil 54
3.3 Textos oficiais 58
3.3.1 Guia Curricular do Estado de São Paulo 59
3.3.2 Proposta Curricular de São Paulo 61
3.3.3 Parâmetros Curriculares Nacionais 63

4º capítulo – Análise das obras: período relativo aos anos 60 65
4.1 Grupo das translações 65
4.1.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre translações 66
4.2 Grupo das rotações 68
4.2.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre rotações 69
4.3 Simetria axial e central 71
4.3.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre simetria axial e central 71
4.4 Similitude central ou homotetia 74
4.4.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre homotetia 75
4.5 Análise do conjunto de atividades propostas de acordo com os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática 76
4.6 Análise de acordo com as principais dificuldades dos alunos e conforme o momento histórico em que a obra foi produzida 78

5º capítulo – Análise das obras: período relativo aos anos 70 81
5.1 Matemática para o ginásio 81
5.1.1 Simetrias 82
5.1.1.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre simetrias 82

5.1.1.2 Análise do conjunto de atividades sobre simetrias segundo os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática 92
5.1.2 Homotetias 95
5.1.2.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre homotetias 95
5.1.2.2 Análise do conjunto de atividades sobre homotetias segundo os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática 108
5.1.3 Análise de acordo com as principais dificuldades dos alunos e conforme o momento histórico em que a obra foi produzida 111
5.2 Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau 113
5.2.1 Simetria 113
5.2.1.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre simetrias 114
5.2.2 Homotetia 122
5.2.2.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre homotetias 123
5.2.3 Análise do conjunto de atividades propostas de acordo com os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática 131
5.2.4 Análise de acordo com as principais dificuldades dos alunos e conforme o momento histórico em que a obra foi produzida 133

6º capítulo – Análise das obras: publicações posteriores aos PCN 136
6.1 Matemática hoje é feita assim 136
6.1.1 Análise praxeológica das tarefas propostas 137
6.1.2 Análise do conjunto de atividades propostas de acordo com os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática 141
6.1.3 Análise de acordo com as principais dificuldades dos alunos e conforme o momento histórico em que a obra foi produzida 142
6.2 Matemática para todos 144
6.2.1 Quinta série 144
6.2.1.1 Análise praxeológica das tarefas propostas 145
6.2.2 Sexta série 148
6.2.2.1 Análise praxeológica das tarefas propostas 149
6.2.3 Sétima série 154
6.2.3.1 Análise praxeológica das tarefas propostas 155
6.2.4 Oitava série 163
6.2.4.1 Análise praxeológica das tarefas propostas 163
6.2.5 Análise do conjunto de atividades propostas de acordo com os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática 171
6.2.6 Análise de acordo com as principais dificuldades dos alunos e conforme o momento histórico em que a obra foi produzida 176

CONCLUSÕES 178
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 193
APÊNDICE 197

FIGURAS

Figura 1 – Simetrias – FARMER 26
Figura 2 – Gravura de Ernst Haeckel de 1904, em seu trabalho *Formas* 28
Figura 3 – Teto da igreja São Francisco de Assis em Ouro Preto (MG) 29
Figura 4 – Translação dos pontos P e Q 30
Figura 5 – Rotação dos pontos P e Q 31
Figura 6 – Reflexão dos pontos P e Q 32
Figura 7 – Reflexão dos pontos P e Q situados em semiplanos opostos em relação ao eixo 33
Figura 8 – Construção errônea da rotação de um pentágono 48
Figura 9 – SANGIORGI, 1969, p.312, exercício 1 66
Figura 10 – SANGIORGI, 1969, p.312, exercício 2 67
Figura 11 – SANGIORGI, 1969, p.312-313, exercício 3 67
Figura 12 – SANGIORGI, 1969, p.312-313, exercício 4 68
Figura 13 – SANGIORGI, 1969, p. 313, exercício 6 70
Figura 14 – SANGIORGI, 1969, p.313, exercício 7 71
Figura 15 – SANGIORGI, 1969, p.314, exercício 8 (1ª parte) 72
Figura 16 – SANGIORGI, 1969, p.314, exercício 8 (2ª parte) 72
Figura 17 – SANGIORGI, 1969, p.314, exercício 9 73
Figura 18 – Representação da solução do exercício 9 73
Figura 19 – SANGIORGI, 1969, p.314 74
Figura 20 – Representação da solução do exercício 10 74
Figura 21 – SANGIORGI, 1969, p.171 75
Figura 22 – SANGIORGI, 1969, p.172 76
Figura 23 – LAMPARELLI, 1972, p.51 83
Figura 24 – LAMPARELLI, 1972, p.53 85
Figura 25 – Representação da solução do exercício 34 87
Figura 26 – LAMPARELLI, 1972, p.52 87
Figura 27 – LAMPARELLI, 1972, p.52 87
Figura 28 – LAMPARELLI, 1972, p.53 90
Figura 29 – LAMPARELLI, 1972, p.127 98
Figura 30 – LAMPARELLI, 1972, p.128, exercício 13 99
Figura 31 – LAMPARELLI, 1972, p.128, exercício 14 100
Figura 32 – Representação da solução do exercício 14d 101
Figura 33 – representação da solução do exercício 16 102
Figura 34 – LAMPARELLI, 1972, p.129, exercício 17 103
Figura 35 – LAMPARELLI, 1972, p.129, exercício 17a 103
Figura 36 – LAMPARELLI, 1972, p.130 105
Figura 37 – LAMPARELLI, 1972, p.131, exercício 22 107
Figura 38 – LAMPARELLI, 1972, p.131, exercício 22a 107
Figura 39 – AVERBUCH, 1975, p.143 114
Figura 40 – AVERBUCH, 1975, p.145 115
Figura 41 – AVERBUCH, 1975, p.147 116
Figura 42 – solução do exercício 2, p.147 117
Figura 43 – AVERBUCH, 1975, p.150 117
Figura 44 – solução do exercício 4, p.150 118
Figura 45 – AVERBUCH, 1975, p.151 118
Figura 46 – AVERBUCH, 1975, p.153 119
Figura 47 – AVERBUCH, 1975, p.154 120
Figura 48 – AVERBUCH, 1975, p.158 121
Figura 49 – AVERBUCH, 1975, p.166 121
Figura 50 – solução do exercício 3, p.166 122
Figura 51 – AVERBUCH, 1977, p.97 123
Figura 52 – solução do exercício 1 124
Figura 53 – AVERBUCH, 1977, p.99 125
Figura 54 – solução do exercício 3, p.99 125
Figura 55 – AVERBUCH, 1977, p.100 126
Figura 56 – solução do exercício 2, p.100 126

Figura 57 – AVERBUCH, 1977, p.101 127
Figura 58 – solução do exercício 3, p.101 127
Figura 59 – AVERBUCH, 1977, p.102 128
Figura 60 – solução do exercício 1, p.102 128
Figura 61 – AVERBUCH, 1977, p.106, exercício 1b 129
Figura 62 – AVERBUCH, 1977, p.106, exercício 1c 129
Figura 63 – solução do exercício 1 (a, b), p.106 130
Figura 64 – solução do exercício 1c, p.106 130
Figura 65 – AVERBUCH, 1977, p.108 131
Figura 66 – solução do exercício 5a, p.108 131
Figura 67 – AVERBUCH, 1975, exercício 6, p.153 134
Figura 68 – P e P' são eqüidistantes do eixo (BIGODE, 2000, 7ª série, p.247) 136
Figura 69 – A e A' são eqüidistantes do centro O (BIGODE, 2000, 7ª série, p.249) 137
Figura 70 – Representação da solução do exercício 4 138
Figura 71 – BIGODE, 7ª série, 2000, p.252 139
Figura 72 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.202 145
Figura 73 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.202 146
Figura 74 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.203 146
Figura 75 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.204 147
Figura 76 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.204 147
Figura 77 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.35 150
Figura 78 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.35 151
Figura 79 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.36 152
Figura 80 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.36 153
Figura 81 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.36 153
Figura 82 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.37 154
Figura 83 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138 156
Figura 84 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138 157
Figura 85 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138 158
Figura 86 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138 158
Figura 87 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.139 159
Figura 88 – Representação da solução do exercício 6a 159
Figura 89 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.139 160
Figura 90 – Representação da solução do exercício 5 161
Figura 91 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.139 162
Figura 92 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.141 162
Figura 93 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.210 164
Figura 94 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.210 165
Figura 95 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.213 166
Figura 96 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.210 167
Figura 97 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.211 167
Figura 98 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.211 168
Figura 99 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.212 168
Figura 100 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.212 169
Figura 101 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.212 170
Figura 102 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.14 171

RESUMO

Esta dissertação consiste em um estudo focado no ensino de transformações geométricas e organizado com base na análise de exercícios propostos em livros didáticos publicados, a partir dos anos 60, no Estado de São Paulo.

A realização deste trabalho apóia-se em uma análise com os seguintes objetivos: examinar a completude das organizações matemáticas locais conforme a Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard; observar como foram abordadas as principais dificuldades dos alunos, com base nas pesquisas de Jaime e Gutiérrez (1996) e de Jahn (1998); comparar as propostas de ensino de isometrias e homotetias vigentes à época do movimento de reforma da Matemática Moderna com aquelas que se seguiram à publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Inicialmente, procedemos a um estudo da organização matemática relativa a transformações geométricas, estudo no qual são examinadas as simetrias presentes em elementos da natureza e das artes, as definições das principais transformações que fazem parte do programa do Ensino Fundamental, além da identificação de elementos históricos relacionados ao desenvolvimento da geometria. Em seguida, passamos ao estudo da organização didática, no qual se averiguaram pesquisas sobre ensino e aprendizagem de isometrias, textos oficiais como Guias, Proposta e Parâmetros Curriculares, além de alguns aspectos do movimento de reforma da Matemática Moderna no Brasil, e sua relação com o mesmo movimento nos Estados Unidos e na França.

A análise dos livros foi feita a partir do agrupamento dos exercícios em tipos de tarefas, qualificação essa utilizada tanto para a identificação da técnica de resolução, como para a distinção da tecnologia apropriada à justificação da primeira. Em seguida, efetuamos um estudo do conjunto dos exercícios propostos, no qual se encaminhou o cumprimento do acima exposto, no segundo parágrafo deste resumo, como objetivos da análise desenvolvida.

A partir da base teórica adotada, as conclusões da pesquisa indicam que as orientações observadas em cada um dos períodos analisados não garantiriam, por si, que importantes problemas no ensino de transformações fossem resolvidos. Como sabido, a época correspondente ao movimento de reforma da Matemática Moderna enfatizou a estrutura matemática, ao passo que o período que se seguiu à publicação dos Parâmetros Curriculares destacou a relação de isometrias e homotetias com níveis superiores de determinação matemática. No primeiro caso, a visibilidade da obra matemática não foi destacada, enquanto, no segundo, a ausência de elementos tecnológicos pode ter comprometido a completude da organização matemática.

Palavras-chave: Ensino de Geometria, Transformações, Matemática Moderna, Teoria Antropológica.

ABSTRACT

This dissertation consists of a study focused on the teaching of geometrical transformations based on the analysis of exercises suggested in didactical books published since the 1960s in São Paulo State.

The realization of this work is supported by an analysis with the following objectives: to examine the completion of the local mathematical organizations according to the Anthropological Theory of Didactics, by Yves Chevallard; to observe how the students' main difficulties were approached, based on research by Jaime and Gutiérrez (1996) and Jahn (1998); to compare the teaching proposals of isometries and homoteties current at the time of the movement of reformation of Modern Mathematics to those which followed the publishing of the Parâmetros Curriculares Nationais (Brazilian National Curricular Standards).

Initially, we proceeded to a study of the mathematical organization relative to geometrical transformations, a study in which will be examined the symmetries of elements of nature and the arts, the definitions of the main transformations that are part of the program of Ensino Fundamental (equivalent to an eight-year elementary school), besides the identification of historical elements related to the development of Geometry. After that, we will be moving on to the study of the didactical organization, in which researches about the teaching and learning of isometries were verified, as well as official texts as Curricular Guides, Proposals and Standards, besides a few aspects of the movement of reformation of Modern Mathematics in Brazil, and its relationship with the same movement in the United States and France.

The analysis of the books was carried out from the grouping of exercises in types of tasks, a qualification used as much for the identification of the resolution techniques, as for the distinction of the technology appropriate to the justification of the former. Following that, we have performed a study of the set of proposed exercises, in which the above-mentioned was complied with, in the second paragraph of this abstract, as objectives of the analysis that was developed.

Departing from the adopted theoretical basis, the conclusions of the research indicate that the orientations observed in each of the analyzed periods would not guarantee, *per se*, that important problems in the teaching of transformations were resolved. As it is known, the period correspondent to the movement of reformation of Modern Mathematics has emphasized the mathematical structure, whereas the period that followed the publishing of the Parâmetros Curriculares highlighted the relationship of isometries and homoteties with superior levels of mathematical determination. In the first case, the visibility of the mathematical work was not highlighted, while in the second one, the absence of technological elements might have compromised the completion of the mathematical organization.

Keywords: Teaching of Geometry, Transformations, Modern Mathematics, Anthropological Theory.

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo sobre o ensino de transformações geométricas instituído a partir do movimento de reforma da Matemática Moderna.

Abordaremos, nos três primeiros capítulos, a metodologia, a fundamentação teórica, as questões da pesquisa, assim como as organizações matemática e didática. Na esteira desse registro, faremos um estudo das transformações geométricas e de seu respectivo ensino, examinando aplicações e definições, além de efetuar uma investigação sobre como o estudo do tema em questão pode ser realizado.

Nos demais capítulos, apresentaremos, primeiramente, uma análise dos livros didáticos cuja formulação correspondeu ao período de expansão e institucionalização do movimento de reforma da Matemática Moderna, verificado nos anos 60. Em seguida, faremos um exame dos livros editados, nos anos 70, por ocasião da elaboração dos Guias Curriculares. E, finalmente, analisaremos os livros didáticos lançados nos anos 90, mais especificamente, no período correspondente à produção dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Para não incorrer em generalizações que possam comprometer a qualidade da pesquisa, nossa análise ficará restrita a livros publicados no Estado de São Paulo destinados às quatro últimas séries do Ensino Fundamental.

Tomaremos como referência para a elaboração dessas análises a Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, além de pesquisas que, concentradas no ensino de isometrias, tenham examinado as principais dificuldades dos alunos em relação ao tema.

1º CAPÍTULO

FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICA E METODOLÓGICA E QUESTÕES DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos não só a fundamentação teórica do trabalho – realizada com base em um resumo dos aspectos da Teoria Antropológica diretamente relacionados à análise que pretendemos fazer –, como também a metodologia e as questões da pesquisa.

1.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático descreve o conhecimento matemático em termos de duas organizações: matemática e didática. A primeira refere-se à realidade matemática que pode ser construída na sala de aula, relativamente a um tema escolhido. A segunda trata da maneira pela qual o estudo do tema pode ser realizado. A Teoria Antropológica está voltada para a organização do estudo, em especial aquele relacionado ao conhecimento científico. Entre suas aplicações, está o exame do papel da escola e o trabalho desta na reconstrução, pelo estudante, do conhecimento produzido nas instituições científicas.

A didática da matemática é a ciência que estuda os processos didáticos, ou seja, os processos não apenas voltados ao ensino e à aprendizagem da matemática, mas também às questões matemáticas que podem ser encontradas dentro ou fora da escola (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.46). Nesse sentido, o processo didático está além do processo de ensino e aprendizagem. É como se este fosse um caso particular daquele, uma vez que o que Chevallard chama de *didático* refere-se a qualquer processo de estudo, e não necessariamente ao efetuado em uma instituição de ensino.

Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001 p.99), “uma obra é uma resposta a uma pergunta ou a um conjunto de perguntas”. Levando para a escola esse conceito de obra, pode-se inferir o seguinte raciocínio: o que a escola deve responder não é uma questão específica, mas um conjunto de perguntas que possam ser respondidas a partir dos saberes produzidos na escola. Não se vê, por exemplo, a língua materna fora da escola como uma obra. É na escola, com efeito, que se aprende a vê-la como uma obra construída por vários séculos e extremamente complexa (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.103). Pode-se assim, com base nesse exemplo, dizer o mesmo da matemática.

Para responder a questões que não sejam imediatas – antagônicas a “Que dia é hoje?”, ou “Qual é o seu nome?”–, é preciso construir uma *praxeologia* relativa ao tipo de tarefa considerada. Por exemplo, para responder à pergunta “As figuras F_1 e F_2 são simétricas?”, uma pessoa – desde que em domínio do conhecimento segundo o qual duas figuras simétricas eqüidistam de uma reta considerada como eixo de simetria – poderá fazer o cálculo das distâncias de alguns pontos das figuras (como os vértices, no caso dos polígonos) até a reta e concluir, dessa forma, se elas são ou não simétricas. Porém, se a pessoa interrogada não dispõe de qualquer técnica para realizar a tarefa proposta, a questão que se coloca não é mais “As figuras F_1 e F_2 são simétricas?”, e sim “Como determinar se duas figuras são ou não simétricas?”. Nesse caso, a resposta à questão proposta é, segundo Chevallard (1999, p.238), uma organização praxeológica a ser construída.

Questões do tipo “verificar se duas figuras são simétricas” requerem uma técnica que, suscetível de resolvê-las convenientemente, compõe, ao lado das tarefas propriamente ditas, a parte prática da atividade matemática, ou *práxis*. A práxis é, então, formada pelas tarefas e pelas técnicas que permitem resolver as questões propostas. Além disso, a técnica necessita de um discurso matemático que a justifique e que seja usado para explicá-la. A esse discurso, Chevallard chamou *tecnologia*. A tecnologia e a teoria (que, por sua vez, justifica e explica a

tecnologia) permitem entender o que é feito na prática e constituem o *logos*, ou seja, o discurso que explica a prática. Da junção das duas palavras, isto é, da interação entre *práxis* (que representa a parte prática) e *logos* (que representa o discurso que explica a *práxis*), obtém-se o conceito de *praxeologia*. Uma organização matemática é, portanto, uma praxeologia constituída pelo seguinte conjunto: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, conjunto esse que procura responder a questões relacionadas ao objeto de estudo. Uma organização didática também é uma praxeologia constituída pelo mesmo conjunto (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria), mas que procura responder a questões do tipo "como estudar". As organizações matemática e didática referem-se tanto às praxeologias aplicadas dentro da instituição escolar quanto às aplicadas fora dela.

1.1.1 Organização praxeológica

De acordo com a Teoria Antropológica do Didático, toda atividade humana emprega uma organização, que Chevallard (2002a, p.3) representa por [T, τ, θ, Θ]. Denominada *praxeologia* ou *organização praxeológica*, essa organização consiste em realizar uma tarefa t de um certo tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, que é, por sua vez, justificada por uma teoria Θ.

Nessa organização, deve-se identificar o bloco prático/técnico [T, τ] e o bloco tecnológico/teórico [θ, Θ] – um e outro representando, respectivamente, práxis e logos, ou, ainda, o saber fazer e o saber. Para Chevallard, o que o professor deve ensinar a seus alunos não são tarefas isoladas, mas organizações matemáticas. Considerando o termo "ensinar" muito polêmico, Chevallard propõe uma reformulação da problemática didática do professor, no sentido de que este deva proceder com sua turma de alunos a uma certa organização do saber matemático. O problema praxeológico do professor é, portanto, o de construir uma praxeologia representada por [T_π, τ_π, θ_π, Θ_π] para fornecer uma resposta R_π = [T_π, τ_π, θ_π, Θ_π]

que possa responder à questão Q_π. A *organização matemática* é a praxeologia [T, τ, θ, Θ], enquanto a *organização didática* é a praxeologia [T_π, τ_π, θ_π, Θ_π], que responde a esta questão: como executar uma tarefa t_π do tipo T_π? Com a organização didática, Chevallard pretende propor um trabalho na escola que não esteja restrito à execução de tarefas, isto é, um trabalho cuja célula, em vez de ser um dado objeto matemático, seja uma organização matemática. O objetivo, então, não seria o de ensinar determinado objeto, mas o de "ensinar" uma organização matemática na qual o objeto matemático venha acompanhado do bloco prático/técnico e do bloco tecnológico/teórico que lhe sejam afins.

Em Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.123), *tipos de tarefas* são aquelas questões que não podem ser respondidas imediatamente, por serem problemáticas para quem precisa respondê-las. Os tipos de tarefas, inicialmente problemáticos, devem ser transformados em tarefas que possam ser resolvidas com sucesso. Relativamente às transformações geométricas, um tipo de tarefa poderia ser enunciado da seguinte forma: construir uma figura simétrica a uma figura dada. Estariam vinculadas a esse tipo de tarefa algumas tarefas como: dada uma figura e um eixo vertical, desenhar a simétrica; desenhar a simétrica de uma figura dada, segundo um eixo horizontal ou inclinado; construir a simétrica de uma figura dada em malha quadriculada, em uma folha de desenho, ou em uma tela de computador. A diferença entre tarefa e tipo de tarefa não depende apenas da questão a ser resolvida, mas do fato de ela ser ou não problemática para quem precisa resolvê-la. Cada tipo de tarefa é, para Chevallard, um *objeto de estudo*. Quando os tipos de tarefas de uma dada organização matemática são caracterizados por uma mesma técnica, a organização matemática é dita *pontual* (OMP). A reunião de organizações pontuais segundo uma determinada tecnologia chama-se *organização matemática local* (OML), na qual se agrupa um conjunto de tipos de tarefas. Esse conjunto de tipos de tarefas constitui o que Chevallard (2002b, p.2) chama *temas de estudo*, a cada qual a tecnologia permitirá associar uma técnica correspondente. As isometrias podem ser usadas

aqui como um exemplo de tema de estudo, no qual os tipos de tarefas estão agrupados segundo uma tecnologia vinculada à manutenção de distâncias relativas. É nesse nível das organizações matemáticas locais que o trabalho do aluno deverá ocorrer.

Quando se integram várias organizações locais em torno de uma teoria comum, a organização matemática se diz *regional* (OMR), e a unidade de estudo em torno dessa teoria é um *setor de estudo*. O trabalho do professor se dá no nível das organizações matemáticas regionais, enquanto o do aluno ocorre, como foi dito anteriormente, no nível das organizações locais. Sendo assim, a organização matemática local que o professor vai trabalhar com seus alunos deve ser extraída de uma organização mais ampla, ou seja, da organização regional. O trabalho que o professor deve realizar com seus alunos é, portanto, o de desenvolver com a sua turma uma organização matemática local. Isso significa que cabe ao aluno produzir um enunciado tecnológico que justifique a técnica por ele aplicada para resolver uma determinada tarefa.

A reunião de várias organizações matemáticas regionais constitui uma organização *global*, identificada como um *domínio de estudo*. O conjunto dessas organizações globais, ou domínios, constitui uma *disciplina*. A título de ilustração, as transformações geométricas inserem-se, hierarquicamente, na unidade designada como setor de estudo, no domínio da geometria e na disciplina matemática. Entretanto, dependendo da orientação que se dê ao seu estudo, é possível encontrá-las também vinculadas ao domínio da álgebra, especificamente quando são estudadas como uma função do conjunto dos pontos do plano nele mesmo.

Objetos e temas são níveis de maior especificidade (ou níveis inferiores), enquanto setores, domínios e disciplina são níveis de menor especificidade (ou níveis superiores). No entender de Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.136), “para incidir de maneira significativa sobre as dificuldades matemáticas dos alunos, é necessário modificar aqueles aspectos da matemática escolar que escondem dos alunos a verdadeira disciplina matemática”. Isso

significa que, para reconhecer o que poderia ser a organização de estudo de um objeto ou de um tema, é conveniente levar em conta os níveis superiores (setores, domínios e, em particular, disciplina), fazendo-os contrastar com os inferiores (objetos e temas). Entretanto, o que normalmente se vê nos enunciados escolares é uma atividade refinada, expediente que não raro veda ao aluno a possibilidade de defrontar-se, em sua vida fora da escola, com um problema cujo enunciado seja análogo àquele proposto nas aulas (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.103). Isso pode indicar que haja uma preocupação maior da matemática escolar com os níveis de maior especificidade (objetos e temas), em detrimento dos níveis superiores de determinação matemática, como setores, domínio e disciplina.

1.1.2 Momentos de estudo

Certos tipos de situações encontram-se necessariamente presentes quando se pretende estudar uma dada organização matemática independentemente do caminho que se adote para efetuar esse estudo. A essas situações, Chevallard (1999, p.250) chama *momentos de estudo*. À revelia da ordem em que ocorram, em todo processo de estudo sempre haverá um momento em que será preciso decidir a estratégia, ou a técnica, que será aplicada para responder as questões dadas. Haverá um momento de institucionalização das respostas encontradas, um momento de avaliação etc.

A primeira experiência, o momento inaugural, com a organização que se pretende estudar ocorre por meio de pelo menos um dos tipos de tarefas da organização. Na instituição escolar, um professor poderá dizer a seus alunos que na próxima aula eles irão estudar simetrias, por exemplo. Nesse caso, o primeiro encontro com o assunto será anunciado pelo professor, mas, no decorrer do estudo, os alunos terão vários outros primeiros encontros com questões vinculadas ao tema, que passarão muitas vezes despercebidos enquanto tais. Por exemplo, em uma primeira aula sobre simetria axial, o professor poderá recorrer a várias imagens que apresentem essa simetria nas artes, na natureza etc. Posteriormente, com a

necessidade de explicitar propriedades da reflexão, deverá ocorrer um novo primeiro encontro com o tipo de tarefa em questão, uma vez que a aula inicial não daria conta, sozinha, dos vários aspectos da organização praxeológica a ser construída com os alunos. Isso significa que o momento do primeiro encontro com a organização que se pretende estudar não está restrito à introdução ao tema. Ao contrário, ele permeia todo o trabalho a ser desenvolvido relativamente ao tema escolhido.

O segundo momento de estudo é o da exploração do tipo de tarefa e, igualmente, da construção de uma técnica inicial para realizar esse tipo de tarefa. Segundo Chevallard (1999, p.252), o que está no centro da atividade matemática é mais a elaboração de técnicas do que a resolução de problemas isolados. O estudo de um problema e a formulação de uma técnica para resolvê-lo não tem um fim em si mesmo. De fato, ele é um meio para a criação de novas técnicas que permitirão resolver outros problemas (CHEVALLARD, 1999, p.252). Esse segundo momento de estudo está, nesse sentido, no centro da atividade matemática, uma vez que estudar problemas se torna um meio para a criação de técnicas – e as técnicas elaboradas para resolvê-los serão usadas para resolver outros problemas do mesmo tipo. O terceiro é o momento do questionamento tecnológico, da justificativa da técnica, da construção do bloco tecnológico/teórico [θ, Θ]. Neste último, procura-se organizar o entorno tecnológico/teórico que justifica a técnica aplicada. Às vezes, a primeira etapa do estudo de um determinado tema é feita por meio de uma exposição, pelo professor, do bloco tecnológico/teórico [θ, Θ], seguido de problemas relativos ao mesmo bloco.

Os três momentos descritos – ou seja, o primeiro encontro, a construção de uma técnica inicial e o questionamento tecnológico – fazem parte do que Chevallard (2002a, p.12) chama *grupo de atividades de estudo e de pesquisa*. Há, ainda, três outros momentos de estudo, nos quais será preciso trabalhar a técnica, institucionalizar e também avaliar a organização matemática elaborada. Entre os momentos de estudo, não há um que seja mais ou

menos nobre. “Cada momento do processo de estudo faz referência a uma dimensão ou aspecto da atividade de estudo, mais do que a um período cronológico preciso” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.276). Entretanto, o quarto momento, aquele em que se pode melhorar e trabalhar a técnica, é às vezes considerado como um estágio menor, quase rotineiro. A bem dizer, não é assim, todavia, que ele deve ser entendido. O trabalho de aprimoramento da técnica é um trabalho refinado da atividade matemática com o intuito de gerar novas técnicas.

Durante a elaboração da organização matemática, muitos elementos são acionados pelos alunos a partir de seu próprio repertório e de novos elementos elaborados coletivamente. O quinto momento é o da institucionalização e diz respeito à organização matemática em toda a sua complexidade. Nessa fase, o professor vai dizer a seus alunos o que é precisamente a organização matemática elaborada. Para isso, ele precisará apontar, entre os elementos que foram acionados durante a elaboração da organização, aqueles que deverão fazer, efetivamente, parte dela e aqueles que deverão ser deixados à parte. O sexto momento é o da avaliação, que se articula com o momento da institucionalização. A avaliação não é a do aluno e sim a da organização matemática elaborada: é preciso avaliar se os tipos de tarefas estão bem identificados, se são variados, se estão ou não isolados (o que se consideram tipos de tarefas isolados são aqueles realizáveis por técnicas que não estejam relacionadas com nenhum elemento tecnológico), se as técnicas estão suficientemente trabalhadas, se o discurso tecnológico é suficientemente explícito a ponto de ajudar, efetivamente, a justificar as técnicas e a encaminhá-las na direção adequada para construir novas técnicas (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p.13).

Como especificado anteriormente, o trabalho do aluno se dá no nível das organizações matemáticas locais, a partir das quais ele deverá reconstruir as organizações pontuais. O processo de reconstrução de uma organização matemática local depende da maneira como se

cumpram os seis momentos de estudo. De acordo com Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p.13), o produto resultante de um processo de construção que cumpra os seis momentos de estudo é uma organização matemática local relativamente completa. A noção de completude é, portanto, relativa. Não há sentido em se falar de organizações matemáticas completas ou incompletas. Uma organização matemática local será tão mais completa quanto menos isolados estiverem os tipos de tarefas que a compõem, fazendo com que seja possível ao aluno relacioná-los a outros tipos de tarefas que façam parte do seu repertório matemático. O grau de completude de uma organização matemática é ainda indicado pela existência de técnicas alternativas, como também pela constatação de elementos tecnológicos que permitam questionar as diferentes técnicas, analisar suas equivalências e discernir qual é a mais confiável. Outros indicadores do grau de completude da organização matemática são: a existência de técnicas que permitam resolver um tipo de tarefa – tanto quanto a tarefa inversa – e a existência de tarefas matemáticas abertas, no sentido de que os dados não estejam todos fixados completamente de antemão (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p.14-15).

1.2 METODOLOGIA E QUESTÕES DA PESQUISA

Como o objetivo deste trabalho é examinar, com base na análise de livros didáticos, o ensino de transformações geométricas ministrado no período do movimento de reforma da Matemática Moderna, bem como nos períodos imediatamente subseqüentes a este, o recurso técnico a ser utilizado para a coleta dos dados será o da pesquisa documental. Os documentos sobre os quais trabalharemos são livros didáticos, publicados no Estado de São Paulo, correspondentes a quatro períodos distintos: o período inicial da reforma, nos anos 60; o período da elaboração do Guia Curricular de São Paulo, nos anos 70; o período da elaboração da Proposta Curricular de São Paulo, nos anos 80; e, por fim, o período da elaboração e publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, nos anos 90. A referência utilizada para a distribuição dos períodos obedece à elaboração cronológica dos documentos citados, ou seja,

Guias, Proposta e Parâmetros. O próprio movimento da Matemática Moderna, as discussões que levaram à elaboração e publicação dos Guias Curriculares, as discussões que se seguiram ao refluxo da reforma da Matemática Moderna e à conseqüente elaboração e publicação da Proposta Curricular e, por fim, a elaboração e publicação dos Parâmetros Curriculares expressaram mudanças significativas no modo de pensar o ensino das transformações geométricas, conforme pretendemos explicitar a partir da análise dos livros publicados nos respectivos períodos.

Do período inicial, analisaremos da obra MATEMÁTICA CURSO MODERNO, de Osvaldo Sangiorgi, o volume 3, em 6ª edição, de 1969, e o volume 4, na 4ª edição, também de 1969, que são aqueles nos quais foram abordadas transformações geométricas. Essa obra foi escolhida especialmente pela importância que teve seu autor na divulgação da Matemática Moderna com a fundação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), em 1961, no Estado de São Paulo. O volume 1 dessa coleção foi, segundo Miorim (2005, p.8), o primeiro livro publicado, para as quatro últimas séries do atual Ensino Fundamental, a ter em seu título a denominação *moderno*, "para indicar a opção por um tratamento mais atualizado da matemática, prática essa que será adotada por muitas obras desse período".

Do segundo período, analisaremos o 4º volume da obra MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO, de Lydia Lamparelli e outros autores, publicado em 1972, além dos volumes destinados a 7ª e 8ª séries que integram o CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU, de Anna Averbuch e outros autores, publicados respectivamente em 1975 e 1977. A escolha dessas obras deveu-se ao fato de elas terem sido produzidas por professores do ensino secundário envolvidos no movimento de reforma da Matemática Moderna com grande atuação no GEEM.

Relativamente ao terceiro período – aquele correspondente à elaboração e publicação da Proposta Curricular de São Paulo –, foram examinadas várias obras e não foi encontrado

em nenhuma delas sequer um capítulo ou tópico que abordasse transformações geométricas. No apêndice deste trabalho, será possível conhecer uma lista contendo tais livros.

Dentre as obras editadas no quarto período, o correspondente à elaboração dos PCN, escolhemos analisar duas publicações: MATEMÁTICA HOJE É FEITA ASSIM, de Antonio José Lopes Bigode, e MATEMÁTICA PARA TODOS de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis. Para fazer essa escolha, recorremos ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 1999 (BRASIL, 1999) e procuramos, inicialmente, entre as obras aprovadas, aquelas que o foram para as quatro séries (da quinta à oitava) do Ensino Fundamental. Chegamos, então, ao total de seis títulos, dos quais escolhemos os que apresentassem pelo menos um capítulo dedicado ao estudo de transformações geométricas. Cabe esclarecer, entretanto, que a nossa análise dos livros acima citados será feita sobre as edições de 2000 e 2002, respectivamente, e não especificamente sobre a primeira edição de cada obra, cujo conteúdo foi avaliado pelo PNLD de 1999. Tal opção justifica-se por não havermos notado alterações significativas, para os objetivos da pesquisa, entre as duas edições. De qualquer forma, a edição analisada é aquela adotada nos dias atuais.

Definidos os documentos, resta estabelecer as estratégias para a análise. Nas palavras de Chervel (1990, p.204), “se os conteúdos explícitos constituem o eixo central da disciplina ensinada, o exercício é a contrapartida quase indispensável”. Segundo Chervel, o que se chama exercício é a atividade proposta ao aluno. Logo, a nossa análise se concentrará nos exercícios propostos aos alunos. Nesse sentido, examinaremos inicialmente quais são as técnicas que poderão ser empregadas nas resoluções das tarefas propostas e quais as respectivas tecnologias que poderão justificar as técnicas, no contexto do repertório dos alunos. A partir dessa primeira parte da análise, passaremos a avaliar, no conjunto dos exercícios, o grau de completude da organização matemática assim como a abrangência dos

níveis de determinação matemática. Apoiados na Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, procuraremos responder às duas questões que se seguem:

- Nas obras analisadas, qual é o grau de completude das organizações matemáticas locais?

- Há uma correlação entre os níveis superiores e os níveis inferiores de determinação matemática?

Para verificar o grau de completude das OML, procuraremos examinar a maneira como são cumpridos os momentos de estudo, de modo a constatar, ou não, a presença de tarefas isoladas, a existência de técnicas alternativas para a realização de alguns tipos de tarefas, a existência de técnicas que permitam resolver um tipo de tarefa – bem como a sua inversa –, a existência de elementos tecnológicos necessários ao trabalho do aluno, além da presença de tarefas matemáticas abertas. No que tange à correlação entre os níveis superiores e inferiores de determinação matemática, procuraremos verificar se os tipos de tarefas propostos concentram-se no nível dos objetos matemáticos, ou se há uma relação destes com o domínio da geometria e com a disciplina matemática.

Ainda a respeito do conjunto dos exercícios, analisaremos as tarefas propostas e a relação destas com as principais dificuldades dos alunos. Para isso, tomaremos como base a leitura de pesquisas realizadas sobre o assunto, procurando responder à seguinte pergunta:

- Como são abordadas questões relativas às principais dificuldades dos alunos no que diz respeito à compreensão das transformações geométricas?

Para concluir, analisaremos as obras segundo um critério histórico, a fim de extrair de suas características principais o discurso didático da época em que foram escritas. Nesse sentido, nossa análise irá se basear nas orientações curriculares fornecidas à época em que cada obra foi produzida, de modo que possamos responder à seguinte questão:

- Nas obras analisadas, como os autores atendem às orientações dadas em documentos oficiais e, ao mesmo tempo, contribuem para ampliar o discurso didático presente em tais orientações?

Esse conjunto de quatro questões pontuais tem como finalidade examinar vários aspectos da questão maior que pretendemos responder neste trabalho, a qual enunciamos, resumidamente, da seguinte forma:

- Como são contempladas, nos livros didáticos, as principais orientações dadas em documentos oficiais, como Guias, Proposta e Parâmetros Curriculares, relativamente ao ensino de transformações geométricas no contexto do Ensino Fundamental, e em que medida tais orientações atendem aos aspectos relevantes destacados na base teórica por nós adotada?

2º CAPÍTULO

ESTUDO DA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

A matemática é uma obra aberta, no sentido de que ela procura responder não somente às questões internas a ela, mas também às questões de outras áreas do conhecimento (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.96). Embora não seja objetivo deste trabalho estudar o setor das transformações geométricas, cabe fazer uma pequena exploração das possíveis questões que tal estudo poderia responder. Para tanto, vamos examinar, inicialmente, os conceitos matemáticos subjacentes a tais questões e, em seguida, apresentar um breve relato histórico da geometria, no qual procuraremos localizar a origem das transformações geométricas e suas primeiras aplicações no ensino.

2.1 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

As transformações geométricas estudadas no Ensino Fundamental resumem-se a isometrias e homotetias. No primeiro caso, as simetrias aparecem com grande destaque. O uso da palavra *simetria* é bastante genérico e diz respeito a uma quantidade enorme de configurações planas ou espaciais. No livro *Grupos e simetria*, Farmer (1999, p.43) questiona: "O que é simetria?". E se vale de uma ilustração: "As seguintes figuras ajustam-se à concepção usual da palavra simétrica. A primeira figura tem simetria de espelho, a segunda tem simetria de rotação e a terceira tem simetria de espelho e de rotação".

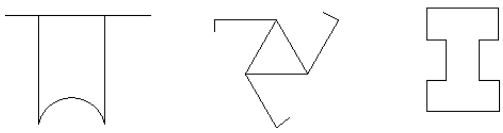


Figura 1 – Simetrias – FARMER, 1999, p.43

Para Weyl (1997, p.15), “em um sentido, *simétrico* indica algo bem-proporcionado ou bem-balanceado e *simetria* denota aquele tipo de concordância em que várias partes de algo se integram em uma unidade”. Ao setor de estudos do qual fazem parte as simetrias dá-se o nome *transformações,* termo que aparece freqüentemente vinculado ao tratamento algébrico que lhe é dado. Quando tais transformações mantêm as distâncias relativas, dizemos que se trata de isometrias, mas quando essas distâncias aumentam ou diminuem proporcionalmente, trata-se do estudo das homotetias.

Várias áreas do conhecimento se interessam pelo estudo da simetria. A química, por exemplo, tem amplo interesse nele. Um composto químico apolar, por exemplo, tem suas cargas elétricas simetricamente distribuídas. O interesse do químico nesse composto reside no fato de que um composto apolar não se mistura senão com outro que seja também apolar (BISHOP, 1973, p.19). O estudo das simetrias que possam ser observadas nos compostos químicos permite fazer uma previsão do comportamento das misturas e das reações de tais compostos e tem ampla aplicação na identificação qualitativa e quantitativa de substâncias, na reatividade, na filtragem etc. Outras áreas, como a física e a biologia, também têm grande interesse nesse estudo. De acordo com Dawkins (1998, p.250-252), a grande maioria dos animais – o homem incluído – é bilateralmente simétrica, embora a simetria bilateral não seja o único tipo existente. Em seu entender, há outros planos onde é possível ocorrer espelhos mutacionais caracterizando a presença da simetria radial. Nesse sentido, o autor lembra que “a maioria dos animais radialmente simétricos acrescenta simetria bilateral a cada raio, independentemente do número de raios que apresente” (DAWKINS, 1998, p.253). A figura seguinte mostra radiolários (protozoários amebóides) do grupo dos *phaeodarea*. No primeiro deles, é possível notar a presença de simetria radial de seis raios apresentando simetria bilateral em cada um deles.

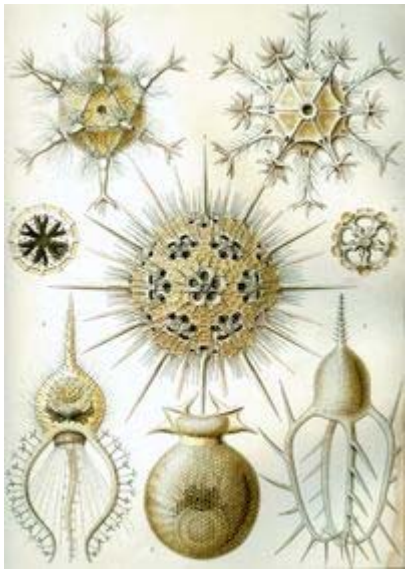


Figura 2 – Gravura de Ernst Haeckel de 1904, em seu trabalho *Formas artísticas da natureza*, mostrando cercozoários da classe dos *phaeodarea*.
Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Phaeodaria>
Acesso em: 3 dez. 2006

Nas artes, simetria significa descanso, ordem e lei, ao passo que assimetria significa movimento, arbitrariedade e liberdade. Segundo Weyl (1997, p.19), o artista realiza intuitivamente as leis matemáticas que são a origem da simetria na natureza. Mas, afirma ele, "raramente a assimetria é meramente a ausência de simetria. Mesmo nos desenhos assimétricos pode-se sentir a simetria como a norma da qual se desvia sob forças de caráter não formal" (WEYL, 1997, p.25). A título de ilustração, podemos observar na pintura de Manuel da Costa Ataíde, o teto da nave da igreja São Francisco de Assis em Outro Preto (MG). É possível notar, nessa pintura, uma quebra intencional da simetria em vários detalhes, embora o conjunto obedeça a um princípio de simetria bilateral.

Figura 3 – Teto da igreja São Francisco de Assis em Ouro Preto (MG).
Disponível em <http://www.icomos.org.br/patrimonio_brasileiro/ouropreto/ouro_preto.htm>
Acesso em: 20 mai. 2006

São as transformações geométricas que vão responder às questões propostas pelas simetrias – sejam estas produzidas pelas artes, sejam elas encontradas na natureza, nas ciências físicas, na química ou na biologia – e que irão, assim, tornar precisas as noções dos vários tipos de simetrias.

Como o presente trabalho se limita ao Ensino Fundamental, cabe explicitar as principais definições e propriedades tanto das isometrias do plano quanto das homotetias, que são, ambas, as transformações estudadas nesse nível de ensino.

Uma isometria F é uma aplicação do plano nele mesmo tal que, dados dois pontos quaisquer, P e Q, do plano, a distância entre P e Q é igual à distância entre suas imagens. Um ponto P do plano é invariante por uma isometria F se F(P) = P. Da mesma forma, um subconjunto A do plano é invariante por uma isometria F se F(A) = A.

Uma homotetia H de centro O e razão k é uma transformação do plano nele mesmo tal que H(P) = P’ se, e somente se, os pontos P, O e P’ são colineares e $\frac{P'O}{PO} = k$, qualquer que seja o ponto P do plano, com P diferente de O e k um número real diferente de zero. $\overrightarrow{P'O}$ e $\overrightarrow{PO}$ são segmentos orientados e o número k é chamado razão da homotetia. Da definição

decorre que se k for maior que zero, $\overrightarrow{P'O}$ e $\overrightarrow{PO}$ terão o mesmo sentido, mas se k for menor que zero, $\overrightarrow{P'O}$ e $\overrightarrow{PO}$ terão sentidos contrários e O ficará entre P e P'.

Do conjunto de operações isométricas, definiremos, a seguir, translação, rotação e reflexão, que serão as isometrias que examinaremos por ocasião da análise dos livros.

2.1.1 Translações

Dado um vetor $\vec{a}$, chamamos translação de vetor $\vec{a}$ a transformação T_a do plano nele mesmo tal que T_a (P) = P' se, e somente se, $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$, qualquer que seja o ponto P do plano. O vetor $\vec{a}$ é o vetor de translação. Como conseqüência da definição, temos que nenhum ponto da translação é invariante, mas que é invariante toda reta r paralela ao vetor de translação, ou seja, T_a (r) = r se, e somente se, r // $\vec{a}$. Segundo Jaime e Gutierrez (1996, p.24), pela definição de translação associada ao teorema de Tales, é possível verificar que toda translação é uma isometria. Ou seja, dados dois pontos distintos, P e Q, do plano, e T_a uma translação de vetor $\vec{a}$, então T_a (P) = P' e T_a (Q) = Q' se, e somente se, $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{QQ'} = \vec{a}$; pelo teorema de Tales, os segmentos $\overrightarrow{PP'}$ e $\overrightarrow{QQ'}$ são paralelos, portanto PP'Q'Q é um paralelogramo e a distância entre P e Q é igual à distância entre suas imagens, o que faz com que a translação seja uma isometria.

