Sílvio Alves da Silva

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO:

Construindo uma aprendizagem significativa

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2005

Sílvio Alves da Silva

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO:

Construindo uma aprendizagem significativa

*Dissertação de mestrado apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do(a) **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud***

PUC/SP

São Paulo

2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ___________________________ **Local e Data:** _______________

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos pesquisadores e a todas as pessoas que lutam por uma Educação que seja significativa para o aluno, tornando-o um sujeito proativo na Escola e na sociedade.

AGRADECIMENTOS

Esta é uma dura e longa caminhada, porém teria sido impossível sem a colaboração, a amizade, a paciência e o carinho de muitas pessoas.

Agradeço a todos os professores que me deram aula durante o mestrado. Seus ensinamentos transformaram, de fato, a minha concepção de professor para pesquisador em Educação Matemática.

Aos colegas de curso de mestrado, agradeço pela troca de pontos de vista e pelas contribuições de novas concepções, especialmente a Ricardo Ronald Eberson e a Cecília Aparecida Virgilio de Oliveira, cuja amizade e colaboração foram muito importantes para poder continuar insistindo no que às vezes parecia ser uma meta inatingível.

Muito devo aos alunos do Colégio Mater e Magistra por sua dedicação, paciência e colaboração na resolução da seqüência didática.

A CAPES devo o incentivo pela bolsa de estudos, cuja qual permitiu uma melhor dedicação ao Programa de Pós Graduação.

Eu jamais posso me esquecer do secretário do nosso programa, Sr. Francisco Olímpio da Silveira, a pessoa que me auxiliou o tempo todo na obtenção da bolsa de estudos. Aliás, Francisco (como nós o chamamos) sempre me recebeu com sorriso e solicitude. A ele devo muito e carregarei esta gratidão comigo sempre.

Na banca examinadora, além de meu orientador, tive sorte de ter duas pessoas extremamente capazes, conscientes e humildes que colaboraram com meu trabalho de forma intensa e decisiva: a professora-doutora Sandra Pinto Magina e o professor-doutor Pedro Malagutti.

Agradeço imensamente ao professor-doutor Saddo Ag Amouloud, que, para mim, não foi só um orientador de dissertação de mestrado, mas sim uma pessoa

que, apesar da minha arrogância e ingenuidade, dedicou-me atenção, compreensão, colaboração e respeito mediante seus comentários e me fez perceber que eu realmente tenho muito a aprender...

De todas essas pessoas maravilhosas que me acompanharam, as mais importantes nesta conquista foram minha esposa Zélia e meus filhos Rodrigo, Vanessa e Sophia. Agradeço-lhes pelo carinho, compreensão e amor dispensado a quem quase nunca esteve presente durante todo esse período.

Muitíssimo obrigado a todos vocês!

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi de investigar uma abordagem de ensino da trigonometria no triângulo retângulo, em que se pretendeu introduzir as razões trigonométricas seno, co-seno e tangente. Nossa hipótese é que podemos construir uma aprendizagem significativa para o aluno por meio de situações-problema que articulam as construções geométricas e o tratamento figural na abordagem das relações trigonométricas.

Elaboramos uma seqüência didática com quatro atividades e a aplicamos, com base nos princípios da Engenharia Didática, a fim de responder se a produção de uma seqüência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo.

Para respondermos à questão de pesquisa, analisamos as concepções dos alunos durante a aplicação da seqüência, a resolução das situações contidas nas atividades e sua discussão. Concluímos que houve evolução conceitual dos alunos das relações trigonométricas.

Palavras-chave: trigonometria, triângulo retângulo, seqüência didática, aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The aim of this work is to was investigating an approach to the teaching of trigonometry in the right triangle, where it was pretended to present the concepts underlying the trigonometric ratios sine, cosine and tangent. Our research hypotesis is that we can make a signyficative learning to the student through problem-situations that articuleded the geometry construction and the figural tratament in the abording of the trigonometric relations.

We prepared a didactic sequence with four activities and we applied, supporting by Engineering Didactic fundaments, to aswer if the production of the teaching sequence abording the geometry constructions and geometry transformations articuladed to the figural tratament gives a significative learning to the students of the inicial serie of the high school of the concepts in the trigonometry right triangle.

For to answer the research question, we analised the conceptions of the students over the aplication of the sequence, the resolution of the situations in the activities and the discution of this situations. We concluded that there was conceptual development of the students in the trigonometry relations.

Keywords: trigonometry, trigonometry of the right triangle, didactic sequence, significative learning.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 4: SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Tudo começou com a experiência como professor de Ensino Médio. A forma com que os livros didáticos abordavam determinados assuntos não parecia coerente, especialmente a trigonometria no triângulo retângulo. As relações trigonométricas apareciam prontas, desprovidas de significado.

Fizemos um pré-projeto de pesquisa do ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo com orientação do professor Saddo Ag. Almouloud. Apesar deste trabalho ter sido uma introdução à pesquisa científica, nele começou a ficar evidente a necessidade de propor situações que levem o aluno à produção do conceito das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Ao analisarmos as pesquisas correlatas, todas eram unânimes em apontar para a falta de sentido que as abordagens tradicionais traziam para o processo de ensino-aprendizagem na trigonometria.

Notamos que podíamos contribuir com a produção de significado de maneira diferente das outras pesquisas: nossa proposta trazia a articulação entre as construções geométricas e as transformações no plano para o tratamento figural. Achamos que esse caminho seria interessante, pois relaciona conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, tais como a semelhança e a congruência, evidencia a importância das construções geométricas na trigonometria, tornando explícito o aspecto algébrico e geométrico da trigonometria.

Escolhemos, então, elaborar uma seqüência didática para que se produzisse uma aprendizagem significativa das relações trigonométricas do triângulo retângulo, por meio de situações que levassem o aluno a manipulação figural provocada pelas construções geométricas e das transformações no plano.

O processo de ensino-aprendizagem tradicional e seus efeitos têm sido estudados por vários trabalhos de pesquisa em Educação Matemática. Nosso trabalho se preocupa em elaborar uma proposta diferente da abordagem tradicional para a trigonometria no triângulo retângulo.

Com o foco no aluno e nas atividades em sala de aula, utilizamo-nos dos princípios da Engenharia Didática **(Artigue, 1990)** para construir uma seqüência didática, cujo objetivo é produzir uma aprendizagem que resgate conhecimentos anteriores ao tema, tais como semelhança, congruência e as construções geométricas e provoque nos alunos tratamentos figurais **(Duval, 1995)** por meio de transformações geométricas: a reflexão, a rotação e a translação, para fazer com que as relações trigonométricas no triângulo retângulo sejam abstraídas a partir da observação dessas manipulações figurais. Acreditamos que desta maneira podemos produzir uma aprendizagem significativa para o aluno da trigonometria no triângulo retângulo.

A seqüência tem ao todo quatro atividades. Sua elaboração, além de procurar promover a articulação entre as construções geométricas e as transformações no plano, contém situações em que são valorizadas as mudanças de ponto de vista que foram observadas durante a análise epistemológica da trigonometria. Procuramos também, aproveitar situações que ocorreram na história da matemática (cálculo do comprimento da circunferência por meio do perímetro de polígonos regulares) e explicitar a relação entre a geometria e a álgebra que são inerentes à trigonometria.

A validação da seqüência didática foi feita pelo confronto entre a analise *a priori* (análise das possíveis dificuldades e estratégias do aluno para a resolução dos problemas) e *a posteriori* (análise do desempenho dos alunos na resolução da seqüência e na discussão coletiva). A partir disso e da confirmação de nossas hipóteses de pesquisa teremos condições de responder à questão de pesquisa: “Uma seqüência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo?”.

No capítulo I, fazemos um estudo epistemológico da trigonometria no triângulo retângulo. Este estudo serve para sabermos como se deu a evolução conceitual deste tema. É útil, portanto, para compararmos essa evolução com a evolução conceitual proposta pelos livros didáticos. Além disso, nos dá respaldo para a construção da seqüência didática.

Seguimos com o estudo da transformação do objeto matemático a objeto de ensino no capítulo II. Nele, analisamos os Parâmetros Curriculares Oficiais de Ensino (PCN, PCNEM, etc) e livros didáticos. Analisamos a coerência e a viabilidade de cada um e confrontamos as propostas oficiais com a abordagem do livro didático.

No capítulo III, analisamos a literatura correlata ao tema pesquisado e apresentamos a metodologia de pesquisa por nós utilizada. Esta análise nos guia na direção dos temas e dos problemas relacionados à trigonometria no triângulo retângulo e nos faz refletir a respeito da validade desses problemas. Aproveitamos para apresentar a nossa questão de pesquisa seguida de suas respectivas hipóteses. A apresentação da metodologia utilizada explicita que referenciais teóricos e que ferramentas utilizamos para resolver a nossa questão de pesquisa.

O capítulo IV apresenta a seqüência didática e suas análises a *priori* e a *posteriori*. Na análise a *priori*, tratamos de mostrar como controlamos as escolhas feitas e como esperamos que elas influenciem o aluno. Para isso, apontamos quais são as dificuldades ou estratégias que os alunos tiveram na resolução das atividades propostas. A análise a *posteriori* confronta os elementos previstos na análise a *priori* com o que efetivamente aconteceu na aplicação da seqüência didática. Ela nos proporciona, portanto, a possibilidade de refutar ou confirmar as hipóteses de pesquisa e responder, eventualmente, à questão de pesquisa.

CAPÍTULO 1: ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO: TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, fazemos um estudo histórico da evolução dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo até a sua incorporação à análise real. Para esta tarefa, utilizamos como fontes três livros de História da Matemática.

Este estudo nos servirá para entendermos quais são as concepções inerentes ao desenvolvimento de conceitos importantes, tais como as relações entre lado e ângulo, a evolução dessas relações para funções que associam ângulos ou arcos a essas relações. Isso fará com que entendamos melhor o objeto matemático e possibilitará uma melhor construção da seqüência didática.

1.1 Considerações gerais sobre a trigonometria nas civilizações egípcia, babilônica e chinesa.

O conhecimento matemático desses três povos sempre esteve associado, ao que parecem evidenciar as citações das nossas fontes, a um caráter pragmático, de solução de problemas cotidianos. A geometria desenvolvida nessas três civilizações aparentemente estava relacionada ao conhecimento prático do teorema de Pitágoras e também de semelhança entre triângulos. Há sinais de conhecimento rudimentar de trigonometria, destacando-se o povo babilônio com a montagem de uma tabela dos valores do quadrado da secante, que foram elaborados, possivelmente, pelo desenvolvimento da astronomia.

Apesar de esboçarem algum conhecimento trigonométrico, esses conhecimentos procuravam relacionar apenas as medidas de lados num triângulo. Não fica claro se essas civilizações tinham desenvolvido o conceito de ângulo. Seus documentos não evidenciam um conceito de medida de ângulo, nem a relação de sua medida e a variação com o lado num triângulo. Fica difícil afirmar, portanto, que houve um estudo sistemático das relações trigonométricas que caracterize a trigonometria como objeto matemático.

Outro fator importante que devemos estar atentos é que:

> [...] os papiros e tabletas encontrados contêm apenas casos específicos e problemas, sem formulações gerais, e pode-se perguntar se essas civilizações antigas realmente percebiam os princípios unificadores que estão no centro da matemática (Boyer, 1974, p. 28).

Como conseqüência da falta de formulação geral, não havia uma preocupação para a prova dos métodos utilizados na solução desses problemas e por esse motivo acabou dificultando a teorização e abstração dos conhecimentos práticos das referidas civilizações. Conseqüentemente, atravancou o desenvolvimento da trigonometria.

1.2 Trigonometria na Grécia Antiga

A substituição do uso do bronze pelo ferro, por volta de 900 a.C., trouxe importantes transformações sociais, políticas e econômicas ao longo dos povos do mediterrâneo[1]. Essa troca estimulou o comércio, pois fez os custos de produção diminuírem e motivou, portanto, o intercâmbio cultural entre os povos mediterrâneos.

O desenvolvimento da trigonometria esteve, nesse período, bastante ligado à astronomia. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. obtiveram várias informações em trigonometria, das quais algumas parecem ter sido transmitidas para os gregos, como poderemos confirmar logo adiante.

Um importante comerciante do século V chamado Tales de Mileto parece ter tido a oportunidade de ter viajado ao Egito e à Babilônia e ter recebido, desses povos, importantes contribuições na área da geometria.

Com Tales, unida ao rigor matemático, aparece a preocupação em relacionar medidas de ângulo, lados e suas propriedades.

O pensamento filosófico grego teve como um de seus pontos máximos a sistematização da lógica dedutiva de Aristóteles. No campo matemático, o

[1] **In História Concisa das Matemáticas, de Dirk J. Struik, página 72.**

pensamento rigoroso matemático teve o seu auge no desenvolvimento axiomático da geometria de Euclides, por volta de 300 a.C.

Com o domínio do oriente por Alexandre o Grande e a formação do império persa, a cultura helênica foi espalhada por todo esse império: Egito, Mesopotâmia e parte da Índia foram helenizadas.

A decadência do rigor matemático grego, ao que parece, teve concomitância com a morte de Alexandre o Grande, por volta de 323 a.C[21]. Na época, as civilizações urbanas ainda mantinham as características helenísticas, mas as cidades do campo ainda conservavam a sua tradição. Outro fato importante é que um império dessa magnitude precisa se envolver com questões administrativas, práticas. A trigonometria, nesse contexto, fica voltada para soluções de problemas de agricultura, navegação e, com bastante intensidade, de astronomia.

Devido às observações astronômicas e a problemas ligados a essas observações, tais como a determinação da relação da distância entre terra e lua e terra e sol, a determinação dos tamanhos da terra, da lua e do sol, surgiram as primeiras manifestações do conceito do ângulo na solução de problemas envolvendo triângulos. Dentre essas manifestações, destacamos as de Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.) e Eratóstenes de Cirene (276 – 194 a.C.).

Em sua obra "*Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua*" Aristarco procurou determinar a distância Terra-Lua em relação à distância Terra-Sol. Aristarco concluiu que o Sol estaria cerca de 20 vezes mais distante da Terra em relação à lua. A proporção verdadeira é de cerca de 400 vezes, mas o procedimento estava correto. Os instrumentos de medição de ângulos então disponíveis não permitiam obter valores mais precisos. O erro de Aristarco foi a estimar um ângulo de 87°, conforme figura abaixo, quando na verdade o ângulo é de 89,5°.

---

[2] In História Concisa das Matemáticas, de Dirk J. Struik, página 88.

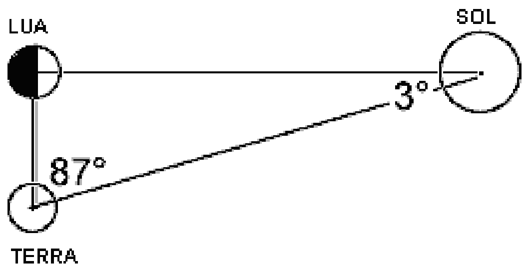


Figura 1: Esquema de Aristarco[3]

Aristarco sabia o eqüivalente a que a razão do comprimento do arco para o comprimento da corda diminui quando o arco varia de 180° para 0°, aproximando-se do limite 1. Ou seja, para um arco próximo de 0° (nesse caso 3°) vale que o comprimento da corda é aproximadamente igual ao comprimento do arco:

$$\mathrm{Sen}\,3° = \mathrm{d_{tl}}/\mathrm{d_{ls}} \Rightarrow \mathrm{d_{tl}}/\,\mathrm{d_{ls}} = 3.\frac{\pi}{180} \cong \frac{1}{20}$$

$$\mathrm{Portanto,}\, \mathrm{d_{ls}} \cong 20.\mathrm{d_{tl}}$$

($\mathrm{d_{tl}}$: distância da terra até o sol e $\mathrm{d_{ls}}$: distância da lua até o sol)

Com as relações dos diâmetros da terra, lua e sol estabelecidos por Aristarco, o passo seguinte para a determinação do tamanho do sol e da lua seria a determinação do diâmetro da terra. Esse passo foi dado por Eratóstenes de Sirene.

Eratóstenes viveu em Alexandria algumas décadas depois de Euclides e foi diretor da Biblioteca e do Museu. Certa vez, ao ler um papiro da Biblioteca, encontrou a informação de que na cidade de Siena, no vale do Nilo, cerca de 800 km ao sul de Alexandria (5000 estádios), ao meio dia do solstício de verão (o dia mais longo do ano, no hemisfério norte - 21 de junho), colunas verticais não projetavam qualquer sombra, ou seja, o Sol situava-se a prumo. Desconhece-se quem teria sido o autor dessa observação. Eratóstenes resolveu verificar o que acontecia naquele dia, o solstício de verão, em Alexandria ao meio dia e para sua surpresa, em Alexandria as colunas projetavam sombras suficientemente grandes para que não houvesse dúvidas de que as coisas se comportavam de forma distinta em Siena.

[3] **Figura extraída do livro História da Matemática, de Carl B. Boyer, página 109.**

Podemos representar o pensamento de Eratóstenes com o esquema da figura 2:

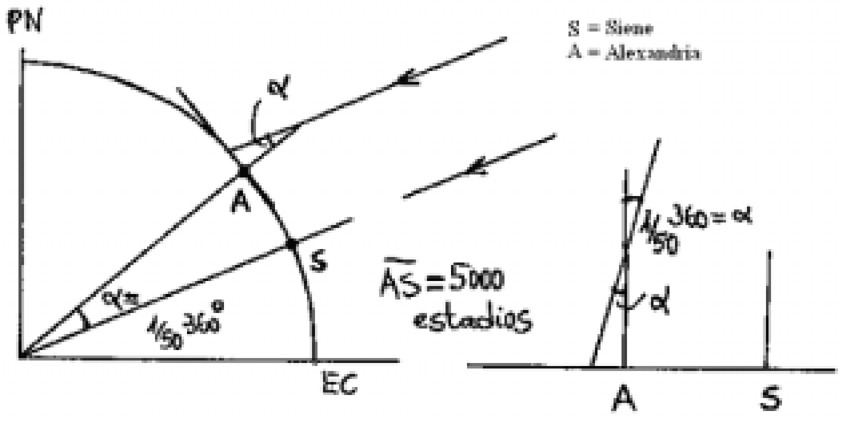


Figura 2: Esquema de Eratóstenes[4]

A partir dos conhecimentos de Eratóstenes e desse esquema, podemos concluir que:

$$\frac{\frac{360°}{50}}{360°} = \frac{5000}{comprimento} \Rightarrow comprimento = 50x5000 = 250.000\text{estádios}$$

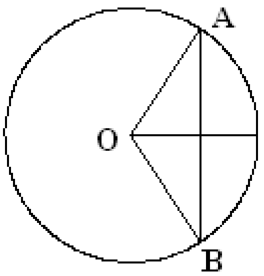
Com o comprimento da Terra conhecido, Eratóstenes pôde calcular o raio. Seus cálculos foram estimados em 25.000 milhas ou 37.000 quilômetros.

Como vimos, com Aristarco e Eratóstenes, o interesse maior dos gregos, por várias gerações, foi o desenvolvimento da astronomia. Os tópicos de matemática ligados a essa astronomia eram a semelhança e a razão entre segmentos. Podemos dizer que "de Hipócrates a Eratóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática" (Boyer, 1974, p. 118).

Um primeiro estudo sistêmico mais relacionado à trigonometria talvez tenha sido feito por um astrônomo chamado Hiparco de Nicéia. Por esse motivo ele é considerado por muitos historiadores matemáticos como "o pai da Trigonometria".

[4] **Figura extraída do *site* http://www.arrakis.es/~xgarciaf/eratos.htm, acessado em 06/2003.**

Na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. A abordagem de Hiparco era então baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda. Fortemente influenciado pela matemática da Babilônia, ele acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de um grau em 60 partes, obtendo o arco de 1 minuto, Hiparco escreve a respeito do cálculo de comprimentos das cordas. Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é justamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo x é $2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}$, conforme figura:



$$A\hat{O}B = x$$
$$OB = r$$
$$\mathrm{sen}\frac{x}{2} = \frac{AB}{2r}$$

Figura 3: Esquema de Hiparco[6]

Posterior à obra de Hiparco, porém a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antigüidade foi a *Syntaxis mathematica*, escrita por **Ptolomeu de Alexandria**, por volta da segunda metade do século II d.C., que contém 13 livros. Esse tratado é famoso por sua compacidade e elegância, e para distinguí-lo de outros foi associado a ele o superlativo *magiste* ou "o maior". Mais tarde, na Arábia o chamaram de Almajesto, e a partir de então, a obra é conhecida por esse nome.

Mostrando a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes.

[6] **Figura criada a partir da descrição do livro História da Matemática, de Carl B. Boyer, página 110.**

Usou $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π. Embora não fizesse uso dos termos seno e co-seno, fez uso das cordas e utilizou o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{AM}{OA} = \frac{2AM}{2OA} = \frac{AB}{diâmetro} = \frac{crd\theta}{120}$$

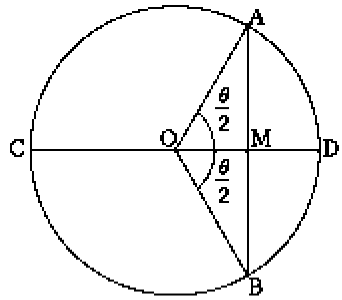


Figura 4: Esquema de Ptolomeu[7]

Semelhantemente, em termos de cordas, Ptolomeu demonstrou as propriedades que, em linguagem atual, são o seno e o co-seno da soma e da diferença de dois arcos.

Ptolomeu também conhecia um método para encontrar a corda subtendida pela metade do arco de uma corda conhecida. Esse fato que, em nossa simbologia, é o mesmo que $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, juntamente com interpolação, permitiu-lhe calcular cordas com um bom grau de precisão.

De posse do equivalente dessas fórmulas, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0º e 180º. Calculou comprimentos de cordas, inscrevendo polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados num círculo. Esse feito permitiu a Ptolomeu encontrar a corda subtendida por ângulos de 36º, 60º, 72º, 90º e 120º.

Ao que parece, Ptolomeu usou um teorema dos elementos XIII.9 que mostra que um pentágono regular, um hexágono regular, um decágono regular, todos inscritos no mesmo círculo formam lados de um triângulo retângulo.

[7] **Figura criada a partir de descrição do livro História da Matemática, de Carl B. Boyer, página 113.**

Como pudemos notar nas obras dos autores gregos houve uma mudança significativa no tratamento e na sistematização dados aos problemas no triângulo. As relações entre os arcos e os lados, bem como o estudo de suas variações, passaram a figurar na solução desses problemas. Foram também construídas tabelas e fórmulas que, desconsiderando a linguagem, diferem muito pouco das que conhecemos hoje.

A trigonometria, no entanto, serviu à astronomia como uma matemática aplicada:

> De Hiparco a Ptolomeu houve progressos na astronomia e na geografia, óptica e mecânica, mas nenhum desenvolvimento significativo na matemática. É verdade que durante esses três séculos se desenvolveu a trigonometria, mas esse tópico era então, na melhor das hipóteses, uma aplicação à mensuração da geometria elementar que satisfazia às necessidades da astronomia, não parte da matemática pura (Boyer, p. 146, 1974).

A trigonometria teve então, nesse período, seu crescimento estagnado devido à sua relação de dependência e de conhecimento acessório em relação à astronomia.

Não só a trigonometria, como possivelmente toda a matemática grega, vinha num movimento de decadência, cujo qual a colocava em um patamar de conhecimento aplicado. Esse fenômeno pode ter sido fruto de diversos fatores, tais como a expansão do império persa, em 343 a.C ou o domínio da Grécia pelos romanos, em 30 a.C. O que nos interessa é que as contribuições depois de Ptolomeu na trigonometria do triângulo retângulo parecem ser poucas, segundo os livros históricos analisados.

Para a trigonometria, porém, havia um caminho a ser percorrido. Já existia uma preocupação com a variação dos arcos, mas ainda não estava desenvolvido o conceito de número real, tão pouco o de função, para dar uma conceitualização mais ampla a esse objeto matemático.

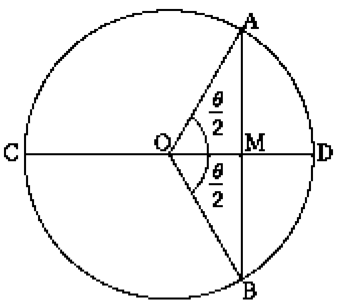
1.3 Trigonometria na Índia

A transmissão do conhecimento grego para os hindus, ao que parece, pode ter tido início pelo avanço do império persa sob comando de Alexandre o Grande, em 343 a.C. Porém, em 30 a.C., todo o oriente estava dominado, inclusive a Grécia, pelos romanos. Com o império romano, apesar da decadência do rigor matemático (que não sabemos se é precedente a ele), começou um período de estabilidade política e econômica chamado *pax romana.* Esse período de calmaria favoreceu a propagação do conhecimento por outras partes do império romano.

Com o declínio do império romano, o centro das investigações da matemática começou a se deslocar da Alexandria para Índia[8], por volta de 300 d.C.

As primeiras contribuições indianas são os livros de astronomia chamados Siddhãntãs, sendo um deles, o Suria Siddhãntã. Com esse trabalho se deu o primeiro aparecimento real do seno de um ângulo. Seu autor, **Aryabhata**, por volta do ano 500 elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que agora realmente são tabelas de senos e usou a palavra *jiva* no lugar de seno. Na tabela com cordas, havia o inconveniente de dobrar os arcos para que pudesse usá-las.

A esquematização do *jiva* pôde, dessa forma, ser representada conforme figura abaixo:



$$\text{jiva } \frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{2r} = \frac{1}{2r}.\text{crd }\theta$$

Figura 5: O *jiva* hindu[9]

[8] In História Concisa das Matemáticas, de Dirk J. Struik, página 116.
[9] Figura criada a partir da descrição do livro História da Matemática, de Howard Eves, página 262.

Embora tenha trazido alguma contribuição para a trigonometria:

> A matemática indiana é freqüentemente descrita como intuitiva em contraste com o severo racionalismo da geometria grega. Embora na trigonometria hindu haja traços da influência grega, os indianos não parecem ter tido ocasião de tomar emprestada a geometria grega, preocupados como estavam com simples regra de mensuração. (Boyer, p. 148, 1974)

1.4 Trigonometria nos países árabes

Em 641 d.C., Alexandria e a Índia já estavam sob o domínio dos árabes. Os califas entre 754 d.C. e 833 d.C. promoveram o estudo da matemática e da astronomia e construíram uma biblioteca e um observatório em Bagdá que passou a ser chamada de "a casa da sabedoria". Os clássicos gregos e os livros Hindus: os Siddhãntãs, entre eles, foram traduzidos para o árabe.

Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto e a Trigonometria de *jiva* - de origem hindu - o conflito chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe **Al Battani** adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação - o círculo de raio unitário - surgiu o nome da função seno.

Com essa inovação, unida com o Teorema de Tales, **Al Battani** possibilitou que fosse percebido que a relação *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, método que ele próprio empregou para a construção de tabelas trigonométricas:

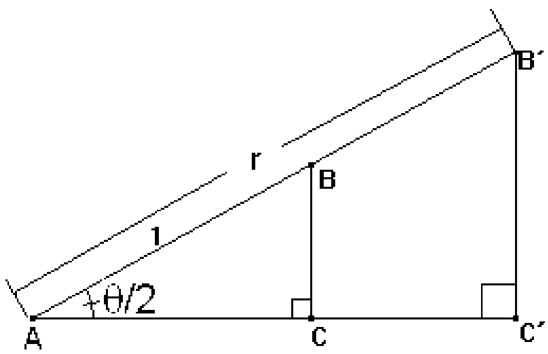


Figura 6: Esquema de Al Battani[10]

[10] **Figura criada a partir da descrição do livro História da Matemática, de Howard Eves, página 263.**

sen $\frac{\theta}{2} = \frac{\text{jiva}}{1} = \frac{\text{BC}}{\text{AB}} = \frac{\text{B´C´}}{\text{AB´}}$, logo sen $\frac{\theta}{2} = \frac{\text{B´C´}}{\text{AB´}} = \frac{\text{B´C´}}{\text{r}} = \frac{\text{jiva}}{1} = \text{jiva}$

Os árabes trabalharam com senos e co-senos e, em 980, **Abu'l-Wefa** sabia que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, embora isso pudesse facilmente ter sido deduzido pela fórmula de Ptolomeu do co-seno da soma.

Da contribuição à geometria dos povos árabes, podemos constatar que:

> O papel dos povos árabes em geometria foi mais de preservação do que de descoberta. O mundo lhes deve um preito de reconhecimento por seus esforços continuados para traduzir satisfatoriamente os clássicos gregos. (Eves, 1995, p. 264).

Comparando os árabes aos hindus, segundo Boyer, devemos destacar que os árabes assumiram uma postura mais sistematizada no que se refere à forma de apresentação de sua trigonometria. Eram feitas as demonstrações dos teoremas e fórmulas, influenciados pelo ***o Almajesto***, de Ptolomeu.

O matemático Abu'l-Wefa fez uma nova tabela para senos, diferindo de 1/4°, usando o eqüivalente a oito casas decimais. Forneceu também uma tabela de tangente e usou todas as seis funções trigonométricas comuns (seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante, co-secante), bem como as relações entre elas.

Um outro matemático, de nome Nasir Eddin, neto do conquistador Gengis Khan, trouxe contribuições interessantes para os matemáticos posteriores.

Continuando a obra de Abu'l-Wefa, Nasir Eddin foi responsável pelo primeiro tratado sistemático sobre trigonometria plana e esférica, tratando o material como assunto independente e não apenas como um conhecimento acessório à astronomia, como se fez na Grécia e na Índia. São usadas as seis funções trigonométricas usuais, e são dadas regras para resolver os vários casos de triângulos planos e esféricos.

1.5 Trigonometria na Europa Ocidental Medieval

No século XI a Espanha e a Sicília têm importante papel de rota comercial e cultural do oriente com o ocidente. Em 1085, Toledo, que fica na Espanha, foi tomada pelos mouros cristãos. Estudiosos passaram a afluir pela região para assimilar a ciência tal qual era transmitida em árabe. Começam as traduções do árabe para o latim a partir do século XII. Entre os tradutores temos Platão de Tivoli (1120), Robert de Chester (1140), Abelardo de Bath (1142) e Gerardo de Cremona (1150).

Na Europa medieval, devido a razões político-religiosas, a Ciência havia pouco evoluído. Foi no século XV com Johannes Muller, mais conhecido como **Regiomontano**, e o seu trabalho *De Triangulis Omnimodis_Libri Quinque*, a Trigonometria libertou-se da Astronomia.

Aparentemente Regiomontano conhecia a obra de Nasir Eddin, que havia sido traduzida para o latim. Esse conhecimento pode ter sido a origem da característica de seu trabalho.

Embora seus métodos sejam considerados gerais, ele atribui números específicos às partes dadas. As únicas funções utilizadas nessa obra são a função seno e co-seno. Mais tarde, ele incluiu uma tabela de tangente em um outro tratado trigonométrico.

Um astrônomo célebre que contribuiu para a trigonometria foi o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543). Copérnico escreveu a obra *De revolutionibus orbitum coelestium*, publicado em 1543, ano de sua morte. A obra contém seções importantes de trigonometria que foram publicadas separadamente no ano anterior sob o título *De lateribus et angulis triangulorum*. O conteúdo é semelhante ao da obra de Regiomontano, publicado em Nuremberg uma década antes, mas as idéias de Copérnico sobre trigonometria parecem datar antes de 1533, e nessa época ele não conhecia a obra de Regiomontano. É muito provável, no entanto, que a obra de Copérnico tenha sido influenciada indiretamente por Regiomontano. Em 1539 Copérnico recebera como estudante o matemático prussiano Georg Joachim Rheticus, de Wittenberg, que evidentemente teve contato com a matemática de Nuremberg. Esse matemático ajudou a tomar as providências para a publicação da obra *De revolutionibus*. Isso provavelmente associa a obra de Copérnico e Regiomontano por meio de Rheticus.

Rheticus, em sua obra *Opus palatinum de triangulis* (1550), de dois volumes escreveu um tratado importante para a trigonometria, talvez o mais importante até a sua publicação, concentrando-se não mais nas funções relativas ao arco de círculo, mas no triângulo retângulo. Além disso, as seis funções trigonométricas foram completamente utilizadas, pois o autor construiu tabelas elaboradas de cada uma delas.

Próximo da morte de Copérnico nasceu um francês, cujo domínio de álgebra e de trigonometria eram ímpares, seu nome era François Viète. Sua contribuição não se limitou só a integrar esses assuntos, mas também em modernizar a notação matemática.

A obra de Viète se estende à trigonometria, álgebra e geometria. Em particular, na sua obra *Cânon mathematicus seu ad triangula* (1579) há contribuições notáveis à trigonometria. Trata-se, talvez, do primeiro livro na Europa Ocidental a desenvolver sistematicamente métodos para resolver triângulos planos e esféricos com auxílio das seis funções trigonométricas. Viète obteve expressões para cos nθ como função de cosθ para *n* de 1 a 9 e posteriormente sugeriu uma solução trigonométrica para o caso irredutível das cúbicas, conforme demonstraremos logo adiante.

Viète se deparou com a famosa equação algébrica $x^3-15x + 4 = 0$, cujas raízes não são todas reais, ou seja, que não era possíveis, naquele tempo, de se encontrar usando a fórmula de Cardano-Tartaglia (pois implicava soluções do conjunto dos números imaginários), até que resolveu fazer a substituição trigonométrica $x = k.\cos\theta$:

$$x^3 + px + q = 0$$

$$(k\cos\theta)^3 + p(k\cos\theta) + q = 0$$

$$\cos^3 + \frac{p}{k^2}\cos\theta + \frac{q}{k^3} = 0$$

mas Viète sabia que $\cos 3\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3)$ ou $\cos^3 - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{4} = 0$

Assim fez as seguintes equivalências:

$$\frac{p}{k^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow k^2 = -\frac{4p}{3} \therefore K = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$\frac{q}{k^3} = -\frac{\cos 3\theta}{4}$$

$$\cos 3\theta = -\frac{4q}{k^3} = \frac{-4q}{\pm 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(-\frac{4p}{3}\right)} = \pm\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}}$$

Portanto, se conhecemos o cos 3θ como função de p e q poderemos então determinar o $\cos\theta$ por meio das tábuas trigonométricas. Multiplicando-se k por $\cos\theta$ encontra-se x, mesmo quando $\Delta < 0$. Com isso Viète descobrira uma forma de evitar os complexos, já que se conseguia, naquela época, trabalhar com eles.

No século XVII, a evolução das invenções tais como as máquinas mecânicas: relógio, máquinas de tear, esteve intimamente ligada ao estudo da mecânica. Nesse estudo, a trigonometria também está presente, como poderemos entender a seguir.

A origem do cálculo diferencial associa-se com o conceito de tangente, que apareceram como ferramentas importantes nas tentativas de retificação das curvas (a ciclóide, por exemplo), problema, aliás, que era correlato ao problema da quadratura da circunferência, e que, portanto, estava sendo estudado desde os gregos.

Os estudos de curvas especiais, tais como a ciclóide e a isócrona tiveram motivação nos estudos de um famoso matemático e físico italiano chamado Galileu Galilei. Seus estudos eram sobre movimentos em planos inclinados e a queda livre. Galileu, contrariando as idéias aristotélicas que reinavam até a sua época, conjeturou que dois corpos de massas diferentes, partindo de um ponto A em queda livre ou num plano inclinado levavam o mesmo tempo para chegarem num ponto B. Essas observações levaram os pesquisadores posteriores a estudar o movimento em relação à sua trajetória e o tempo que levava para cumpri-la.

A trajetória que fazia com que um ponto material levasse o tempo mínimo para chegar de um ponto A até um ponto B (isócrona) foi alvo de estudo cientistas, como de Johann Bernoulli e Newton.

Com relação à ciclóide, Galileu, em 1630, o primeiro cuja atenção foi despertada por essa curva de forma particularmente graciosa, a manifestar a idéia de dar esta forma aos arcos das pontes. Quatro anos mais tarde, Roberval encontrou a área limitada por esta curva. Descartes propôs a pesquisa das tangentes à ciclóide. Fermat resolveu imediatamente o problema. Muitas questões relativas a esta curva, como o volume que ela gera em torno de seu eixo, desde a base até a sua tangente no vértice, foram então propostas por diversos matemáticos. Pascal resolveu todos os problemas e outros análogos, bem como determinou os centros de gravidade dos sólidos engendrados. (Delachet , p. 21-22)

É importante registrar que Roberval, após ter conseguido calcular a área sob a ciclóide, correspondeu-se com Descartes, comunicando-lhe o fato, o que deve ter provocado a proposição de Descartes para o estudo da reta tangente a essa curva.

A reta tangente a uma curva foi se consolidando, então, como um método de estudo de curvas.

Com esse método foi possível o estudo e a obtenção de máximos e mínimos por Fermat, que funcionava, em suma: de posse da expressão algébrica da curva (digamos, $f(x) = ax^2 +bx +c$) avalia-se a mesma levemente deslocada (ou seja, $f(x+E)$). Expande-se a expressão, separando-se os termos no deslocamento (ou seja, $aE^2+2axE+bE$). Esses deslocamentos são pequenos, tomam-se apenas os termos mais relevantes (ou seja, $(2ax+b)E$). Investiga-se quando a expressão resultante é nula para qualquer valor do deslocamento (ou seja, em $x=-b/2a$). Neste ponto a curva é "quase constante" e a tangente a ela deve ser horizontal. Assim sendo, pode se tratar de um ponto extremo.

Em suma: Fermat usava um procedimento de cálculo algébrico idêntico ao que temos hoje (e chegou muito próximo de $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.). Porém, o utilizava como uma espécie de algoritmo, sem o amparo dos conceitos de função, derivada ou diferencial. Assim, foi um pioneiro. Mais de cem anos depois, Laplace reconheceu o fato. Creditou a Fermat a invenção do cálculo diferencial.

Descartes traz, por sua vez, em sua obra *La géométrie* um método para construir tangentes às curvas. Em notações modernas, sejam f (x,y) = 0 a equação da curva dada e (x_1, y_1) as coordenadas do ponto P da curva pela qual deseja se traçar a tangente. Seja Q um ponto do eixo x de coordenadas (x_2, 0). Então, a equação da circunferência de centro Q pelo ponto P é:

$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2$.

Eliminando-se y do sistema formado pela equação acima e por f (x,y) = 0, obtém-se uma equação em x em que leva às abscissas dos pontos em que a circunferência corta a curva dada. Determina-se a seguir x_2 de modo que essa equação em x tenha um par de raízes iguais a x_1.

Essa condição faz com que Q seja a intersecção do eixo x com a normal da curva em P, uma vez que a circunferência agora é tangente à curva dada em P. Desenhada essa circunferência, pode-se construir facilmente a reta tangente desejada. Como por exemplo, considere a construção da tangente à parábola $y^2 = 4x$ no ponto (1, 2). Temos aqui:

$(x - x_2)^2 + y^2 = (1 - x_2)^2 + 4$.

A eliminação fornece:

$(x - x_2)^2 + 4x = (1 - x_2)^2 + 4 \Rightarrow x^2 + 2x(2 - x_2) + (2x_2 - 5) = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

Pode-se traçar então a circunferência de centro (3, 0) pelo ponto (1, 2) da curva, o que propícia a construção da tangente desejada.

O nascer do cálculo diferencial e integral ficou muito próximo também com as pesquisas realizadas por Pascal em sua obra *Tratado dos senos de quartos de um círculo*. Debruçado nessa obra, Leibniz percebeu alguns fatos muito importantes que passaram despercebidos por Pascal. Leibniz, segundo Delachet, faz alusão a seguinte passagem:

> Seja ABC um quarto de círculo, cujo raio AB tomaremos como um eixo, e o raio perpendicular AC como base; seja D um ponto qualquer do arco do qual traçamos o seno DI sobre o raio AC; e a tangente DE, na qual tomaremos os pontos E, como queiramos, de onde traçaremos as perpendiculares ER sobre o raio AC; afirmo que o retângulo compreendido entre o seno DI e a tangente EE´é igual a o retângulo entre compreendido a porção da base (encerrada entre as paralelas) e o raio AB.

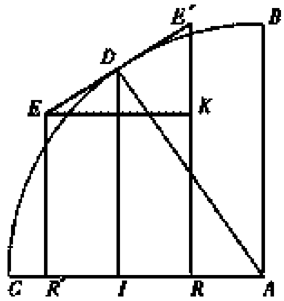


Figura 7[11]

Em linguagem atual, diríamos que os retângulos que têm lados e comprimentos, respectivamente, EE' e DI, RR' e AB são equivalentes. Isso resulta na semelhança entre os triângulos AID e EKE'.

Nesta proposição, Pascal não percebeu que um lema lhe permitiria estabelecer o seguinte teorema particular: "a soma dos senos de um arco do quarto de círculo é igual a porção de base compreendida entre os senos extremos multiplicada pelo raio", trata-se da expressão em linguagem geométrica de um caso particular de que hoje enunciamos nas classes de matemática sob a seguinte forma: "a primitiva de sen x vale cos x". Leibniz, ao contrário, soube extrair desse exemplo particular toda sua generalidade. Ele considera o triângulo EKE'. Examina todo o interesse que é possível retirar de sua semelhança com o triângulo AID, que mantém, quaisquer que sejam os pontos E e E', uma grandeza finita, ou, como ele diz, permanece assinalável. Assim, quando fazemos tender o comprimento EE' para zero, o triângulo EKE' tenderá para zero em todas as suas dimensões (tornar-se-á não assinalável), mas será sempre semelhante ao triângulo AID que é fixo. Leibniz vê neste fato a possibilidade de considerar tal triângulo, formado por uma parte infinitamente pequena de tangente, e as porções

[11] **Extraída do livro Análise matemática, Delachet p. 27.**

infinitamente pequenas das paralelas à abscissa e à ordenada, como um elemento característico da curva estudada. (Delachet, p.27-28)

Leibniz, desenvolvendo o raciocínio anteriormente descrito, chegou a uma noção equivalente a nossa de derivada de uma função f(x) num ponto x_0: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ como o coeficiente angular da reta tangente à f(x) no ponto x_0.

