

APARECIDO DOS SANTOS

**O CONCEITO DE FRAÇÃO EM SEUS DIFERENTES
SIGNIFICADOS: UM ESTUDO DIAGNÓSTICO JUNTO A
PROFESSORES QUE ATUAM NO ENSINO FUNDAMENTAL**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
SÃO PAULO
2005**

APARECIDO DOS SANTOS

**O CONCEITO DE FRAÇÃO EM SEUS DIFERENTES
SIGNIFICADOS: UM ESTUDO DIAGNÓSTICO JUNTO A
PROFESSORES QUE ATUAM NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE **em Educação Matemática**, sob orientação da **Prof^a.Dr. Sandra Maria Pinto Magina**.

**PUC/SP
SÃO PAULO
2005**

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

ASSINATURA: _____ **LOCAL E DATA:** _____

DEDICATÓRIA

**A minha mãe, Rosa dos Santos,
ao meu querido pai,
Manoel Rodrigues (in memoriam)
e a toda minha família pelo apoio
e compreensão.**

AGRADECIMENTOS

É com grande satisfação e entusiasmo que chego ao final dessa pesquisa. Nunca imaginei que o ato de escrever esse simples agradecimento me fizesse refletir e reviver momentos de intensa alegria, que só foram possíveis, graças a vários amigos com quem compartilhei toda minha trajetória. Agora chegou a hora de deixar registrada toda minha gratidão a essas pessoas.

À professora Dra Sandra Maria Pinto Magina, pelas incansáveis orientações, dedicação, companheirismo e, sobretudo pelo seu acolhimento. Seu apoio foi sem dúvida nenhuma de fundamental importância para realização deste estudo. A você a minha gratidão.

À professora Dra Tânia Campos, pelas valiosas sugestões, comentários, incentivo e pelo privilégio de poder termos compartilhado ricos momentos de discussão durante as reuniões do grupo.

À professora Maria do Carmo Domiti, por seus apontamentos e por suas sugestões, que muito contribui para evolução desta dissertação.

À Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pelo auxílio concedido (bolsa mestrado), que sem dúvida alguma possibilitou o término deste trabalho.

A todos os meus companheiros de trabalho e amigos da Escola e Faculdade Santa Izildinha, pelo apoio e incentivo, principalmente a minha amiga Marilda, companheira de todas as horas.

Aos meus amigos de mestrado Leonel, Fábio, Cristiane, Alécio, Wilson, Angélica, Raquel e em especial a minha queridíssima amiga Vera Lúcia.

Às minhas amigas de trabalho Ana Maria, Lucy, Cleide, Sidnea e Marina pelo incentivo e pela compreensão.

À direção e professores da Escola Adhemar Antonio Prado, pela torcida e vibração positiva.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente auxiliaram na elaboração e desenvolvimento deste trabalho.

E finalmente, agradeço a Deus por ter me dado força, saúde, garra e perseverança para que eu pudesse conquistar mais essa vitória.

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo compreender o estado - concepções - em que se encontra o conceito de fração, para professores que atuam no Ensino Fundamental. O estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: *"é possível reconhecer as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas) do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração?"* Se sim, quais? Se não, pôr que? Para tanto, realizamos um estudo diagnóstico com 67 professores do Ensino Fundamental, distribuídos em sete escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. A pesquisa de campo constou de dois momentos: no primeiro solicitamos aos professores a elaboração de seis problemas, envolvendo o conceito de fração, e no segundo momento, pedimos para que resolvessem os próprios problemas elaborados. Analisamos os dados também dentro dos dois momentos: um voltado para análise dos enunciados dos problemas elaborados e o outro, para as estratégias de resolução destes problemas. Os resultados obtidos mostram uma tendência, tanto entre os professores polivalentes, como especialistas, em valorizar a fração com o significado operador multiplicativo na elaboração dos problemas. Quanto à resolução dos problemas há uma valorização dos aspectos procedimentais - aplicação de um conjunto de técnicas e regras (algoritmo) - nos três grupos. Estas evidências levam-nos a concluir que não existe diferença significativa entre a concepção dos professores polivalentes e especialistas, seja na elaboração, ou na resolução de problemas de fração em seus diferentes significados. É provável, que as concepções desses professores carreguem fortes influência daquelas construídas na Educação Básica.

Palavras-chaves: fração, significados, problemas, concepção, Ensino Fundamental, professores.

ABSTRACT

The aim of this work was to understand the state – conceptions – in which lies the fraction concept of Primary Education teachers. This research intended to answer the following question: is it possible to recognise the conceptions of teachers who teach to the First and Second Stage (Primary teachers) and Third Stage (Math specialists) of Primary Education in relation to the fraction's concept? In this case, we carried out a diagnostic analysis with 67 Primary Education teachers, distributed in 7 State-public schools of São Paulo City. This field research was divided into two stages: primary, the teachers made up 6 fraction's problems by themselves and, finally, they had to solve their own problems. The data collecting procedures provided us two different analysis based on the problem principles and their solving strategies. The results showed a trend of fraction's worth in relation to the multiplying operator meaning in the problem making between Primary and Math teachers. Data already pointed that there is a procedure aspect worth – set of techniques and rules applying (algorithm) – in the solving problem among the mentioned groups. These evidences lead us to conclude that there is no relevant difference between Primary and Math teachers conceptions in relation to the making-solving problems and their different meanings. Considering the characteristics and specificity of its formation, it's possible that the fraction's concept becomes explicit in the making-solving problems carrying noticeable influences of those ones built in the Primary Education.