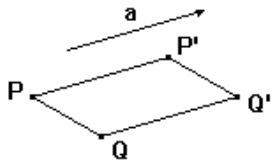


Figura 4 – Translação dos pontos P e Q

2.1.2 Rotações

Dado um ponto O do plano e um ângulo orientado α, chamamos rotação de centro O e ângulo α à transformação R do plano nele mesmo tal que R(P) = P' se, e somente se, a

distância de O até P for igual à distância de O até P', e o ângulo PÔP' for congruente ao ângulo α qualquer que seja o ponto P do plano. O ângulo da rotação se diz orientado uma vez que, por convenção, adota-se o sentido positivo anti-horário e para negativo, o horário. Como conseqüência da definição, pode-se afirmar que o único ponto invariante da rotação é o centro O. É possível verificar que toda rotação é uma isometria. Para isso, examinaremos o caso de dois pontos do plano, em que nenhum deles coincide com o centro da rotação, conforme evidenciam Jaime e Gutierrez (1996, p.26). Dados dois pontos, P e Q, distintos, e seja R uma rotação de centro O e ângulo α tal que R(P) = P' e R(Q) = Q', pela definição de rotação d(P,O) = d (P',O), d (Q,O) = d (Q',O) e PÔP' $\equiv$ QÔQ' $\equiv \alpha$. Como o ângulo P'ÔQ' é congruente ao ângulo PÔQ, uma vez que ambos são dados pela soma de α com o ângulo PÔQ', então os triângulos POP' e QOQ' são congruentes graças à congruência exibida por ângulo entre dois lados respectivamente congruentes, o que faz com que a distância entre P e Q seja igual à distância entre suas imagens.

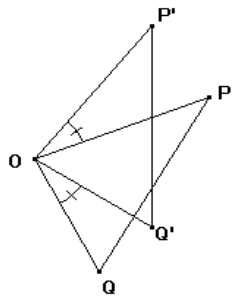


Figura 5 – Rotação dos pontos P e Q

2.1.3 Reflexões

Dada uma reta r, chamamos simetria axial (ou reflexão) de eixo r à transformação S do plano nele mesmo tal que S(P) = P' se, e somente se, o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta r, e a distância de P até r é igual à distância de P' até r, qualquer que seja o ponto P do plano. A reta r é o eixo de simetria no qual estão os pontos invariantes da reflexão. É possível verificar que toda reflexão é uma isometria. Para isso examinaremos, conforme Jaime e Gutierrez

(1996, p.29), os casos de dois pontos distintos do plano tais que nenhum deles esteja sobre o eixo de simetria. No primeiro caso, os pontos estão situados em um mesmo semiplano em relação ao eixo e, no segundo, estão em semiplanos opostos. Sejam, portanto, P e Q dois pontos distintos do plano situados em um mesmo semiplano em relação a uma reta r, e sejam P’ e Q’, respectivamente, suas imagens por uma reflexão. Se a distância de P até a reta r for igual à distância de Q a r, então a figura PP’Q’Q será um retângulo e a distância entre P e Q será igual à distância entre suas imagens. Por outro lado, se a distância de P a r for maior que a distância de Q a r, então é possível obter dois pontos, A e A’, os quais serão, respectivamente, as projeções de Q e Q’ sobre o segmento PP’. Uma vez que os catetos são iguais, A e A’ serão vértices de dois triângulos retângulos e congruentes, o que fará com que a distância de P a Q seja igual à distância entre suas imagens.

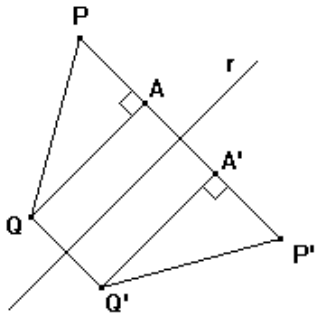


Figura 6 – Reflexão dos pontos P e Q

Consideremos, em seguida, que dois pontos, P e Q, situados em semiplanos opostos em relação a uma reta r, tenham imagens P’ e Q’, respectivamente, por uma reflexão em relação ao eixo de simetria dado por r. Nesse caso, P e Q’ estão em um mesmo semiplano em relação a r, assim como o estão Q e P’ e, pelo caso anterior, o segmento $\overline{PQ'}$ é congruente ao segmento $\overline{QP'}$, fazendo com que o trapézio PP’Q’Q seja isósceles e suas diagonais sejam congruentes. Portanto, a distância entre P e Q é igual à distância entre suas imagens, o que faz com que a simetria axial seja uma isometria.

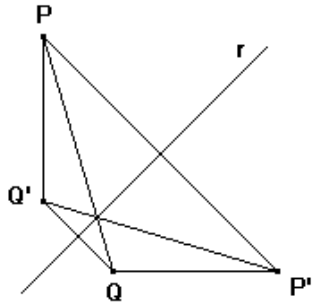


Figura 7 – Reflexão dos pontos P e Q situados em semiplanos opostos em relação ao eixo de simetria.

Transformações geométricas constituem uma poderosa ferramenta de análise. Segundo Jaime e Gutiérrez (1996, p.9), a matemática é uma ciência ferramenta e, sendo assim, é necessário mostrar aos estudantes quais são as conexões existentes entre a matemática e outros campos do conhecimento. Caso o estudo da matemática na escola ocorra de forma excessivamente "hermética", sem que relações entre objetos matemáticos estudados e os campos do conhecimento relacionados a eles sejam explicitados, dá-se o que, em Chevallard, Bosch, Gascón (2001, p.130), se chama *refinamento* da matemática escolar. Para esses autores, o refinamento da matemática escolar provoca nos estudantes uma grande incompreensão do que seria a obra matemática e a sua relação com a matemática escolar.

Relacionando a matemática da vida à matemática da escola, "quando acaba a matemática escolar, é simplesmente como se acabasse aquele mundo que nunca teve relação com o outro" (LINS; GIMENEZ, 1997 p.18). A matemática escolar é uma matemática refinada que impede muitas vezes o aluno de perceber a obra matemática que existe por trás dela. A matemática da rua, por sua vez, é uma outra matemática, que está mais visivelmente relacionada a uma determinada obra, muito embora não esteja necessariamente vinculada a algum tipo de estudo por parte de quem a aplica. No período do movimento de reforma da Matemática Moderna, a idéia de uma *matemática para todos* era uma das idéias-chave. Segundo Charlot (1986, p.23), a reforma da Matemática Moderna apregoava que a matemática não existiria apenas nas instituições científicas, visto que todas as pessoas

desenvolveriam uma certa matemática para realizar seu trabalho na sociedade. Há a matemática da dona de casa, do comerciante, do economista, do físico, do professor, e também a matemática presente na informática, na sociologia, na psicologia etc. Não se trata, aqui, de um processo de estudo da matemática. A *matemática para todos*, assim como a *matemática da rua*, não requer um processo de estudo, mas uma experiência da matemática como ferramenta necessária para as pessoas desempenharem suas tarefas.

Na seqüência do estudo dessa organização matemática, faremos um breve relato do desenvolvimento da geometria, no qual procuraremos localizar a origem das transformações geométricas e as suas primeiras aplicações no ensino.

2.2 BREVE RELATO DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA

A geometria enquanto ciência começou pela reorganização do conhecimento empírico e se constituiu a partir de duas grandes problemáticas: a medida das grandezas e a representação do espaço, conforme Lehmann e Bkouche (1998 p.438-439). No entendimento desses autores, medir é comparar grandezas e verificar quantas vezes a grandeza que se mede contém aquela que se toma como unidade. Nesse sentido, medir é uma forma de contagem e tal concepção de medida permitiu reduzir a grandeza ao número, conforme sistematização dos pitagóricos. Quanto à representação do espaço, embora a geometria grega tome como objeto representações das situações espaciais, os antigos discutiam o espaço a partir de uma dicotomia entre cheio e vazio, fazendo corresponder matéria ao cheio e espaço ao vazio (MORA, 2001, p.871). Para Lehmann e Bkouche, as figuras, no contexto do mundo grego, são representações de situações espaciais estudadas isoladamente, de modo que

> [...] a noção de espaço nasce quando se quer coordenar essas diversas situações, isto é, explicitar as relações mútuas entre os corpos quer seja através do movimento, quer seja através da representação plana das situações espaciais [...]. Desde que o homem expressa sua relação com o mundo, ele utiliza configurações planas para representar situações espaciais que vão desde o desenho pré-histórico até a pintura clássica e a fotografia, ou mesmo a tela da televisão e o uso de técnicas de audiovisual e informática. Isso o conduz a definir as regras que regem a concepção, a realização efetiva e a leitura dessas representações por meio de uma dupla problemática que se

> poderia definir, de um lado, como aquela do pintor, e de outro, como aquela do arquiteto; a representação plana de um objeto real ou imaginário, de um lado e a construção de um objeto a partir de sua representação plana, de outro (LEHMANN; BKOUCHE, 1998 p.453, tradução nossa).

Conforme Lehmann e Bkouche (1998, p.453), tal conhecimento foi elaborado por pintores e arquitetos que assumiram um importante papel no estabelecimento das regras que permitiram a realização tanto das representações planas como das correspondentes construções teóricas que levaram ao desenvolvimento da perspectiva.

2.2.1 Geometria euclidiana

A primeira exposição sistemática de uma geometria racional é a obra de Euclides (300 a.C.), e um importante princípio da geometria euclidiana é o critério de igualdade por superposição, que é enunciado no 4º axioma: “Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra” (BOYER, 1977, p.78). Esse axioma apóia-se essencialmente na idéia de movimento. De acordo com Bkouche (1991, p.137), a igualdade entre dois corpos é, na prática, comprovada pelo movimento efetivo de um sobre o outro e pela conseqüente constatação da igualdade. A intervenção do raciocínio, entretanto, permite eliminar o movimento efetivo, apoiando-se sobre critérios de igualdade previamente definidos. Nesse sentido, um problema da geometria é o de substituir o movimento efetivo pelo raciocínio, enunciando *a priori* as condições de igualdade que conduzirão ao conhecimento racional.

Na geometria euclidiana, a figura desempenha um papel essencial. Para Bkouche (1983, p.7), o rigor euclidiano apóia-se na intuição geométrica, que se expressa por meio da figura, seja esta efetivamente construída ou não.

2.2.2 Geometria analítica

Quando Viète (1540-1603) usou letras para efetuar cálculos, o problema que ele resolveu foi o de tornar o cálculo independente da natureza do objeto: as letras poderiam representar tanto números quanto grandezas. A partir do cálculo literal, Descartes (1596-

1650) e Fermat (1601-1665) desenvolveram um método de resolução dos problemas da geometria por redução ao cálculo literal via utilização de coordenadas. Trata-se da geometria analítica ou método das coordenadas, procedimento pelo qual uma curva é definida por uma relação entre duas coordenadas de um ponto que percorre essa curva e vai determinar a sua equação. Assim, quando se pretende encontrar o ponto de intersecção de duas curvas, por exemplo, essa tarefa se reduz à resolução de equações. O método das coordenadas foi, inicialmente, um novo método aplicado para resolver problemas sobre os mesmos objetos da geometria grega e propiciou que grande parte dos problemas da geometria se reduzisse ao cálculo algébrico.

2.2.3 Geometria projetiva

Desargues (1591-1661) foi contemporâneo de Descartes e Fermat e, na época em que viveu, havia um grande interesse voltado aos métodos analíticos de resolução dos problemas da geometria. Desargues, entretanto, procurou trabalhar as questões da geometria usando métodos puramente geométricos. Ele pretendia construir um método geral, como o das coordenadas, mas que fosse geométrico e não algébrico. Seu método dependia do traçado geométrico e da geometria racional que ele desenvolveu com base no estudo das cônicas.

Conforme Hefez (1986, p.36-37), o ponto de partida para a geometria projetiva vem de um modelo matemático segundo o qual entre o olho e a paisagem que se quer representar – por exemplo, em uma tela ou na folha de papel –, forma-se um cone imaginário. Para que uma pintura ou um desenho possa ser feito, é preciso haver um deslocamento do papel ou da tela que representará uma seção do cone imaginado anteriormente. Dois deslocamentos diferentes produzirão representações distintas da paisagem escolhida, fazendo com que formas e tamanhos mudem, ao mesmo tempo em que certas propriedades permaneçam invariantes. Foram essas propriedades que Desargues estudou.

De acordo com Hefez (1986, p.38), Desargues verificou que “todo teorema que trata de incidência de pontos e retas para cônicas pode ser demonstrado inicialmente para o círculo para depois, por projeção e seção, ser transportado para as cônicas”. Segundo Boyer (1974, p.262), a idéia em que se baseia a obra de Desargues deriva da perspectiva: a projeção de um círculo sobre um plano que não é paralelo a ele aparece como uma elipse, e a projeção da luz de um abajur na parede aparece como os ramos de uma hipérbole ou como um círculo quando essa projeção ocorrer no teto; os pontos ao infinito se comportam como os pontos que estão a uma distância finita (os raios do Sol são considerados paralelos e formam um feixe de luz como em um cilindro; já os raios luminosos provenientes de uma fonte de luz que esteja próxima ao observador formarão um feixe de luz como em um cone). O cilindro é, então, um cone com vértice no infinito. Tais constatações permitiram unificar definições e demonstrações e reforçar, assim, a teoria da unidade das cônicas, possibilitando a Desargues mostrar a invariância, por perspectiva, de certas configurações, o que daria início ao método das transformações. A noção de transformação é, então, vinculada à noção de invariância. Transforma-se uma figura em outra de forma tal que é possível estudar as propriedades de uma mediante o estudo da outra, e vice-versa. Para isso, é importante saber quais são as propriedades que permanecem invariantes com a transformação.

Poncelet (1788-1867) e Chasles (1793-1880) viveram no século XIX e, assim como Desargues, desenvolveram seus trabalhos na geometria sintética (ou seja, aquela geometria que não adota métodos analíticos para resolver problemas geométricos). A geometria projetiva foi criada por Desargues no século XVII, mas somente foi desenvolvida no começo do século XIX por Poncelet e Chasles, que propuseram uma classificação das propriedades geométricas em projetivas e não projetivas. As propriedades projetivas são aquelas que permanecem invariantes por projeção. Como duas seções diferentes de uma mesma projeção

não preservam distâncias, nem ângulos, nem paralelismos, nem semelhança, estas não seriam classificadas como propriedades projetivas.

A geometria projetiva não foi, entretanto, desenvolvida apenas a partir de métodos sintéticos. Ela foi estudada também com métodos analíticos por Möbius (1790-1860) e Plücker (1801-1868).

2.2.4 Felix Klein (1849-1925)

Paralelamente à geometria sintética, desenvolveu-se, como foi mencionado anteriormente, um estudo analítico da geometria projetiva que colocava em evidência o caráter linear desta e, em particular, das transformações. Organizou-se, então, uma dupla construção da geometria: a sintética, que se fundamentou em noções puramente geométricas, e a algébrica, que se apoiou sobre o cálculo linear. A procura por um princípio geral – unificador da geometria elementar e da projetiva –, que também ultrapassasse a discussão entre método sintético e método analítico, levou Felix Klein a organizar um trabalho que propõe um estudo sistemático dessas relações, amparado na teoria dos grupos de transformações. A generalidade do conceito de grupo é expressa por Boyer:

> Diz-se que uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se: a) a coleção é fechada sob a operação; b) a coleção contém um elemento identidade com relação à operação; c) para cada elemento da coleção há um elemento inverso com relação à operação; d) a operação é associativa. Os elementos podem ser números (como na aritmética), pontos (na geometria), transformações (em álgebra ou geometria) ou qualquer coisa. A operação pode ser aritmética (como adição ou multiplicação) ou geométrica (como uma rotação em torno de um ponto ou um eixo) ou qualquer outra regra para combinar dois elementos de um conjunto (tais como duas transformações) de modo a formar um terceiro elemento do conjunto. (BOYER, 1974, p.400)

Em 1872, quando se tornou professor da Universidade de Erlangen, Felix Klein apresentou, como era exigido, um trabalho escrito, além de proferir uma conferência pública. Na conferência, Klein discorreu sobre temas relacionados à educação matemática, interesse que estaria presente em toda a sua carreira (MIORIM, 1995, p.136-137). No trabalho escrito, mostrou como a teoria dos grupos poderia ser aplicada para caracterizar as várias geometrias

surgidas até aquele momento, descrevendo a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações. A partir desse trabalho de Klein, toda classificação dos grupos das transformações tornou-se uma codificação das geometrias. Para o caso da geometria plana euclidiana, que nos interessa particularmente neste estudo, Boyer prossegue:

> A geometria plana euclidiana, por exemplo, é o estudo das propriedades das figuras, inclusive área e comprimento, que ficam invariantes sob o grupo de transformações obtidas a partir das translações e rotações do plano – as transformações ditas rígidas, equivalentes ao axioma não enunciado de Euclides de que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano. (BOYER, 1974, p.400)

Organizadas as geometrias com base na teoria dos grupos de transformação, a geometria plana euclidiana passou a ser classificada como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes quando se efetuam sobre elas operações como rotações, translações, reflexões, o que diz respeito ao estudo das isometrias. É à premissa de que as figuras, ao serem deslocadas no plano, permanecem congruentes, que Boyer chama *axioma não enunciado de Euclides*, significando que tal afirmação não requer demonstração.

De acordo com Bkouche (1983, p.10), é a partir do método das transformações de Félix Klein que se coloca em evidência o vínculo entre geometria e teoria de grupos. Tal vínculo indica que propriedades geométricas dependam somente da estrutura de grupo associada, e que demonstrações da geometria possam ser escritas utilizando-se apenas a estrutura do grupo sem qualquer significado geométrico. Isso potencializa o método formalista, no qual os objetos matemáticos devem ser considerados como sinais cuja manipulação, apoiada na linguagem algébrica, não requer que se estabeleça um sentido para eles.

2.3 Transformações geométricas e o ensino

As transformações geométricas foram inseridas nos programas de ensino do período da reforma da Matemática Moderna como uma tentativa de levar para as salas de aula os mais

recentes conhecimentos científicos relacionados à geometria, ou seja, aqueles provenientes do trabalho de Felix Klein para a Universidade de Erlangen. Entretanto, a translação e a rotação estariam presentes nos programas franceses de ensino desde os primeiros anos do século XX (LEHMANN; BKOUCHE, 1998, p.450). Enfatizando o caráter experimental da geometria de acordo com a idéia de movimento, a translação teria sido usada para definir paralelismo, enquanto a rotação teria sido aplicada para explicar a noção de ângulo. No Brasil, os programas de 1931, recomendados pela reforma Francisco Campos, salientavam a importância do ensino da simetria axial e central, da rotação e da translação (BICUDO, 1942, *apud* ALVAREZ, 2004, p.169). Como dito na introdução deste trabalho, apresentaremos, nos três últimos capítulos, uma análise sobre o ensino de transformações geométricas ministrado a partir dos anos 60.

No estudo da organização matemática que abrange o setor das transformações geométricas, consideramos pertinente nos deter no levantamento de alguns tópicos da história do desenvolvimento da geometria diretamente relacionados a esse setor. A discussão entre métodos sintéticos e analíticos está, a nosso ver, inserida nas propostas de ensino de transformações geométricas dos períodos analisados. Como poderá ser visto nos capítulos sobre análise das obras, é possível notar uma predominância da abordagem analítica e formal nos livros relacionados ao período do movimento de reforma da Matemática Moderna, em contraposição a uma opção por métodos sintéticos, apoiados em figuras, característica dos períodos posteriores.

2.4 Sobre o uso da palavra *simetria*

Neste final de capítulo, cabe fazer uma observação sobre o uso da palavra *simetria*, que é empregada com significados diferentes dependendo do autor. Para alguns, rotação e translação são tipos de simetria. É o caso, por exemplo, de Weyl (1997) e Farmer (1999). Para outros, é aplicada especificamente para designar simetria axial ou central. Este é o caso, por

exemplo, de Jaime e Gutiérrez (1996). Tal diferença também ocorre com autores de livros didáticos. Para o caso da análise que será feita posteriormente, o significado a ser adotado será o definido pelo autor da obra em questão.

3º CAPÍTULO

ESTUDO DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

Para estudar a Organização Didática relativa às transformações geométricas, vamos, inicialmente, examinar pesquisas desenvolvidas sobre o tema. Em seguida, faremos um relato genérico sobre o movimento de reforma da Matemática Moderna na França e nos Estados Unidos, e analisaremos os reflexos dessa reforma no Brasil, tanto no momento imediato à sua implantação, como nos períodos posteriores.

3.1 TRABALHOS DESENVOLVIDOS SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Examinaremos, inicialmente, o trabalho de Jaime e Gutiérrez (1996), no qual os autores abordam as isometrias do plano e apresentam uma unidade de ensino sobre o tema. Introdutoriamente à apresentação da proposta, Jaime e Gutiérrez fazem um estudo das pesquisas até então desenvolvidas sobre isometrias e classificam essas pesquisas de acordo com três critérios, a saber: os estudos que analisam os diversos componentes matemáticos das isometrias que podem influir na compreensão dos alunos; os que descrevem as principais estratégias dos alunos para executar as tarefas, assim como os seus erros mais freqüentes; e os que envolvem experimentações de ensino. O interesse do nosso trabalho volta-se apenas para os estudos vinculados aos dois primeiros critérios.

Relativamente ao primeiro critério, o principal trabalho, segundo Jaime e Gutiérrez, foi aquele desenvolvido na Inglaterra, nos anos 80, na esteira de um projeto nomeado *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS), que serviu de referência para muitos trabalhos posteriores. Nesse projeto, 1.026 estudantes entre 13 e 15 anos responderam questões sobre reflexões e rotações, bem como sobre o produto de reflexões e rotações. As variáveis envolvidas nas tarefas propostas eram de grande abrangência, considerados alguns

aspectos como: a complexidade das figuras envolvidas (ponto, segmento ou triângulo); a presença ou não de malha quadriculada; a posição do eixo de simetria (vertical, horizontal ou inclinado); a posição relativa do eixo de simetria e do objeto; a distância entre o eixo de reflexão e a figura ou entre o centro de rotação e a figura. Entre as pesquisas que se seguiram ao projeto CSMS, e que o tomam como referência, foram particularmente citados por Jaime e Gutiérrez (1996, p.52-61): os trabalhos nos quais se examinam a influência das variáveis na execução de tarefas sobre reflexão e a influência do ensino na modificação de concepções errôneas dos alunos; os que estudam as causas da permanência de determinadas concepções errôneas da simetria axial nos estudantes do ensino secundário, examinando a possibilidade de elaborar uma unidade de ensino capaz de desestabilizar tais erros; e os que se propõem a estudar as respostas dos estudantes em tarefas sobre rotações levadas a efeito não só a partir de um reconhecimento global e visual destas, mas com base na localização do ângulo de rotação, na descoberta da eqüidistância entre o centro de rotação e dois pontos simétricos, e na percepção da congruência das figuras.

Quanto ao segundo critério – ou seja, aquele relativo aos trabalhos que descrevem não apenas as principais estratégias dos alunos para executar as tarefas, como também os seus erros mais freqüentes –, as mesmas pesquisas apontam, segundo Jaime e Gutiérrez (1996, p.61-69), as seguintes incorreções comuns nas tarefas sobre reflexão: a) erros vinculados à má compreensão do conceito de reflexão (ao desenhar a imagem de uma figura, os estudantes desconsideram a eqüidistância, ao eixo, de pontos simétricos, assim como a perpendicularidade, em relação ao eixo, do segmento que une dois pontos simétricos); b) erros vinculados a uma interpretação deformada da simetria, decorrente de um ensino restrito a exemplos de figuras com eixos verticais, prática responsável pela tendência de os alunos desenharem a imagem sempre paralelamente à figura original, mesmo que o eixo não esteja paralelo a ela. A complexidade da figura é apontada como uma variável relevante, mas a

dificuldade principal está relacionada à posição do eixo de simetria e à posição relativa eixo-objeto. Determinadas posições do eixo e da figura induzem mais a erros, especialmente quando o eixo de simetria corta o objeto (JAIME; GUTIÉRREZ, 1996, p.64). Uma das estratégias aplicadas pelos alunos consiste em desenhar as imagens dos pontos significativos da figura original – tais como os vértices, no caso dos polígonos, ou as extremidades, no caso dos segmentos –, unindo os pontos encontrados para obter a imagem da figura completa. Uma outra estratégia é a de desenhar as imagens de apenas um ou dois pontos significativos da figura original e completar o desenho visualizando mentalmente a posição da figura completa. Para o caso da reflexão, as pesquisas mostraram que quanto menos pontos se escolhem, maior é a incidência de erros.

Sobre a rotação, as principais dificuldades para a maioria dos estudantes são as seguintes: não conseguir estimar corretamente o ângulo, não reconhecer a eqüidistância entre centro de rotação e pontos correspondentes da figura e de sua imagem, e tampouco constatar a congruência (JAIME; GUTIÉRREZ, 1996, p.67). A estratégia mais geral apresentada pelos alunos consiste em começar a construção da rotação pelo traçado de um segmento ligando um ponto da figura original ao centro de rotação; e, em seguida, estimar o ângulo e traçar o segmento correspondente que ligará o centro de rotação à imagem da figura dada, completando a figura posteriormente. Quanto à translação, Jaime e Gutiérrez (1996, p.68) consideram-na a isometria mais simples. De acordo com esses autores, a principal dificuldade observada nos alunos é aquela relativa à compreensão de vetor livre. Freqüentemente, os alunos fazem o desenho do vetor ligando um ponto da figura original a um ponto mais próximo da imagem, sem que este seja o ponto correspondente da figura original.

Segundo Jaime e Gutiérrez, alguns autores têm adotado uma apresentação formal dos conteúdos matemáticos e da estrutura algébrica do conjunto das isometrias, mas “o estudo e a utilização formal das isometrias só pode ter êxito quando se tenha permitido previamente aos

estudantes descobrir e utilizar o sentido físico e dinâmico das isometrias" (1996, p.70, tradução nossa). Sua proposta é a de uma unidade de ensino dirigida, principalmente, a estudantes de *Enseñanza Secundaria* (nível de ensino que corresponde ao Ensino Médio brasileiro), sem prejuízo, porém, dos estudantes dos últimos anos do curso de *Enseñanza Primaria* (correspondente ao Ensino Fundamental). Para cada tipo de isometria, Jaime e Gutiérrez (1996) propõem atividades que correspondem rigorosamente a cada um dos níveis de Van Hiele, especialmente os níveis 1, 2 e 3. O quarto nível é contemplado apenas quando as isometrias já foram trabalhadas uma a uma, tomando como base o conjunto completo das isometrias do plano. O nível 1 de Van Hiele diz respeito ao reconhecimento e à visualização; nele, as figuras geométricas são reconhecidas por sua forma como um todo e não por suas partes ou propriedades. No nível 2, o da análise, tem início o estudo de propriedades, em que, ao lado do reconhecimento de que as figuras têm partes, verifica-se a impossibilidade de se estabelecerem inter-relações entre estas. Além disso, as definições não são compreendidas plenamente, o que vai ser possível apenas no nível 3, o da classificação ou dedução informal. No nível 4, relativo à dedução formal, são apresentados os papeis dos axiomas, dos postulados, dos teoremas e das demonstrações. Visto que a aplicação dos níveis de Van Hiele não é determinada pela faixa etária nem pela maturidade, o êxito da proposta depende, com efeito, das instruções dadas e das atividades propostas aos estudantes, conforme Crowley (1994, p.6). Além disso, os alunos devem passar necessariamente pelos quatro níveis e, para que possam ascender aos diferentes estágios, devem demonstrar ter assimilado as estratégias compreendidas em cada um deles (CROWLEY, 1994).

Ainda sobre trabalhos relacionados a isometrias, há a pesquisa de Denys e Grenier (1986), na qual é apresentada uma comparação entre as competências de alunos franceses e as de alunos japoneses no desenvolvimento de questões relacionadas à simetria ortogonal. Nessa pesquisa, constatou-se uma notável progressão na taxa de sucesso por parte dos alunos

japoneses, desempenho que as autoras atribuem à utilização da simetria ortogonal em atividades de geometria espacial propostas na série anterior em suas escolas de origem concluindo que “a geometria no espaço parece ocupar, nos programas japoneses, um lugar privilegiado, mais importante que nos programas franceses” (DENYS; GRENIER, 1986, p.53, tradução nossa). Entre as dificuldades apresentadas pelos alunos pesquisados, destaca-se o paralelismo entre a figura original e sua imagem que é fonte de erros tanto por parte dos alunos japoneses quanto por parte dos franceses.

Os problemas apresentados nas pesquisas anteriores mostram que a concepção de transformação subjacente às atividades propostas aos alunos é a denominada global, que é objeto da geometria sintética. Bem diferentes destes são os problemas apontados por Jahn, que, em sua tese de 1998, examina as dificuldades dos alunos na passagem do estudo das transformações do contexto da geometria sintética para o estudo desenvolvido no espaço enquanto conjunto de pontos. Em sua pesquisa, é apresentada uma unidade de ensino em ambiente informatizado para uso do software Cabri Géomètre II na qual se examina a passagem entre duas concepções distintas que estão presentes no ensino e aprendizagem das transformações geométricas: a) a concepção das transformações geométricas enquanto relações entre duas figuras ou entre partes de uma mesma figura; b) a concepção das transformações enquanto aplicação de um conjunto de pontos do plano nele mesmo. No mesmo estudo são examinados o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas na transição entre o *Collège* e o *Lycée*, estágios que, no caso brasileiro, correspondem, respectivamente, às quatro últimas séries do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio. A passagem do estudo das figuras (no sentido euclidiano), e de seus movimentos, para o estudo das transformações no espaço enquanto um conjunto de pontos é considerado um momento de transição bastante complexo, segundo esta autora, no qual é possível reconhecer a presença de importantes obstáculos. Nesse sentido, é feita uma distinção entre três diferentes concepções

de ponto: ponto fixo sobre uma curva, ponto móvel e ponto variável. A concepção de ponto fixo está relacionada à de um ponto colocado sobre uma figura e é uma noção da geometria euclidiana, de acordo com a qual uma figura "não se reduz à sua fronteira: a superfície que ela contém faz parte dela, o que significa que uma figura é um objeto constituído de espaços compreendidos entre curvas" (JAHN, 1998, p.26, tradução nossa). Um ponto móvel que descreve uma figura faz parte de uma concepção dinâmica da geometria, que é introduzida pela geometria analítica. A pontualização das figuras, que se traduz na passagem da primeira concepção de ponto para a segunda, se constitui em obstáculo epistemológico, segundo Jahn (1998, p.56). A concepção pontual requerida dos alunos do *Lycée* para o trabalho com transformações é a de ponto variável, que vai além da noção de ponto móvel e é uma concepção funcional, pela qual o plano é um conjunto de pontos e uma figura é uma parte desse conjunto. Segundo Jahn (1998, p.74), ao se falar em imagem de uma figura por uma transformação, o trabalho proposto, nesse caso, pressupõe uma concepção global da transformação. Como a concepção requerida no *Lycée* é a pontual, esta autora analisa em seu trabalho as condições que podem favorecer a passagem de uma concepção a outra, observando a possibilidade de que, em um trabalho proposto no nível pontual, permita-se ao aluno encontrar imagens de figuras recorrendo à concepção global (JAHN, 1998, p.74).

As dificuldades dos alunos, na passagem do estudo das transformações do contexto da geometria sintética para o estudo desenvolvido no espaço enquanto conjunto de pontos, são analisadas por Jahn de acordo com os níveis "intra", "inter" e "trans", de Piaget e Garcia (1987). Segundo Jahn, no nível intrafigural não há transformação. São estudadas nessa fase as propriedades das figuras e as relações entre figuras que são comparadas. No nível interfigural, existe uma transformação que leva em conta a posição inicial e final das figuras, assim como a presença simultânea de uma figura e de sua transformada em um plano concebido como um conjunto de pontos – e é sobre as figuras desse plano que a transformação ocorre. Já no nível

transfigural, a transformação não ocorre sobre as figuras do plano, mas sobre todo o plano, e são as propriedades do plano que são colocadas em destaque, em detrimento das propriedades das figuras (JAHN, 1998, p.59).

O ponto de partida da nossa proposta é o de analisar o ensino das transformações geométricas no período da reforma da Matemática Moderna, a partir do qual passaremos a examinar os períodos que se seguiram a ela. Uma conseqüência importante da consulta feita a pesquisas anteriores para a análise que nos propomos fazer será, certamente, o exame das principais dificuldades dos alunos apontadas por elas. Nas pesquisas verificadas, vimos que os alunos apresentam grande dificuldade ao resolver tarefas em que a posição do eixo de simetria não seja vertical ou horizontal, ou quando este intercepta o objeto de reflexão. No caso da rotação, as distâncias entre pontos correspondentes e o centro costumam não ser levadas em consideração. Os alunos tendem a construir a rotação de uma figura sem atentar para o fato de que a própria figura deve girar a fim de que as distâncias correspondentes se mantenham constantes. A seguir, mostramos um exemplo desse tipo de erro, no qual um pentágono parece girar em torno do ponto O sem perder o paralelismo dos lados correspondentes, fazendo com que as distâncias AO e A'O não sejam iguais.

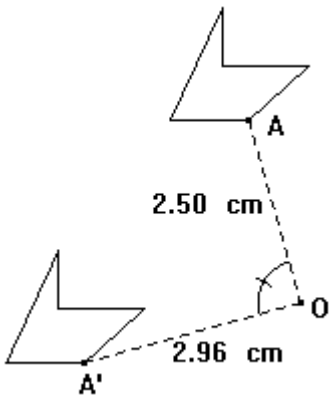


Figura 8 – Construção errônea da rotação de um pentágono

Na análise que pretendemos fazer de livros didáticos, procuraremos observar se os autores das obras a serem examinadas se mostram atentos a tais dificuldades e se propõem

encaminhamentos que possam resolvê-las. Além disso, é nosso objetivo identificar se a concepção de figura adotada pela obra é pontual ou global, verificando, ainda, quais seriam as principais dificuldades dos alunos na realização das tarefas propostas e como os autores das obras encaminham a superação dessas dificuldades.

3.2 A REFORMA DA MATEMÁTICA MODERNA

O período da reforma da Matemática Moderna durou aproximadamente 20 anos: desde os primeiros debates nos anos 50 do século XX até sua implantação no ensino, nos anos 60 e 70.

Os principais nomes da reforma da Matemática Moderna são: Papy (Bélgica), Dienes (Canadá), Fletcher (Inglaterra), Krygowska (Polônia) e, na França, J. Dieudonné e o grupo Bourbaki, G. Choquet, A. Lichnerowicz, A. Revuz, N. Picard e G. Walusinski (CHARLOT, 1984, p.17). No Brasil, o nome do professor Osvaldo Sangiorgi surge como um dos principais divulgadores do movimento de reforma da Matemática Moderna. Como organizador, em 1961, do curso de aperfeiçoamento para professores do ensino secundário – cujo núcleo deu origem ao Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) –, teve importante papel na divulgação do movimento.

3.2.1 Alguns aspectos do movimento de reforma na França

As intenções dos organizadores da reforma, segundo Charlot (1986, p.19), eram a democratização do ensino da matemática e a adequação desse ensino à expectativa de que ele pudesse impulsionar o progresso técnico e científico. Tal progresso se fazia necessário em virtude do momento histórico em que se encontrava a França, uma vez que, após os anos da reconstrução do pós-guerra, o país entrou em um período de desenvolvimento econômico e de industrialização acelerada. Para isso, era preciso elevar o nível de competência dos jovens – especialmente nos níveis técnico e científico –, e essa elevação passaria pelo ensino da

matemática. Desse modo, foram privilegiados pela reforma os seguintes tópicos de ensino: a teoria dos conjuntos, a álgebra, a análise, o cálculo de probabilidades e as estatísticas. Com tais itens, os mentores da reforma pretendiam que a matemática estudada nas escolas fosse útil para a técnica, para a ciência e para a economia moderna. Mas em 1973, G. Choquet, um dos mentores da reforma, fez a sua própria crítica ao movimento, lamentando-se não só dos ataques feitos à geometria euclidiana e ao recurso à intuição, como também da defesa de que a álgebra linear pudesse substituir toda a antiga geometria (CHARLOT, 1986, p.19).

São idéias-chave do movimento de reforma da Matemática Moderna: i) a matemática para todos, ii) a matemática do nosso tempo e iii) a reforma dos métodos pedagógicos. No mundo moderno, com o advento dos computadores e da automação, há uma matemática que todos devem saber. Para os organizadores da reforma, “a matemática é a via de acesso privilegiada ao pensamento científico e técnico” (CHARLOT, 1986, p. 23). Os conteúdos matemáticos a serem ensinados não deveriam ser direcionados a um conhecimento específico, visto que a complexidade do mundo moderno exigiria não apenas respostas obtidas por memorização, mas capacitação para resolver problemas novos. Procurou-se, assim, aliviar o peso da memorização dos conteúdos compensando com um reforço no preparo das vias de abstração e nas estratégias de adaptação a situações novas e imprevisíveis.

A idéia da “matemática para todos”, segundo Charlot (1986, p.26), diz respeito a uma matemática à qual todas as pessoas devem ter acesso para poder desempenhar as atividades concernentes à vida profissional e pessoal. Quanto a ensinar a “matemática do nosso tempo”, há nisso, implicitamente, três concepções: a reconstrução da matemática, a sua unidade e a matemática enquanto linguagem. Por reconstrução da matemática a ser ensinada às crianças e aos jovens, os organizadores da reforma entendiam a conferência de privilégios ao ensino do essencial, privilégios concedidos em prejuízo do ensino de um conteúdo apenas ministrado por força da tradição e em razão da insensibilidade a aspectos práticos. O que se desejava era

despojar o estudante de uma visão desconectada não apenas dos conteúdos aprendidos, como também das diferenças entre as linguagens desses conteúdos. Quanto à concepção da unidade da matemática, o que se considerava moderno não eram determinados conteúdos matemáticos em detrimento de outros, mas a própria matemática enquanto estrutura unificada que se reorganiza para assimilar idéias e teorias novas, conforme Charlot (1986, p.26). A idéia de unidade não é somente a unidade dos conteúdos, mas a unidade da linguagem. Para os organizadores da reforma, a matemática constitui mais uma língua do que um conjunto de conhecimentos, sem contar que ela condensa a linguagem do discurso técnico e científico moderno.

O movimento de reforma da Matemática Moderna na França insistiu não apenas na mudança dos conteúdos a serem ensinados, mas também em uma mudança nos métodos pedagógicos relativos ao ensino da matemática. Nesse sentido, a reforma tem essencialmente dois referenciais: o grupo Bourbaki, no qual se apóiam o formalismo e a ênfase nas estruturas matemáticas; e Piaget, em cuja reconhecida pedagogia da ação, somada à sua clássica divisão dos estágios de desenvolvimento, os promotores da reforma foram buscar fundamentação teórica. Assim como para Piaget cada indivíduo passa pelos estágios sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal, da mesma forma, para os promotores da reforma, a aprendizagem das estruturas matemáticas tem correspondência com os mencionados estágios de desenvolvimento. Para Charlot (1986, p.29), a real correspondência entre as estruturas do desenvolvimento dos indivíduos e as estruturas matemáticas não chegou a ser esboçada nos principais textos dos promotores da reforma, o que leva a indagar se haveria ou não uma reflexão sobre a correspondência entre os dois usos do termo “estrutura”. Quanto à pedagogia da ação, Piaget mostra que o motor do desenvolvimento intelectual é a atividade da criança e não a linguagem (PIAGET, *apud* CHARLOT, 1986, p.29). Conforme Charlot (1986, p.31), o que ocorreu, entretanto, no período da reforma, foi uma priorização do

estudo da matemática enquanto linguagem em detrimento da ação. Tal priorização traduziu-se, na escola elementar, em fazer a criança descrever, na linguagem matemática, situações pseudoconcretas; já no ensino secundário e universitário, enfatizaram-se o formalismo e o raciocínio rigoroso sobre os objetos matemáticos. A introdução precoce das estruturas matemáticas no ensino rendeu aos alunos sérias dificuldades de aprendizagem, uma vez que a Matemática Moderna definiu-se, essencialmente, pelo emprego de uma linguagem repassada de noções muito abstratas cuja compreensão dificilmente poderia ser elaborada pelos alunos (CHARLOT, 1986, p.31).

3.2.2 Alguns aspectos do movimento de reforma nos Estados Unidos

Nos Estados Unidos, no início da década de 50 já se faziam, conforme Kline (1976, p.32), severas críticas à matemática tradicionalmente ensinada nas escolas. Tais críticas eram feitas especialmente ao currículo, considerado antiquado. Fazendo uma comparação com os aspectos levantados anteriormente sobre a reforma francesa, o movimento da Matemática Moderna nos Estados Unidos não tratou, à diferença do francês, de métodos de ensino da matemática, nem da didática da matemática. Com efeito, sua tarefa concentrou-se em propor uma mudança de currículo. Os grupos que empreenderam a reforma acreditavam que, se esse componente fosse melhorado, o ensino da matemática seria coroado de êxito (KLINE, 1976, p.32).

Ao discurso da melhoria do ensino da matemática somava-se o da necessidade de melhorar a formação de técnicos e de cientistas, tendo em vista as grandes transformações que ocorriam no mundo no período que sucedeu ao fim da Segunda Guerra. É freqüente associar-se essa preocupação americana ao lançamento, pelos russos, do Sputnik, primeiro satélite artificial criado pelo homem e enviado ao espaço.

A reforma da Matemática Moderna teve ampla aceitação nos Estados Unidos. Os primeiros livros didáticos contemplando tópicos da reforma começaram a ser publicados no

final dos anos 50 e, já no início da década seguinte, uma verdadeira avalanche desses textos seria publicada. Os organizadores da reforma americana eram professores universitários de áreas como as da lógica matemática, da álgebra e da topologia. Segundo Kline (1976, p.149-150), até fins do século XIX, a principal preocupação dos matemáticos estava voltada para responder a questões das demais ciências, mas que nos últimos cem anos esse vínculo teria sido rompido, fazendo com que a matemática se voltasse para dentro dela mesma, especialmente a partir da década de 40. Isso teria feito com que uma alta especialização impregnasse a pesquisa em matemática nos Estados Unidos. Os mentores da reforma foram, segundo Kline (1976, p.149), alunos desses pesquisadores que se encontravam distantes das outras ciências e voltados para as questões internas da matemática.

Para Kline (1976, p.108), embora o currículo da Matemática Moderna se constituísse, em grande parte, dos mesmos conteúdos ensinados tradicionalmente na matemática escolar, houve sim o acréscimo de novos conteúdos, especialmente no que tange à teoria dos conjuntos. O mais enfatizado foi, de fato, a teoria dos conjuntos, ao qual se seguiu o tópico das diferentes bases de sistemas de numeração. Os outros foram: congruências, desigualdades, matrizes e álgebra das matrizes, lógica simbólica, álgebra de Boole, relações e funções, grupo e corpo. Na concepção dos mentores do movimento de reforma da Matemática Moderna,

> [...] pede-se aos estudantes que aprendam conceitos abstratos na expectativa de que, se os aprenderem, serão automaticamente compreendidas as realizações concretas. Assim, se o estudante aprende a definição geral de uma função, presumivelmente compreenderá as funções específicas com as quais terá de tratar [...] Pode-se dizer que a matemática moderna favorece o abstrato como a abordagem para o concreto. (KLINE, 1976, p.114-115)

Sobre o tópico das diferentes bases, por exemplo, os mentores da reforma argumentavam que se os estudantes compreendessem a organização dos números em diferentes bases de numeração, estes poderiam compreender melhor a base dez e as operações da aritmética. A reforma da Matemática Moderna privilegiou o abstrato, como se essa abordagem fosse suficiente para a compreensão dos conceitos matemáticos. Cabe destacar,

segundo Kline (1976 p.80-81), dois pontos negativos: um da matemática anterior à reforma, e outro da Matemática Moderna. No primeiro, a aprendizagem pela memorização, e no segundo, o excesso de rigor.

Em relação à linguagem, o excesso de novos termos pode ter provocado, de acordo com Kline, muita confusão para os alunos, cuja atenção seria desviada do estudo dos conceitos propriamente ditos. No caso da geometria, por exemplo, dada a definição de "uma figura que consiste na união de três pontos não colineares e de segmentos de retas que se unem a estes pontos" (KLINE, 1976, p.87), precisaríamos pensar por algum tempo para perceber que se trata do triângulo que nos é familiar. A crítica, aqui, recai sobre a linguagem empregada que dificulta a compreensão de um conceito que já nos seria conhecido e habitual.

3.2.3 Alguns aspectos do movimento de reforma no Brasil

Países em desenvolvimento adotaram, segundo D'Ambrosio (1987, p.12-13), idéias de currículo de países desenvolvidos, como os Estados Unidos, sem, no entanto, proceder a uma crítica a esses modelos. Se, por um lado, a sociedade americana ou européia pretendia, a partir do movimento de reforma da Matemática Moderna, formar uma geração de cientistas, países em desenvolvimento teriam, por outro lado, objetivos diferentes, uma vez que problemas básicos relacionados a emprego, saúde pública, entre outros, precisavam ser ainda resolvidos. Para D'Ambrosio (1987, p.17), talvez o maior projeto americano desenvolvido por ocasião do movimento de reforma da Matemática Moderna – projeto, por sinal, transferido para países em desenvolvimento (inclusive o Brasil) – tenha sido o School Mathematics Study Group (SMSG), traduzido para 15 diferentes idiomas. Nos anos 60, o Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBECC) encaminhou a tradução e a adaptação dos materiais produzidos pelo SMSG sob a responsabilidade de Lafayette de Moraes e Lydia Lamparelli. De todo modo, nenhuma editora chegou a investir na publicação dessa produção – aposta, ao que tudo indica, considerada de alto risco comercial pelo grau de dificuldade que poderia

suscitar nos professores. Entretanto, fundos do acordo MEC-USAID foram usados para publicar tais materiais por meio da gráfica da Universidade de Brasília e também pela editora Edart, conforme D'Ambrosio (1987, p.153).