Newton, por outras vias, chegou ao mesmo conceito antes de Leibniz e utilizou esse conceito no aprimoramento de conceitos da mecânica clássica. Aplicou também o seu método à determinação das raízes de polinômios, por exemplo.

Fica, assim, cada vez mais estreita a ligação entre trigonometria, álgebra e a análise matemática.

Abraham De Moivre foi o responsável em ligar a trigonometria com a análise. De Moivre nasceu em Vitry le François, Champaigne, na França, em 1667. Ainda jovem, ele deixou a França fugindo para a Inglaterra para escapar da perseguição religiosa. Ele trabalhou na Inglaterra como professor pelo resto de sua vida. De Moivre foi eleito como Companheiro (sócio) da Sociedade Real em 1707.

De Moivre é lembrado também pela fórmula para $z^n = \rho^n$ (cos nx + i sen nx) que associa as funções seno e co-seno aos números complexos. Essa fórmula é deduzida a partir da expansão da potência enésima da forma trigonométrica do número complexo: $z^n = [\rho$ (cos x + isen x)$]^n$.

Moivre foi amigo íntimo e sócio de Isaac Newton, ajudando-o a estabelecer-se como o inventor do cálculo. De Moivre escreveu para *Miscellanea Analytica* em 1730, investigando séries infinitas e análise complexa.

A trigonometria sofrera, portanto, nos séculos XVI e XVII, uma série de avanços. Ela passou a figurar como objeto matemático com fim em si mesmo, independentemente da astronomia. Esse tipo de enfoque possibilitou, por parte dos matemáticos da época, um estudo aprofundado das ciências em conjunto com os diferentes conceitos matemáticos existentes e até a criação de novos conceitos matemáticos.

Apesar do desenvolvimento de alguns conceitos matemáticos, faltava para a trigonometria integrar-se à análise a expansão do conceito de função trigonométrica ligada a arcos e ângulos para a função trigonométrica que associa um número real a um número real. Isso dependia, em grande medida, do avanço da análise matemática na solução do problema da continuidade e da reta real. Um grande passo para esse avanço foi dado por Leonard Euler.

1.6 A Trigonometria Incorporada pela Análise Matemática

A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Em 1748, Euler sistematizou a geometria analítica e publicou *Introductio in anlysin infinitorum*, em que discute questões analíticas e geométricas, apresentando as expansões em série e as transformações de produtos infinitos em séries.

Segue, abaixo, a demonstração que associa seno e co-seno a um número complexo:

$$e^{x+iy} = e^{x}\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \frac{y^{10}}{10!} + \frac{y^{12}}{12!} + \cdots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$ para todo *y*.

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$, para todo *y*.

$$i \cdot \operatorname{sen} y = i \cdot y - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots + i(-1)^{n+1} \frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$e^{iy} = 1 + i \cdot y + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{iy} = 1 + i \cdot y - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \frac{iy^9}{9!} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{x+iy} = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\cos y + i \operatorname{sen} y} = e^x \left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right)$$

$$e^{iy} = \underbrace{1}\underbrace{+i \cdot y}\underbrace{-\frac{y^2}{2!}}\underbrace{-\frac{iy^3}{3!}}\underbrace{+\frac{y^4}{4!}}\underbrace{+\frac{iy^5}{5!}}\underbrace{-\frac{y^6}{6!}}\underbrace{-\frac{iy^7}{7!}}\underbrace{+\frac{y^8}{8!}}\underbrace{+\frac{iy^9}{9!}} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Mediante a prova da transcendência de ***e*** feita por Hermite (1873), a fórmula acima possibilitou a Lindemman provar a transcendência de π e conseqüentemente encerrou a discussão de um problema clássico formulado pelos estudiosos desde a geometria grega: a retificação da circunferência e a quadratura do círculo usando régua e compasso euclidianos[12].

[12] In Romance das equações algébricas, de Gilberto Garbi, página 202.

1.7 Considerações didáticas e epistemológicas gerais

Nestas considerações, visamos identificar a evolução dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo como objeto matemático e sua relação com a mudança de ponto de vista[13] e o tratamento figural.

A seguir, apresentamos o quadro 1, com a identificação dos pontos de vista e o período histórico de incidência desses pontos de vista:

<table>
<tr><th colspan="4">Mudança de ponto de vista</th><th colspan="2">Ferramenta usada</th></tr>
<tr><td colspan="4">1. De relação entre os lados em um triângulo retângulo para relação entre cordas e diâmetros</td><td colspan="2">Tratamento figural</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. De relação entre cordas e diâmetros para relação entre metade da corda e o raio (jiva)</td><td colspan="2">Tratamento figural</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. De Relação entre metade da corda e o raio (jiva) para relação entre metade da corda e o raio unitário</td><td colspan="2">Tratamento figural</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. De Relação entre metade da corda e o raio unitário à função trigonométrica como função de $\Re \to \Re$, e não só de um ângulo ou arco α levando em R.</td><td colspan="2">Tratamento figural</td></tr>
<tr><td>Período histórico</td><td>Grego</td><td>Indiano</td><td>Árabe</td><td>Viète e Moivre</td><td>De Euler em diante</td></tr>
<tr><td>itens</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>Entre 3 e 4</td><td>4</td></tr>
</table>

Quadro I – Mudanças dos pontos de vista

A análise da evolução dos conceitos em estudo nos leva a entender, conforme a tabela acima apresentada, que o desenvolvimento conceitual sempre esteve ligado à questão da mudança do ponto de vista, e do seu respectivo tratamento figural. Em conseqüência dos fatos apresentados, estas

[13] Ponto de vista diferentes sobre um objeto matemático são maneiras diferentes de olhá-lo, de fazê-lo funcionar, eventualmente de defini-lo. (Saddo, 2000, p. 51).

considerações contribuem, juntamente com a análise de livros e dos planos de ensino oficiais, para a compreensão dos fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem, pois pudemos identificar as diferentes formas de tratamento da trigonometria no triângulo retângulo por meio da história. Acreditamos que, na trigonometria no triângulo retângulo, o tratamento figural ligado à mudança de ponto de vista foi importante no seu desenvolvimento conceitual, assim como é importante para a apreensão do aluno.

CAPÍTULO 2: TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: DE OBJETO CIENTÍFICO A OBJETO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

O objetivo deste capítulo é o de analisar as propostas curriculares oficiais do ensino de trigonometria no triângulo retângulo e os livros didáticos. Esta análise pretende, além de confrontar as propostas oficiais de ensino e o livro didático, entender quais são os fenômenos de ensino-aprendizagem ligados aos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo.

2.1 Alguns conceitos didáticos ligados ao processo de ensino-aprendizagem

Vimos no estudo histórico da trigonometria no triângulo retângulo que o tratamento figural associado à mudança de ponto de vista foram importantes fatores da evolução dos conceitos. Esse fato servirá como elemento norteador nas análises das propostas curriculares e do livro didático.

Para que possamos dar clareza a estas análises, porém, é necessário que definamos alguns elementos que estão ligados ao tratamento figural e a mudança de ponto de vista.

Quando nos reportamos ao tratamento figural, segundo Duval[14], esse tratamento está ligado aos modos de funcionamento dessa figura na resolução de um problema matemático.

Duval destaca que para muitos alunos as figuras não funcionam totalmente como ferramenta heurística como algumas pesquisas consideram. O autor alerta para a complexidade das figuras e as dificuldades que são encontradas na visualização de uma figura na solução de problemas. Também classifica a sua apreensão em quatro tipos:

---

[14] In Les différents fonctionnementd d´une figure dans démarche geométrique, p. 121, Reperes – IREM, out de 1994.

1) perceptiva: que permite identificar ou reconhecer imediatamente uma forma, uma figura ou um objeto;
2) discursiva: interpretação dos elementos de uma figura geométrica
3) seqüencial: construção ou descrição com o objetivo de produzir uma figura;
4) operatória: apreensão de uma figura dada em suas diferentes modificações possíveis.

Levamos em consideração se as situações formuladas nos livros ou sugeridas nas propostas curriculares possibilitam a mobilização desses tipos de apropriações e conseqüentemente, fazem com que o aluno tenha diferentes pontos de vista para a solução de um mesmo problema na trigonometria do triângulo retângulo.

Ainda com relação à elaboração de situações, outra importante ferramenta que pode estar associada à mudança de ponto de vista é a mudança de quadros **(Douady, 1991)**. A mudança de quadros é o meio de obter formulações diferentes de um mesmo problema que permitem ter uma nova visão das dificuldades encontradas e disponibilizar as ferramentas e técnicas que não aparecem na primeira formulação. Os jogos de quadro são mudanças de quadro provocadas por iniciativa docente, quando da ocasião de problemas convenientemente escolhidos, para fazer avançar as fases de pesquisa evoluir a concepção dos alunos[15].

Acreditamos que a conjugação entre a mudança de ponto de vista e a mudança de quadros (articulada para promover o jogo de quadros) sejam fatores fundamentais no ensino aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo[16]. Cabe ressaltar que as sugestões dos parâmetros e a abordagem dos livros didáticos são importantes, porém, a ação do professor é fundamental na gestão articulada desses materiais.

---

[15] Segundo Régine Douady apud Saddo Ag Almouloud, no caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 31.
[16] Conforme Saddo Ag Almouloud, no caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 57.

2.2 A trigonometria no triângulo retângulo e as propostas curriculares

Neste tópico, analisamos os conteúdos, as formas de abordagem, bem como as sugestões do ensino de trigonometria no triângulo retângulo na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática de São Paulo no 1º grau (1992) e no 2° grau, de 1994, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 1998 e o PCNEM plus, de 2004. Faremos também algumas citações dos PCN do ensino Fundamental de 5ª a 8ª séries. Escolhemos os parâmetros de Ensino Médio, pois são nesses documentos que o ensino do assunto trigonometria no triângulo retângulo é enfatizado.

2.2.1 Proposta Curricular do estado de São Paulo

A proposta para o ensino de 1º grau traz algumas preocupações com relação ao ensino de matemática, abordadas no prefácio, tais como a mecanização e a memorização excessivas, a priorização de temas algébricos e a formalização precoce.

A proposta também traz justificativas do lugar da matemática no currículo escolar, dos conteúdos e da abordagem e faz sugestões sobre o uso da matemática como linguagem e o papel da avaliação.

A concepção que carrega essas justificativas e sugestões é da matemática vista como ferramenta na solução de problemas práticos, sem perder de vista o aspecto das generalizações e abstrações, fatores que são fundamentais para uma visão da matemática de forma integrada.

A matemática é dividida em três grandes tópicos: números, medidas e geometria. Em cada série são listados as abordagens e o conteúdo a serem trabalhados dentro de cada um desses tópicos. São sugeridas algumas abordagens para cada conteúdo.

Na 8ª série é proposto fazer uma introdução das relações métricas nos polígonos regulares, porém essas relações se estendem ao cálculo do lado, perímetro e área mediante o apótema (raio da circunferência circunscrita aos polígonos). O objetivo é utilizar o teorema de Pitágoras, semelhança ou congruência entre figuras planas.

A proposta do Ensino médio tem como objetivo geral: “Medir ângulo. Calcular tangente, seno e co-seno de um ângulo no triângulo retângulo. Aplicar elementos de trigonometria na solução de problemas em triângulos”.(p. 27)

Uma de suas recomendações é que seja feita a construção de um teodolito simples, utilizando canudinho de refrigerante e transferidor para medir ângulo, acreditando que esse recurso auxiliará o aluno a compreender os elementos de trigonometria.

Como a maior aplicabilidade para o cálculo das distâncias “inacessíveis”, segundo a proposta, é da tangente, essa é a primeira razão trigonométrica a ser abordada. Os alunos devem construir triângulos retângulos de intervalos de 5° e calcular suas respectivas tangentes por meio da média aritmética dos vários valores obtidos pelos alunos.

A seguir, são introduzidas às relações seno e co-seno com a construção de tabelas por parte dos alunos. São estudadas as suas propriedades no triângulo retângulo. Logo após, são utilizadas para calcular a área e o perímetro de polígonos, os quais podem ser extraídos de figuras planas ou espaciais. Esses polígonos serão decompostos em triângulos isósceles, que por sua vez são divididos em triângulos retângulos. Podemos concluir que essa atividade é uma continuação daquela proposta no 1º grau, cuja qual calcula o lado, o perímetro e a área de polígonos regulares em função de seu apótema.

Para todos esses tópicos, a proposta traz 42 exemplos de atividades. Essas atividades propõem o uso de problemas e explicam que problemas são situações que desafiam o aluno a pensar, a refletir, a levantar hipóteses, a procurar caminhos para solucioná-la, a buscar novas aplicações de conceitos e a aprofundar a compreensão dos problemas, a exercitar a criatividade, a generalizar propriedades, a descobrir outras soluções e discuti-las, verificando a condição para que elas sejam válidas. (p. 12)

As atividades sugeridas nas propostas são interessantes, mas cabem algumas observações:

a) Por que a atividade sugerida na 8ª série sobre relações métricas envolvendo lados, áreas e apótema não é aproveitada para introduzir as relações trigonométricas? Seria extremamente fecundo trabalhar num quadrado e num hexágono as relações que envolvem os ângulos de 45°, 30° e 60°.

b) Por que não são mais bem aproveitadas as construções geométricas trabalhadas na 7ª série? Essas construções (bissetriz, mediana, mediatriz e altura) poderiam ser resgatadas e aplicadas como ferramentas no tratamento figural: de congruência e de eixo de simetria em triângulos retângulos obtidos do quadrado e do hexágono.

c) Em que medida o professor conhece e faz uso dessa proposta curricular? Essa é uma questão interessante, (mas que não é o nosso objetivo neste trabalho), pois ajudaria a elucidar, talvez, alguns fenômenos de ensino-aprendizagem, tais como o mau desempenho dos alunos do ensino público nos exames vestibulares, no ENEM, e outros.

2.2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais: PCN do Ensino Fundamental, PCNEM e PCNEM PLUS.

Segundo os parâmetros curriculares do Ensino Fundamental de matemática publicada pelo Ministério da Educação e do Desporto em 1998, a participação do aluno na elaboração do seu conhecimento é um dos pontos principais da concepção atual da aprendizagem. Essa participação deve, porém, ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como, as tarefas a serem realizadas para que essa construção do conhecimento se efetive.

Para tanto, segundo os parâmetros, a função do professor deve ser a de orientador (mediador) da aprendizagem, isto é, investigador das idéias, de rumos, num trabalho com erros e acertos. Assim, a proposta de desenvolvimento de um tema com os alunos terá como ponto de partida a colocação de um problema e a partir do qual se iniciará a discussão das idéias centrais do assunto em questão, levando em consideração os objetivos que se quer atingir.

Segundo o PCN de 5ª a 8ª série, são importantes os seguintes itens no estudo de espaço e forma, em que estão inseridos conceitos importantes para o tópico trigonometria no triângulo retângulo (página 89):

- Construção de procedimentos para o cálculo de perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
- Resolução de situações-problema que envolva a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e de retas perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de alguns instrumentos, como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de congruências de figuras planas a partir de transformações (reflexões em reta, rotações, translações e composições destas), identificando medidas invariantes: de ângulo, de lados, da superfície.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (lados, superfície e perímetro).

A resolução de problemas que envolva a construção da reta mediatriz, da reta bissetriz, de retas paralelas e ângulos notáveis unida com o desenvolvimento do conceito de congruência a partir de transformações no plano e com o desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções pode ser importante para estabelecer as relações trigonométricas no triângulo retângulo, sobretudo para os ângulos notáveis. Na construção de um triângulo eqüilátero, por exemplo, o aluno pode mobilizar a construção da reta mediatriz. Acreditamos que, a partir daí, por meio de composição e decomposição de triângulos, o aluno possa observar que as razões trigonométricas no triângulo retângulo com os ângulos formados (30° e 60°) possam ser tratadas como relações entre altura e lado do triângulo eqüilátero e que permanecem invariantes, ou seja, que independem da variação da medida dos lados desse triângulo (homotetia e semelhança).

A elaboração de procedimentos de cálculos de superfícies planas pode ser outra ferramenta importante no ensino aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo. Ela possibilita relacionar, por exemplo, o cálculo do perímetro de polígonos regulares e o comprimento da circunferência por meio das relações trigonométricas no triângulo retângulo, o que, inclusive, foi usado na obra de Ptolomeu para construir uma das primeiras tábuas trigonométricas.

Os PCNEM destacam a trigonometria como uma ferramenta interdisciplinar de ensino-aprendizagem, como na física, por exemplo, e recomendam que seja evitado o investimento excessivo em cálculo algébrico das identidades e equações trigonométricas para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos, na resolução em problemas com medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na observação de fenômenos periódicos (p. 44).

O PCNEM plus é um complemento dos PCNEM e procura dialogar de uma forma mais aproximada com o professor. Para isso, explicita a articulação das competências gerais que se deseja promover com os conhecimentos disciplinares e apresenta um conjunto de sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos que, coerente com tal articulação, estabelece temas estruturadores do ensino disciplinar em cada área.

Na perspectiva dos PCNEM plus, cada disciplina ou área de saber envolve um conjunto de conhecimentos que não se restringem a tópicos disciplinares ou a competências gerais ou habilidades, mas, constituem-se em sínteses de ambas as intenções formativas. Ao se apresentarem dessa forma, esses temas estruturadores do ensino disciplinar e seu aprendizado não mais se restringem, de fato, ao que tradicionalmente se atribui como responsabilidade de uma única disciplina.

Nos PCNEM plus, o conhecimento é dividido em três grandes áreas: linguagens e códigos, ciências da natureza e matemática e ciências humanas.

Essas três áreas se relacionam por três competências gerais conforme o esquema abaixo (página 21):

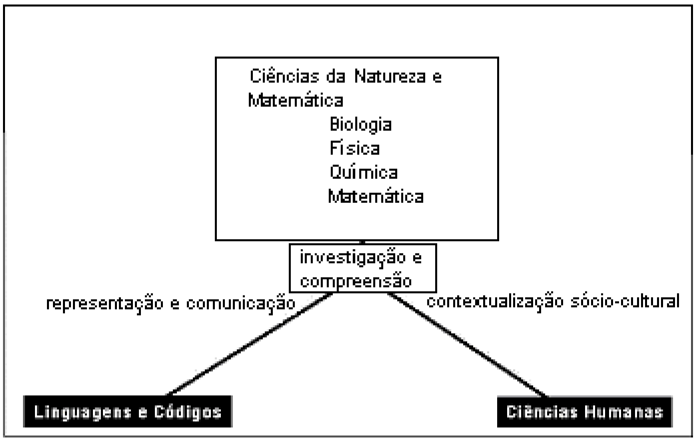


Figura 8 – Relação entre Ciências e Linguagens

São relacionados, na matemática, três grandes temas desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

A trigonometria no triângulo retângulo aparece com mais ênfase no tema 1: álgebra: números e funções. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria.

A proposta chama a atenção para a sobrevalorização das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes da trigonometria, dentre eles o cálculo de distâncias inacessíveis e a periodicidade das funções trigonométricas. A sugestão é que se estude as funções seno, co-seno e tangente na primeira volta e no ciclo trigonométrico remetendo-se à perspectiva histórica das aplicações trigonométricas e aos avanços tecnológicos proporcionados pela trigonometria em diferentes épocas para permitir que os alunos percebam o conhecimento matemático como ferramenta para resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

O tema álgebra números e funções é dividido em duas unidades temáticas:
1. Variação de grandezas: noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, co-seno e tangente; taxa de variação de grandezas.
Dentro desse item, pretende-se do aluno:
• Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.
• Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.
• Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.
• Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
• Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

2. Trigonometria: do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.
Dentro desse item, pretende-se do aluno:
• Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
• Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Para alcançar os objetivos estabelecidos e promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM plus privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.

Nosso trabalho procura ter o mesmo enfoque com relação ao tratamento e resolução de situações-problema, usando situações que fizeram parte do processo histórico e social. Nosso alvo é, sobretudo, a segunda unidade temática, mas, de forma alguma nosso trabalho não está associado à primeira unidade, pois pretendemos preparar o aluno para o estudo da função trigonométrica.

Embora as sugestões do PCN, do PCNEM e do PCNEM plus nos pareçam pertinentes, algumas observações devem ser feitas:
a) a formação do professor pode ser insuficiente quando tratamos de alguns assuntos matemáticos: geometria das transformações, por exemplo, ou quando a trigonometria se relaciona de forma interdisciplinar: com a Física, por exemplo.

b) Os livros didáticos, que são a principal e às vezes a única fonte de preparação de aula pelo professor talvez não estejam seguindo as recomendações do PCN, do PCNEM e do PCNEM plus.

a) É importante saber em que medida o professor conhece e faz uso dos PCN, PCNEM e do PCNEM plus. Isso ajudaria a elucidar, talvez, alguns fenômenos de ensino-aprendizagem, tais como o mau desempenho dos alunos do ensino público nos exames vestibulares, no ENEM, e outros.

b) Quando o professor não enfatiza, por exemplo, as identidades trigonométricas, como sugerem o PCNEM e do PCNEM plus, está desprestigiando um tema muito explorado pelos exames vestibulares. Nesse sentido, é interessante pensar até que ponto vai a autonomia do professor e da própria escola na escolha da abordagem de um conteúdo.

2.3 Análise do livro didático

Analisamos livros didáticos para confrontar os conteúdos e abordagens sugeridas nas propostas com o que é feito no livro didático, pois acreditamos que:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-

> se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (PCN de 5ª a 8ª série, 1998, pp. 21-22).

Selecionamos os livros de 8ª série que são analisados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) pelo número de estrelas: escolhemos desde o livro que tem pouca ou nenhuma restrição: 3 estrelas, até os que têm muitas restrições: 2 ou 1 estrela. A exceção é o livro feito na UFBA, cujo qual escolhemos para observar a abordagem via transformação geométrica, como recomendam os PCN.

Cabe lembrar que todos os livros escolhidos foram aprovados para o uso em sala de aula pelo MEC. Para os livros da 1ª série do Ensino Médio, escolhemos os livros das grandes editoras, portanto, os que são mais utilizados nas escolas. Desses livros, a exceção é novamente a do livro feito na UFBA, cujo qual escolhemos para continuar analisando a abordagem via transformação geométrica.

Na análise histórica da evolução dos conceitos, constatamos a importância dos tratamentos figurais ligados à mudança de ponto de vista. Por esse fato, eles servem como importantes constituintes dos critérios para a nossa análise dos fenômenos de ensino-aprendizagem e das dificuldades dos alunos.

Escolhemos também, para a análise dos livros didáticos, alguns critérios que retiramos das sugestões das propostas oficiais de ensino, como a retomada de pré-requisitos, a forma de apresentação do conteúdo, a ênfase da aplicação da trigonometria em outras áreas do conhecimento, a consideração nos problemas das construções geométricas e outras relações com o conhecimento matemático e a colaboração para a construção dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Os outros critérios: variáveis didáticas, jogo de quadro e mudança de ponto de vista e métodos de resolução dos problemas apresentados estão ligados à constituição das situações e métodos de solução dessas situações. Eles foram selecionados pela importância da mudança de ponto de vista que constatamos na nossa análise histórica e que acreditamos que se reflita no processo de ensino-aprendizagem. Aliada a mudança de ponto de vista, estão as variáveis didáticas que possibilitam essa mudança de ponto de vista pelo aluno e possibilitam a mudança de quadro para provocar no aluno a mobilização de diferentes campos matemáticos na resolução dos problemas.

Seguem os critérios de avaliação dos livros didáticos:

- Retomada dos pré-requisitos:

Neste item queremos analisar a articulação do tema com os seus pré-requisitos: teorema de Thales, semelhança e congruência.

– Forma de apresentação do conteúdo

Nesta parte da análise temos interesse em saber se o texto possibilita a participação do aluno na construção do conhecimento mediante as situações-problema[17] ou se o texto expõe o assunto de forma tradicional: definição, exemplos e exercícios.

Cabe ressaltar que só o livro didático apresentando o problema de uma forma que possibilite a participação do aluno e a construção do conhecimento mediante as situações-problema não é suficiente para solucionarmos os problemas de ensino-aprendizagem. É imprescindível que o professor tenha uma boa formação matemática e uma inquietude constante de buscar novas ferramentas para o ensino-aprendizagem.

- Variáveis didáticas, jogo de quadro e mudança de ponto de vista.

Nesta fase, será analisado o uso das variáveis didáticas para a constituição de um problema, tais como o uso de régua e compasso na solução de um problema, o uso de figuras na apresentação do problema, uso de linguagem corrente, problemas abertos ou fechados, uso de tabelas para ângulos notáveis, etc. Analisamos se o uso dessas variáveis na constituição desses problemas pode possibilitar ao aluno a mudança de ponto de vista e se nas situações

---

[17] Segundo Michel Henry *apud* Saddo Ag Almouloud, no caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 100, situação-problema são questões abertas, numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou em vários quadros.

propostas estão embutidas ou são provocadas as mudanças de quadro na solução dos problemas.

– Ênfase às aplicações da trigonometria no triângulo retângulo em outras áreas do conhecimento

É de fundamental importância a apresentação de aplicações de qualquer assunto do conhecimento matemático em outras áreas, se possível. Isto pode dar significado ao conteúdo que o aluno está aprendendo e faz com que o aluno tenha uma visão articulada do conhecimento. É possível aliarmos a apresentação de situações-problema, e, ao mesmo tempo, que essas situações sejam de outras áreas do conhecimento.

- Métodos de Resolução dos problemas apresentados

É essencial para o aluno compreender o problema e ter mais de uma estratégia para resolver esse problema. Esse critério está bastante relacionado com o terceiro critério, pois a escolha de variáveis didáticas, o jogo de quadros e os registros de representação são fundamentais, não só para a boa formulação de um problema, mas para a sua solução.

– As construções geométricas e outras relações com o conhecimento matemático

Por meio desse critério, observaremos se a trigonometria tem, na sua apresentação no livro didático, relação com as construções geométricas e com a geometria das transformações. A partir daí, temos condições de concluir como esse assunto é relacionado com outros assuntos da matemática e se esses livros estão seguindo as recomendações dos PCN.

- Colaboração da abordagem para a construção dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo

Este critério tem por objetivo examinar se a maneira com que foi feita a abordagem do livro didático colabora para a construção do conceito das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Para os livros de 8ª série nós examinaremos a construção dos pressupostos para introdução da trigonometria no triângulo retângulo. Confrontaremos apenas com as propostas curriculares vigentes.

Para a 8ª série, nós analisamos os livros:

- Livro 1: As transformações geométricas e o ensino de geometria, de uma coleção de autores da UFBA, EDUFBA, em 1996.

- Livro 2: Matemática Atual, de Antônio José Lopes Bigode, editora Atual, São Paulo, em 1996.

- Livro 3: Matemática – idéias e desafios, de Iracema Mori e Dulce S. Onaga, editora Saraiva, São Paulo, 1996.

- Livro 4: Matemática na medida certa, de José Jakubovic e Marcelo Lellis, editora Scipione, São Paulo, 1995.

- Livro 5: Matemática, de Walter Spinelli e Maria Helena Souza, editora Ática, São Paulo, 2001.

Para o 1º ano do Ensino Médio analisamos os livros:

- Livro 1: As transformações geométricas e o ensino de geometria (volume II), de um grupo de professores da UFBA, editora EDUFBA, Salvador, 1998.

- Livro 2: Curso de Matemática, de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola (volume único), editora Moderna, São Paulo, 2000.

- Livro 3: Matemática, de Walter Spinelli e Maria Helena Souza, editora Scipione, São Paulo, em 1996.

- Livro 4: Matemática na escola de 2º grau, Antônio dos Santos Machado, São Paulo, editora Atual, São Paulo, 1996.

- Livro 5: Matemática para o Ensino Médio, de Chico Nery e Fernando Trota, editora Saraiva, São Paulo, 2001.

Apresentamos, a seguir, os quadros de análise dos livros didáticos da 8ª série e do ensino médio, que contêm os livros didáticos e os critérios de análise supramencionados.

2.3.1 Análise do livro didático de 8ª série

O quadro abaixo representa a síntese das análises dos livros didáticos de 8ª série, segundo os critérios já mencionados anteriormente.

Critérios	**Livro 1**	**Livro2**	**Livro 3**	**Livro 4**	**Livro 5**
Retomada dos pré-requisitos	Sim	Sim	Não	Sim	Não
Forma de apresentação do conteúdo	Expositiva e contextualizada nas transformações geométricas	Aberta e contextualizada	Expositiva e não contextualizada	Aberta e contextualizada	Expositiva e não contextualizada
Jogo de quadro e mudança de registro	Não, só há tratamento figural	Pouco	Não	Pouco	Não
Ênfase às aplicações do triângulo retângulo em outras áreas	Não	Não	Não	Não	Não
Métodos de Resolução dos problemas apresentados	Definição e aplicação das relações trigonométricas	Construção das relações sem defini-las	Definição e aplicação das relações trigonométricas	Construção das relações sem defini-las	Definição e aplicação das relações trigonométricas
Colabora para a construção dos conceitos	Sim	Sim	Não	Sim	Não

Quadro II – Análise do livro didático de 8ª série

2.3.2 Quadro do livro didático do Ensino Médio

O quadro abaixo representa a síntese das análises dos livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio, conforme os critérios já mencionados anteriormente.

critérios	Livro 1	Livro2	Livro 3	Livro 4	Livro 5
Retomada dos pré-requisitos	Sim, mas de forma não articulada	Não	Sim, mas de forma não articulada	Não	Sim, mas de forma não articulada
Forma de apresentação do conteúdo	Expositiva e não contextualizada	Expositiva e não contextualizada	Expositiva e não contextualizada	Expositiva e não contextualizada	Expositiva e não contextualizada
Jogo de quadro e mudança de registro	Não	Não	Não	Não	Não
Ênfase às aplicações do triângulo retângulo em outras áreas	Não	Não	Não	Não	Não
Métodos de Resolução dos problemas apresentados	Aplicação das relações trigonométricas e da tabela dos ângulos notáveis	Aplicação das relações trigonométricas e da tabela dos ângulos notáveis	Aplicação das relações trigonométricas e da tabela dos ângulos notáveis	Aplicação das relações trigonométricas e da tabela dos ângulos notáveis	Aplicação das relações trigonométricas e da tabela dos ângulos notáveis
Colabora para a construção dos conceitos	Não	Não	Não	Não	não

Quadro III– Análise do livro didático de 1ª ano do Ensino Médio

Pudemos constatar nesta análise que, no geral, os livros de 8ª série analisados seguem as recomendações das propostas oficiais de ensino e parecem colaborar para a construção dos pressupostos para a introdução da trigonometria no triângulo retângulo, tais como, semelhança, congruência e a introdução de transformações geométricas (reflexão, rotação, translação e homotetia) nesses tópicos. Já os livros analisados do 1º ano do ensino médio não retomam esses pressupostos ou retomam de uma forma aparentemente pouco articulada com a proposta trabalhada nos livros da 8ª série e recomendada pelas propostas oficiais. Seria interessante examinar em outras pesquisas se a possível causa desse fato está relacionada à inexistência de exames de qualidade do livro didático de Ensino Médio até data da publicação desses livros (a partir de outubro de 2003 foi instituído o Programa Nacional de Análise do Livro Didático do Ensino Médio: PNELEM).

Os livros 1, 3 e 5 introduzem o conceito da trigonometria no triângulo retângulo da seguinte maneira:

Consideremos um ângulo agudo α de vértice O:

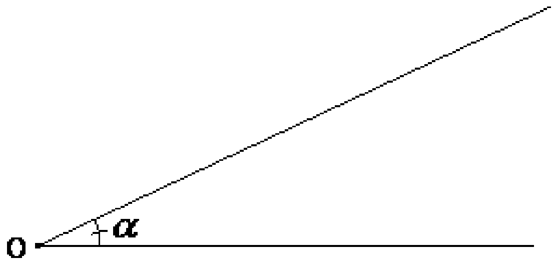


Figura 9 – Ângulo agudo

Tomemos os pontos A_1, A_2,..., A_n sobre um dos lados do ângulo e por ele tracemos os segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$,..., $\overline{A_nB_n}$, perpendiculares ao outro lado:

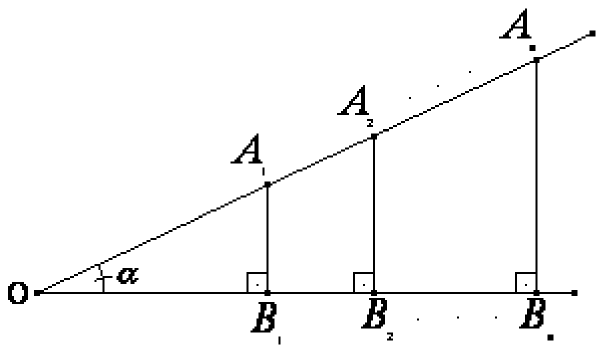


Figura 10 – Triângulos semelhantes

Os triângulos OB_1A_1 , OB_2A_2 ,..., OB_nA_n com um ângulo comum α são semelhantes, o que permite extrair as três razões constantes a seguir, dependendo apenas do ângulo α :

Seno de α = sen α = $\dfrac{A_1B_1}{OA_1} = \dfrac{A_2B_2}{OA_2} = \ldots = \dfrac{A_nB_n}{OA_n} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

Co-seno de α = cos α = $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_2}{OA_2} = \ldots = \dfrac{OB_n}{OA_n} = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente de α = tg α = $\dfrac{A_1B_1}{OB_1} = \dfrac{A_2B_2}{OB_2} = \ldots = \dfrac{A_nB_n}{OB_n} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$.

Nos livros 2 e 4, a única diferença é que eles definem as relações seno e co-seno num triângulo retângulo sem o uso da semelhança entre triângulos, como mostramos abaixo:

Para um ângulo agudo de um triângulo retângulo definimos os números seno, co-seno e tangente como segue:

O seno do ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.
O co-seno do ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.
A tangente do ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.

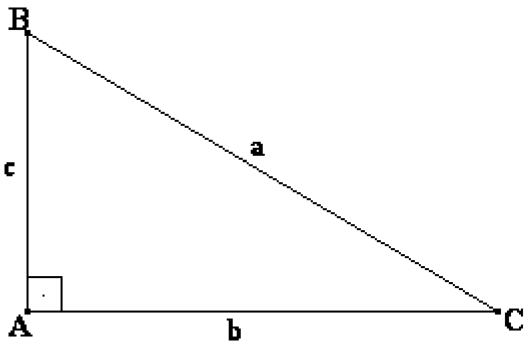


Figura 11 – Triângulo retângulo

Considerando o ângulo agudo C, temos:

seno de C = $\dfrac{\text{cateto oposto a C}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$

Indicamos *seno* de C por sen C (leia: seno de C)

Então: seno de C = $\dfrac{c}{a}$.

co-seno de C = $\dfrac{\text{cateto adjacente a C}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$. Indicamos cos C = $\dfrac{b}{a}$.

tangente de C = $\dfrac{\text{cateto oposto a C}}{\text{cateto adjacente a C}} = \dfrac{c}{b}$. Indicamos por tg C = $\dfrac{c}{b}$.

Por serem razões entre lados dos triângulos, os números seno, co-seno e tangente são denominados razões trigonométricas.

Nos livros de Ensino Médio 1, 3 e 5 é usada a semelhança entre triângulos retângulos para definir as relações trigonométricas seno, co-seno e tangente, sem envolver a semelhança em situações em que o aluno tenha de aplicá-la como ferramenta na solução desses problemas e na construção do conceito das relações trigonométricas no triângulo retângulo[18].

---

[18] Segundo os PCN Ensino Médio, p. 41, o domínio de um saber fazer matemática "(...) passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões (...)".

Os livros 2 e 4 definem as relações trigonométricas apenas como relações entre os catetos e a hipotenusa, sem mostrar que essas relações têm ligação com a semelhança entre triângulos, com a congruência ou com as transformações trigonométricas. A abordagem introdutória desses livros analisados nos parece não favorecer, portanto, à retomada e ao aprofundamento do conhecimento matemático para possibilitar a construção de significado para o aluno da trigonometria no triângulo retângulo, pois não associa o assunto a nenhum conhecimento matemático anterior do aluno e apresenta diretamente a sua definição, sem antes inseri-lo em situações que mobilizem esse conhecimento como ferramenta implícita na solução de problemas[19].

A partir desse ponto, ambos os livros trabalham com o triângulo retângulo extraído do quadrado (seus lados e sua diagonal) para o ângulo de 45º, e com o triângulo retângulo extraído do triângulo eqüilátero (seu lado, metade de seu lado e sua altura) para os ângulos de 30° e 60°. O objetivo é a construção de uma tabela trigonométrica com esses ângulos (notáveis) para que os valores sejam usados pelos alunos na resolução dos problemas, conforme podemos constatar abaixo, com alguns exemplos característicos de resolvidos extraídos dos livros analisados:

1 – Encontre as medidas dos ângulos dos triângulos abaixo[20]:

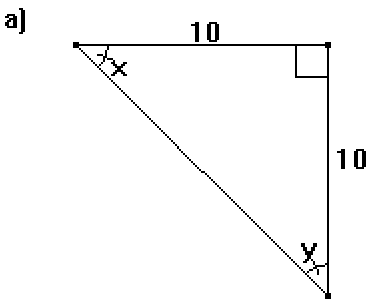


Figura 12 – Exercício 1a

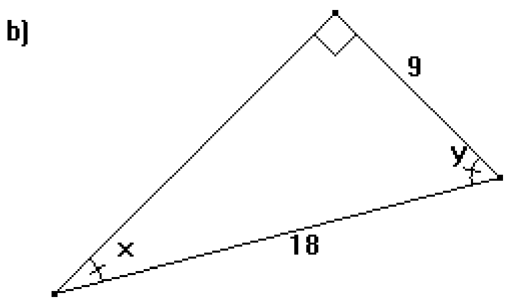


Figura 13 – Exercício 1b

Solução apresentada:

a) $tg\ x = \frac{10}{10} = 1 \therefore x = 45^\circ$

$x + y = 90^\circ \therefore y = 45^\circ$

b) $\text{sen}\ x = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{18}} \Rightarrow \text{sen}\ x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \therefore x = \mathbf{30}^\circ$

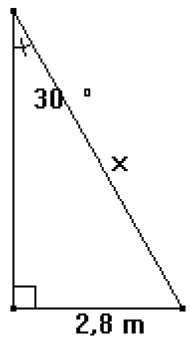
$x + y = \mathbf{90}^\circ \therefore y = \mathbf{60}^\circ$

---

[19] Conforme sugerem os PCN do Ensino médio, p. 06.

[20] Extraído do livro: Matemática, de Walter Spinelli e Maria Helena Souza, editora Scipione, São Paulo, em 1996.

2 – Uma escada está apoiada no solo e numa parede vertical. A distância entre o ponto de apoio da escada no solo e a parede é de 2,8 m. O ângulo formado pela escada e a parede é de 30º. Calcule o comprimento da escada[21].
Solução apresentada:



$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{\textit{cateto oposto a } 30^\circ}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2{,}8}{x} \Rightarrow x = 2{,}8 \times 2 = 5{,}6\ m$$

Figura 14 - Exercício 2

Como pudemos observar nos exemplos acima, a solução dos problemas apresentados privilegia a apreensão discursiva, desprivilegiando o tratamento figural (inicialmente dado para construir a tabela de seno e co-seno de ângulos notáveis) e, conseqüentemente, a apreensão operatória por parte do aluno.

Tanto na exposição da teoria, como na apresentação das situações resolvidas para o aluno, constatamos que não são apresentadas situações que parecem estimular o aluno à mudança de ponto de vista[22] ou que contenham a mudança de quadros. É apresentada a definição das relações trigonométricas, sem envolvê-las em situações que provoquem no aluno a necessidade de tê-las como ferramentas implícitas na solução dos problemas. Essa falta de articulação com o conhecimento anterior (construções geométricas, congruência e semelhança) com a trigonometria no triângulo retângulo implica na falta da exploração heurística da figura e, conseqüentemente, no uso da tabela trigonométrica dos ângulos notáveis na resolução dos problemas (apreensão

---

[21] Extraído do livro: Matemática na escola de 2º grau, Antônio dos Santos Machado, São Paulo, editora Atual, São Paulo, 1996.
[22] Segundo Michele Artigue apud Saddo Ag Almouloud, no Caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 117. "a aderência exclusiva a um único ponto de vista é, no ensino, bem como na história, um dos processos-chave do obstáculo (...) essa aderência se manifesta pela incapacidade de tratar com eficácia ou simplesmente de dar sentido para alguns problemas".

discursiva), em detrimento de situações em que o aluno recorra da conversão do registro lingüístico para o registro figural, seguido de um tratamento figural.