Keywords: fraction, meanings, problems, conception, Primary Education, teachers.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	11
---------------------------	-----------

CAPÍTULO 1 – A PESQUISA: UM PLANO EM PERSPECTIVA

1.1. Objetivos	16
1.2. Área temática e inserção do estudo	17
1.3. Justificativa e problema de pesquisa	18
1.4. Pressupostos básicos	24
1.5. Metodologia da pesquisa	25
1.6. Fatores qualitativos de análise	26

CAPÍTULO 2- PRINCÍPIOS DA PSICOLOGIA COGNITIVA PARA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

2.1. Introdução	28
2.2. Vergnaud – Teoria dos Campos Conceituais	28
2.3. Nunes.....	42
2.4. Frações e seus cinco significados	48
2.5. Razão, porcentagem e probabilidade.....	54

CAPÍTULO 3 – FRAÇÃO: NA MATEMÁTICA, NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA

3.1. Introdução	59
3.2. Fração na matemática	59
3.2.1. Na história	60

3.2.2. O objeto matemático	65
3.3. Fração na educação matemática	72
3.3.1. Estudos correlatos	76
3.4. Fração na escola	90
3.4.1. Fração e os Parâmetros Curriculares Nacionais	90

CAPÍTULO 4 – A FORMAÇÃO DOCENTE: PROBLEMAS, PERSPECTIVAS E DESAFIOS

4.1. Introdução	96
4.2. A profissão docente	97
4.3. A legislação e a formação docente – suporte legal	98
4.4. A definição de um modelo de competência docente	102
4.5. O professor e o saber matemático	110
4.6. Reflexões finais sobre o capítulo	116

CAPÍTULO 5 – A PESQUISA: UM PLANO EM AÇÃO

5.1. Introdução	118
5.2. Discussão Teórico-Metodológica	118
5.3. Universo do Estudo	121
5.4. Fase 1: Estudo Piloto	122
5.5. Fase 2: Estudo Principal	123
5.5.1. Sujeitos	123
5.5.2. Material Utilizado	125
5.5.3. Descrição do Instrumento empregado para Coleta de Dados	126
5.5.4. Procedimentos	126

CAPÍTULO 6 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

6.1. Introdução	129
6.2. Perfil dos professores	130
6.2.1. Professores polivalentes	131
6.2.2. Professores especialistas	132
6.3. Primeira etapa de análise: da elaboração	134
6.3.1. Enfoque 1: dos problemas elaborados	135
6.3.2. Enfoque 2: significados	145
6.3.3. Enfoque 3: variáveis	150
6.3.4. Enfoque 4: os invariantes	156
6.3.5. Síntese dos resultados da 1ª etapa de análise	157
6.4. Segunda etapa de análise: resolução	159
6.4.1. Tipos de resolução	159
6.4.2. Distribuição das categorias por significados	167
6.4.3. As estratégias de resolução presentes na categoria algoritmo	169
6.5. A situação parte-todo e a quociente	174
6.6. Síntese dos principais resultados da 2ª etapa de análise	178

CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO

7.1. Introdução	180
7.2. Síntese dos principais resultados	181
7.3. Respondendo à questão de pesquisa	186
7.4. Sugestões para futuras pesquisas	190

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	192
---	------------

APRESENTAÇÃO

Em nossa trajetória profissional, como professor de Matemática na rede pública estadual, ensinamos Matemática para alunos do Ensino Fundamental e Médio há 20 anos. Concomitante, com a docência, tivemos a oportunidade de participar de alguns projetos que traziam em seu bojo, como questão central, a formação do professor. Muitas inquietações, reflexões foram desencadeadas ao longo dessa trajetória e uma delas diz respeito à própria formação do professor para ensinar Matemática.

À luz dessa experiência construída, o desejo de aperfeiçoar e expandir nossos conhecimentos para exercer a docência e o latente desejo de realizar uma investigação especializada no campo da Educação Matemática, foram os fatores motivadores para nossa inserção no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Assim, integramo-nos ao grupo de pesquisa “Conceitos Matemáticos: formação e evolução”, especialmente, no projeto de pesquisa iniciado sob a coordenação das professoras Sandra Magina e Tânia Campos, denominado Projeto Fração, que contempla duas perspectivas de pesquisa: a do ensino e da aprendizagem das frações. Objeto matemático que escolhemos para nossa reflexão a respeito da formação do professor que ensina Matemática.