Além dos trabalhos do SMSG, matemáticos e educadores provenientes de outras partes do mundo também teriam exercido influência no movimento brasileiro, como foi o caso de Zoltan Dienes, George e Frederique Papy, Caleb Gattegno, Lucienne Felix e Jean Dieudonne, cujas idéias eram por vezes muito diferentes entre si (D'AMBROSIO, 1987, p.78-81). Alguns estavam principalmente preocupados com o conteúdo, como Papy, enquanto outros enfocavam a metodologia do ensino da matemática, como Dienes – conforme, mais uma vez, D'Ambrosio.

Previamente ao movimento de reforma da Matemática Moderna no Brasil, houve, em 1955, em Salvador, o 1º Congresso Nacional de Ensino de Matemática no Curso Secundário, o qual, sem comportar menções à Matemática Moderna, deliberou sobre os seguintes encaminhamentos: recomendação da repetição periódica do cálculo numérico e literal, aplicação da técnica do estudo dirigido em substituição à aula expositiva, além da ênfase ao aspecto pedagógico na formação dos professores. Em 1957, realizou-se em Porto Alegre o 2º Congresso no qual o tema da Matemática Moderna esteve presente em três teses: na do professor Ubiratan D'Ambrosio, que sustentava uma maior ênfase na intuição como método de ensino da matemática; na do professor Osvaldo Sangiorgi, que apresentava uma comparação entre Matemática Clássica e Matemática Moderna explicitando o caráter estrutural desta última; na do professor Jorge Emanuel Barbosa, que fazia a defesa da necessidade da atualização do ensino tendo em vista a formação de cientistas. O 3º Congresso foi realizado no Rio de Janeiro, em 1959, quando foram tiradas resoluções tais como: recomendação de cursos de aperfeiçoamento para professores envolvendo tópicos da Matemática Moderna, como a teoria dos conjuntos; introdução dos temas da Matemática

Moderna nas faculdades de filosofia; e proposta de realização de experiências relativas ao ensino da Matemática Moderna no secundário (BURIGO, 1989, p.44-49).

Em 1961 foi criado, por Osvaldo Sangiorgi, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, o GEEM, núcleo responsável pela organização de cursos para professores e pela promoção de palestras e reuniões para discutir e divulgar as idéias da reforma – encontros esses que, de acordo com o fundador do grupo, constituíram a primeira manifestação que, orientada à renovação do ensino da matemática no Brasil, logrou reunir matemáticos das Universidades e do Instituto de Matemática com professores do ensino secundário (BURIGO, 1989, p.110). O treinamento de professores foi, segundo D'Ambrosio (1987, p.97), a principal característica do GEEM no período compreendido entre o início dos trabalhos, em 1961, e o encerramento destes, em 1976. Suas atividades abrangiam a oferta de cursos de férias, em todo o Estado de São Paulo, bem como em outros estados do país, além de conferências e seminários promovidos ao longo do ano letivo.

O 4º Congresso ocorreu em 1962, em Belém, e coube ao GEEM fazer relatos de experiências sobre a Matemática Moderna. Em 1966, sob a coordenação do GEEM, realizou-se, no campus do Centro Técnico da Aeronáutica em São José dos Campos, o 5º Congresso, do qual participaram importantes lideranças internacionais do movimento de reforma da Matemática Moderna, como Marshall Stone e George Papy. O 6º Congresso, programado para o ano de 1968 na Paraíba, não chegou a ser realizado.

A reforma da Matemática Moderna no Brasil foi uma reforma de currículo apoiada na introdução de conteúdos novos e na demanda por uma nova concepção de ensino da matemática. As principais mudanças firmaram-se em elementos da Teoria dos Conjuntos, nos diversos sistemas de numeração, e na escolha de uma abordagem estrutural da matemática, com ênfase no estudo de propriedades. Em contraste, segundo D'Ambrosio (1987, p.180), antes de 1960 a ênfase era dada à memorização: o aluno teria aprendido a matéria se

conseguisse repetir exatamente o que lhe haviam ensinado. Entretanto, o recurso à memorização também teria sido reforçado em relação aos novos conteúdos, algumas vezes de uma maneira ainda mais incisiva do que aquele aplicado anteriormente, situação agora decorrente do fato de os professores não terem compreensão clara dos novos tópicos que deveriam ensinar. Tanto os professores quanto os alunos recorriam à memorização, já que a linguagem da teoria dos conjuntos estava além da compreensão de muitos deles, conforme D'Ambrosio (1987, p.208).

O movimento de reforma da Matemática Moderna no Brasil fez surgir vários grupos de estudos, como o Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre (GEEMPA) e o Grupo de Estudos de Matemática (GRUEMA), além do GEEM. Isso provocou uma intensa discussão sobre o ensino da matemática, embora ela não tenha atingido um grande número de professores. Nos livros didáticos, os exercícios passaram a ser distribuídos ao longo dos capítulos e freqüentemente com espaço para que o aluno os resolvesse no próprio livro. Notou-se uma maior preocupação com as estratégias de pensamento das crianças, o que contribuiu para que o centro do processo de ensino tendesse a se deslocar do professor para o aluno, embora menos do que seria ideal (D'AMBROSIO, 1987, p.213).

Assim como na França e nos Estados Unidos, a geometria intuitiva cedeu lugar, na reforma brasileira, à geometria das transformações fundamentada na Álgebra Linear. Em 1965 já era desenvolvida, no Ginásio Vocacional do Brooklin, a experiência da introdução do estudo de isometrias e homotetias (BECHARA, 1969, *apud* BURIGO, 1989, p.169). Antes do período de reforma, a geometria ensinada nas escolas brasileiras tinha, segundo D'Ambrosio (1987, p.211), embasamento na geometria euclidiana. A nova abordagem trouxe grandes dificuldades de compreensão para os professores, o que fez com que esse tópico passasse a ser

ensinado no final do ano letivo e raramente tratado com a profundidade necessária (D'AMBROSIO, 1987, p.211-212).

O esgotamento do movimento de reforma da Matemática Moderna no Brasil é atribuído à divulgação da proposta de Dienes, segundo a qual o rigor deveria ser construído junto aos alunos e o erro, admitido como natural no processo de aprendizagem (BURIGO, 1989, p.204). Essa idéia de Dienes era antagônica à ênfase que se dava à concepção de uma matemática mais rigorosa como condição indispensável para a aprendizagem, e que, associada ao desgaste do movimento de reforma nos Estados Unidos e na Europa, teria provocado o seu esvaziamento também no Brasil, conforme Burigo (1989, p.204).

O que era considerado "moderno" no período do movimento era a própria matemática enquanto estrutura organizada. A construção euclidiana, que havia permanecido até o século XIX como o modelo de uma construção axiomática (BKOUCHE, 1983, p.12), vai se chocar com o método axiomático moderno, cujo objetivo não é somente o de construir os fundamentos da matemática, mas o de fazer isso de forma unificadora. Para Duarte e Silva (2006, p.90), "o estudo da geometria, via transformações geométricas, é uma abordagem que possibilita o tratamento da geometria pelas estruturas algébricas, consideradas pelo MMM como elemento unificador da Matemática". O papel reservado às transformações geométricas no movimento de reforma da Matemática Moderna acabou sendo, então, o de inserir a geometria na estrutura matemática como um todo, destituída de separações como álgebra *versus* geometria, por exemplo.

A seguir, examinaremos, em textos oficiais como Guias Curriculares, Proposta e Parâmetros, a maneira como tem sido orientado o ensino das transformações geométricas deste então.

3.3 TEXTOS OFICIAIS

3.3.1 Guia Curricular do Estado de São Paulo

Examinaremos, neste item, as orientações curriculares apresentadas no Guia Curricular de São Paulo, elaborado a partir da Lei 5692/71, a qual estabelece as Diretrizes e Bases da Educação. O Guia de São Paulo foi, segundo D'Ambrosio (1987, p.143), usado em muitos estados brasileiros como modelo, razão pela qual São Paulo tornou-se reconhecido como líder da reforma curricular no Brasil. Escrito em 1972, não foi publicado ou distribuído até 1975.

De acordo com os guias curriculares, os grandes problemas enfrentados no ensino da matemática têm origem mais na metodologia adotada do que nos conteúdos a serem estudados. Nesse sentido, são elaborados subsídios que procuram oferecer aos professores não apenas orientações metodológicas para trabalhar os novos conteúdos, como também revisões de noções básicas de isometrias e homotetias, entre outras, por via da álgebra linear, dirigidas à formação matemática do próprio professor. Do ponto de vista metodológico, os guias enfatizam que o aluno deve ter participação ativa no processo de aprendizagem, no sentido de que ele procure encontrar com seus próprios recursos as respostas às atividades, evitando desse modo que o professor acabe por apresentá-las. As atividades são propostas no formato de estudo dirigido, que estabelece os passos a serem perseguidos pelo aluno na apresentação e no desenvolvimento dos conceitos, como poderá ser observado no exemplo que segue. O estudo de transformações geométricas é sugerido a partir da 6ª série.

> Tome uma folha de papel comum e outra de papel transparente.
> a) Marque na primeira folha dois pontos a e b, quaisquer.
> b) Utilizando o compasso, "transporte" o segmento ab para uma outra posição, obtendo o segmento a'b'.
> c) Pegue a folha de papel transparente. Coloque-a sobre a outra e decalque na folha de papel transparente os pontos a e b.
> d) Dado um ponto p qualquer (marcado na folha comum) você pode associar a ele um outro ponto p' do seguinte modo: com o papel transparente colocado como no item c, decalque no mesmo o ponto p; desloque essa folha sobre a outra de modo que os pontos a e b se sobreponham aos pontos a' e b'; decalque o ponto p sobre a folha comum, você obterá o ponto p'.
> e) É fácil ver que: todo ponto da primeira folha tem imagem sobre essa folha (determinada pelo processo acima); os segmentos ap e bp se "sobrepõem" aos segmentos a'p' e b'p', respectivamente.
> f) O processo acima permite associar a todo ponto do plano da folha de papel um outro ponto dessa mesma folha. Nesse caso, dizemos que está definida uma *transformação* do plano nele mesmo. Essa transformação pode ser, portanto,

> considerada como uma função cujo domínio e cujo conjunto de valores coincidem com esse plano.
> g) Determine a imagem, por essa transformação: dos pontos de um segmento mn, qualquer; dos pontos de um triângulo Δ pqr, qualquer; dos pontos de uma reta R, qualquer. (SÃO PAULO, atividades, 6ª série, 1979, p.25)

Pelo exemplo citado, vemos que as atividades são propostas de forma a dar, passo a passo, o percurso do aluno, além inserir conceitos fundamentais no decorrer do próprio desenvolvimento da atividade, o que pode ser observado no item f quando é fornecida a definição da transformação. O tratamento dado às figuras geométricas é pontual, não é figural. Mesmo quando se trata de determinar a imagem de uma figura, como no caso do triângulo da atividade sugerida, a orientação é dada no sentido de fazê-lo por meio de pontos da figura e não da figura considerada como um todo. Isso pode ser lido claramente nos objetivos dados para a 5ª série: dentre as noções básicas está o objetivo de "reconhecer uma figura geométrica como um conjunto de pontos" (SÃO PAULO, atividades, 5ª série, 1979, p.13).

Relativamente ao ensino da geometria, podem-se destacar dos Subsídios para a Implementação do Guia Curricular de Matemática (SÃO PAULO, atividades, 5ª a 8ª série, 1979) os seguintes conteúdos mais diretamente vinculados ao ensino das transformações geométricas: ponto, reta e plano na 5ª série, além das noções de curvas e de polígonos dadas como um conjunto de pontos. A linguagem utilizada é a da teoria dos conjuntos, acrescida das noções de pertinência, inclusão e subconjuntos. As transformações, particularmente as isometrias, surgem nas indicações para a 6ª série. Para a 7ª série, são sugeridos os estudos das simetrias axiais e centrais, da congruência de triângulos e das translações. Para a 8ª série estão reservados os estudos das projeções paralelas, das homotetias e dos casos de semelhança de triângulos. Em cada série, são sugeridos pré-requisitos correspondentes aos desenvolvimentos das atividades da série seguinte. Além disso, há orientação para que haja exploração dos conceitos sem preocupação com rigor excessivo, mas que a preocupação com demonstrações deve estar presente no trabalho do professor mediante a exploração de situações que dêem

condições para os alunos observarem quais são os dados, o que deve ser demonstrado e quais raciocínios devem ser feitos para se chegar aos resultados.

3.3.2 Proposta Curricular de São Paulo

Examinaremos agora o que há na Proposta Curricular, que teve a sua primeira edição em 1986 – no que se refere aos conteúdos da geometria relacionados às transformações assim como à abordagem sugerida.

> Pode-se estudar geometria tendo como meta primordialmente a aprendizagem da lógica, da organização do conhecimento, partindo-se de pontos, retas e planos para somente ao final do percurso tratar de objetos tridimensionais. Pode-se ainda considerar o eixo para o ensino da geometria o estudo de certas classes de transformações e das propriedades que elas preservam, desde as mais gerais, que são as topológicas, até as mais específicas, que são as métricas, passando pelas propriedades projetivas. Ou pode-se partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, de sua caracterização através das propriedades, da passagem dos relacionamentos entre objetos para o encadeamento de propriedades, para somente ao final do percurso aproximar-se de uma sistematização. Aqui, a opção pelo último percurso citado se evidencia desde os primeiros contatos. (SÃO PAULO, 1997, p.11)

Se, por um lado, a Proposta apresenta-se, portanto, contrária ao ensino da geometria tal qual proposto por Euclides (a saber, mediante a organização dos postulados), e tampouco recomenda o seu ensino por meio do estudo das transformações – como se indicava no período da reforma da Matemática Moderna –, por outro propõe que a sistematização seja reservada para o momento final do processo de estudo dos objetos geométricos. Quanto aos conteúdos, a Proposta não faz menção ao ensino das transformações geométricas diretamente. Entretanto, sugere o estudo das ampliações e reduções de figuras no trabalho com medidas, a divisão da circunferência tendo em vista a construção dos polígonos regulares, a congruência de maneira geral e, particularmente, a congruência de triângulos, a semelhança de maneira geral e, em particular, a semelhança de triângulos com aplicações em problemas envolvendo sombra. Especificamente, não há qualquer menção a reflexões, translações, rotações ou homotetias.

Acompanhando a lista de conteúdos, são apresentadas algumas sugestões ligadas à metodologia de trabalho. Sobre ampliações e reduções de figuras, é sugerido um trabalho no papel quadriculado pelo qual o aluno seja levado a fazer explorações de vários tipos de relações entre perímetros e áreas. Para trabalhar a noção de polígono regular, é sugerido um estudo inicial com polígonos eqüiláteros e eqüiângulos com o objetivo de observar propriedades, além de um trabalho experimental de construção de polígonos com régua e transferidor. A noção de congruência deve ser inicialmente trabalhada com sobreposições de polígonos e construções de triângulos com régua, compasso e transferidor e, ainda experimentalmente, deverão ser verificados os casos de congruência de triângulos.

Para a construção de triângulos são sugeridas questões como as que se seguem:

> Uma pessoa quer construir um triângulo ABC de maneira que o lado AB meça 5 cm e o lado AC, 3 cm.
> a) A medida do lado BC do triângulo pode ser menor que 2 cm? Igual a 2 cm? Igual a 8 cm? Maior que 8 cm?
> b) O lado BC do triângulo poderá medir 3 cm? 4,5 cm? 5,6 cm? 6,1 cm? 7,8 cm?
> c) Quantos triângulos diferentes que obedecem a essas condições a pessoa poderá obter?
> d) Como deve ser expressa a medida BC do triângulo? (SÃO PAULO, 1997, p.144-145)

Pelo exemplo citado, pode-se notar que as orientações da Proposta apontam para uma maior problematização quando comparadas àquelas dos Guias, deixando para o aluno um certo trabalho de investigação e conclusão.

Algumas demonstrações são sugeridas a partir dos casos de congruência estudados como, por exemplo, demonstrar que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles são os vértices de um outro triângulo também isósceles. Para a noção de semelhança há também a sugestão de um trabalho experimental inicial seguido do teorema de Tales, das relações métricas nos triângulos retângulos e da divisão de segmentos em partes proporcionais. Como aplicações da noção de semelhança, são sugeridos trabalhos com a idéia de sombra para medir alturas. As sugestões de trabalho são, portanto, basicamente experimentais, focalizando algumas deduções e demonstrações com base no estudo de congruências e semelhanças.

3.3.3 Parâmetros Curriculares Nacionais

Quanto aos Parâmetros Curriculares (1998), no bloco Espaço e Forma há uma menção clara em relação às transformações geométricas.

> Deve-se destacar [...] a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51)

De acordo com os Parâmetros, a geometria é um campo fértil de problemas capazes de desenvolver no estudante a capacidade de argumentar e construir demonstrações. Não há aqui menção ao fato de que problemas que precisam ser resolvidos, provenientes dos vários ramos da vida humana, possam, afinal, ser de natureza geométrica. Os Parâmetros ressaltam a importância do trabalho geométrico com as figuras espaciais, dado que este contribui para "melhorar as imagens visuais dos alunos e favorecer a construção de diferentes vistas do objeto" (BRASIL, 1998, p.123). Além disso, enfatizam o uso da representação plana de figuras espaciais, uma vez que ajudam a visualizar, provar e a fazer conjecturas.

De acordo com os Parâmetros, as atividades que envolvem as transformações geométricas permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa. Provavelmente, o documento refere-se, aqui, à concepção da geometria enquanto modelização do espaço físico e às inúmeras situações do dia-a-dia em que podem ser observadas simetrias de reflexão, translações, simetrias centrais e rotações. Além disso, o estudo das transformações isométricas (reflexões, translações, rotações e simetrias centrais) é apontado como um ponto de partida para a noção de congruência, enquanto as transformações que envolvem ampliação e redução de figuras são apontadas como importantes na construção do conceito de semelhança (BRASIL, 1998, p.86). Sugere-se o uso de softwares para o estudo da transformação de uma figura do plano por reflexões, translações ou rotações que levaria o aluno a observar o que muda e o que não muda nas figuras, conferindo quais propriedades permaneceriam invariantes. Da mesma forma, a ampliação e a redução de figuras teriam o

objetivo de distinguir os elementos que não se alteram dos que se modificam quando sujeitos a esse tipo de transformação. Os Parâmetros repõem, portanto, isometrias e homotetias no contexto da geometria do Ensino Fundamental. Porém, como não há sugestões de atividades com exemplos de questões que poderiam ser propostas, cabe examinar livros didáticos do período para se chegar a algumas conclusões.

De maneira geral, são sugeridos procedimentos de manuseio e construções de figuras que possibilitem aos alunos fazer conjecturas e identificar propriedades. Há, ainda, orientações para o estudo da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano a partir de representações em sistemas de coordenadas cartesianas, mas não há outras orientações a respeito do uso do plano cartesiano no estudo das figuras geométricas.

Nos três documentos examinados, é possível observar, assim, importantes diferenças. Em resumo, se os Guias sugerem a adoção de uma abordagem funcional do ensino das transformações ao mesmo tempo em que acenam com uma metodologia de estudo dirigido, a Proposta indica, por sua vez, a supressão desse conteúdo dos programas, enquanto os PCN repõem-no, embora destituído do tratamento funcional. Na análise que passaremos a fazer de livros didáticos, procuraremos identificar, nessas obras, as principais orientações fornecidas pelos documentos examinados.

4º CAPÍTULO

ANÁLISE DAS OBRAS: PERÍODO RELATIVO AOS ANOS 60

Neste capítulo analisaremos a obra “Matemática curso moderno”, escrita e publicada na fase inicial do movimento de reforma da Matemática Moderna no Brasil. Seu autor, Osvaldo Sangiorgi, foi um dos divulgadores do movimento e, como tal, defendia que os conteúdos novos – como teoria dos conjuntos, classes de equivalência e transformações geométricas – fossem inseridos nos programas do ensino secundário. Analisaremos, relativamente a transformações geométricas, o 3º volume, dedicado à terceira série do então curso ginasial, e publicado, em 6ª edição, em 1969. As transformações geométricas planas são mencionadas, nesse volume, em apêndice no final do livro, trecho em que são apresentados temas como translações, rotações, simetria axial e simetria central, seguidos de uma proposta de dez exercícios para o aluno. Analisaremos, também, o 4º volume, dedicado à quarta série, e publicado, em 4ª edição, em 1969. Neste último volume, a transformação geométrica apresentada é a homotetia, inserida no capítulo destinado ao estudo de semelhança. No estudo da homotetia, são propostos dois exercícios para resolução do aluno.

4.1 GRUPO DAS TRANSLAÇÕES

Sangiorgi inicia o estudo das translações com um texto explicativo no qual define inicialmente segmento orientado e segmentos eqüipolentes. Logo após, apresenta a translação como uma correspondência que a cada ponto A do plano faz corresponder um ponto A’, extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$. Para o caso da translação de polígonos, o autor sugere que seja feita a translação de cada um de seus vértices de acordo com um dado segmento orientado, recorrendo à definição de translação de um ponto do plano. Desenvolve, também, o conceito de adição de translações e mostra que o “conjunto das translações do

plano, com relação à operação adição de translações, tem estrutura de grupo comutativo" (SANGIORGI, 1969, p.305). São propostos quatro exercícios sobre translações, que examinaremos em seguida.

4.1.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre translações

Os exercícios sobre translações combinam quatro tarefas, cada qual vinculada a um tipo de tarefa. O primeiro tipo de tarefa pode ser identificado como "construir a translação de uma figura"; o segundo, "representar a translação inversa de uma translação dada"; o terceiro, "efetuar a soma de segmentos orientados"; e o quarto, "verificar se determinado conjunto de translações tem uma estrutura de grupo". Para cada tipo de tarefa é proposta, como foi dito anteriormente, uma única tarefa, que é acompanhada, no caso das três primeiras, de um modelo de resolução. Para desenvolver cada uma dessas tarefas, o aluno deverá seguir a técnica sugerida a partir do modelo dado e encontrar, no texto fornecido na introdução ao tema, a tecnologia correspondente. Quanto à quarta tarefa, o aluno deverá buscar tecnologia e técnica no texto fornecido.

Passaremos a examinar cada um dos exercícios propostos aos alunos, a fim de demonstrarmos, além da técnica de resolução, o discurso tecnológico correspondente a cada um deles.

Exercício 1

Na translação T_a, de amplitude $\overrightarrow{XX'}$, onde m_a ($\overrightarrow{XX'}$) = 4cm, efetue a translação das seguintes figuras planas.

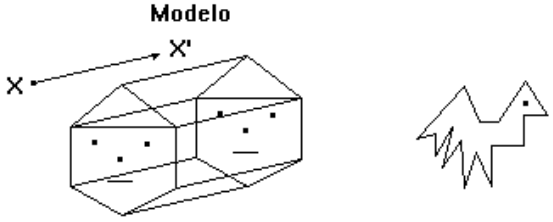


Figura 9 – SANGIORGI, 1969, p.312

Para desenvolver essa tarefa, o aluno deverá, seguindo o modelo dado, traçar, a partir de cada um dos vértices da figura original, segmentos paralelos e congruentes ao segmento

orientado, obtendo desse modo os vértices correspondentes da figura transformada. Para justificar a técnica aplicada, deve-se notar que, quando tomados dois a dois, os segmentos paralelos e congruentes ao segmento orientado formam, com os lados correspondentes da figura original e de sua transformada, um paralelogramo. Sendo assim, a figura transformada é congruente à original, tendo sido construída de acordo com um segmento orientado previamente fornecido.

Exercício 2

Represente a translação inversa de cada uma das seguintes translações.

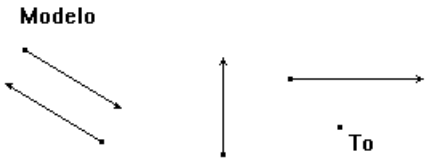


Figura 10 – SANGIORGI, 1969, p.312

Como no exercício anterior, o aluno deverá seguir o modelo e traçar segmentos orientados paralelos e congruentes a cada segmento dado, mas com sentido contrário. Para o caso do segmento com medida nula, a sua transformada é o próprio ponto de origem. O discurso tecnológico que justifica a técnica aplicada pode ser explicitado da seguinte forma: dada uma translação de um ponto A em um ponto A' mediante um segmento orientado, a translação inversa é a transformação do ponto A' no ponto A mediante um segmento orientado congruente e paralelo ao anterior, mas de sentido contrário. Se o segmento orientado tem medida nula, então o ponto A é transformado nele mesmo e a translação é chamada neutra.

Exercício 3

Efetue a soma de cada um dos seguintes pares de segmentos orientados.

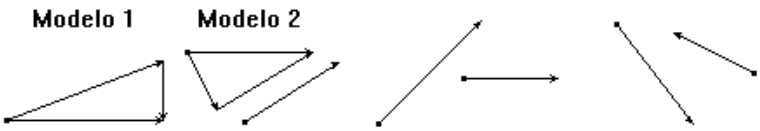


Figura 11 – SANGIORGI, 1969, p.312-313

Para cada soma, é preciso traçar um segmento orientado paralelo e congruente a um dos segmentos do par, de tal forma que a origem daquele fique numa das extremidades deste. O segmento que representa a soma será obtido traçando-se o terceiro lado do triângulo que se formará. Para justificar a técnica aplicada, é preciso notar que a adição de duas translações é obtida traçando-se, a partir de um ponto qualquer do plano, dois segmentos respectivamente eqüipolentes aos segmentos dados, de tal forma que a origem de um coincida com a extremidade que não representa a origem do outro. A soma das duas translações é dada pelo segmento determinado pelas duas extremidades livres dos segmentos traçados.

Exercício 4

Considere na reta um conjunto de translações. O sistema matemático constituído pelo conjunto de translações numa reta em relação à operação adição de translações tem estrutura de grupo comutativo?

Figura 12 – SANGIORGI, 1969, p.312-313

Para desenvolver essa tarefa, o aluno deverá verificar se a adição de translações em uma reta tem estrutura de grupo comutativo, examinando, nessa adição, cada uma das propriedades: associativa, elemento neutro, elemento inverso, além da comutatividade. No discurso tecnológico, para justificar a técnica aplicada, deve-se considerar que o conjunto das translações no plano tem estrutura de grupo comutativo, conforme explicitado no texto sobre o tema. Resta, entretanto, a justificativa de que o conjunto das translações em uma reta em relação à operação adição de translações também tem estrutura de grupo comutativo. Isso poderá ser explicado considerando-se que a reta é um subconjunto do plano. Resta provar que a soma de dois segmentos orientados pertencentes a uma reta não poderá resultar em um segmento orientado paralelo à reta e não contido nela, o que pode ser comprovado tendo em conta que, se dois segmentos a serem somados têm uma extremidade comum, o segmento resultante não poderá estar fora da reta.

4.2 GRUPO DAS ROTAÇÕES

Assim como foi feito para as translações, o autor inicia o estudo das rotações com um texto explicativo, no qual apresenta, inicialmente, o conceito de arco orientado de sentido positivo ou anti-horário. A rotação é definida, em seguida, como toda transformação que a qualquer ponto P do plano faz corresponder um ponto P' tal que a distância de um ponto fixo O do plano até o ponto P seja igual à distância de P' até o ponto fixo O. A medida do arco orientado de P até P' é chamada amplitude w do arco orientado e varia de zero a 360^o. Para o caso da rotação de polígonos, o autor sugere que seja feita a rotação de cada um de seus vértices de acordo com uma amplitude dada e um ponto fixo O, recorrendo à definição de rotação de um ponto do plano. Define a soma de duas rotações e mostra que "também o conjunto das rotações no plano em torno de um ponto, com relação à operação adição de rotações, tem estrutura de grupo comutativo" (SANGIORGI, 1969, p.309). Os exercícios sobre rotações serão examinados em seguida. São três exercícios, dois dos quais trazem rotações relacionadas a translações.

4.2.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre rotações

Sobre a rotação, podem ser identificados dois tipos de tarefas: "fazer a rotação de um ponto" e "fazer a rotação seguida da translação de uma figura dada". Para o primeiro tipo de tarefa, são propostas seis tarefas que, agrupadas no exercício de número 5, recobrem os conhecimentos de rotações inversas e de rotação de grau zero. Para resolver essas tarefas, o aluno deverá procurar a tecnologia e a técnica especificadas no texto introdutório ao tema. Para o segundo tipo de tarefa, são propostas duas tarefas, das quais a primeira, completamente resolvida, além de ser apresentada como um modelo a ser reproduzido pelo aluno, fornece uma técnica para a resolução da tarefa seguinte.

À semelhança do que foi feito para as translações, passaremos a examinar cada um dos exercícios propostos aos alunos e a apresentar, ao lado da técnica de resolução, o discurso tecnológico correspondente.

Exercício 5

Fixado O como centro e sendo m($\overline{OP}$) = 3cm, determine os respectivos transformados de P pelas seguintes rotações: 1º) R_{30^o} 2º) R_{120^o} 3º) R_0 4º) $R_{(30^o)'}$ 5º) R_{60^o} 6º) $R_{(0)'}$ (SANGIORGI, 1969, p. 313)

Para as rotações de 30^o, 120^o e 60^o, a técnica disponível é a de que sejam marcados os pontos P e O a uma distância de 3 cm e que, em seguida, com o transferidor, se obtenha o ponto P'. Para a rotação neutra, o ponto P' coincidirá com o ponto P. E para as rotações inversas $R_{(30^o)'}$ e $R_{(0)'}$, os ângulos a serem observados no transferidor serão 330^o e 360^o, respectivamente. A tecnologia correspondente encontra-se tanto na aplicação das definições de rotação, de rotação inversa e de rotação neutra, fornecidas no texto, quanto na aplicação das técnicas relacionadas ao uso do transferidor.

Exercício 6

Efetue no ΔABC, desenhado na sua folha de desenho, uma rotação R_{60^o}, de centro O e, a seguir, uma translação T_a de amplitude $\overrightarrow{XX'}$ (fixada na folha), onde $m_a(\overrightarrow{XX'})$ = 4cm.

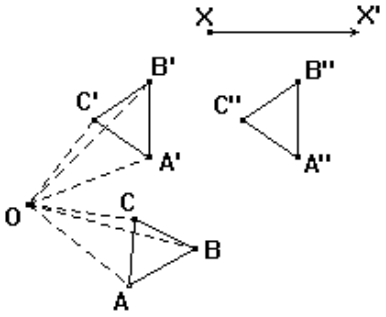


Figura 13 – SANGIORGI, 1969, p.313

A técnica para desenvolver essa tarefa consiste em reproduzir o modelo de aplicação de uma rotação seguida de uma translação. A justificativa da técnica aplicada encontra-se tanto nas definições de rotação e de translação, fornecidas no texto, quanto na reprodução de um modelo dado para uma folha de desenho.

Exercício 7

Idem, no quadrado ABCD, efetue: T_a, onde m($\overrightarrow{XX'}$) = 2cm e, a seguir, R_{50^o}, de centro O.

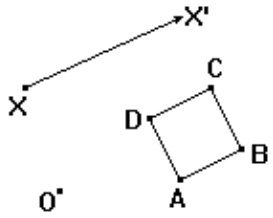


Figura 14 – SANGIORGI, 1969, p.313

O exercício consiste em efetuar uma translação seguida de uma rotação, aplicando a técnica fornecida no exercício anterior. A tecnologia, nesse caso, consiste na aplicação das definições de translação e de rotação fornecidas nos textos correspondentes aos temas.

4.3 SIMETRIA AXIAL E CENTRAL

No texto introdutório ao tema, a simetria axial é definida pelo autor como a transformação do plano que a cada ponto P faz corresponder um ponto P’ tal que P e P’ estão situados em semiplanos opostos em relação a uma reta dada, o eixo de simetria; a reta PP’ é perpendicular ao eixo de simetria e a distância de P ao eixo é igual à distância de P’ a esse mesmo eixo. São apresentados dois exemplos de reflexão de polígonos com o eixo de simetria dado na posição horizontal. A simetria central foi definida como a transformação no plano que a cada ponto P faz corresponder o seu simétrico P’ em relação a um centro fixo O, chamado centro de simetria, de forma que O seja o ponto médio do segmento PP’. Ainda sobre a simetria axial, é dado um exemplo de aplicação pelo qual se determina o menor caminho que deverá percorrer uma bolinha A para atingir uma outra bolinha B, tocando, uma vez, um dos lados da mesa em que as duas bolinhas se encontram. Sobre as duas simetrias, são propostos três exercícios que passaremos a analisar.

4.3.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre simetria axial e central

Sobre as simetrias axial e central, podem ser identificados dois tipos de tarefas: “determinar o simétrico de um ponto ou de uma figura” e “encontrar a menor distância a ser percorrida por um corpo sob certas condições”. Sobre o primeiro tipo de tarefa, são propostas

sete tarefas, agrupadas no exercício de número 8, sendo quatro sobre simetria axial e três sobre simetria central. Sobre a simetria axial, pede-se a reflexão de um ponto, de um segmento, de um triângulo e de um pentágono em relação a uma reta. Sobre a simetria central, pede-se o simétrico de um triângulo, de uma circunferência e de um segmento em relação a um ponto dado. A técnica necessária para resolver essas tarefas, assim como para encontrar o correspondente discurso tecnológico, pode ser identificada no texto introdutório ao tema. Sobre o segundo tipo de tarefa, são propostas duas tarefas de aplicação dos conceitos, as quais envolvem simetria axial, com tecnologia e técnica fornecidas no texto.

Examinaremos, em seguida, cada um dos exercícios propostos aos alunos e apresentaremos uma técnica de resolução acompanhada do discurso tecnológico correspondente.

Exercício 8

1º) Determine os simétricos das seguintes figuras com relação à reta r.

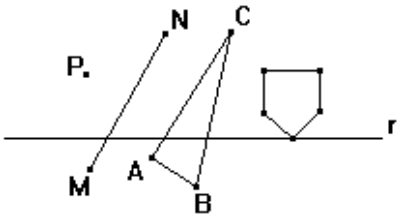


Figura 15 – SANGIORGI, 1969, p.314

2º) Determine os simétricos das seguintes figuras com relação ao centro O.

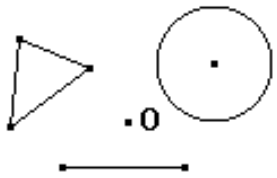


Figura 16 – SANGIORGI, 1969, p.314

Para resolver o primeiro exercício, devem ser traçadas perpendiculares, à reta r, passando pelos pontos P, M, N, A, C, B, e pelos vértices da quarta figura. Nessas perpendiculares, serão marcados os simétricos desses pontos de forma que as distâncias entre ponto e reta e entre o ponto simétrico respectivo e a reta sejam iguais. A tecnologia requerida para justificar a técnica aplicada é a que, na construção de figuras simétricas, tem-se um

polígono perfeitamente determinado a partir da posição de seus vértices e um segmento determinado pela posição de suas extremidades. Para resolver o segundo exercício deve-se traçar uma reta passando por um vértice do triângulo e pelo ponto O. Da mesma forma, devem ser traçadas retas determinadas pelos demais vértices, pelo centro da circunferência, pelas extremidades do segmento dado e o ponto O. Nessas retas, devem ser marcados os simétricos desses pontos, de forma que O seja o ponto médio do segmento determinado por um ponto e seu simétrico. Para o caso da circunferência, deve-se encontrar, além do simétrico do seu centro, o ponto simétrico de um ponto qualquer pertencente a ela. Quanto ao discurso tecnológico, na construção de figuras simétricas tem-se um polígono perfeitamente determinado a partir da posição de seus vértices, além de um segmento determinado pela posição de suas extremidades e uma circunferência determinada pela posição do seu centro acrescido de um ponto pertencente a ela.

Exercício 9

Qual é o menor caminho que a bolinha A deve percorrer para bater na bolinha B, tocando uma só vez num dos lados da mesa?

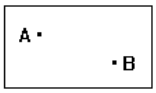


Figura 17 – SANGIORGI, 1969, p.314

Escolhendo-se um dos lados do retângulo, para encontrar o caminho mais curto que a bolinha A deverá percorrer, devem-se obter o simétrico A’ de A em relação ao lado escolhido e a intersecção C entre o segmento A’B e o lado escolhido. A menor distância será dada pela soma dos segmentos AC e CB.

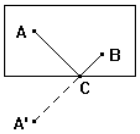


Figura 18 – Representação da solução do exercício 9

Para justificar a técnica aplicada, deve-se considerar que a menor distância entre dois pontos é dada pelo segmento de reta que os une. Com a condição de a bolinha A tocar o lado escolhido do retângulo, é preciso encontrar um ponto colinear a B e C (ponto do lado escolhido) tal que a distância desse ponto até C seja igual à distância de A até C, o que pode ser feito encontrando-se o ponto A', simétrico de A.

Exercício 10

Qual é o menor caminho que a bolinha A deve percorrer para bater na bolinha B, tocando uma vez em cada um dos lados consecutivos da mesa?

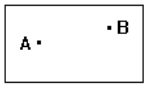


Figura 19 – SANGIORGI, 1969, p.314

Escolhendo-se dois lados consecutivos do retângulo, para encontrar o caminho mais curto que a bolinha A irá percorrer, devem-se obter o simétrico A' de A em relação ao lado escolhido e a intersecção C entre o segmento A'B e o lado escolhido. Deve-se obter, também, o simétrico B' de B em relação a um lado consecutivo ao escolhido. A menor distância será dada pela soma dos segmentos AC, CD e DB.

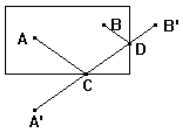


Figura 20 – Representação da solução do exercício 10

Para justificar a técnica aplicada, deve-se observar que a menor distância entre dois pontos é dada pelo segmento de reta que os une. Com a condição de a bolinha A tocar os dois lados consecutivos do retângulo, é preciso encontrar quatro pontos colineares a partir dos quais seja possível encontrar em linha reta uma distância equivalente à soma dos três segmentos AC, CD e DB. Isso é possível pela determinação dos simétricos de A e de B relativamente a dois lados consecutivos.

4.4 SIMILITUDE CENTRAL OU HOMOTETIA

O tema similitude central, ou homotetia, é apresentado, no volume 4, como uma importante transformação para ampliar e reduzir figuras. Nesse volume, encontram-se as definições de homotetia de razão positiva e de homotetia de razão negativa. Destaca-se nele, também, a propriedade segundo a qual figuras geométricas homotéticas são sempre semelhantes. Em nota considerada importante pelo autor, explicita-se que o conjunto das homotetias do plano, com relação à operação composição de duas homotetias consecutivas de mesmo centro, possui estrutura de grupo comutativo. No final do item sobre homotetias, conclui-se que, da mesma forma como translação, rotação e simetrias axial e central são transformações que conservam distâncias, as homotetias são transformações que conservam as proporções. Há, sobre esse item, dois exercícios propostos, que passaremos a analisar.

4.4.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre homotetia

Podem ser identificados dois tipos de tarefas sobre homotetia: “ampliar uma figura por homotetia de centro dado” e “reduzir uma figura por homotetia de centro dado”. São propostas duas tarefas para cada tipo de tarefa, nas quais se pedem ampliações e reduções de figuras formadas por segmentos de retas. Embora sejam, no texto, definidas também as homotetias de razão negativa, solicitam-se apenas tarefas que requeiram técnicas e tecnologias relacionadas à razão positiva.

Em seguida, serão examinados os exercícios propostos sobre homotetia, para os quais apresentaremos uma técnica de resolução e o correspondente discurso tecnológico.

> Exercício 1
>
> Amplie de duas vezes o tamanho das seguintes figuras. Nota: Escolha o centro O como quiser.

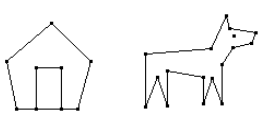


Figura 21 – SANGIORGI, 1969, p.171

Escolhido o centro de homotetia, a técnica esperada para resolver essa tarefa é a de que sejam traçadas semi-retas de origem nesse centro, passando pelos vértices de cada figura. Em seguida, devem ser marcados os pontos correspondentes a cada vértice, de forma que a distância de cada um deles em relação ao centro de homotetia seja o dobro da distância do ponto correspondente da figura original em relação ao mesmo centro. A tecnologia requerida para justificar a técnica aplicada encontra-se na aplicação da definição de homotetia fornecida no texto.

Exercício 2

Reduza de três vezes o tamanho das seguintes figuras.

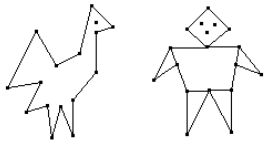


Figura 22 – SANGIORGI, 1969, p.172

Escolhido o centro de homotetia, a técnica a ser aplicada para resolver a tarefa implica que sejam traçadas semi-retas de origem nesse centro, passando pelos vértices de cada figura. Em seguida, marcam-se os pontos correspondentes a cada vértice, de forma que a distância de cada um deles em relação ao centro de homotetia seja a terça parte da distância do ponto correspondente da figura original em relação ao mesmo centro. Assim como no exercício anterior, a tecnologia requerida para justificar a técnica aplicada encontra-se na aplicação da definição de homotetia fornecida no texto.

4.5 ANÁLISE DO CONJUNTO DE ATIVIDADES PROPOSTAS DE ACORDO COM OS MOMENTOS DE ESTUDO E CONFORME OS NÍVEIS DE DETERMINAÇÃO MATEMÁTICA

No apêndice do 3º volume, é apresentado um texto contendo uma exposição das definições dos seguintes conceitos: a) translação, segmento orientado e adição de translações; b) rotação no plano em torno de um ponto, arcos orientados e adição de rotações no plano; c) simetria axial e simetria central. Tais definições são acompanhadas de figuras que, ao mesmo

tempo em que as ilustram, servem de exemplo aos exercícios. Nas tarefas, propõem-se exercícios de aplicação dos conceitos apresentados. Da mesma forma, é apresentado o conceito de homotetia no 4º volume. Primeiro apresenta-se o conceito de homotetia seguido de exemplos e, só então, são propostos exercícios de aplicação do conceito dado. Recorrendo a uma análise dos momentos de estudo, como definidos por Chevallard (1999, p.250), é possível notar que, para o primeiro momento – aquele do primeiro encontro do estudante com a organização matemática –, o autor dessa obra faz opção por uma exposição teórica dos principais conceitos e propriedades. Assim sendo, o primeiro contato do aluno com translações, rotações, simetrias axial e central, bem como com homotetias, se dá por meio de uma exposição dos conceitos relacionados a cada uma dessas transformações geométricas.

O segundo momento de estudo é, conforme Chevallard, aquele em que o aluno deve construir uma técnica inicial que o permita resolver a tarefa proposta. Para o conjunto dos exercícios apresentados, as técnicas correspondentes às resoluções das tarefas propostas são fornecidas ao leitor por meio de um modelo de resolução ora registrado no próprio exercício, ora registrado nos exemplos apresentados no texto introdutório. Nesse sentido, não parece haver intencionalidade na procura de técnicas alternativas nem na proposta de tarefas matemáticas abertas – ou seja, aquelas tarefas em que os dados não estão completamente fixados de antemão, de acordo com Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p.15). O momento da institucionalização dá-se concomitantemente com o do primeiro contato, quando é feita uma exposição das principais definições e propriedades.

Quanto ao terceiro momento de estudo – que é, ainda segundo Chevallard, o do questionamento tecnológico no qual o estudante deverá procurar uma justificativa para a técnica empregada na resolução da tarefa –, nota-se que o aluno poderá encontrar justificativas para suas resoluções no próprio texto fornecido. No exercício 4, por exemplo, pede-se que o aluno confira se o conjunto de translações em uma reta tem estrutura de grupo

comutativo relativamente à operação adição. Para resolver a tarefa, espera-se que o aluno verifique a aplicação da propriedade associativa, do elemento neutro, do elemento inverso, além da propriedade comutativa, aplicando a definição dada de adição de translações de segmentos. Mas, nesse caso, os segmentos estão contidos em uma única reta. No que tange à justificativa da técnica, o aluno a encontrará no texto do apêndice, especificamente no trecho em que o autor mostra que o conjunto das translações no plano tem estrutura de grupo comutativo em relação à operação adição. Um outro exemplo é o exercício 10, no qual se espera que, para encontrar o menor caminho para a bolinha A bater em B tocando dois lados consecutivos de uma mesa, o aluno não só determine os simétricos de A e de B em relação a dois lados consecutivos de um modelo retangular, como também justifique esse procedimento, observando que o menor caminho entre A e B nas condições dadas será aquele obtido pelo segmento determinado pelos simétricos de A e de B.

Quanto ao sexto momento de estudo – ou o da avaliação da organização matemática –, mais uma vez em conformidade com Chevallard, nota-se que os tipos de tarefas estão bem identificados e que não estão isolados, visto estarem as técnicas disponíveis para o aluno relacionadas de acordo com os elementos tecnológicos fornecidos no texto. Entretanto, as técnicas não estão suficientemente trabalhadas para que possam encaminhar a construção de novas técnicas.

Notamos que as tarefas se concentram no nível dos objetos ao tratarem das translações, das rotações, das simetrias axial e central, e das homotetias, fazendo com que sejam propostas organizações matemáticas pontuais, ou seja, aquelas em que os tipos de tarefas propostos se caracterizam por uma mesma técnica.

4.6 ANÁLISE DE ACORDO COM AS PRINCIPAIS DIFICULDADES DOS ALUNOS E CONFORME O MOMENTO HISTÓRICO EM QUE A OBRA FOI PRODUZIDA

A coleção de Osvaldo Sangiorgi escolhida para esta análise foi produzida em um período anterior à publicação dos textos oficiais previamente examinados, tais como os Guias Curriculares, a Proposta e os Parâmetros. Para responder à questão relativa ao modo pelo qual o autor atende às orientações dadas e, ao mesmo tempo, contribui para ampliar o discurso didático presente em tais orientações, recorreremos às principais idéias dos mentores da Matemática Moderna. Como foi dito anteriormente no 3º capítulo, havia por trás do discurso da Matemática Moderna, não apenas uma crítica à aplicação de algoritmos complicados, senão também uma tentativa de alcançar do aluno, além da compreensão de um dado objeto matemático, a compreensão da inserção de tal objeto na estrutura matemática da qual este faz parte. Nesse sentido, nota-se a preocupação do autor da referida obra em explicitar para o aluno que as transformações geométricas estudadas, sejam aquelas apresentadas no apêndice do 3º volume, sejam as homotetias do 4º volume, têm estrutura de grupo em relação às correspondentes operações de adição.