Acreditamos que a mudança de ponto de vista e o tratamento figural favoreçam (como favoreceram na evolução histórica do conceito matemático) a apreensão perceptiva, discursiva, seqüencial e operatória do aluno e, conseqüentemente, podem produzir uma aprendizagem mais significativa. Entendemos por aprendizagem significativa:

> [...] quando um novo conhecimento relaciona-se de uma maneira substantiva e não arbitrária a informações previamente adquiridas pelo aluno. A relação substantiva exprime que a aprendizagem não depende de determinadas palavras ou representações particulares do conhecimento novo, ou seja, é a substância do conceito que se incorpora à estrutura cognitiva. (Manrique, 2003).

Constatamos, portanto, que a abordagem dos livros didáticos de Ensino Médio pode dificultar a participação do aluno na construção das relações trigonométricas no triângulo retângulo e pode não favorecer na construção de significado que esse conhecimento tem para o aluno.

CAPÍTULO 3: PROBLEMÁTICA E REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentamos um panorama das pesquisas correlatas ao nosso tema. Discutimos também a problemática e as hipóteses, os referenciais teóricos e os procedimentos metodológicos da pesquisa.

3.1 ANÁLISE DAS PESQUISAS CORRELATAS AO TEMA

Tivemos acesso a poucas pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de trigonometria. Porém, as pesquisas que analisamos apontam para a falta de significado que as abordagens tradicionais produzem. As três dissertações que compõem o nosso acervo (duas da PUC de São Paulo e uma da UNESP de Rio Claro) e a maioria das outras pesquisas analisadas retratam a falta de significado e pretendem, com seus trabalhos, produzirem uma forma de abordagem significativa para o tema.

Para selecionarmos os artigos e as dissertações para análise, procuramos no banco da CAPES, no LUMEN (sistema de busca das bibliotecas da PUC de São Paulo), no DEDALUS (sistema de busca da biblioteca da USP), no SBU (sistema de bibliotecas da UNICAMP) e no portal de bibliotecas da UNESP.

Escolhemos as dissertações e os artigos que tratam do ensino-aprendizagem de trigonometria e que são direcionados para as séries finais do Ensino Fundamental (7ª e 8ª séries) ou que são do Ensino Médio, por terem proximidade não só temática, como também de abordagem da que pretendemos trabalhar na nossa seqüência.

A seguir, apresentamos um breve estudo das pesquisas correlatas, destacando nos trabalhos alguns itens como os objetivos, a metodologia e os procedimentos metodológicos e os resultados alcançados.

3.1.1 Análise de artigos sobre trigonometria

Dois artigos dos cinco artigos que analisamos são da revista *The Mathematics Teacher*. Um deles, intitulado *Time for Trigonometry*[24], escrito por Harris S. Shultz e Martin V. Bonsangue (professores da Califórnia *State University*), traz um conjunto de cinco atividades que objetivam que o aluno observe e apreenda o conceito de periodicidade por meio de situações que trabalham os comportamentos periódicos. Nesse tipo de abordagem, as atividades são produzidas com base em fenômenos do mundo real.

No caso, as atividades propostas por esse artigo foram todas baseadas num relógio e nos movimentos de seu ponteiro das horas com relação ao teto. Com base no tempo em horas e na respectiva distância do teto ao ponteiro foram construídas tabelas e gráficos (por meio de calculadoras) para observar a periodicidade da distância do ponteiro ao teto em função do tempo em horas.

As atividades são muito interessantes e inspiradoras. Apesar do artigo ser destinado ao professor, as atividades são confeccionadas para serem aplicadas com os alunos. O aluno deve trabalhar constantemente produzindo tabelas, confeccionando gráficos e observando seus resultados. Isso pode fazer com que, provavelmente, o aluno interaja com a situação proposta e mobilize diferentes representações matemáticas para resolver e analisar as situações.

O segundo artigo da revista *The Mathematics Teacher,* intitulado *Using Interactive-Geometry Software for Right-Angle Trigonometry*[25] e escrito por Charles V. Embse (professor da *Central Michigan University*) e Arne Engebretsen (professor da *Greendale High School*) trata da aplicação de *softwares* no ensino da trigonometria no triângulo retângulo.

Os autores do artigo chamam atenção sobre o ensino usual de trigonometria no triângulo retângulo, cujo qual define as relações trigonométricas de forma

[24] In The mathematics Teacher, vol. 88, nº. 5, páginas 393 a 397, de maio de 1995.
[25] In The mathematics Teacher, vol. 89, nº. 7, páginas 602 a 605, de outubro de 1996.

estática. Não são trabalhadas as variações de lados para se observar o que ocorre se o ângulo é conservado: as relações entre os catetos e entre os catetos e a hipotenusa permanecem constantes.

Segundo os autores, o uso de *softwares* de geometria (*Geometer´s Sketchpad, Cabri-géomètre e TI 92 Geometry*) pode fazer com que o aluno produza essas variações e observe a constância das relações trigonométricas, promovendo, dessa forma, a investigação antes de definir as relações trigonométricas. Portanto, segundo o autor, isso ajuda a produzir significado das relações trigonométricas para o aluno.

Para promover o caráter de investigação, são sugeridas pelo autor três atividades: uma no *Geometer´s Sketchpad*, uma no *Cabri-géomètre* II e outra no *TI 92 Geometry* para explorar a construção e a manipulação geométricas para fazer com que os estudantes se apropriem das relações trigonométricas mediante as suas descobertas.

Julgamos que essas atividades são coerentes, pois trabalham com a perspectiva da construção de significado para o aluno. Além disso, contemplam a observação e a manipulação da figura para a formulação de conjecturas acerca das modificações produzidas pelo próprio aluno. Porém, é necessário que haja a mudança de ponto de vista empregado na elaboração das situações, para poder fazer com que o aluno desenvolva os conceitos de trigonometria. Para citar um exemplo, é interessante que sejam mobilizadas situações em que as relações trigonométricas evoluam para projeções do raio numa circunferência trigonométrica. Isso possibilitará o estudo da função trigonométrica e de propriedades importantes, como a periodicidade.

Na seqüência, analisamos três artigos que foram extraídos do periódico Bulletin Inter-IREM[26] (IREM: *Institut des Recherches en Mathémathiques*) do 1º ciclo[27].

[26] Essa publicação tem o papel de divulgar e propor trabalhos, investigações e experimentações de atividades em matemática dos diferentes Institutos. Esse fato diferencia os artigos franceses dos anteriormente apresentados (os outros artigos não têm registros de aplicação de atividades ou experimentações com os alunos).

[27] O 1º ciclo francês equivale ao nosso ensino fundamental de 5ª a 8ª série.

Nesse documento, os objetivos de ensino levam em consideração a matemática como ferramenta na solução de problemas e consideram a continuidade do conhecimento matemático e sua relação com outras áreas.

O aluno é visto como sujeito ativo, que sabe:

- conjecturar;
- utilizar uma ferramenta matemática e justificar seu uso;
- traduzir as situações matematicamente (graficamente, algebricamente ou geometricamente).

São trazidas como inovações do conteúdo dos programas do primeiro ciclo a ênfase às construções geométricas e a reabilitação do ângulo, da trigonometria e da geometria métrica. Essas mudanças são justificadas por esses conteúdos serem importantes ferramentas mobilizadas pelos alunos na solução de problemas geométricos. Nesse aspecto, as inovações aqui sugeridas se aproximam muito da nossa proposta de estudo.

Uma parte da obra é destinada ao estudo de ângulos e trigonometria (p. 152 a p. 191) que traz os três artigos que analisamos a seguir.

O primeiro artigo chamado de *Gardez le cap et révélez l´amer*, produzido no IREM de Rennes, contém um conjunto de sete atividades ligadas a problemas de navegação. As atividades consistem em traçar a rota de um barco, determinando o ângulo com o uso de uma bússola e a distância a ser percorrida.

As atividades nos parecem muito coerentes e vão no sentido de levar o aluno conjecturar e descobrir as relações trigonométricas calculando distâncias inacessíveis. Podem também se constituir, mais tarde, num elemento introdutório para a trigonometria esférica.

No entanto, nesse artigo, o autor deixou de explorar a variação dos ângulos para a produção de gráficos que podem ser importantes nos estudos das funções trigonométricas. Isso pode ser importante para explorar, por exemplo, que se o ângulo dobra o seno não necessariamente é o dobro do valor. Outro elemento que poderia ser explorado é a periodicidade dessas funções trigonométricas: O barco poderia cumprir trajetórias circulares, por exemplo. Outra observação importante é que não há relatos nesse artigo de quais foram as estratégias e dificuldades dos alunos frente às atividades propostas.

O segundo artigo, *Trigonometrie*, foi produzido pelo IREM de Poitiers e traz uma atividade introdutória (de 15 minutos) que consiste em determinar o ângulo (oposto ao lado medindo 3) num triângulo retângulo de catetos medindo 3 e 5. Em seguida são propostos 14 exercícios, num total previsto de 6 horas de atividades (sua aplicação durou 7 horas).

Na solução da primeira atividade descrita acima, o aluno aplicou o teorema de Pitágoras e em seguida usou o co-seno para resolvê-la, pois o aluno já conhecia a relação co-seno da série anterior. Nesse momento, segundo o autor, o professor pode aproveitar a oportunidade para apontar as outras relações trigonométricas: o seno e a tangente e fazer a institucionalização dessas relações. Também há sugestão de um prolongamento dessa atividade para representar o seno, o co-seno e a tangente em função do ângulo, cujo qual varia de 0° a 90°.

Os primeiros exercícios são para a reutilização dessas relações na solução de problemas envolvendo triângulo retângulo. Os demais exercícios propõem situações que relacionam cálculo de área, ângulo formado por uma reta de equação dada e a vertical, relação fundamental da trigonometria ($\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$) e cálculo das linhas trigonométricas dos ângulos notáveis.

Parece-nos que a atividade introdutória não é suficiente para institucionalizar as relações trigonométricas seno e tangente, apesar do aluno já conhecer a relação co-seno. É necessário que o aluno construa essas relações de uma maneira mais gradativa, aproveitando melhor os conhecimentos anteriores: as construções geométricas: reta mediatriz, reta bissetriz, altura e sua conexão com os triângulos eqüiláteros e com o quadrado (o triângulo eqüilátero foi explorado entre os exercícios propostos, porém de forma desconexa com as construções geométricas). Essas figuras geométricas possibilitam o tratamento figural, como poderemos confirmar adiante na análise a *priori* da seqüência didática no próximo capítulo.

O terceiro artigo do IREM de Reims, também chamado de *Trigonometrie*, propõe um conjunto de três atividades que tratam das relações seno e tangente de um ângulo agudo e a recapitulação dessas relações e da relação co-seno.

Por meio de triângulos retângulos dados, a atividade procura explorar a observação do aluno das relações trigonométricas nesses triângulos. Em seguida, são dados triângulos retângulos semelhantes e é pedido para o aluno calcular em todos a relação entre o lado oposto ao ângulo e a hipotenusa (seno do ângulo). É esperado que o aluno conclua que a relação entre o lado oposto ao ângulo e a hipotenusa é constante para esses triângulos. Nesse momento, essa relação é institucionalizada como seno do ângulo.

É pedido para que o aluno plote (usando calculadora) o gráfico do seno e do co-seno para um ângulo variando de 0° a 90°, de 5° em 5°, mas, não há comentários do que se pretende com isso e tão pouco questionamentos para fazer com que os alunos reflitam sobre os resultados obtidos no gráfico (por exemplo: Se aumentarmos o ângulo, o que acontece com o valor do seno desse ângulo? E o valor do co-seno desse ângulo?).

Na atividade seguinte, é sugerido para que seja repetido o que foi feito na primeira atividade, usando os mesmos triângulos, dessa vez explorando a relação cateto oposto e cateto adjacente. Aqui, da mesma forma da primeira atividade, é esperado que aluno observe que essas relações são constantes (se conservado o ângulo) e é definida, a partir daí, a relação tangente.

Também é solicitado o gráfico da tangente, com uma variação angular de 0° a 90°, de 5° em 5°. A única exploração que é feita no gráfico é com relação ao valor da tangente do ângulo de 90°.

A terceira atividade é uma aplicação das três relações trigonométricas: seno, co-seno e tangente. A maioria dos exercícios envolve triângulos retângulos. É colocada uma situação que explora as três relações trigonométricas e a sua representação geométrica para os ângulos notáveis, objetivando a construção de uma tabela.

Após essas três atividades são propostos cinco exercícios, cujos quais reutilizam os conhecimentos trabalhados nas atividades.

A abordagem desse conjunto de atividades muito se assemelha às atividades dos livros didáticos por nós analisados. Situações que trazem triângulos já prontos e as relações mencionadas no enunciado como passos que devem ser seguidos nos parecem insuficientes para construir significado para o aluno. São necessárias situações que façam com que o aluno construa as figuras e as manipule e que provoquem a exploração dessas figuras e de suas propriedades (e não situações que apontam e induzem no enunciado ao caminho que o aluno deve percorrer) na aquisição dos conhecimentos da trigonometria no triângulo retângulo.

3.1.2 ANÁLISE DAS DISSERTAÇÕES CORRELATAS

Na dissertação de **Briguenti (UNESP, 1994)** encontramos a preocupação em produzir uma aprendizagem significativa de trigonometria, com foco na teoria ausubeliana.

Foi aplicado um teste de conhecimentos de trigonometria com alunos ingressantes do Bacharelado de Química, Bacharelado de Ciências da Computação e de Licenciatura em Matemática para diagnosticar quais são as dificuldades dos alunos com relação ao tema. A partir dessas dificuldades foram construídas atividades, numa tentativa de indicar modos de ação que visam a sanar as dificuldades apresentadas pelos alunos que iniciam o 3º grau.

As atividades foram aplicadas em duas escolas públicas, uma de 1º grau e outra de 2º grau, da cidade de Bauru-SP. Os sujeitos da escola de 1º grau foram 36 alunos da 8ª série, que tiveram 6 horas-aula, num período de duas semanas. Já na escola de 2º grau, a aplicação das atividades estendeu-se por 3 meses, com 5 horas-aula semanais (totalizando 60 horas aula), com 29 alunos do 2º ano de Ensino médio. Pela proximidade do tema (trigonometria no triângulo retângulo), nosso maior interesse nesse trabalho é nas atividades que foram desenvolvidas com os alunos de 1º grau.

Com base na teoria ausubeliana, **Briguenti** procurou construir um mapa conceitual para formar os conceitos de trigonometria. A partir daí, ela identificou dois conceitos fundamentais para a formação dos conceitos trigonométricos: as idéias de semelhança e de proporcionalidade. Esses conceitos foram aplicados para a solução de problemas que aparecem no cotidiano.

Nas suas atividades, a trigonometria no triângulo retângulo ocupa duas folhas. A primeira folha consiste na construção de triângulos retângulos semelhantes pelo aluno. Por meio da semelhança desses triângulos e a observação das razões constantes entre seus lados, definiu-se as razões trigonométricas seno, co-seno e tangente. Logo após, numa segunda folha, foram propostos dez exercícios de aplicação das razões trigonométricas, sendo apenas os dois últimos em forma de situações-problema[28].

Esse trabalho, ao que parece, é pioneiro no assunto nas pesquisas sobre esse tema. Contribuiu, sobretudo, para apontar para a falta de significado que a abordagem tradicional produz, e para a busca de uma nova perspectiva, a qual produza significado para o aluno.

Apesar disso, as relações trigonométricas ainda aparecem como definição e não surgem, nessas atividades, como ferramentas necessárias para a solução de novos problemas matemáticos para depois se tornarem objetos matemáticos. Isso, ao nosso ver, compromete a construção de significado para o aluno.

A avaliação das atividades, elaborada coletivamente pelos alunos, foi apresentada pela autora como relatos das aplicações bem-sucedidas das propostas de trabalho. Na conclusão final (p. 166), com base na entrevista,

---

[28] Segundo Michel Henry *apud* Saddo Ag Almouloud, no caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 100, situação-problema são questões abertas ou fechadas, numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou em vários quadros.

Briguenti observa que os alunos mantiveram-se motivados e que a maioria gostou da maneira como o assunto foi abordado. Ao nosso ver, há nessa conclusão, algumas observações que devem ser feitas:

- O aluno gostar de como o assunto foi abordado não é condição suficiente para a produção de sentido. O caráter lúdico de uma atividade, por exemplo, é importante para motivar o aluno, mas se não houver conteúdo não há produção de sentido;
- Não há instrumentos de análise diagnóstica das atividades para checar a eficácia das atividades para atingir os objetivos propostos;
- Não há registros de qual foi a evolução conceitual dos alunos durante o conjunto de atividades.
- Na conclusão não foi constatado, portanto, se a aprendizagem foi significativa para o aluno.

A dissertação de **Mendes (UFRN, 1997)** defende a utilização da história da matemática para o ensino-aprendizagem de noções básicas de trigonometria no 2º grau, a partir de uma concepção construtivista de ensino que se caracterize pela busca do conhecimento por intermédio da realização de atividades que enfoquem aspectos manipulativos presentes no conteúdo histórico. Pretende-se, com isso, contribuir para a melhoria das ações docentes dos professores de matemática por meio da testagem de uma proposta metodológica voltada à introdução da trigonometria baseada na redescoberta, apoiada no desenvolvimento histórico desse tópico matemático. O objetivo é verificar o grau de validade dessa proposta juntamente com os professores de matemática que atuam nas séries do 1º e 2º grau e que abordam a trigonometria plana.

Nesse sentido, procurou-se desenvolver um trabalho voltado a preparação dos professores de 1º e 2º graus com relação à história da matemática como ferramenta didática. Trata-se, então, de uma proposta de utilização da história como recurso facilitador do ensino de trigonometria, partindo das necessidades apontadas pelos professores em relação ao domínio dessas informações, com base em um estudo preliminar realizado por MENDES & FOSSA (1996), que procurou investigar as atitudes, concepções e experiências dos professores quanto ao uso da história da matemática na sua formação acadêmica e em suas atividades de sala de aula.

Primeiramente, foi elaborado um texto histórico abordando todos os elementos considerados essenciais para a introdução da trigonometria desde a 8ª série até o 2º grau de forma que ele pudesse servir de subsídio teórico para os professores e também pudesse nortear a elaboração das atividades que seria utilizado durante o trabalho. Foram realizados dois pré-testes, cujos quais serviram para reformulação dessas atividades e um teste final num curso ministrado para professores na UFRN, no período de 26 a 30 de maio de 1997.

O grupo de sujeitos envolvidos nesse estudo foi composto especificamente por professores de matemática e concluintes de licenciatura em matemática que pretendiam aprofundar seus conhecimentos acerca do conteúdo histórico da trigonometria, bem como aqueles que apresentam dificuldades com relação aos aspectos didáticos ligados ao ensino desse tópico matemático.

O estudo foi realizado mediante a algumas etapas que se desenvolveram de modo progressivo até culminar com a obtenção dos dados, ou seja, procurou-se verificar a viabilidade da proposição de algumas estratégias pedagógicas a serem adotadas no ensino de trigonometria na 8ª série e no 2º grau e avaliar o grau de eficácia, com os professores, das atividades propostas durante a realização das ações juntamente com o grupo de professores envolvidos.

Foram elaboradas oito atividades de modo seqüencial e com característica de continuidade, tendo como ponto de partida a noção de ângulo, da idéia de razão de semelhança, da determinação de algumas relações de semelhança entre triângulos retângulos, das determinações das medidas das cordas da circunferência, passando pela discussão a respeito da metade da corda até o surgimento do seno, do co-seno, da tangente e cotangente, para culminar com as atividades de construção e interpretação do circulo trigonométrico e das tabelas para os arcos fundamentais. Os resultados foram analisados mediante a avaliação das experiências desenvolvidas durante o curso, por meio de observações juntamente com os grupos de professores, da aplicação de instrumentos de avaliação das atividades e da aplicação de questionários de avaliação dos cursos realizados, tendo como referencial a abordagem qualitativa de pesquisa em educação.

Apesar da coerência da proposta, devemos ressaltar que o desenvolvimento histórico nem sempre acompanha o desenvolvimento epistemológico, nem o individual. É necessário, portanto, ao nosso ver, um recorte no conhecimento para contemplar a evolução conceitual, bem como para atender aos diferentes contextos de aplicação do conhecimento, na elaboração das atividades. O desenvolvimento do conceito de congruência pode começar, por exemplo, pelas transformações geométricas no plano: reflexão, rotação e translação, que podem ser muito mais intuitivos para o aluno.

Na dissertação de **Costa (PUC-SP, 1997)** o objetivo foi de construir uma seqüência de ensino para a introdução das funções seno e co-seno e suas transformações, de forma significativa para o aluno.

Seu trabalho teve dois contextos: o mundo experimental e o do computador. O contexto experimental consistia em instrumentos que foram idealizados e produzidos pela autora com auxílio do Instituto de Física da PUC-SP e o contexto em computador consistia em atividades feitas com o uso do programa *Cabri Géomètre.*

Os sujeitos foram alunos de 1ª e 2ª séries do Ensino Médio que já haviam estudado alguns tipos de funções elementares.

A aplicação da seqüência de ensino foi realizada em três grupos: Num grupo foi feita a aplicação da seqüência experimental para, em seguida, aplicar a seqüência do computador, num outro grupo essa ordem foi invertida. Já num terceiro grupo foi dado o conteúdo com a abordagem tradicional. O intuito era comparar os três grupos e saber se havia alguma diferença em usar outros contextos de abordagem além do tradicional, e, se a ordem dos contextos afetaria na produção de conceitos para o aluno.

A metodologia de avaliação consistiu na aplicação de três testes: um antes de aplicar as atividades, um entre a aplicação das atividades dos contextos, e outro no final de todas as aplicações.

A pesquisadora conclui que, de fato, os contextos auxiliam na produção de uma aprendizagem mais significativa. Também foi concluído que a ordem mais significativa foi a do mundo experimental primeiramente e o computador em seguida.

Devemos nos atentar ao fato de que a autora tinha como objetivo a produção da aprendizagem significativa para a introdução das funções trigonométricas. O nosso objetivo é a introdução da trigonometria no triângulo retângulo. Outro fato importante é que a construção do conhecimento e sua concretude se basearam em objetos construídos (mundo experimental) e no computador.

Apesar das seqüências propostas nos parecerem extremamente fecundas e válidas do ponto de vista didático, operacionalmente sua viabilização pode ser difícil. Não sabemos se o professor terá ao seu lado o aparato tecnológico que foi usado no contexto chamado de mundo computador (devido à sua formação ou devido à estrutura da própria escola em que trabalha) ou terá acesso à produção de equipamentos que foram usados no que a autora chama de mundo experimental.

Na dissertação de **Lindegger (PUC-SP, 2000)**, o objetivo foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo para introduzir os conceitos das razões trigonométricas: seno, co-seno e tangente a partir da manipulação de modelos.

Foi desenvolvida, a partir daí, uma seqüência de ensino, criando situações-problema, a partir de questões simples, contextualizadas, concretas, apostando que tal ambiente serve de facilitador para a construção e a apropriação dos conceitos da trigonometria.

O experimento foi aplicado numa autarquia municipal de Taubaté, em turmas duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental. Numa dessas turmas, que havia 32 alunos, foi aplicada a seqüência de ensino (grupo experimental). Na outra turma (grupo de referência) composta de 24 alunos, foi realizada uma abordagem tradicional de ensino.

Os dois grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes e outro após a aplicação da seqüência de ensino (no caso do grupo experimental) ou do conteúdo abordado (no caso do grupo de referência). O objetivo da aplicação dos testes era o de acompanhar a evolução dos grupos durante o experimento para fazer uma comparação quantitativa entre os dois grupos para analisar a eficácia da seqüência de ensino.

Os resultados obtidos por essa pesquisa apontam para um melhor desempenho e evolução do grupo experimental, sobretudo nas situações contextualizadas. O aluno desenvolveu com mais propriedade as competências para a resolução de problemas sob a abordagem escolhida pela seqüência de ensino. Portanto, isso levou o autor a concluir que os processos de construção dos conceitos básicos da trigonometria ganham significados mais abstratos e abrangentes quando estão inseridos na resolução de problemas concretos.

Das quatro dissertações apresentadas até agora, a de Lindegger é a que mais se aproxima da nossa, pois nosso tema de pesquisa é o mesmo e nosso objetivo também. A abordagem da nossa dissertação, no entanto, procura relacionar o tratamento figural à trigonometria no triângulo retângulo.

Apesar da aplicação de modelos ter apontado para resultados positivos, achamos que as situações propostas deveriam ser modelizadas a fim de se obterem diferentes pontos de vista da trigonometria no triângulo retângulo: de relação trigonométrica para projeção do raio da circunferência trigonométrica. Essa ausência de mudança de ponto de vista pode dificultar que o aluno perceba a periodicidade das funções trigonométricas.

Outra questão importante é a falta de articulação da seqüência proposta com as construções geométricas. O autor poderia aproveitá-las, por exemplo, para obter os valores de seno, co-seno e tangente na construção das tabelas dos gráficos dessas funções trigonométricas, só que, ao invés disso, optou pelo papel quadriculado.

Nossas escolhas são feitas com base nas construções geométricas. Nesse sentido, nossa seqüência didática possibilita que o professor escolha se usará ou não algum *software* de geometria. Nosso trabalho, portanto, possibilita fazer o uso de objetos que são de acesso fácil tanto para os alunos, como também para o professor, pois são distribuídos gratuitamente na rede pública de ensino: régua, compasso e transferidor. Além disso, por meio de atividades elaboradas com esses objetos esperamos possibilitar o resgate do uso das construções geométricas e a sua relação com a trigonometria.

Acreditamos que a manipulação das construções geométricas articuladas com o tratamento figural produzirá sentido para o processo de ensino-aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo.

3.2 PROBLEMÁTICA

Podemos observar pela análise das pesquisas correlatas, e também, reforçada pela análise do livro didático que a abordagem de trigonometria no triângulo retângulo parece não ser feita de forma que produza sentido para o aluno. Nossa problemática é, com base nos fenômenos observados:

"Uma seqüência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo?".

3.2.1 Hipóteses da problemática

Com base na nossa questão de pesquisa, conjeturamos as seguintes hipóteses:

1) Produzir situações-problema que remetam aos tratamentos figurais que foram enfrentados na construção histórica desse conhecimento faz com que o aluno apreenda os conceitos como ferramentas implícitas para a solução desses problemas;

2) A manipulação e a observação das figuras geométricas podem fazer com que o aluno produza e apreenda as propriedades dos objetos representados;

3) Situações-problema cuja resolução envolve conceitos de geometria como isometria: rotação, reflexão e translação; paralelismo, perpendicularismo, etc, podem possibilitar uma mudança de ponto de vista do aluno sobre os problemas de trigonometria do triângulo retângulo e eventual minimização dos problemas de ensino-aprendizagem na trigonometria no triângulo retângulo;

4) A construção e obtenção de relações matemáticas envolvidas nessas figuras geométricas (que podem ser medidas ou calculadas) possibilitam a integração entre a geometria e a álgebra, produzindo significado para o aluno na trigonometria no triângulo retângulo.

Na nossa seqüência didática, conforme a hipótese 1, procuramos construir situações semelhantes com as que ocorreram na história da matemática. Nessas situações, a trigonometria no triângulo retângulo se relaciona com o teorema de Tales, com o problema da determinação do comprimento de uma circunferência, (e, conseqüentemente, com o número π) e com as construções geométricas, o que reforçam nossa quarta hipótese. Isso possibilitará uma conexão importante com outros tópicos de geometria: paralelismo, perpendicularismo, transformações geométricas (translação, rotação, reflexão, homotetia), congruência e semelhança entre figuras geométricas, ângulos inscrito e circunscrito numa circunferência, construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência (hipótese 3) para a exploração dos conceitos das relações seno e co-seno, cálculo de perímetro e da área de polígonos inscritos e circunscritos e sua relação com o comprimento da circunferência, que é o fundamento da nossa segunda hipótese, produzindo significado para o aluno.

3.3 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Para desenvolvermos o conceito de trigonometria no triângulo retângulo com os alunos, lançamos mão de situações que façam a articulação entre a dialética ferramenta-objeto (Douady, 1991) e os registros de representação (Duval, 1995), sobretudo, o tratamento figural desses registros.

3.3.1 Ferramenta, objeto e sua relação dialética

Douady aborda a noção de ferramenta e objeto e sua relação dialética na produção de conceitos para o aluno. Um objeto pode ser uma ferramenta na exploração de um novo conceito para a solução de um problema matemático.

Os conhecimentos antigos servem de ferramenta para analisarmos uma situação nova, pois interagimos com essa nova situação com o conhecimento que já possuímos. O conhecimento antigo é ferramenta insuficiente para a solução de situações-problema, o que deve provocar no aluno a procura de um novo conhecimento para a solução dessa situação pela insuficiência do conhecimento antigo.

Podemos esquematizar a dialética ferramenta-objeto da seguinte maneira:

Esquema da dialética ferramenta-objeto:

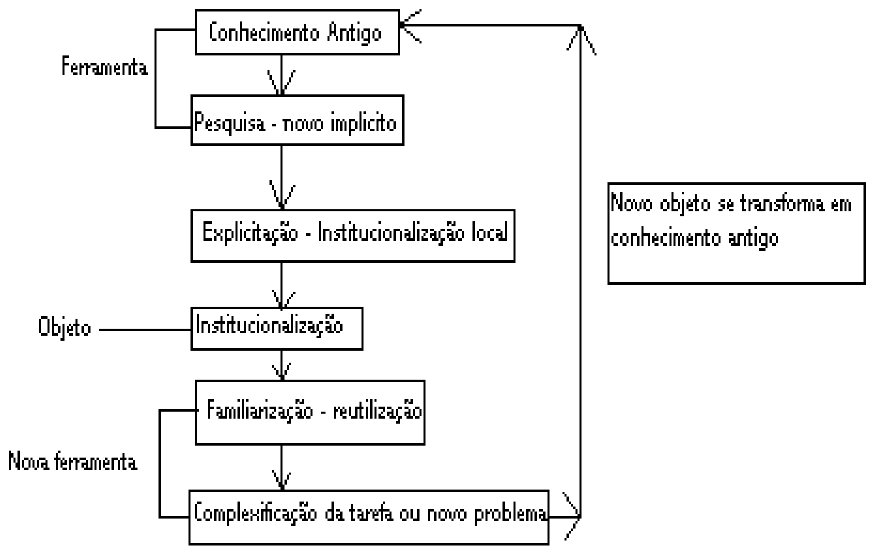


Figura 15 – Esquema da dialética ferramenta-objeto[29]

Este novo conhecimento, uma vez institucionalizado pelo professor, passa a integrar o corpo de conhecimento matemático, adquirindo, portanto, o *status* de objeto. Esse novo objeto pode vir a ser ferramenta para a construção de outros conceitos, e assim por diante, estabelecendo então uma dialética entre ferramenta e objeto.

Por exemplo, em um triângulo retângulo com um lado e um ângulo conhecidos, o teorema de Pitágoras é insuficiente para resolver a situação. Aparece para o aluno, nesse momento, a necessidade de um novo conhecimento para solucionar a situação (novo implícito).

Em torno da necessidade de solução desse problema, aparecem as conjecturas dos alunos sobre como resolver essa situação. Reunindo as conjecturas dos alunos, o professor realiza a explicitação (institucionalização local) para posterior institucionalização do novo conhecimento como objeto matemático. Esse novo objeto matemático se torna ferramenta para solução de problemas, dando reinício ao processo.

[29] **Esquema de Saddo Ag Almouloud, no caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 29.**

As situações propostas, para provocar a dialética ferramenta-objeto, mobilizam nos alunos as conversões de registro lingüístico para registro figural e seus respectivos tratamentos figurais, tanto na apreensão discursiva (interpretação), quanto na apreensão operatória (solução) do problema.

A teoria dos registros de representação de Duval recorre à semiótica para fazer uma análise e dar um tratamento mais elaborado das representações e suas funções cognitivas[30].

3.3.2 Registro de representação semiótica, tratamento e conversão.

Segundo Duval, um registro de representação semiótica é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente.

Os registros são facilitadores do processo ensino-aprendizagem. Como observaremos adiante, um tratamento novo a um mesmo registro ou uma conversão de registro incentivam a compreensão e a descoberta da matemática.

Com relação ao tratamento do registro, usaremos o tratamento figural mereológico, que consiste em recombinar a figura ou completá-la, o tratamento figural ótico, que é de ampliação ou redução da figura, e o tratamento posicional, que é o de refletir, rotacionar ou fazer a translação da figura[31].

3.4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Iniciamos estes procedimentos com um estudo da evolução dos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo nos livros de história da matemática e com o estudo de sua abordagem no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, fizemos a análise do objeto matemático, dos livros atuais, a análise das propostas curriculares para o ensino de matemática e das pesquisas correlatas, para

---

[30] Segundo Raymond Duval apud Saddo Ag Almouloud, no caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 46. ignorar aspectos cognitivos significa não levar em consideração as condições de apropriação real de um conteúdo matemático e as razões das dificuldades encontradas pelos alunos.

[31] In Les différents fonctionnementd d´une figure dans démarche geométrique, p. 127, Reperes – IREM, out de 1994.

sabermos quais são as transformações e as escolhas que compõem o livro didático atual e quais são os rumos da pesquisa sobre o ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo.

Os materiais utilizados foram três livros de história da matemática, cinco livros didáticos de 8ª série e cinco livros didáticos de 1º ano do Ensino Médio, as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, o PCN do Ensino Fundamental e Médio e o PCNEM plus, cinco artigos e quatro dissertações de mestrado.

Mediante essas análises, elaboramos uma seqüência didática composta de algumas situações-problema.

Para a aplicação e análise da seqüência didática, usaremos os princípios da Engenharia Didática, a qual trata de situações de aplicações de seqüências em sala de aula e seus respectivos fenômenos didáticos, os quais são observados e analisados nas análises a *priori* e na análise a *posteriori* (validação e conclusão).

3.4.1 – Análises prévias ou preliminares

Antes da elaboração da seqüência didática, foram feitas as análises do objeto matemático, das propostas curriculares e dos livros didáticos, cujas quais nos ajudam a revelar quais os fenômenos didáticos ligados aos erros e dificuldades dos alunos. Por essa razão, a análise prévia também nos auxiliou na concepção e análise a *priori* da seqüência didática, como podemos constatar adiante.

3.4.2 – Concepção e análise a *priori*

O objetivo da análise a *priori*[32]:

[32] Segundo Saddo Ag Almouloud, no Caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 92.

> [...] é determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e os sentidos desses comportamentos:
> - Descrever as escolhas feitas ao nível local e as características da situação adidática[33] desenvolvida;
> - Analisar no funcionamento quase isolado do professor a importância dessa situação para o aluno, em função, em particular, das possibilidades de ações, das escolhas, das decisões, do controle e da validação que o aluno terá, depois da devolução;
> - prever campos de comportamento possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido e assegurar, em particular, que os comportamentos esperados, se eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Nossa análise a *priori* dos fenômenos didáticos ligados aos erros e dificuldades de ensino-aprendizagem é feita levando em consideração as formas de apreensão dos registros de representação semiótica e a dialética-ferramenta objeto.

Consideramos para a elaboração das situações da nossa seqüência didática, bem como para a análise das dificuldades dos alunos, as classificações da apreensão figural proposta por Duval (1994):

1) perceptiva
2) discursiva
3) seqüencial
4) operatória

Acreditamos que essa classificação da apreensão das figuras nos dá respaldo para a análise a *priori* e a *posteriori* dos erros e das dificuldades dos alunos, pois a referida classificação leva em consideração a complexidade do papel da visualização, da constituição de uma figura, fato essencial para a nossa pesquisa, a qual traz o tratamento figural como uma das fontes de exploração de solução das situações-problema propostas. Além disso, essa classificação permite a montagem de situações de exploração heurística da figura, pois facilita uma melhor compreensão dos elementos figurais.

---

[33] Segundo Saddo Ag Almouloud, no Caderno de Fundamentos de Didática da Matemática de 2000, p. 92. "A situação adidática é uma situação na qual desaparece a intenção de ensinar, mas é específica do saber".

3.4.3 Experimentação, análise a *posteriori* e validação.

Nessa fase são levantados os tipos de erros e dificuldades que os alunos apresentam na resolução das diferentes atividades da seqüência didática para serem confrontados com a análise a *priori*. Se os erros ou dificuldades não estiverem contemplados na análise a *priori*, procuramos, a luz de nossos referenciais teóricos, buscar entender e interpretar esses erros. Esse fato nos ajudou na conclusão da análise a *posteriori* e a responder questões, tais como:

- Foram atingidos os objetivos propostos em cada atividade?

- As situações-problema foram bem elaboradas:

  - são muito longas ou muito curtas?
  - complicadas ou simples?
  - levam muito ou pouco tempo ?
  - mobilizam as estratégias previstas na análise a *priori*?
  - conseguem articular os conhecimentos antigos na solução de problemas novos?
  - conseguem provocar no aluno a exploração heurística da figura, seguida do tratamento figural, na solução dos problemas propostos?
  - levam o aluno ao estudo das relações trigonométricas?

- Quais as modificações possíveis e necessárias nas atividades?

- O professor deve interferir mais ou menos ao longo da solução das atividades[1]?

- Quais são os recursos ou métodos que o professor pode ou deve modificar na sua intervenção? (recursos: lousa ou *software*, método: discussão coletiva ou discussão com cada dupla, por exemplo).

- Houve confirmação das hipóteses de pesquisa no resultado obtido na aplicação da seqüência didática? A questão de pesquisa foi respondida de maneira afirmativa?

- Como os referenciais teóricos e a metodologia influenciaram nos resultados obtidos?

[1] **No próximo capítulo, o** relato de aplicação das atividades **(**item 4.3**) descreve como foi o funcionamento do professor durante a seqüência didática.**

Portanto, a análise a *posteriori* avalia a eficácia da seqüência didática para o processo de ensino-aprendizagem, dando subsídios para a conclusão da pesquisa. Na conclusão, é analisada se a questão de pesquisa (***“Uma seqüência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo?”***) foi respondida de acordo com as hipóteses de pesquisa.

CAPÍTULO 4: SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Dando andamento aos procedimentos metodológicos, apresentamos, neste capítulo, a seqüência didática, cuja qual foi elaborada para tentar responder às hipóteses de pesquisa e conclusões inerentes à aplicação e análise da seqüência didática.

Apresentamos o experimento e as condições de experimentação: o perfil dos sujeitos da pesquisa, o número de encontros, e outros elementos. Além disso, apresentamos a análise a *priori*, a análise a *posteriori* e a conclusão de nosso trabalho.

4.1 Panorama Geral da seqüência didática

A seqüência didática procura proporcionar aos alunos condições de compreender as relações trigonométricas no triângulo retângulo, usando a dialética ferramenta-objeto e o tratamento figural.

Nos encontros previstos em sala de aula, os alunos trabalharam em dupla, mas o registro das atividades que compõe a seqüência didática foi feito individualmente. Desse modo, procuramos dar condições para que os alunos pudessem interagir e valorizamos a resolução de cada um.

Os encontros são constituídos de aulas duplas, com 50 minutos de duração cada uma (1 hora e 40 minutos cada encontro).

Em todos os encontros os alunos tiveram como material de trabalho a régua, o compasso e o transferidor. No final de cada atividade, houve uma discussão entre os alunos e o professor das estratégias e soluções propostas pelos alunos, cuja qual descreveremos no relato de aplicação das atividades. Ao todo são quatro atividades desenvolvidas em sala de aula.

O aplicador da seqüência é o próprio pesquisador. É licenciado em matemática há seis anos e mestrando em Educação Matemática da PUC-SP.

4.1.2 Perfil dos sujeitos da experimentação

Os sujeitos da seqüência didática são 13 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular de Ensino Fundamental e Médio, localizada na cidade de São Paulo. Sete deles são meninos e seis são meninas. Seis alunos vieram do Ensino Fundamental da própria Escola e sete vieram de diferentes escolas. O alunado, portanto, é heterogêneo no que se refere a sua origem escolar, mas a faixa etária está entre 14 e 16 anos.

A seguir, temos o quadro do roteiro geral das atividades e dos respectivos conteúdos contemplados:

Assuntos	Objeto de Estudo	Objetivo	Nº de Atividades e Conteúdo
1ª	- seno e co-seno no triângulo retângulo.	- Estudar as relações trigonométricas no triângulo retângulo	2; relações trigonométricas no triângulo retângulo com ângulos notáveis (ou não)
2ª	- seno e co-seno e tangente, perímetro de polígonos e comprimento de circunferência.	- Relacionar a medida de um ângulo central em graus com o arco em radianos	1;reutilização e familiarização das relações trigonométricas.
3ª	- seno e co-seno e tangente no ciclo trigonométrico para ângulos da 1ª volta	- Introduzir as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico	1; Introdução das relações trigonométricas tangente na circunferência trigonométrica para ângulos da 1ª volta

Quadro IV - Roteiro das atividades e conteúdos contemplados

Nº da Atividade	Nome da Atividade	Objeto da atividade
1ª	Relações trigonométricas num triângulo retângulo	- Relacionar lados e ângulos notáveis num triângulo retângulo; - Relacionar a trigonometria com congruência entre triângulos.
2ª	Relações trigonométricas num triângulo retângulo	- Relacionar lados e ângulos num triângulo retângulo; - Relacionar a trigonometria com semelhança entre triângulos.
3ª	Relações entre perímetros, áreas e comprimento da circunferência.	- Relacionar o comprimento, área, polígonos regulares e o número pi; - Reutilizar as relações seno, co-seno e tangente na **solução de problemas.**
4ª	Relações trigonométricas no ciclo trigonométrico	- Introduzir as relações seno, co-seno e tangente na circunferência trigonométrica para arcos da 1ª volta.