Como apontado no 3º capítulo, era intenção dos mentores da Matemática Moderna instituir o ensino da “matemática do nosso tempo”, o que implica três concepções que se complementam: a reconstrução da matemática, a unidade da matemática e a matemática enquanto linguagem. Na primeira, pretendia-se separar o essencial daquilo que seria ensinado apenas por tradição; na segunda, o que se considerava moderno era a própria matemática enquanto estrutura unificada; e, na terceira, a idéia da unidade não estaria vinculada somente aos conteúdos, mas também à linguagem. Além disso, a ênfase dada a uma matemática mais “correta” como condição para a aprendizagem justificava o rigor da linguagem e das soluções solicitadas aos alunos. Nesse sentido, é possível inferir que, na obra analisada, o rigor da linguagem e a apresentação da técnica a partir de um modelo tenham sido usados como recurso para evitar o erro do aluno e preservar a estrutura e a unidade da matemática. A preocupação com a preservação da unidade da matemática nota-se, por exemplo, quando se

assinala que o “conjunto das translações no plano, com relação à operação adição de translações, tem estrutura de grupo comutativo” (SANGIORGI, 1969, p.305). A preocupação aqui é a de mostrar que as propriedades das operações não se aplicam apenas a números, mas também às figuras do plano.

Relativamente às dificuldades apresentadas pelos alunos em trabalhos com translações, rotações e reflexões, observou-se, no 3º capítulo, que a principal delas está relacionada, no que diz respeito à simetria axial, à posição do eixo de simetria e à posição relativa eixo-objeto quando o objeto não é um ponto. Nota-se que, no exercício 8 (SANGIORGI, 1969, p.314), é proposto ao aluno uma atividade em que se pedem a reflexão de um segmento e a reflexão de um triângulo em relação a um eixo de simetria que intercepta essas figuras. Tal proposta, porém, se configura em dificuldade para o aluno, de acordo com os trabalhos examinados por Jaime e Gutiérrez (1996) sobre simetria axial. Nesse sentido, é possível dizer que os alunos dificilmente teriam sucesso na resolução desse exercício. Talvez a grande preocupação do autor, aqui, não seja a de que o aluno responda corretamente a uma questão específica, mas a de que ele perceba a unidade da matemática, a sua estrutura e a sua linguagem unificadora.

Quanto a dificuldades provenientes do estudo das transformações que considera as figuras como um conjunto de pontos, observa-se que rotações, translações ou reflexões são encaminhadas, na grande maioria dos exercícios, não enquanto transformações de figuras, mas como transformações de pontos. Exceção feita ao mesmo exercício 8, citado anteriormente (SANGIORGI, 1969, p.314), o qual se pode constituir em objeto de dificuldade para os alunos, especialmente no que diz respeito à construção da reflexão da circunferência.

5º CAPÍTULO

ANÁLISE DAS OBRAS: PERÍODO RELATIVO AOS ANOS 70

Este 5º capítulo será dedicado à análise das obras "Matemática para o ginásio" (LAMPARELLI; CANTON; MORETTIN e INDIANI, 1972) e "Curso moderno de matemática para o ensino de 1º grau" (AVERBUCH; BECHARA; COHEN e LIBERMAN, 1975 e 1977), escritas e publicadas no período correspondente à elaboração do Guia Curricular de São Paulo, nos anos 70.

5.1 MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO

Co-autores de "Matemática para o ginásio", Lydia Condé Lamparelli e Dalva Fontes Indiani eram, na ocasião da publicação da obra, professoras do Magistério Secundário Oficial do Estado de São Paulo, e Adolpho Walter Canton e Pedro Alberto Morettin, instrutores do Departamento de Estatística da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. Este último era, também, professor do Magistério Secundário Oficial de São Paulo. Analisaremos o volume dedicado à 4ª série do então curso ginasial, e publicado em 1972. Nessa obra, a abordagem das transformações geométricas é feita em dois momentos distintos: as simetrias (axial e central) são apresentadas como exercícios do capítulo 2, que trata do estudo das funções; e as homotetias são trabalhadas em um item do capítulo 5, no qual se desenvolve o tema da semelhança.

Em nossa análise, examinaremos inicialmente as simetrias e, em seguida, as homotetias. Procuraremos organizar os exercícios correspondentes a cada tema de acordo com os tipos de tarefas, examinando as correspondentes técnicas e tecnologias passíveis de aplicação pelo aluno. Em seguida, analisaremos as atividades orientadas para o ensino de simetrias e homotetias, examinando, para cada caso, como são abordados os momentos de

estudo e como se dá a correlação entre os níveis superiores e inferiores de determinação matemática. Para concluir, analisaremos o conjunto das tarefas relativamente ao grau de dificuldade encontrado pelos alunos, o que se fará com base em pesquisas anteriormente feitas sobre ensino e aprendizagem de simetrias e homotetias.

5.1.1 SIMETRIAS

Os autores apresentam, no primeiro item do capítulo 2, a noção de função como uma relação especial entre dois conjuntos; no segundo item, examinam os primeiros registros de função; no terceiro, destacam o domínio, o contradomínio e o conjunto-imagem; no quarto, ressaltam o estudo da função real de variável real; no quinto e último item, exploram a representação gráfica de uma função. Os exercícios sobre simetrias aparecem no fim de uma seqüência de exercícios de aplicação do conceito de função a conjuntos numéricos.

5.1.1.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre simetrias

Organizaremos os exercícios sobre simetrias com base em quatro tipos de tarefas: “verificar se uma dada relação é uma função”; “determinar pontos simétricos a pontos dados e figuras simétricas a figuras dadas relativamente a uma reta”; “determinar pontos simétricos a pontos dados e figuras simétricas a figuras dadas relativamente a um ponto”; e, finalmente, “dada uma figura, verificar se ela própria possui eixos de simetria, ou se ela própria possui um centro de simetria”.

As tarefas relacionadas ao primeiro tipo de tarefa – ou seja, aquela em que se pede para o aluno verificar se uma dada relação é uma função – apresentam grande aproximação entre técnica e tecnologia, a ponto de, em alguns momentos, estas acabarem até mesmo se confundindo. É o caso, por exemplo, das tarefas a e b propostas no exercício 33 e também da tarefa b presente no exercício 39. A técnica requerida para desenvolver a tarefa seja de enunciar a propriedade simétrica, seja de verificar se a relação de simetria é uma função, está

muito próxima à tecnologia que a justifica, como poderá ser verificado em seguida, quando passaremos a examinar os exercícios 33 e 39. Para analisar esses exercícios, apresentaremos uma técnica de resolução para cada tarefa proposta, bem como o discurso tecnológico correspondente.

Exercício 33

Considere a seguinte relação no conjunto dos pontos de um plano: dada uma reta R contida em P, a todo ponto x do plano corresponde um ponto x' do plano tal que R é a mediatriz de $\overline{xx'}$ e para cada x ∈ R faz corresponder o próprio x. Simetria axial é o nome dado a essa relação. R é o eixo de simetria e x' é o simétrico de x.

a) Explique por que essa relação é uma função no conjunto dos pontos de um plano P.
b) Recorde a propriedade das relações em um conjunto que você conhece com o nome de propriedade simétrica.
c) Determine os simétricos dos pontos a, b, c, d da figura dada.

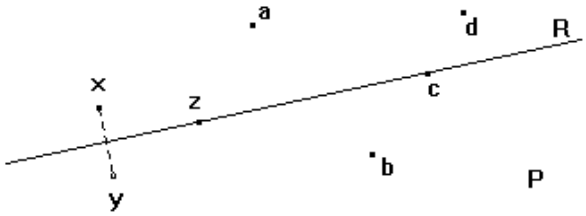


Figura 23 – LAMPARELLI, 1972, p.51

Para verificar se a relação estabelecida por uma simetria axial é uma função, deve-se recorrer à definição de função e também à definição de simetria axial, dada no enunciado do exercício, o que faz com que tecnologia e técnica estejam muito próximas. A técnica a ser aplicada, aqui, poderá ser a de considerar que existam x' e x", simétricos a x relativamente a um mesmo eixo tais que x' e x" sejam diferentes, e chegar a uma impossibilidade, uma vez que a mediatriz é única e os segmentos xx' e xx" têm o ponto x comum. Portanto, x' e x" coincidem. Então, um ponto x do plano P tem um único simétrico em P, o que faz com que a simetria axial seja uma função no conjunto dos pontos do plano P. O discurso tecnológico, como dissemos, apóia-se na definição de função segundo a qual uma relação R de um conjunto A em um conjunto B é uma função de A em B se, e somente se, para todo elemento x ∈ A existe um único elemento y ∈ B, tal que (x, y) ∈ R. A relação "simetria axial do conjunto dos pontos do plano P no próprio plano P" é uma função do conjunto dos pontos de

P, uma vez que a todo ponto x de P corresponde um único ponto x’ também em P. Além disso, recorrendo à geometria plana, por um ponto x dado fora de uma reta R é possível traçar uma única perpendicular a essa reta. Como o ponto simétrico x’ pertence a essa perpendicular e está a uma igual distância de R, esse ponto é único.

Para desenvolver a tarefa proposta no item b, a técnica disponível é a da aplicação da definição de relação simétrica: se o ponto x’ é simétrico ao ponto x em um plano P, então x é simétrico a x’. Seja R uma relação de A em A, R é chamado de relação simétrica se (a,b) $\in$ R implicar (b,a) $\in$ R. Nesse caso, tecnologia e técnica coincidem.

Quanto à tarefa proposta no item c, para determinar o ponto simétrico ao ponto a, por exemplo, basta traçar a perpendicular a R pelo ponto a e marcar o ponto a’ a uma distância da reta igual à distância do ponto a até a reta. Para o caso do ponto z, que pertence à reta R, o simétrico de z em relação a essa reta é o próprio z. Para justificar a técnica aplicada, deve-se recorrer à definição dada de simetria axial: dada uma reta R, contida em P, a todo ponto x do plano corresponde um ponto x’ do plano tal que R é a mediatriz de $\overline{xx'}$ e para cada x $\in$ R corresponde o próprio x.

Exercício 39

No conjunto dos pontos de um plano P, fixado um ponto m$\in$P considere a relação que a cada ponto x faz corresponder um ponto y desde que m seja o ponto médio de $\overline{xy}$ e que ao ponto m faz corresponder o próprio m. Simetria pontual é o nome desta relação e m é chamado centro de simetria.

y é o simétrico de x em relação a m. $\overline{xm} \cong \overline{ym}$

s é o simétrico de r em relação a m. $\overline{rm} \cong \overline{sm}$

a) Dê os simétricos dos pontos a, b, c do desenho, em relação a m.

b) Esta relação é uma função em P? Qual o seu conjunto-imagem?

c) Quais os simétricos dos pontos de um círculo, em relação ao centro do círculo?

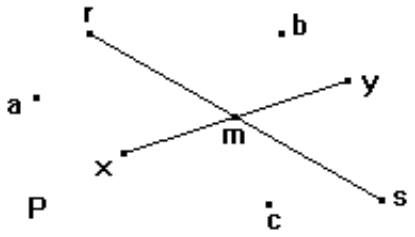


Figura 24 – LAMPARELLI, 1972, p.53

Para encontrar os simétricos de a, b, c do desenho, basta traçar as retas que passam por esses pontos e por m, e, em seguida marcar à mesma distância os pontos simétricos correspondentes. A tecnologia disponível encontra-se na definição dada de simetria central: a relação que, a cada ponto x do plano, faz corresponder um ponto y tal que m seja o ponto médio de $\overline{xy}$, e que, ao ponto m, faz corresponder o próprio m é a simetria central solicitada. Então, os simétricos de a, b, c são pontos tais que formam com a, b, c segmentos dos quais m é ponto médio.

Para desenvolver a tarefa proposta no item b, a técnica disponível é a aplicação da definição de função à definição de simetria central. Como todo ponto do plano terá um e apenas um simétrico em relação ao ponto m, essa relação é uma função no conjunto dos pontos do plano P. O conjunto-imagem é o próprio plano P, uma vez que todo ponto do plano tem uma imagem (supondo que exista um ponto do plano que não seja imagem de algum ponto; então, basta encontrar a sua imagem e, nesse sentido, o primeiro ponto será a imagem da imagem encontrada). Tecnologia e técnica, nesse caso, estão muito próximas, uma vez que uma relação R de um conjunto A em um conjunto B é uma função de A em B se, e somente se, para todo elemento $x \in A$, existe um único elemento $y \in B$, tal que $(x, y) \in R$. Então, a relação Simetria Pontual de centro m do conjunto dos pontos do plano P no próprio plano P é uma função do conjunto dos pontos de P, uma vez que a todo ponto x de P corresponde um único ponto x' também em P. É preciso, entretanto, recorrer à geometria plana para justificar que a imagem de um ponto por uma simetria central é única: por um ponto x do plano P existe

uma única reta que passa por x e m. Como o ponto simétrico x’ pertence a essa reta e está a uma igual distância de m, esse ponto é único. Tomando um ponto qualquer do plano P, podemos encontrar sua imagem, uma vez que a relação Simetria Pontual é uma função. Tomando, em seguida, essa imagem encontrada, podemos determinar, por sua vez, a sua própria imagem, que é o ponto inicial. Como esse procedimento pode ser repetido para todo ponto do plano, o conjunto-imagem coincidirá com o plano.

Quanto à tarefa proposta no item c, tomando-se um ponto qualquer do círculo, é possível encontrar o seu simétrico traçando um diâmetro do círculo. Dessa forma, os pontos simétricos dos pontos de um círculo em relação ao seu centro são todos os pontos do círculo. A tecnologia que justifica a técnica aplicada pode ser encontrada na definição de função: uma região circular é um subconjunto do plano, tomando um ponto qualquer do círculo podemos encontrar sua imagem, uma vez que a relação Simetria Pontual é uma função. Tomando, em seguida, essa imagem encontrada, podemos determinar, por sua vez, a sua própria imagem, que é o ponto inicial. Como esse procedimento pode ser repetido para todo ponto do círculo, o conjunto-imagem coincidirá com o próprio círculo.

As tarefas agrupadas de acordo com o segundo tipo de tarefa, ou seja, “determinar pontos simétricos a pontos dados e figuras simétricas a figuras dadas relativamente a uma reta dada”, encontram-se nos exercícios 34, 35, 36 e 37. Propondo inicialmente tarefas para determinar pontos simétricos e, em seguida, tarefas para determinar figuras simétricas, os autores da obra deixam claro o conceito de figura como um conjunto de pontos. A tecnologia requerida para esse tipo de tarefa não se encontra inteiramente no capítulo sobre funções. Serão requeridos do aluno conceitos da geometria plana, como poderá ser notado na análise que passaremos a desenvolver das tarefas propostas nos exercícios 34 e 37.

Exercício 34

> Dê os simétricos dos pontos: (1,0), (0,1), (3,4), (–3,4), (4,–3) em relação ao eixo y. (LAMPARELLI, 1972, p.52)

Os pontos simétricos são respectivamente A(–1,0), B(0,1), C(–3,4), D(3,4) e E(–4,–3).

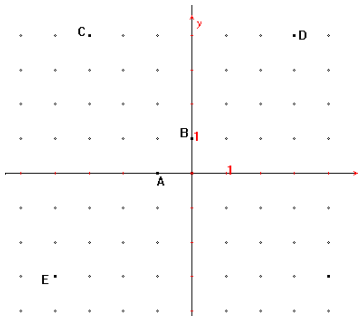


Figura 25 – Representação da solução do exercício 34

Para justificar a técnica aplicada, deve-se recorrer à representação de pontos no plano cartesiano e à definição de simetria axial. Os pontos simétricos em relação ao eixo das ordenadas são aqueles que têm a mesma ordenada e abscissas opostas. Como os eixos são perpendiculares e os pontos marcados sobre os eixos são eqüidistantes, garantem-se aí a perpendicularidade e a congruência, o que faz com que o eixo y seja a mediatriz de todos os segmentos traçados pelos pontos dados e por seus simétricos.

Exercício 37

Você sabe que uma figura geométrica plana é um conjunto de pontos. Os pontos simétricos dos pontos de uma figura, em relação a uma reta R, formam um outro conjunto de pontos, que é a figura simétrica da figura dada.
Observe o desenho:

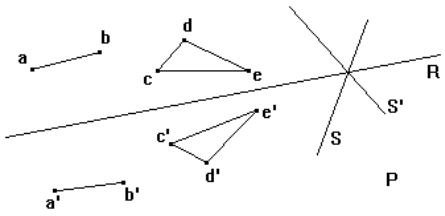


Figura 26 – LAMPARELLI, 1972, p.52

O segmento a'b' é o simétrico do segmento ab, pois cada ponto de $\overline{ab}$ tem o seu simétrico em $\overline{a'b'}$; o triângulo c'd'e' é o simétrico do triângulo cde; a reta S' é a simétrica da reta S em relação à reta R.
a) Determine as simétricas, em relação a R, das figuras do desenho dado.

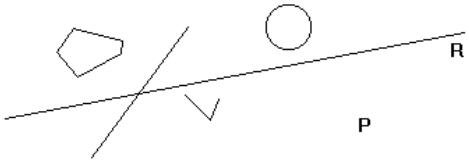


Figura 27 – LAMPARELLI, 1972, p.52

b) Uma figura é sempre congruente à sua simétrica?

Para obter a figura simétrica ao polígono, devem ser encontrados os pontos simétricos dos seus vértices por uma perpendicular à reta R. Para obter a simétrica da reta dada, basta encontrar os pontos simétricos de dois de seus pontos por uma perpendicular à reta R. E para obter a figura simétrica aos dois segmentos, basta encontrar os pontos simétricos de suas extremidades em relação à reta R. Quanto à circunferência, deve-se determinar o seu centro e obter os pontos simétricos do centro e de um ponto qualquer da circunferência em relação à reta R. A técnica aplicada baseia-se na definição de simetria axial assim como em resultados provenientes da geometria plana: na construção das figuras simétricas tem-se um polígono perfeitamente determinado a partir da posição de seus vértices, uma reta determinada pela posição de dois de seus pontos, um segmento determinado pela posição de suas extremidades e uma circunferência determinada pela posição do seu centro e de um ponto pertencente a ela.

Quanto à tarefa proposta no item b, ao construir ponto a ponto uma figura simétrica a uma figura dada, obtém-se uma figura congruente à original, uma vez que, feita a reflexão de cada ponto da figura original em relação a uma reta dada, obtêm-se pontos correspondentes que estão a uma igual distância dessa reta. Uma simetria é, então, um movimento do plano que preserva as distâncias relativas entre os pontos de uma figura. Nesse caso, nota-se grande proximidade entre tecnologia e técnica.

De acordo com o terceiro tipo de tarefa, ou seja, “determinar pontos simétricos a pontos dados e figuras simétricas a figuras dadas relativamente a um ponto tomado como centro”, encontram-se as tarefas propostas no exercício 40. Nesse caso, nota-se novamente a abordagem de figura enquanto um conjunto de pontos. As justificativas das técnicas empregadas podem ser encontradas na definição da simetria pontual e na geometria plana, como poderá ser observado na análise das tarefas que faremos em seguida.

Exercício 40

> Você pode obter figuras geométricas simétricas de figuras dadas em relação a um ponto, bastando tomar os pontos simétricos aos pontos destas figuras.
> a) Desenhe um triângulo abc e escolha um ponto m do mesmo plano do triângulo. Determine o simétrico do triângulo abc em relação ao ponto m.
> b) Qual é o menor número de pontos simétricos do triângulo que você deve determinar para isto? (LAMPARELLI, 1972, p.54)

Para obter o triângulo simétrico, basta traçar as retas que passam pelo ponto m e pelos vértices do triângulo. Em seguida, devemos transportar as medidas dos segmentos am, bm e cm, de modo a determinar os pontos simétricos dos vértices do triângulo. Esta é a técnica disponível para resolver a tarefa proposta no item a. Quanto ao discurso tecnológico, se para obter figuras simétricas de figuras dadas em relação a um ponto basta tomar os pontos simétricos dos pontos destas figuras, isso pode ser feito encontrando-se os pontos simétricos dos vértices do triângulo, uma vez que um triângulo fica determinado por seus três vértices. Considerada a evidência desta última afirmação, é necessário que haja pelo menos três pontos para obter o triângulo simétrico ao triângulo dado.

Finalmente, as tarefas relacionadas com o quarto tipo de tarefa – ou seja, aquele em que é preciso verificar se uma dada figura possui eixos de simetria ou um centro de simetria – estão agrupadas nos exercícios 38, 41 e 42. Nesses casos, o aluno deverá aplicar os conceitos da simetria axial ou da simetria pontual examinando uma mesma figura. Não se trata aqui de construir uma figura simétrica a uma figura dada, mas de procurar pontos simétricos que pertençam a uma só figura. A tecnologia requerida será aquela fornecida tanto pelos conceitos das simetrias quanto pelas propriedades das figuras geométricas retiradas da geometria plana, como se poderá notar na análise que faremos em seguida. No caso desses exercícios, observa-se uma grande proximidade entre tecnologia e técnica, uma vez que o aluno deverá aplicar as definições das simetrias assim como as propriedades das figuras geométricas, examinadas, durante o desenvolvimento da técnica de resolução da tarefa. Analisaremos, em seguida, as tarefas propostas nos exercícios 38 e 41.

Exercício 38

Observe o desenho:

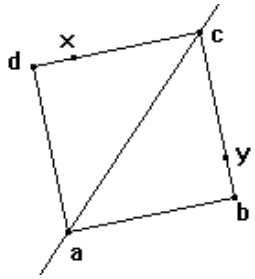


Figura 28 – LAMPARELLI, 1972, p.53

abcd é um quadrado. Todos os pontos simétricos dos pontos do quadrado, em relação a $\overleftrightarrow{ac}$ são pontos de abcd.

A reta $\overleftrightarrow{ac}$ diz-se, então, um eixo de simetria do quadrado.

a) Determine os outros eixos de simetria do quadrado.

b) A bissetriz de um ângulo é o seu eixo de simetria?

c) Determine os eixos de simetria de um retângulo, de um triângulo isósceles, de um triângulo eqüilátero e de um trapézio isósceles.

d) Qualquer corda pode ser eixo de simetria de um círculo? (LAMPARELLI, 1972, p.53)

Quanto à tarefa proposta no item a, as duas retas que contêm as diagonais do quadrado são eixos de simetrias, como também o são as mediatrizes de dois lados consecutivos. Uma simetria é um movimento do plano tal que a distância relativa entre os pontos permanece a mesma. Como o segmento determinado a partir de um ponto qualquer da mediatriz de um segmento até cada uma das extremidades tem sempre a mesma medida, as retas suportes das duas diagonais são eixos de simetria do quadrado. Como a distância de cada extremidade de um segmento até a mediatriz é sempre a mesma, as mediatrizes de dois lados consecutivos são também eixos de simetria do quadrado.

Quanto ao item b, como a distância de cada ponto da bissetriz até os lados do ângulo é sempre a mesma, a bissetriz é um eixo de simetria do ângulo. Da definição de bissetriz de ângulo, temos que uma bissetriz é uma semi-reta que divide o ângulo ao meio. Tomando um ponto qualquer dessa bissetriz, é possível construir um segmento perpendicular a cada um dos lados do ângulo, formando dois triângulos congruentes pelo caso ALA. Logo, os segmentos construídos são congruentes.

Os eixos de simetria do retângulo (item c) são as mediatrizes de dois lados consecutivos. O triângulo isósceles tem um eixo de simetria na reta suporte da mediana

relativa à base. O triângulo eqüilátero apresenta três eixos de simetrias nas retas suportes das suas três medianas. O trapézio isósceles tem um eixo de simetria na mediatriz de suas bases. O discurso tecnológico toma como base a geometria plana: como a distância de cada extremidade de um segmento até a mediatriz é sempre a mesma, as mediatrizes de dois lados consecutivos do retângulo são eixos de simetria. Da mesma forma, a mediatriz das bases de um trapézio isósceles é eixo de simetria do trapézio. Quanto ao triângulo eqüilátero, cada mediana é também bissetriz do ângulo do triângulo. Assim, tomando um ponto qualquer dessa bissetriz é possível construir um segmento perpendicular a cada um dos lados do ângulo, de modo a formar dois triângulos congruentes pelo caso ALA. Logo, os segmentos construídos são congruentes. Quanto ao triângulo isósceles, o mesmo pode ser feito em relação à mediana relativa à base do triângulo.

Os eixos de simetria do círculo (item d) podem ser obtidos por qualquer corda que contenha o seu centro. Tomando um diâmetro qualquer de um círculo de centro o e um ponto a desse diâmetro, é possível traçar uma perpendicular ao diâmetro por esse ponto. A perpendicular intercepta a circunferência do círculo em dois pontos, b e c. Como os triângulos abo e aco são retângulos com as hipotenusas coincidindo com o raio do círculo, e como o lado $\overline{ao}$ é comum a ambos, temos que os triângulos são congruentes. Logo, as distâncias do ponto a até b e c são iguais.

> Exercício 41
>
> Volte ao exercício 39c. Você deve ter observado que os pontos simétricos dos pontos do círculo em relação ao seu centro são pontos do mesmo círculo. O centro do círculo é o seu centro de simetria.
> a) O quadrado possui centro de simetria?
> b) E o retângulo?
> c) E o triângulo retângulo? (LAMPARELLI, 1972, p.54)

É possível encontrar o centro da simetria pontual tanto no ponto de encontro das diagonais do quadrado quanto no das diagonais do retângulo, uma vez que qualquer ponto tomado no quadrado ou no retângulo terá o seu simétrico em relação ao centro no próprio

quadrado ou retângulo. Isso não ocorrerá, entretanto, no triângulo retângulo, uma vez que, seja qual for o ponto considerado como o centro da simetria, este poderá, dado um ponto do triângulo, produzir um simétrico que fique fora do triângulo. Como o simétrico de qualquer ponto do quadrado ou do retângulo terá o seu simétrico em relação ao ponto de intersecção das diagonais no próprio retângulo, é possível concluir que qualquer ponto da região interior também terá seu simétrico nessa região interior. Quanto ao triângulo retângulo, podemos procurar o centro da simetria, por exemplo, no incentro do triângulo. Nesse caso, os pontos da região interna da circunferência inscrita terão imagem na região interna do triângulo. Todavia será possível encontrar pontos da região externa da circunferência para os quais seus respectivos simétricos estejam fora do triângulo.

5.1.1.2 Análise do conjunto de atividades sobre simetrias segundo os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática

Nessas tarefas, os autores propuseram questões de aplicação dos conceitos de simetria axial e central como uma função do conjunto dos pontos do plano nele mesmo. Espera-se que, para responder tais questões, o aluno não só construa segmentos perpendiculares a uma reta dada (eixo de simetria) e encontre, a uma igual distância, o ponto simétrico ao ponto dado, mas também transporte segmentos e encontre tanto eixos de simetrias quanto centros de simetrias em uma figura dada. Se, nas tarefas iniciais, os alunos deveriam reproduzir uma figura construindo a sua simétrica, nas atividades posteriores eles deverão procurar observar se uma determinada figura possui, ela mesma, uma simetria.

Fazendo uma síntese da análise praxeológica, procuraremos interpretar o conjunto de tarefas propostas segundo uma praxeologia $[T_\pi, \tau_\pi, \theta_\pi, \Theta_\pi]$. Seja T_π um tipo de tarefa pelo qual os alunos deverão estudar o objeto simetria (axial e pontual), τ_π será a técnica aplicada para resolver esse tipo de tarefa, que consistirá em traçar retas perpendiculares, medir distâncias e verificar se a cada ponto do plano corresponde um único ponto simétrico a ele. A

tecnologia θ_{π}, usada para justificar a técnica aplicada, consistirá nas argumentações baseadas em conceitos da geometria plana (definição e propriedades do quadrado, retângulo, trapézio, círculo, definição de mediatriz, reta perpendicular e bissetriz) e nas definições de função, simetria axial e simetria central. Podemos distinguir aqui uma organização matemática local vinculada à geometria plana e ao conceito de função. Conforme foi dito anteriormente, o trabalho do aluno se dá no nível das organizações matemáticas locais. Se o aluno tiver condições de mobilizar os próprios esquemas para desenvolver o questionamento tecnológico necessário para justificar as técnicas aplicadas, podemos dizer que ele terá condições de desenvolver seu estudo sobre o objeto em questão. O conceito de *esquema* tratado aqui é o de Piaget, ou seja, a estrutura cognitiva, ou o padrão de comportamento ou de pensamento, que emerge da integração de unidades mais simples e primitivas em um todo mais amplo, mais organizado e mais complexo (MONTANGERO; NAVILLE, 1998, p.170). Quanto à teoria Θ_{π}, pode-se afirmar que a simetria axial definida no exercício 33, assim como a simetria pontual definida no exercício 39, fazem parte de uma problemática mais ampla, que é a da geometria das transformações.

Examinaremos, em seguida, os exercícios propostos segundo os momentos de estudo:

1º momento: o momento do primeiro encontro se dá por meio de exercícios de aplicação do conceito de função à geometria.

2º momento: para o momento de exploração do tipo de tarefa e de construção de uma técnica inicial para resolvê-lo, nota-se que a tarefa proposta é formada por vários tipos de tarefas que requerem ora uma resolução por construção geométrica, ora aplicações dos conceitos de função e de relação, além do conceito da simetria requerida. Para as tarefas de aplicação dos conceitos de função e de relação, espera-se que os alunos consultem os conceitos fornecidos no desenvolvimento do capítulo e encontrem uma correspondência entre esses conceitos e as tarefas propostas. Para as tarefas de resolução geométrica, espera-se que o

aluno recorra aos conceitos da geometria plana, tais como o de reta perpendicular, o de bissetriz, de diagonal, de corda e de diâmetro do círculo.

3º momento: para esse momento de questionamento tecnológico, as tarefas estão relacionadas ao conceito de função e a justificativa da técnica aplicada pode ser encontrada no próprio texto do capítulo. Para as questões particularmente vinculadas aos conceitos geométricos, o aluno deverá procurar as justificativas nas propriedades das mediatrizes, bissetrizes, retas perpendiculares, pontos médios de segmentos, nos casos de congruência de triângulos e nas definições das simetrias fornecidas nos próprios exercícios.

Não se observou, nas tarefas analisadas, preocupação relacionada ao trabalho da técnica, ou seja, a de trabalhar a técnica a partir de tarefas associadas a um mesmo tipo de tarefa. Quanto à institucionalização, nota-se preocupação com a institucionalização dos conceitos relacionados às funções presentes especialmente nos exercícios 33 e 39. Além disso, no capítulo sobre semelhança, mais precisamente no texto contido no item sobre Homotetia, há menção à simetria axial e à simetria central como aplicações do plano nele mesmo tais que a imagem de uma figura é sempre uma figura congruente a ela. Tal referência poderia ser considerada parte da institucionalização das simetrias estudadas, mesmo que o objetivo principal seja o de explicitar uma diferença entre simetria e homotetia.

Examinando a estrutura da organização matemática, não se notam tipos de tarefas isolados, embora as técnicas aplicadas estejam relacionadas a conceitos da geometria plana, ao conceito de funções ou às relações entre eles. Além disso, é possível notar, nas tarefas propostas, a existência de tarefas inversas, como nos exercícios em que ora se pedem pontos ou figuras simétricas, ora se pedem eixos ou centros de simetria. Por outro lado, a ausência de tarefas abertas (aquelas em que os dados não estejam fixados completamente de antemão), bem como de tarefas que possibilitem o emprego de técnicas alternativas, pode comprometer o grau de completude da organização matemática.

As atividades analisadas não se concentram nos níveis dos objetos e temas e sim no nível do setor das transformações, mas não se vinculam diretamente aos níveis superiores de domínio e disciplina, o que pode provocar a não visibilidade da obra matemática para além das atividades propostas. Embora conceitos da geometria plana sejam freqüentemente requisitados para a resolução das tarefas, parece não haver abrangência no domínio da geometria, uma vez que não há uma procura de significado da aplicação dos conceitos da simetria na geometria. As figuras geométricas são usadas a título de ilustração, enquanto conceitos primitivos da geometria constituem elementos tecnológicos para vários exercícios propostos.

5.1.2 HOMOTETIAS

As homotetias fazem parte do capítulo sobre semelhança, no qual os autores apresentam inicialmente concepções intuitivas da semelhança de figuras, discutem escala e razão de semelhança, e fazem uma distinção entre segmentos comensuráveis e segmentos não-comensuráveis. O próximo item é o das homotetias. O restante do capítulo é dedicado ao estudo da semelhança de triângulos.

Para introduzir homotetias, os autores discutem se, da mesma forma que existe uma aplicação do plano nele mesmo que transforma uma figura em outra que lhe é congruente, não seria possível definir uma aplicação que transformasse uma figura em outra semelhante a ela? Como resposta a essa questão, é dada primeiramente uma definição de homotetia com razão positiva e, páginas adiante, a definição geral de homotetia, incluindo a razão negativa. À definição da homotetia de razão positiva seguem quinze exercícios (7 a 21), ao término dos quais é dada a definição de homotetia de razão negativa e há a proposição de mais cinco exercícios (22 a 26) relacionando as homotetias de razão positiva com as de razão negativa.

5.1.2.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre homotetias

Para fazer a análise praxeológica dos exercícios sobre homotetias, nós os organizaremos de acordo com alguns tipos de tarefas, como já feito no item anterior. O primeiro tipo de tarefa observado é aquele que relaciona a definição de homotetia ao conceito de função. Os exercícios 7, 8 e 9 enquadram-se nesse tipo de tarefa. Nas tarefas propostas nesses exercícios, pede-se "verificar se a homotetia é uma aplicação". Para resolvê-las, o aluno deverá relacionar a definição de homotetia dada no texto do capítulo sobre semelhança ao conceito de função estudado em capítulo anterior sobre funções. No caso dos três exercícios vinculados a esse tipo de tarefa, nota-se uma grande proximidade entre tecnologia e técnica, como se poderá observar na análise que passaremos a desenvolver dos exercícios 7 e 8. Nesses casos, a técnica consiste numa aplicação direta de conceitos relacionados a funções.

Exercício 7

Por que a homotetia H [c, r] é uma aplicação? (LAMPARELLI, 1972, p.127)

Considerando que existe um ponto x", homotético a x e diferente de x', chegamos a uma impossibilidade uma vez que os pontos c e x determinam uma única reta e $\frac{[\overline{cx'}]}{[\overline{cx}]} = \frac{[\overline{cx''}]}{[\overline{cx}]}$. Portanto x' e x" coincidem. Então, a imagem de x é única, considerando a homotetia H [c, r]. Dizemos que uma relação R de um conjunto A em um conjunto B é uma aplicação de A em B se, e somente se, para todo elemento $x \in A$, existe um único elemento $y \in B$, tal que $(x, y) \in R$. A relação do conjunto dos pontos do plano P no próprio plano P é uma função do conjunto dos pontos de P, uma vez que a todo ponto x de P corresponde um único ponto x' também em P. Dados dois pontos distintos c e x, existe uma única reta passando por eles. Como o ponto x', homotético de x, pertence a essa reta e está a uma distância de x tal que $\frac{[\overline{cx'}]}{[\overline{cx}]} = r$, então esse ponto é único.

Exercício 8

H[c,r] é uma aplicação bijetora? (LAMPARELLI, 1972, p.127)

A aplicação H[c,r] é injetora porque dados x e x’ tais que $x \neq x'$ temos que $H(x) \neq H(x')$. A aplicação também é sobrejetora porque, dado um ponto y qualquer do plano, é sempre possível encontrar um ponto x tal que $[\overline{cx}] = \frac{[\overline{cy}]}{r}$, do qual y será a imagem. Logo, a aplicação é bijetora. Dizemos que uma aplicação F de um conjunto A em um conjunto B é bijetora se ela for injetora e também sobrejetora. Como a operação divisão entre dois números tem um único resultado, temos que $\frac{[\overline{cy}]}{[\overline{cx}]}$ e $\frac{[\overline{cy'}]}{[\overline{cx}]}$ não podem ser ambos iguais a r se $y \neq y'$.

Em um segundo tipo de tarefa, encontram-se os exercícios 10, 11 e 12, em que se pretende fazer uma exploração da definição de homotetia. A técnica disponível ao aluno para resolver tais tarefas encontra-se na definição dada de homotetia, o que fará com que técnica e tecnologia estejam, como nos casos anteriores, muito próximas. Em alguns casos, para justificar as técnicas aplicadas, serão necessárias, além da definição de homotetia, propriedades oriundas da geometria plana, como poderá ser notado na análise do exercício 11, que faremos em seguida.

Exercício 11

> Dado um plano A, e neste um par de eixos cartesianos, se H [c, r] for tal que c pertença ao eixo das abscissas, onde estão as imagens dos pontos desse eixo? (LAMPARELLI, 1972, p.127)

Se x e c pertencem ao eixo das abscissas, então o ponto x’, imagem de x, deve pertencer também a esse eixo, uma vez que c, x e x’ devem ser colineares. Então as imagens dos pontos do eixo das abscissas estão nesse mesmo eixo. Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta. Além disso, dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

Um terceiro tipo de tarefa identificado por nós é aquele em que se pretende “verificar que o transformado de um segmento por uma homotetia dada é um segmento paralelo ao segmento dado e que a razão entre as medidas dos dois segmentos é a razão da homotetia”.

Esse tipo de tarefa pode ser observado nas tarefas propostas nos exercícios 13, 14, 15 e 16. Após o exercício 15 (p.128), os autores fazem um comentário sobre os exercícios resolvidos a partir do 13 concluindo que, se as imagens dos pontos de um segmento ab pertencem a um segmento a'b', costuma-se dizer que $\overline{a'b'}$ é a imagem de $\overline{ab}$ pela homotetia dada. Nesse ponto, porém, alertam que se deve entender nessa linguagem assim simplificada que, na verdade, são os pontos de $\overline{a'b'}$ as imagens dos pontos de $\overline{ab}$. Concluem, ainda, que nos exercícios 14 e 15 verificou-se uma propriedade – se $\overline{a'b'}$ é o transformado de $\overline{ab}$ pela homotetia H[c,r], então $\overline{a'b'}$ // $\overline{ab}$ e $\frac{[\overline{a'b'}]}{[\overline{ab}]} = r$ –, que é referida no texto como a de número 32.

Para resolver as tarefas propostas nos exercícios citados, o aluno deverá não só recorrer à definição de homotetia, mas também seguir orientações de resolução fornecidas nos próprios enunciados. A tecnologia disponível poderá ser encontrada ora na definição de homotetia, ora em propriedades provenientes da geometria plana. No caso das tarefas em que a técnica é fornecida no próprio enunciado, tecnologia e técnica coincidirão, como é o caso das tarefas propostas nos exercícios 13c e 14c. Para o caso da tarefa proposta no exercício 16, a tecnologia disponível encontra-se na definição de razão de homotetia e em propriedades algébricas.

Exercício 13

O diagrama é de uma homotetia.

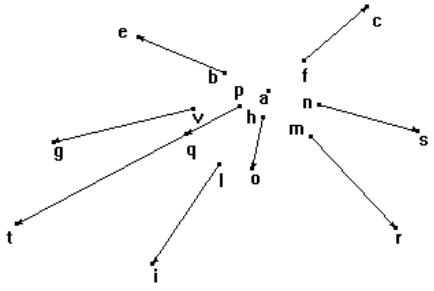


Figura 29 – LAMPARELLI, 1972, p.127

a) Qual é o centro da mesma? Por quê?
b) Qual é a razão dessa homotetia?
c) Complete a tabela corretamente:

x	a	b	f	h	P	m	n	v	l	q
H(x)										

Figura 30 – LAMPARELLI, 1972, p.128

d) Desenhe o segmento $\overline{mn}$; escolha um ponto o tal que o $\in \overline{mn}$; determine H(o); é falsa ou verdadeira a afirmação: se o $\in \overline{mn} \Rightarrow H(o) \in \overline{rs}$, sendo r = H(m) e s = H(n)?
e) Repita o item anterior para o segmento lq. (LAMPARELLI, 1972, p.127-128)

Quanto à tarefa proposta no item a, o centro da homotetia é o ponto a porque é o único ponto do diagrama em que se tem H(a) = a. A tecnologia disponível é fornecida pela definição dada no texto, segundo a qual a homotetia de centro c e de razão r é a aplicação no plano A, tal que: H(c) = c; se $x \neq c$, então H(x) = y, sendo c, x e y colineares, $c \notin \overline{xy}$ e $\frac{[\overline{cy}]}{[\overline{cx}]} = r$.

Sobre a segunda tarefa (item b), a razão dessa homotetia é 3, a qual é obtida medindo-se os segmentos $\overline{as}$ e $\overline{an}$ e calculando-se a razão $\frac{[\overline{as}]}{[\overline{an}]}$. Como o diagrama dado representa uma homotetia de centro a, sendo a, n, s colineares e s = H(n), a razão da homotetia será dada pela razão $r = \frac{[\overline{as}]}{[\overline{an}]}$.

Relativamente à tarefa proposta no item c, é possível completar a tabela de acordo com o diagrama da seguinte forma: H(a) = a, H(b) = e, H(f) = c, H(h) = o, H(p) = q, H(m) = r, H(n) = s, H(v) = g, H(l) = i e H(q) = t.

O preenchimento da tabela pode ser justificado pela definição de homotetia. Como o diagrama dado representa uma homotetia de centro a, sendo a, n, s colineares, tem-se s = H(n). Da mesma forma, e = H(b), c = H(f), o = H(h), etc., que é a interpretação do diagrama de acordo com a definição de homotetia.

A técnica a ser aplicada para desenvolver a tarefa proposta no item d é aquela fornecida passo a passo no próprio enunciado do exercício. Para justificá-la, deve-se recorrer aos casos de semelhança de triângulos: se r = H(m) e s = H(n), então todos os pontos do

segmento $\overline{mn}$ serão homotéticos a pontos correspondentes do segmento $\overline{rs}$. Sejam os triângulos asr e anm do diagrama dado. Como $\frac{[\overline{as}]}{[\overline{an}]} = \frac{[\overline{ar}]}{[\overline{am}]}$ = r, e como o ângulo a é comum aos dois triângulos, podemos concluir que os triângulos asr e anm são semelhantes pelo caso LAL. Seja o um ponto do segmento $\overline{mn}$ e seja o' a sua imagem pela homotetia H, então $\frac{[\overline{o'a}]}{[\overline{oa}]}$ é igual a $\frac{[\overline{ar}]}{[\overline{am}]}$, de onde o' $\in \overline{rs}$. Para a tarefa proposta no item e, devem ser aplicadas a mesma técnica e a mesma tecnologia do item d.

Exercício 14

Seja a homotetia H[c,r] onde H(a) = a'.

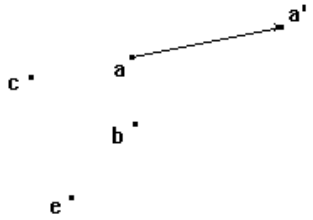


Figura 31 – LAMPARELLI, 1972, p.128

a) Determine r.
b) Determine b' = H(b) e e' = H(e).
c) Trace $\overline{ab}$, $\overline{be}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{b'e'}$.
d) Por a' trace R // $\overline{ab}$ e verifique se b' $\in$ R.
e) Por b' trace S // $\overline{be}$ e verifique se e' $\in$ S.
f) São falsas ou verdadeiras as afirmações: $\overline{be}$ // $\overline{a'b'}$ e $\overline{be}$ // $\overline{b'e'}$. (LAMPARELLI, 1972, p.128)

Usando a régua, devem-se medir os segmentos ca' e ca, encontrando a razão $\frac{[\overline{ca'}]}{[\overline{ca}]}$ = 2,5. A aplicação da definição de homotetia dada no texto compõe o discurso tecnológico referente à tarefa proposta no item a (a homotetia de centro c e de razão r é a aplicação no plano A, tal que: H(c) = c; se x $\neq$ c, então H(x) = y, sendo c, x e y colineares, c $\notin \overline{xy}$ e $\frac{[\overline{cy}]}{[\overline{cx}]}$ = r). Sendo assim, para encontrar a razão, basta dividir o comprimento do segmento

determinado então pelo centro de simetria e pela imagem do ponto dado, pelo comprimento do segmento determinado então pelo centro de simetria e pelo ponto dado.

Quanto à tarefa proposta no item b, como $[\overline{cb'}] = 2{,}5 \cdot [\overline{cb}] = 2{,}5 \cdot 1{,}8 = 4{,}5$, então b' é um ponto colinear a c e b tal que a sua distância ao centro de homotetia é 4,5 cm. Da mesma forma, e' está 5 cm distante do centro de homotetia. O ponto b' pertence à reta determinada pelos pontos c e b. Como existe uma única reta que passa por dois pontos, para determinar b' basta medir, nessa reta, o comprimento do segmento calculado a partir do centro da homotetia.

Relativamente ao item c, basta traçar os segmentos pedidos, uma vez que, por dois pontos dados, é possível traçar um segmento de reta com extremidades nesses pontos.

Quanto ao item d, é possível notar que o ponto b' pertence à reta R traçada. O triângulo ca'b' é semelhante ao triângulo cab pelo caso de semelhança de triângulos LAL. Portanto, o ângulo a' é congruente ao ângulo a, assim como o ângulo b' é congruente ao ângulo b. Então, o segmento $\overline{a'b'}$ é paralelo ao segmento $\overline{ab}$. Como, na geometria euclidiana, há uma única reta paralela a uma reta dada a partir de um ponto, concluímos que $b' \in R$. A tarefa proposta no item seguinte pode ser desenvolvida e justificada de modo análogo.

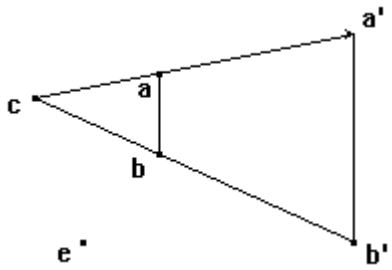


Figura 32 – Representação da solução do exercício 14d

Quanto ao item f, como a razão entre as medidas dos segmentos $\overline{ca'}$ e $\overline{ca}$ é igual à razão entre as medidas dos segmentos $\overline{cb'}$ e $\overline{cb}$, podemos concluir que $\overline{ab} \,//\, \overline{a'b'}$. Da mesma forma, $\overline{be} \,//\, \overline{b'e'}$. O triângulo ca'b' é semelhante ao triângulo cab pelo caso de semelhança de

triângulos LAL. Portanto, o ângulo a’ é congruente ao ângulo a, assim como o ângulo b’ é congruente ao ângulo b. Então, o segmento $\overline{a'b'}$ é paralelo ao segmento $\overline{ab}$.

Exercício 15

No exercício anterior meça $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{be}$ e $\overline{b'e'}$ e verifique que $\frac{[\overline{a'b'}]}{[\overline{ab}]}$ = r e que $\frac{[\overline{b'e'}]}{[\overline{be}]}$ = r. (LAMPARELLI, 1972, p.128)

A partir das medições efetuadas, r é aproximadamente igual a 2,5. Como o triângulo ca’b’ é semelhante ao triângulo cab pelo caso de semelhança de triângulos LAL na razão r, então a razão entre os lados $\overline{a'b'}$ e $\overline{ab}$ também é r.

Exercício 16

Verifique que, mesmo sendo a, b e c alinhados, a propriedade 32 é válida. (LAMPARELLI, 1972, p.129)

Se a, b e c estão alinhados, a, b, c, a’ e b’ pertencem a uma mesma reta. Como dois pontos determinam uma reta e os pontos c, a e a’ estão alinhados pela definição de homotetia, então o ponto b pertence a essa mesma reta, uma vez que está alinhado com a e c. Do mesmo modo, os pontos c, b e b’ estão alinhados pela definição de homotetia, e o ponto a pertence a essa mesma reta. Então, as retas que contêm os segmentos ab e a’b’ são coincidentes e, portanto, paralelas (DOLCE; POMPEO, 1980, p.53).

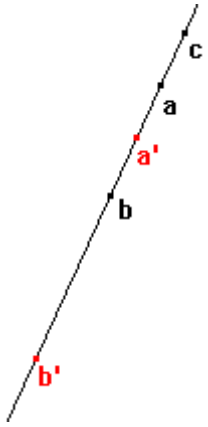


Figura 33 – representação da solução do exercício 16

A propriedade citada continua válida para os pontos a, b e c alinhados uma vez que, assim como o paralelismo, a razão entre os segmentos a'b' e ab coincide com a razão da homotetia:

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{b'c - a'c}{ab} = \frac{\frac{b'c - a'c}{bc}}{\frac{ab}{bc}} = \frac{r - \frac{a'c}{bc}}{\frac{ab}{bc}} = \frac{r - \frac{r}{\frac{bc}{ac}}}{\frac{ab}{bc}} = \frac{r\left(1 - \frac{ac}{bc}\right)}{\frac{ab}{bc}} = \frac{r(bc - ac)}{ab} = \frac{r \cdot ab}{ab} = r$$

O quarto tipo de tarefa, no qual se encaixam as tarefas propostas nos exercícios 17 e 18, é aquele em que se deve "relacionar a ampliação (ou redução) de uma figura à razão dada". A técnica disponível ao aluno está no texto relativo ao tema e na definição de homotetia. Quanto ao discurso tecnológico, ele poderá ser elaborado a partir da definição de homotetia e com base nas propriedades da semelhança de triângulos e de polígonos em geral.

Exercício 17

Considere a homotetia H[p,2].

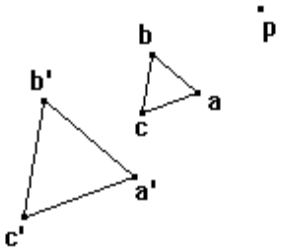


Figura 34 – LAMPARELLI, 1972, p.129

a) Complete corretamente a tabela:

x	p	a	b	c	...
H(x)					

Figura 35 – LAMPARELLI, 1972, p.129

b) Complete corretamente:
Todos os pontos de $\overline{ab}$ têm imagens em ...
Todos os pontos de $\overline{bc}$ têm imagens em ...
Todos os pontos de $\overline{ac}$ têm imagens em ...
c) Pela homotetia H[p,2], o triângulo abc é transformado no triângulo a'b'c'. Calcule as razões entre as medidas dos seus lados correspondentes. Meça os ângulos correspondentes. O que você conclui?
d) O triângulo a'b'c' está em escala em relação ao triângulo abc? Qual a escala?
e) O triângulo a'b'c' é uma ampliação do triângulo abc? (LAMPARELLI, 1972, p.129-130)

A técnica necessária para desenvolver a tarefa proposta no item a consiste em fazer uma leitura da figura a partir da definição dada de homotetia de um ponto e encontrar H(p) = p; H(a) = a'; H(b) = b'; H(c) = c'. Considerando p o centro da homotetia, e tendo em vista que a, a' e p estão alinhados e que $\frac{[\overline{a'p}]}{[\overline{ap}]}$ = 2 pela definição de homotetia, conclui-se, então, que a' é a imagem de a, b' é a imagem de b, e c' é a imagem de c. O discurso tecnológico, nesse caso, é fundamentado na definição dada de homotetia de um ponto, o que faz com que tecnologia e técnica coincidam.

Quanto à tarefa proposta no item b, os pontos de $\overline{ab}$ têm imagem em $\overline{a'b'}$, os pontos de $\overline{bc}$ têm imagem em $\overline{b'c'}$ e os pontos de $\overline{ac}$ têm imagem em $\overline{a'c'}$. Nesse caso, tecnologia e técnica também coincidem e se baseiam na propriedade segundo a qual se H[c,r] é uma homotetia tal que H(a) = a' e H(b) = b', então se $x \in \overline{ab} \Rightarrow H(x) \in \overline{a'b'}$.

Para a tarefa proposta no item c, a técnica inicial é fornecida no próprio enunciado: a razão entre as medidas dos seus lados correspondentes é igual à razão da homotetia, e os ângulos correspondentes medem 60^o. Pode-se concluir que os triângulos abc e a'b'c' são semelhantes na razão 2. O discurso tecnológico, nesse caso, baseia-se na definição de polígonos semelhantes dada no início do próprio capítulo.

Sobre as duas últimas tarefas propostas, os dois triângulos estão na escala 2 : 1. Considerando o triângulo abp e o triângulo a'b'p', temos que $\frac{[\overline{a'p}]}{[\overline{ap}]} = \frac{[\overline{b'p}]}{[\overline{bp}]} = 2$. Como p é um ângulo comum aos dois triângulos, concluímos que são semelhantes. Então $\frac{[\overline{a'b'}]}{[\overline{ab}]}$ = 2. O mesmo pode ser feito com os outros lados dos dois triângulos. O triângulo a'b'c' é uma ampliação do triângulo abc na razão 2 : 1 uma vez que a razão da homotetia é 2.

Exercício 18

> Se, ao invés de considerarmos a homotetia H[p,2], considerarmos a homotetia H_1[p, ½], teremos a seguinte tabela:

x	p	a’	b’	c’	...
H_1 (x)	p	a	b	c	...

Figura 36 – LAMPARELLI, 1972, p.130

> Por esta homotetia o triângulo abc é o transformado do triângulo a’b’c’. O triângulo abc é uma redução do triângulo a’b’c’? (LAMPARELLI, 1972, p.130)

Técnica e tecnologia, no caso da tarefa proposta no exercício 18, estão indissociáveis, uma vez que, se a razão da homotetia é ½, então a razão entre a distância da imagem ao centro da homotetia e a distância do ponto original ao mesmo centro deve ser ½. Sendo assim, a razão entre as medidas dos lados da figura que representa a imagem e as medidas dos lados da figura original será também ½, e, portanto, haverá uma redução da figura original.

Um outro tipo de tarefa no qual se agrupam as tarefas propostas nos exercícios 19 e 20 pode ser enunciado como aquele tipo de tarefa em que se pretende “comparar duas homotetias de mesmo centro, sendo uma de razão r e a outra de razão 1/r”. A técnica disponível para resolver tais tarefas é a aplicação da definição de homotetia e da propriedade 32 (LAMPARELLI, 1972, p.129). Nesses casos, o discurso tecnológico está muito próximo da técnica, como veremos a seguir.

> Exercício 19
>
> Escolha um ponto c qualquer de um plano A e faça o diagrama (para alguns pontos) das homotetias H[c,3] e H_1[c, 1/3]. O que você conclui? (LAMPARELLI, 1972, p.130)

Marcando pontos no plano A e encontrando os pontos homotéticos na razão 3, nota-se que a distância das imagens até c é o triplo da distância dos pontos originais até c. Pela propriedade 32, segmentos determinados por dois pares de pontos homotéticos são paralelos, e a razão entre seus comprimentos será igual à razão de semelhança. Há, nesse caso, uma ampliação da figura. Por outro lado, se a razão é 1/3, a distância das imagens até c é um terço da distância dos pontos originais até c, assim como a razão entre as medidas de segmentos correspondentes também é 1/3. Em tal caso, há uma redução da figura.

Exercício 20

> É falsa ou verdadeira a seguinte afirmação: “dada a homotetia H[c,r] então se H(x) = y temos $H_1(y) = x$ sendo H_1 a homotetia de centro c e razão 1/r, ou seja, a homotetia $H_1[c, 1/r]$”? (LAMPARELLI, 1972, p.130)

Pelo enunciado do exercício 18, é possível observar que os pontos originalmente dados para uma homotetia de razão r constituem-se nas imagens de suas imagens quando a razão é a inversa de r. A homotetia H[c,r] é uma aplicação bijetora e, portanto, tem uma inversa que é dada pela homotetia de mesmo centro e razão inversa de r.

As tarefas propostas no exercício 21 dizem respeito a um único tipo de tarefa, que é o de “determinar o homotético de um ponto na razão 1”. Técnica e tecnologia, nesse caso, dizem respeito à aplicação da definição de homotetia, como pode ser visto a seguir.

Exercício 21

> Considere a homotetia H[c,1] sendo c um ponto a sua escolha. Escolha 5 pontos quaisquer a, b, d, e, f do plano e calcule H(a), H(b), H(c), H(d), H(e), H(f). O que você conclui a respeito de uma homotetia de razão 1? (LAMPARELLI, 1972, p.130)

Uma homotetia H[c,1] deixa os pontos do plano inalterados. Se H(a) = a’ e $\frac{[\overline{ca'}]}{[\overline{ca}]} = 1$, então a e a’ são alinhados e ca’ = ca.

As tarefas propostas nos exercícios seguintes (22, 23 e 24) podem ser agrupadas no seguinte tipo de tarefa: determinar a transformada de uma figura na razão negativa. A técnica disponível ao aluno está na definição geral de homotetia, na qual a razão r é um número real qualquer. Essa definição é apresentada ao aluno logo após o exercício 21. O discurso tecnológico terá apoio nas propriedades de ampliação e de redução de figuras por uma homotetia, conforme poderá ser observado na análise que faremos do exercício 22.

Exercício 22

> Dada a homotetia H[c,–2]

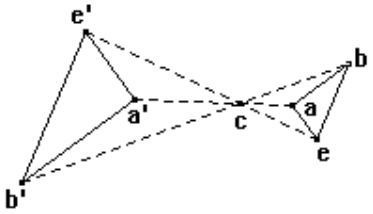


Figura 37 – LAMPARELLI, 1972, p.131

a) Complete corretamente a tabela:

x	c	a	b	e
H(x)				

Figura 38 – LAMPARELLI, 1972, p.131

b) Determine os pontos H(a'), H(b') e H(e').
c) O triângulo a'b'e' é uma ampliação do triângulo abe? (LAMPARELLI, 1972, p.131-132)

Aplicando a definição de homotetia de razão r, e sendo r um número real qualquer, tem-se que H(c) = c, H(a) = a', H(b) = b' e H(e) = e'. As distâncias das imagens até o centro da homotetia são o dobro das distâncias dos pontos originais até o mesmo centro, e as imagens encontram-se em semi-retas opostas em relação ao centro de homotetia e aos pontos originalmente dados. Da mesma forma, as imagens dos pontos a', b', e' são pontos cujas distâncias até o centro de homotetia são o dobro das distâncias dos pontos a, b, e, até o mesmo centro, localizando-se em semi-retas opostas.

O triângulo a'b'e' é uma ampliação do triângulo abe, uma vez que o valor absoluto da razão de homotetia é 2, e que H[c,r] é uma homotetia que amplia as figuras se $r > 1$ ou $r < -1$.

Para concluir, as tarefas propostas nos exercícios 25 e 26 podem ser agrupadas no seguinte tipo de tarefa: examinar quais são as propriedades que permanecem invariantes em uma figura e em sua transformada por uma homotetia. A técnica disponível consistirá na observação dos resultados das tarefas resolvidas anteriormente, e o discurso tecnológico terá apoio na definição de homotetia e nas propriedades de ampliação e redução de figuras por uma homotetia.

Exercício 25

> Observando e lembrando o que aconteceu em todos os exercícios anteriores, responda: Que valor deve ter a razão para que a transformada de uma figura por uma homotetia seja uma ampliação? Uma redução? Uma figura congruente? Uma figura semelhante? (LAMPARELLI, 1972, p.132)

A transformada de uma figura por uma homotetia será uma ampliação quando $r > 1$ ou $r <–1$; será uma redução quando $0< r < 1$ ou $–1 < r < 0$; será uma figura congruente quando $r = 1$ ou $r = –1$. A transformada de uma figura por uma homotetia será sempre uma figura semelhante à figura original. Como a razão da homotetia é constante, a transformada de uma figura será sempre semelhante à figura original, podendo ser uma ampliação, uma redução ou a reprodução de uma figura congruente conforme o valor da razão.

> Exercício 26
>
> Justifique por que são verdadeiras as seguintes sentenças: o transformado de um quadrado por uma homotetia é sempre um quadrado; o transformado de um círculo por uma homotetia é um círculo. (LAMPARELLI, 1972, p.132)

O transformado de um quadrado por uma homotetia é sempre um quadrado, assim como o transformado de um círculo é um círculo, uma vez que a homotetia transforma uma figura em uma outra que lhe seja semelhante. Como a razão da homotetia é constante, a transformada de uma figura será sempre semelhante à figura original, podendo ser uma ampliação, uma redução ou a reprodução de uma figura congruente conforme o valor da razão. Por esse motivo, as propriedades das figuras transformadas por uma homotetia se mantêm inalteradas, com exceção do tamanho da figura.

5.1.2.2 Análise do conjunto de atividades sobre homotetias segundo os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática

À semelhança do que foi feito no caso das simetrias, observamos que os autores propuseram questões sobre o conceito de homotetia como uma aplicação do conjunto dos pontos do plano nele mesmo. Para responder tais questões, os alunos deverão aplicar a definição dada de homotetia, além de valer-se dos conceitos de função introduzidos em

capítulo anterior, do conceito de colinearidade, da definição de retas paralelas e do postulado das paralelas da geometria euclidiana. Em relação ao questionamento tecnológico para a justificativa das técnicas aplicadas, notamos que, especificamente nos exercícios 13, 14 e 15, o aluno deverá recorrer aos casos da semelhança de triângulos, casos que só serão propostos no item seguinte do capítulo em estudo. Em tais atividades, porém, supomos que ao aluno não tenha sido proposto um trabalho de exploração do tipo de tarefa e de construção de uma técnica inicial para realizá-la. Se a proposição dos tipos de tarefas for de tal forma que o aluno não tenha condições de encontrar, por meio de seus próprios esquemas, uma justificativa para a técnica aplicada, isso significa que a técnica que ele vai aplicar terá sido fornecida pelo professor, ou, em tal caso, pelo livro didático. Sendo assim, o aluno dificilmente terá condições de desenvolver seu estudo, uma vez que ele acabará trabalhando apenas as organizações pontuais.

Analisaremos, em seguida, o conjunto dos exercícios propostos segundo os momentos de estudo:

1º momento: o momento do primeiro encontro se dá por meio de exercícios de aplicação do conceito de função em questões sobre homotetia. A primeira etapa do estudo, entretanto, compreende uma exposição do bloco tecnológico teórico apoiada em uma explicação introdutória vinculando homotetia ao estudo de função, à qual se segue uma definição formal de homotetia de centro c e razão positiva r.

2º momento: para o momento de exploração do tipo de tarefa e de construção de uma técnica inicial para resolvê-la, nota-se que o tipo de tarefa proposto nesse grupo de exercícios é formado por várias tarefas que requerem ora uma resolução pelo cálculo de razão e de medidas, ora aplicações do conceito de função e função bijetora. Para as tarefas de aplicação do conceito e classificação de função, espera-se que os alunos consultem as definições fornecidas no desenvolvimento do capítulo sobre funções e encontrem uma correspondência

entre esses conceitos e as tarefas propostas. Para as tarefas que envolvem medidas, espera-se que o aluno use a régua para medir e calcule razões compatíveis com a definição dada de homotetia de centro c e razão r.

3º momento: para esse momento de questionamento tecnológico, as tarefas estão relacionadas ao conceito de função e a justificativa da técnica aplicada pode ser encontrada no próprio texto do capítulo. Espera-se que os alunos encontrem as justificativas para as técnicas aplicadas nas tarefas relacionadas ao conceito de função, nos conhecimentos extraídos do estudo do capítulo sobre funções, e na exposição introdutória, que, seguidamente à vinculação entre homotetia e estudo de função, apresenta a definição formal de homotetia de centro c e razão r. Para as questões que envolvem medidas e cálculo de razões, o aluno deverá procurar as justificativas nas propriedades da semelhança de figuras.

4º momento: o momento de melhorar e de trabalhar a técnica pode ser observado nos exercícios em que são requeridos medições e cálculo da razão visando tanto à formação de novos conceitos, quanto à obtenção de generalizações de resultados, como ampliações e reduções vinculadas à razão dada.

5º momento: o momento da institucionalização é constatado especificamente em duas situações distintas. Após o enunciado do exercício 15, há a institucionalização dos resultados encontrados de forma empírica (ou intuitiva) pelos alunos e relacionados ao paralelismo de segmentos quando um é a imagem do outro. Ressalta-se, entretanto, que, na verdade, são os pontos de um segmento que têm imagens nos pontos do outro segmento. A institucionalização aparece novamente após o exercício 26, quando são apresentadas, a título de resumo, as principais conclusões sobre ampliação e redução de figuras, além da identificação da simetria central com a homotetia de razão –1. Além disso, é possível notar a institucionalização do conceito de aplicação e de aplicação bijetora nos exercícios 7 e 8, respectivamente.

Notamos, nessas primeiras reflexões sobre as atividades analisadas, que as tarefas propostas aos alunos são, como diz Chevallard, algo refinadas pela ausência de um vínculo maior entre os níveis de grande especificidade e os níveis superiores do domínio da geometria ou da disciplina matemática. Examinando a estrutura da organização matemática, notamos que, como nas simetrias, a não-existência de tarefas que possibilitem o emprego de técnicas alternativas podem comprometer o grau de completude da organização. Quanto aos exercícios citados (13, 14 e 15), acreditamos que, como não há uma tecnologia acessível ao aluno nesse momento do estudo, essas três tarefas devam ser consideradas como um tipo de tarefa isolado do conjunto dos exercícios propostos, a saber, aquele cujas tarefas são realizáveis por técnicas não relacionadas com nenhum elemento tecnológico (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p.14), muito embora esteja claro que o objetivo de tais exercícios seja não apenas reforçar o conceito de segmento como um conjunto de pontos, importante para a abordagem adotada, senão também ressaltar a propriedade do paralelismo entre a reta que passa por dois pontos e aquela que passa por suas respectivas imagens.

5.1.3 ANÁLISE DE ACORDO COM AS PRINCIPAIS DIFICULDADES DOS ALUNOS E CONFORME O MOMENTO HISTÓRICO EM QUE A OBRA FOI PRODUZIDA

Detendo-nos agora na análise das principais dificuldades apresentadas pelos alunos com base nas pesquisas examinadas no 3º capítulo do nosso trabalho, notamos que a abordagem adotada nessa obra é a de transformação enquanto aplicação pontual. Nos exercícios em que os autores se referem a figuras geométricas, a idéia de figura enquanto conjunto de pontos é às vezes explícita (“você sabe que uma figura geométrica é um conjunto de pontos [...]”, exercício 37, p.52), outras vezes implícita (“o triângulo abc é uma redução do triângulo a’b’c’?”, exercício 18b, p.130). Notamos que o nível requerido do aluno é, no livro, o interfigural, no qual existe uma transformação que leva em conta a presença simultânea de uma figura e de sua transformada em um plano concebido como um conjunto de pontos. Para

analisar esse aspecto da obra, nos concentraremos na pesquisa de Jahn (1998), que mostra a dificuldade dos alunos na apreensão da noção de transformação geométrica enquanto aplicação pontual. Para Jahn, a mudança da concepção global de figura para a concepção pontual constitui-se em um obstáculo epistemológico dada a inserção tardia, na história do pensamento matemático, do conceito de transformação. Isso se constitui em uma dificuldade para os alunos na passagem da concepção global de figura para a concepção pontual. É possível observar, no período da Matemática Moderna, uma tendência em imprimir um tratamento pontual nas quatro séries finais do curso correspondente ao atual Ensino Fundamental, como pode ser verificado nas orientações dadas nos Guias.

Consta das orientações dos Subsídios para Implementação do Guia Curricular de Matemática (SÃO PAULO, 1979, p.39) que o estudo das simetrias e de suas aplicações seja introduzido na 7ª série com o objetivo específico determinar as imagens de pontos de um plano por meio de uma simetria axial e de uma simetria central. Além disso, já é apontado nos subsídios para implementação do guia curricular de matemática (SÃO PAULO, 1979, p.23) como objetivo da 6ª série: “caracterizar uma transformação do plano nele mesmo como uma função definida e com valores nesse plano”. Aliás, o reconhecimento de uma figura geométrica enquanto um conjunto de pontos é um dos objetivos das noções básicas requeridas na 5ª série (SÃO PAULO, 1979, p.13). Notamos que, na obra *Matemática para o ginásio*, os autores optaram por transferir o estudo das simetrias para uma série posterior, colocando-o como uma aplicação de exercícios do estudo de funções. Tal opção pode sugerir que, de acordo com esses autores, a abordagem funcional para o estudo das transformações seria considerada prematura nas séries anteriores. Observamos, então, que, embora a orientação dos Subsídios prescreva uma abordagem funcional desde a 5ª série do atual Ensino Fundamental, a opção dos autores da obra é a de retardar o tratamento funcional dado ao estudo das transformações, se bem que tenham deixado clara a opção por trabalhar as figuras enquanto

um conjunto de pontos, como se pode notar no volume destinado à primeira série do antigo curso ginasial, em que se define a figura geométrica como um conjunto de pontos (LAMPARELLI, 1969, p.19).

5.2 CURSO MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE 1º GRAU

Essa obra foi produzida por Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Perelberg Liberman, Anna Averbuch e Franca Cohen Gotlied, integrantes do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA), e autoras do texto, e por Jacy Monteiro, o responsável pelo trabalho de supervisão e revisão de conteúdo. Antes de ser lançada, foi experimentada em algumas escolas de São Paulo e do Rio de Janeiro. Nos volumes dedicados às 5ª e 6ª séries, não há qualquer abordagem sobre transformações geométricas, tema que vai aparecer no livro da 7ª série, em que são apresentadas noções de pontos simétricos e de simetria axial. No livro da 8ª série, há um estudo sobre homotetias que precede o de semelhança e que é pré-requisito para este. Analisaremos, inicialmente, as tarefas propostas sobre simetrias e, em seguida, sobre homotetias.

5.2.1 SIMETRIA

O item Simetria é precedido de um estudo sobre circunferências em que são examinadas, entre outras matérias, a definição e as condições para que duas circunferências sejam tangentes ou secantes. A simetria axial é definida com o auxílio de dois *exercícios preliminares*, nos quais são examinados pontos simétricos em relação a uma reta por meio da construção de circunferências. A esses exercícios segue a definição de simetria axial, a partir da qual são propostos mais seis exercícios classificados como de *aplicação*. Novos exercícios são propostos, em que se exploram situações que procuram levar o aluno a descobrir algumas propriedades, tais como a eqüidistância entre pontos simétricos e o eixo, além do perpendicularismo entre a reta que passa por pontos simétricos e o eixo de simetria. Em

seguida, é proposto um quarto grupo de exercícios de aplicação. Todo o estudo apresenta, então, esta disposição: exercícios preliminares seguidos de exercícios de aplicação, formando um total de doze grupos de exercícios. Os primeiros problematizam conceitos e/ou propriedades, enquanto os segundos têm a finalidade de explorá-los. Além da definição de simetria axial – que é dada como uma função que transforma pontos do plano em seus simétricos em relação a uma reta –, e das propriedades mencionadas anteriormente, são abordados o conceito de figura simétrica, a propriedade da conservação das distâncias e as definições de mediatriz e bissetriz a partir de conceitos relacionados à simetria axial.

Para desenvolver a análise praxeológica, admitiremos tipos de tarefas de acordo com os grupos de exercícios preliminares ou de aplicação.

5.2.1.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre simetrias

O primeiro tipo de tarefa relaciona-se à definição de simetria axial. São propostos dois exercícios que envolvem a construção de circunferências secantes visando à definição de pontos simétricos em relação a uma reta e à construção de circunferências tangentes para mostrar que todo ponto do eixo de simetria é simétrico de si mesmo. Analisaremos o primeiro.

> Exercício 1
>
> a) Trace duas circunferências secantes de centros A e B. b) Assinale as intersecções destas circunferências e chame-as de P e P'. c) Assinale em $\overleftrightarrow{AB}$ três pontos quaisquer M, N e S. d) Trace as circunferências de centro M e raio MP, centro N e raio NP, centro S e raio SP. e) Todas estas circunferências passam por P'? f) Tente encontrar uma circunferência cujo centro é um ponto de $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que: P pertence à circunferência e P' não pertence à circunferência. Conseguiu?

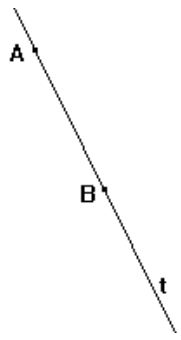


Figura 39 – AVERBUCH, 1975, p.143

Parte da técnica é fornecida no enunciado do exercício, mas, para resolvê-lo, o aluno deverá traçar, inicialmente, duas circunferências de tal forma que a soma das medidas dos seus raios seja maior que a medida do segmento AB, conforme resultado encontrado no item sobre circunferências (AVERBUCH, 1975, p.142). Nesse sentido, técnica e tecnologia parecem coincidir. Para justificar as perguntas feitas nos dois últimos itens, o aluno deverá recorrer ao estudo precedente sobre circunferências, no qual é possível observar que a intersecção de duas circunferências secantes é dada por um conjunto de dois pontos distintos.

O segundo tipo de tarefa será, em nossa análise, aquele da aplicação da definição de simetria axial, particularmente a definição de ponto simétrico, no qual as tarefas podem ser organizadas de acordo com a seguinte proposta: relativamente a uma reta, encontrar pontos simétricos a pontos dados. Sobre esse tipo de tarefa, há seis exercícios, dos quais analisaremos o segundo.

Exercício 2

Na figura, assinale os pontos P', Q' e R' simétricos de P, Q e R em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.

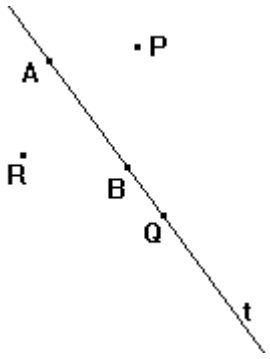


Figura 40 – AVERBUCH, 1975, p.145

Para desenvolver a tarefa proposta, o aluno poderá traçar uma circunferência com centro em B, passando por P (ou R), e outra com centro em A, passando também por P (ou R). O ponto P' (ou R') procurado está na intersecção, diferente de P (ou R), das duas circunferências. Para justificar sua resposta, a tecnologia a ser aplicada poderá ser encontrada nos exercícios preliminares, nos quais se registra a conclusão de que, "de um modo geral,

dadas duas circunferências secantes de centros A e B e de intersecção P e P', qualquer outra circunferência de centro em $\overleftrightarrow{AB}$ que passa por P passa por P'" (AVERBUCH, 1975, p.144). Quanto ao ponto Q, pode-se dizer que ele e seu simétrico coincidem, tomando em conta a conclusão precedente segundo a qual "todo ponto da reta AB é simétrico de si mesmo em relação a $\overleftrightarrow{AB}$" (AVERBUCH, 1975, p.144). Nesse caso, técnica e tecnologia coincidem.

Ao terceiro tipo de tarefa correspondem exercícios preliminares cujo objetivo é explorar situações geométricas que levem à conclusão de que o eixo de simetria é perpendicular ao segmento obtido, com extremidades em pontos simétricos passando por seu ponto médio. São propostos três exercícios sobre esse tipo de tarefa, dos quais analisaremos o segundo.

Exercício 2

a) Determine P' simétrico de P em relação à reta AB. b) Trace o segmento PP' e chame de M a intersecção $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{AB}$. c) Responda: m($\overline{PM}$) = m($\overline{P'M}$)? Por quê?

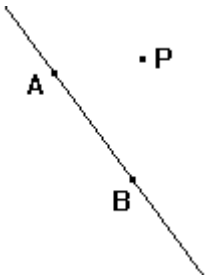


Figura 41 – AVERBUCH, 1975, p.147

A técnica disponível para desenvolver a primeira tarefa proposta consiste na construção de duas circunferências com centros em A e B, passando por P. A tecnologia que justifica a técnica aplicada encontra-se na propriedade segundo a qual qualquer circunferência que, com centro na reta AB, passe por P, também passa pelo seu simétrico. Para a segunda tarefa proposta, a técnica é fornecida no enunciado. Finalmente, para justificar que as medidas dos segmentos PM e P'M são iguais, deve-se recorrer ao resultado segundo o qual pontos simétricos eqüidistam de qualquer ponto do eixo de simetria, que foi institucionalizado após o exercício 1 desse mesmo grupo.

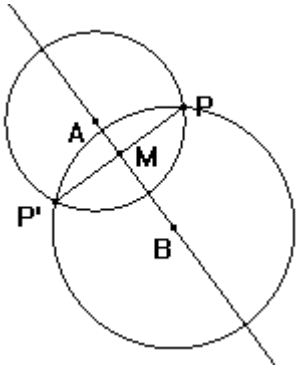


Figura 42 – solução do exercício 2, p.147

O quarto tipo de tarefa é composto de cinco exercícios de aplicação das propriedades observadas nos exercícios preliminares, anteriormente propostos. Segundo essas propriedades, o eixo de simetria é perpendicular ao segmento determinado por dois pontos simétricos, e a intersecção entre eixo e segmento se dá no ponto médio deste. As tarefas propostas nos exercícios desse grupo podem ser organizadas segundo um tipo de tarefa em que se pede para o aluno encontrar pontos médios de segmentos dados. Analisaremos, em seguida, o quarto exercício.

Exercício 4

a) Assinale os pontos médios dos segmentos AB, BC e CA e chame-os de M, N e P, respectivamente. b) Trace o triângulo MNP e verifique se os lados desse triângulo são paralelos aos lados do triângulo ABC.

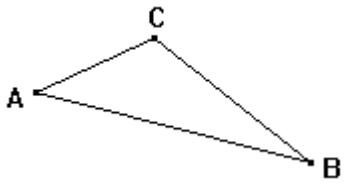


Figura 43 – AVERBUCH, 1975, p.150

Para determinar os pontos médios dos lados do triângulo ABC, o aluno deverá encontrar três eixos de simetria de forma que A seja simétrico a B, B a C e também que A e C sejam simétricos. Para isso, deverá recorrer à propriedade segundo a qual pontos simétricos eqüidistam do eixo de simetria. A técnica disponível é, nesse caso, traçar duas circunferências secantes, com raios de mesma medida, relativamente a cada lado do triângulo ABC. Os pontos M, N e P encontram-se nas intersecções entre eixo e lado do triângulo.

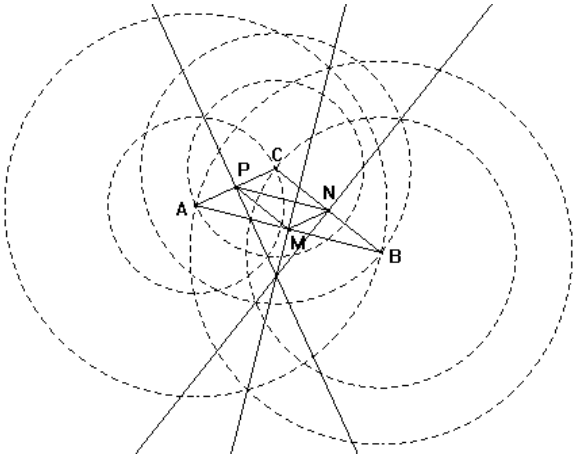


Figura 44 – solução do exercício 4, p.150

Quanto ao item b do exercício proposto, o aluno deverá aplicar teorema demonstrado anteriormente, segundo o qual, se P é o ponto médio de $\overline{AC}$ e N é o ponto médio de $\overline{CB}$, então $\overline{PN}$ é paralelo a $\overline{AB}$ (AVERBUCH, 1975, p.44).

No quinto tipo de tarefa, encontram-se exercícios preliminares que buscam explorar a propriedade segundo a qual a simetria axial conserva o alinhamento de pontos assim como distâncias. Sobre esse tipo de tarefa são propostos quatro exercícios, dos quais analisaremos o terceiro.

Exercício 3

a) Determine os simétricos dos pontos A, B, R e S em relação ao eixo t e chame-os de A', B', R' e S'. b) Trace os segmentos AB e A'B'. c) Trace as retas RS e R'S'.

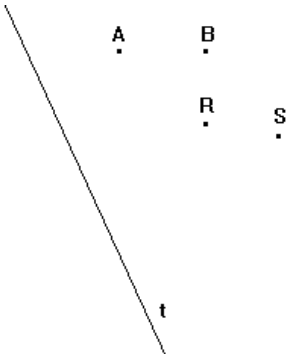


Figura 45 – AVERBUCH, 1975, p.151

Para resolver as tarefas propostas nesse exercício, o aluno deverá determinar os simétricos aos pontos A, B, R e S a partir da construção de circunferências com centros em

pontos da reta t, justificando a técnica aplicada de acordo com a propriedade segundo a qual toda circunferência traçada com centro no eixo de simetria, passando por A, também passa pelo simétrico de A. Para resolver as tarefas propostas nos itens b e c, a técnica é fornecida no enunciado do exercício.

No sexto tipo de tarefa, estão agrupados exercícios em que se pede para encontrar a simétrica de uma figura dada. Há um total de seis exercícios, dos quais analisaremos o sexto.

Exercício 6

Determine os simétricos das figuras em relação a t.

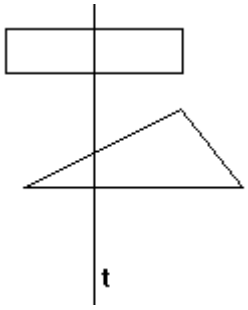


Figura 46 – AVERBUCH, 1975, p.153

Para desenvolver as tarefas propostas, o aluno deverá encontrar os pontos simétricos aos vértices dos polígonos aplicando a técnica da construção de circunferências com centros na reta t. A tecnologia de que dispõe para justificar a técnica aplicada é a de que a simetria axial mantém o alinhamento de pontos assim como as distâncias entre eles. Dessa forma, os segmentos simétricos aos lados dos polígonos comporão os lados dos polígonos simétricos ao retângulo e ao triângulo dados.

O sétimo tipo de tarefa é composto de um único exercício preliminar, no qual se pretende explorar o conceito de *figura simétrica* que seria aquela figura que possui um eixo de simetria (AVERBUCH, 1975, p.155).

Exercício preliminar

Trace os simétricos das figuras em relação ao eixo t.

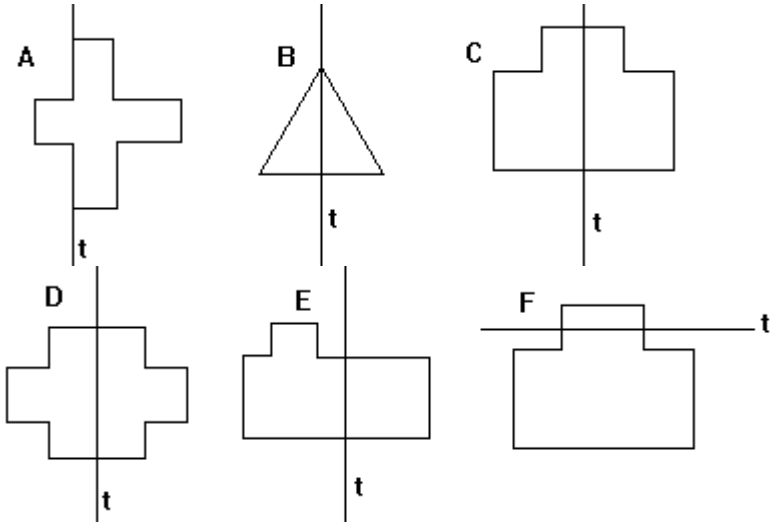


Figura 47 – AVERBUCH, 1975, p.154

Técnica e tecnologia disponíveis para a resolução da tarefa proposta compreendem, como no caso anterior, a prática de encontrar os pontos simétricos aos vértices dos polígonos por meio da construção de circunferências cujos centros pertençam ao eixo t. A justificativa pode ser encontrada na propriedade da manutenção do alinhamento de pontos e das distâncias. O objetivo do exercício é, entretanto, o de concluir que, "quando uma figura se transforma nela mesma através de uma simetria de eixo t, dizemos que essa figura é simétrica em relação ao eixo t" (AVERBUCH, 1975, p.155). No grupo de exercícios propostos em seguida, estão aqueles em que se pede para o aluno traçar, caso existam, eixos de simetria de figuras dadas.

Examinaremos, em seguida, dois tipos de tarefas nos quais se propõem exercícios de exploração e aplicação das definições de mediatriz e de bissetriz com base tanto nos conceitos envolvidos na simetria axial quanto nas propriedades desta.

Os exercícios que visam explorar ou aplicar o conceito de mediatriz podem ser organizados de acordo com um tipo de tarefa no qual se pede a construção do eixo de simetria de um segmento dado. Sobre esse tipo de tarefa, analisaremos o primeiro exercício.

Exercício 1

a) Dado o segmento AB, determine o eixo t em relação ao qual A e B são simétricos. b) Assinale os pontos P, Q, R e S sobre a reta t. c) Coloque = ou ≠ m($\overline{PA}$) ... m($\overline{PB}$); m($\overline{QA}$) ... m($\overline{QB}$); m($\overline{SA}$) ... m($\overline{SB}$); m($\overline{RA}$) ... m($\overline{RB}$). d) Assinale um ponto T não pertencente à reta t e responda: m($\overline{TA}$) = m($\overline{TB}$)?

Figura 48 – AVERBUCH, 1975, p.158

Técnica e tecnologia, nesse caso, não são diferentes das anteriores, embora seja objetivo do exercício formular a definição e as propriedades da mediatriz de um segmento. Após dois exercícios preliminares, é dada a seguinte definição de mediatriz: “o eixo de simetria do segmento AB é chamado mediatriz do segmento AB” (AVERBUCH, 1975, p.159). Notamos que esta é a primeira vez em que se menciona “eixo de simetria de um segmento” da mesma forma como foram trabalhados, anteriormente, eixos de simetria de figuras. Quanto às propriedades, são mencionadas duas: os pontos da mediatriz de um segmento são eqüidistantes de suas extremidades; a mediatriz intercepta o segmento em seu ponto médio. Aplicações do conceito e propriedades das mediatrizes são propostas em exercícios sobre o traçado de medianas de triângulos.

Para concluir, examinaremos o tipo de tarefa em que se pretende definir bissetriz de ângulo. Analisaremos, com essa finalidade, o exercício de número 3.

Exercício 3

a) Assinale o ponto A’ $\in$ t tal que: m($\overline{VA}$) = m($\overline{VA'}$). b) Marque um ponto P, diferente de V, tal que: m($\overline{AP}$) = m($\overline{A'P}$). c) Trace o eixo de simetria do ângulo AVA’. d) Seja {Q} = $\overline{AA'} \cap \overleftrightarrow{VP}$. e) Marque o ponto Q.

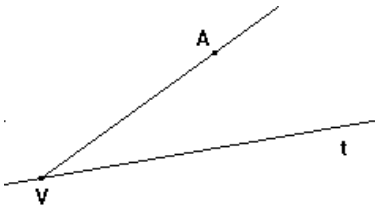


Figura 49 – AVERBUCH, 1975, p.166

A técnica para a resolução das atividades propostas é parcialmente fornecida no enunciado do exercício, como veremos em seguida. Para determinar A’, o aluno poderá recorrer à construção de uma circunferência com centro em V e raio igual à medida do segmento VA, justificando-a pela aplicação da propriedade segundo a qual todo ponto de uma

circunferência é eqüidistante do centro dela. Quanto ao item b, no qual se pede um novo ponto eqüidistante de A e A', pode-se construir a mediatriz do segmento AA' e tomar um ponto qualquer dessa reta. A tecnologia disponível, para esse caso, poderá ser encontrada na propriedade segundo a qual todos os pontos da mediatriz de um segmento eqüidistam das extremidades deste. Quanto aos três últimos itens, a técnica é fornecida no enunciado do exercício, porém a tecnologia para justificar a resposta do item c deverá ser a de que o eixo de simetria de um ângulo é a mediatriz do segmento determinado por dois pontos eqüidistantes de seu vértice.

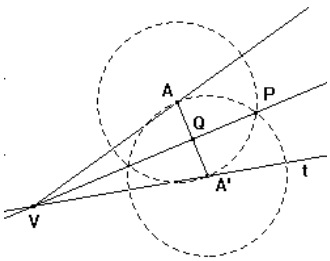


Figura 50 – solução do exercício 3, p.166

A definição de bissetriz, dada após o exercício anterior, é a seguinte: "a semi-reta VQ contida no eixo de simetria $\overleftrightarrow{VQ}$ chama-se bissetriz do ângulo AVA'" (AVERBUCH, 1975, p.166).

5.2.2 HOMOTETIA

O estudo das homotetias, assim como o das simetrias, não tem início com um texto introdutório, mas sim com um primeiro grupo de *Exercícios Preliminares*, nos quais o aluno é conduzido a fazer algumas construções de ampliação ou redução de figuras, prática com a qual ele chegará à definição de homotetia. Após a definição, é proposto um segundo grupo, o de *Exercícios de Aplicação*. A seguir, em um terceiro grupo de exercícios, são explorados elementos que levam o aluno a perceber as propriedades tanto da manutenção de ângulos congruentes quanto da conservação do alinhamento de pontos, tarefa acompanhada de exercícios de aplicação dessas propriedades. Em um quinto grupo, pretende-se explorar a

propriedade da igualdade entre a razão das medidas de dois segmentos correspondentes por uma homotetia e a própria razão da homotetia. A este, segue-se um sexto grupo de exercícios de aplicação da propriedade.

Para desenvolver a análise praxeológica, admitiremos, como foi feito para simetrias, tipos de tarefas de acordo com os grupos de exercícios preliminares ou de aplicação. À diferença da obra analisada anteriormente, em que o estudo da homotetia é um item do capítulo sobre semelhança, na presente obra ele é constituído por um corpo de atividades que levam ao conceito de figuras semelhantes. O estudo da semelhança, assim como o da homotetia, não é introduzido por meio de um texto, mas mediante exercícios preliminares que têm a finalidade de conduzir o aluno ao conceito de polígonos semelhantes. Pode-se dizer que boa parte dos exercícios propostos tem a finalidade de explorar condições de semelhança entre figuras geométricas planas como veremos em seguida.

5.2.2.1 Análise praxeológica dos exercícios sobre homotetias

Ao primeiro tipo de tarefa correspondem os exercícios que têm a finalidade de conduzir o aluno à definição de homotetia. São propostos dois exercícios, dos quais examinaremos o primeiro.

Exercício 1

Considere o triângulo ABC da figura. a) Assinale os pontos B’ e C’ de modo que $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$. b) Trace os segmentos $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'A'}$.

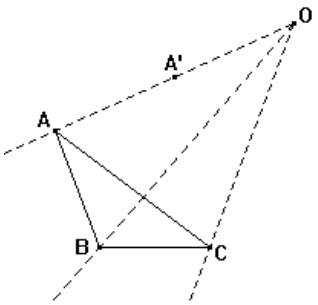


Figura 51 – AVERBUCH, 1977, p.97

Como $\frac{OA}{OA'}$ = 2, os pontos B’ e C’ deverão ser assinalados nos pontos médios dos segmentos OB e OC. Os pontos A’, B’ e C’ são vértices do triângulo A’B’C’, conforme a figura seguinte.