Quadro V - Cronograma das atividades desenvolvidas

4.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI* DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos a seqüência didática a ser aplicada acompanhada de sua respectiva análise a *priori*. Conforme já comentamos, a análise a *priori* é feita com base na dialética ferramenta objeto (Douady, 1991), na noção de registros de representação (Duval, 1995) e nos fenômenos didáticos observados na análise do livro didático.

4.2.1 Atividade 1: Relações trigonométricas no triângulo retângulo

1 – Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada:

a) 6 cm, 90°, 6 cm	b) 90°, 5 cm, 10 cm	c) 90°,45°, 10cm

d) 90°,60°, 10cm	e) 90°,30°, 10cm	f) 8 cm, 90°, 45°

g) 8 cm, 90°, 30°	h) 8 cm, 90°, 60°

2 – Quantos triângulos, nas condições do exercício 1, são possíveis de serem construídos com as informações de cada item? Justifique.

3 – Justifique as medidas obtidas de cada lado e cada ângulo (não fornecidos) do exercício 1.

4 – Existe alguma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo? Justifique.

4.2.2 Análise didática

Esta atividade foi preparada para que o aluno elabore as suas observações com relação, especificamente, ao triângulo retângulo com ângulos notáveis. Os ângulos notáveis foram escolhidos para facilitar a manipulação das figuras mediante tratamento figural posicional e óptico: transformação de um triângulo retângulo com ângulos de 30° ou 60° em um triângulo eqüilátero por meio de reflexão do triângulo pela sua altura ou transformação de um triângulo retângulo com ângulo de 45° num quadrado por intermédio de reflexão do triângulo pela sua hipotenusa.

O tratamento figural óptico e posicional (reflexão, rotação, homotetia), já abordado com os alunos no momento do desenvolvimento dos tópicos de congruência e semelhança de triângulos, conforme recomenda o PCN (Parâmetro Curricular Nacional). Por esse motivo, acreditamos que o aluno possa mobilizar esse tipo de solução mediante situações apresentadas.

As questões fechadas serão utilizadas para que o aluno mobilize os conhecimentos anteriores para a construção das figuras, já as questões abertas servem para que o aluno observe as figuras e faça a manipulação geométrica e algébrica das questões (complemento de figura e cálculo da medida de um lado ou de um ângulo desconhecido).

Na justificativa das medidas obtidas, em algumas situações, o aluno terá a medida de dois lados e poderá aplicar o teorema de Pitágoras para achar o terceiro lado. Porém, existem situações na atividade em que o aluno só tem a medida de um lado e tem dois ângulos. O teorema de Pitágoras é insuficiente para dar conta da referida situação. É necessário que um conhecimento novo (novo implícito) seja adquirido para que o aluno possa resolver a situação. Esse conhecimento novo pode partir das manipulações geométricas das figuras. O tratamento figural para justificar a questão talvez seja difícil para o aluno, pois ele pode estar habituado a observar na figura elementos de solução para o problema proposto[34], ou seja, podendo fixar-se à apreensão discursiva, gerando dificuldades para a apreensão operatória (a figura não tem significado para o aluno ou a figura é auto-suficiente, não necessitando prová-la).

Haverá, no final da atividade, a institucionalização local do tratamento óptico e figural que talvez seja mobilizado na solução desses problemas, como poderemos observar adiante na apresentação das soluções esperadas.

4.2.2.1 Erros ou dificuldades esperadas nessa atividade:

1. Com relação à apreensão discursiva:
- dificuldade na conversão de registro lingüístico para o registro figural: o enunciado pode ser lido e não compreendido pelo aluno. O professor deve esclarecer as dúvidas do enunciado, sem, contudo, se encarregar de dizer ao aluno o que fazer passo a passo;

2. Com relação à apreensão seqüencial: Esses erros ou dificuldades estão relacionados, nessa atividade, à construção da figura. Esperamos que sejam os seguintes:
- dificuldade na manipulação dos instrumentos de construção: pode haver dificuldades em, por exemplo, saber marcar um ângulo com transferidor (o aluno pode optar em medir o ângulo ao invés de construí-lo). Isso é possível devido a pouca utilização desses instrumentos em sala de aula. Se houver dificuldades desse tipo, o professor deve intervir para orientar o aluno, sem, contudo, resolver algum problema proposto;
- dificuldade de construção dos ângulos: o aluno pode não saber construir um ângulo reto ou um ângulo de 30°, 45° e 60°. Essa dificuldade pode aparecer porque o aluno não está habituado às construções de ângulo. O professor deve ajudar os alunos, se houver esse tipo de dificuldade, discutindo com os alunos como pode ser feita a construção desses ângulos com régua e compasso ou interferindo em dúvidas individuais.

---

[34] **In Les différents fonctionnementd d´une figure dans démarche geométrique, p. 122, Reperes – IREM, out de 1994.**

- erros de imprecisões nas construções: mesmo sabendo manipular os instrumentos, uma pequena imprecisão pode fazer com que um ângulo ou um lado tenha medida diferente do que o enunciado pediu, um triângulo, por esse motivo, pode não fechar. O professor não deve intervir no momento da solução da atividade, mas isso pode ser explorado na discussão da atividade em forma de questionamento para o grupo de alunos.

3. Com relação à apreensão perceptiva: Essa dificuldade, nesse caso, ocorre depois da figura pronta, ou seja, pode aparecer se percorridas todas as etapas da apreensão seqüencial. Ela está relacionada à falta de estratégia: os elementos figurais podem não ser percebidos pelo aluno para a solução dos problemas[35]. No momento da aplicação da seqüência pode ser feita alguma intervenção na lousa para propor o problema ao grupo de alunos para fazer aparecer algumas sugestões ou conjecturas do próprio grupo de alunos;

4. Com relação à apreensão operatória: Esses erros estão relacionados à manipulação das figuras construídas e podem estar relacionados à falta de articulação e de sentido que as fórmulas ou as estratégias de solução têm com as figuras construídas. O professor, mesmo observando esses erros, durante a atividade não deve interferir. Deve-se deixar a exploração dessas dificuldades para a discussão da atividade. Os erros ou dificuldades que podem surgir são:

- erro ou dificuldade no cálculo das medidas desconhecidas: o aluno pode errar em contas por descuido ou não saber manipular uma expressão algébrica: o teorema de Pitágoras, por exemplo, é possível se enganar no momento em que isola o termo desconhecido;
- erro ou dificuldade na aplicação das fórmulas: na aplicação do teorema de Pitágoras, por exemplo, pode fazer com que um cateto ao quadrado valha a soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto ou na soma dos ângulos internos é possível não saber aplicá-la.

---

[35] In Les différents fonctionnementd d´une figure dans démarche geométrique, p. 122, Reperes – IREM, out de 1994.

- erro ou dificuldade na estratégia de solução: é possível que seja escolhido um caminho que não leve à solução (como, por exemplo, refletir um triângulo retângulo com ângulo de 60° pelo lado adjacente a esse ângulo) ou que esteja conceitualmente errado (por exemplo, ao refletir o triângulo retângulo pelo lado adjacente ao ângulo de 60° dizer que a transformação é um triângulo eqüilátero).

4.2.2.2 Análise matemática:

Superadas as dificuldades ou erros mencionados, esperamos que o aluno possa construir e justificar os exercícios como descrevemos a seguir:

Questão 1a: – Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 6 cm, 90°, 6 cm.

Construção esperada

Uma construção possível é que se trace com régua graduada um segmento BC. Em seguida, com vértice em B constrói-se ou traça-se uma reta AB com ângulo de 90° em relação ao segmento BC. Com ponta seca em B e abertura de 6 cm traça-se um arco que intercepta a reta perpendicular ao segmento BC em um ponto A. O triângulo ABC tem as medidas pedidas.

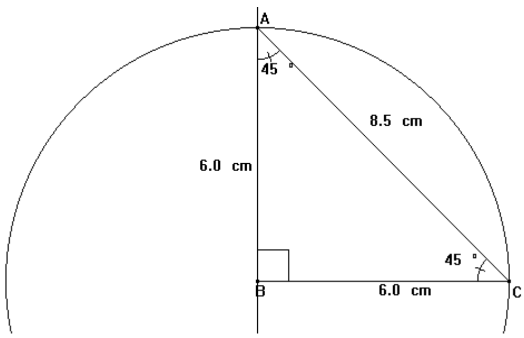


Figura 16 – Questão 1a

Justificativa esperada

Esperamos que o aluno perceba que se um triângulo retângulo é isósceles, então seus ângulos não retos são de 45°. Esperamos, também, reforçar a relação da hipotenusa com os lados. Outro fato que perfeitamente é plausível de observação é que esse triângulo pode ser observado como metade de um quadrado, ou seja, se refletirmos o triângulo com relação a sua hipotenusa (tratamento figural óptico e posicional), então o resultado da transformação é um outro triângulo que formará com o triângulo inicial um quadrado.

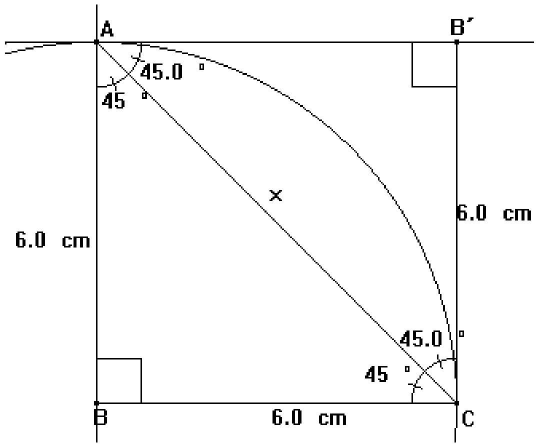


Figura 17 - Questão 1a

Talvez o aluno não observe essa relação, mas obtenha os ângulos incógnitos observando que se o triângulo é isósceles, então ele possui dois ângulos de mesma medida. Usando a soma dos ângulos internos ele consegue justificar que os ângulos não retos medem 45°. Para calcular a medida da hipotenusa o aluno pode recorrer ao teorema de Pitágoras.

Questão 1b: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 90°, 5 cm, 10 cm.

Construção esperada

Uma construção possível é que se trace com régua graduada um segmento AB medindo 5 cm. Em seguida, com vértice em A constrói-se ou traça-se uma reta passando por A com ângulo de 90° em relação ao segmento AB. Com ponta seca em B e abertura de 10 cm traça-se um arco que intercepta a reta perpendicular ao segmento AB em um ponto C. O triângulo ABC tem as medidas pedidas.

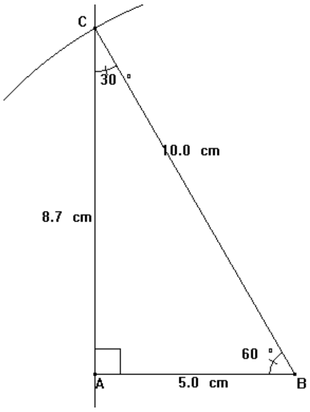


Figura 18 - Questão 1b

Justificativa esperada

Nessa situação, a dificuldade está em determinar os ângulos não fornecidos. A aplicação da propriedade “soma dos ângulos internos” não é suficiente para encontrá-los, pois o problema fornece apenas o ângulo de 90°. É necessário um conhecimento novo para resolver o problema. Assim, fica estabelecida a necessidade de um novo conhecimento para solucionar o problema.

O triângulo em questão possivelmente será observado como metade de um triângulo eqüilátero, ou seja, se refletirmos o triângulo com relação a sua altura, então, o resultado da transformação é um outro triângulo que formará com o triângulo inicial um triângulo eqüilátero (tratamento figural óptico e posicional). Conseqüentemente, seus ângulos serão conhecidos.

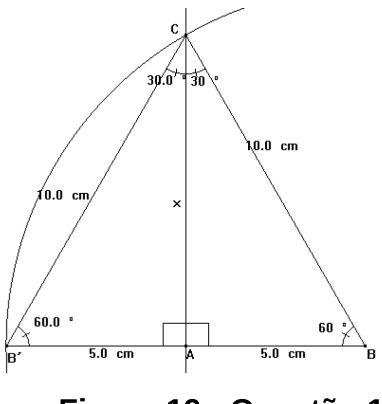


Figura 19 - Questão 1b

Também é possível que o aluno possa perceber que se um triângulo retângulo tem a hipotenusa como o dobro de um de seus catetos, então seus ângulos não retos são de 30° e 60°. Espera-se também reforçar a relação da hipotenusa com os lados nesse tipo de triângulo retângulo.

Se o aluno não perceber até aqui o referido fato, ele poderá descobrir a altura do triângulo, mas terá dificuldade em justificar os ângulos relativos aos catetos.

Questão 1c: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 90°, 45°, 10cm.

Construção esperada

Uma construção possível é que se trace com régua graduada um segmento AB medindo 10 cm. Em seguida, com vértice em B constrói-se ou traça-se uma reta com ângulo de 45° em relação ao segmento AB. Sobre essa reta, toma-se um ponto C´ e traça-se uma reta com ângulo de 90°. Traça-se uma reta paralela a essa última passando pelo ponto A e interceptando a reta AC no ponto C. O triângulo ABC tem as medidas pedidas.

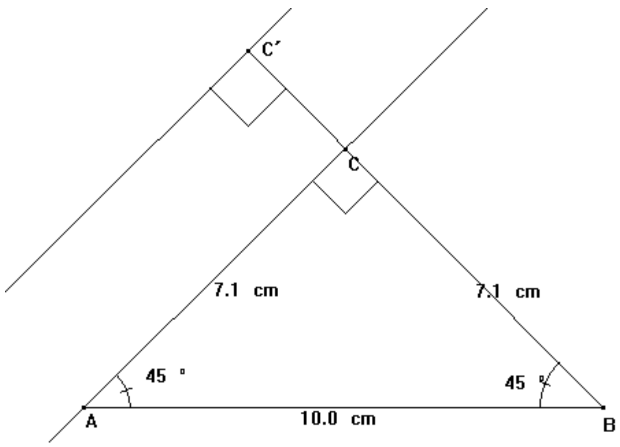


Figura 20 - Questão 1c

Uma outra maneira é construir o triângulo de medidas 45°, 10 cm e 45°. Este será congruente ao triângulo pedido.

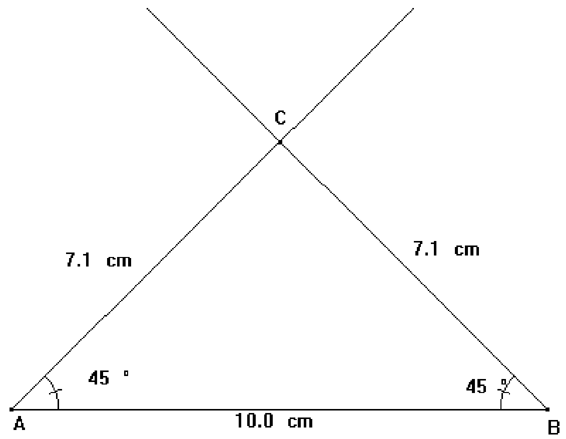


Figura 21 - Questão 1c

Justificativa esperada

Nesse item, o aluno poderá ter dificuldades para justificar as medidas obtidas, pois ele tem a medida de dois ângulos e um lado, o que é insuficiente para aplicar o teorema de Pitágoras.

O triângulo da figura 21 pode ser enxergado como metade de um quadrado, ou seja, se refletirmos o triângulo com relação a sua hipotenusa, então, a figura resultante é um quadrado com lados de mesma medida dos catetos e diagonal de mesma medida da hipotenusa (figura 22), caracterizando um tratamento figural posicional provocado pelo novo implícito (necessidade de calcular as medidas desconhecidas num triângulo retângulo conhecendo apenas a hipotenusa). Em seguida, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras e calcular a medida dos catetos desse triângulo.

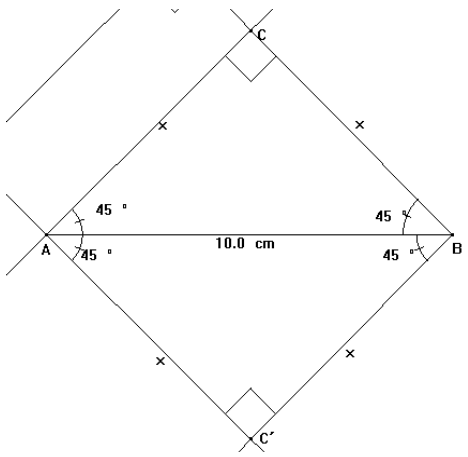


Figura 22 - Questão 1c

É possível também que o aluno perceba que se um triângulo retângulo é isósceles, então seus ângulos não retos são de 45°. Para justificar a medida dos catetos ele usaria o fato de que se o triângulo possui dois ângulos de mesma medida, então seus lados correspondentes também têm a mesma medida.

Usando o teorema de Pitágoras o aluno acha a medida dos catetos.

Questão 1d: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 90°, 60°, 10cm.

Construção esperada

As construções prováveis são análogas ao item anterior.

1ª maneira

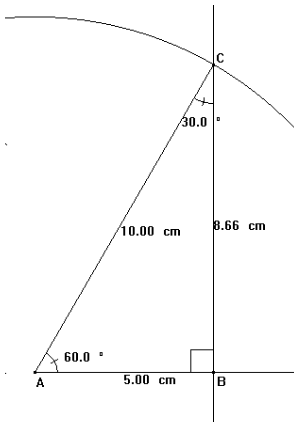


Figura 23 - Questão 1d

2ª maneira: Construindo um triângulo de medidas 30°, 10cm e 60 °, congruente ao primeiro triângulo pedido.

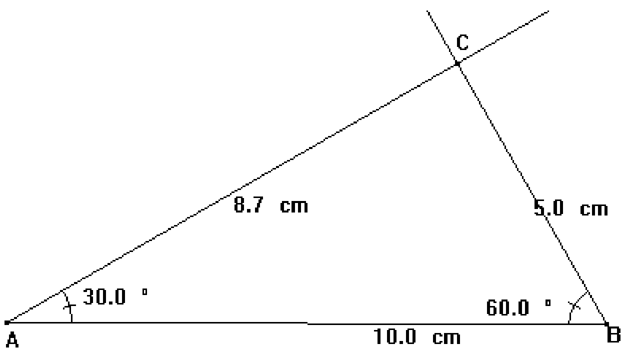


Figura 24 – Questão 1d

Justificativa esperada

Essa situação foi proposta para que o aluno relacione a medida do cateto oposto ao ângulo de 60° com a medida da hipotenusa.

Novamente, o aluno não resolve o problema só como teorema de Pitágoras, pois só tem a medida da hipotenusa.

Talvez haja dificuldades para serem observados na figura os elementos que possibilitam a solução do problema, ou seja, as relações que o triângulo tem com o triângulo eqüilátero. Pode-se refletir esse triângulo pelo lado oposto ao ângulo de 90° para conseguir um triângulo eqüilátero, caracterizando, assim, um tratamento figural óptico e posicional, conforme mostra a figura 25:

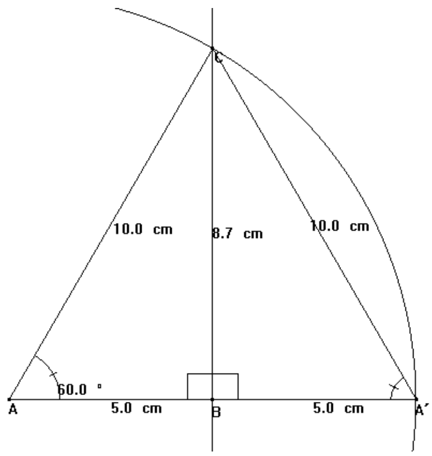


Figura 25 – Questão 1d

Com a apresentação da figura, o aluno deve conseguir descobrir os ângulos e altura aplicando a soma dos ângulos internos de um triângulo e o teorema de Pitágoras.

Questão 1e: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 90°, 30°, 10cm.

Construção esperada

1ª forma:

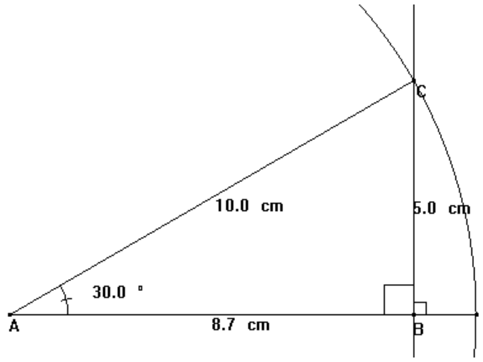


Figura 26 – Questão 1e

2ª forma:

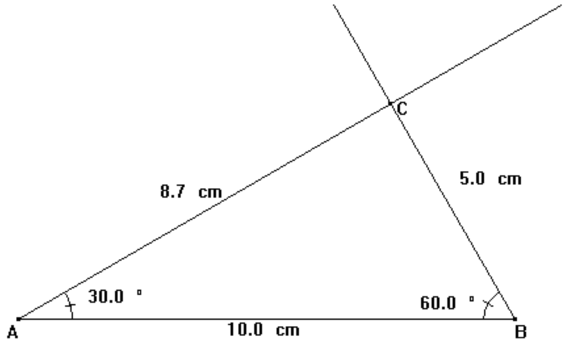


Figura 27 – Questão 1e

Justificativa esperada

As justificativas para as medidas obtidas e observações dadas nesse item são análogas ao item anterior (item d), pois temos nas medidas dois ângulos (de um triângulo retângulo que podem ser extraídos dividindo-se o triângulo eqüilátero em dois triângulos congruentes) e um lado fixado, conforme a figura 28:

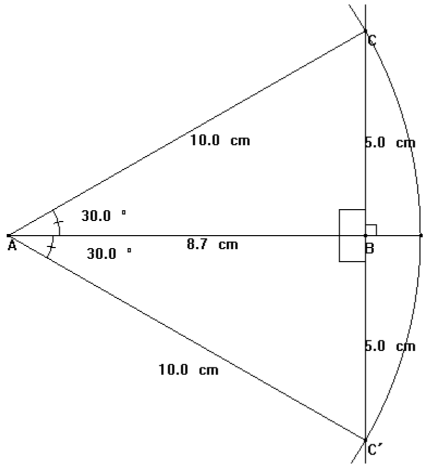


Figura 28 – Questão 1e

Questão 1f: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 8 cm, 90°, 45°

O aluno pode mobilizar a propriedade "soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°" e perceber que esse triângulo é isósceles. Usando esse fato, ele possivelmente determine a hipotenusa usando o teorema de Pitágoras. Se o aluno não observar que o triângulo é isósceles, terá dificuldades em resolver o problema, pois ele tem apenas a medida de um ângulo e um lado (não daria, por exemplo, para aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar a medida dos lados desconhecidos).

As soluções dadas nesse item são análogas aos itens anteriores (item d e item e), pois temos nas medidas dois ângulos (de um triângulo retângulo que podem ser extraídos dividindo-se o triângulo eqüilátero em dois triângulos congruentes) e um lado fixado.

Construção esperada

1ª forma: 2ª forma:

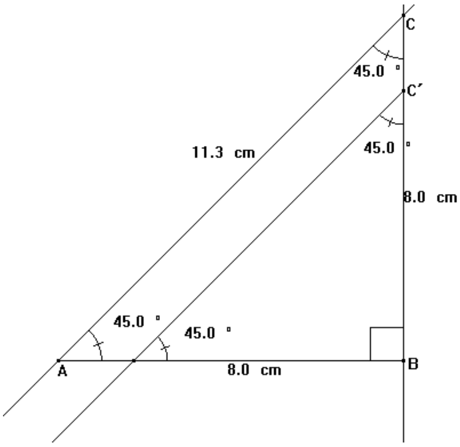


Figura 29 – Questão 1f

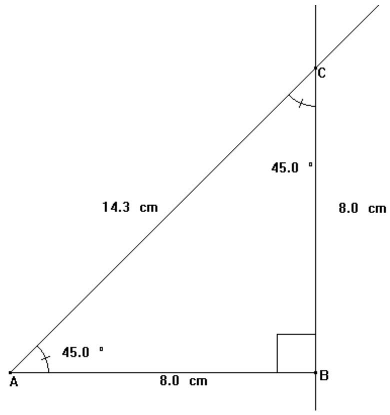


Figura 30 – Questão 1f

Justificativa esperada

A justificativa para a medida obtida é análoga aos itens a e c.

Questão 1g: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 8 cm, 90°, 30°

É provável que o aluno perceba a similaridade com o item d. As justificativas para as medidas obtidas também são similares ao item d: ou o aluno, nessa altura do desenvolvimento da seqüência didática já assimilou que o lado oposto ao ângulo de 30° tem metade da medida da hipotenusa, ou ele pode completar um triângulo eqüilátero refletindo o triângulo pelo lado adjacente ao ângulo de 30°. Se o educando não pensar em uma dessas estratégias, terá dificuldades para justificar as medidas obtidas, pois ele só tem a medida de um lado e de um ângulo.

Os modos de construção são os mesmos do item d.

Construção esperada

1ª forma

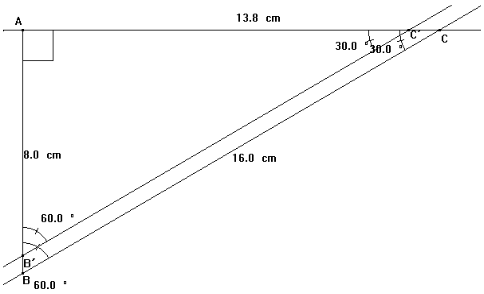


Figura 31 – Questão 1g

2ª forma

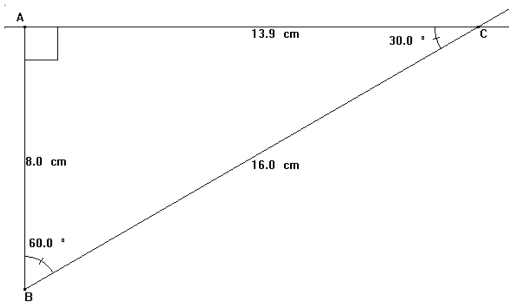


Figura 32 – Questão 1g

Justificativa esperada

As justificativas para as medidas obtidas são análogas aos itens b, d e item e.

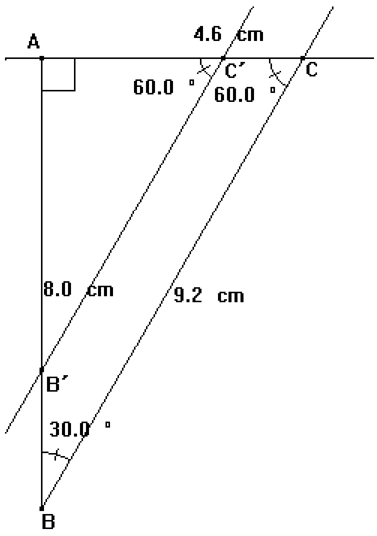
Questão 1h: Construa triângulos usando régua, compasso e transferidor com as especificações abaixo, seguindo a ordem entre ângulos e lados dada: 8 cm, 90°, 60°

Novamente, é possível que o aluno perceba a similaridade com o item anterior. As justificativas para as medidas obtidas também são similares: ou o aluno, nessa altura do desenvolvimento da seqüência didática já assimilou que o lado oposto ao ângulo de 30° tem metade da medida da hipotenusa, ou o educando pode completar um triângulo eqüilátero refletindo o triângulo pelo lado oposto ao ângulo de 60°. Se ele não pensar em uma dessas estratégias, terá dificuldades para justificar as medidas obtidas, pois ele só tem a medida de um lado e de um ângulo.

Os modos de construção são os mesmos do item anterior.

Construção esperada

1ª forma 2ª forma



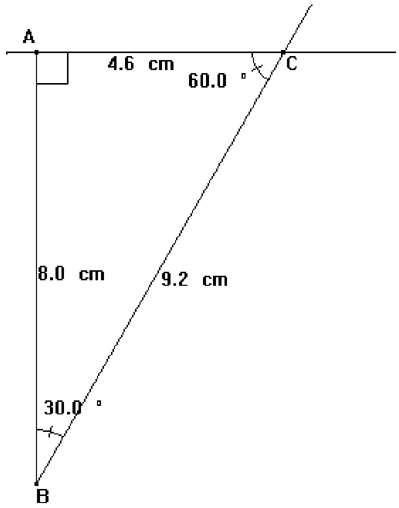


Figura 33 – Questão 1h **Figura 34 – Questão 1h**

Justificativa esperada

As justificativas para as medidas obtidas são análogas aos itens b, d e item e.

Questões 2, 3 e 4

2 – Quantos triângulos, nas condições do exercício 1, são possíveis de serem construídos com as informações de cada item? Justifique.
3 – Justifique as medidas obtidas de cada lado e cada ângulo (não fornecidos .
4 – Existe alguma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo? Justifique.

Estas questões foram propostas para que os alunos usem as observações das construções da própria atividade e percebam que cada triângulo existe e é único.

Para a justificativa das medidas, esperamos que eles percebam, no caso dos triângulos retângulos isósceles, a possibilidade de relacionar a congruência entre lado e ângulo (se um triângulo tem dois ângulos de mesma medida, então ele tem dois lados de mesma medida, e vice-versa.). Para a justificativa do triângulo retângulo com os ângulos de 30° e 60° esperamos que o aluno relacione com o triângulo eqüilátero, seu eixo de simetria e suas propriedades.

É possível também, que o aluno comece a observar mais facilmente a relação entre lados e ângulos num triângulo retângulo após a construção e justificativa de medidas de lados e ângulos obtidos por essa construção.

4.2.3 Atividade: Relações trigonométricas no triângulo retângulo com ângulos notáveis e não notáveis

Dois jogadores de futebol A e B estão alinhados no meio de campo, quando o jogador A lança a bola em linha reta, formando um ângulo β com a linha do meio de campo. Pergunta-se:

1) Se o ângulo β for de 45° e B correr numa trajetória perpendicular à linha do meio de campo, quanto B percorrerá para apanhar a bola e quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se a distância entre A e B for de:

a) 1 metro b) 2 metros c) 6 metros

2) Resolva a situação 1, com o ângulo β valendo:

a) 60° b) 30°

3) Se o ângulo β for de 45° e B correr, em linha reta, a menor trajetória possível, quanto B percorrerá para apanhar a bola e quantos metros a bola percorre até B conseguir apanha-la, se a distância entre A e B for de:

a) 1 metro b) 2 metros c) 6 metros

4) Resolva a situação 3, com o ângulo β valendo:

a) 60° b) 30°

5) Considere a distância entre A e B de 1 metro. Faça o ângulo β variar de 0° a 90°, de 5° em 5° e calcule, para cada um desses ângulos:

a) qual é a distância mínima que B percorrerá para apanhar a bola.

b) quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se B percorrer a distância mínima.
c) quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se B percorrer uma trajetória perpendicular à linha do meio de campo.

6) Com base na situação 5, é verdadeiro afirmar que, se B percorre a distância mínima, quanto maior o ângulo β:
a) maior a distância mínima que B percorrerá para apanhar a bola?
b) maior a distância que B percorrerá até apanhá-la?

7) Esboce os gráficos, usando os valores obtidos nos itens a e b da situação 5.

4.2.4 Análise didática

Esta atividade foi elaborada para que os alunos façam a conversão do registro discursivo para as representações das figuras “a mão livre” (sem o uso de régua, nem compasso) do triângulo retângulo com ângulos notáveis e passem a calcular as medidas, ao invés de justificar as medidas obtidas pela construção dos triângulos. Mediante a observação da figura (duas semi-retas transversais atravessadas por duas retas paralelas), esperamos que o aluno recorra ao tratamento figural óptico e posicional para a solução das situações apresentadas, recorrendo ao Teorema de Thales e à semelhança de triângulos.

As questões fechadas serão utilizadas nessa atividade para que o aluno reutilize o conhecimento institucionalizado na atividade anterior (tratamento figural óptico e posicional) e na solução dos problemas apresentados nessa atividade.

Para os ângulos não notáveis, provavelmente o aluno pense numa estratégia de solução envolvendo a construção de triângulos semelhantes com régua e compasso (tratamento óptico). É possível, para esses casos, que o aluno tenha dificuldade para identificar uma estratégia que resolva esse problema. Conforme analisado na atividade anterior, o tratamento figural para justificar a questão talvez seja difícil para o aluno, pois ele pode estar habituado a observar na figura os elementos de solução para o problema proposto, ou seja, podendo fixar-se à apreensão discursiva, gerando dificuldades para a apreensão operatória (a figura não tem significado para o aluno ou a figura é auto-suficiente, não necessita prová-la).

Ao mesmo tempo, identificada a estratégia, o aluno pode perceber as relações trigonométricas como relações advindas da relação de semelhança entre dois triângulos, e não por que isso foi definido e dado como conhecimento pronto para ele.

A escolha dos ângulos variando de 5° em 5° foi realizada para que o aluno possa perceber que a variação do ângulo provoca uma variação nessas relações trigonométricas, e nem sempre vale que quanto maior o ângulo, maior o valor dessas relações. A construção da tabela auxiliará na percepção das relações trigonométricas.

Situações envolvendo a projeção ortogonal foram inseridas nesta atividade para possibilitar a exploração das relações trigonométricas no triângulo retângulo e para ligar as relações trigonométricas com as projeções vertical e horizontal de um segmento. Isso auxiliará na ligação entre as relações trigonométricas no triângulo retângulo e as projeções ortogonais do raio da circunferência trigonométrica na próxima atividade.

Haverá, no final desta atividade, além da institucionalização local, a institucionalização das relações trigonométricas seno, co-seno e tangente.

4.2.4.1 Análise dos erros e dificuldades

Nesta atividade, os erros ou dificuldades esperados podem ser:

1. Com relação à apreensão discursiva:

- dificuldade na conversão de registro discursivo para o registro figural: o enunciado pode ser lido e não compreendido pelo aluno. O professor deve esclarecer as dúvidas do enunciado, sem, contudo se encarregar de dizer ao aluno o que deve fazer passo a passo;

2. Com relação à apreensão seqüencial: Esses erros ou dificuldades estão relacionados à representação das situações por meio de figuras. Acreditamos que nessa atividade esse tipo de problema está ligado à interpretação do texto. É importante que qualquer intervenção nessa etapa seja explorada na discussão coletiva, pois é importante pensar em qual é a diferença entre atribuir, por exemplo, a medida 1 metro para um cateto adjacente ou oposto a um ângulo.

3. Com relação à apreensão perceptiva: Representada corretamente a figura é possível que o aluno tenha dificuldades em encontrar elementos na figura que podem ser mobilizados para a solução do problema. Esperamos a principal dificuldade nesta atividade seja o uso da semelhança de triângulos para os ângulos não notáveis na construção da tabela (exercício 5). Com ajuda dos alunos, o professor pode representar o problema na lousa, no momento da aplicação da atividade, para que conjecturas a respeito da solução sejam discutidas coletivamente.

4. Com relação à apreensão operatória: Representada a figura, pode-se tomar uma estratégia que não resolva a situação, mesmo sendo coerente matematicamente ou mesmo pode ser escolhida uma estratégia errada. Não pretendemos que haja alguma interferência do professor no momento da aplicação da atividade. Esperamos que os erros ou dificuldades sejam:

- erro ou dificuldade no cálculo das medidas desconhecidas: erros ou dificuldades de manipulação de uma expressão algébrica: o teorema de Pitágoras, por exemplo, é possível se enganar no momento em que isola o termo desconhecido;

- erro ou dificuldade na aplicação das fórmulas: na aplicação da semelhança entre triângulos, do teorema de Pitágoras, ou dificuldade na identificação da fórmula a ser aplicada (pela própria falta de significado que a fórmula tem para o aluno)

- erro ou dificuldade na estratégia de solução: é possível que seja escolhido um caminho que não leve à solução ou que esteja conceitualmente errado. Como pudemos constatar na análise do livro didático, não são trabalhadas com o aluno situações que explorem a figura de maneira heurística.

4.2.4.2 Análise matemática:

Questão 1a, 1b e 1c: Se o ângulo β for de 45° e B correr numa trajetória perpendicular à linha do meio de campo, quanto B percorrerá para apanhar a bola e quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se a distância entre A e B for de:

a) 1 metro b) 2 metros c) 6 metros

Nesse item, o aluno pode representar a situação da seguinte forma:

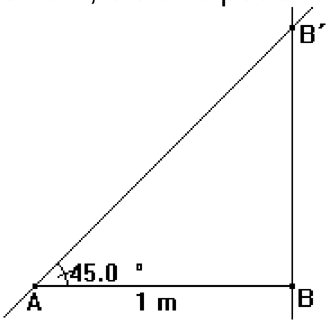


Figura 35 – Questão 1a

Provavelmente, o aluno perceba que justificou uma questão semelhante na atividade anterior e use os mesmos métodos da justificativa para resolver essa situação. Ainda assim, o aluno pode ter dificuldades na resolução se ele se ater apenas à apreensão discursiva e não procurar extrair mais informações a partir dos elementos da figura (um triângulo retângulo com um ângulo de 45°) e da sua manipulação.

Um dos modos de solução que acreditamos que pode ocorrer é o aluno mobilizar a soma dos ângulos internos de um triângulo e concluir que o triângulo tem dois ângulos e dois lados iguais. Com isso, ele aplica o teorema de Pitágoras e descobre que os lados valem $\sqrt{2}$.

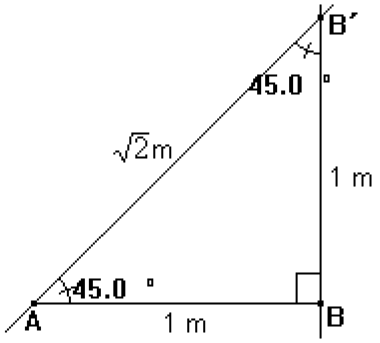


Figura 36 – Questão 1a

Outro modo é por meio de tratamento figural posicional: refletir o triângulo pela hipotenusa, formando assim um quadrado, e aplicando que x $= l\sqrt{2}$ é igual a hipotenusa que mede 40 metros, de onde se conclui que x vale $\sqrt{2}$.

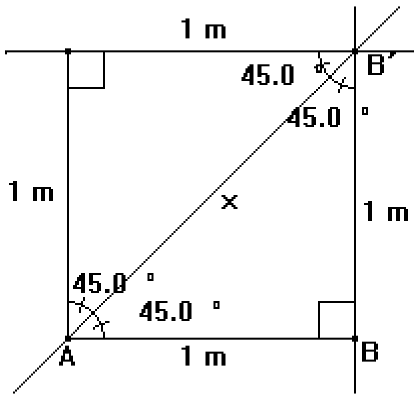


Figura 37 – Questão 1a

Para a distância de 2 e 6 metros (itens b e c), o aluno pode repetir o mesmo raciocínio descrito anteriormente ou perceber que as medidas aumentarão, proporcionalmente, conforme figura 38:

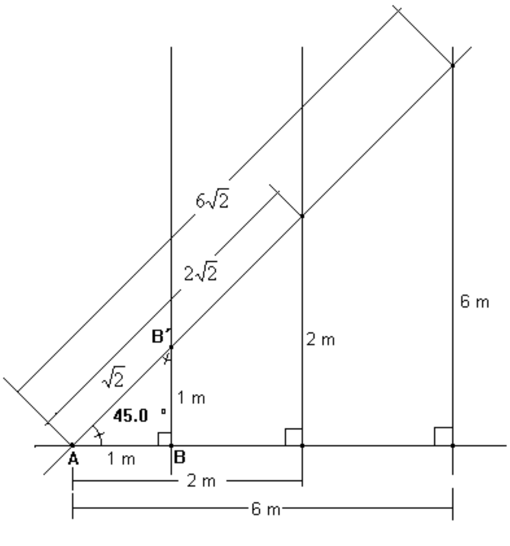


Figura 38 – Questão 1a

Questão 2a: Resolva a situação 1, com o ângulo β valendo: 60°

O aluno pode representar a situação da seguinte forma:

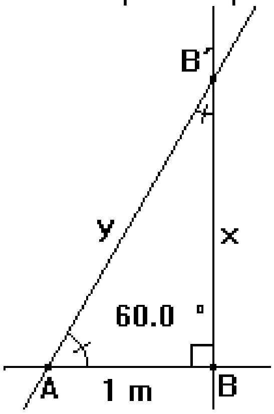


Figura 39 – Questão 2a

É possível que o aluno resolva da seguinte forma:

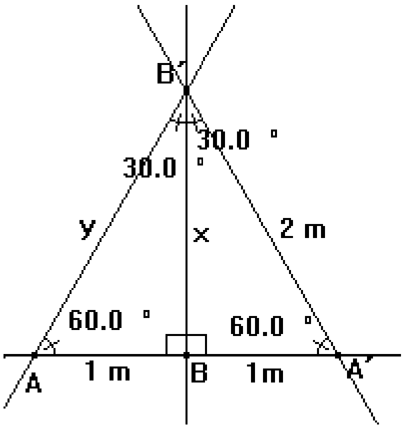


Figura 40 – Questão 2a

O triângulo ABB´é refletido pela reta BB´, formando um triângulo AA´B´ eqüilátero (os triângulos ABB´ e A´BB`são congruentes,pois um é reflexão pela reta BB´do outro). De onde se conclui que y = 2m e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulos ABB´ ou no triângulo A´BB encontramos x = $\sqrt{3}$.

Para resolver as demais situações, é provável que se aplique a mesma estratégia anterior ou que se observe que as medidas aumentarão, proporcionalmente, como podemos observar na figura 41:

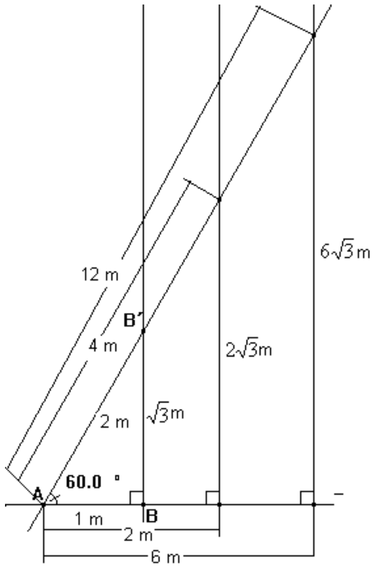


Figura 41 – Questão 2a

Questão 2b: Resolva a situação 1, com o ângulo β valendo: 30°

A representação feita pelo aluno pode ser a seguinte:

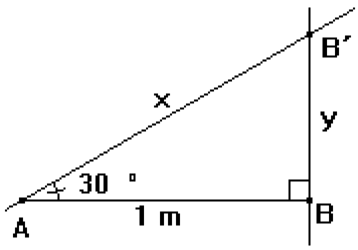


Figura 42 – Questão 2b

Para resolver este problema, provavelmente, o aluno utilize o fato de que o lado oposto ao ângulo de 30° mede sempre metade da hipotenusa. Acreditamos na possibilidade apresentada, pois situações semelhantes envolvendo triângulo retângulo com esse ângulo foram propostas em atividades anteriores. Dessa forma, o valor encontrado para x = 2y. O valor de y poderia, a partir daí, ser calculado usando o teorema de Pitágoras:

$(2y)^2 = 1^2 + y^2$, de onde se conclui que y = $\sqrt{3}$.

Outra forma para a resolução é que o aluno recorra ao tratamento figural óptico e posicional e faça uma reflexão pelo lado adjacente ao ângulo de 30°, concluindo que a hipotenusa que mede x vale 2y. Para descobrir y deve-se usar o teorema de Pitágoras encontrando y = $\sqrt{3}$ e x vale $2\sqrt{3}$ m ou aplica-se que AB = 1m é a altura do triângulo eqüilátero ($1 = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$).

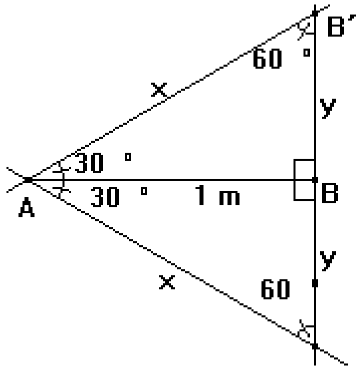


Figura 43 – Questão 2b

Para as distâncias de AB = 2m e AB =6m, é possível que o mesmo raciocínio anterior seja usado ou que o aluno conclua que as soluções estão relacionadas por triângulos semelhantes, como vemos na figura 44:

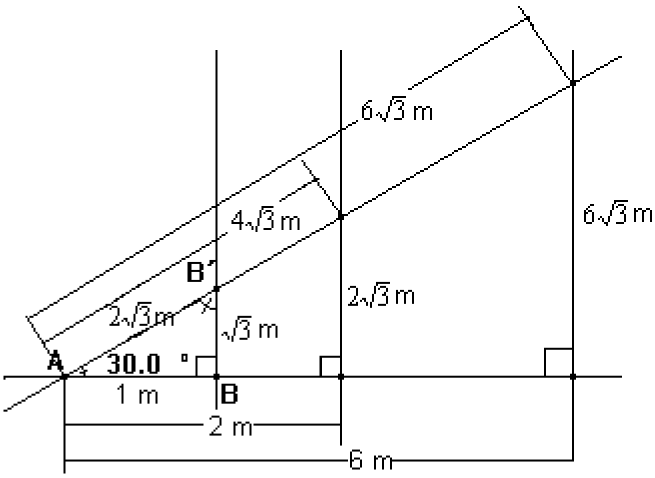


Figura 44 – Questão 2b

Questão 3: Se o ângulo β for de 45° e B correr, em linha reta, a menor trajetória possível, quanto B percorrerá para apanhar a bola e quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se a distância entre A e B for de:

a) 1 metro b) 2 metros c) 6 metros

A representação do problema pode ser feita pelo aluno da seguinte maneira:

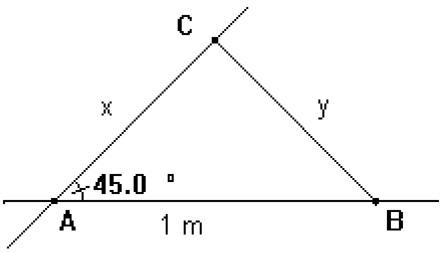


Figura 45 – Questão 3

Possivelmente, seja percebido pelo aluno que o triângulo ABC é isósceles, com hipotenusa AB = 1m. Para achar os outros catetos, nesse caso, o aluno aplica o teorema de Pitágoras e conclui que x = y = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m, como mostra a figura 46:

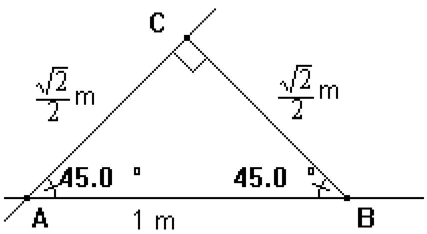


Figura 46 – Questão 3

É provável que o aluno repita os mesmos procedimentos para as outras distâncias. Outra possibilidade é a de ser observada a seguinte proporcionalidade representada pela figura 47:

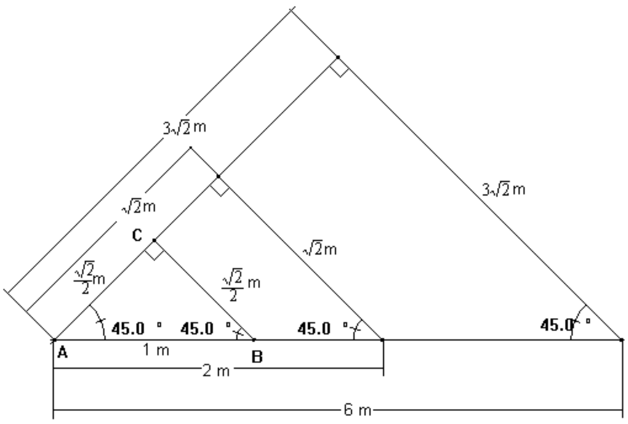


Figura 47 – Questão 3

Questão 4a: Resolva a situação 3, com o ângulo β valendo: 60°

O problema pode ser representado pelo aluno pela figura 48:

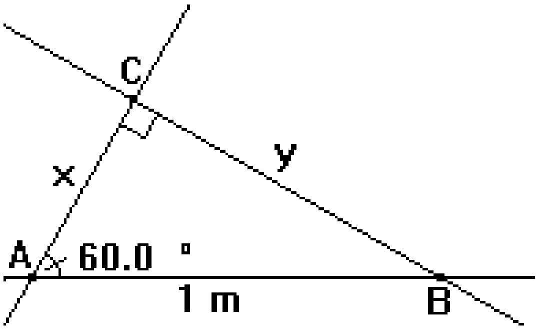


Figura 48 – Questão 4a

É provável que o aluno perceba que já resolveu um problema semelhante nos exercícios anteriores e aproveite o raciocínio. Caso isso não ocorra, possivelmente o aluno perceba que x é a medida do lado oposto ao ângulo de 30°, portanto, como o triângulo é retângulo, x vale a metade da hipotenusa, ou seja, x = 1/2. A medida y pode ser encontrada aplicando o teorema de Pitágoras.

Outra solução que pode ocorrer é a de ser feita a reflexão do triângulo ABC pela reta BC, gerando a figura 49:

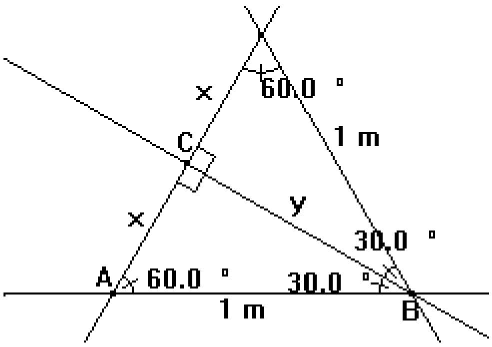


Figura 49 – Questão 4a

A partir daí, pode ser concluído que x = 1/2 e y pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras ou y pode ser percebido como altura do triângulo eqüilátero (y = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, com l = 1 m).

Para as outras distâncias, é possível que o aluno faça o mesmo procedimento ou perceba que a situação envolve proporcionalidade entre triângulos conforme a figura 50:

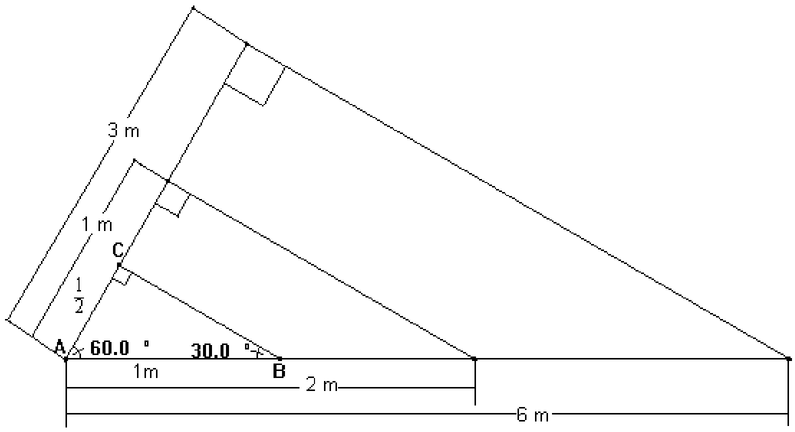


Figura 50 – Questão 4

Questões 5, 6 e 7:

5) Considere a distância entre A e B de 1 metro. Faça o ângulo β variar de 0° a 90°, de 5° em 5° e calcule, para cada um desses ângulos:

a) qual é a distância mínima que B percorrerá para apanhar a bola.

b) quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se B percorrer a distância mínima.

c) quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se B percorrer uma trajetória perpendicular à linha do meio de campo.

6) Com base na situação 5, é verdadeiro afirmar que, se B percorre a distância mínima, quanto maior o ângulo β:

a) maior a distância mínima que B percorrerá para apanhar a bola?

b) maior a distância que B percorrerá até apanhá-la?

7) Esboce os gráficos, usando os valores obtidos nos itens a e b da situação 5.

Para a solução do quinto problema, existe a possibilidade de que o aluno recorra a construções geométricas e ao teorema de Thales (ou a semelhança entre triângulos). Como já assinalamos na discussão dos erros e dificuldades, se isso não ocorrer, serão discutidas coletivamente, a partir das conjecturas dos alunos, formas para a solução desse problema. Persistindo a dificuldade da estratégia, o professor deve discutir a situação com os alunos, a fim de que eles possam perceber a possibilidade da aplicação da semelhança de triângulos.

O aluno construirá com régua, compasso e transferidor um triângulo com a distância em B (hipotenusa) arbitrada por ele: 10 cm, por exemplo, (caracterizando, assim, um tratamento figural óptico). A partir daí, ele obtém as medidas dos outros lados medindo com régua graduada. Com as medidas apresentadas ele poderá usar a proporcionalidade entre lados correspondentes nos triângulos ou entre dois lados de um mesmo triângulo.

1º passo:

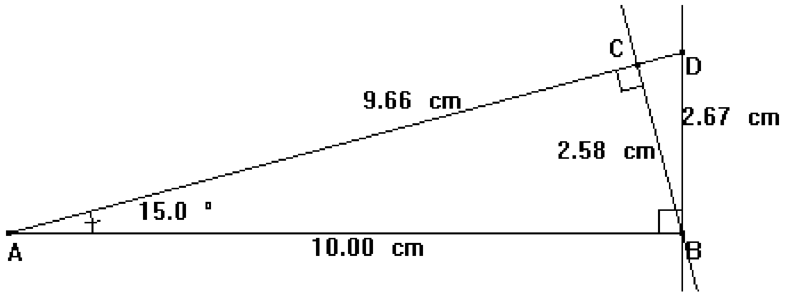


Figura 51 – Questão 5

2º passo:

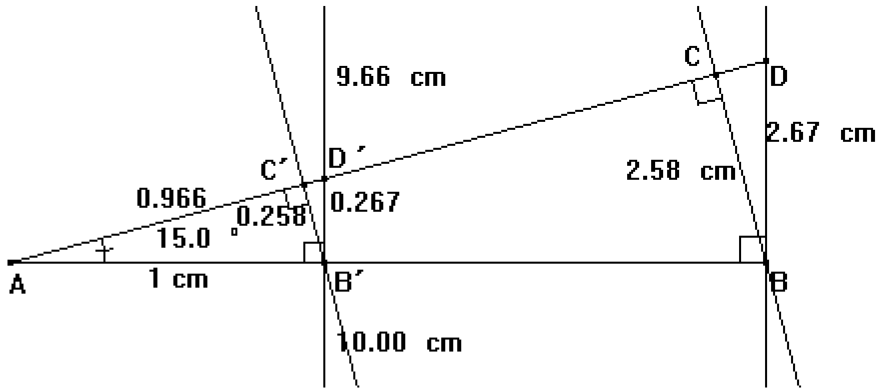


Figura 52 – Questão 5

Se o aluno escolher conveniente a medida da distância AB, ficará fácil para estabelecer a relação. Em qualquer caso, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC} \text{ ou } \frac{AC'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} \text{ ou } \frac{DB}{AB} = \frac{D'B'}{AB'}$$

Estas três relações, na discussão coletiva desta atividade, serão institucionalizadas como seno, co-seno e tangente de um ângulo.

Possivelmente os passos apresentados serão repetidos (conforme as figuras 45 e 46) e esperamos que seja construída uma tabela dos valores obtidos. Se os dados não forem organizados em forma de tabelas, será sugerido durante a atividade.

A montagem da tabela ajudará o aluno para que ele perceba que os valores das relações trigonométricas nem sempre são crescentes (o seno e a tangente serão, o co-seno não). O esboço do gráfico e a observação dessa tabela, provavelmente, ajudarão a perceber que esse crescimento ou decrescimento não é linear, ou seja, o seno do ângulo de 40° não é o dobro do seno de 20°, por exemplo.

4.2.5 Atividade 3: Relações entre perímetros de polígonos regulares e o comprimento da circunferência

1 – Para ter uma boa estimativa do comprimento de uma circunferência, os matemáticos antigos calculavam o perímetro e a área de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência. Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos:

a) um hexágono (circunferência de raio 3)

b) um octógono (circunferência de raio 4 cm)

c) um hexágono (circunferência de raio r)

d) um octógono (circunferência de raio r)

e) um decágono (circunferência de raio r)

f) um dodecágono (circunferência de raio r)

g) de 20 lados (circunferência de raio r)

h) de n lados (circunferência de raio r)

2 – Com base nos itens c a g e com base na expressão obtida no item h do exercício anterior, preencha a seguinte tabela e responda:

a) O que ocorre com o valor de $n.\mathrm{sen}(180°/n)$ e $n.tg(180°/n)$?

b) O que ocorre com o perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito e o comprimento da circunferência?

c) Qual é a expressão que define o comprimento de uma circunferência?

(dados: sen 100° = 0,031411, tg 100° = 0,031426, sen1000°= 0,0031416 , tg 1000°=0,0031416, sen10000°= 0,000314159 , tg 10000°= 0,000314159)

N (nº de lados)	Perímetro do polígono inscrito	n.sen(180º/n)	Perímetro do polígono circunscrito	n.tg(180°/n)
6				
8				
10				
12				
20				
100				
1000				
10000				

Tabela I – Perímetros dos polígonos regulares não preenchida I

4.2.6 Análise Didática

Esta atividade tem por objetivo associar o perímetro e a área de polígonos inscritos e circunscritos com o comprimento da circunferência, e, conseqüentemente, com o número π. Aqui, o que prevalecerá será a reutilização das relações trigonométricas institucionalizadas na atividade anterior e o tratamento figural de composição e decomposição de figuras geométricas, daí o motivo da escolha de questões fechadas. Além disso, é possível que o aluno recorra às construções geométricas e, sobretudo, à semelhança de triângulos na solução desses problemas.

Os polígonos regulares foram escolhidos para a presente atividade porque, além de serem de fácil cálculo de perímetro, foram usados historicamente por Ptolomeu e por Arquimedes. Este último justamente utilizou os polígonos regulares para a determinação de uma constante que aparece no cálculo do comprimento e da área da circunferência, que mais tarde seria denominada por π.

A montagem da tabela com os valores de $n.\text{sen}(180°/n)$ e $n.tg(180°/n)$ pode auxiliar o aluno na observação do que ocorre com o perímetro dos polígonos e o comprimento da circunferência (quando o número de lados do polígono aumenta) e os relacione com o número π.

A determinação do número π, além da possibilidade de intradisciplinaridade, auxiliará na formação de significado, na próxima atividade, quando formos converter a medida do arco central de graus para radianos.

4.2.6.1 Análise dos erros e dificuldades

Nesta atividade, os erros ou dificuldades esperados podem ser:

1. Com relação à apreensão discursiva:
- dificuldade na conversão de registro discursivo para o registro figural: o enunciado pode ser lido e não compreendido pelo aluno. Nesse momento, o professor esclarece as dúvidas relativas a termos (o que é circunscrito e inscrito, por exemplo) ou interpretação do enunciado (o círculo está circunscrito ao hexágono ou vice-versa?), sem, contudo, dizer ao aluno o que deve ser feito ou quais estratégias seguir.

2. Com relação à apreensão seqüencial: Esses erros ou dificuldades possivelmente apareçam na representação das situações por meio de figuras. Nesta atividade, como não há construção com régua e compasso, esse fenômeno estará relacionado à interpretação de texto. A representação correta é imprescindível para que o aluno consiga cumprir as apreensões seguintes: perceptiva e operatória, portanto, se o aluno tiver dificuldades nessa etapa, provavelmente não conseguirá resolver os problemas propostos. Porém, o professor deve deixar as discussões de representação das situações para o momento da institucionalização local da atividade.

3. Com relação à apreensão perceptiva: Representada corretamente a figura, é possível que o aluno tenha dificuldades em encontrar elementos na figura que podem ser mobilizados para a solução do problema. Por exemplo, o aluno desenha um octógono inscrito na circunferência, mas não consegue dividi-lo em oito triângulos iguais ou divididos os triângulos, o aluno não consegue perceber como pode ser achada a medida do lado não congruente. Nesse momento, o professor pode representar o problema na lousa, no momento da aplicação da atividade, para que os alunos apresentem e discutam estratégias de como resolver esse problema.

4. Com relação à apreensão operatória: Representada a figura, pode-se tomar uma estratégia que não resolva a situação, mesmo sendo coerente matematicamente ou mesmo pode ser escolhida uma estratégia errada. Não pretendemos que haja alguma interferência do professor no momento da aplicação da atividade. É interessante que quaisquer comentários por parte do professor, nessa etapa, sejam guardados para a discussão com a classe. Esperamos que os erros ou dificuldades sejam:

- erro ou dificuldade no cálculo das medidas desconhecidas: erros ou dificuldades de manipulação de uma expressão algébrica: o teorema de Pitágoras, por exemplo, é possível se enganar no momento em que isola o termo desconhecido;
- erro ou dificuldade na aplicação das fórmulas: podem aparecer dúvidas a respeito de como é a relação seno: é cateto oposto ou é cateto adjacente dividido pela hipotenusa?
- erro ou dificuldade na estratégia de solução: é possível que seja escolhido um caminho que não leve à solução ou que esteja conceitualmente errado. O aluno mobiliza o teorema de Pitágoras para calcular dois lados desconhecidos, tendo apenas um deles ou aplica a relação co-seno para calcular o perímetro do polígono interno, por exemplo.

4.2.6.2 Análise matemática

Questão 1a: Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos: um hexágono (circunferência de raio 3 cm)

O aluno percebe que ele pode decompor, tanto o hexágono circunscrito como o inscrito, em seis triângulos e que por meio da congruência entre esses seis triângulos que compõem o hexágono, ele pode perceber que esses triângulos são eqüiláteros. Conseqüentemente, o perímetro do hexágono inscrito será igual a 6 X 3 = 18 (seis lados com a medida do raio: 3 cm).

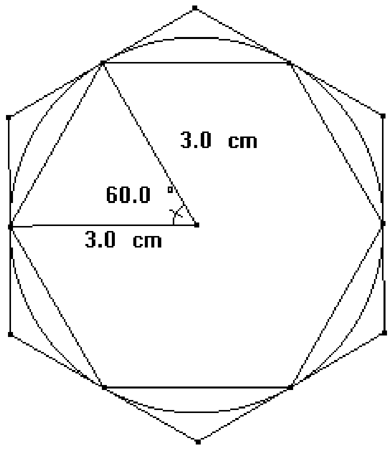


Figura 53 – Questão 1a

Já para o hexágono circunscrito, uma das possibilidades é que o aluno represente a situação como vemos na figura 54:

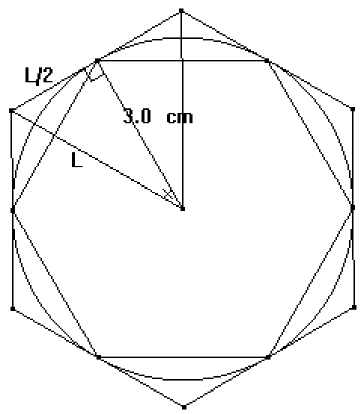


Figura 54 – Questão 1a

O aluno pode resolver esta situação aplicando o teorema de Pitágoras: $L^2 = 3^2 + (L/2)^2$, concluindo que L= $2\sqrt{3}$ e que, portanto, o perímetro é $12\sqrt{3}$ (aproximadamente 20.8 cm). Outra forma de solução possível é a de o aluno perceber que a medida 3 cm é altura de um triângulo eqüilátero e fazer $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ = 3, concluindo também que L= $2\sqrt{3}$ e que, portanto, o perímetro é $12\sqrt{3}$ (aproximadamente 20.8 cm).

Questão 1b: Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos: um hexágono (circunferência de raio 4cm)

O aluno perceberá que, por meio de um tratamento figural, ele pode decompor, tanto o octógono circunscrito como o inscrito, em oito triângulos e que ele perceba que esses triângulos são isósceles. Uma possível representação está na figura 55:

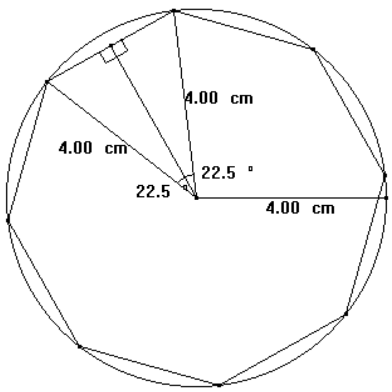


Figura 55 – Questão 1b

Até agora as situações que o aluno resolveu foram situações em que o triângulo retângulo envolvia os ângulos notáveis ou ângulos com uma variação de 5° em 5° para a construção de uma tabela de seno, co-seno e tangente (atividade 2). Porém, o conhecimento que o aluno mobilizou para a construção dessa tabela pode ser mobilizado para a solução desse problema, envolvendo o triângulo retângulo da figura acima e um outro triângulo retângulo semelhante ao da figura.

É possível que o aluno recorra às construções geométricas e, sobretudo, à semelhança de triângulos na solução desse tipo de problema. Esse fato é esperado porque a semelhança foi tratada na atividade anterior, servindo inclusive como ferramenta de institucionalização das relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Para calcular o lado desconhecido, portanto, o aluno pode utilizar a proporcionalidade dos lados desses triângulos, como ilustra a figura 56:

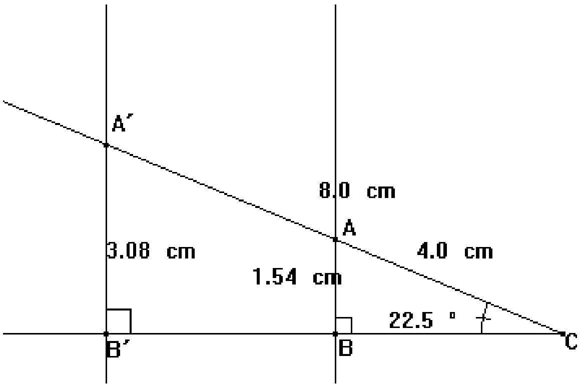


Figura 56 – Questão 1b

Com isso, pode-se concluir que o perímetro é oito vezes AA´, ou seja, aproximadamente 24,64 cm.

Outra maneira do aluno resolver é utilizando a figura 57:

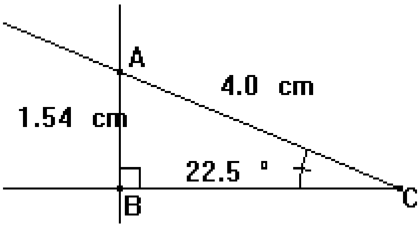


Figura 57 – Questão 1b

Dessa forma, o aluno concluiria que a medida do lado do octógono é o dobro de AB (3,08 cm) e que o perímetro seria de 24,64 cm, aproximadamente.

Para o octógono circunscrito, é provável que o aluno perceba que pode dar o mesmo tratamento dado no octógono inscrito, dando a representação figural abaixo:

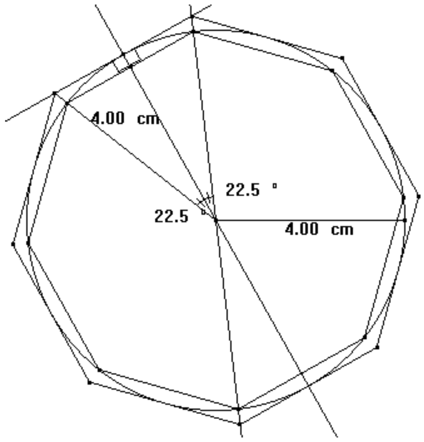


Figura 58 – Questão 1b

Como no item anterior (1b), o lado desconhecido pode ser encontrando por meio de proporcionalidade dos lados de triângulos, como mostra a figura a seguir:

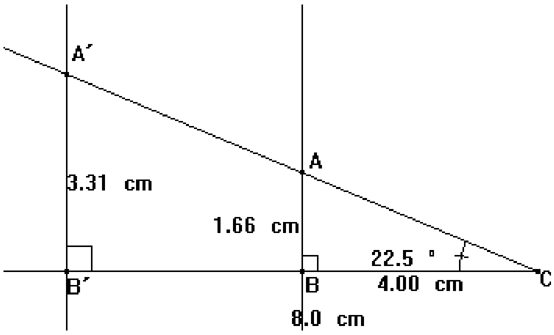


Figura 59 – Questão 1b

O aluno encontrará, desse modo, a medida de A´B´, que tem a mesma medida do lado do octógono circunscrito (3,31 cm), achando um perímetro de 26,5 cm, aproximadamente.

Outro modo do aluno resolver a situação é utilizando a figura 60:

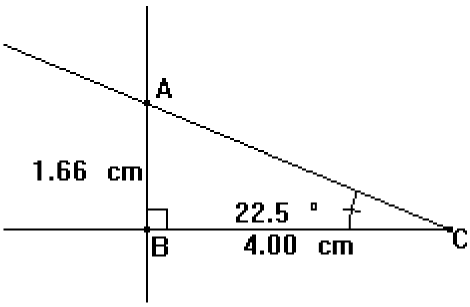


Figura 60 – Questão 1b

Dessa forma, o aluno poderá concluir que o lado do octógono vale o dobro do lado AB (3,32 cm) e calculará o perímetro do octógono circunscrito.

Questão 1c: Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos: um hexágono (circunferência de raio r)

Esperamos que o aluno realize um tratamento figural fazendo a seguinte representação:

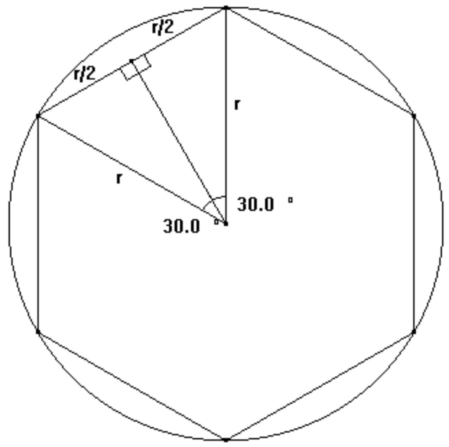


Figura 61 – Questão 1c

O aluno pode determinar, dessa forma, que o perímetro de um hexágono inscrito é 6 vezes o raio da circunferência que o inscreve (perímetro = 6r).

Outra forma possível é a do aluno observar que o hexágono pode ser dividido em seis triângulos congruentes entre si e eqüiláteros, com o lado tendo a mesma medida do raio da circunferência que o inscreve:

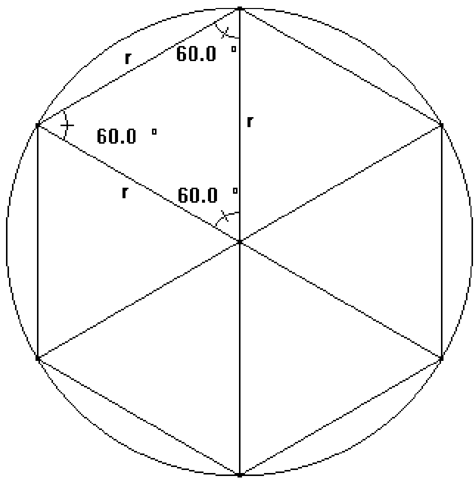


Figura 62 – Questão 1c

Para o hexágono circunscrito à circunferência de raio r, esperamos a representação como observamos na figura 63:

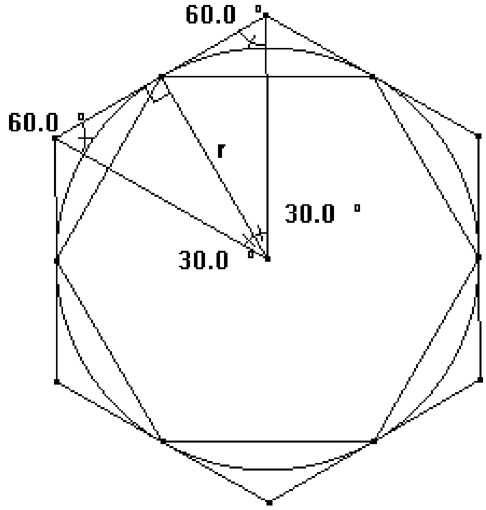


Figura 63 – Questão 1c

Por meio dessa figura, o aluno poderá calcular o lado do hexágono em função do raio considerando que o raio é altura do triângulo eqüilátero:

r = $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $l = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, e o perímetro é $4\sqrt{3}$ r (6,8r cm aproximadamente).

O aluno pode também resolver esse problema é usando a relação trigonométrica tangente:

tg 30° = $\frac{x}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{r} \Rightarrow$ x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ r (x é metade do lado do hexágono), concluindo assim, que $l = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$ r e o perímetro é $4\sqrt{3}$ r (6,8r cm aproximadamente).

A representação possivelmente pode ser feita conforme figura 64:

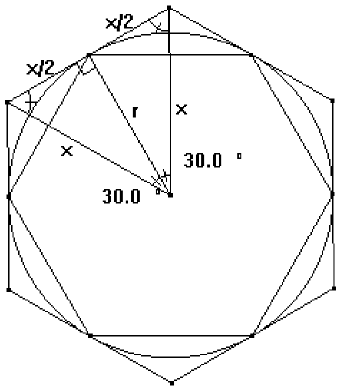


Figura 64 – Questão 1c

Dessa maneira, o aluno pode aplicar o teorema de Pitágoras:

$x^2 = (x/2)^2 + r^2$ e conseguir as mesmas conclusões: $l = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$ r e o perímetro é $4\sqrt{3}$ r (6,8r cm aproximadamente).

Questão 1d: Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos: um octógono (circunferência de raio r)

Este item não envolve ângulo notável, nem alguma medida numérica de lado é dada, o que dificulta a construção do triângulo com régua e compasso para a obtenção de suas medidas. Por esse fato, é possível que o aluno faça uso das relações trigonométricas seno e tangente para o cálculo dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente.

Para a situação do octógono inscrito, poderemos ter a seguinte representação:

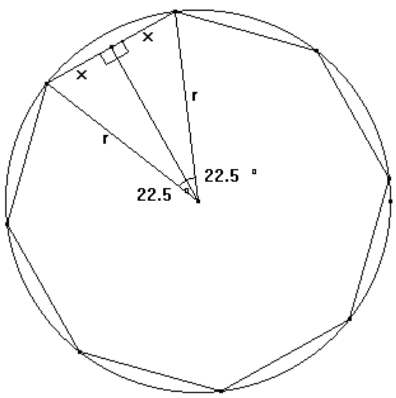


Figura 65 – Questão 1d

Após a representação (figura 65), esperamos que o aluno mobilize a seguinte solução:

sen 22,5° = $\frac{x}{r}$ $\Rightarrow$ x = r. sen 22,5° , l = 2r .sen 22,5° e 2p = 16 r .sen 22,5°

O sen 22,5° será obtido mediante a construção de um triângulo retângulo qualquer com esse ângulo, ou será calculado aproveitando os triângulos construídos nos itens anteriores. A figura 66, por exemplo, do item 1b, poderia ser reaproveitada para esse cálculo:

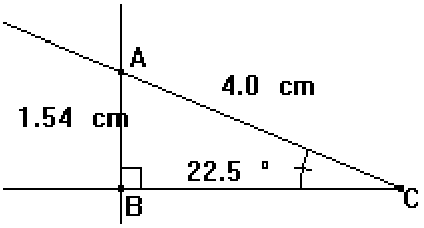


Figura 66 – Questão 1d

sen 22,5° = 1,54/4 = 0,38

Com isso, o aluno pode concluir que l = 0,76r e 2p = 6,08. r

Para a situação do octógono circunscrito, poderemos ter a seguinte representação:

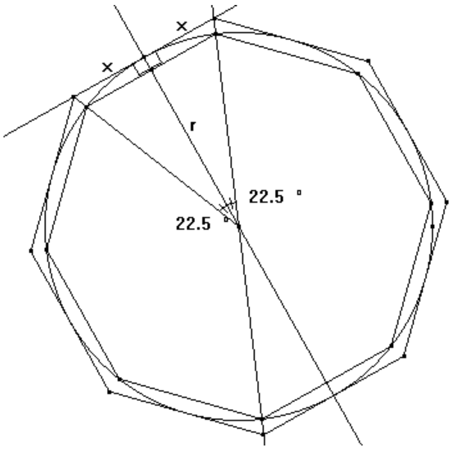


Figura 67 – Questão 1d

Pela observação da figura, esperamos que o aluno mobilize a seguinte solução:

tg 22,5° = $\frac{x}{r}$ $\Rightarrow$ x = r. tg 22,5° , l = 2r .tg 22,5° e 2p = 16 r .tg 22,5°

A tg 22,5° pode ser obtida a partir da construção de um triângulo retângulo qualquer com esse ângulo ou aproveitando os triângulos construídos nos itens anteriores. A figura 68 é do item 1b:

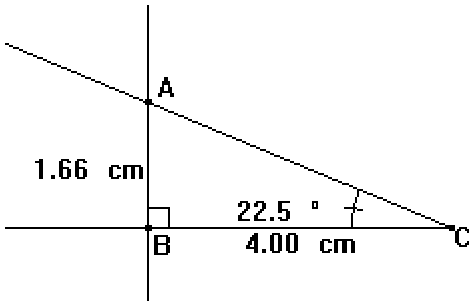


Figura 68 – Questão 1b

tg 22,5° = 1,66/4 = 0,41

Com isso, o aluno pode concluir que $l = 0{,}82r$ e 2p = 6,62. r

Questão 1e: Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos: um decágono (circunferência de raio r)

Este item ,como o item d, não envolve ângulo notável, nem alguma medida numérica de lado é dada, o que pode dificultar a construção do triângulo com régua e compasso para a obtenção de suas medidas. Esperamos, também por esse fato, que o aluno faça uso das relações trigonométricas seno e tangente para o cálculo dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente.

Esperamos que o aluno represente a situação da seguinte forma:

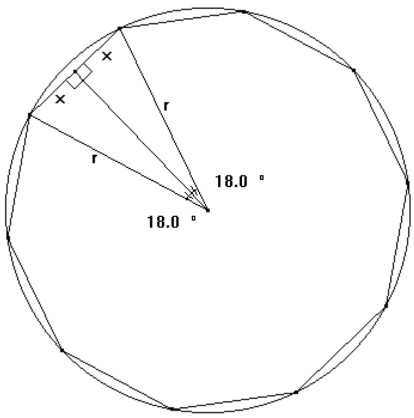


Figura 69 – Questão 1e

Ao representar a figura, possivelmente surja a solução abaixo:

sen 18° = $\frac{x}{r}$ $\Rightarrow$ x = r. sen 18° , l = 2r .sen 18° e 2p = 20 r .sen 22,5°

O sen 18° pode ser construindo a partir de um triângulo retângulo qualquer com esse ângulo. Não podemos aproveitar triângulos construídos nos itens anteriores. Isto faz com que o aluno mobilize o conhecimento trabalhado na atividade anterior. A figura 70 ilustra uma possível representação dessa situação:

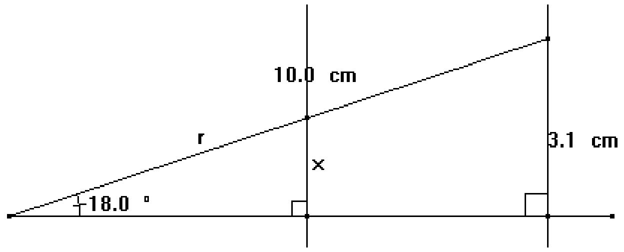


Figura 70 – Questão 1e

Após a representação acima, provavelmente ocorra a seguinte resolução:

sen 18° = $\frac{x}{r}$ = $\frac{3,1}{10}$ $\Rightarrow$ x = r. 0,31 , l = 2r .0,31=0,62r e 2p = 10. 0,62r = 6,2 r

Para a situação do decágono circunscrito, poderemos ter a seguinte representação:

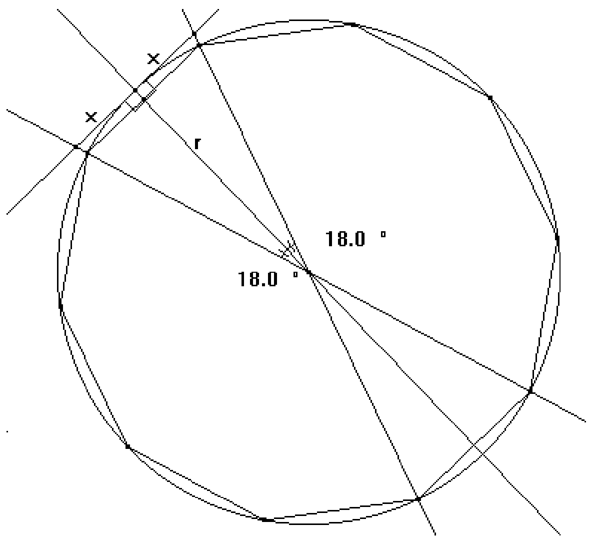


Figura 71 – Questão 1e

Esperamos que, a partir da figura 71, o aluno possa calcular seu perímetro da seguinte maneira:

tg 18° = $\frac{x}{r}$ $\Rightarrow$ x = r. tg 18° , $l = 2r$ .tg 18° e 2p = 20 r .tg 18°

A tg 18° pode ser obtida a partir da construção de um triângulo retângulo qualquer com esse ângulo. Não podemos aproveitar triângulos construídos nos itens anteriores. Isto poderá fazer com que o aluno mobilize o conhecimento trabalhado na atividade anterior. Esperamos que ele represente essa situação da seguinte forma:

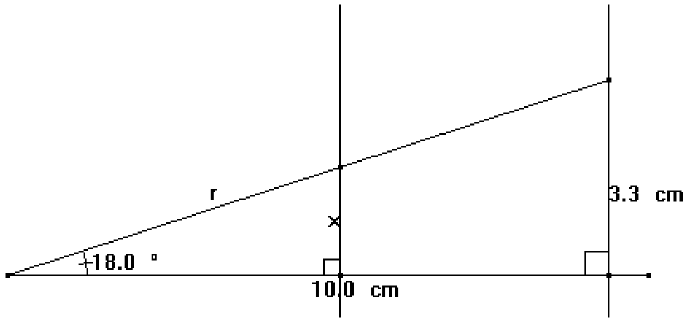


Figura 72 – Questão 1e

tg 18° = $\frac{x}{r} = \frac{3,3}{10}$ $\Rightarrow$ x = 0,33r. Com isso, o aluno pode concluir que $l = 0,66r$ e 2p = 6,60. r

Questões 1f e 1g: Calcule o perímetro dos polígonos regulares circunscritos e inscritos de 10 e 20 lados (circunferência de raio r).

Provavelmente o aluno recorrerá às mesmas estratégias do item d e do item e.