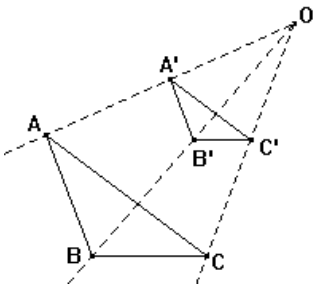


Figura 52 – solução do exercício 1

A técnica disponível é a de traçar o triângulo A’B’C’ a partir da localização de pontos de acordo com dados fornecidos no enunciado. Tecnologia e técnica coincidem nesse caso. O objetivo aqui não é encontrar uma tecnologia que justifique a construção, mas o de explorar o exercício no sentido de construir a definição de homotetia, que é dada em seguida e da seguinte forma:

> A correspondência que associa os pontos
> A $\mapsto$ A’
> B $\mapsto$ B’
> C $\mapsto$ C’, etc.
> de tal modo que
> $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$ = ... = k
> e OAA’, OBB’, OCC’, ... estejam alinhados chama-se HOMOTETIA de razão k e centro O. (AVERBUCH, 1977, p.98)

O segundo tipo de tarefa corresponde a aplicações da definição de homotetia, quando se pede para o aluno encontrar pontos correspondentes a outros por uma homotetia dada em três exercícios propostos, dos quais analisaremos o terceiro.

> Exercício 3
>
> a) Assinale o ponto A’ na reta AO tal que: $\frac{OA}{OA'} = \frac{2}{1}$. b) Assinale os correspondentes de B e C pela homotetia de centro O e razão $\frac{2}{1} = \frac{OA}{OA'}$. c) Desenhe os triângulos ABC e A’B’C’.

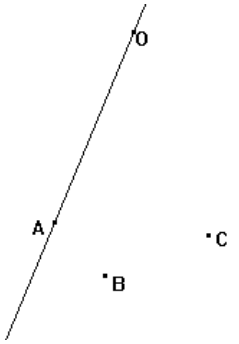


Figura 53 – AVERBUCH, 1977, p.99

A técnica disponível ao aluno não é diferente daquela aplicada na resolução dos exercícios preliminares, ou seja, A’ deverá ser marcado no ponto médio do segmento OA uma vez que a razão entre as medidas de $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ é 2. Da mesma forma, B’ e C’ estão nos pontos médios dos segmentos OB e OC, respectivamente. Por outro lado, a tecnologia difere dos exercícios preliminares, uma vez que se encontra na definição de homotetia fornecida anteriormente.

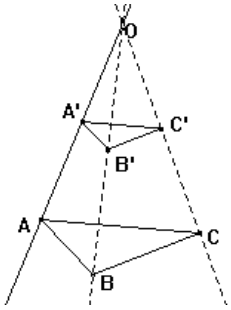


Figura 54 – solução do exercício 3, p.99

Quanto ao terceiro tipo de tarefa, pretende-se explorar nos exercícios as propriedades segundo as quais a homotetia conserva o alinhamento, mantém a medida dos ângulos e preserva o paralelismo de segmentos. Sobre esse tipo de tarefa, examinaremos os exercícios 2 e 3.

Exercício 2

a) Assinale o correspondente de A e B pela homotetia de centro O e razão $\frac{OA}{OA'} = \frac{5}{3}$. b) Trace $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. c) Marque um ponto C $\in$ $\overline{AB}$ e assinale o seu correspondente pela mesma homotetia. d) O ponto C’ pertence a $\overline{A'B'}$?

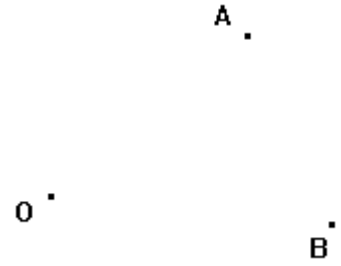


Figura 55 – AVERBUCH, 1977, p.100

A técnica disponível é, nesse caso, constituída de várias etapas: primeiro o aluno poderá traçar as semi-retas OA e OB; dividir, em seguida, o segmento OA, determinado, em cinco partes congruentes, e marcar A' e B' de tal forma que $\frac{OA}{OA'} = \frac{5}{3}$ e $\frac{OB}{OB'} = \frac{5}{3}$, quando concluirá a resolução do item a. Traçando $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, ele poderá marcar o ponto C em $\overline{AB}$ e determinar o ponto C' em $\overline{A'B'}$ de tal forma que $\frac{OC}{OC'} = \frac{5}{3}$, observando que C' pertence a $\overline{A'B'}$.

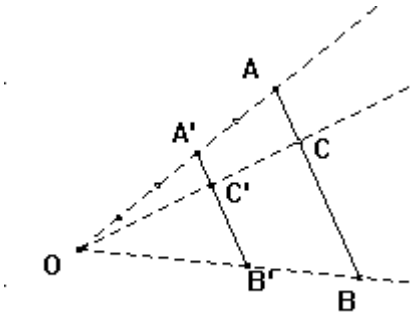


Figura 56 – solução do exercício 2, p.100

Exercício 3

Pela homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$, a) trace os correspondentes de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$, b) os ângulos ABC e A'B'C' são congruentes?

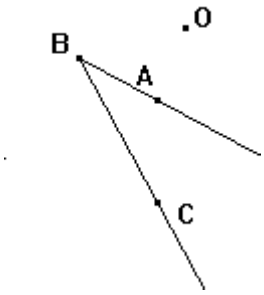


Figura 57 – AVERBUCH, 1977, p.101

A técnica disponível é, como no caso anterior, construir os pontos A’, B’ e C’, homotéticos de A, B e C, respectivamente, para, em seguida, medir os ângulos determinados com vértices em B e B’ para conferir a congruência.

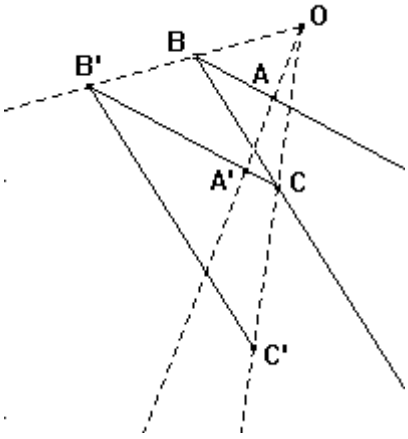


Figura 58 – solução do exercício 3, p.101

Para justificar as construções solicitadas tanto no exercício 2 como no 3, a tecnologia disponível encontra-se na definição de homotetia dada anteriormente.

O quarto tipo de tarefa é aquele em que se propõem ao aluno exercícios de aplicação das propriedades observadas nos exercícios anteriores, ou seja, conservação de alinhamento de pontos, bem como manutenção das medidas dos ângulos e do paralelismo de segmentos. Sobre esse tipo de tarefa, analisaremos o exercício 1.

Exercício 1

Assinale o correspondente da figura F pela homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$.

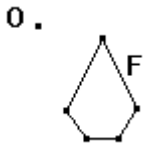


Figura 59 – AVERBUCH, 1977, p.102

Pela homotetia de razão $\frac{1}{2}$, o aluno deverá construir uma figura homotética à figura F, tomando para isso pontos da figura que o permitam fazer a construção. Nesse caso, ele poderá tomar os vértices do polígono e, aplicando a definição de homotetia, encontrar pontos correspondentes a cada um deles. Para justificar sua construção, poderá recorrer à tecnologia fornecida nas propriedades anteriormente examinadas, observando a manutenção das medidas dos ângulos e do paralelismo dos lados correspondentes nos dois polígonos.

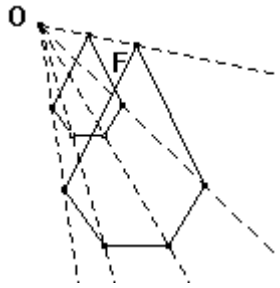


Figura 60 – solução do exercício 1, p.102

No próximo tipo de tarefa, propõem-se atividades que conduzem à exploração da propriedade segundo a qual medidas de segmentos que se correspondem por uma homotetia dada estão em razão igual à razão da homotetia. Para isso, é proposto um único exercício, que passaremos a analisar.

Exercício 1

a) Determine o correspondente de $\overline{AB}$ pela homotetia de centro O e razão k = $\frac{OA}{OA'}$.

b) Trace por B a paralela a $\overline{OA}$ e chame M a sua intersecção com $\overline{A'B'}$.

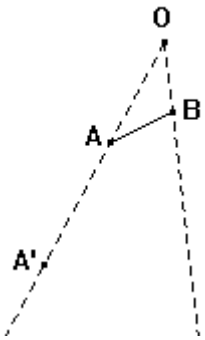


Figura 61 – AVERBUCH, 1977, p.106

c) Complete:

Afirmações	Justificativas
1) $\overline{AB} // \overline{A'B'}$	...
2) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$	...
3) $\overline{AA'} // \overline{BM}$	Por construção
4) $\frac{OB}{OB'} = \frac{A'M}{A'B'}$	Relação de Tales aplicada às retas OB e A'B' secantes em... cortadas pelas retas paralelas AA' e BM.
5) $\overline{A'M} \cong \overline{AB}$	...
6) $\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$	...
7) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$	...

Figura 62 – AVERBUCH, 1977, p.106

Para desenvolver a tarefa proposta no item a, o aluno deverá traçar por A' uma paralela ao segmento AB, encontrando B', homotético de B. A tecnologia que justifica a técnica aplicada encontra-se na propriedade segundo a qual a homotetia mantém o alinhamento de pontos. Quanto ao item b, deverá ser construída a paralela à reta AO, passando por B. A construção da paralela, neste e no caso anterior, poderá ser feita com o auxílio do compasso e poderá ser justificada pelo postulado da geometria euclidiana, segundo o qual, por um ponto fora de uma reta, passa uma única paralela a ela. No terceiro item proposto, nota-se o encaminhamento de uma demonstração, na qual a técnica coincide com a tecnologia.

Seguem as soluções dos itens a, b e c.

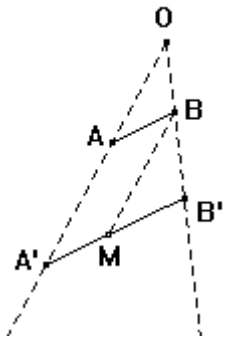


Figura 63 – solução do exercício 1 (a, b), p.106

Afirmações	Justificativas
1) $\overline{AB} // \overline{A'B'}$	Construção de segmentos homotéticos.
2) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$	Razão da homotetia.
3) $\overline{AA'} // \overline{BM}$	Por construção
4) $\frac{OB}{OB'} = \frac{A'M}{A'B'}$	Relação de Tales aplicada às retas OB e A'B' secantes em B' cortadas pelas retas paralelas AA' e BM.
5) $\overline{A'M} \equiv \overline{AB}$	Lados opostos de um paralelogramo.
6) $\frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$	Substituindo em (4) A'M por AB devido a (5).
7) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$	Aplicação da propriedade transitiva da igualdade de (2) e (6).

Figura 64 – solução do exercício 1c, p.106

No item c, a seqüência de afirmações e justificativas representa a demonstração em duas colunas de uma propriedade – se $\overline{AB}$ é o correspondente de $\overline{A'B'}$ por uma homotetia de razão k, então também $\frac{AB}{A'B'}$ = k (AVERBUCH, 1977, p.106) –, que é enunciada ao final do exercício proposto. Na primeira coluna, são apresentadas afirmações organizadas de tal forma que levam o aluno à demonstração requerida. A ele cabe completar, na segunda coluna, as justificativas correspondentes, usando para isso conteúdos da geometria plana, anteriormente estudados, além daqueles diretamente relacionados a homotetias e suas propriedades.

Sobre o próximo tipo de tarefa, que diz respeito à aplicação da propriedade enunciada, são propostos oito exercícios, dos quais analisaremos o quinto.

Exercício 5

a) Desenhe por uma homotetia um triângulo correspondente de ABC cujos lados sejam três vezes maiores. b) Como são os ângulos deste triângulo em relação aos ângulos do triângulo ABC?

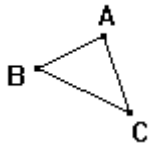


Figura 65 – AVERBUCH, 1977, p.108

Para resolver a tarefa proposta no item a, o aluno deverá marcar um ponto O no plano que será o centro da homotetia e, em seguida, determinar os pontos A', B' e C', de forma que $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{1}{3}$. A justificativa para a construção efetuada encontra-se exatamente na propriedade demonstrada no exercício anteriormente analisado. Quanto ao item b, o aluno deverá medir os ângulos dos dois triângulos e conjecturar sobre a congruência entre ângulos correspondentes. Nesse caso, tecnologia e técnica coincidem.

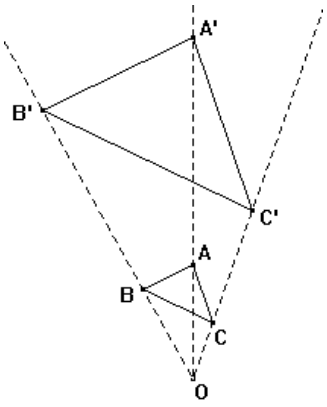


Figura 66 – solução do exercício 5a, p.108

Pode-se notar, nos exercícios analisados, a exploração de condições de semelhança de polígonos, cujo estudo será formalizado posteriormente pela aplicação de novos exercícios preliminares.

5.2.3 ANÁLISE DO CONJUNTO DE ATIVIDADES PROPOSTAS DE ACORDO COM OS MOMENTOS DE ESTUDO E CONFORME OS NÍVEIS DE DETERMINAÇÃO MATEMÁTICA

Para efetuar a análise do conjunto de atividades sobre simetrias e homotetias, devemos observar inicialmente que há grande semelhança no tratamento dado ao trabalho com os dois temas e que, por esse motivo, não analisaremos separadamente as séries de exercícios

relacionados a um e a outro. Nota-se que o momento do primeiro encontro se dá, nos dois casos, por meio de exercícios chamados *preliminares,* que têm a finalidade de explorar uma definição ou propriedade a ser introduzida. É possível observar, ainda, que o primeiro momento de estudo e o quinto (institucionalização) ocorrem quase simultaneamente. Isso significa que a institucionalização de definições e propriedades, observável a partir dos exercícios propostos, é feita imediatamente após a resolução destes, quer sejam preliminares ou de aplicação, quer estejam relacionados ao estudo de simetrias ou de homotetias.

O estudo das simetrias se apóia no de circunferências, que o precede. Será neste último item que o aluno deverá buscar parte das técnicas necessárias para desenvolver as tarefas propostas e, em alguns casos, também a tecnologia. O estudo da homotetia, por sua vez, será, ele próprio, o apoio necessário ao estudo da semelhança, proposto em seguida. Nesse sentido, há uma diferença, relativamente ao segundo momento de estudo, em simetrias e em homotetias. Ou seja, as técnicas que possam dar conta de resolver as tarefas propostas encontram-se, no caso da homotetia, ou fornecidas no enunciado, ou vinculadas à definição dada de homotetia.

O terceiro momento de estudo, ou seja, o de procurar uma tecnologia que justifique a técnica aplicada, aparece vinculado ao momento da institucionalização. São os conceitos e as propriedades já institucionalizados nos exercícios preliminares que deverão ser usados nas justificativas dos exercícios de aplicação. Deve-se registrar, entretanto, uma exceção feita ao exercício 1 de homotetia (AVERBUCH, 1977, p.106), no qual se pede uma demonstração. Para completar corretamente uma coluna com justificativas a afirmações feitas, o aluno deverá recorrer não somente a resultados institucionalizados no desenvolvimento do próprio estudo de homotetias, mas a outros da geometria plana, como é o caso do teorema de Tales e de propriedades dos paralelogramos.

Nota-se que o momento do trabalho da técnica, ou o quarto momento de estudo, permeia todas as atividades propostas, uma vez que é na técnica a ser empregada pelo aluno que deverá se apoiar a formação dos conceitos pretendidos pelas autoras. Ou seja, o estudo é todo ele elaborado de maneira que, a partir de construções geométricas desenvolvidas pelo próprio estudante, este mesmo consiga obter uma determinada definição ou propriedade que será imediatamente institucionalizada após cada grupo de exercícios. Nesse sentido, todas as tarefas estão relacionadas de acordo com algum elemento tecnológico bem definido anteriormente ou em vias de elaboração, o que faz com que não haja tarefas isoladas. Conforme Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p.14), a existência de tarefas isoladas pode comprometer a completude da organização proposta. Um outro indicador da completude da organização matemática local é a existência ou não de tipos de tarefas abertas, ou seja, aquelas em que os dados não estejam todos prefixados de antemão e nas quais os estudantes devam decidir, em face de uma situação determinada, quais devam ser utilizados (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004, p.15). Nesse sentido, não se notou a existência de tipos de tarefas abertas, o que pode comprometer a completude da organização matemática proposta.

Embora as definições adotadas – tanto para simetrias como para homotetias – tenham sido fornecidas como funções que transformam pontos do plano, todos os exercícios propostos se concentram nos respectivos temas (simetrias ou homotetias) e os vinculam a construções geométricas. Não se notou, portanto, uma relação maior dos níveis inferiores dos objetos e temas com os superiores do domínio da geometria ou da disciplina matemática.

5.2.4 ANÁLISE DE ACORDO COM AS PRINCIPAIS DIFICULDADES DOS ALUNOS E CONFORME O MOMENTO HISTÓRICO EM QUE A OBRA FOI PRODUZIDA

Na análise dos exercícios conduzida de acordo com as principais dificuldades apontadas pelas pesquisas examinadas anteriormente, merecem destaque o exercício 6 (AVERBUCH, 1975, p.153) e também o exercício preliminar da página 154. A concepção de

transformação geométrica adotada pelas autoras da obra em questão é pontual, ou seja, simetria ou homotetia são, nesse caso, aplicações de um conjunto de pontos do plano nele mesmo. Segundo Jahn (1998), há uma grande dificuldade dos alunos na passagem do estudo das transformações, no contexto da geometria sintética, para aquele desenvolvido no espaço enquanto um conjunto de pontos. Em vista disso, a mesma pesquisadora procura explorar condições que favoreçam a passagem de uma concepção a outra, ressaltando a possibilidade de ser o aluno, em um trabalho proposto no nível pontual, solicitado a encontrar imagens de figuras recorrendo à concepção global (JAHN, 1998, p.74). De todo modo, em um trabalho desenvolvido de acordo com a concepção global de figura, os alunos terão grandes dificuldades para determinar a simétrica se o eixo de simetria cortar a figura, conforme Jaime e Gutiérrez (1996, p.64).

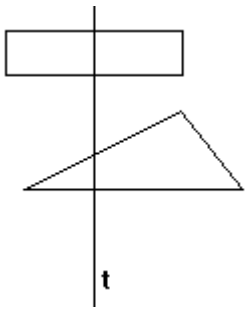


Figura 67 – AVERBUCH, 1975, exercício 6, p.153

Observando o triângulo da figura 67, notamos a presença de uma dupla dificuldade. Se os alunos viessem a recorrer à concepção global para, por um lado, encontrar a simétrica da figura dada, seria a concepção pontual que os levaria, por outro, à resolução correta do exercício, uma vez que o eixo é, nesse caso, uma reta que corta o objeto dado.

Uma importante característica dessa obra é a adoção da metodologia do estudo dirigido sugerindo uma participação ativa do estudante na sua aprendizagem em conformidade com os Subsídios para implementação dos Guias Curriculares (SÃO PAULO, atividades, 1979, p.9). Entretanto, diferentemente das recomendações feitas nos Subsídios, as autoras optam por apresentar um estudo de transformações geométricas apenas a partir da

sétima série, limitando-se a simetrias. Nos Guias, a recomendação é a de que esse estudo tenha início na sexta série com a simetria axial, e que prossiga na sétima com a central e com as translações, deixando para a oitava série as homotetias.

6º CAPÍTULO

ANÁLISE DAS OBRAS: PUBLICAÇÕES POSTERIORES AOS PCN

Neste capítulo, examinaremos as obras *Matemática hoje é feita assim* (BIGODE, 2000) e *Matemática para todos* (IMENES; LELLIS, 2002), produzidas no período correspondente à elaboração e à publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, na década de 1990.

6.1 MATEMÁTICA HOJE É FEITA ASSIM

Nessa obra, são abordadas simetrias e homotetias nos volumes da sétima e oitava séries, respectivamente. Há, no capítulo sobre simetrias, um texto introdutório intitulado "Simetrias e regularidades", seguido de outros sobre reflexão, rotação e translação. No texto sobre reflexão, é explicitada a propriedade da igualdade entre as distâncias de um ponto e de sua imagem ao eixo de simetria, e são examinados também eixos de simetria no quadrado, no retângulo, no triângulo eqüilátero e no hexágono regular.

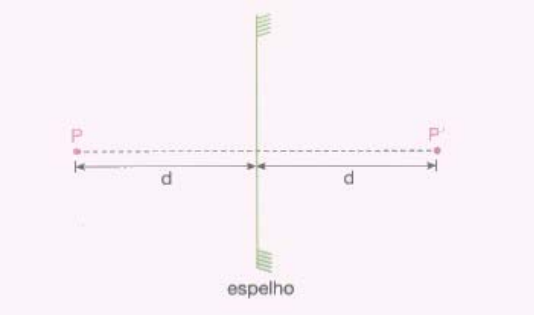


Figura 68 – P e P' são eqüidistantes do eixo (BIGODE, 2000, 7ª série, p.247)

No item correspondente à rotação, é explicitada a propriedade da manutenção das distâncias de pontos correspondentes ao centro da rotação, e, no da translação, a função do vetor definindo direção, distância e sentido do movimento.

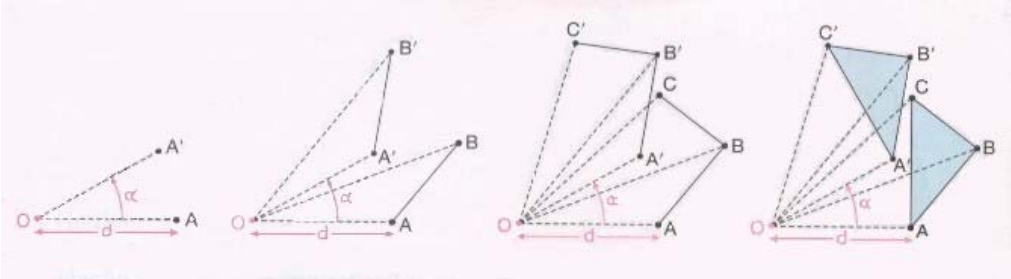


Figura 69 – A e A’ são eqüidistantes do centro O (BIGODE, 2000, 7ª série, p.249)

Há, ao longo do desenvolvimento do capítulo, a proposição de 14 exercícios envolvendo as três simetrias estudadas.

O estudo de homotetias é feito em um item do capítulo sobre semelhança, constante do livro da oitava série, e é introduzido por um texto no qual são definidos os conceitos tanto de centro de homotetia quanto de razão, sendo esta última apresentada como fator de ampliação (ou redução). O autor apresenta a homotetia como um método prático para se obterem a ampliação ou a redução de figuras, e usa o termo *transformação* para designar a homotetia como um tipo de transformação que amplia ou reduz figuras. São dados um ponto O e um triângulo ABC, do qual se orienta a construção de um triângulo A’B’C’ de forma que cada lado seja o dobro do seu correspondente em ABC. A construção do triângulo A’B’C’ é explicada a partir do traçado de semi-retas com origem em O, passando por A, B e C, nas quais serão marcados os pontos A’, B’ e C’ de tal forma que A’C’ = 2AC, A’B’ = 2AB e B’C’ = 2BC. Em outro exemplo, apresenta-se a construção do triângulo A”B”C”, com fator de redução $\frac{1}{2}$, na qual A” é o ponto médio de $\overline{OA}$, assim como B” e C” são pontos médios de $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, respectivamente. São propostos dois exercícios sobre o assunto.

6.1.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TAREFAS PROPOSTAS

Para executar a análise praxeológica dos exercícios propostos, nós os organizaremos em quatro tipos de tarefas: encontrar eixos de simetria (exercícios 1, 2, 4 e 5); construir frisas (exercícios 6, 7 e 13); identificar simetrias em logotipos, nas artes em geral, em objetos do

cotidiano, na arquitetura ou na natureza (exercícios 3, 9, 10, 11, 12 e 14); procurar em dicionários o significado de palavras relacionadas a transformações geométricas (exercício 8). Relativamente a homotetias, os exercícios 23 e 24 do volume da 8ª série podem ser agrupados em um único tipo de tarefa, ou seja, o de ampliar (ou reduzir) figuras.

Sobre o primeiro tipo de tarefa, em que se pede para encontrar eixos de simetria, analisaremos o exercício 4.

> Exercício 4
>
> Desenhe as figuras indicadas e trace os eixos de simetria. a) losango; b) triângulo eqüilátero; c) quadrado; d) triângulo isósceles; e) hexágono regular. (BIGODE, 2000, 7ª série, p.248)

A técnica disponível para o aluno é, nesse caso, desenhar as figuras e traçar retas de tal forma que os pontos que compõem cada polígono estejam dois a dois eqüidistantes do eixo traçado. Tecnologia e técnica, que coincidem nesse caso, são apresentadas no texto introdutório sobre reflexão, em que também são dados como exemplos os eixos de simetria no quadrado, no retângulo, no triângulo eqüilátero e no hexágono regular.

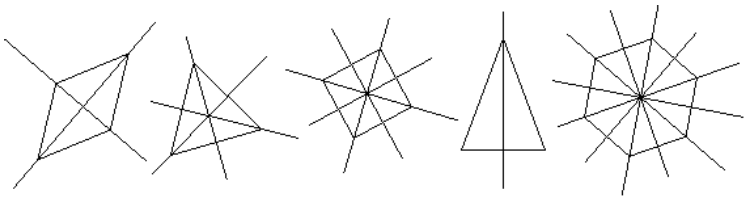


Figura 70 – Representação da solução do exercício 4

No segundo tipo de tarefa, estão os exercícios em que se pede para construir frisas, algumas das quais contendo também reflexão e outras isentas de qualquer simetria. Analisaremos, nesse caso, o exercício de número 6.

> Exercício 6
>
> Crie um motivo. Desenhe-o no papel quadriculado e gere uma frisa por reflexões sucessivas. (BIGODE, 2000, 7ª série, p.251)

Para realizar essa tarefa, o aluno deverá fazer um desenho livre no papel quadriculado, traçar um eixo de simetria em local de sua escolha e efetuar a reflexão da figura, a que o autor

chama *motivo da frisa*. A tecnologia disponível encontra-se, nesse caso, no desenvolvimento do texto constante do capítulo, texto no qual se explicam as propriedades da reflexão e da translação.

Reconhecer simetrias em logotipos, nas artes em geral, em objetos do cotidiano, na arquitetura ou na natureza, constitui o terceiro tipo de tarefa. Analisaremos, a esse respeito, os exercícios 9 e 10.

Exercício 9

Indique quais entre as figuras abaixo são simétricas.

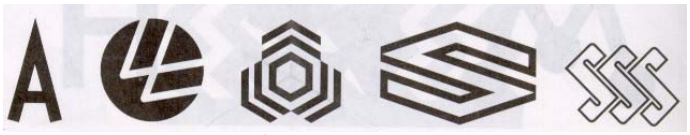


Figura 71 – BIGODE, 7ª série, 2000, p.252

Na primeira figura pode ser reconhecido um eixo de simetria vertical e, na segunda, um eixo inclinado. A terceira figura possui três reflexões e três rotações de 120^o. A quarta possui uma rotação de 180^o, localizando-se o centro da rotação na parte central da letra S. Quanto à quinta figura, é possível reconhecer uma faixa com translação, considerando-se que o motivo venha a repetir-se indefinidamente. A tecnologia está, nesse caso, disponível nos textos em que se explicam tanto as propriedades da eqüidistância ao eixo de pontos simétricos, no caso da reflexão, quanto as propriedades da eqüidistância ao centro de pontos simétricos, no caso da rotação, bem como as do comprimento, da direção e do sentido do vetor, no caso da translação.

Exercício 10

Pesquise em jornais ou revistas logotipos simétricos. Recorte-os e cole-os numa folha de papel sulfite. Classifique-os de acordo com os seguintes atributos:
a) com um único eixo de simetria
b) com 2 eixos de simetria
c) com 3 eixos de simetria
d) com 4 eixos de simetria
e) com 5 eixos ou mais
f) com simetria de rotação de 90^o
g) com simetria de rotação de 120^o
h) com simetria de rotação de 180^o

> i) com alguma simetria de rotação
> j) com simetria de translação (BIGODE, 7ª série, 2000, p.253)

Nesse exercício, é proposta uma tarefa aberta, no sentido de Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p.15), visto que, nesse tipo de tarefa, estudam-se situações nas quais os dados não estão inteiramente prefixados. As técnicas a serem aplicadas estão sugeridas, no texto, por meio de exemplos e mediante o recurso à equivalência das distâncias de pontos simétricos ao eixo de simetria, embora a multiplicidade de situações novas com as quais possam se deparar os alunos venha a exigir outras técnicas, como a da dobra da figura de acordo com um eixo imaginário. A tecnologia disponível encontra-se no texto e diz respeito à equivalência de distâncias.

Sobre o quarto tipo de tarefa, analisaremos o exercício 8.

> Exercício 8
>
> Procure num dicionário o significado das palavras: a) isometria; b) isométrico (BIGODE, 7ª série, 2000, p.252)

Nesse caso, a técnica consiste em procurar os significados das palavras no dicionário. Quanto à tecnologia, espera-se que os alunos relacionem as explicações disponíveis com a manutenção de distâncias observável em cada uma das simetrias estudadas.

No volume da 8ª série, encontra-se um tipo de tarefa que diz respeito a ampliações (ou reduções) de figuras. Analisaremos, em seguida, o exercício 23.

> Exercício 23
>
> Desenhe um triângulo ABC e marque um ponto O, que será o centro homotético da transformação. a) Encontre a ampliação A'B'C', obtida de ABC, com fator de ampliação K = 3; b) Encontre a redução A"B"C", obtida de ABC, com fator de redução k = $\frac{1}{2}$. (BIGODE, 8ª série, 2000, p.197)

Técnica e tecnologia, nesse caso, são fornecidas no próprio texto, em que há um exemplo de construção tanto da ampliação de um triângulo ABC com fator K = 2, quanto da redução do mesmo triângulo com fator k = $\frac{1}{2}$.

6.1.2 Análise do conjunto de atividades propostas de acordo com os momentos de estudo e conforme os níveis de determinação matemática

Segundo Chevallard, “um momento de estudo realiza-se geralmente várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episódios que irrompem no decorrer do tempo” (CHEVALLARD, 1999, p.250, tradução nossa). De maneira geral, o momento do primeiro contato com os tipos de tarefas se dá, nessa obra, por meio de um texto introdutório ao assunto, quer este trate de reflexões ou rotações, quer discorra sobre translações ou homotetias. Entretanto, como as tarefas propostas (particularmente aquelas sobre simetrias) têm alto vínculo com níveis superiores de determinação matemática, o momento do primeiro contato pode ocorrer ao longo do desenvolvimento de várias tarefas. No exercício 10, por exemplo, ao se deparar com situações novas em sua busca por simetrias em logotipos variados, o aluno poderá encontrar figuras que envolvam combinações de mais de uma simetria, o que poderá se constituir em novo primeiro encontro, diferente daquele fornecido pelo texto. Tipos de tarefas – tal como o proposto no exercício 10 – nos quais os estudantes devem decidir, diante de uma situação determinada, que dados devem utilizar, fazem parte do que, em Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p.15), chama-se tarefa matemática aberta, o que, segundo esses autores, é um dos critérios para determinar o grau de completude de uma organização matemática local. A organização matemática será tanto mais completa quanto maior for sua condição de abordar questões abertas.

O momento da exploração dos tipos de tarefas e da elaboração de uma técnica que possa resolvê-los, assim como o momento da construção de um ambiente tecnológico teórico que justifique a técnica aplicada, a saber, o segundo e o terceiro momentos de estudo, parecem coincidir nos exercícios propostos. Para resolver as tarefas, o aluno é levado a examinar pontos eqüidistantes de retas e (ou) de um outro ponto considerado como centro, ou definir distâncias para compor frisas, usando elementos tecnológicos para chegar à técnica de resolução.

O quarto momento de estudo é, segundo Chevallard (1999, p.253), aquele que deve melhorar a técnica, a fim de que ela adquira maior eficácia e confiabilidade. Não se notou, nas tarefas analisadas, preocupação com o trabalho da técnica. Por outro lado, o quinto momento de estudo, aquele da institucionalização, "que tem como objetivo precisar o que é exatamente a organização matemática elaborada" (CHEVALLARD, 1999, p.253, tradução nossa), pode ser reconhecido na tarefa proposta no exercício 8. Ao solicitar que o aluno procure os significados das palavras *isometria* e *isométrico*, pode-se considerar a intencionalidade do autor em fazer com que o estudante conclua que reflexão, rotação e translação são transformações geométricas que preservam medidas. Fica faltando, entretanto, a institucionalização correspondente a homotetias.

Conforme exemplificado anteriormente, notou-se, no conjunto das tarefas propostas, um alto vínculo destas com os níveis superiores de determinação matemática. Os tipos de tarefas proporcionam uma boa mostra de situações matemáticas que, relativamente a isometrias, são encontradas no cotidiano, nas artes e na natureza. Entretanto, é possível que a ausência de uma relação maior entre os níveis superiores e os níveis dos objetos e temas venha comprometer a completude da organização matemática local. Não se observou, nos tipos de tarefas analisados, uma proposta clara de trabalho com reflexão, rotação ou translação enquanto objetos. Uma vez que não há, nos tipos de tarefas propostos, uma necessidade efetiva de efetuar medições ou construções geométricas com o uso de instrumentos como régua, compasso ou transferidor, pode-se dizer que as técnicas explicadas nos correspondentes textos não chegam a ser efetivamente aplicadas nos exercícios propostos. Esse trabalho ficou reservado apenas para as homotetias no volume destinado à 8ª série.

6.1.3 Análise de acordo com as principais dificuldades dos alunos e conforme o momento histórico em que a obra foi produzida

De acordo com a organização, feita anteriormente, das tarefas propostas em tipos de tarefas, é possível notar que, na maioria dos exercícios, pede-se que o aluno identifique simetrias. Construções ficam restritas a frisas e homotetias. Segundo Jaime e Gutiérrez (1996, p.61-62), os erros mais freqüentes dos estudantes, relativamente à reflexão, são conseqüências da formação de conceitos errados que se traduzem tanto na falta de eqüidistância ao eixo de pontos simétricos quanto na ausência de perpendicularidade do segmento que une dois pontos simétricos e o eixo de simetria. Quanto à rotação, para compreender e usar corretamente esse conceito, é necessário que o estudante faça, mediante um reconhecimento global das figuras, uma estimativa não só da amplitude do ângulo senão também da eqüidistância de pontos correspondentes ao centro da rotação, visto ser mais fácil girar uma figura com centro de rotação interno do que uma com centro de rotação externo (JAIME; GUTIÉRREZ, 1996, p.66-67). Notamos que, na obra analisada, os exercícios propostos aos alunos sobre reflexão ou rotação se concentram no nível da formação dos conceitos uma vez que não há solicitações para construção da imagem de uma figura seja por reflexão ou por rotação. A variedade de questões abertas que procuram levar o aluno a formular conceitos poderia ajudar a minimizar erros em tarefas posteriores baseadas em construções de figuras simétricas, tarefas que não chegaram, porém, a ser propostas.

Nos PCN, não há uma orientação detalhada a respeito do trabalho com transformações geométricas. De acordo com os Parâmetros, “as atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias)”, ou “da noção de semelhança de figuras planas (homotetias)” (BRASIL, 1998, p.86). Uma leitura que poderia ser feita no que diz respeito às orientações dos Parâmetros sobre as transformações geométricas é exatamente a que pode ser observada na presente obra, ou seja, a que propõe

tarefas de exploração tendo em vista a formação dos conceitos de congruência e de semelhança de figuras.

6.2 MATEMÁTICA PARA TODOS

Essa obra foi publicada após os Parâmetros Curriculares Nacionais e, como a anterior, repõe as transformações geométricas nos planos de aula do Ensino Fundamental.

Como seus autores abordam as transformações ao longo das quatro séries, nossa análise praxeológica será feita inicialmente por série. Para cada série, procuraremos organizar os exercícios em estudo de acordo com tipos de tarefas e examinaremos, relativamente a cada um deles, a tecnologia e a técnica correspondentes a algumas tarefas. Em seguida, passaremos a analisar os momentos de estudo observáveis no conjunto dos exercícios propostos às quatro séries, assim como a correlação entre os níveis superiores e os inferiores de determinação matemática. O conjunto dos exercícios propostos será ainda analisado de acordo com as principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante a aprendizagem das transformações geométricas.

6.2.1 QUINTA SÉRIE

No livro da 5ª série, os autores apresentam, no capítulo sobre simetrias, um tópico voltado à simetria nas formas, no qual é abordada apenas a simetria axial. Há ainda, no mesmo capítulo, um outro tópico sobre números simétricos. Nós nos deteremos na análise dos exercícios sobre simetrias das formas, considerando-se que o objetivo do nosso trabalho é examinar transformações geométricas. O capítulo é introduzido por um texto seguido de questões de interpretação. Antes de propor 14 exercícios sobre simetria axial, é proposta ao aluno uma *ação* pela qual se espera que ele preencha uma tabela com o número de eixos de simetrias de quadriláteros, triângulos e hexágonos, a partir de uma experiência desenvolvida dobrando polígonos recortados. A simetria axial é explicada no texto com base em duas

situações. Uma delas é a dobra de uma figura de acordo com uma linha que seria o seu eixo de simetria; a outra é aquela na qual um espelho funcionaria como um eixo de simetria entre uma figura e sua imagem.

6.2.1.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TAREFAS PROPOSTAS

Para desenvolver a análise praxeológica dos exercícios propostos no livro da quinta série, agruparemos tais exercícios de acordo com quatro tipos de tarefas. No primeiro tipo de tarefa, a saber, “encontrar eixos de simetria em figuras dadas”, podem ser agrupados os exercícios 1, 2, 3, 7, 8, 9 e 12. No segundo tipo de tarefa, que seria o de “construir a figura simétrica a uma figura dada”, incluem-se os exercícios 4, 5 e 14. O terceiro tipo de tarefa é aquele que “envolve simetria com espelhos” (exercícios 6, 10 e 11), e o quarto trata da “produção de um texto síntese” (exercício 13). A técnica a ser aplicada pelo aluno na resolução dos exercícios é, na maioria dos casos, a de efetuar uma dobra da figura e a tecnologia disponível ao aluno nesse nível de ensino está vinculada à técnica aplicada fornecida pelo texto.

Relativamente ao primeiro tipo de tarefa, ou seja, aquele em que “devem ser encontrados eixos de simetria em figuras dadas”, analisaremos os exercícios 1 e 2.

Exercício 1

Em quais figuras a reta vermelha é eixo de simetria?

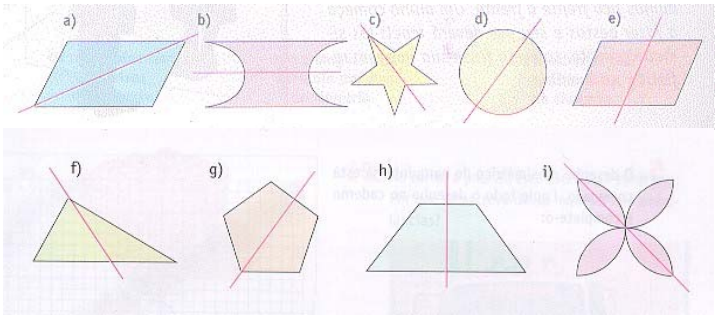


Figura 72 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.202

É possível reconhecer que a reta vermelha é eixo de simetria nas figuras b, c, d, g, h, i, uma vez que, dobrando a figura ao longo da reta, uma das partes encaixa-se perfeitamente

sobre a outra. A tecnologia disponível ao aluno é aquela segundo a qual uma figura dobrada ao longo de uma reta, deixando uma das partes perfeitamente encaixada sobre a outra, faz da reta um eixo de simetria.

Exercício 2

Observe a planta da igreja de Jumièges, na França. Ela foi consagrada em 1067, após 30 anos de construção. Encontre seu eixo de simetria. Dica: para obter o eixo, faça um esboço, isto é, um desenho da planta da igreja à mão livre.

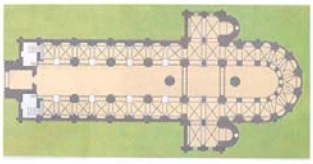


Figura 73 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.202

Da mesma forma que no exercício anterior, é possível reconhecer que a planta da igreja possui um eixo de simetria horizontal, uma vez que, dobrando a figura pelo eixo de simetria, uma das partes encaixa-se perfeitamente sobre a outra.

Com relação ao segundo tipo de tarefa, de acordo com o qual deve-se “construir a figura simétrica a uma figura dada”, analisaremos em seguida os exercícios 4 e 5.

Exercício 4

Numa folha de papel quadriculado, copie o desenho do barquinho e o eixo de simetria e. Depois, desenhe a figura simétrica.

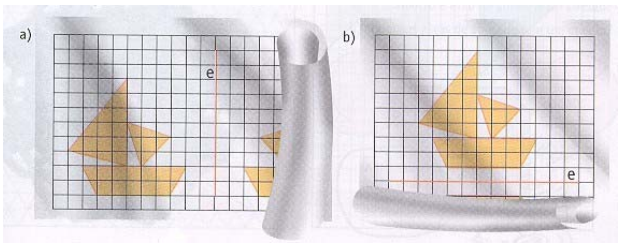


Figura 74 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.203

Aplicando a técnica de efetuar uma dobra da figura, fornecida no texto introdutório, e com o auxílio da malha quadriculada, espera-se que o aluno construa figuras simétricas às figuras dadas. Contando no quadriculado a quantidade de quadradinhos existentes entre os vértices da figura e o eixo de simetria, é possível encontrar os pontos correspondentes da

figura simétrica. Uma *transformação* T no plano é uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto P_1 = T(P) do plano, chamado sua imagem por T. A simetria axial é uma transformação na qual as distâncias de pontos correspondentes, como P e P_1, ao eixo de simetria são constantes. Para o aluno, entretanto, a tecnologia disponível para desenvolver a tarefa proposta é, como nos casos anteriores, a da dobra da figura.

Exercício 5

O desenho do simétrico do barquinho já está começado. Copie todo o desenho no caderno e complete-o.

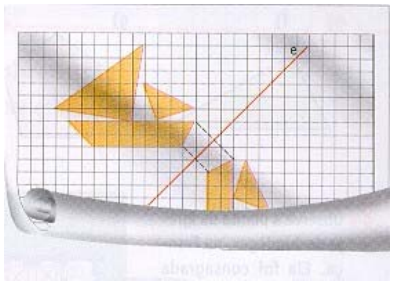


Figura 75 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.204

A técnica e a tecnologia aplicadas aqui são as mesmas do exercício 4, mas se deve observar que as distâncias deverão ser calculadas, neste caso, pela contagem das diagonais dos quadradinhos.

No que se refere ao terceiro tipo de tarefa, ou aquele em que os exercícios “envolvem simetrias em espelhos”, analisaremos o exercício de número 6. Em tal caso, o espelho deverá funcionar como um tipo de “eixo” de simetria, de acordo com o texto introdutório do capítulo.

Exercício 6

Qual seria a imagem da pilha de cubos se o espelho não estivesse quebrado?

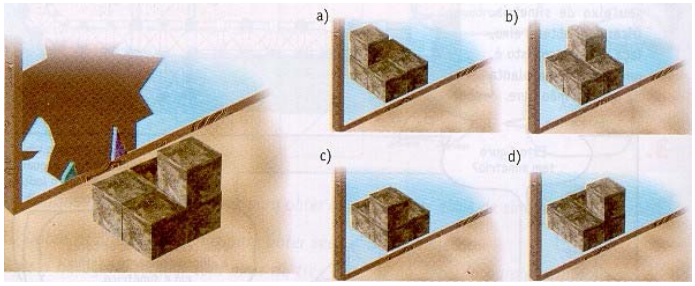


Figura 76 – IMENES e LELLIS, 5ª série, 2002, p.204

A imagem b é aquela que representa a pilha de cubos no espelho, uma vez que, com a aproximação da figura original ao espelho, é possível notar que as posições dos cubos devem estar invertidas em relação ao objeto concreto. A aproximação, nesse caso, poderá ter uma função análoga à da dobra do papel aplicada como técnica nos casos anteriores.

Quanto ao quarto tipo de tarefa, pede-se ao aluno para redigir um texto conforme solicitado no exercício que passaremos a analisar.

> Exercício 13
>
> Redija um texto, resumindo, com suas palavras, as propriedades dos quadriláteros que conhece. Você pode organizá-lo desta maneira: comece a escrever sobre o retângulo, explicando como são seus lados, isto é, se há lados iguais, se eles são paralelos, se são perpendiculares. Depois, fale sobre seus ângulos, quais são os eixos de simetria e quantos são. Faça desenhos para ilustrar seu texto. Em seguida, você pode escrever sobre o losango, o paralelogramo e outros quadriláteros. (IMENES; LELLIS, 5ª série, 2002, p.206)

Por meio da construção de quadriláteros e de dobras efetuadas de acordo com possíveis eixos de simetria, devem-se observar elementos coincidentes nessas figuras a partir dos quais propriedades de quadriláteros poderão ser organizadas. Técnica e tecnologia, aqui, estão ainda vinculadas à dobra da figura original.