Questão 1h: Calcule o perímetro dos seguintes polígonos regulares circunscritos e inscritos: um polígono de n lados (circunferência de raio r)

Neste item, o aluno pode representar a situação para o polígono regular inscrito de n lados da seguinte forma:

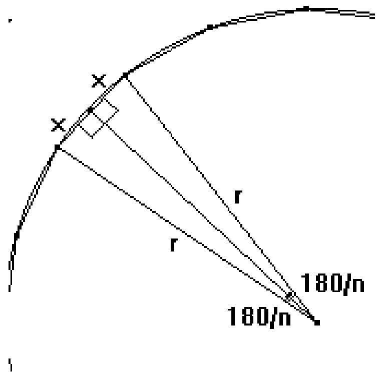


Figura 73 – Questão 1h

Provavelmente, pela observação da figura 81 surja a solução:

sen (180°/n) = $\frac{x}{r}$ $\Rightarrow$ x = r. sen (180°/n), $l = 2r$ .sen (180°/n) e 2p = 2 r. n. sen (180°/n)

O aluno pode representar o polígono circunscrito de n lados de acordo com a figura 82:

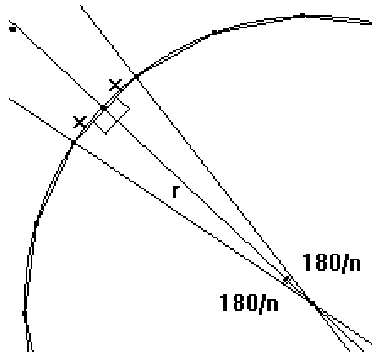


Figura 74 – Questão 1h

Pela observação da figura, o aluno deve mobilizar a seguinte estratégia:

tg (180°/n) = $\frac{x}{r}$ $\Rightarrow$ x = r. tg (180°/n), $l = 2r$. tg (180°/n) e 2p = 2 r .n. tg (180°/n)

Questão 2 – Com base nos itens de c a g e com base na expressão obtida no item h do exercício anterior, preencha a seguinte tabela e responda:

N (nº de lados)	Perímetro do polígono inscrito	n.sen(180º/n)	Perímetro do polígono circunscrito	n.tg(180°/n)
6				
8				
10				
12				
20				
100				
1000				
10000				

Tabela II – Perímetros dos polígonos regulares não preenchida II

a) O que ocorre com o valor de n.sen (180º/n) e n.tg (180°/n)?

b) O que ocorre com o perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito e o comprimento da circunferência?

c) Qual é a expressão que define o comprimento de uma circunferência?

(dados: sen 1,8° = 0,031411, tg 1,8° = 0,031426, sen0,18°= 0,0031416 , tg 0,18°=0,0031416, sen0,018°= 0,000314159 , tg 0,018°= 0,000314159)

Na observação da tabela que o próprio aluno se encarregará de completar, é possível que ele perceba que, quanto maior for o número de lados dos polígonos:

- os valores de n.sen(180º/n) e n.tg(180°/n) se aproximam um do outro, e que ambos os valores se aproximam do número π.

- sen(180º/n) se aproxima de tg(180°/n), ou seja, para um ângulo muito pequeno vale a aproximação do seno e da tangente desse ângulo

- o perímetro dos polígonos regulares inscrito e circunscrito vão se aproximando, ou seja, $2n.\text{sen}(180°/n) \approx 2n.tg(180°/n)$.

Unindo esses fatos acima à percepção das figuras representadas na atividade, é provável que se conclua que ambos perímetros dos polígonos se aproximam do comprimento da circunferência. Por conseqüência dessas observações, esperamos que o aluno conclua que o comprimento da circunferência é dado por C = 2. π.r, em que r é o raio da circunferência e π é aproximadamente 3,14159.

Preenchimento esperado da tabela:

n (nº de lados)	Perímetro do polígono inscrito	n.sen(180º/n)	Perímetro do polígono circunscrito	n.tg(180°/n)
6	6r	3	6,8r	$2\sqrt{3} \approx 3{,}4$
8	6,08r	3,04	6,62r	3,31
10	6,2r	3,1	6,60r	3,30
12	6,22r	3,11	6,48r	3,24
20	6,24r	3,12	6,40r	3,2
100	6,2822r	3,1411	6,2852r	3,1426
1000	6,2831r	3,1415	6,2832r	3,1416
10000	6,28318r	3,14159	6,28318r	3,14159

Tabela III – Perímetros dos polígonos regulares: preenchimento esperado

Fizemos, portanto, no término desta atividade, a institucionalização do cálculo do comprimento da circunferência, a fim de que o aluno possa dar significado à fórmula do comprimento da circunferência. Isso provavelmente possibilite a associação do comprimento de um arco ao ângulo central desse arco e, conseqüentemente, ao seno, co-seno ou tangente desse arco. Esses conhecimentos, agora institucionalizados nesta atividade, servem como ferramenta na próxima atividade.

4.2.7 Atividade Nº 4: Relações trigonométricas na circunferência trigonométrica

1 – Dois pontos A e B (por exemplo) de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas arcos, que são indicados por AB ou BA.(veja figura abaixo)

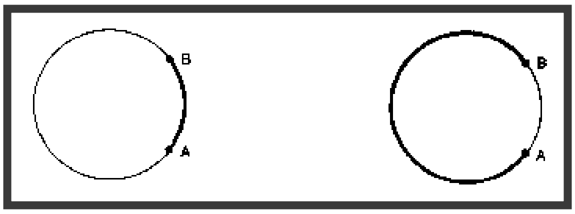


Figura 75 – Questão 1

Sabemos, da atividade anterior, que o comprimento da circunferência é $2\pi r$. Considerando que o raio da circunferência seja 10 m, calcule os arcos de circunferência formados pelos seguintes ângulos centrais:

a) 30º b) 45º c) 60º d) 90º e) 135º f) 180º

g) 270º h) 360º i) 450º j) 720º

2 – Um ângulo central, em uma circunferência, pode ser medido pelo arco que ele forma numa circunferência de raio unitário (r=1). Essa unidade de medida é chamada de radianos e é representada pela abreviatura **rad.**

a) Calcule quantos radianos tem um arco cujo ângulo central é de 360º.

b) Calcule quantos radianos tem cada ângulo do exercício anterior.

3 – Dados os seguintes ângulos em radianos, transforme-os para graus:

a) π rad b) 2π rad c) $\pi/2$ rad d) $\pi/3$ rad e) $\pi/6$ rad

f) 15π rad g) 45π rad

4 – Circunferência trigonométrica é a circunferência de raio unitário. No caso da figura abaixo, significa que OE mede 1 unidade. Com base nas informações apresentadas e na figura abaixo, responda:

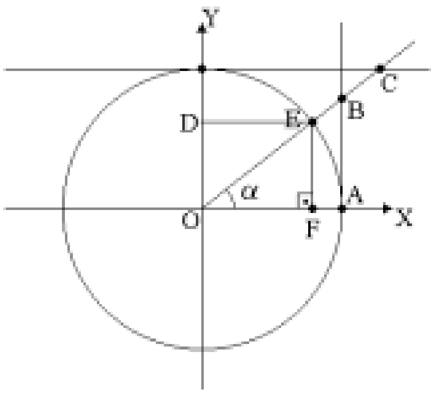


Figura 76 – Questão 4

a) Calcule as projeções horizontal e vertical do segmento OE (ou seja, OF e OD) e calcule AB.

b) Mostre que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

c) Calcule, nesta situação, o seno, o co-seno e a tangente de 30º, 45º e 60º.

d) Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 135º, 225º, 315º e 360º.

e) Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 150º, 210º e 330º e 360º.

f) Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 120º, 240º e 300º e 360º.

g) Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 90º, 180º, 270º e 360º.

h) Monte uma tabela para seno, co-seno e tangente e analise o sinal e o crescimento em cada uma das tabelas no 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.

i) Faça os gráficos para seno, co-seno e a tangente usando valores obtidos acima.

5 – Transforme em radianos os ângulos do exercício 6º e em seguida esboce os gráficos da função seno, co-seno e da tangente usando esses valores.

4.2.8 Análise didática

Esta atividade tem por objetivo a mudança de ponto de vista das relações trigonométricas no triângulo retângulo para as projeções ortogonais do raio da circunferência trigonométrica. As situações da atividade procuram possibilitar que o aluno apreenda o valor, o sinal e o crescimento das relações trigonométricas seno co-seno e tangente por meio do uso de triângulos retângulos que contêm ângulos notáveis e suas reflexões no plano cartesiano, relacionando essas relações com as projeções ortogonais do raio da circunferência trigonométrica.

Na atividade apresentada, além da reutilização das relações trigonométricas e do tratamento figural de composição e de decomposição de figuras geométricas, há um estudo das relações trigonométricas como projeções do raio do ciclo trigonométrico para ângulos na primeira volta (de 0° a 360°).

Acreditamos que a montagem da tabela com os valores de seno, co-seno e tangente dos ângulos notáveis pode auxiliar na observação do valor, sinal e crescimento das relações trigonométricas nos diferentes quadrantes em que elas são representadas. O registro gráfico pode ajudar a apreender essas observações e pode ajudar na ampliação desses estudos numa futura abordagem da função trigonométrica.

Esperamos que o aluno identifique nesta atividade os elementos que constituíram as atividades anteriores: relações trigonométricas e sua utilização, triângulos retângulos contendo ângulos notáveis e os tratamentos figurais ligados à solução determinação de seus lados e ângulos, utilização do comprimento do arco para transformação do ângulo em radianos para graus ou vice-versa.

4.2.8.1 Análise dos erros e dificuldades

Nesta atividade, os erros ou dificuldades esperados podem ser:

1. Com relação à apreensão discursiva:

- dificuldade na conversão de registro lingüístico para o registro figural: o aluno pode não entender alguma palavra ou o pode ter dificuldades em interpretar o problema: o que é arco, ângulo central, projeção horizontal e vertical, em que fica o arco e o ângulo etc. Esse tipo de dificuldade será esclarecido, de forma coletiva, pelo professor, a fim de que o aluno tenha condições de entender o que está sendo proposto no problema.

2. Com relação à apreensão seqüencial: Entendidos os termos e interpretadas as situações, o aluno passa a representá-las na circunferência. É fundamental, portanto, que as dificuldades na conversão de registro lingüístico sejam esclarecidas para que as situações sejam representadas corretamente. Essa fase também é importante para as apreensões perceptiva e operatória. Acreditamos que as dificuldades nessas situações estejam associadas a termos novos ou poucos utilizados para o aluno: arco, ângulo central, projeção horizontal. Por isso, o professor fará a intervenção, discutindo na lousa as sugestões dos alunos de como representar determinada situação.

3. Com relação à apreensão perceptiva: Mesmo com a situação representada, nos exercícios de 1 a 3 é possível que o aluno tenha dificuldades em identificar a proporcionalidade entre o ângulo central e o comprimento de circunferência a ele associado. No exercício 4 essa dificuldade estará ligada a manipulação dos elementos figurais para identificar a estratégia: como calcular sen 135° (a reflexão da representação do ângulo de 45° com relação ao eixo y não é tão simples para o aluno). Porém, o professor organizará uma discussão coletiva e procurará ouvir as conjecturas dos alunos a respeito da solução desses problemas.

Ainda com relação à questão 4, é provável que o aluno tenha dificuldades em analisar o sinal das projeções, pois ele provavelmente não está habituado a calcular esses valores com relação ao plano cartesiano. A dificuldade da análise do crescimento pode ser somada à dificuldade do aluno em identificar o sinal das projeções e também de comparar projeções negativas: a projeção positiva maior em tamanho representa um número maior, já a projeção negativa maior em tamanho representa um número menor.

4. Com relação à apreensão operatória: Representada a figura, pode-se tomar uma estratégia que não resolva a situação, mesmo sendo coerente matematicamente (aplicar o teorema de Pitágoras num triângulo retângulo com apenas um lado conhecido, por exemplo), ou mesmo, pode ser escolhida uma estratégia errada, mesmo se algumas estratégias já foram discutidas coletivamente (por exemplo, o aluno pode calcular o cos 120° como 2.cos 60°). Esperamos que os erros ou dificuldades sejam:

- erro ou dificuldade no cálculo das medidas desconhecidas: erros ou dificuldades de manipulação de uma expressão algébrica: (por exemplo, o aluno aplica a semelhança de triângulos, porém, não leva em consideração os lados correspondentes);
- erro ou dificuldade na manipulação das escalas gráficas: As dificuldades enumeradas acima poderão dificultar a análise de sinal e crescimento e poderão fazer que o aluno represente o gráfico dessas relações com esses erros. As dificuldades apresentadas podem ocorrer na manipulação na escala gráfica: o aluno dá a mesma escala para os intervalos de 0° a 30° e de 30° a 45°, ou o aluno não sabe identificar onde está localizado no eixo os valores $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$, por exemplo. Outro erro gráfico que pode ocorrer é o do aluno ligar os pontos por meio de segmentos retos, como se o crescimento no intervalo em que aqueles pontos estão compreendidos fosse linear.
- erro ou dificuldade na aplicação das fórmulas: podem aparecer dúvidas a respeito de como é a relação seno: é cateto oposto ou é cateto adjacente dividido pela hipotenusa?
- erro ou dificuldade na estratégia de solução: é possível que seja escolhido um caminho que não leve à solução ou que esteja conceitualmente errado. O aluno mobiliza o teorema de Pitágoras para resolver um triângulo que só tem um lado

conhecido ou a projeção horizontal para calcular o co-seno de um ângulo, por exemplo.

4.2.8.2 Análise matemática

Questões 1, 2 e 3

Essas questões são de reutilização e familiarização do comprimento da circunferência $C = 2\pi r$. Essa fórmula será utilizada para cálculo de comprimentos de arcos com raio unitário para a associação da medida do ângulo central em graus para radianos e vice-versa.

Essas questões podem possibilitar que o aluno relacione e saiba transformar o ângulo central com o arco desse ângulo numa circunferência trigonométrica. Acreditamos que o aluno não terá dificuldades nessa transformação, pois os valores escolhidos dividem a circunferência em partes inteiras: 30° (1/12), 60° (1/6), $\pi/2$ (1/4), $\pi/4$ (1/8), etc.

Questões 4

Na resolução desta atividade, o aluno pode ter dificuldade em perceber o seno e o co-seno como projeções ortogonais vertical e horizontal do raio da circunferência trigonométrica e a tangente como a distância entre a reta suporte ao raio e o eixo adjacente ao ângulo. A passagem da relação trigonométrica entre lados num triângulo retângulo para projeção ortogonal do raio da circunferência trigonométrica será enfatizada na institucionalização da atividade. Sugerimos que ela deva ser reutilizada em outros momentos para que o aluno se familiarize com o referido conceito.

Questão 4 a e b: a) Calcule as projeções horizontal e vertical do segmento OE (ou seja, OF e OD) e calcule AB. b)Mostre que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Pode ocorrer de o aluno destacar o triângulo da figura, representando-o da seguinte forma:

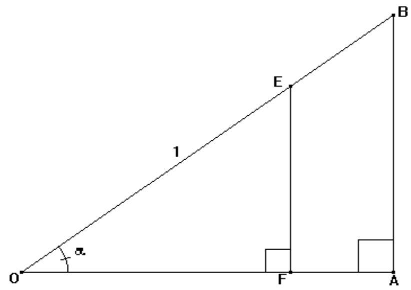


Figura 77 – Questão 4a e 4b

Com base nesta figura, esperamos que o aluno aplique as relações trigonométricas:

sen $\alpha = \frac{EF}{1} = EF$, cos $\alpha = \frac{OF}{1} = OF$ e tg $\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB$

Queremos com este item que o aluno apreenda a representação geométrica das relações trigonométricas, independentemente do ângulo α. Esperamos que o educando perceba que o seno o co-seno são as projeções ortogonais vertical e horizontal e a tangente é a distância entre a reta suporte do raio e a reta adjacente ao ângulo. Essa apreensão será importante para as representações de todas as situações envolvendo os ângulos notáveis, assim como o cálculo do seno, co-seno e tangente, a análise de sinal e de crescimento de cada um dos ângulos envolvidos.

Mediante estas observações, esperamos que o item b seja resolvido pelo aluno aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OEF, obtendo:

$EF^2 + OF^2 = OE^2$, ou seja: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Questão 4 c: Calcule, nesta situação, o seno, o co-seno e a tangente de 30º, 45º e 60º.

Para as situações iniciais, é possível que o aluno represente, como por exemplo, para o ângulo de 30°, da seguinte forma:

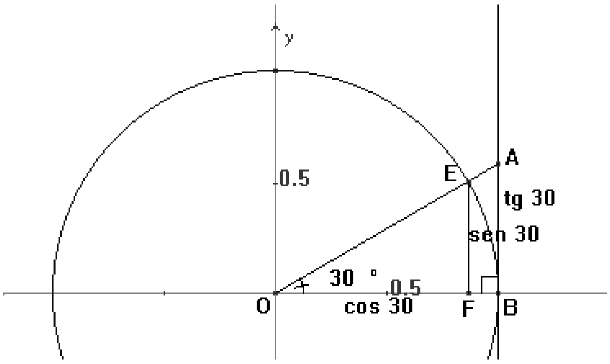


Figura 78 – Questão 4c

Devemos lembrar que este tipo de construção já foi feito na atividade anterior e que, portanto, o aluno pode até considerar esses valores como já conhecidos.

A solução do problema pode ser feita, recorrendo, por meio de tratamento figural óptico e posicional, resultando na figura 87:

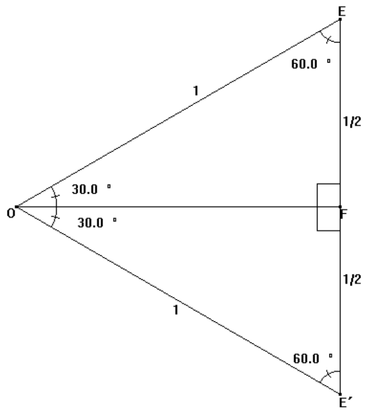


Figura 79 – Questão 4c

Dessa forma, o aluno pode concluir que sen 30° = 1/2 e que o valor do cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, o qual pode ser achado aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OEF, ou observando que OF é a altura do triângulo eqüilátero EOE´.

Para a tg 30° ele pode fazer a seguinte representação:

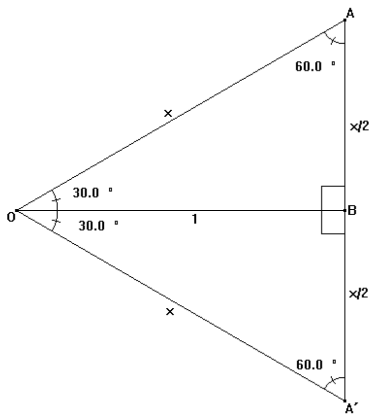


Figura 80 – Questão 4c

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAB ou percebendo AB como altura do triângulo eqüilátero, ele obtém tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Para o ângulo de 45°, o aluno pode mobilizar a solução deste problema recorrendo, por meio de tratamento figural óptico e posicional, como podemos ver na figura 89:

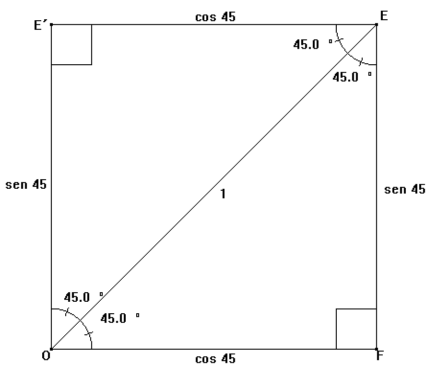


Figura 81 – Questão 4c

A partir da figura 89, é provável que o aluno perceba que a figura EFOE´é um quadrado e que, portanto, sen 45° = EF = cos 45°= OF = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, o que pode ser obtido ou por meio da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo OEF ou considerando que o raio é a diagonal do quadrado ($r = \sqrt{2}l = 1$).

Para a tg 45°, a representação possível pode ser como na figura 90:

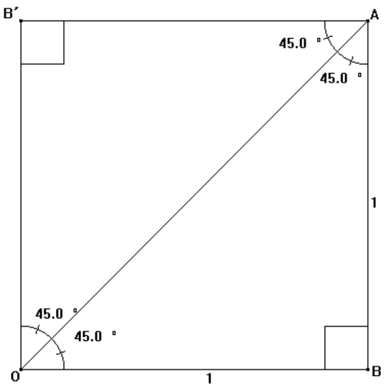


Figura 82 – Questão 4c

Para o ângulo de 60°, o aluno pode solucionar este problema por meio de um tratamento figural óptico e posicional, como vemos na figura 91:

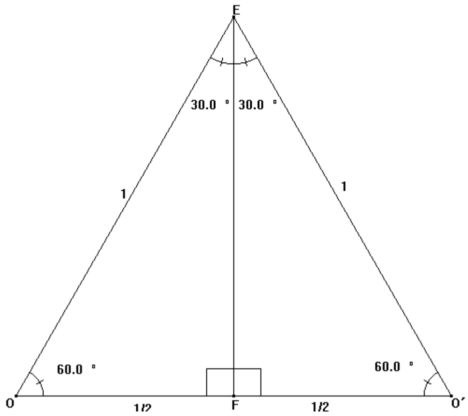


Figura 83 – Questão 4c

Pode ocorrer que o educando observe que a figura 91 é a figura 88 rotacionada em 90°, ou seja, a projeção horizontal em uma figura é a vertical na outra (e vice-versa), ou seja, sen 30° = cos 60°= 1/2 e sen 60° = cos 30°= $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Acreditamos que esse tratamento figural pode ser feito pelo aluno porque ele está trabalhando com essas situações desde a primeira atividade. Se isso não acontecer, é provável que seja usado o teorema de Pitágoras para calcular o sen 60°.

Para a tg 60°, é possível que ocorra a representação conforme a figura 92:

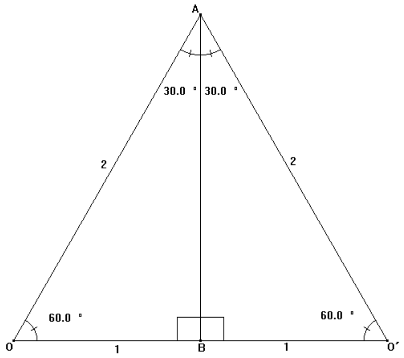


Figura 84 – Exercício 4c

Por meio de tratamento figural posicional, o aluno poderá descobrir, aplicando o teorema de Pitágoras ou percebendo que o segmento AB é a altura do triângulo eqüilátero AOO´, que tg 60° = $\sqrt{3}$. Outra maneira possível de solucionar o problema é que seja percebido que a figura 92 é a figura 90 rotacionada em 90°, o que provavelmente permita ao aluno concluir que o cateto oposto e o cateto adjacente invertem as posições, ou seja, a tg 60° = 1/ tg 30°= $\sqrt{3}$.

Questão 4d: Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 135º, 225º, 315º e 360º.

Para a representação e o cálculo do o seno, o co-seno e a tangente de 135º, 225º e 315º, esperamos que o aluno relacione ao seno, co-seno e tangente do ângulo de 45°, observando que o que diferenciará cada um deles é o sinal e não o valor absoluto (ou seja: seus senos e co-senos valem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou -$\frac{\sqrt{2}}{2}$ e as tangentes valem 1 ou -1).

Para ilustrar a forma com que esperamos que o aluno represente, usamos o ângulo de 135°:

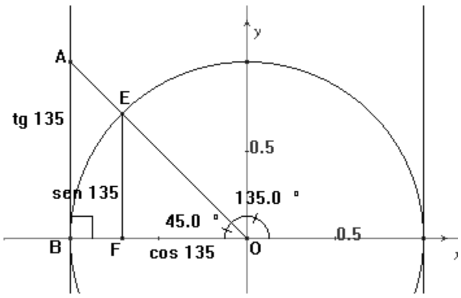


Figura 85 – Exercício 4d

Representada a figura 93, é possível que seja concluído que sen 135° = sen 45° = $\frac{EF}{OE} = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que cos 135° = $\frac{OF}{OE} = OF =$ - cos 45 ° = -$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (pois $\overline{OF}$ está no lado negativo do eixo x) e que tg 135° = -tg 45°= -1 (pois o cateto adjacente e o cateto oposto têm sinais opostos no 2º quadrante).

Questão 4 e: Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 150º, 210º e 330º e 360º.

Para a representação e calculo do seno, o co-seno e a tangente de 150º, 210º e 330º , o aluno pode relacionar com o ângulo de 30°(figura 94), de maneira análoga ao item anterior (ou seja: os senos valem $\frac{1}{2}$ ou -$\frac{1}{2}$, os co-senos valem $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou -$\frac{\sqrt{3}}{2}$ e as tangentes valem $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou -$\frac{\sqrt{3}}{3}$).

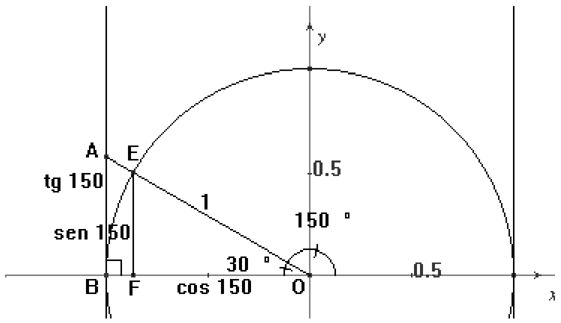


Figura 86 – Exercício 4e

Usando a figura 94, o aluno provavelmente deve concluir que sen 150° = sen 30° = $\frac{EF}{OE} = EF = \frac{1}{2}$ e que cos 150° = - cos 30 ° = $\frac{OF}{OE} = OF$ = -$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (pois $\overline{OF}$ está no lado negativo do eixo x) e que tg 150° = -tg 30°= -$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (pois o cateto adjacente e o cateto oposto têm sinais opostos no 2º quadrante).

Questão 4 f: Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 120º, 240º e 300º e 360º.

A representação desse item pode ser feita conforme a figura 95:

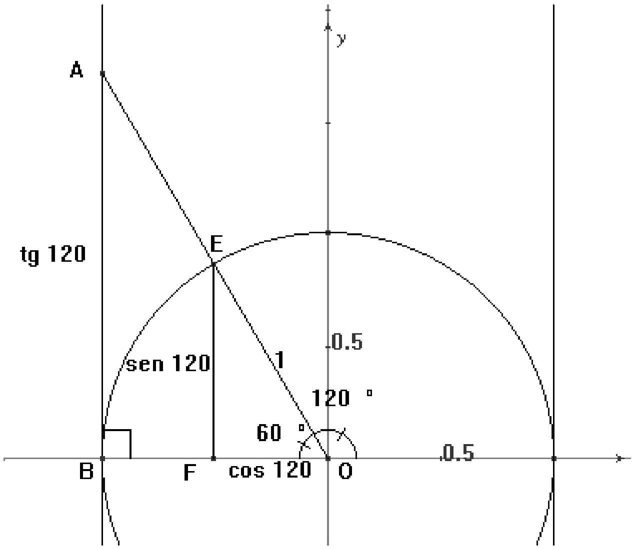


Figura 87 – Exercício 4f

Manipulando esta representação, o aluno pode relacionar cada um desses ângulos com o ângulo de 60°. De maneira semelhante aos itens anteriores, a partir da figura 95, pode-se concluir que os senos valem $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou -$\frac{\sqrt{3}}{2}$, os co-senos valem $\frac{1}{2}$ ou -$\frac{1}{2}$ e a tangente vale $\sqrt{3}$ ou -$\sqrt{3}$).

Pode ocorrer de as relações trigonométricas dos ângulos de 150º, 210º e 330º sejam associadas às relações trigonométricas dos ângulos de 120º, 240º e 300º (sen 120° = cos 150° = $\frac{1}{2}$ e sen 150° = cos 120° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, por exemplo), pois, citando um dos casos, pode-se observar que a figura 95 é a figura 94 rotacionada em 90°. É possível que esse fato seja estendido para os ângulos 210° e 240°, 300 e 310° e 330° e 360°, usando raciocínio análogo (rotação da figura).

Questão 4 g: Calcule o seno, o co-seno e a tangente de 90º, 180º, 270º e 360º.

Neste item o aluno possivelmente perceba que quando o seno tem projeção máxima em valor absoluto o co-seno tem projeção zero e vice-versa. É possível também que o aluno perceba geometricamente que quando o co-seno tem valor zero a tangente tem valor indefinido (tende a infinito positivo ou negativo) e quando o seno tem valor zero, a distância entre a reta suporte ao raio e a reta adjacente é nula também.

A figura 96 mostra uma possível forma de representação para o ângulo de 180°:

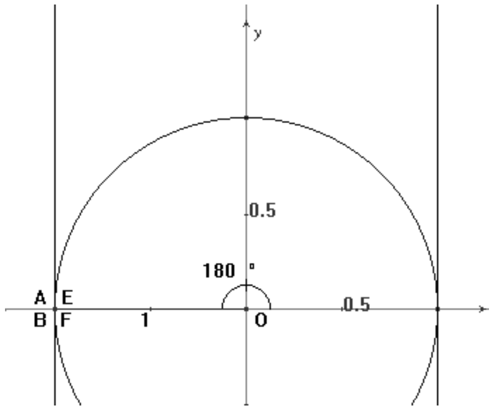


Figura 88 – Exercício 4g

Desta figura, por exemplo, esperamos que o aluno conclua que o valor do cos 180° = -1, sen 180° = 0 e tg 180° = -1.

Questão 4 h: Monte uma tabela para seno, co-seno e tangente e analise o sinal e o crescimento em cada uma das tabelas no 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.

Esperamos o aluno complete a tabela da seguinte forma:

α	sen α	cos α	tg α
0°	0	1	0
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	1	0	infinita
120°	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
135°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150°	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$

180°	0	-1	0
210°	-1/2	-$\sqrt{3}$/2	$\sqrt{3}$/3
225°	-$\sqrt{2}$/2	-$\sqrt{2}$/2	1
240°	-$\sqrt{3}$/2	-1/2	$\sqrt{3}$
270°	-1	0	infinita
300°	-$\sqrt{3}$/2	1/2	$-\sqrt{3}$
315°	-$\sqrt{2}$/2	$\sqrt{2}$/2	-1
330°	-1/2	$\sqrt{3}$/2	-$\sqrt{3}$/3
360°	0	1	0

Tabela IV – Seno, co-seno e tangente de ângulos notáveis.

A tabela pode ser uma importante fonte de organização e observação dos dados obtidos pelo aluno nos itens anteriores.

A partir da tabela, é possível que o aluno perceba, com relação ao sinal, que se os valores de seno são projeções ortogonais verticais, então o seno é positivo para o 1º e 2º quadrantes e negativo para o 3º e 4º quadrantes. Já para o co-seno, esperamos que o aluno perceba que se os valores de co-seno são projeções ortogonais horizontais, então ele é positivo para o 1º e 4º quadrantes e negativo para o 2º e 4 º quadrantes.

Para o crescimento, esperamos que o aluno perceba que quanto maior a projeção ortogonal positiva ou menor a projeção ortogonal negativa, os valores de seno e co-seno aumentam, portanto esperamos que ele conclua que o seno é crescente no 1º e 4º quadrantes e decrescente no 2º e 3º quadrantes. Já para o co-seno, esperamos que ele conclua que é crescente no 3º e 4º quadrantes.

Questão 4i: Faça os gráficos para seno, co-seno e a tangente usando valores obtidos acima.

Abaixo, seguem as representações gráficas esperadas:

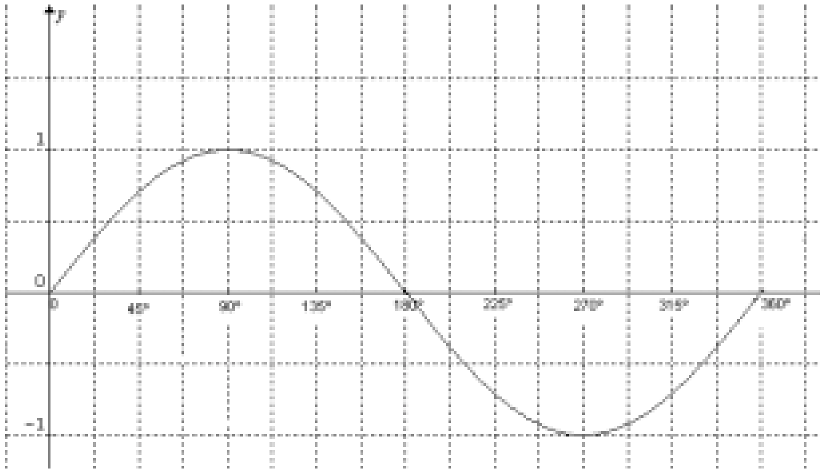


Gráfico I - seno

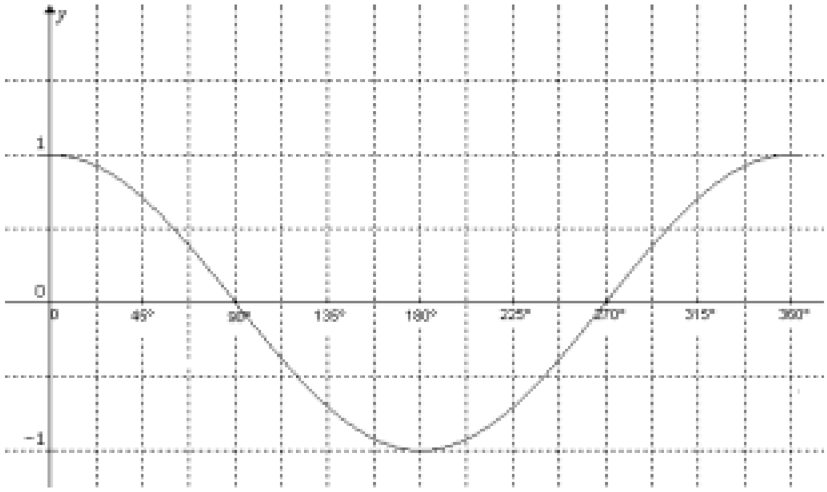


Gráfico II - co-seno

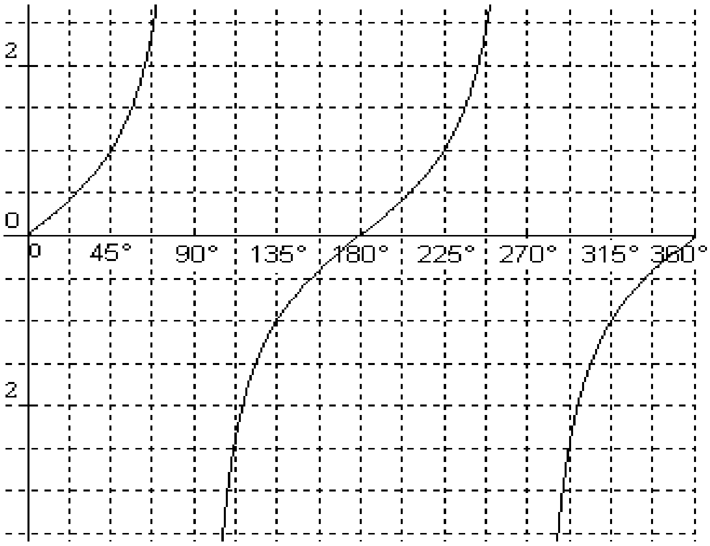


Gráfico III - tangente

Questão 5: Transforme em radianos os ângulos do exercício 6º e em seguida esboce os gráficos da função seno, co-seno e da tangente usando esses valores.

Para a quinta questão o aluno possivelmente perceba que obterá o mesmo gráfico da questão 4.

4.3 ANÁLISE A POSTERIORI

Nesta seção, apresentamos o relato da aplicação das atividades, que descreve o funcionamento do professor e do aluno no decorrer das atividades, a análise dos erros e dificuldades dos alunos na solução das atividades, cujo qual serve para confrontarmos com a análise a *priori* para entendermos os fenômenos ligados aos erros e dificuldades dos alunos, o relato da discussão das atividades, que traz o que foi institucionalizado pelo professor na discussão coletiva e a conclusão da análise a *priori*, que avaliará se as hipóteses de pesquisa foram confirmadas, a fim de podermos responder à questão de pesquisa.

4.3.1 Relato de aplicação das atividades

Esses relatos servem como importante instrumento de reflexão sobre a elaboração das atividades e a sua respectiva aplicação. Isso contribui para avaliarmos e indicarmos possíveis modificações para a melhoria da seqüência didática, bem como da sua gestão. Juntamente com a análise dos erros e dificuldades, eles também nos dão subsídios para elaborarmos a conclusão da análise a *posteriori*.

Esses relatos tratam de questões relativas à seqüência didática:

a) com relação ao funcionamento dos alunos:

- comportamento frente às situações propostas: empatia, dúvidas, comentários a respeito dos exercícios;
- Quais as conjecturas que os alunos tiveram durante a solução da atividade? E durante a institucionalização local?

b) com relação ao funcionamento do professor:

- Tirou dúvidas de interpretação do enunciado? Ajudou a resolver as questões de alguma forma? (provocou o aluno a algum pensamento ou indicou explicitamente uma estratégia de solução?).
- Como fez a institucionalização das atividades? Usou lousa ou algum *software*? Discutiu as conjecturas dos alunos ou teve de explicitar as conclusões que estavam previstas para que os alunos produzissem?
- Que conhecimentos foram mobilizados na discussão coletiva?
- O que foi institucionalizado após a atividade?

c) Com relação às atividades da seqüência didática:
- As situações propostas conseguiram provocar nos alunos a mobilização dos conhecimentos previstos (na análise a *priori*)?
- As atividades provocaram conjecturas e conclusões nos alunos?
- O tempo previsto para a solução das atividades foi o tempo gasto pelos alunos?

4.3.1.1.1 Estudo de aplicação da atividade 1

O objetivo desta atividade é de o aluno começar a observar as relações dos lados e ângulos notáveis num triângulo retângulo com ângulos de 45° ou 30 e 60°. A atividade consistia em construir triângulos, calcular lados e ângulos desconhecidos para atingir esses objetivos pretendidos.

A aplicação desta atividade estava prevista para duas aulas (cada aula tem 50 minutos) e levou três aulas para os alunos completarem.

A questão 1 pedia para que os alunos construíssem com régua, compasso e transferidor triângulos retângulos dando três informações e pedindo para que a ordem dos dados fosse respeitada (por exemplo, construir um triângulo com as especificações **8 cm, 90°, 30°**). Houve dúvidas de alguns alunos de como construir o triângulo respeitando essa ordem: “Posso construir o lado entre os ângulos, professor?”. Esse tipo de dúvida, bastante freqüente, foi esclarecida para os alunos, de forma coletiva, com o esboço do triângulo na lousa.

Os alunos se queixaram da medida de 8 cm para o lado de oposto ao ângulo de 30°. Perceberam durante a construção que produziria uma hipotenusa “muito grande”. Um dos alunos faz a seguinte observação: “Professor, vai ocupar uma folha inteira. Diminui aí (a medida do lado), vai?”.

Nessa questão também houve, durante a atividade, muita dúvida em como construir o ângulo de 90° e como medir um ângulo usando transferidor (talvez pela falta de uso ou uso inadequado desses instrumentos). O professor tratou das dúvidas individualmente, ajudando o aluno a manipular o transferidor ou a fazer a construção do ângulo reto.

Alguns alunos perceberam que os itens ***d*** e ***e*** (90°,60°, 10cm e 90°,30°, 10cm) tratavam-se do mesmo triângulo: “O triângulo da (questão 1) ***d*** e da ***e*** é o mesmo, professor. Ele só está “virado”. Precisa fazer o item ***e***?” Foi sugerido pelo professor que o aluno explicasse por que os triângulos são congruentes, sem precisar construí-los.

A questão 2 trata da unicidade de construção do triângulo: os alunos analisam se há possibilidades em construir mais de um triângulo com três informações dadas (dois lados e um ângulo reto ou dois ângulos e um lado). Houve dificuldade de toda a classe em explicar o que quase todos os alunos intuíram como resposta para a questão 2. O professor foi à lousa ajudar os alunos a discutirem como isso poderia ser justificado e registrou as suas idéias e sugestões. Eles chegaram a conclusão que isso poderia ser respondido usando os casos de congruência entre triângulos: lado, lado oposto, ângulo reto ou ângulo, lado, ângulo ou lado, ângulo, ângulo oposto.

Na questão 3 houve dificuldade em calcular as medidas desconhecidas dos ângulos item b: **90°, 5 cm, 10 cm.** O problema foi sugerido para a discussão coletiva na lousa por meio do esboço do triângulo e uma aluna sugeriu que “espelhasse” o triângulo original, obtendo um triângulo eqüilátero (conforme previmos na análise a *priori*). Discutimos a validade dessa estratégia e os alunos concluíram que ela funcionaria, pois o triângulo original poderia ser visto como “metade” de um triângulo eqüilátero. Essa intervenção foi feita porque a dificuldade era muito grande em resolver essa situação e isso poderia atravancar a evolução da atividade.

Ainda na questão 3, houve dificuldade de muitos alunos para calcular os lados desconhecidos dos itens ***c*** e ***d***: 90°,45°, 10cm e 90°,60°, 10cm. O professor foi à lousa e esboçou os triângulos para que fosse discutida coletivamente a estratégia de solução para esses dois casos. No item ***c***, os alunos perceberam logo se tratar de um triângulo isósceles e propuseram que usássemos o teorema de Pitágoras para resolver a situação. No item ***d***, a dificuldade foi maior. O professor havia pedido isoladamente para que os alunos que tinham resolvido o problema não se manifestassem. Dois dos alunos chegaram a propor o uso de seno e co-seno (eles tiveram as relações definidas rapidamente pelo professor de Física para usar na projeção de vetores), mas não se lembravam dos valores da “tabelinha”. Após isso, um aluno sugeriu que usássemos a mesma estratégia do item b: “Professor, e se espelhar o triângulo, não dá?” Foi pedido pelo professor para que ele viesse até a lousa mostrar o raciocínio.

4.3.1.1.2 Análise de erros e dificuldades da Atividade 1

Começamos a relatar os erros e dificuldades que os alunos tiveram na solução das atividades, da interpretação do enunciado, e que estão associados à apreensão discursiva, até a construção com régua, compasso e transferidor, que fazem parte da apreensão seqüencial.

Os quadros a seguir procuram relacionar os erros ou dificuldades respectivas às questões e à quantidade de alunos:

1. Erro ou dificuldade na apreensão discursiva

Erro ao seguir a ordem pedida no enunciado	Nº de alunos	Erro na interpretação do que está sendo pedido	Nº de alunos
1a	0	3a	1
1b	1	3b	1
1c	0	3c	1
1d	1	3d	1
1e	1	3e	1
1f	2	3f	1
1g	2	3g	1
1h	2	3h	1

Quadro VI – Erros e dificuldades da Atividade 1

2. Erro ou dificuldade na apreensão seqüencial

Erro na imprecisão da construção do triângulo	Nº de alunos	Dificuldade na manipulação dos instrumentos	Nº de alunos
1a	0	1a	1
1b	3	1b	1
1c	0	1c	1
1d	7	1d	1
1e	1	1e	1
1f	3	1f	0
1g	2	1g	0
1h	1	1h	0

Quadro VII – Erros e dificuldades na apreensão seqüencial da Atividade 1

Podemos constatar que o número de erros na apreensão discursiva na questão 1 é pequeno. Esses erros estavam previstos na análise a *priori*, o que nos levou a escolha de intervenção do professor no esclarecimento de dúvidas relativas a interpretação do enunciado (conforme relato de aplicação da seqüência) de forma coletiva.

Os erros relativos à construção das figuras também estavam previstos na análise a *prior*i. Podemos notar que o erro na manipulação dos instrumentos de construção é pouco freqüente. Isso se deve ao fato de o professor procurar auxiliar os alunos individualmente. O único erro que ocorreu foi com a manipulação da régua: um dos alunos media 9 cm ao invés de 10 cm, por exemplo, pois começava a contar de 1 cm na régua.

A imprecisão nas medidas dos ângulos na construção do triângulo foi o erro mais freqüente, talvez porque resolvemos deixá-lo para tratar com os alunos na discussão coletiva. Esse fato ocorreu principalmente nas questões 1b, 1d e 1f, que traziam a construção dos ângulos de 30° e 60°. Na construção desses ângulos, a manipulação imprecisa do compasso (gerada pela falta de cuidado para manter a mesma abertura ou a falta de cuidado para manter a ponta seca no ponto exato) fez com que os ângulos e lados resultantes tivessem valores diferentes do que deveriam. Essas imprecisões na construção podem ser fontes interessantes para explicar as variações que os ângulos podem provocar nas medidas dos lados e vice-versa.

Após a construção dos triângulos, a atividade requeria o cálculo dos valores desconhecidos. Nesse item entram as apreensões perceptiva e operatória. A apreensão perceptiva está ligada à percepção dos elementos figurais que podem ser mobilizados na estratégia (apreensão operatória) da solução de um problema.

O quadro a seguir relaciona os erros e dificuldades ligadas à apreensão perceptiva e seu respectivo número de alunos:

Dificuldade na identificação da estratégia de solução	Nº de alunos	Auto-suficiência da figura: não há o que ser provado	Nº de alunos
3a	2	4a	3
3b	2	4b	3
3c	2	4c	3
3d	2	4d	3
3e	2	4e	3
3f	3	4f	3
3g	2	4g	3
3h	3	4h	3

Quadro VIII – Erros e dificuldades de apreensão perceptiva da Atividade 1

Previamos na análise a *priori* a dificuldade de identificação das estratégias e por isso resolvemos intervir coletivamente, discutindo as soluções dos alunos para que esse fenômeno fosse minimizado. Cabe ressaltar que os alunos que tiveram dificuldades nesse item não conseguiram fazer a questão 4. Dois alunos não fizeram a quarta questão mesmo tendo resolvido a questão 3. Provavelmente foi pela falta de tempo, visto que não há nenhum esboço de solução nas folhas de respostas.

Ainda com relação à quarta questão, foi de nossa escolha deixarmos livre a observação dos alunos para a conclusão das relações entre ângulos e lados. Provavelmente, por esse fato, três alunos não concluíram adequadamente e dois alunos concluíram parcialmente e quatro alunos não responderam à questão.

Identificada a estratégia de cálculo na apreensão perceptiva, passamos para as estratégias de solução dos alunos.

Cabe ressaltar que depois de escolhida uma das estratégias acima, os alunos aplicaram o teorema de Pitágoras para achar a medida dos lados desconhecidos e a soma dos ângulos internos para achar os ângulos desconhecidos.

Pelo que pudemos constatar na análise as estratégias de solução dos alunos foram:

- a congruência entre ângulos e lados para o triângulo retângulo contendo ângulo de 45°;
- a reflexão de triângulo pelo lado oposto ao ângulo de 60°, para o triângulo retângulo de ângulos de 30° ou 60°;
- a rotação de triângulo para confrontar com os itens já feitos e justificar sua congruência (90°, 5 cm, 10 cm e 90°,60°, 10cm, por exemplo);

Segue abaixo o quadro que relaciona a estratégia escolhida para cada questão e o número de alunos que escolheram a estratégia:

Questão	Congruência entre lados e ângulos	Reflexão de triângulo	Rotação de triângulo	Erro ou exercício sem fazer
3a	7	-	-	3
3b	-	8	-	2
3c	7	-	-	3
3d	-	7	1	2
3e	-	8	-	2
3f	7	-	-	3
3g	-	8	-	2
3h	-	7	1	4

Quadro IX – Estratégias de resolução da Atividade 1

Conforme comentamos no relato de aplicação das atividades, essas estratégias foram discutidas coletivamente porque houve dificuldade em identificá-las inicialmente. Isso possibilitou com que a questão 3 fosse respondida pela maioria dos alunos e fez com que os erros fossem diminuídos.

O quadro abaixo mostra os tipos de erros ocorridos durante a solução da questão 3, relacionando-os ao número de aluno. Cabe observar que os alunos que não fizeram a questão são aqueles que tiveram dificuldades em identificar as unidades figurais que lhes permitem elaborar uma estratégia eficiente.

Questões	Erro na estratégia de solução	Erro ou dificuldade na aplicação das fórmulas
3a	1	-
3b	-	-
3c	-	-
3d	-	1
3e	-	-
3f	-	-
3g	-	-
3h	1	-

Quadro X – Erros e dificuldades na estratégia de solução da Atividade 1

Na solução do item 3 a (6 cm, 90°, 6 cm) um dos alunos indicou que o terceiro lado desse triângulo vale 12 cm. O erro na estratégia de solução está associado à seguinte conjectura: Se eu dobrar o ângulo, o lado associado a esse ângulo também dobra. Isso mostra que não foram considerados os elementos figurais (no caso, a medida do lado obtida na construção) para, pelo menos, verificar a sua conjectura.

No erro cometido na questão 3h (8 cm, 90°, 60°), um aluno associou ao triângulo do item b (90°, 5 cm, 10 cm) por meio de rotação. Esse fato ocorreu porque o aluno cometeu erro ao manipular o compasso para construir o triângulo do item h. Nesse caso, o erro na apreensão seqüencial gerou um erro na apreensão operatória, fato que não previmos na análise a priori.

O erro cometido no item 3d (90°,60°, 10cm) foi relativo a aplicação equivocada do teorema de Pitágoras. A aluna aplicou erradamente o teorema de Pitágoras: a altura (lado desconhecido) ao quadrado é a soma do quadrado dos outros dois lados do triângulo. Isso reforça o fato de que se não forem levados em consideração os elementos figurais para produzir significado de uma fórmula (no caso, o teorema de Pitágoras) para o aluno, erros como esse podem ser freqüentes. Já prevíamos a ocorrência desse tipo de erro na análise a *priori*.

A questão 4, que tratava da conclusão da atividade (Existe alguma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo? Justifique), não teve resposta satisfatória. Houve alguns fatores que já citamos anteriormente e que podem ter contribuído para esse baixo aproveitamento:

- o tempo insuficiente para alguns alunos;
- a apreensão perceptiva bloqueando a apreensão operatória: fez a construção, mas não soube identificar uma estratégia eficiente para resolver a questão;
- a escolha da não intervenção do professor de deixar o aluno livre para concluir: o aluno não entendeu o enunciado e não respondeu à questão ou respondeu de forma insatisfatória (não respondeu de forma que relacionasse os lados e ângulos nos triângulos).

Julgamos que essas conclusões podem ter sido melhoradas após a discussão coletiva.

4.3.1.1.3 Relato de discussão da atividade 1

As discussões em torno das conjecturas dos alunos para a conclusão da atividade ficaram mais centradas na questão 4. Essa questão consistia em observar as construções feitas na questão 1 e estabelecer relações entre ângulos e lados num mesmo triângulo. Na discussão coletiva, houve dificuldade dos alunos expressarem o que observaram nos triângulos construídos, mas três alunos conseguiram articular alguma relação do triângulo retângulo isósceles com o quadrado e do triângulo retângulo com ângulo de 30° e 60° com o triângulo eqüilátero. Uma das alunas conjecturou: “Toda vez que tiver um triângulo retângulo com ângulos de 30° e de 60° a hipotenusa vai ser o lado do triângulo eqüilátero e o lado oposto ao ângulo de 30° vai ser metade da hipotenusa”.

Sugerimos que se essa atividade for aplicada novamente, haja maior controle e acompanhamento por parte do professor nas conclusões dos alunos, por exemplo, que ele discutisse suas conclusões para orientar o aluno no que a questão pretende (como, aliás, foi feito nas questões anteriores). Com relação ao tempo (3 aulas), acreditamos que é suficiente para a atividade, mesmo que alguns alunos encontraram dificuldade em cumpri-lo. Foram quatro alunos que não terminaram no prazo estipulado, dos quais dois apresentaram dificuldades na questão anterior, que tinha como objetivo o cálculo das medidas obtidas na construção.

O professor procurou deixar registradas e validadas pelo grupo as conjecturas produzidas no decorrer da atividade. Pelas conclusões e pelos comentários dos alunos durante a discussão coletiva, o objetivo da atividade (que é a introdução das relações trigonométricas para os ângulos de 45°, 30° e 60°) foi alcançado com boa parte da classe.

Acreditamos que, embora o número de alunos que não conseguiu chegar às conclusões na solução da atividade seja significativo, é importante que o professor enfatize ou aprofunde algumas questões no momento da discussão coletiva, tais como a estratégia de cálculo dos elementos desconhecidos nos triângulos. Nossa impressão foi que a discussão com a sala foi bastante proveitosa. No entanto, teremos mais elementos para analisar a eficácia no decorrer da próxima atividade, pois ela mobilizará o que foi concluído até o momento.

4.3.1.2.1 Estudo de aplicação da atividade 2

A atividade nº. 2 tem grande relevância para a evolução conceitual de nossa seqüência didática, pois nela são aproveitadas situações que requerem as estratégias de solução dos problemas da atividade anterior (na solução de problemas envolvendo triângulos retângulos com ângulos notáveis), ampliando as situações para problemas envolvendo triângulos com ângulos não notáveis. Isso exige que o aluno mobilize outras ferramentas na solução desses exercícios. Outro fato que torna esta atividade importante é que a institucionalização das relações trigonométricas foi feita durante a sua discussão coletiva.

Os alunos não tiveram dificuldades para interpretar os enunciados das questões 1 e 2. Alguns encontraram dificuldade com o enunciado da questão 3, que demonstrava em distância mínima:

3 - Se o ângulo β for de 45° e B correr, em linha reta, a menor trajetória possível, quanto B percorrerá para apanhar a bola e quantos metros a bola percorre até B conseguir apanhá-la, se a distância entre A e B for de:

a) 1 metro b) 2 metros c) 6 metros

Como houve dificuldades (que já estavam previstas na análise a *priori*), o professor foi até a lousa registrar as sugestões de representação dos alunos. Foi proposta uma representação que considerou que a menor distância possível a ser percorrida pelo jogador B teria de formar um ângulo de 90° em relação à trajetória da bola. Um aluno veio até a lousa defender o seu argumento com o seguinte desenho:

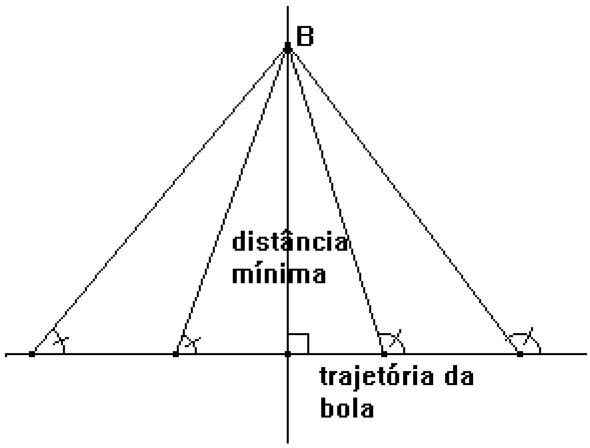


Figura 89 – Distância mínima

Esse argumento foi suficiente para todos seus colegas concordarem e entenderem essa condição para a distância mínima. A partir daí, houve maior facilidade na representação das questões 3 e 4.

Na questão 5, conforme prevíamos na análise a *priori*, surgiram dificuldades para calcular os valores das medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ (conforme figura abaixo) para o ângulo $B\hat{A}C$ entre 0° e 90°, variando de 5° em 5°:

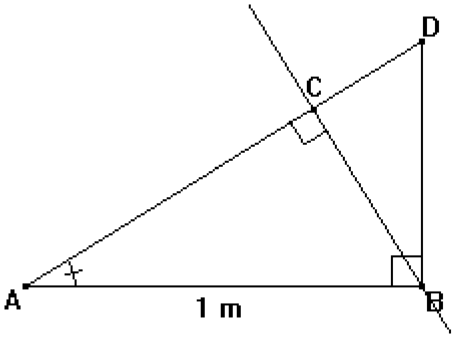


Figura 90 – Questão 5

Como vários alunos não conseguiam resolver essa situação, o professor provocou um debate para ouvir as propostas dos alunos para a solução desse problema. Uma aluna sugeriu que fosse construído com régua, transferidor e compasso um triângulo retângulo A´B´C´, com a mesma medida de ângulo $B\hat{A}C$ (e portanto semelhante ao triângulo ABC) só que com medida de $\overline{AB}$ de 10 cm, que fossem medidos com régua os lados desse triângulo e que usasse a proporcionalidade entre os lados desses triângulos para calcular as medidas desconhecidas do triângulo ABC.

O professor aproveitou o momento para propor aos alunos a organização dos dados obtidos dos valores das medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ e do ângulo $B\hat{A}C$ numa tabela, a fim de facilitar a observação da variação desses valores em função da variação do ângulo. O intuito era de facilitar a elaboração de resposta dos exercícios 6 e 7. Alguns alunos começaram a perceber que algumas linhas de alguns ângulos da tabela eram parecidas (a de 40° e de 50°, por exemplo), trocando-se os valores das medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. A partir daí, como os exercícios restantes exploravam somente o que foi feito no exercício 5, foi deixado ao cargo de cada um que fizesse as suas observações e qualquer outra intervenção foi deixada para a discussão coletiva.

4.3.1.2.2 Análise de erros e dificuldades da Atividade 2

Os erros dessa atividade estão mais ligados à estratégia de solução do problema (apreensão operatória), já que as dúvidas de interpretação e de representação do problema foram discutidas de forma coletiva, de modo que fossem minimizadas essas dificuldades.

Na solução das questões 1 a 4, a estratégia foi do uso das transformações geométricas, conforme previsto na análise a *priori*. Este fato confirmou nossa expectativa, pois esperávamos que o aluno aplicasse os conhecimentos obtidos na atividade anterior. Na questão 5, a estratégia de semelhança entre triângulos já havia sido discutida coletivamente com os alunos e foi usada por todos os alunos. A tabela que foi sugerida para auxiliar na solução das questões 6 (análise da variação do seno e do co-seno em função do ângulo) e 7 (gráfico de seno e de co-seno) deixou de ser feita por quatro alunos. Possivelmente, o motivo foi a falta de tempo, pois três desses alunos não montaram a tabela. O fato pode ter prejudicado a elaboração das respostas dessas questões. Também houve dificuldade na conversão de registro de tabela para o registro gráfico. Um dos alunos fez o exercício 5 corretamente e, mesmo tendo montado a tabela corretamente, não conseguiu usar esses valores na construção dos gráficos da sétima questão. Além disso, fez um esboço de crescimento linear desses gráficos.

Os erros e dificuldades principais nessa atividade foram de apreensão operatória. Três alunos não fizeram a proporcionalidade entre os triângulos: calcularam as medidas desconhecidas usando um triângulo com a distância $\overline{AB}$ de 10 cm, por exemplo, e não atentaram ao fato de que o triângulo $\overline{AB}$ original media 1 m. Dois dos alunos erraram na escala do gráfico: colocaram a mesma distância para variações diferentes de medida. Esses erros não foram mais freqüentes porque três alunos não terminaram a atividade.

As dificuldades encontradas pelos alunos podem nos levar a concluir que poderia ser necessária uma intervenção maior do professor para diminuir as dificuldades dos alunos com relação à representação gráfica. Nós já prevíamos essa dificuldade e escolhemos não intervir, pois retrabalharemos essas representações na atividade nº. 4. Com relação às dificuldades de organização do tempo, achamos que foi suficiente para cumprir os objetivos da atividade, apesar do número de alunos que não conseguiram acabar a atividade seja relativamente grande.

4.3.1.2.3 Relato de discussão da atividade 2

Na discussão coletiva, os alunos observaram que as questões de 1 a 4 conservavam os ângulos e variavam apenas a medida da distância $\overline{AB}$, percebendo que os lados dos triângulos eram proporcionais. Não houve, portanto, no geral, dificuldade dos alunos de sugerir como poderiam ser obtidas as medidas desconhecidas.

Durante a discussão da questão 5, foi aproveitada a estratégia proposta pelos alunos da semelhança entre triângulos para institucionalizar as relações seno, co-seno e tangente conforme o esquema abaixo:

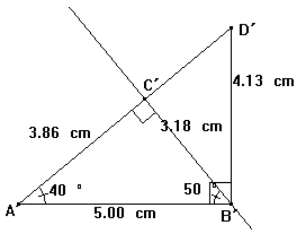


Figura 91 – Questão 5

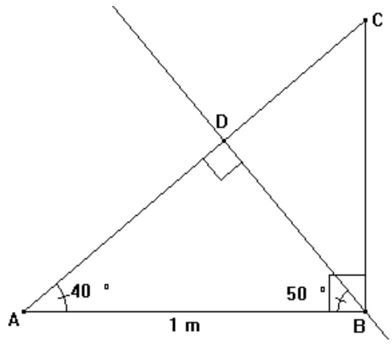


Figura 92 – Questão 5

Foi observado pelos alunos que na situação acima o triângulo maior teria 20 vezes o lado do triângulo menor. Em seguida o professor indagou qual seria a razão de proporcionalidade entre os lados do mesmo triângulo: entre catetos e a hipotenusa e entre dois catetos. Os alunos calcularam para os triângulos propostos:

$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} = 0{,}64$, $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = 0{,}36$, $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C}{A'C'} = 0{,}83$ e essas relações foram apresentadas, respectivamente, como seno, co-seno e tangente do ângulo $B\hat{A}C$ (apareceram os valores de secante, cossecante e cotangente, mas foi comentado pelo professor que essas relações seriam enfatizadas posteriormente). Alguns alunos perceberam que os valores são exatamente os valores das medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ (pois a hipotenusa vale 1 m).

Dessas relações, os alunos concluíram que sen 40° = cos50°, sen 50° = cos 40° e conseguiram conjecturar que ângulos complementares têm os mesmos valores de seno e co-seno (ou seja, $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$).

Foi reconstruída na lousa a tabela com os valores das medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ em função do ângulo $B\hat{A}C$. Em seguida, foi explorada a variação do ângulo para observar o que ocorre com os valores obtidos na tabela e para explorar o crescimento das relações seno e co-seno. Aproveitou-se a tabela para construir o gráfico de seno e do co-seno no mesmo plano. Antes da confecção do gráfico foram feitas algumas explorações preliminares: como será a representação gráfica dos pontos da tabela? Pode ser uma reta? Os gráficos se cruzarão em algum ponto? Se sim, quantos pontos? Os alunos concluíram facilmente que o gráfico não seria uma reta e que o único ponto de intersecção entre os gráficos de seno e co-seno para ângulos entre 0° e 90° é o que tem como coordenada o ângulo de 45°, observando a tabela feita ou explicando que somente para esse ângulo o cateto oposto e o cateto adjacente têm a mesma medida.

A discussão da atividade foi, portanto, satisfatória. Foram atingidos os objetivos previstos durante na atividade e algumas conjecturas que não prevíamos também apareceram, tais como a de ângulos complementares terem os mesmos valores de seno e co-seno. No entanto, como já vimos na análise dos erros, houve muita dificuldade na solução dos problemas da atividade, sobretudo no momento de elaborar conclusões e de fazer os gráficos. Esperamos amenizar esses erros nas atividades seguintes, pois retrabalharemos tanto a familiarização das relações trigonométricas, quanto à construção de gráficos e a elaboração de observações mediante dados obtidos no problema.

4.3.1.3.1 Estudo de aplicação da atividade 3

A atividade 3 tem por objetivo reutilizar as relações trigonométricas seno e tangente, aproveitando para integrá-las ao perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência. O perímetro desses polígonos se aproxima do perímetro da circunferência à medida que o número de lados dos polígonos aumenta, sendo que o perímetro do polígono externo diminui e o do polígono interno aumenta. Isso possibilita conectar o comprimento de um arco em radianos a um ângulo central em graus, fato que foi usado na próxima atividade.

A primeira dificuldade encontrada por alguns alunos foi em relação a apreensão discursiva: saber o que significam as palavras circunscrito e inscrito. Em seguida, houve dificuldade em representar as situações. Um aluno veio até o quadro representar um hexágono inscrito e a partir daí a sala começou a resolver a atividade.

Houve alguma dificuldade em calcular o perímetro do octógono. Mesmo a figura estando construída (figura 82) alguns alunos tiveram dificuldade para enxergar um método para resolver o problema (figura 83). Essa dificuldade já estava prevista na análise a *priori*. Então, foi feita uma discussão sobre suas possíveis formas de solução. Como estávamos trabalhando com triângulos retângulos, apareceu a sugestão de um tratamento figural conforme a figura 83:

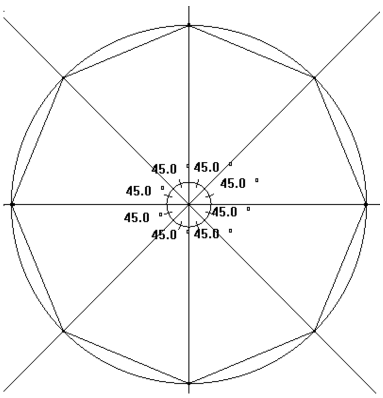


Figura 93 - Octógono

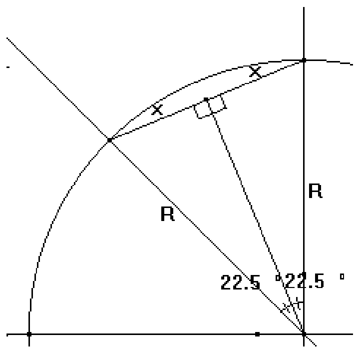


Figura 94–Triângulo no octógono

Desse ponto em diante deixamos que cada aluno pensasse em como resolveria a situação proposta. Quaisquer outros comentários foram deixados para o momento de discussão com a classe.

4.3.1.3.2 Análise de erros e dificuldades da Atividade 3

Durante essa atividade houve poucas dificuldades na interpretação dos problemas e na sua representação (apreensão discursiva e seqüencial). Como já prevíamos essa dificuldade na análise a *priori*, resolvemos controlá-la, tirando dúvidas de palavras desconhecidas e deixando acontecer a interação dos alunos para discutir a representação dos problemas. Por esse motivo, apenas uma aluna não representou alguns dos itens do exercício 1 (não sabemos se deixou de fazer ou teve dificuldade para representar).

Três alunos deixaram de fazer o exercício 2. É possível que a dificuldade tenha sido provocada pelo último item do exercício 1, cujo qual pedia ao aluno que generalizasse o cálculo do perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito. Nenhum dos alunos que deixou de fazer o exercício fez a representação da situação. Provavelmente o aluno não fez o exercício porque não conseguiu representá-lo. Procuramos discutir esse exercício na discussão coletiva e relataremos os resultados a seguir.

4.3.1.3.3 Relato de discussão da atividade 3

Começamos a discutir alguns itens do exercício 1, a fim de nos auxiliar na elaboração de uma fórmula para o cálculo dos perímetros inscrito e circunscrito e para podermos preencher a tabela do exercício 2. A tabela (figura 84) foi preenchida com ajuda dos alunos e a partir dela, tivemos condições de responder às questões da atividade.

N (nº de lados)	Perímetro do polígono inscrito	n.sen(180º/n)	Perímetro do polígono circunscrito	n.tg(180°/n)
6	6r	3	6,8r	$2\sqrt{3} \approx 3{,}4$
8	6,08r	3,04	6,62r	3,31
10	6,2r	3,1	6,60r	3,30
12	6,22r	3,11	6,48r	3,24
20	6,24r	3,12	6,40r	3,2
100	6,2822r	3,1411	6,2852r	3,1426
1000	6,2831r	3,1415	6,2832r	3,1416
10000	6,28318r	3,14159	6,28318r	3,14159

Tabela V – Perímetros preenchidos na discussão coletiva da Atividade 3

Com a tabela preenchida, os alunos chegaram as seguintes conclusões:

- Se aumentarmos o número de lados do polígono, o valor do perímetro do polígono interno aumenta e do polígono interno diminui;
- Os valores dos perímetros dos polígonos interno e externo estão aproximando entre um do outro, à medida que o número de lados dos polígonos aumenta;
- Os perímetros dos polígonos estão se aproximando do comprimento da circunferência, quanto maior o número de lados desses polígonos;
- O comprimento da circunferência poderia ser aproximado pelo valor do perímetro dos polígonos (ou seja, C = 6,28318r ou C = 2 π r).

Mediante as conclusões produzidas durante a discussão coletiva da atividade, acreditamos que os objetivos da atividade foram atingidos.

4.3.1.4.1 Estudo de aplicação da atividade 4

A atividade nº. 4 tem por principal objetivo a mudança de ponto de vista das relações trigonométricas para projeções ortogonais do raio na circunferência trigonométrica (figura 84). Houve dificuldades dos alunos com a projeção ortogonal. Pelo fato de não saberem o que isso significa, não sabiam interpretar a situação proposta. Outra dificuldade é de representar a situação quando o ângulo $E\hat{O}F$ da figura abaixo era maior do que 90°.

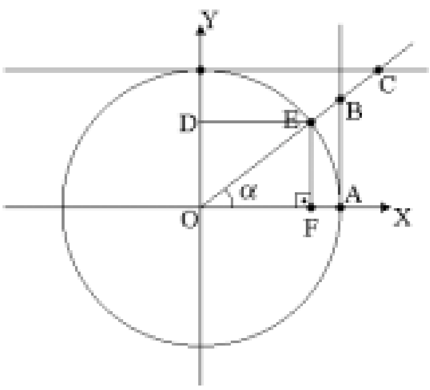


Figura 95 – Ciclo trigonométrico

Os alunos tiveram muita dificuldade em resolver o problema. O professor interveio explicando o que é uma projeção ortogonal, desenhando na lousa a figura da atividade (figura 84): “Nessa figura (acima) $\overline{EF}$ e $\overline{OD}$ são, respectivamente, as projeções ortogonais horizontal e vertical do segmento $\overline{OE}$, que é o raio da circunferência trigonométrica, pois são projeções que formam um ângulo de 90°. A seguir, foram apresentados os quadrantes e foi definido que o ângulo é medido a partir do 1º quadrante do eixo x em sentido anti-horário e que se medíssemos em sentido horário, por convenção, esse ângulo teria medida negativa. Visto que ainda havia dificuldade para representar a situação com um ângulo maior que 90° (no caso, um ângulo de 135°), o professor pediu para que algum voluntário viesse tentar esboçar o desenho. Um voluntário fez a seguinte representação e marcou as projeções (com ajuda de alguns colegas):

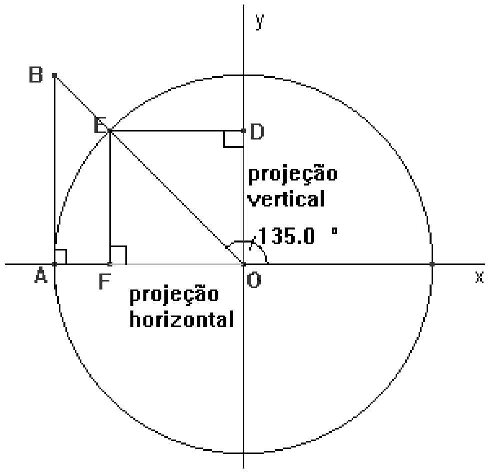


Figura 96 – Projeções ortogonais

Mesmo com a figura desenhada, ainda persistia a dificuldade de resolver o problema por parte de quase todos os alunos (fato previsto na análise a *priori*). As unidades figurais pareciam ser insuficientes para provocar no aluno alguma estratégia de solução. Foi quando um deles sugeriu para completarmos a figura da seguinte maneira:

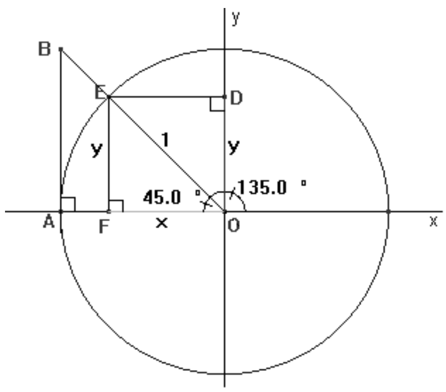


Figura 97 – Projeção para o ângulo de 135°

Com o tratamento figural proposto acima era possível transformar as situações aparentemente novas em situações envolvendo ângulos notáveis. Não houve, a partir daí, nenhuma troca coletiva de métodos ou representações. Todas as discussões foram deixadas para o momento coletivo.

4.3.1.4.2 Análise de erros e dificuldades da Atividade nº 4

Os erros dos alunos nesta atividade estão muito ligados às projeções dos ângulos de 90°, 180°, 270° e 360° (ou 0°) quando não se formava um triângulo para que o aluno pudesse manipulá-lo, conforme a figura abaixo:

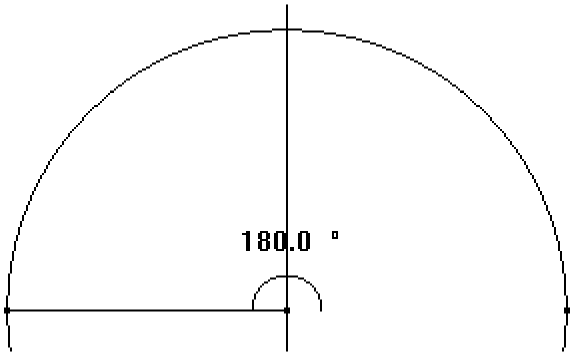


Figura 98 – Projeção do ângulo de 180°

Alguns alunos tiveram dificuldade em perceber qual era a medida das projeções horizontal e vertical nesses casos. Outro fato ligado à tangente dos ângulos de 90° e 270° é que os alunos não sabiam como representar graficamente o ponto (90°, $tg\,90°$) e o ponto (270°, $tg\,270°$). Isso gerou erros mais perceptíveis, portanto, no gráfico da tangente. Apesar disso, essa dificuldade parece ter sido minimizada com a discussão coletiva. Apareceram erros de escala novamente: dois dos alunos não tomaram cuidado de localizar no gráfico, por exemplo, 1/2 no lugar da metade de 1 (muitas vezes o aluno usava quatro linhas do caderno para uma unidade e uma linha para metade). Uma das alunas inverteu os valores de seno e co-seno de um ângulo por ter invertido as projeções horizontal e vertical.

Apesar das dificuldades e erros assinalados, houve uma melhora no desempenho dos alunos com relação às atividades anteriores. Julgamos que conseguimos ampliar o ponto de vista dos alunos das relações trigonométricas para o ponto de vista da trigonometria do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica.

4.3.1.4.3 Relato de discussão da atividade 4

Começamos a discussão da atividade com alguns questionamentos:
- Quanto vale o seno e o co-seno de 390°, 450°, 900° e 3780°?
- Quais são os valores mínimos e máximos que seno e co-seno assumem?
- O gráfico das funções seno, co-seno e tangente é linear para algum intervalo de ângulo?
- Em quantos pontos se interceptam os gráficos de seno e co-seno dessa atividade? Justifique.

Os alunos perceberam que o seno e o co-seno de 3780°, por exemplo, tem o mesmo valor do seno e do co-seno de 180°: "Professor, são dez voltas mais metade de uma volta, então é mesma coisa que 180 (graus)". Isso mostra que o aluno começa a se apropriar da periodicidade da função seno e do co-seno. Foi percebido, talvez pelo auxílio da tabela, o intervalo em que estão compreendidos os valores de seno e co-seno. Com relação à linearidade, eles perceberam, também possivelmente pela observação das tabelas, que em momento algum o crescimento do seno, co-seno ou tangente é constante. Aliás, a linearidade desses gráficos para ângulos entre 0° e 90° já havia sido descartada na discussão coletiva da segunda atividade. Nos pontos de intersecção, houve um palpite certo de quantos seriam, mas o argumento foi associado pela maioria dos alunos apenas aos valores da tabela, apesar de dois alunos lembrarem que as projeções são iguais em valor absoluto para o ângulo de 45° e como o sinal do seno e do co-seno é igual no 1º e no 3º quadrantes, ali estavam os ângulos em que os valores de seno e co-seno eram iguais. É possível que os alunos tenham começado a apreenderem o ponto de vista de projeção, pois o utilizaram como ferramenta na solução de um problema proposto.

Analisando as dificuldades apresentadas pelos alunos na solução da atividade (que foram mais em torno da escala gráfica) e as conclusões na discussão coletiva, os objetivos da atividade foram atingidos (mudança de ponto de vista das relações trigonométricas para projeção ortogonal, periodicidade e amplitude). Acreditamos que o aluno, no geral, também segue em condições de evoluir seus conceitos de trigonometria (funções trigonométricas) e para o estudo de fenômenos naturais que envolvam esses conhecimentos (decomposição de vetores, lei da refração da luz e movimento harmônico simples, por exemplo).

4.4 CONCLUSÃO DA ANÁLISE A *POSTERIORI*

Na atividade 1, escolhemos situações que fizessem com que os alunos construíssem triângulos retângulos com ângulos notáveis com régua e compasso. Acreditamos que dessa maneira o aluno se apropria das propriedades da figura por meio da transformação geométrica no plano, pois os triângulos podiam ser transformados para formar um quadrado (no caso do triângulo retângulo isósceles) ou formar um triângulo eqüilátero (se fosse um triângulo retângulo com os ângulos de 30° ou 60°).

Os problemas consistiam em fornecer três informações (dois lados e um ângulo ou dois ângulos e um lado), para que fossem construídos os triângulos seguindo a ordem das medidas dadas. Em seguida, era feito o cálculo dos ângulos e lados desconhecidos. Seguem alguns itens abaixo como exemplos:

a) 6 cm, 90°, 6 cm b) 90°, 5 cm, 10 cm e) 90°,30°, 10cm

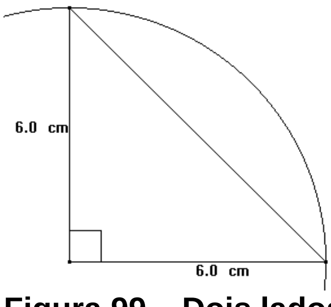


Figura 99 – Dois lados Conhecidos

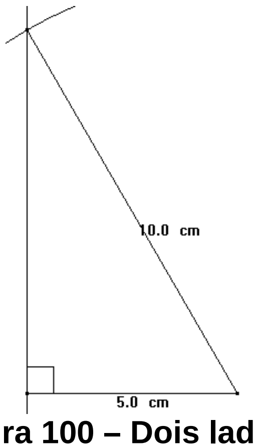


Figura 100 – Dois lados conhecidos

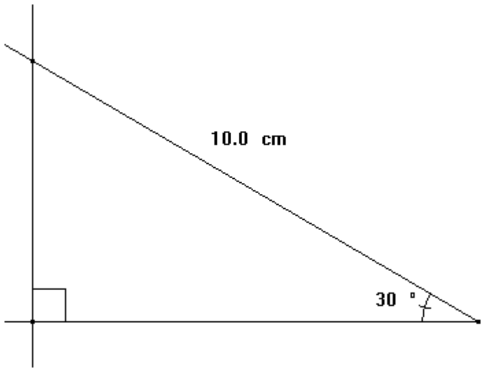
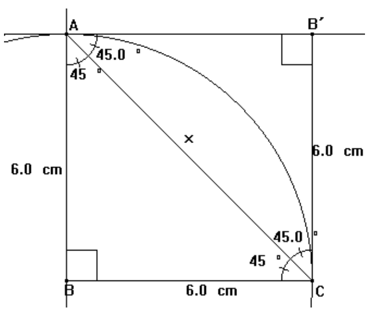


Figura 101 – Um lado e um ângulo conhecido

Como podemos observar nas figuras 99 e 100, o conhecimento do teorema de Pitágoras é suficiente para calcular a medida do lado desconhecido, pois elas possuem a medida de dois lados. Já na figura 101 o teorema de Pitágoras é insuficiente para definir a medida do lado desconhecido, visto que só se conhece a medida de apenas um dos lados. Em contrapartida, as figuras 99 e 100 têm apenas um ângulo conhecido. Na primeira delas, o triângulo é isósceles e podem ser definidas as medidas dos outros ângulos por esse fato, mas e na figura 87, como podemos definir os outros ângulos?

Conjeturamos que, com o teorema de Pitágoras e a soma dos ângulos internos de um triângulo o aluno não conseguiria resolver esses problemas e isso poderia levá-lo a pensar na necessidade de um conhecimento novo para solucionar as situações propostas (dialética ferramenta-objeto) e que os elementos figurais poderiam possibilitar a exploração das propriedades dessas figuras na solução dos problemas propostos, conforme previmos na análise a *priori* e conforme constatamos no estudo de aplicação e de discussão, como podemos observar a seguir:



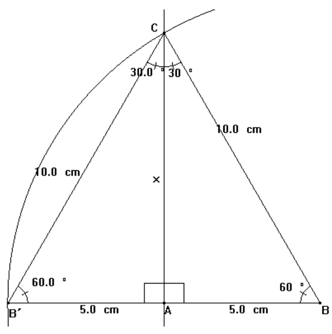


Figura 102 – Resolução da figura 99   **Figura 103 – Resolução da figura 100**

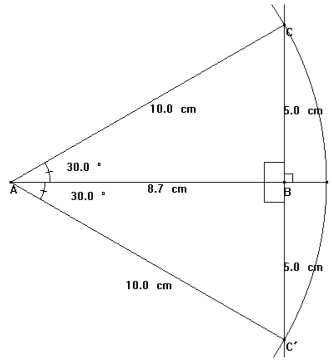


Figura 104 – Resolução da figura 101

Essas situações propostas, conforme podemos observar nas figuras 102, 103 e 104, podem possibilitar a manipulação pelo aluno das figuras construídas, por meio de transformações geométricas, principalmente da reflexão no plano e da rotação. Desse modo, as propriedades podem ser exploradas e apreendidas: um triângulo retângulo com ângulo de 60° pode ser transformado em um triângulo eqüilátero, e um triângulo retângulo com ângulo de 45° pode ser transformado num quadrado.

A partir dessas figuras conhecidas pelo aluno, acreditamos que pode ser possível relacionar as propriedades já conhecidas às relações entre catetos e hipotenusa desses triângulos retângulos, constituindo uma importante retomada de conhecimentos anteriores e introdução a novos conhecimentos.

Constatamos pelo estudo de aplicação da atividade 1, que, mesmo havendo dificuldade inicial de identificar uma estratégia de solução desses problemas, os elementos figurais conseguiram provocar no aluno a apreensão operatória, pois foi dado tratamento figural óptico e posicional aos triângulos. Por meio da reflexão no plano e da composição de figuras, foram transformadas as situações iniciais (figuras 99, 100, 101), em situações em que fosse possível a manipulação das propriedades (figuras 102, 103 e 104). Os alunos perceberam, portanto, a possibilidade de transformação geométrica dos triângulos e a aplicaram com na solução dos problemas propostos. As conclusões presentes na resolução das atividades e na discussão coletiva também nos levam a concluir que os educandos começaram a apreender a relação trigonométricas para ângulos notáveis: “Toda vez que tiver um triângulo retângulo com ângulos de 30° e de 60°

a hipotenusa vai ser o lado do triângulo eqüilátero e o lado oposto ao ângulo de 30° vai ser metade da hipotenusa" (observação de um dos alunos).

Na atividade 2, retomamos os problemas envolvendo triângulos retângulos com ângulos notáveis. Nosso intuito era de reutilizar o tratamento figural feito na atividade anterior e ampliar os problemas para triângulos retângulos com um ângulo qualquer.

Procuramos, na elaboração das situações propostas, usar ângulos notáveis, fixando-os e variando a medida dos lados. Nossa intenção era que o aluno reforçasse as relações entre os catetos e entre os catetos e a hipotenusa com triângulos que podiam ser transformados em quadrados ou triângulos eqüiláteros. Esse fato auxiliaria na obtenção das relações trigonométricas dos ângulos notáveis e auxiliaria na observação da relação de semelhança entre triângulos, pois as relações entre catetos ou entre catetos e ângulos permanece constante.