6.2.2 SEXTA SÉRIE

O estudo das simetrias no livro da 6ª série está inserido em um capítulo sobre construções geométricas. A simetria axial é, por um lado, retomada pela indicação de que, a partir da dobra do papel, pode-se verificar que a reta que contém uma das diagonais do losango é um eixo de simetria – reta essa que passa pelo ponto médio da outra diagonal –, e, por outro, pela instrução de que, para o caso particular do losango, o eixo de simetria é mediatriz de segmentos determinados pelos pontos simétricos da figura. A obra apresenta também a simetria axial originada de um giro de 180^{o} para fora do plano em que a figura se encontra, e discute eixos de simetria dos polígonos regulares. A rotação é definida apenas para os polígonos regulares, e o sentido adotado é o horário.

6.2.2.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TAREFAS PROPOSTAS

Para desenvolver essa análise, agrupamos os exercícios de acordo com cinco tipos de tarefas: “verificar se uma reta é ou não eixo de simetria de uma figura” (exercícios 26 e 31); “verificar de quantos graus é a simetria rotacional de uma figura” (exercício 27); “construir uma figura conhecendo seus eixos de simetria” (exercícios 28, 32 e 35); “construir uma figura conhecendo as propriedades da simetria de rotação” (exercícios 30, 34 e 36); “observar propriedades de uma figura a partir de seus eixos de simetria” (exercícios 29 e 33).

Para o primeiro tipo de tarefa, segundo o qual deve-se “verificar se uma reta é ou não eixo de simetria de uma figura”, há três técnicas disponíveis ao aluno fornecidas no texto: dobrar a figura ao longo da reta; verificar se a reta é mediatriz de segmentos determinados por pontos da figura situados em semiplanos opostos em relação à reta; fazer um giro de 180^o para fora do plano da figura verificando se a figura mantém ou não a forma inicial. Como tecnologia, o aluno poderá recorrer à propriedade do eixo de simetria enquanto mediatriz do segmento determinado por dois pontos simétricos. Sobre este tipo de tarefa, examinaremos o exercício 26.

Exercício 26

> Em quais figuras a reta e é eixo de simetria? Dica: se A e B são pontos simétricos, o eixo e divide AB ao meio e é perpendicular a ele.

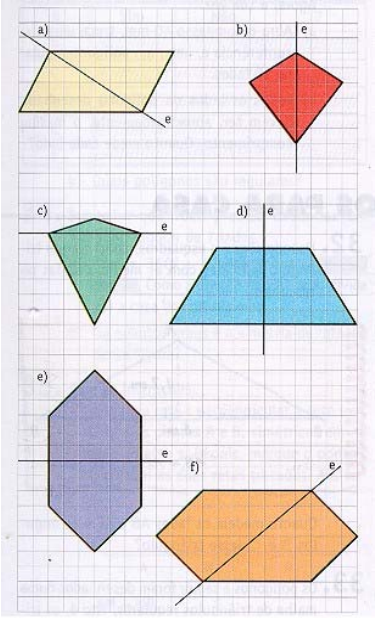


Figura 77 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.35

Examinando vértices em semiplanos opostos em relação à reta, pode-se verificar que a reta e é eixo de simetria em b, d, e, uma vez que ela é mediatriz de todo segmento determinado por dois pontos simétricos da figura.

No segundo tipo de tarefa, a saber, "verificar de quantos graus é a simetria rotacional de uma figura", encontram-se as tarefas propostas no exercício 27. Para resolvê-las, a técnica disponível ao aluno a partir do texto apresentado é dividir 360^{o} pelo número de vértices da figura para o caso dos polígonos regulares. Para as demais figuras, a técnica será a de fazer algumas tentativas buscando giros que, no sentido horário, deixem a figura numa posição idêntica à original. Para esse segundo tipo de tarefa, tecnologia e técnica coincidem, considerando-se o texto fornecido ao aluno.

Exercício 27

Todas as figuras a seguir têm simetria rotacional em relação a um centro de rotação indicado por um ponto vermelho. De quantos graus é a simetria rotacional em cada caso?

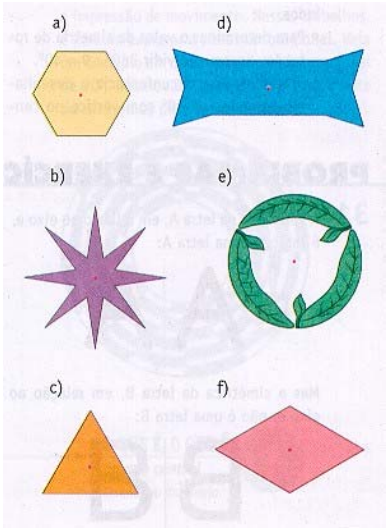


Figura 78 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.35

De acordo com o texto fornecido, a técnica disponível ao aluno no caso das figuras a e c é a de dividir 360^{o} pelo número de vértices do polígono. Para os demais casos, ele deverá efetuar, no sentido horário, um giro da figura com centro no ponto vermelho dado no enunciado até que a figura fique numa posição que aparentemente seja idêntica à original. Tecnologia e técnica coincidem nesse caso, uma vez que nenhuma propriedade foi fornecida até então.

Analisaremos, em seguida, o exercício 32, que está relacionado com o terceiro tipo de tarefa, qual seja, "a construção de uma figura a partir de seus eixos de simetria e das propriedades relacionadas a esses eixos". Nesse caso, parte da técnica é fornecida no próprio enunciado dos exercícios, e a tecnologia disponível ao aluno diz respeito à propriedade do eixo de simetria enquanto mediatriz do segmento determinado por dois pontos simétricos da figura.

Exercício 32

Usando régua e esquadros, construa um triângulo isósceles com as medidas dadas no rascunho. Quanto medem os lados AB e AC e os ângulos B e C desse triângulo?

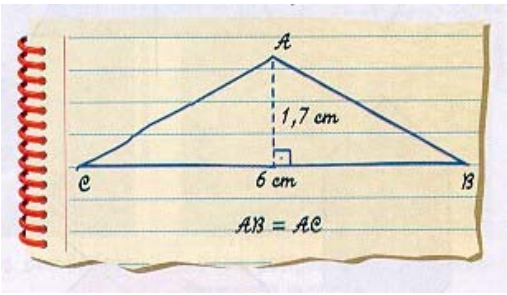


Figura 79 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.36

Para a tarefa de construção proposta nesse exercício, parte da técnica é fornecida no esboço: traçam-se duas retas perpendiculares. Como AC = AB, os pontos C e B são simétricos em relação ao eixo de simetria que contém o segmento perpendicular ao lado CB. Sendo assim, a perpendicular intercepta o lado CB no seu ponto médio, o que é suficiente para determinar os pontos C e B. Feito isso, marca-se o ponto A a uma distância de 1,7 cm do lado CB e traçam-se os lados AC e AB (cujas medidas podem ser determinadas com o auxílio de uma régua) e os ângulos B e C (cujas medidas podem ser encontradas com o uso de um transferidor).

O quarto tipo de tarefa diz respeito à construção de uma figura conhecendo propriedades da simetria de rotação nos polígonos regulares. As tarefas vinculadas a esse tipo de tarefa estão nos exercícios 30, 34 e 36. Analisaremos, em seguida, o exercício 30.

Exercício 30

> Vamos desenhar um polígono regular de 9 lados. Para determinar o valor da simetria de rotação, devemos dividir $360^o \div 9 = 40^o$. Traçamos uma circunferência e desenhamos ângulos de 40^o com vértice no centro. Marcamos os pontos em que os lados dos ângulos encontram a circunferência. Ligamos cada ponto ao seu vizinho, até obter os 9 lados do polígono.
> Agora é sua vez:
> a) Abra o compasso 40 mm, trace uma circunferência e, nela, um polígono regular de 10 lados. b) Todos os lados do polígono desenhado devem ter, aproximadamente, o mesmo comprimento. Quanto mede cada lado?

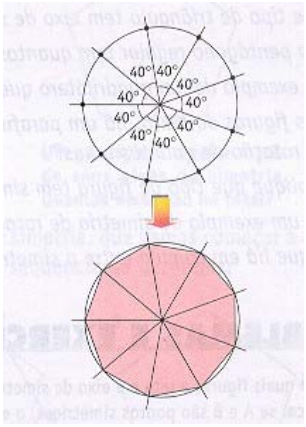


Figura 80 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.36

Para a tarefa proposta nesse exercício, a técnica foi fornecida no enunciado. Dividindo 360^o por 10, encontra-se a medida de cada ângulo central do decágono. As medidas dos lados podem ser encontradas com o auxílio de uma régua. A tecnologia que justifica a técnica aplicada é aquela sugerida no texto, segundo a qual polígonos regulares são sempre inscritíveis, têm centro de rotação no centro da circunferência circunscrita e o número de rotações coincide com o número de lados do polígono.

Quanto às tarefas agrupadas de acordo com o quinto tipo de tarefa – que é aquele em que devem ser observadas propriedades de uma figura a partir dos seus eixos de simetria –, seus representantes são os exercícios 29 e 33. Para esses exercícios, tecnologia e técnica estão muito próximas, uma vez que as respostas dependem do discurso tecnológico a ser elaborado. Analisaremos, em seguida, os dois exercícios mencionados.

Exercício 29

Este é um triângulo com um único eixo de simetria. a) o triângulo é isósceles ou escaleno? Por quê? b) o ângulo B mede 70^o. Quanto mede o ângulo C? c) Quanto mede o ângulo M?

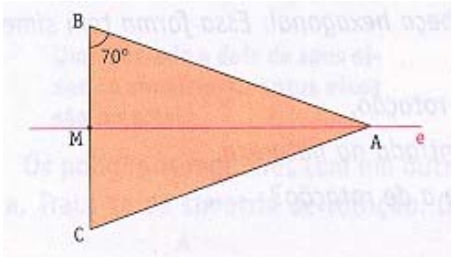
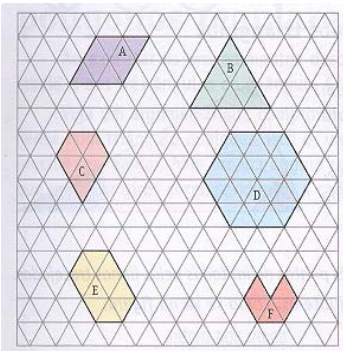


Figura 81 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.36

Como e é eixo de simetria, os pontos B e C são simétricos e o eixo é mediatriz do segmento BC, então o ângulo M é reto. Da mesma forma, e é mediatriz de qualquer segmento determinado por um ponto do segmento AB e seu correspondente no segmento AC. Portanto, o triângulo ABC é isósceles e o eixo de simetria o divide em dois triângulos congruentes, o que faz com que os ângulos B e C tenham a mesma medida.

Exercício 33

Os polígonos a seguir foram desenhados numa malha de triângulos regulares, isto é, os triângulos da malha têm os três lados iguais e os três ângulos medem 60^{o}. a) No caderno, complete a tabela. b) Quais polígonos são regulares?



Polígono	Tem lados iguais?	Tem ângulos iguais?	Número de eixos de simetria
A	Sim	Não	2
B			
C			
D			
E			
F			

Figura 82 – IMENES e LELLIS, 6ª série, 2002, p.37

O polígono A tem dois eixos de simetria, lados iguais, mas os ângulos não são iguais. B tem três eixos de simetria, lados e ângulos iguais. C tem um eixo de simetria, mas não tem ângulos nem lados iguais. D tem seis eixos de simetria, lados e ângulos iguais. E tem dois eixos de simetria, ângulos iguais, mas os lados não são iguais. F tem um eixo de simetria, lados iguais, mas os ângulos não são iguais. São regulares os polígonos B e D. Uma técnica disponível para o aluno é, nesse caso, procurar quais são as retas mediatrizes de todo segmento determinado por dois pontos simétricos das figuras. A tecnologia é a de que um eixo de simetria é sempre mediatriz do segmento determinado por pontos simétricos.

6.2.3 SÉTIMA SÉRIE

No livro da 7ª série, os autores apresentam um capítulo dedicado às simetrias axial, rotacional e central, sendo esta última apresentada como um caso particular da rotação quando

esta é de 180^o. A abordagem das simetrias não se restringe ao plano. A simetria axial é definida também no espaço, na qual menciona-se um plano de simetria em substituição ao eixo da simetria no plano. Da mesma forma, a simetria rotacional é definida no espaço. Nela, menciona-se um eixo de rotação em substituição ao centro da rotação no plano. O capítulo é introduzido por um texto seguido de questões de interpretação. Antes de propor 15 exercícios sobre as três simetrias mencionadas, propõe-se ao aluno uma *ação* pela qual se espera que ele observe a simetria central em uma carta de baralho e a simetria axial presente em folhas e plantas em geral.

6.2.3.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TAREFAS PROPOSTAS

Para fazer a análise praxeológica das tarefas propostas nesse volume, agruparemos os exercícios de acordo com cinco tipos de tarefas: “dada uma figura, verificar se ela tem simetria”; “obter uma figura simétrica a uma figura dada”; “examinar propriedades de uma figura a partir das simetrias observadas”; “construir uma faixa decorativa a partir de um motivo que contenha simetria”; “produzir um texto síntese sobre as simetrias estudadas”. Como a palavra simetria é usada pelos autores para designar não somente a simetria axial ou a central, mas também a rotacional, os tipos de tarefas citados se referem a qualquer uma dessas simetrias.

Relativamente ao primeiro tipo de tarefa citado, no qual se pede para o aluno verificar se uma figura tem ou não simetria, não se antecipa se a simetria será axial, central ou rotacional. O reconhecimento da simetria também faz parte da tarefa proposta e irá requerer uma técnica de resolução. A técnica disponível ao aluno, nesse caso, é a de verificar se existe uma reta que é mediatriz de segmentos determinados por pontos correspondentes da figura, para o caso da simetria axial, com a justificativa de que o eixo de simetria é sempre mediatriz de segmentos determinados por pontos simétricos. Para a simetria rotacional, o aluno deverá localizar um possível centro de rotação e, procurando dois pontos simétricos, examinar o

ângulo com vértice no centro da rotação e os lados determinados pelos segmentos que ligam o vértice aos pontos simétricos. A justificativa, nesses casos, ficará muito próxima à técnica uma vez que não foi examinada, no texto, a propriedade da igualdade das distâncias de pontos simétricos ao centro da rotação. Como a simetria central foi apresentada como um caso particular da rotação de 180^o, a tecnologia e a técnica, nesse caso, serão as mesmas exigidas para a simetria rotacional.

Os exercícios 1 e 11 contêm tarefas relacionadas ao primeiro tipo de tarefa citado, ou seja, aquele em que se pede que o aluno verifique "se uma figura dada possui ou não simetria". No que se refere a esse tipo de tarefa, será analisado o primeiro exercício.

Exercício 1

Logomarcas são desenhos que identificam uma marca comercial. No desenho seguinte, nem todas as logomarcas têm simetria. Aponte as que têm, e identifique o tipo de simetria que apresentam.

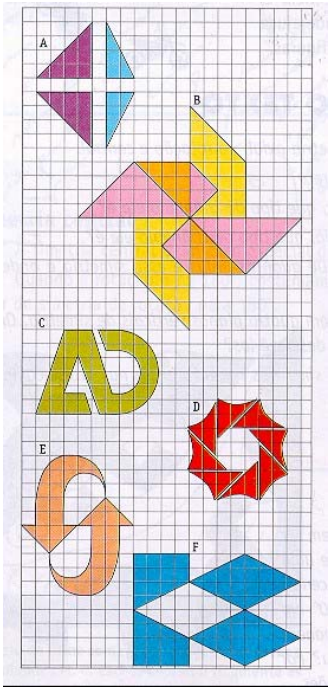


Figura 83 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138

A figura A tem simetria axial com eixo horizontal; B tem simetria central ou rotacional de 180^o; C não apresenta simetria; D apresenta simetria rotacional de 45^o; E tem simetria central ou rotacional de 180^o; F tem simetria axial com eixo horizontal. A simetria

axial pode ser reconhecida por meio da propriedade do eixo de simetria que o identifica como mediatriz do segmento determinado por pontos simétricos da figura. A simetria central pode ser observada reconhecendo-se uma rotação de 180^o da figura. A rotação de 45^o da figura D pode ser justificada pela propriedade dos polígonos regulares, segundo a qual o número de rotações coincide com o número n de lados do polígono e o ângulo de rotação é obtido dividindo-se 360^o por n.

No segundo tipo de tarefa, podem ser agrupados os exercícios 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 e 12. Esses exercícios contêm tarefas nas quais se pretende "obter uma figura simétrica a uma figura dada". A técnica disponível ao aluno aqui é, para o caso da simetria axial, determinar pontos correspondentes aos pontos da figura dada que estejam a uma igual distância do eixo de simetria. A tecnologia disponível, nesse caso, é, como nos exercícios anteriores, a propriedade do eixo de simetria como mediatriz de segmentos determinados por pontos simétricos. Para as simetrias rotacional e central, a técnica que deve ser aplicada é a de traçar um segmento ligando um ponto da figura ao centro de rotação e traçar o novo lado do ângulo a partir da medida fornecida usando o sentido horário, que é o sentido adotado na obra. Em seguida, deve-se marcar, no lado traçado, o ponto simétrico ao ponto inicial, fazendo-o localizar-se a uma igual distância do centro da rotação. Tecnologia e técnica devem coincidir nesses casos, conforme comentado anteriormente. Com relação a esse tipo de tarefa, analisaremos os exercícios 2, 3, 4 e 6.

Exercício 2

Em uma folha de papel quadriculado, copie cada figura, trace o eixo de simetria e desenhe a figura simétrica.

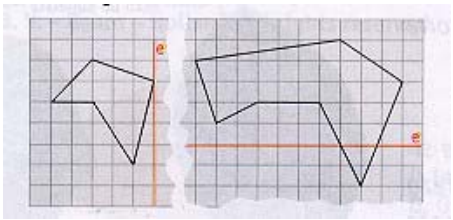


Figura 84 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138

Para encontrar a figura simétrica deve-se, nos dois casos, determinar o simétrico de cada vértice dos polígonos contando quantas unidades do quadriculado há entre o vértice e o eixo de simetria. A simetria axial pode ser construída a partir da propriedade do eixo de simetria como mediatriz do segmento determinado por pontos simétricos da figura.

Exercício 3

Desenhe em seu caderno seguindo as instruções: a) desenhe um triângulo isósceles ABC, com ângulo reto em A; b) construa a imagem desse triângulo obtida por uma rotação de centro B e ângulo 45º, no sentido horário; c) agora, construa a imagem do triângulo ABC por uma rotação de centro C e ângulo de 45º, no sentido horário.

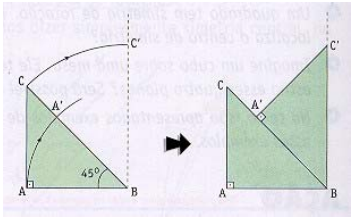


Figura 85 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138

Para obter a rotação da figura, é preciso fazer um giro de 45º dos vértices A e B com centro em C mantendo as distâncias relativas a C. Na simetria de rotação, a distância de cada ponto da figura original até o centro de rotação é igual à distância do ponto simétrico ao mesmo centro.

Exercício 4

Copie a figura em papel quadriculado. Depois, desenhe a figura simétrica em relação ao centro O.

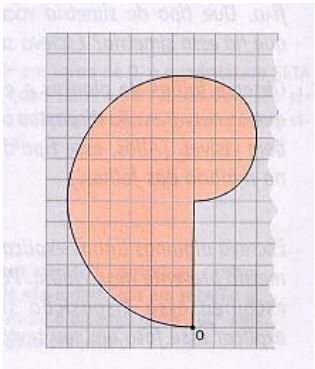


Figura 86 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.138

Para obter a simétrica da figura dada, é preciso escolher alguns pontos da figura e determinar o seu simétrico relativamente ao centro O, conservando para o simétrico a mesma

distância do ponto escolhido em relação ao centro da simetria. Na simetria de rotação, a distância de cada ponto da figura original até o centro de rotação é igual à distância do ponto simétrico ao mesmo centro.

Exercício 6

Numa folha quadriculada, copie o triângulo A e os eixos e_1 e e_2. a) Construa o triângulo B, simétrico de A em relação ao eixo e_1. Depois, construa o triângulo C, simétrico de B em relação ao eixo e_2. b) Que tipo de simetria relaciona os triângulos A e C? c) Agora pense no sistema de coordenadas cartesianas em que e_2 é o eixo horizontal e e_1 é o eixo vertical. Nesse sistema, um dos vértices do triângulo A tem coordenadas 4 e 6. Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo C?

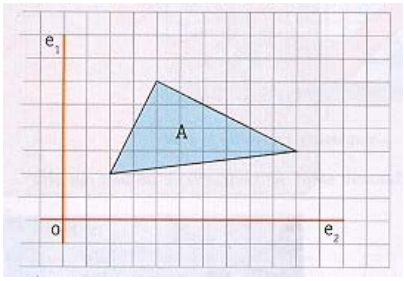


Figura 87 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.139

Para encontrar as figuras simétricas, podem-se contar as unidades do quadriculado entre cada vértice do triângulo e o eixo considerado, uma vez que as distâncias de pontos simétricos ao eixo são iguais.

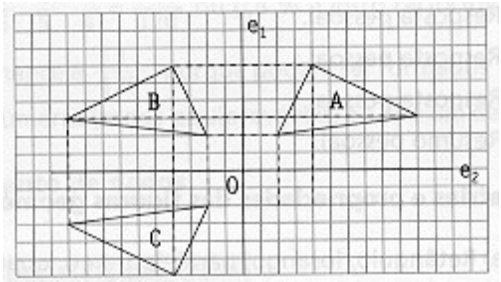


Figura 88 – Representação da solução do exercício 6a

Os triângulos A e C estão relacionados pela simetria central. Os triângulos A e B são simétricos e, portanto, congruentes. Da mesma forma, B e C são congruentes. Portanto, os triângulos A e C são congruentes. Os lados dos triângulos A e C são paralelos, uma vez que as distâncias de seus pontos correspondentes aos eixos são respectivamente iguais. Além disso, as distâncias de seus vértices ao centro O são respectivamente iguais.

As coordenadas dos vértices do triângulo C são (–4,–6), (–10,–3) e (–2,–2), visto que os pontos determinados por estes pares ordenados são simétricos, em relação ao eixo e_2, aos que determinam os vértices do triângulo B. As coordenadas dos vértices do triângulo C, simétrico ao triângulo A, devem ser dadas por pares ordenados cujas coordenadas sejam números opostos, uma vez que o triângulo A está no primeiro quadrante e o triângulo C está no terceiro.

Para obter a simétrica da figura dada, é preciso escolher alguns pontos da figura e determinar o seu simétrico relativamente ao eixo "e", conservando para o simétrico as distâncias dos pontos escolhidos ao eixo, dado que a simetria axial pode ser construída a partir da propriedade do eixo de simetria como mediatriz do segmento determinado por pontos simétricos da figura.

No terceiro tipo de tarefa, segundo o qual "propriedades de figuras devem ser examinadas a partir das simetrias que possam ser observadas nelas", agrupamos os exercícios 5 e 7. Em tais casos, a técnica é parcialmente fornecida no enunciado e o discurso tecnológico deve contemplar propriedades relativas a distâncias de pontos simétricos a eixos de simetria axial ou a centros de rotação.

Exercício 5

Copie o triângulo no papel quadriculado. Marque o ponto C, simétrico de A em relação a O, e o ponto D, simétrico de B em relação a O. Feito isso, responda: a) o segmento CD é simétrico do segmento AB em relação ao ponto O. Os dois segmentos simétricos têm mesma medida? São paralelos entre si? Se uma formiga vai de A para B e outra de C para D, pode-se dizer que elas caminham no mesmo sentido? b) Qual é o simétrico do triângulo AOB em relação ao centro O? E o simétrico do triângulo BOC, em relação ao centro O? c) O quadrilátero ABCD não é um retângulo. Como você o classifica? Será um losango? d) O que se pode concluir sobre o ponto de encontro das diagonais desse quadrilátero?

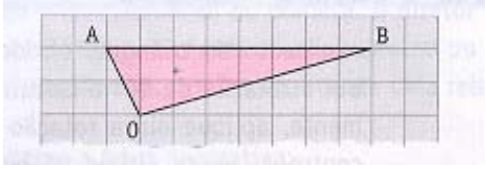


Figura 89 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.139

O segmento CD é simétrico de $\overline{AB}$ em relação ao ponto O e tem a mesma medida.

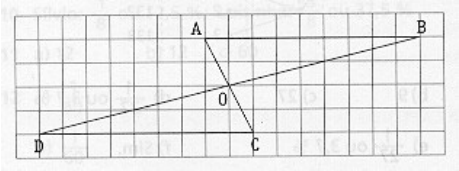


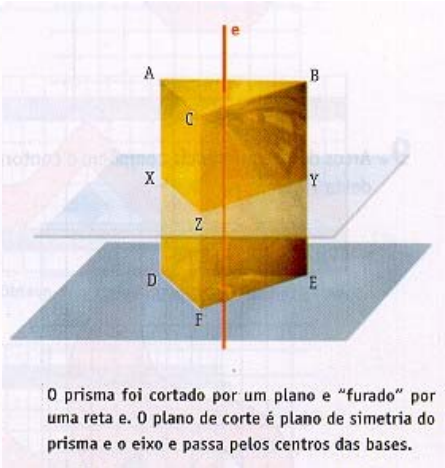
Figura 90 – Representação da solução do exercício 5

Se C e D são respectivamente simétricos de A e B, então suas distâncias relativas ao centro O são iguais. E também são iguais as distâncias relativas dos pontos dos segmentos determinados por A e B e por C e D. Portanto, os segmentos AB e CD são paralelos e congruentes. O triângulo COD é o simétrico de AOB, e o triângulo DOA é o simétrico de BOC em relação ao centro O. Como são respectivamente simétricos os pontos C, O, D e A, O, B, os segmentos determinados por eles são respectivamente simétricos e congruentes. O quadrilátero ABCD é um paralelogramo uma vez que os segmentos AB e DC são paralelos e congruentes. O ponto de encontro das diagonais é não apenas o centro da simetria, mas também o ponto médio das diagonais. Como são iguais as distâncias relativas entre pontos simétricos e o centro de rotação, o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo é o ponto médio de cada uma delas.

Exercício 7

Veja as figuras e leia suas legendas. Agora, responda: a) Qual é o comprimento dos segmentos XA, YB e ZF? b) Esse prisma tem simetria de rotação de quantos graus em relação ao eixo e? c) Agora, um desafio: esse prisma tem três planos de simetria verticais. Você consegue visualizar um deles e descrevê-lo?

As bases deste prisma são triângulos regulares e suas faces laterais são retângulos. Cada aresta lateral mede 10 cm.



O prisma foi cortado por um plano e "furado" por uma reta e. O plano de corte é plano de simetria do prisma e o eixo e passa pelos centros das bases.

Figura 91 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.139

Os segmentos têm todos 5 cm, uma vez que as distâncias de pontos simétricos ao plano de simetria em uma figura espacial são iguais. A rotação do prisma em relação ao eixo e é de 120^o. Nos polígonos regulares, o número de rotações coincide com o número n de lados do polígono, e o ângulo de rotação é obtido dividindo-se 360^o por n. Quanto aos planos verticais, um deles passa pela aresta AD e pelos pontos médios dos segmentos BC e EF, uma vez que as medianas do triângulo eqüilátero são eixos de simetria do triângulo. O plano de simetria procurado deve passar, então, por dois vértices correspondentes dos triângulos das bases e pelos pontos médios dos lados opostos a esses vértices.

No quarto tipo de tarefa, segundo o qual "se deve construir uma faixa decorativa a partir de um motivo que contenha simetria", estão os exercícios 13 e 14. A técnica consiste em criar uma figura que possua ela própria uma simetria axial, no caso do exercício 13, ou rotacional, no caso do 14. Em seguida, pede-se para o aluno reproduzi-la várias vezes em uma só direção. O discurso tecnológico deve contemplar as principais propriedades estudadas relativas a distâncias de pontos simétricos a eixos ou a centros de simetria, conforme o caso. Analisaremos, em seguida, o exercício 13.

Exercício 13

Observe a faixa decorativa. Ela pode ser construída a partir de um padrão e de um eixo. Crie um padrão e construa uma faixa decorativa usando simetria axial.

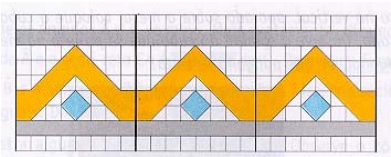


Figura 92 – IMENES e LELLIS, 7ª série, 2002, p.141

A partir de um motivo que possui, ele próprio, simetria axial, constrói-se uma faixa decorativa. A repetição de um motivo numa só direção dá origem à simetria de translação, desde que as distâncias entre pontos correspondentes do motivo e da figura simétrica sejam mantidas.

O quinto tipo de tarefa, qual seja, “produzir um texto síntese sobre as simetrias estudadas”, é o que se pede no exercício 15.

> Exercício 15
>
> Você já sabe muitas coisas sobre simetrias. Organize, então, um resumo das idéias e conceitos principais. Escreva sobre os tipos de simetrias, seus elementos e, com exemplos, mostre onde elas aparecem. (IMENES; LELLIS, 7ª série, 2002, p.141)

A resposta é pessoal, mas deve contemplar as principais propriedades das simetrias como a manutenção de distâncias entre os pontos simétricos e o eixo de reflexão, ou entre os pontos simétricos e o centro de rotação, além da congruência das figuras simétricas. O discurso tecnológico deve permear o texto justificando afirmações feitas.

6.2.4 OITAVA SÉRIE

No livro da oitava série, assim como no da sexta, não há um capítulo específico sobre transformações geométricas. As simetrias aparecem como um item do capítulo sobre construções geométricas, no qual são propostos 14 exercícios sobre translação e rotação e sobre as simetrias axial e central. Os exercícios são precedidos de um texto, no qual se explica a translação e se retoma a simetria axial, além da rotacional. A translação é definida a partir de um motivo que se repete e de um vetor que determina não só a direção e o sentido de uma figura, como também a distância que a separa da outra. Ainda no texto inicial, é apresentado (e resolvido) um problema no qual se pretende determinar o centro de uma circunferência como uma aplicação da simetria axial. No capítulo relativo à semelhança há, no texto introdutório sobre figuras semelhantes, uma explicação não só acerca da relação de homotetia entre duas figuras, como também acerca da razão de homotetia. Sobre este assunto, há apenas um exercício proposto que será analisado após as simetrias.

6.2.4.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS TAREFAS PROPOSTAS

Nos exercícios sobre simetrias, foi possível identificar os seguintes tipos de tarefas: “construir ou examinar a construção de uma faixa decorativa” (exercícios 1, 2, 8 e 10); “relacionar a localização do centro de uma circunferência à aplicação da simetria axial” (exercícios 6 e 11); “construir um friso circular” (exercício 4); “examinar simetrias em um friso circular” (exercícios 3 e 14); “construir a rotação de uma figura dada” (exercício 5); “descrever um plano e um eixo de simetria de uma pirâmide dada” (exercício 7); “construir a reflexão de uma figura dada” (exercício 9); “calcular números de eixos de simetrias de polígonos” (exercício 12); “examinar propriedades de eixos de simetria” (exercício 13).

Com relação ao primeiro tipo de tarefa, no qual se pede para construir ou examinar a construção de faixas decorativas, analisaremos o 2º exercício.

> Exercício 2
>
> Use papel quadriculado e construa uma barra decorativa, com translação e simetria central. Como sugestão, o motivo e os centros de simetria são estes.

Figura 93 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.210

Uma solução consiste em escolher alguns pontos do motivo e determinar os seus simétricos relativamente ao centro dado, conservando para o simétrico a mesma distância do ponto escolhido ao centro da simetria. O discurso tecnológico, nesse caso, deve contemplar não apenas a definição e as propriedades da simetria central relacionadas a distâncias de pontos simétricos ao centro da simetria, mas também as condições necessárias para que se obtenha, por exemplo, uma translação em que as distâncias de pontos correspondentes de duas figuras simétricas por translação sejam iguais ao comprimento do vetor empregado.

Quanto ao segundo tipo de tarefa, segundo o qual se pede que o aluno “relacione a localização do centro de uma circunferência à aplicação da simetria axial”, analisaremos o exercício 11.

Exercício 11

> Desenhe uma circunferência com raio de 5 cm. Trace duas cordas quaisquer dessa circunferência e construa suas mediatrizes. Se sua construção for bem feita, as mediatrizes deverão cortar-se exatamente no centro da circunferência. (IMENES; LELLIS, 8ª série, 2002, p.212)

Para resolver essa tarefa, deve-se construir uma circunferência e, com instrumentos como régua, compasso ou esquadro, traçar as mediatrizes de duas cordas. A técnica é, pois, fornecida no enunciado do exercício. O discurso tecnológico deve contemplar que o círculo tem infinitos eixos de simetria, dois dos quais mediatrizes de duas de suas cordas, uma vez que o centro do círculo é eqüidistante de quaisquer pontos de sua circunferência.

No que diz respeito ao terceiro tipo de tarefa (construção de um friso circular), analisaremos o exercício 4.

Exercício 4

> Um friso circular pode ser gerado pela rotação de um motivo em torno de um centro. Construa um friso circular. Sugerimos este modelo, mas não copie. Use sua criatividade.

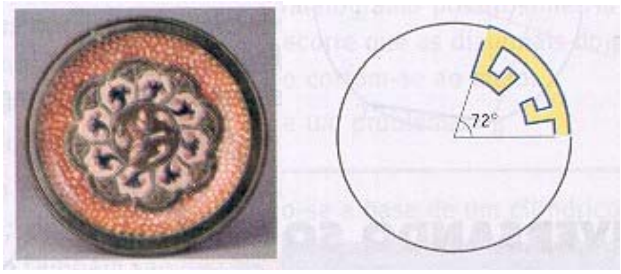


Figura 94 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.210

Para construir o friso é preciso escolher um polígono regular e determinar o ângulo de rotação. Em seguida, deve-se adotar um motivo e reproduzi-lo representando cada rotação. O discurso tecnológico deve contemplar, como no exercício anterior, que o número de rotações

dos polígonos regulares coincide com o número n de lados do polígono, e que o ângulo de rotação é obtido dividindo-se 360^o por n.

Analisaremos, em seguida, o exercício 14, correspondente ao $4^{\underline{o}}$ tipo de tarefa, no qual se pede o exame de simetrias presentes em frisos circulares.

Exercício 14

A foto mostra uma figura decorativa criada por índios do Brasil. Quais tipos de simetria você identifica nesse desenho? Explique com palavras, detalhadamente.

Figura 95 – IMENES e LELLIS, $8^{\underline{a}}$ série, 2002, p.213

A técnica para realizar a tarefa proposta nesse exercício consiste em procurar figuras simétricas na foto aplicando propriedades e definições das simetrias estudadas. É possível observar simetria rotacional de 90^o, quatro eixos de simetria axial, além da simetria central. Na simetria rotacional, as distâncias entre pontos simétricos e o centro de rotação são iguais, bem como o são as distâncias entre pontos simétricos e o eixo de reflexão.

Passaremos a analisar o exercício 5, sobre a construção da rotação de uma figura dada.

Exercício 5

Desenhe um triângulo ABC e marque um ponto O no seu exterior. Depois, construa a imagem do triângulo ABC por uma rotação de 60^o, com centro O. Orientação: o ângulo de 60^o pode ser traçado com régua e compasso deste modo: trace o arco de circunferência de centro O passando por A; com o mesmo raio e centro em A, desenhe outro arco cortando o primeiro em A'. Assim fica determinado o ângulo de 60^o, percebeu?

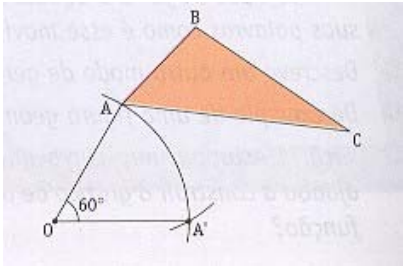


Figura 96 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.210

Para concluir a resolução, deve-se repetir o procedimento explicado para o vértice A nos demais vértices. A técnica é, portanto, sugerida no próprio enunciado do exercício. Quanto ao discurso tecnológico, deve-se considerar que, como todo triângulo eqüilátero é também eqüiângulo, a construção de um triângulo eqüilátero permite construir com régua e compasso um ângulo de 60^o. Além disso, o uso do compasso garante que a distância de O até A seja igual à distância de O até o simétrico de A.

O exercício 7 corresponde ao tipo de tarefa no qual se pede a descrição de um plano e um eixo de simetria de uma pirâmide dada.

Exercício 7

Há simetria também nas formas espaciais. M e N são pontos médios das arestas. Essa pirâmide de base quadrada é simétrica em relação ao plano que passa pelos pontos V, M e N. A reta VO é eixo de simetria para uma rotação de 90^o. Nesta pirâmide todas as faces são triângulos regulares. a) Descreva um plano de simetria dessa pirâmide. b) Descreva um eixo de simetria dessa pirâmide.

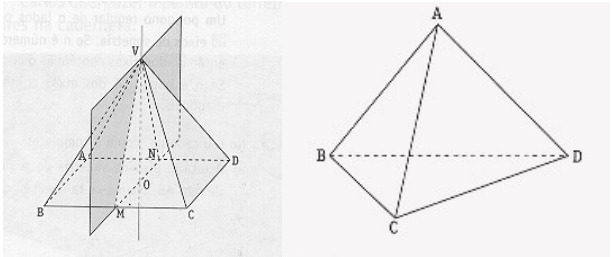


Figura 97 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.211

A técnica a ser aplicada para resolver a tarefa é parcialmente fornecida no enunciado a partir do exemplo de uma pirâmide de base quadrada. No caso do tetraedro, um plano de simetria passa pela aresta AD e pelo ponto médio do segmento BC; um eixo de simetria passa pelo vértice A e pelo baricentro do triângulo BCD. Como as medianas do triângulo eqüilátero são eixos de simetria do triângulo, o plano de simetria procurado deve passar por dois vértices

da pirâmide e pelo ponto médio do lado oposto a esses vértices. O triângulo eqüilátero, como todo polígono regular, possui três simetrias de rotação de 120^o com centro no baricentro do triângulo. No discurso tecnológico, para justificar a técnica aplicada na resolução da tarefa proposta, deve-se recorrer também a resultados da geometria plana.

Analisaremos, em seguida, o exercício 9, correspondendo ao tipo de tarefa no qual se pede a construção da reflexão de uma figura dada.

Exercício 9

Veja a construção da imagem do triângulo ABC pela simetria de eixo e. Com régua e esquadro, traçam-se perpendiculares ao eixo e, passando por A, B e C. Marca-se C', simétrico de C em relação a e. Faz-se o mesmo para marcar A' e B'. Com base no exemplo, desenhe um triângulo ABC com ângulo obtuso em A e construa sua imagem pela simetria de eixo AB.

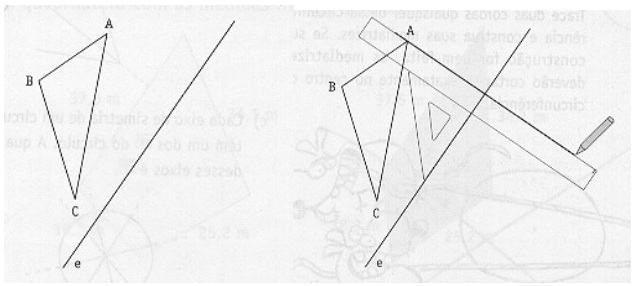


Figura 98 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.211

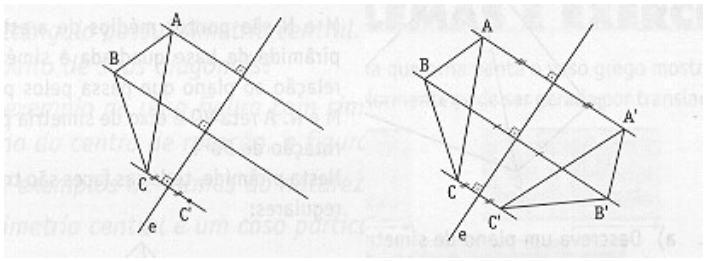


Figura 99 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.212

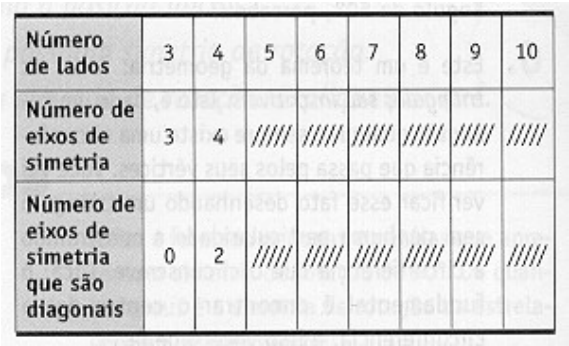
Para resolver a tarefa proposta, a técnica é fornecida no enunciado. Deve-se considerar que, na tarefa proposta, o eixo de simetria deve conter um dos lados do triângulo. Para construir a imagem do triângulo ABC pela simetria de eixo AB, deve-se considerar a reta que passa pelos vértices A e B do triângulo e traçar a perpendicular a essa reta pelo vértice C, obtendo C', imagem de C. As imagens de A e B coincidem com os pontos A e B, uma vez que pertencem ao eixo de simetria. A tecnologia que justifica a técnica aplicada é a de que a

simetria axial pode ser construída a partir da propriedade do eixo de simetria como mediatriz do segmento determinado por pontos simétricos da figura. Sendo assim, dois pontos simétricos estão sempre a uma mesma distância em relação ao eixo de simetria, e as imagens dos pontos do eixo coincidem com eles próprios.

Calcular o número de eixos de simetria em polígonos corresponde ao próximo tipo de tarefa que analisaremos a partir do exercício 12.

Exercício 12

A tabela seguinte refere-se somente aos polígonos regulares. a) No seu caderno, copie e complete a tabela. b) Os exemplos da tabela permitem perceber um padrão que leva a uma generalização. No seu caderno, copie e complete: um polígono regular possui ▨ eixos de simetria. Se n é número par, então ▨ dos eixos contêm as diagonais. Se n é ímpar, ▨ dos eixos contêm as diagonais.



Número de lados	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de eixos de simetria	3	4	/////	/////	/////	/////	/////	/////
Número de eixos de simetria que são diagonais	0	2	/////	/////	/////	/////	/////	/////

Figura 100 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.212

A técnica para desenvolver a tarefa é sugerida no próprio enunciado. Polígonos regulares devem ser construídos ou apenas esboçados para que seja feita a contagem quer do número de seus eixos de simetria, quer do número de eixos de simetria que são diagonais. Completando a tabela, deve-se observar que o número de eixos de simetrias dos polígonos regulares coincide com o número de lados dos polígonos. E, além disso, se o número de lados for ímpar, nenhum eixo conterá uma diagonal, mas se o número de lados for par, o número de diagonais contidas nos eixos é a metade do número de lados do polígono. Tecnologia e técnica estão muito próximas nessa tarefa, uma vez que, além da tabela, o aluno não dispõe de outros elementos que comprovem que o padrão observado seja realmente um resultado geral.

No exercício 13, encontra-se um tipo de tarefa no qual se pede para examinar propriedades de eixos de simetria.

Exercício 13

No seu caderno, copie e complete: a) A reta e, eixo de simetria do segmento de reta AB, chama-se também ▨ de AB. b) A parte do eixo de simetria de um ângulo, interna ao ângulo, chama-se ▨ do ângulo. c) Cada eixo de simetria de um círculo contém um dos ▨ do círculo. A quantidade desses eixos é ▨.

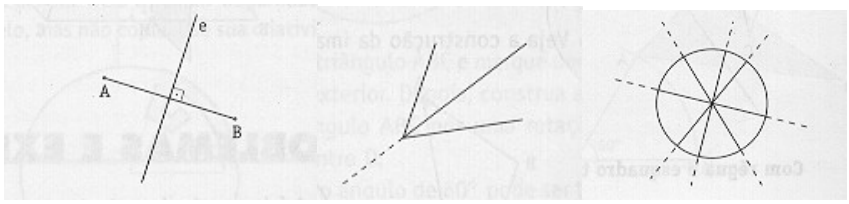


Figura 101 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.212

Tecnologia e técnica estão muito próximas nesse exercício, uma vez que, para completar as afirmações feitas, o aluno deverá se apoiar em algum discurso tecnológico. O eixo de simetria de um segmento de reta é a mediatriz do segmento, o eixo de um ângulo é a bissetriz, e o do círculo é um de seus diâmetros. O círculo possui infinitos eixos de simetria axial. Todos os pontos simétricos de um segmento estão a uma igual distância da mediatriz do segmento. Da mesma forma, todos os pontos simétricos dos lados de um ângulo estão a uma igual distância da sua bissetriz. Qualquer reta que passa pelo centro do círculo divide-o em duas partes congruentes. Por esse motivo, é um eixo de simetria e contém um de seus diâmetros.

Resta examinar um tipo de tarefa relacionado à homotetia e encontrado em um único exercício proposto no capítulo em que é discutida a semelhança. O tipo de tarefa que esse exercício suscita é o de construir figuras semelhantes por homotetia. A técnica, sugerida no enunciado, é a de reproduzir um modelo dado. O discurso tecnológico tem apoio no texto fornecido no capítulo, discurso segundo o qual a relação de homotetia “se refere ao fato de as figuras estarem igualmente colocadas, igualmente dispostas” (IMENES, 8 série, 2002, p.9).

Exercício 10

> Veja o desenho que Laura fez. A figura inicial foi multiplicada por 2, por 3, etc. Depois, vieram as cores. Escolha uma figura e faça um trabalho como esse, bem grande e caprichado!