Os alunos perceberam que se o valor da medida de $\overline{AB}$ variar e o ângulo for mantido, conforme mostram as figuras 105 e 106, os triângulos terão os lados correspondentes proporcionais:

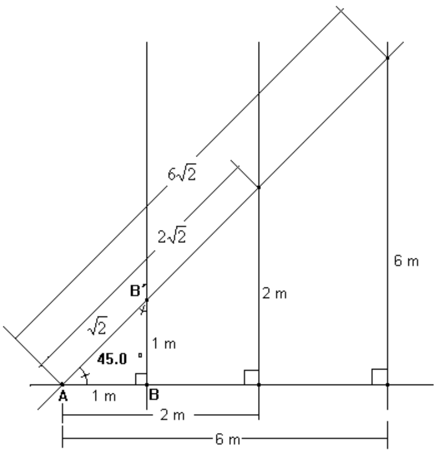


Figura 105 – Triângulos semelhantes

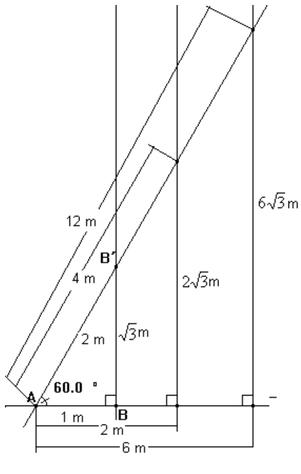


Figura 106 – Triângulos semelhantes

Pelo desempenho dos alunos, podemos dizer que eles conseguiram relacionar as propriedades figurais por meio do tratamento figural, que foi usada na atividade anterior, pois elas foram reutilizadas com bastante êxito na atividade

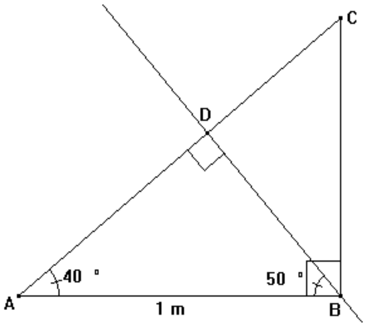
2 e conseguiram perceber que, fixado o ângulo, a relação entre os catetos e entre catetos e hipotenusa nessas situações se mantinha constante.

Propusemos, nas situações seguintes, problemas que envolvem as relações trigonométricas em triângulos retângulos com ângulos não notáveis, e que, portanto, o tratamento figural dado aos casos anteriores (reflexão e rotação no plano) não é estratégia suficiente. Torna-se necessária uma nova estratégia para a solução desses problemas.

Nessas situações, também procuramos fixar os ângulos e variar a medida dos lados dos triângulos. Nossa intenção era que o aluno observasse que, nesse caso, os triângulos eram semelhantes, e, portanto, os seus lados são proporcionais. Com isso, acreditamos que fosse possível a percepção de que mantendo o ângulo, as relações entre os catetos e entre os catetos e a hipotenusa permaneceriam constantes. Esse fato auxiliaria na obtenção das relações trigonométricas dos ângulos notáveis, bem como na estratégia de solução, ainda que o triângulo retângulo não tivesse ângulos notáveis.

Acreditamos que esse tipo de problematização pode auxiliar na mudança de ponto de vista das relações trigonométricas envolvendo ângulos notáveis para relações trigonométricas envolvendo ângulos não notáveis no triângulo retângulo e na institucionalização das relações trigonométricas, pois nessa atividade, essas relações são advindas das observações e manipulações das propriedades da figura, especialmente da semelhança entre triângulos.

Houve dificuldades para identificar uma estratégia para solucionar esse tipo de problema. Porém, conforme nosso relato de aplicação da seqüência, os alunos recorreram à construção geométrica e a propriedade de semelhança de triângulos para resolver os problemas propostos, conforme mostram as figura 107 e 108:



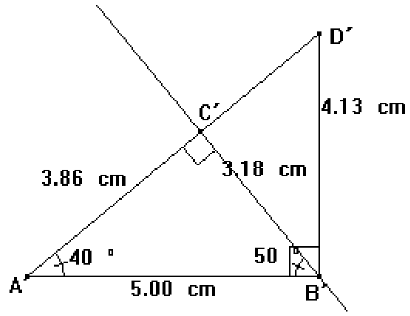


Figura 107 – Triângulo esboçado **Figura 108 – Triângulo construído**

Apesar das dificuldades na resolução dos problemas, os alunos responderam satisfatoriamente às nossas expectativas e exploraram bem as propriedades das figuras envolvidas nas atividades. Embora esse fato tenha sido observado por poucos no início da aplicação da atividade, os alunos corresponderam às expectativas durante o desenvolvimento da solução da atividade (sete alunos conseguiram resolver os problemas) e durante a discussão coletiva, pois houve uma boa participação dos alunos. Isso corrobora com as nossas segunda e terceira hipóteses:

> A manipulação e a observação das figuras geométricas podem fazer com que o aluno produza e apreenda as propriedades dos objetos representados;
>
> Situações-problema cuja resolução envolve conceitos de geometria como isometria: rotação, reflexão e translação; paralelismo, perpendicularismo, etc, podem possibilitar uma mudança de ponto de vista do aluno sobre os problemas de trigonometria do triângulo retângulo e eventual minimização dos problemas de ensino-aprendizagem na trigonometria no triângulo retângulo.

Na atividade 3, procuramos propor ao aluno situações que ocorreram na história da matemática e que envolvem as relações trigonométricas como ferramentas implícitas para a solução de problemas matemáticos. Pretendíamos, nas questões iniciais, fazer a reutilização dessas relações.

Elaboramos uma atividade que consiste em aproximar o comprimento da circunferência pelo perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos a ela conforme as figuras 109 e 110:

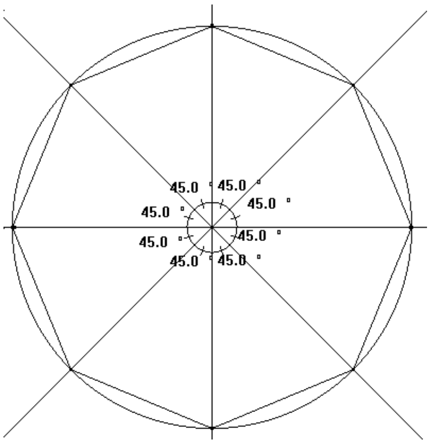


Figura 109 – Octógono inscrito

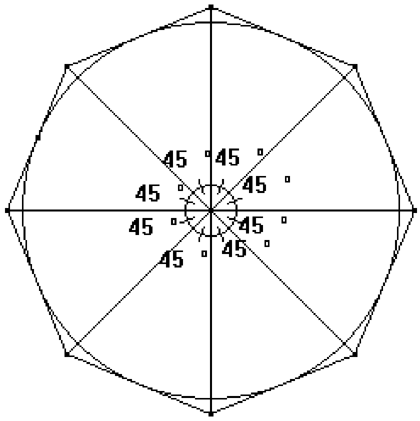
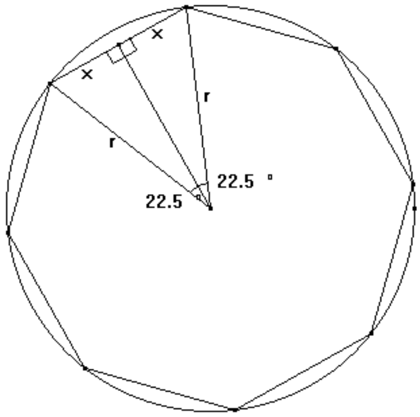


Figura 110 – Octógono circunscrito

Esperávamos que os alunos recorressem ao tratamento figural, decompondo a figura 109 e 110 em triângulos retângulos. Há provavelmente familiarização com a solução dessas figuras, pois foram exploradas nas duas atividades anteriores. Houve dificuldade em recorrer a essa estratégia pela maioria dos alunos. Somente após ter ocorrido uma discussão coletiva para identificá-la, é que grande parte dos alunos percebeu essa possibilidade.

Apesar da dificuldade com a apreensão perceptiva causar ineficiência na apreensão operatória no primeiro momento, os alunos aplicaram a trigonometria no triângulo retângulo, especificamente as relações seno e tangente para calcular o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência. Os conhecimentos desenvolvidos nas atividades anteriores (tratamento figural e as relações trigonométricas) foram utilizados pelos alunos para resolver as situações do cálculo desses perímetros, conforme podemos observar nas figuras 111 e 112:



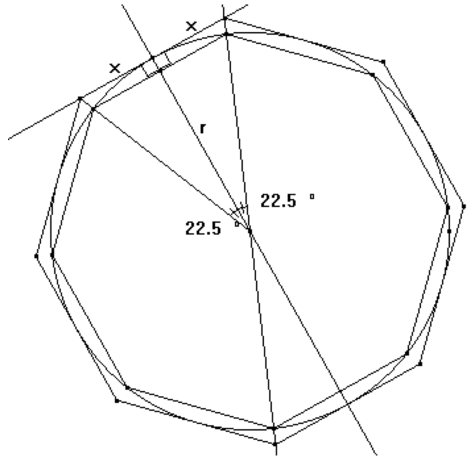


Figura 111 – Tratamento da figura 109

Figura 112 – Tratamento da figura 110

Os conceitos institucionalizados na atividade anterior apareceram, portanto, na exploração, por parte da maioria dos alunos, dos elementos figurais para o cálculo dos perímetros desses polígonos, por meio de tratamento figural (conforme figuras 111 e 112), o que reafirma nossa primeira hipótese:

> Produzir situações-problema que remetam aos tratamentos figurais que foram enfrentados na construção histórica desse conhecimento faz com que o aluno apreenda os conceitos como ferramentas implícitas para a solução desses problemas

Nossa preocupação com a produção de significado da trigonometria no triângulo retângulo não poderia deixar de envolver a preocupação da integração da álgebra com a geometria. Utilizamos essa integração na atividade 3: cálculo dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito por meio das relações trigonométricas e a aproximação desses perímetros ao comprimento da circunferência (e, conseqüentemente, ao número π). Esse fato auxiliaria na mudança de ponto de vista de relação trigonométrica envolvendo um ângulo central para relação trigonométrica envolvendo um arco central em radianos.

Por meio da generalização do cálculo do perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito, segundo esperávamos na análise a *priori*, os alunos foram capazes de preencher a tabela VI:

n (nº de lados)	Perímetro do polígono inscrito	n.sen(180º/n)	Perímetro do polígono circunscrito	n.tg(180°/n)
6	6r	3	6,8r	$2\sqrt{3} \approx 3{,}4$
8	6,08r	3,04	6,62r	3,31
10	6,2r	3,1	6,60r	3,30
12	6,22r	3,11	6,48r	3,24
20	6,24r	3,12	6,40r	3,2
100	6,2822r	3,1411	6,2852r	3,1426
1000	6,2831r	3,1415	6,2832r	3,1416
10000	6,28318r	3,14159	6,28318r	3,14159

Tabela VI – Perímetros dos polígonos regulares preenchidos na Atividade 3

A partir da observação da tabela, acreditamos que fosse possível que o aluno concluísse que, aumentando o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, o perímetro aumenta e diminui, respectivamente, sendo que os dois perímetros se aproximam do comprimento da circunferência. Portanto, o perímetro dos polígonos se aproxima entre si e os dois perímetros se aproximam do comprimento da circunferência. Apesar da tabela pronta, os alunos não relacionavam com facilidade os perímetros e o comprimento da circunferência. Após a discussão coletiva da atividade, foi perceptível a melhora da relação entre esses elementos por parte dos alunos.

A relação entre esses elementos é importante para o aluno, pois não só deixa mais explicita a relação entre o comprimento do arco em radianos e do ângulo central a ele relacionado em graus, como também possibilita a evolução do estudo das funções trigonométricas associadas a um arco em radianos. Esse fato auxiliou, portanto, na mudança de ponto de vista no estudo das relações trigonométricas, que é a de função trigonométrica que associa um ângulo para função de um arco em radianos ao conjunto dos números reais.

Prosseguimos na quarta atividade (última da seqüência) com a introdução do estudo das relações trigonométricas na circunferência trigonométrica.

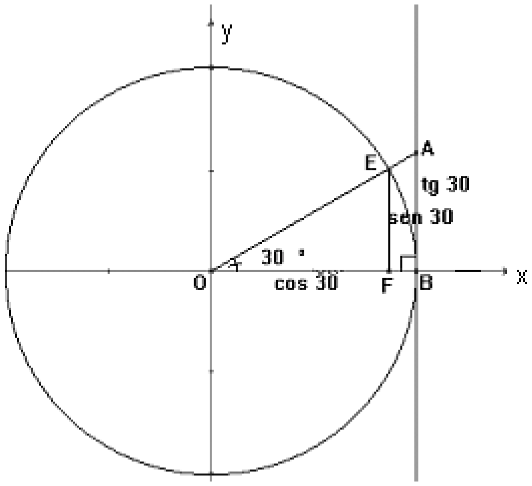


Figura 113 – Projeções ortogonais (ângulo de 30°)

Essa atividade também se constitui numa importante mudança de ponto de vista das relações trigonométricas para projeções ortogonais do raio da circunferência trigonométrica e num importante elo dessas relações com os números reais, já que as projeções são feitas sobre o sistema de eixos coordenados. Isso eventualmente possibilita a apreensão do conceito de relação trigonométrica no ciclo trigonométrico. Em outras áreas, como a Física, possibilita o estudo das projeções de vetores e o estudo de fenômenos periódicos.

As situações dessa atividade procuram levar os alunos à manipulação das propriedades geométricas das figuras (figura 114) para a obtenção das medidas das projeções (figura 115) e conseqüentemente possibilitam a mudança de ponto de vista das relações trigonométricas para as projeções ortogonais do raio da circunferência trigonométrica, pois usamos situações que envolviam ângulos notáveis ou situações que pelo tratamento figural possibilitasse a solução usando um ângulo notável como podemos observar no exemplo abaixo:

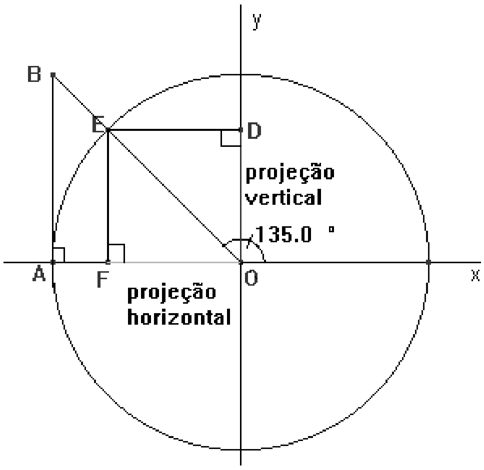


Figura 114 – Projeções ortogonais (ângulo de 135°)

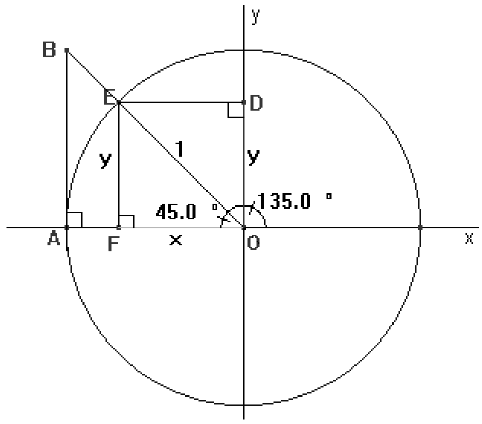


Figura 115 – Tratamento dado à figura 114

Novamente procuramos utilizar a dialética ferramenta-objeto de maneira articulada com o tratamento figural para a elaboração de um conhecimento novo.

Acreditamos que, criando situações desse tipo, fosse possível o aluno manipulá-las para transformá-la em um triângulo retângulo com ângulo notável e usasse o conhecimento obtido nas atividades anteriores. Houve dificuldade no tratamento figural da figura 114 para associá-la a um caso conhecido (figura 115), conforme prevíamos na análise a *priori* e conforme registramos no relato de aplicação dessa atividade. Após uma discussão coletiva para solucionar esse problema (conforme os relatos da análise a *posteriori*), o aluno mobilizou a estratégia contida na figura 115 para calcular as projeções do raio na circunferência trigonométrica.

Apesar da dificuldade em identificar uma estratégia na resolução do problema, a exploração das propriedades matemáticas das figuras propostas nas situações das atividades 2 e 3 possibilitou importantes conexões entre a álgebra e a geometria, pois explicitou a associação do número π ao comprimento da circunferência e ao arco em radianos e a evolução do ponto de vista das relações trigonométricas no triângulo retângulo para projeção do raio da circunferência trigonométrica que pode estar associado ao ângulo ou ao arco central. Esses fatos reforçam, portanto nossa quarta hipótese:

> A construção e obtenção de relações matemáticas envolvidas nessas figuras geométricas (que podem ser medidas ou calculadas) possibilitam a integração entre a geometria e a álgebra, produzindo significado para o aluno na trigonometria no triângulo retângulo.

É possível afirmar, com base na confirmação de nossas hipóteses, que não só conseguimos produzir significado da trigonometria no triângulo retângulo para o aluno, como também, eventualmente, podemos ter minimizado suas dificuldades futuras no prosseguimento dos estudos da trigonometria e de suas aplicações, pois introduzimos uma importante conexão das relações trigonométricas com os números reais. Também introduzimos dois dos principais elementos das funções trigonométricas: a amplitude e a periodicidade, conforme mostra nosso estudo da aplicação e da discussão dessa atividade.

Podemos constatar que o conjunto das atividades da seqüência leva o aprendiz à retomada e ao aprofundamento dos conceitos trabalhados na atividade anterior, ou seja, há um desenvolvimento conceitual promovido pela seqüência, conforme podemos observar no quadro XI:

Atividade	**Mudança de ponto de vista**
Atividade 1	De relações entre lados para relação entre lados e ângulos notáveis num triângulo retângulo
Atividade 2	De relações entre lados e ângulos notáveis para relação entre lados e ângulos quaisquer num triângulo retângulo
Atividade 3	Não. Reutilização das relações trigonométricas em polígonos
Atividade 4	De relações trigonométricas para projeções ortogonais do raio na circunferência trigonométrica

Quadro XI – Evolução conceitual da seqüência didática

Com base na evolução conceitual da seqüência didática (mencionado no quadro XI) e no desempenho dos alunos na resolução das tarefas propostas, temos condições de analisar o desenvolvimento conceitual desses alunos na trigonometria do triângulo retângulo. Podemos, portanto, levando em consideração o desempenho dos alunos durante a aplicação e discussão das atividades e pela confirmação de nossas hipóteses de pesquisa, afirmar que a questão de pesquisa (***"Uma seqüência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo?")***, foi respondida de maneira satisfatória e positiva.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta tem por objetivo o estudo de uma abordagem da trigonometria no triângulo retângulo que produza significado para o aluno. Elaboramos, para tanto, uma seqüência didática, cuja qual procura integrar as construções geométricas e o tratamento figural.

A seguir, fazemos uma discussão das diferentes fases que percorremos para realizar a experimentação: das hipóteses de pesquisa, dos resultados obtidos, dos referenciais teóricos e da metodologia utilizada e da seqüência didática, para podermos avaliar a nossa questão de pesquisa e fazermos algumas recomendações de ensino da trigonometria no triângulo retângulo e de pesquisas futuras correlatas ao tema.

4.5.1 As Hipóteses de pesquisa em relação aos resultados alcançados

Nossas hipóteses de pesquisas são preditivas. Nenhuma delas foi gerada por um teste diagnóstico com os alunos. As hipóteses surgiram com a preocupação de dar sentido ao processo de ensino-aprendizagem e no estudo dos referenciais teóricos. Pensamos que, para produzir uma aprendizagem significativa da trigonometria no triângulo retângulo, não podíamos partir da definição. Até esse ponto havia um caminho a ser percorrido.

Estudando os triângulos retângulos com ângulos notáveis, percebemos que é possível explorá-los por meio da reflexão, da rotação e da semelhança (ou homotetia). Descobrimos que **Duval (1994)** abordava essa exploração, tratando dos esquemas de apreensão figural e classificava essas apreensões em perceptiva, discursiva, seqüencial e operatória, discriminava os tipos de tratamentos figurais possíveis, e ainda fornecia elementos para exploração heurística das figuras, a partir de suas unidades figurais.

Acreditamos também, que a exploração heurística da figura fornece elementos interessantes para formular problemas em que os alunos se deparavam com situações que, se não fossem mobilizados os elementos figurais na solução dos problemas, o conhecimento que o aluno possuía, se fosse tratado apenas num nível discursivo, não seria suficiente para resolvê-los. Da necessidade de um novo conhecimento necessário para solucionar uma situação a partir do conhecimento antigo como ferramenta, é estabelecida a dialética entre a ferramenta e o objeto.

Apresentamos, a seguir, as nossas hipóteses de pesquisa, a fim de que possamos identificar o uso dos referenciais teóricos:

Produzir situações-problema que remetam aos tratamentos figurais que foram enfrentados na construção histórica desse conhecimento faz com que o aluno apreenda os conceitos como ferramentas implícitas para a solução desses problemas;

A manipulação e a observação das figuras geométricas podem fazer com que o aluno produza e apreenda as propriedades dos objetos representados;

Situações-problema cuja resolução envolve conceitos de geometria como isometria: rotação, reflexão e translação; paralelismo, perpendicularismo, etc, podem possibilitar uma mudança de ponto de vista do aluno sobre os problemas de trigonometria do triângulo retângulo e eventual minimização dos problemas de ensino-aprendizagem na trigonometria no triângulo retângulo;

A construção e obtenção de relações matemáticas envolvidas nessas figuras geométricas (que podem ser medidas ou calculadas) possibilitam a integração entre a geometria e a álgebra, produzindo significado para o aluno na trigonometria no triângulo retângulo.

Como podemos observar, todas as hipóteses se baseiam no tratamento figural e no seu papel no estudo dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo. Todas elas também possibilitam o uso da dialética ferramenta-objeto, pois exploram a construção e as propriedades dos elementos representados por meio de conhecimentos que o aluno já possui. Estas hipóteses representam, portanto, o caminho que devemos percorrer para a produção de nossa seqüência didática.

Conforme a conclusão da análise *a posteriori*, podemos notar que houve evolução conceitual dos alunos na trigonometria no triângulo retângulo. Além disso, os alunos recorreram ao tratamento figural e isso contribuiu para que fossem produzidas conjecturas a respeito das relações entre lados e ângulos nos triângulos retângulos (sobretudo quando envolviam ângulos notáveis). No entanto, durante a aplicação das atividades, notou-se que houve dificuldades em manipular os elementos figurais e as propriedades das figuras na identificação de um tratamento figural que permitisse elaborar uma estratégia eficaz para resolver os problemas.

Todas as nossas hipóteses, no entanto, pressupõem o fato de que o aprendiz manipulará o problema. Desse modo, é considerado que, necessariamente, a apreensão perceptiva proporciona a apreensão seqüencial e a apreensão operatória. Mas e se o aluno não manipular a figura? E se ele não perceber os elementos figurais para explorá-la? E se ele não conhecer as propriedades das figuras a serem exploradas (do triângulo eqüilátero e do quadrado, por exemplo)? E se ele não souber construir ou representar a figura pedida?

Procuramos, na análise *a priori*, prever esses comportamentos, mas percebemos que houve grande dificuldade na apreensão operatória do aluno durante a resolução das atividades, talvez gerada pela dificuldade na apreensão perceptiva. Observamos que, quando o professor provocava o debate das estratégias possíveis de solução, os alunos participavam, mas inicialmente poucos tinham realmente chegado a um tratamento figural que permitisse resolver o problema. A maior parte dos alunos limitava-se a entender o que alguns de seus colegas propunham durante a discussão. Faremos algumas considerações a respeito dessas dificuldades na estratégia de resolução dos problemas na discussão dos fundamentos teóricos e metodológicos e da seqüência didática.

Analisando as nossas hipóteses, nenhuma delas trata da questão do ambiente do experimento, do contexto em que essas situações ou essas figuras são construídas, ou seja, não foi enfatizada a apreensão seqüencial. Poderíamos conjecturar que um contexto concreto, ou interdisciplinar, um ambiente computacional ou experimental, possivelmente auxiliariam os alunos na apreensão perceptiva e talvez isso fosse transferido para a apreensão operatória. Acreditamos agora, que o ambiente e o contexto do experimento auxiliariam no estudo das relações trigonométricas e, conseqüente, na aprendizagem significativa para o aluno. Seria interessante inclusive, pensar na conjugação de ambientes e contextos e a sua influência na evolução conceitual. Em contrapartida, talvez o tempo gasto por uma seqüência didática que conjugue esses ambientes fosse mais longo e o assunto tivesse sua viabilidade pedagógica comprometida.

Aproveitamos, com base na preocupação no ambiente e no contexto em que as situações estão inseridas, para adicionar às nossas hipóteses de pesquisa uma nova hipótese, cuja qual nos fará reformular a nossa questão de pesquisa (conforme discutiremos no item 4.5.5):

> A articulação entre o ambiente e o contexto em que as situações-problema estão inseridas e que manipulam diferentes apreensões seqüenciais podem auxiliar na apreensão perceptiva e conseqüentemente na apreensão operatória.

Nesse sentido, faremos a sugestão de pesquisas (item 4.5.5) que explorem a manipulação e a combinação entre ambientes e contextos, na busca, não só da formação de figuras, mas na representação e manipulação de modelos teóricos que envolvam o estudo das relações trigonométricas.

4.5.2 Fundamentos teóricos e metodológicos e a seqüência didática

Do ponto de vista metodológico, nosso trabalho teve como ponto de apoio a Engenharia Didática **(Artigue, 1988)**. Nossos referenciais teóricos são a dialética ferramenta-objeto **(Douady, 1991)** e os Registros de Representação Semiótica, sobretudo, no que diz respeito ao tratamento figural.

A dialética ferramenta-objeto nos interessou para promover o “desequilíbrio” entre conhecimento anterior e conhecimento novo nas situações que elaboramos na seqüência didática. Acreditamos que essa dialética pode provocar no aluno a procura de alguma estratégia que resolva um problema proposto. Articulada a ela, procuramos elaborar situações que levassem à conversão de registro discursivo para o registro figural e, sobretudo, possibilitassem sua exploração heurística por parte do aluno, provocando as apreensões perceptiva, seqüencial, discursiva e operacional , por meio do tratamento figural.

A Engenharia didática nos possibilitou um estudo das situações propostas e dos elementos constituintes do problema, ajudando a prever as estratégias, erros e dificuldades dos alunos, por meio da análise a *priori*. A análise a *posteriori* nos revelou a limitação de nossa seqüência, sobretudo no momento em que o aluno tentava identificar a abordagem para a resolução de um problema. Esse fato ficou evidente no nosso relato de aplicação. É possível que essas dificuldades ocorram devido ao fato do resultado não ter sido confrontado com situações anteriores, cujas quais a exploração da figura seguida do tratamento figural eram pouco ou nada privilegiadas. A análise dos livros didáticos do Ensino Médio aponta, de forma muito rápida, para a ausência dessa exploração. Nesse sentido, é interessante saber até que ponto as abordagens tradicionais, tais como as produzidas pelos livros didáticos, limitam ou eliminam a exploração heurística de uma figura geométrica no ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo (e, por que não, do próprio ensino da geometria?).

Por outro lado, podemos conjecturar que, de alguma maneira, nossa seqüência poderia conter mais situações em que o aluno pudesse explorar as figuras geométricas e suas propriedades (eixo de simetria, segmentos notáveis, etc.). A falta de um trabalho anterior à aplicação da seqüência, como por exemplo, a aplicação de atividades que trabalhassem melhor a apreensão e o tratamento figural e as transformações geométricas também pode ter influenciado negativamente na abordagem dos problemas pelos alunos. Para a melhor exploração da apreensão perceptiva, elaboramos uma nova hipótese (apresentada no item 4.5.1):

> A articulação entre o ambiente e o contexto em que as situações-problema estão inseridas e que manipulam diferentes apreensões seqüenciais podem auxiliar na apreensão perceptiva e conseqüentemente na apreensão operatória.

Haveria, conseqüentemente, atividades introdutórias, conjugando diferentes ambientes e contextos. Por exemplo, o contexto de interdisciplinaridade com a Física e a trigonometria no triângulo retângulo num ambiente de laboratório de experimentos, para que fossem elaboradas situações em que os experimentos físicos (com espelho plano, por exemplo) favorecessem a representação dos alunos e a manipulação desses experimentos e de figuras ou modelos associados a esses experimentos (maquetes, modelos computacionais, etc). Acreditamos que a combinação entre o contexto físico e o ambiente experimental faria com que o aluno construísse e comparasse diferentes modelos de representação, trabalhando com diferentes apreensões seqüenciais. Isso provavelmente auxiliaria na apreensão perceptiva do aluno e talvez facilitaria as apreensões discursiva e, principalmente, a apreensão operatória.

É interessante que tenhamos um referencial teórico para definir qual é o papel do meio nas situações propostas para o aluno e como a interação entre o meio e o contexto poderiam influenciar na apreensão perceptiva do aluno. Pensamos que a Teoria das Situações, de Guy Brousseau, talvez trouxesse o aporte teórico necessário para a formulação dessas situações e o controle didático por parte do funcionamento da figura no meio proposto.

A seqüência didática por nós proposta ficaria como uma descontextualização das atividades introdutórias de manipulação de modelos em ambientes diferentes.

4.5.3 Análise dos resultados com relação aos Fundamentos teóricos e metodológicos

A metodologia de pesquisa por nós utilizada é a Engenharia Didática. Ela é composta pela análise epistemológica da trigonometria no triângulo retângulo e sua transformação para objeto de ensino, a análise a *priori* e a análise a *posteriori*.

Usamos na análise a *priori* os Registro de Representação Semiótica e os esquemas de apreensão figural e a dialética ferramenta-objeto para poder prever qual seria o comportamento dos alunos frente às situações-problema. Na análise *a posteriori*, fizemos o confronto com o que previmos na *análise a priori*. Para avaliarmos as estratégias e dificuldades dos alunos durante a experimentação, nos baseamos nas suas resolução e nas suas observações durante a discussão coletiva. Talvez fosse interessante ter dado um espaço nas atividades para que o aluno descrevesse as suas estratégias (alguns descreveram por conta própria) ou mesmo que fosse feito um questionário para analisar as concepções e dificuldades dos alunos: entendimento do texto, representação da figura, escolha de uma estratégia de resolução, etc. Isso talvez auxiliasse na análise a *posteriori,* dando mais respaldo para a análise das concepções e dificuldades, e, conseqüentemente, talvez para a análise da eficácia da nossa seqüência de ensino. Por outro lado, isso prolongaria consideravelmente o tempo de aplicação das atividades.

Os referenciais teóricos: a dialética ferramenta-objeto e os esquemas de apreensão figural contribuíram para a evolução dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo por parte dos alunos. Os alunos foram levados a mobilizar tratamentos figurais que promoveram a elaboração de conjecturas e o estudo das relações trigonométricas. Porém, chamou-nos a atenção, a dificuldade que houve na apreensão perceptiva durante a resolução dos problemas. Conjecturamos que esses problemas podem ter surgido porque não levamos em consideração o ambiente e o contexto em que a figura pode ser mais bem explorada na formulação das situações propostas. Seria interessante, portanto, pensar num referencial teórico que desse aporte ao ambiente em que as situações estão inseridas e sua diferença de funcionamento em função da mudança desses ambientes. Uma literatura que talvez nos fundamentasse nesse aspecto seria a Teoria das Situações, de Guy Brousseau. Talvez, essa contribuição, por levar em consideração o meio de funcionamento em que o pensamento dos alunos está inserido, trouxesse a elaboração de atividades que tivessem uma melhor apreensão seqüencial e perceptiva e essa melhora fosse transferida para a apreensão operatória, auxiliando o aluno na identificação de uma estratégia para a solução dos problemas.

4.5.4 Questão de pesquisa e sugestões para futuras pesquisas correlatas

As atividades que propusemos procuram utilizar materiais como a régua e o compasso. Não estão contidas situações que envolvam a construção ou a manipulação de materiais concretos: maquetes, representações em papel cartão etc, para o desenvolvimento das relações trigonométricas. Também não foi utilizado nenhum *software* para a resolução das tarefas ou comentários por parte do professor. **COSTA** (PUC-SP, 1997) desenvolveu uma pesquisa em que articulava o contexto experimental e o do computador e sua ordem. Seria interessante, porém, em uma pesquisa futura, testar a eficácia desses três tipos de recursos acima mencionados: régua e compasso (as construções geométricas no papel), materiais concretos (contexto experimental) e uso de *softwares* (contexto do computador) ou a articulação entre eles. Essas articulações que tratam da apreensão seqüencial podem ajudar numa melhor apreensão perceptiva e talvez operatória por parte do aluno.

Segundo os PCN, outro fator importante para a construção de situações na trigonometria é a possibilidade da interdisciplinaridade. Não incluímos esse tipo de situação nas atividades, mas procuramos dar condições dessas situações serem exploradas, desenvolvendo o ponto de vista das relações trigonométricas como projeções ortogonais e introduzindo elementos como a periodicidade e a amplitude. Existe uma possibilidade muito grande de um trabalho integrado, portanto, entre a trigonometria e a Física no 1º ano do Ensino Médio. Isso possivelmente auxiliaria não só a produção de sentido das relações trigonométricas, como também daria um contexto experimental bastante interessante e talvez construísse uma aprendizagem mais significativa para alguns tópicos de Física: projeção de vetores, situações com plano inclinado, lei da refração, movimento circular, movimento harmônico simples ondulatória, etc. Seria interessante saber até que ponto nossa proposta conseguiu minimizar as dificuldades com esses tópicos relacionados, bem como com o desenvolvimento das funções trigonométricas. Também seria interessante saber se uma proposta de integração entre a Física e a Matemática, por exemplo, traria uma aprendizagem significativa para as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Também seria interessante saber se o ambiente e o contexto promovem uma melhor apreensão seqüencial e se, a partir dessa apreensão, há uma transferência para as apreensões perceptiva discursiva e operatória por parte do aluno.

4.5.5 Questão de pesquisa e sugestões para o ensino decorrentes da conclusão

Nossa questão de pesquisa surgiu com o estudo de uma abordagem que fosse mais significativa para processo de ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo. Estudando as transformações geométricas no plano: a reflexão, a rotação e a homotetia e pesquisando os esquemas de apreensão figural **(Duval, 1994)**, vimos que seria interessante pensar numa seqüência de ensino que contemplasse a conjugação desses elementos.

Achamos interessante optar pela Engenharia Didática como metodologia por entender que a análise a *priori* nos auxiliaria na elaboração de situações que promovessem efetivamente o desenvolvimento dos conceitos e que auxiliasse no controle dessas situações. Soma-se o fato de que poderíamos confrontar a análise a *priori* com a análise a *posteriori* para entendermos os erros e dificuldades dos alunos, a fim de validar a pesquisa.

Com relação à viabilidade da aplicação das atividades em sala de aula, observamos que o número de horas gasto nessa seqüência condiz com o que é comumente planejado para o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. Foram utilizadas entre a solução das atividades e os comentários, no total, 15 aulas, o que corresponderia a três semanas com cinco aulas cada. Além disso, procuramos reutilizar conhecimentos anteriores como a congruência entre triângulos e a semelhança e trabalhamos com o cálculo do comprimento da circunferência, possibilitando produzir um melhor significado para o número π e para a relação entre ângulo central e arco, fato importante para o desenvolvimento das funções trigonométricas de números reais.

No entanto, observando os relatos de aplicação das atividades contidos na análise *a posteriori*, ficou evidenciado que houve dificuldade na apreensão perceptiva das situações propostas (o aluno não identificava a estratégia de solução do problema proposto), gerando, conseqüentemente, ineficiência na apreensão operatória. Acreditamos que, para amenizar essas dificuldades, seria interessante aliar a essa seqüência um contexto e um ambiente que ajudassem na exploração dessas situações. Talvez a articulação entre contexto e ambiente produzisse uma apreensão seqüencial que facilitasse na apreensão perceptiva e operatória. Poderiam ser construídas maquetes que representassem figuras planas ou espaciais ou poderia ser utilizado o ambiente computacional para fazer com que o aluno interagisse mais com problemas que envolvam o tratamento figural e o esquema de apreensão perceptiva em situações concretas. Isso poderia promover as apreensões discursiva, seqüencial e operacional. Essas contribuições eventualmente auxiliariam na aprendizagem significativa para o aluno.

Nesse sentido, pensamos que a nossa questão de pesquisa poderia ser reformulada, a fim de possibilitar uma melhor eficácia nos esquemas de apreensão figural, especialmente as apreensões perceptiva e operatória: *Uma seqüência de ensino enfatizando as construções e transformações geométricas articuladas ao tratamento figural e com a conjugação entre diferentes ambientes e contextos, proporciona uma apreensão significativa para o aluno de 1º ano do Ensino Médio dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo.*

Deixamos, com essa reformulação, uma proposta para uma futura questão de pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD**,** Saddo Ag. *Fundamentos de Didática da Matemática*, São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática/PUC, 2000.

ARTIGUE**,** Michèle. Ingénierie Didactique, *Revista Recherche en Didactique des Mathématiques* (RDM), France: Ed. La Pensée Sauvage, vol 9. nº 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE**,** Michèle. Epistémologie et Didactique, *Revista Recherche en Didactique des Mathématiques* (RDM), France: Ed. La Pensée Sauvage, v. 10. n. 2, 1990.

BIANCHINI, Edvaldo; PACCOLA, Herval, *Curso de Matemática*, Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2000.

BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática Atual,* 8ª série. São Paulo: Atual, 1996.

COSTA**,** Nielce Meneguelo Lobo. *Funções Seno e Cosseno: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador.* São Paulo, 1997. 179 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

DANTAS**,** Martha Maria de Souza et alii. *As transformações geométricas e o ensino de geometria*, 8ª série. Bahia: EDUFBA/ UFBA, 1996.

DANTAS**,** Martha Maria de Souza et alii. *As transformações geométricas e o ensino de geometria*, 1º ano do Ensino Médio. Bahia: EDUFBA/ UFBA, 1998.

DELACHET**,** André. *A análise matemática*. Trad. Gita K. Ghinzberg. São Paulo: coleção Saber Atual, 1967.

DOUADY**,** Régine. Jeux de Cadres et Dialectique Outil – Object. *Revista Recherche en Didactique des Mathématiques* (RDM), France: Ed. La Pensée Sauvage, v. 7, n. 2, 1991.

DUVAL**,** Raymond. Les diferents fonctionnements d´une figure dans une démarche géométrique. *Reperes–IREM (Institute des Recherche en Mathématiques)*, France, n. 17, p. 121-137, octobre 1994.

________ - *Semiosis et Pensée Humaine: Registres sémiotiques et apprendissages intellectuels.* Paris: Peter Lang S.A., p. 173 –207; 209 -249, 1995.

EMBSE, C. V., ENGEBRETSEN, A. Using Interactive-Geometry Software for the Right Angle Trigonometry. *The Mathematics Teacher*, USA, v. 89, n. 7, p. 602 - 604, octobrer 1996.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 1995.

GARBI, Gilberto Geraldo. *O Romance das Equações Algébricas: A História da Álgebra.* São Paulo: Makron Books, 1997.

HARUNA, Nancy Cury Andraus. *Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.* São Paulo, 2000. 235f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Matemática na Medida Certa*, 8ª série. São Paulo: Scipione, 1995.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura. *Construindo Conceitos Básicos da Trigonometria no Triângulo Retângulo: Uma proposta a partir da manipulação de modelos.* São Paulo, 2000. 204f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MABUCCI, Setsuko Takara. *Transformações Geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores.* São Paulo, 2000. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática na Escola de 2º grau, 1º ano de Ensino médio. São Paulo: Atual, 1996.

MANRIQUE, Ana Lúcia. *Processo de Formação de Professores em Geometria: Mudanças em Concepções e Práticas.* São Paulo, 2003. 170 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MENDES, Iran Abreu. *Ensino de trigonometria através de atividades históricas.* Rio Grande do Norte, 1997. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. *Matemática: Idéias e desafios*, 8ª série. São Paulo: Saraiva, 1996.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC), *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).* Brasília: Secretaria da Educação Fundamental, 1998.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC), *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)*. Brasília: Secretaria da Educação Fundamental, 2003.

NERY, Chico; TROTA, Fernando. *Matemática para o Ensino Médio*, volume único. São Paulo: Saraiva, 2001.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática*, 1º grau, 4ª Edição. São Paulo: Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), 1991.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO, *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática*; 2º grau, 3ª Edição. São Paulo: Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), 1992.

SUIVI SCIENTIFIQUE: CLASSE DE 3ÈME, *Bulletin Inter – IREM – Premier Cycle*, France, p. 7 – 33; p. 150 - 193, 1988-1989.

SPINELLI, Walter, SOUZA, Maria Helena. *Matemática,* 8ª série. São Paulo: Saraiva, 2001.

SPINELLI, Walter, SOUZA, Maria Helena. *Matemática*, 1º ano do Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 1996.

SHULTZ, Harrys; BONSANGUE, Marty. Time for Trigonometry. *The Mathematics Teacher*, USA, v. 88, n. 5, p. 393 - 410 , may 1995.

STRUIK**,** Dirk Jan. *História Concisa das Matemáticas.* Trad. de J. C. Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.