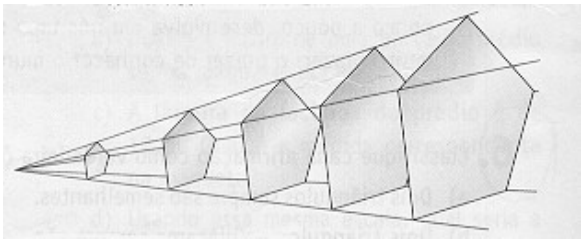


Figura 102 – IMENES e LELLIS, 8ª série, 2002, p.14

Para essa tarefa, é necessário construir uma figura e escolher um ponto C qualquer, que será o centro da homotetia. Para produzir uma figura, homotética à primeira na razão 2, devem ser traçadas semi-retas passando pelo centro da homotetia e por alguns pontos escolhidos da figura original. Os pontos correspondentes da imagem serão determinados, a partir de C, marcando-se o dobro da distância dos pontos originais ao centro da homotetia. Da mesma forma, poderão ser produzidas as demais figuras. Uma homotetia de centro C e de razão r é a aplicação no plano, tal que: H(C) = C; se $x \neq C$, então H(x) = y, sendo C, x e y colineares, $C \notin \overline{xy}$ e $\frac{[\overline{cy}]}{[\overline{cx}]} = r$.

6.2.5 ANÁLISE DO CONJUNTO DE ATIVIDADES PROPOSTAS DE ACORDO COM OS MOMENTOS DE ESTUDO E CONFORME OS NÍVEIS DE DETERMINAÇÃO MATEMÁTICA

Nas quatro séries, o momento do primeiro encontro com a organização matemática se dá por meio de um texto seguido de questões para verificar a compreensão do leitor. Quanto ao segundo momento de estudo, ou o momento da exploração do tipo de tarefa e da construção de uma técnica inicial para realizar esse tipo de tarefa, nota-se que, no livro da 5ª série, os exercícios 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12 e 14 têm o mesmo princípio tecnológico. A justificativa disponível para o aluno nessas tarefas é, como foi registrado na correspondente análise dos exercícios citados, a da dobradura da figura ao longo do seu eixo. A técnica que é possível esperar do aluno é a de efetuar dobraduras ou imaginá-las. Em tais exercícios, tecnologia e

técnica parecem se confundir, uma vez que o momento da justificativa da técnica parece estar inserido na própria técnica, fazendo com que a técnica aplicada seja uma justificativa para ela própria. O quarto momento, o do trabalho da técnica, pode ser notado na variedade dos exercícios propostos, nas observações de detalhes como cores e contagem de elementos, além de ser identificado nos exercícios envolvendo simetrias refletidas em espelhos.

O trabalho da institucionalização correspondente ao quinto momento de estudo está associado, no livro da 5ª série, ao trabalho da técnica, cujo objetivo maior parece ser o de desenvolver e consolidar, no aluno, um conceito intuitivo da simetria axial. É possível observar, ainda, que os exercícios propostos apresentam alto vínculo entre os níveis superiores de determinação matemática e os níveis de maior especificidade. Relações com a disciplina matemática e o domínio da geometria podem ser observadas, por exemplo, nos exercícios 6, 10 e 11, relativos à simetria no espelho, ou ainda entre os exercícios 1 e 2. Se por um lado pede-se, nestes últimos, que o aluno reconheça eixos de simetria em figuras geométricas, por outro pede-se que ele relacione essa tarefa com uma outra que apresenta a planta baixa de uma igreja na França. Esses são exemplos de tarefas propostas ao aluno nas quais se nota uma preocupação em vincular o nível da disciplina matemática ao nível inferior da simetria axial enquanto objeto.

No livro da 6ª série, relativamente ao segundo momento de estudo, a técnica a ser empregada para resolver exercícios sobre simetria axial deverá ser a aplicação da propriedade segundo a qual o eixo de simetria é a mediatriz do segmento determinado por dois pontos simétricos da figura dada. Nos exercícios sobre figuras que possuem rotação, a técnica empregada deverá ser a do giro em torno de um centro de rotação, seja para encontrar o ângulo da rotação, seja para construir uma figura com o ângulo dado. O trabalho com a rotação na 6ª série é todo ele desenvolvido em uma figura única, seja ela um polígono ou um círculo; não são trabalhadas rotações de figuras em torno de um ponto fora dela. Sobre o

terceiro momento de estudo, que é aquele da procura de uma tecnologia para justificar a técnica, nota-se que tanto na reflexão como na rotação a tecnologia disponível ao aluno coincide com a técnica aplicada na resolução da tarefa, a exemplo do que foi registrado por ocasião da análise dos exercícios 27 e 32. Quanto ao quarto momento de estudo, ou o do trabalho da técnica, nota-se que tal trabalho, quer pela aplicação da propriedade do eixo de simetria como mediatriz de um segmento, quer pelo giro em torno de um ponto, tem início em exercícios de rotina, mas segue no sentido da construção das propriedades das simetrias dos polígonos regulares. Nesse sentido, a presença do quarto momento de estudo está clara nos 11 exercícios analisados, nos quais o desenvolvimento progressivo da técnica pode provocar o aparecimento de novos tipos de tarefas, como é o caso das simetrias dos polígonos regulares.

No que se refere ao quinto momento de estudo, nota-se, no livro da 6ª série, uma intenção explícita em institucionalizar a propriedade do número de simetrias de reflexão dos polígonos regulares no exercício 33. Observa-se, ainda, acentuada preocupação em vincular os níveis inferiores, como o nível dos objetos das simetrias axial e rotacional, ao nível superior do domínio da geometria, uma vez que o objeto de estudo é apresentado tanto no contexto das construções geométricas com régua, esquadro e transferidor, quanto no das propriedades dos polígonos.

No livro da 7ª série, relativamente ao segundo momento de estudo, é possível observar uma diferença entre as abordagens das simetrias axial e rotacional. Para resolver os exercícios 2, 6, 7, 8, 11 e 13, relativos à simetria axial, o aluno deverá examinar a equivalência das distâncias entre pontos simétricos e o eixo de simetria. Nesse caso, o terceiro momento de estudo, ou o momento da justificativa da técnica, pode ser contemplado pela propriedade do eixo de simetria como mediatriz do segmento determinado por dois pontos simétricos da figura. Para a rotação, entretanto, a ausência de uma explicitação da propriedade da igualdade das distâncias relativas de pontos simétricos ao centro da rotação pode caracterizar a tarefa

proposta no exercício 3 como uma tarefa isolada. A única técnica disponível para o aluno resolver esse exercício é aquela fornecida, nele próprio, como um modelo de resolução. Para tal caso, nota-se a ausência de uma tecnologia disponível para o aluno justificar a técnica aplicada. Por esse motivo, a tarefa proposta pode ser considerada isolada, no sentido de que ela não se relaciona a algum elemento tecnológico disponível para o aluno na organização matemática proposta.

Quanto ao quarto momento de estudo, observa-se o trabalho da técnica encaminhando a construção das propriedades das simetrias estudadas e produzindo o aparecimento de novos tipos de tarefas, como é o caso das simetrias nas figuras espaciais ou o da aplicação das simetrias estudadas no plano cartesiano. Pode-se observar a intencionalidade da institucionalização presente tanto na discussão do exercício 5, para o caso da simetria central, quanto na discussão do exercício 15, para o caso de uma comparação das simetrias estudadas e de suas principais propriedades. Fazendo uma avaliação da organização matemática, a presença da tarefa isolada, comentada anteriormente, pode comprometer a completude da organização. Por outro lado, a existência de tarefas abertas, como as propostas nos exercícios 13 e 15, contribui para uma melhor avaliação da organização matemática local.

Como nos volumes anteriores, é possível observar que, no livro da 7ª série, os exercícios propostos apresentam alto vínculo entre os níveis superiores de determinação matemática e os níveis de maior especificidade. Relações com a disciplina matemática e o domínio da geometria podem ser observadas, por exemplo, nos exercícios 1, 7 e 13. Estes são exemplos de tarefas propostas ao aluno nas quais se nota uma preocupação em vincular o nível da disciplina matemática ao nível inferior das simetrias axial, rotacional e central enquanto objetos.

No livro da 8ª série, relativamente ao segundo momento de estudo, observa-se que, para os exercícios sobre translação, o aluno deverá procurar, no próprio texto introdutório do

capítulo, elementos que permitam a realização da tarefa. A tecnologia disponível, que corresponde ao terceiro momento de estudo, encontra-se nesses casos no texto introdutório. Da mesma forma, a técnica e a tecnologia exigidas para a resolução de exercícios sobre as simetrias do círculo encontram-se no texto introdutório. Entretanto, a ausência de elementos tecnológicos disponíveis ao aluno para a resolução da tarefa proposta no exercício 5, relacionada à rotação de um triângulo, pode caracterizá-la como uma tarefa isolada. A ausência que se nota aqui é, como no exercício 3 do livro da 7ª série, a da explicitação da propriedade segundo a qual as distâncias de pontos simétricos ao centro de rotação são iguais.

Quanto ao quarto momento de estudo, nota-se o trabalho da técnica quer nos exercícios de aplicação da translação, quer na simetria do círculo ou então nas simetrias dos polígonos regulares, o que pode provocar o aparecimento de novos tipos de tarefas, como é o caso das simetrias nas figuras espaciais e das construções geométricas com régua e compasso. O momento da institucionalização pode ser notado especificamente no exercício 9, que trata da construção da simetria axial, e no exercício 13, que explora o vínculo entre o eixo de simetria e a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo ou o diâmetro de um círculo.

Como nos volumes anteriores, é possível observar que os exercícios propostos no livro da 8ª série, relativamente ao estudo das simetrias, vinculam os níveis superiores de determinação matemática com os níveis de maior especificidade. O mesmo exercício 5, citado como exemplo de tarefa isolada, apresenta, ele próprio, acentuado vínculo entre o objeto simetria de rotação e o domínio da geometria, uma vez que relaciona a construção da rotação de 60^{o} às propriedades das construções com régua e compasso.

Quanto ao sexto momento de estudo, ou o momento da avaliação da organização matemática, pode-se dizer que a presença de tipos de tarefas isoladas, especialmente nos livros da 7ª e 8ª séries, pode comprometer a completude da organização matemática. Por outro lado, é possível notar a existência de técnicas que permitem resolver um tipo de tarefa e

também a sua inversa, a exemplo dos exercícios 1 e 6 do livro da 5ª série, em que se pede para encontrar eixos, ou então, dado o eixo, pede-se para encontrar a figura simétrica usando a mesma técnica de resolução.

6.2.6 ANÁLISE DE ACORDO COM AS PRINCIPAIS DIFICULDADES DOS ALUNOS E CONFORME O MOMENTO HISTÓRICO EM QUE A OBRA FOI PRODUZIDA

A coleção analisada neste capítulo foi publicada após os Parâmetros Curriculares Nacionais e contempla as orientações apontadas por estes. Nas atividades propostas, os autores da coleção procuram vincular as simetrias às propriedades das figuras geométricas, o que, de acordo com os Parâmetros, permite o desenvolvimento de conceitos geométricos de forma significativa, uma vez que planos e eixos de simetria ou rotações estão presentes em inúmeros objetos do mundo físico (BRASIL, 1998, p.124). Nota-se, entretanto, a ausência de um trabalho maior com homotetias, estudo que aparece no volume da 8ª série em um único exercício.

Com relação às principais dificuldades apresentadas pelos alunos conforme as pesquisas examinadas no 3º capítulo do nosso trabalho, a que aparece com mais freqüência, relativamente à simetria axial, é aquela da posição do eixo de simetria e da posição relativa entre a figura original e o eixo, conforme Jaime e Gutiérrez (1996, p.61-69). A eqüidistância ao eixo de pontos correspondentes (da figura original e da imagem), assim como a perpendicularidade do segmento que une dois pontos simétricos e o eixo de simetria, são condições freqüentemente não observadas pelos alunos. A figura simétrica produzida pelos alunos é geralmente paralela à figura original, com a imagem vinculada apenas à posição da figura original, independente, portanto, do eixo de simetria. Nesse sentido, acreditamos que os alunos poderão apresentar dificuldade especialmente na resolução da tarefa proposta no exercício 5 da 5ª série, muito embora a folha quadriculada, assim como a apresentação parcial da resposta, estejam ambos, ali, para minimizar erros. Um outro exercício que também pode

trazer dificuldades aos alunos é o exercício 2 do livro da 7ª série. A dificuldade, aqui, poderá ser gerada pela posição relativa eixo/objeto. No caso, o eixo aparece interceptando o polígono, cujo simétrico se quer descobrir.

Sobre a rotação, devem ser citados o exercício 3 do livro da 7ª série e o exercício 5 da 8ª série. Conforme as pesquisas examinadas no 3º capítulo do nosso trabalho, uma das principais dificuldades relacionadas à rotação é aquela da conservação das distâncias entre os pontos da figura original e o centro de rotação, em correspondência às distâncias entre os pontos respectivos da imagem e o mesmo centro (JAIME; GUTIÉRREZ, 1996, p.67). Nos exercícios mencionados, como a condição da manutenção das distâncias não chegou a ser explicitada em nenhum momento nos livros analisados, acreditamos que os alunos poderão sentir as dificuldades apontadas pelas pesquisas.

CONCLUSÕES

Foram analisadas, neste trabalho, três obras relacionadas ao movimento de reforma da Matemática Moderna e duas correspondentes ao período de elaboração e publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Inicialmente, organizaremos nossas conclusões de acordo com as épocas em que as obras foram produzidas, fazendo uma comparação entre os diferentes períodos e sua relação com documentos oficiais como Guias, Proposta e Parâmetros Curriculares. Em seguida, procuraremos estabelecer relações entre o estudo proposto nos documentos examinados e os aspectos, por nós levantados, da Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, além de assinalar pontos relativos às principais dificuldades dos alunos abordados em pesquisas anteriores sobre ensino e aprendizagem de transformações geométricas.

COMPARAÇÃO DAS OBRAS DE ACORDO COM AS ÉPOCAS EM QUE FORAM PRODUZIDAS

Nas obras correspondentes ao movimento de reforma da Matemática Moderna, observou-se o predomínio de uma concepção pontual de transformação geométrica. Ou seja, uma figura é um conjunto de pontos, e uma transformação dessa figura é uma aplicação que, para cada um de seus pontos, faz corresponder um ponto do plano de acordo com uma definição dada. Isso significa que encontrar, por exemplo, a simétrica de uma figura se reduz a determinar os simétricos de cada um de seus pontos. Esse período se caracterizou por uma grande preocupação com o raciocínio e a compreensão das idéias matemáticas. Ao mesmo tempo que se fazia uma crítica à aplicação de algoritmos complicados sem compreensão dos conteúdos, esperava-se que os estudantes compreendessem os objetos matemáticos e também a inserção destes na estrutura

matemática de que faziam parte. Isso pode ser observado na obra de Sangiorgi (1969), especificamente na ênfase dada às estruturas de grupos de transformações. Em Lamparelli (1972), a abordagem pontual de simetria e de homotetia está a serviço do estudo das funções, enquanto em Averbuch (1975) é dada grande ênfase à metodologia na qual se pretende apresentar uma organização de exercícios que leve o aluno à compreensão do objeto matemático em estudo.

A Proposta Curricular vem propor uma abordagem diferente para a noção de figura. Estabelece orientações de trabalho no qual a formação do conceito de figura geométrica se dá a partir de classificações em planas ou não-planas, em corpos redondos ou poliédricos (SÃO PAULO, 1997, p.32). A percepção de segmentos seria proporcionada a partir da análise das arestas dos poliedros, e a noção de polígono, a partir da classificação de figuras planas (SÃO PAULO, 1997, p.51-52). Nesse caso, a abordagem de figura é global, não é pontual. No que diz respeito a orientações sobre o ensino da geometria, nota-se que uma mudança significativa foi implementada a partir da Proposta. No centro dessa mudança está a inserção ou não das transformações geométricas no currículo. Se, para alguns conteúdos da geometria, a abordagem muda com a Proposta, para as transformações geométricas, a mudança simplesmente promove a sua retirada do currículo para serem recolocadas alguns anos mais tarde com o advento dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Nos livros didáticos publicados nos anos 80 e início dos 90, nota-se a ausência de capítulo ou item voltado para o ensino de isometrias ou homotetias.

Quanto aos PCN, não está claro se a concepção de transformação geométrica sugerida é pontual ou não, mas há orientação para que isometrias sejam um ponto de partida para o estudo da congruência e que a homotetia sirva de base para o da semelhança (BRASIL, 1998, p.124). Por um lado, isso pode significar que o centro da abordagem não

está na reflexão ou rotação de um ponto, mas na reflexão ou rotação de uma figura, assim como a ênfase não estaria na determinação de um ponto por homotetia, mas na obtenção de figuras semelhantes. Por outro lado, orientações sobre o ensino da geometria, especificamente no bloco denominado Espaço e Forma, apontam para um trabalho com noções relativas à posição, à localização e ao deslocamento de figuras no plano e sistemas de coordenadas (BRASIL, 1998, p.51). Quanto aos livros analisados relativamente a esse período, a leitura que se faz dos PCN – por exemplo, na obra de Bigode (2000) – é a do trabalho com as transformações tendo em vista a formação dos conceitos de congruência e semelhança. Embora, nessa obra, as definições de reflexão, rotação e translação sejam dadas a partir de movimentos de um ponto do plano, os exercícios propostos aos alunos não enfatizam a concepção pontual da transformação. Na obra de Imenes e Lellis (2002), nota-se uma variação no tratamento global/pontual. Ora a definição dada é pontual, como é o caso da rotação no livro da 6ª série (IMENES; LELLIS, 2002, p.34), ora é global, como se pode verificar na reflexão do livro da 5ª série (IMENES; LELLIS, 2002, p.199). Nos exercícios propostos, o trabalho requerido dos alunos também oscila entre pontual e global. A aplicação das transformações como deslocamentos no plano cartesiano pode ser observada em exercícios do livro da 7ª série (IMENES; LELLIS, 2002, p.139-140). De acordo com os Parâmetros, “é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, [...]” (BRASIL, 1998, p.51). Nas duas obras analisadas relativamente a esse período, é possível notar o atendimento a essa orientação em exercícios envolvendo observação e análise de logotipos, imagens em espelhos e obras de arte em geral.

Constatamos, pois, com base na análise feita, que o ensino das transformações geométricas, no que diz respeito aos livros didáticos, apresentou três períodos com

orientações sensivelmente distintas: do movimento de reforma da Matemática Moderna até chegar aos dias atuais. Se à época do movimento da Matemática Moderna enfatizou-se o ensino de um dado objeto vinculando-o à estrutura matemática da qual ele faz parte, no terceiro período da nossa análise a ênfase pareceu ser o estabelecimento de conexões entre a matemática e o mundo físico. No intervalo entre um período e outro, transcorreram-se aproximadamente quinze anos, nos quais a abordagem de isometrias e homotetias esteve, entretanto, ausente dos livros-texto. Reiteramos, conforme foi explicitado na introdução do nosso trabalho, que a análise dos livros se restringe, nesta pesquisa, àqueles publicados no Estado de São Paulo.

COMPARAÇÃO DAS OBRAS DE ACORDO COM ASPECTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA

Segundo Chevallard (1999, p.250), em toda atividade de estudo há alguns momentos que estão sempre presentes: o primeiro encontro com o tipo de tarefa associado a uma questão, a construção de uma técnica inicial para realizar a tarefa proposta, a justificativa da técnica aplicada, o trabalho de aprimoramento da técnica, a institucionalização e a avaliação da organização matemática. Examinando as orientações metodológicas do período do movimento de reforma da Matemática Moderna, notamos, com base nos momentos de estudo de Chevallard, relativamente ao primeiro momento, uma diferença significativa entre a obra de Sangiorgi (1969) e as de Lamparelli (1972) e Averbuch (1975, 1977). Enquanto em Sangiorgi o momento do primeiro encontro com a organização matemática se dá em uma exposição teórica de conceitos e propriedades, em Lamparelli e Averbuch isso ocorre por meio da proposição de exercícios nos quais se espera que os alunos possam compreender as definições formuladas. Sobre obras posteriores ao movimento de reforma da Matemática Moderna, nota-se em Bigode (2000),

assim como em Imenes e Lellis (2002), que o primeiro contato do aluno com a organização em questão se dá a partir de um texto introdutório, que, diferentemente da exposição teórica que se encontra em Sangiorgi, parece não pretender encerrar o assunto, mas deixar para os exercícios vários outros primeiros encontros.

Quanto ao segundo momento de estudo, ou aquele em que o aluno deve construir uma técnica inicial para resolver a tarefa proposta, nota-se que, em Sangiorgi (1969), a técnica a ser empregada é apresentada ao aluno por meio de modelos de resolução ou de orientação dados na exposição teórica inicial. As justificativas das técnicas aplicadas, que correspondem ao terceiro momento de estudo, encontram-se no texto introdutório. À diferença dessa obra, entretanto, não se notou, nas demais obras, que as técnicas fossem freqüentemente fornecidas aos alunos de acordo com um exemplo ou modelo dado.

Na obra de Lamparelli (1972), nota-se grande complexidade das tarefas propostas no que diz respeito ao segundo e ao terceiro momentos de estudo, uma vez que os tipos de tarefas estão vinculados ora ao domínio da geometria, ora ao domínio de funções. Nesse caso, o momento da procura de uma técnica inicial para resolver a tarefa proposta não se restringe a definições dadas de simetrias ou de homotetias, mas engloba repertórios do aluno relativos à geometria e às funções. Da mesma forma, a tecnologia para justificar a técnica aplicada não se encontra unicamente no setor das transformações geométricas. Em Averbuch (1975, 1977), as técnicas para resolução dos exercícios encontram-se ou nas definições formuladas, ou são encaminhadas passo a passo nos enunciados. Por esse motivo, a complexidade dos enunciados propostos é bem menor que a dos apresentados na obra anterior, muito embora o estudo das transformações também esteja vinculado a funções e a outros tópicos da geometria.

Em Bigode, tecnologia e técnica parecem coincidir na maioria dos exercícios, indicando possivelmente que o trabalho proposto ao aluno esteja voltado tanto para a formação dos conceitos de isometria e homotetia, quanto, de maneira geral, para a formação dos de congruência e semelhança. A mesma coincidência pode ser observada na obra de Imenes e Lellis, notadamente nos volumes destinados à 5ª e à 6ª séries. Entretanto, nos livros das duas últimas séries do Ensino Fundamental, os elementos tecnológicos passam a se diferenciar das técnicas, em especial nas tarefas propostas à 8ª série.

Segundo Chevallard (2002a, p.12), os três primeiros momentos estão organizados de acordo com atividades de estudo e de pesquisa. Os outros três dizem respeito à síntese (ou institucionalização), aos exercícios e problemas nos quais se devem trabalhar especialmente as técnicas, e ao momento de controle em que a organização proposta deve ser avaliada. O trabalho da técnica é abordado de forma especialmente diferente nas três obras relacionadas ao movimento de reforma da Matemática Moderna. Se em Sangiorgi não se nota preocupação com esse trabalho – uma vez que a intenção do autor nos exercícios propostos parece ser mais a de ilustrar as isometrias ou homotetias definidas –, em Averbuch é com apoio no trabalho da técnica que se encaminham todas as definições e propriedades. Já em Lamparelli, embora não se tenha verificado preocupação com o trabalho da técnica a partir de tarefas associadas a um mesmo tipo de tarefa, o que se pretende nos exercícios sobre simetrias ou homotetias não parece ser o de ilustrar definições e propriedades, mas aplicar o conceito de função. Nas obras analisadas que são posteriores ao movimento de reforma da Matemática Moderna, nota-se em Imenes e Lellis preocupação com o trabalho da técnica no sentido de gerar novas técnicas, como pode ser observado especialmente nos livros da 6ª, 7ª e 8ª séries. Já em Bigode, a preocupação maior parece ser, como já dito anteriormente, a da formação dos conceitos de reflexão, rotação ou

translação além de homotetia, em detrimento da preocupação com a geração de técnicas ou de novos tipos de tarefas sobre o tema.

Quanto ao momento da institucionalização, é possível observar que, nas obras posteriores ao movimento de reforma da Matemática Moderna, os autores utilizam os próprios exercícios propostos para institucionalizar novas propriedades. Nesse aspecto, diferem das obras do período correspondente ao movimento. Em Sangiorgi, o momento da institucionalização coincide com o primeiro momento de estudo, quando é feita uma exposição teórica sobre o tema. Em Lamparelli e Averbuch, a institucionalização ocorre após a proposição das tarefas ou ainda, como em Averbuch, após a apresentação dos grupos de exercícios nos quais são encaminhadas as definições ou as propriedades.

O momento da avaliação é aquele em que se deve fazer um balanço da organização matemática proposta (CHEVALLARD, 1999, p.254). De acordo com Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p.13-15), avalia-se a qualidade dos elementos de uma organização local verificando se existem categorias suficientemente variadas de cada tipo de tarefa, se os tipos de tarefas estão bem identificados, se estão associados às demais atividades dos alunos (ou se estão isolados), se as técnicas estão suficientemente trabalhadas, se o discurso tecnológico é suficientemente explícito e ajuda a justificar as técnicas, se existem técnicas que permitam resolver uma tarefa e também a sua inversa, e se, por fim, existem tarefas nas quais os dados não estejam todos previamente fixados, que são as chamadas tarefas abertas. Quanto ao primeiro critério de avaliação da organização matemática local, observamos que as cinco obras analisadas apresentam tipos de tarefas nos quais podem ser reconhecidas categorias variadas, embora a exploração de cada tipo de tarefa pudesse ser, a nosso ver, mais bem explorada na obra de Sangiorgi (1969). De maneira geral, os tipos de tarefas estão bem identificados e associados às demais atividades dos alunos. No que tange a este

último aspecto, cabe ressaltar a identificação de tipos de tarefas isolados em algumas obras conforme foi registrado nas respectivas análises, embora tal identificação não tenha ocorrido de forma geral nas organizações propostas. O trabalho da técnica, assim como a suficiência ou não do discurso tecnológico como critério de avaliação da organização matemática, foram comentados anteriormente, por ocasião da análise do terceiro e do quarto momentos de estudo. Com relação à existência de técnicas que permitam resolver uma tarefa e também a sua inversa, não se notou que este aspecto estivesse presente regularmente nas organizações propostas nas obras analisadas, embora tenham aparecido pontualmente. A presença de tarefas abertas foi constatada apenas nas obras analisadas que são posteriores ao movimento de reforma da Matemática Moderna.

Constatamos, ainda, que o cuidado com a estrutura matemática presente nas obras do período de reforma da Matemática Moderna preserva o terceiro momento de estudo e o garante evitando o aparecimento de questões isoladas, mas também o de questões abertas. Já nas obras analisadas que são posteriores ao movimento de reforma, como a ênfase à concepção da matemática enquanto estrutura não é tão evidente quanto no período anterior, é possível notar a presença de questões isoladas, mas também a de questões abertas.

Para Chevallard (2002b), cada tipo de tarefa representa um objeto de estudo, e um conjunto de tipos de tarefas em torno de uma determinada tecnologia compõe um tema. Objetos e temas constituem o que Chevallard chama “níveis inferiores de determinação matemática”. “A ausência de uma relação dos níveis dos objetos e temas com os níveis superiores de setores, domínios e disciplina, torna impossível pensar as relações de motivação entre tipos de tarefas” (CHEVALLARD, 2002b, p.6, tradução nossa). Nos níveis superiores de determinação matemática, deve-se colocar em interação objetos matemáticos juntamente com os não-matemáticos, formando organizações mistas. Segundo Chevallard

(2002b, p.8), essas organizações matemáticas devem relacionar elementos puramente matemáticos dos níveis inferiores de determinação com aqueles não-matemáticos, como seria o caso do uso da topografia, por exemplo, para resolver problemas da geometria.

Examinando a organização matemática apresentada nas obras analisadas relativamente ao ensino de homotetia, a proposta de ensino parece se concentrar, em todas elas, no nível dos objetos e temas. Isso significa que os tipos de tarefas apresentados são caracterizados ou por uma mesma técnica de resolução, ou por uma mesma tecnologia, sem se relacionar aos níveis superiores de determinação matemática nem a elementos não-matemáticos.

Para as isometrias, entretanto, nota-se em Bigode (2000) um alto vínculo com o nível superior da disciplina matemática, embora não sejam enfatizadas suas relações com os inferiores, o que parece haver em Imenes e Lellis (2002). Quanto às três obras analisadas relativamente ao movimento de reforma da Matemática Moderna, nota-se, em Sangiorgi (1969), uma concentração dos exercícios no nível dos objetos. Em Averbuch (1975), acredita-se que haja uma concentração dos exercícios propostos aos alunos no nível dos temas, uma vez que as tecnologias concentram-se essencialmente em conceitos e propriedades da simetria axial. O trabalho proposto em Lamparelli (1972) – acredita-se – está no nível dos setores, uma vez que é dada grande ênfase às relações entre as transformações geométricas, o estudo das funções e tópicos da geometria euclidiana.

COMPARAÇÃO DAS OBRAS DE ACORDO COM PESQUISAS ANTERIORES

A comparação que faremos das obras com base na análise de pesquisas anteriores ficará restrita às principais dificuldades que os alunos podem apresentar relativamente à

aprendizagem das transformações geométricas. Procuraremos examinar quais dessas dificuldades poderão ser geradas, ou não, nos exercícios propostos aos alunos.

Nas pesquisas de Jaime e Gutiérrez (1996) e Denys e Grenier (1986), examinadas anteriormente, as principais dificuldades que os alunos podem ter relativamente à reflexão dizem respeito à posição do eixo de simetria e à posição relativa entre a figura original e o eixo, especialmente quando este corta a figura. Ao desenhar a imagem de uma figura dada, os alunos não mantêm a eqüidistância ao eixo de pontos correspondentes (da figura original e da imagem), como tampouco a perpendicularidade do segmento que une dois pontos correspondentes e o eixo de simetria. Freqüentemente, a figura produzida pelos alunos é paralela à figura original, com a imagem vinculada apenas à posição da figura original, independente do eixo de simetria.

Quanto à rotação, a principal dificuldade apresentada na pesquisa de Jaime e Gutiérrez (1996) relaciona-se também a distâncias relativas. Ao fazer girar uma figura em torno de um ponto (o centro da rotação), a eqüidistância de pontos correspondentes (da figura original e da imagem) ao centro tende a ser negligenciada. Embora a resolução da tarefa não comprometa o giro, a figura manterá uma posição paralela em relação à original. Seja como for, segundo Jaime e Gutiérrez (1996, p.66), é mais fácil girar uma figura quando ela contém o centro da rotação do que quando este está separado dela.

Na pesquisa de Jahn (1998), a dificuldade examinada relativamente à aprendizagem de transformações geométricas diz respeito à passagem do estudo das transformações do contexto da geometria sintética para o estudo desenvolvido no espaço enquanto conjunto de pontos. Na referida pesquisa, juntamente com uma análise das condições que podem favorecer a passagem de uma concepção a outra, encontra-se a observação de que é

possível permitir ao aluno, em um trabalho proposto no nível pontual, encontrar imagens de figuras recorrendo à concepção global (JAHN, 1998, p.74).

Examinando as principais dificuldades que os alunos podem apresentar relativamente a tarefas propostas sobre reflexão, nota-se – nas três obras analisadas correspondentes ao movimento de reforma da Matemática Moderna – a presença de exercícios em que se pede a simétrica de uma figura cortada pelo eixo de simetria. Em uma concepção pontual de transformação, é possível que se espere que os alunos procurem construir pontos simétricos aos pontos da figura dada. Nesse sentido, poderia ser considerado um fator secundário a posição do eixo. Entretanto, de acordo com a pesquisa de Jahn (1998), a concepção pontual consiste, ela própria, uma dificuldade na aprendizagem das transformações. Além disso, em conformidade com as pesquisas de Jaime e Gutiérrez (1996) e Denys e Grenier (1986), a posição relativa eixo-objeto é considerada um gerador de dificuldades, especialmente quando o eixo corta a figura. Nesse sentido, acreditamos que os alunos possam encontrar dificuldades para resolver exercícios propostos, com tais características nas obras analisadas do período do movimento. Da mesma forma, acreditamos que, em Imenes e Lellis (2002), as tarefas propostas com estas condições dificilmente seriam resolvidas pelos alunos. Na obra de Bigode (2000), não há exercícios que apresentem tais dificuldades.

Rotações não são abordadas nas obras de Lamparelli (1972) e Averbuch (1975). Em Sangiorgi (1969), esse estudo é pontual como o das demais transformações. A tarefa proposta sobre a rotação de um quadrado parte da explicação sobre a rotação de um triângulo que seria obtida a partir dessa transformação aplicada a cada um de seus vértices. Nesse sentido, a dificuldade apontada por Jaime e Gutiérrez (1996) relativamente à manutenção das distâncias entre pontos correspondentes e o centro da rotação

provavelmente não se concretizaria, visto que a atividade ficaria restrita às rotações de quatro pontos. Já em Imenes e Lellis (2002), tarefas propostas sobre rotações podem gerar dificuldades aos alunos relativas à manutenção de distâncias entre o centro de rotação e pontos correspondentes da figura e de sua imagem, uma vez que não há, na organização matemática proposta, elementos tecnológicos suficientes que justifiquem a técnica a ser aplicada, conforme explicitado na análise da obra no 6º capítulo do nosso trabalho. Em Bigode (2000), os exercícios sobre rotação estão voltados ao reconhecimento de figuras que contenham ou não uma rotação. Considerando que os centros de rotação, nesses casos, fazem parte da figura, acreditamos que os alunos não teriam dificuldades em resolver as tarefas propostas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

Fazendo uma comparação geral das obras analisadas, é possível concluir que, naquelas correspondentes ao movimento de reforma da Matemática Moderna, deu-se ênfase ao aspecto estrutural da matemática, o que, na abordagem feita do ensino das transformações geométricas traduziu-se na concentração nos objetos, temas e setores entre os níveis de determinação matemática (CHEVALLARD, 2002b). Nas obras posteriores ao movimento, o ensino proposto de transformações apresentou, por outro lado, alto vínculo com os níveis superiores da disciplina matemática. Entretanto, de acordo com a análise praxeológica desenvolvida, foram observados problemas relativos à completude da organização matemática proposta (BOSCH; FONSECA; GASCÓN, 2004) e também em relação às principais dificuldades dos alunos detectadas em pesquisas anteriores, independentemente do período em que a obra tenha sido produzida. Ou seja, a partir da base teórica por nós adotada, é possível afirmar que nenhuma das épocas analisadas

garantiria, por si, um ensino de transformações geométricas isento dos importantes problemas por nós levantados.

Uma conclusão para a qual esta pesquisa aponta diz respeito ao caráter excludente não só de conteúdos – como foi o caso das transformações geométricas –, mas também do enfoque dado ao seu ensino em determinados períodos. Fica difícil fazer uma análise do desenvolvimento do ensino das transformações geométricas em virtude da ruptura ocorrida basicamente nos anos 80 e início dos 90. A ausência das transformações geométricas nos programas de ensino, por um período relativamente longo, pode ter ocasionado o descompasso desse assunto com relação às mudanças pelas quais passou o ensino da geometria a partir de então, impossibilitando uma integração maior entre as transformações geométricas e os demais tópicos da geometria. Acreditamos que a presença de isometrias e homotetias no currículo possa levar a um importante estudo de padrões que, vinculado a outros itens da geometria, permitirá ao professor estabelecer com seus alunos uma relação maior com a disciplina matemática. Conforme Devlin (2004, p.26), a matemática é a ciência dos padrões e que diferentes tipos de padrões fazem surgir as diferentes áreas da matemática. Segundo esse autor, cabe à geometria estudar padrões de forma, à teoria dos números os padrões numéricos ou de cálculo, à probabilidade, cabe estudar padrões do acaso, etc. Nesse sentido, reflexões, translações e rotações, além de homotetias, podem se tornar um importante meio de visualização da disciplina matemática no trabalho feito em sala de aula. Além da ausência das transformações geométricas nos programas de ensino do período mencionado, notamos também, a partir da análise praxeológica desenvolvida, que os aspectos ressaltados no período de reforma da Matemática Moderna, relativamente à estrutura matemática, não devessem ser descartados por ocasião de sua retomada em meados dos anos 90. Acreditamos que essa mudança de enfoque possa ter feito com que,

em alguns casos, a abordagem, especialmente das isometrias, ficasse restrita aos níveis de menor especificidade do domínio da geometria e da disciplina matemática. Isso, a nosso ver, pode ter feito com que o estudo desse tipo de transformação parecesse apenas um apêndice do estudo da geometria.

Uma recomendação que poderia ser feita relativamente ao ensino de transformações geométricas no Fundamental, especificamente nas quatro últimas séries, seria exatamente a de não negligenciar qualquer um dos aspectos examinados nesta pesquisa tais como: os momentos de estudo assim como a atenção na elaboração de organizações matemáticas locais relativamente completas; a interação entre objetos matemáticos e não-matemáticos relacionando os níveis inferiores com os superiores de determinação matemática, com atenção às principais dificuldades dos alunos apresentadas nas pesquisas analisadas.

Para desenvolver uma seqüência didática (ARTIGUE et al, 1995) sobre isometrias ou homotetias, o pesquisador poderá, a título de análise preliminar, examinar as principais dificuldades que os alunos podem encontrar no estudo de tais assuntos a partir das pesquisas analisadas neste trabalho, assim como as implicações epistemológicas acerca das concepções pontual ou global de figura. Para elaborar sua análise a priori, o pesquisador poderá atuar sobre um certo número de variáveis tendo em vista a construção de uma organização matemática local relativamente completa, tais como: a aplicação de uma técnica de resolução de um determinado tipo de tarefa implica em uma tecnologia disponível ao estudante para que este possa justificá-la; a existência de mais de uma técnica para realizar uma mesma tarefa assim como técnicas para desenvolver as tarefas inversas; a existência de tarefas abertas. Quanto à experimentação e à análise a posteriori, devemos ressaltar a importância da avaliação da organização matemática local a ser construída, que deverá permear o trabalho nestas duas últimas fases.

Boa parte do presente trabalho se detém na análise de exercícios propostos aos alunos em livros didáticos de alguns períodos da história recente do ensino da matemática. Para Tardif e Gauthier (2001, p.195), os saberes do professor estão vinculados a exigências de racionalidade no sentido de que ele deva falar de sua prática, argumentar sobre ela e apresentar elementos de validação. Nesse sentido, acreditamos que nosso trabalho possa trazer contribuições à formação de professores uma vez que no centro de sua prática está a escolha das tarefas que ele deverá propor a seus alunos devendo, para isto, estabelecer critérios de escolhas, argumentação e justificações.

Tivemos a oportunidade de desenvolver a análise à qual nos propusemos com base tanto na Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, como nos resultados de importantes pesquisas sobre ensino e aprendizagem de transformações geométricas. Outras teorias não foram examinadas. Dada a complexidade do processo de ensino, acreditamos que diferentes teorias também pudessem servir de apoio à análise e que esta pudesse se estender, igualmente, a outros tópicos da geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ, T. G. **A matemática da reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar**. 2004. 257f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Ed.) **Ingenieria didáctica em educación matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

AVERBUCH, A.; BECHARA, L.; COHEN, F.G.; LIBERMAN, M.P. **Curso moderno de matemática para o ensino de primeiro grau**. 7ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

AVERBUCH, A.; BECHARA, L.; COHEN, F.G.; LIBERMAN, M.P. **Curso moderno de matemática para o ensino de primeiro grau**. 8ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1977.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. 7ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. 8ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BISHOP, D. M. **Group Theory and Chemistry**. Oxford: Clarendon Press, 1973.

BKOUCHE, R. **De la Geometrie et des Transformations**. In: Repères nº 4, julho. IREM. Lille, 1991.

BKOUCHE, R. Axiomatique, formalisme et théorie. **Enseigment de la Géométrie Bulletin Inter-Irem** n. 23. França, 1983.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN J. **Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares**. Grenoble, França: La Pensée Sauvage, 2004.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. 1998. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Guia de livros didáticos 5ª a 8ª séries. PNLD 1999. Brasília: MEC.

BURIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. 1989. 286f. Dissertação

(Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CHARLOT, B. **Histoire de la reforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et sócio-économique**. In: Bulletin APMEP nº 35. IREM du Mans. França, 1986.

CHERVEL, André. **História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa**. In: Teoria & Educação. nº 2. p. 177-229. Porto Alegre, 1990.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Y. **L' analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques v.19, nº 2. p. 221-266. Marseille, 1999.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'etude. 1. Structures & Functions. In: 11 ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 2002, Barcelona. **Anais eletrônicos**. França, 2002a.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'etude. 3. Ecologie & Regulation. In: 11 ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 2002, Barcelona. **Anais eletrônicos**. França, 2002b.

CROWLEY, M. L. O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p.1-20.

D'AMBROSIO, B. S. **The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education**. 1987. 257f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Escola de Educação da Universidade de Indiana, 1987.

DAWKINS, R. **A escalada do monte improvável – uma defesa da teoria da evolução**. Tradução: Suzana Sturlini Couto. São Paulo: Companhia das Letras, 1998, p.246-278.

DENYS, B.; GRENIER, D. **Symétrie orthogonale: des élèves français et japonais face à une même tache de construction**. Petit X nº12 I.R.E.M. de Grenoble, 1986.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**. Tradução: Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometría Plana**. São Paulo: Atual, 1980. (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, 9).

DUARTE, A. R. S.; SILVA, M. C. L. Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **UEPG**, Ponta Grossa, v.1, n.1, p.87-93, jan.-jun. 2006. Disponível em: <http://www.uepg.br/praxiseducativa/v1n1Artigo_8.pdf.> Acesso em: 3 dez. 2006.

FARMER, D. W. **Grupos e Simetria**. Tradução: Cristina Isabel Januário. Lisboa: Gradiva, 1999.

HEFEZ, A. Uma introdução à história da geometria projetiva. **Matemática Universitária**: publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, n. 3, p.35-50, jun. 1986.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. 5ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. 6ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. 7ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. 8ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

JAHN, A. P. **Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre**. 1998. 278f. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998.

JAIME, A. P.; GUTIÉRREZ, A. R. **El grupo de las isometrias del plano**. Madri: Editorial Síntesis, 1996.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. Tradução: Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LAMPARELLI, L. C.; CANTON, A. W. P.; MORETTIN, P. A.; INDIANI, D. F. **Matemática para o ginásio**. 4ª série. São Paulo: Edart, 1972.

LAMPARELLI, L. C.; CANTON, A. W. P.; MORETTIN, P. A.; INDIANI, D. F. **Matemática para o ginásio**. vol.1. São Paulo: Edart, 1969.

LEHMANN, D.; BKOUCHE R. **Initiation à la géométrie**. Apêndice histórico de R. Bkouche. Paris: Presses Universitaires de France, 1998, p.437-489.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MIORIM, M. A. **O ensino da matemática: evolução e modernização**. 1995. 218f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

MIORIM, M.A. **Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil**. In: Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2005, Porto, Portugal, **Anais eletrônicos**. Disponível em < http://www.mytwt.net/cibem5/MyFiles/outros/Maria_Angela_Miorim.pdf#search=%22GRUEMA%22>. Acesso em: 22 set. 2006.

MONTANGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a Inteligência em Evolução**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MORA, J. F. **Dicionário de Filosofia**. Tradução: Maria Stela Gonçalves, Adail U. Sobral, Marcos Bagno, Nicolas Nyimi Campanário. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Tradução: Maria Fernanda de Moura Rebelo Jesuíno. Lisboa: Dom Quixote, 1987. Cap.3.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**. 3º vol. 6.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**. 4º vol. 4.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. Proposta curricular para o ensino de matemática: ensino fundamental. 5. ed. São Paulo: SE/CENP, 1997.

_____. Secretaria de Estado da Educação. Subsídios para a implementação do guia curricular de matemática – geometria para o 1º grau – 5ª a 8ª séries – informações para o professor. 2. ed. São Paulo, SE/CENP/DRHU, 1979.

_____. Secretaria de Estado da Educação. Subsídios para a implementação do guia curricular de matemática – geometria para o 1º grau – 5ª a 8ª séries – atividades. 2. ed. São Paulo, SE/CENP/DRHU, 1979.

TARDIF, M.; GAUTHIER, C. O professor como “ator racional”: que racionalidade, que saber, que julgamento?. In: PAQUAY, L.; PERRENOUD, P.; ALTET, M.; CHARLIER, E. (Org.). **Formando professores profissionais: quais estratégias? Quais competências?**. Tradução: Fátima Murad e Eunice Gruman. Porto Alegre: Artmed, 2001, p.185-210.

WEYL, H. **Simetria**. Tradução: Victor Baranauskas. São Paulo: Edusp, 1997.

APÊNDICE

Listamos a seguir, na ordem da publicação nos anos 80 e início dos anos 90, obras que, conforme explicitamos no primeiro capítulo, não fazem menção a transformações geométricas em qualquer um dos quatro volumes de quinta a oitava série do Ensino Fundamental.

- ✓ AVERBUCH, A.; COHEN, F.; BECHARA, L.S.; LIBERMAN, M.P. **Matemática saber e fazer**. São Paulo: Saraiva, 1985.
- ✓ BIANCHINI, E. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1986.
- ✓ TROTTA, F. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1988.
- ✓ MORI, I.; ONAGA, D.S. **Para aprender matemática**. São Paulo: Saraiva, 1989.
- ✓ IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1991.
- ✓ JAKUBO, J.J.; LELLIS, M. **Matemática na medida certa**. São Paulo: Scipione, 1991.
- ✓ GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI J.R; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. Ed renovada. São Paulo: FTD, 1992.
- ✓ BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O.R.; LAUREANO, J.L.T. **Matemática e vida**. 6 ed. São Paulo: Ática, 1995.
- ✓ DI PIERRO, S. **Conceitos e histórias**. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.
- ✓ GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI, J.R. **Matemática pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 1996.