Nesse contexto, o presente estudo tem como objetivo investigar as concepções dos professores que atuam no Ensino Fundamental em relação ao conceito de número racional em sua representação fracionária – **fração**. Em outras palavras, nossa pesquisa é voltada à formação do professor do Ensino

Fundamental, com a preocupação central de compreender como se encontra o conceito de fração para professores desse nível do ensino escolar.

O trabalho com as frações inicia-se no 2º ciclo do Ensino Fundamental (mais precisamente na 3ª série), tendo como objetivo principal levar o aluno a constatar que os números naturais, já conhecidos no ciclo anterior, são insuficientes para resolução de determinadas situações. Esse processo não envolve apenas a aplicação de um conjunto de técnicas bem adaptadas ao ensino da fração, mas sim, demanda de uma clara compreensão de que o ensino e a aprendizagem da fração supõem algumas rupturas com as idéias já construídas pelos alunos a respeito dos números naturais. Essa ruptura remete-nos à reflexão de que o ensino das frações demanda tempo e uma abordagem adequada, pois os alunos, quando raciocinam sobre as frações como se fossem números naturais, costumam enfrentar várias dificuldades e cometer diversos equívocos.

Algumas dessas dificuldades e equívocos são apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Dentre as dificuldades, destacamos:

- conceber que a representação $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ é um número e não apenas uma superposição de dois números naturais, isto é, que esse novo número representa o quociente entre dois números inteiros quaisquer, sendo o segundo não nulo;
- entender que cada fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, ...), isto é, uma determinada quantidade ou medida no campo dos números naturais, até então, era representada por um único número, e agora, no campo das frações é preciso conceber infinitas representações para uma determinada quantidade ou medida;

- ordenar as frações, pois os alunos fixam no campo dos números naturais de que os números são construídos, segundo uma ordem na qual o sucessor de um número é ele próprio acrescido de um e que, portanto, os números podem ser dispostos, segundo uma ordem constante. Essa idéia terá de ser rompida, pois, na comparação de dois números naturais dizemos que, por exemplo: $3 < 4$, já na comparação de duas frações dizemos que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$;
- por fim, no campo dos números naturais é possível falar em sucessor e antecessor, constata-se, então, que essa idéia não faz mais sentido, visto que entre duas frações quaisquer é sempre possível encontrar outra fração.

Na presente apresentação, pontuamos todas essas dificuldades na perspectiva de alegar que várias delas podem estar relacionadas ao não entendimento de que em cada conjunto numérico a noção de número é, na maioria das vezes, diferente daquela do conjunto anterior, sobretudo se esse número é apresentado em diferentes situações.

Portanto, uma abordagem do conceito de fração em diferentes contextos e em diversas situações, bem como uma maior valorização dos aspectos conceituais que dos operacionais poderia minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de tão complexo conceito.

Mas, nem sempre, fazer as escolhas adequadas configura-se em uma simples tarefa, quando o conteúdo a ser ensinado é fração. Isto porque se de um lado estão as crenças, as convicções e o conhecimento matemático do professor; por um outro, está a complexidade do conceito conforme apontam diversos

pesquisadores, como Behr et al. (1992) que afirmam existir entre os pesquisadores e educadores matemáticos um consenso de que aprender as noções envolvendo os números racionais (fração) continua sendo um sério obstáculo na aprendizagem dos alunos.

Estas constatações mostram que os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem das frações são extremamente amplos e devem ser atacados por diversos ângulos. Neste universo, a proposta do nosso trabalho limitar-se-á à semântica das frações, isto é, às frações e seus diferentes significados em diversos contextos, bem como as variáveis envolvidas em cada contexto.

Finalmente, para o desenvolvimento do presente estudo as idéias serão desencadeadas ao longo de sete capítulos, a saber:

No primeiro capítulo, denominado “A pesquisa: um plano em perspectiva” apresentaremos nossos objetivos, o problema de pesquisa, justificativa, alguns pressupostos básicos, algo sobre a metodologia utilizada e um breve relato a respeito dos fatores qualitativos da análise.

No capítulo II, trataremos da teoria que sustenta nosso estudo, fazendo uma descrição sobre a formação do conceito à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1998). Discutiremos as idéias teóricas de Nunes; Bryant (1997); Nunes et al. (2001) e sobre os resultados de seus estudos que ancoram nossa investigação.

No capítulo III, será apresentado o objeto matemático – **fração** – do presente estudo sob três aspectos: o da Matemática - enfocando seu surgimento histórico e sua construção formal (definição e propriedades) – o da Educação Matemática, momento em que focalizaremos estudos relevantes sobre o ensino e

a aprendizagem das frações – o da escola – enfocando as recomendações feitas pelos PCN.

No capítulo IV, serão mostradas algumas reflexões sobre a formação do professor, enfocando: o suporte legal – a legislação – problemas e desafios relacionados à sua formação (inicial ou continuada) frente a uma nova ordem econômica – social, bem como versaremos sobre a formação do professor e os saberes matemáticos necessários para sua atuação.

No capítulo V, trataremos da metodologia utilizada na pesquisa, descrevendo o universo de estudo e os procedimentos adotados para a coleta de dados.

No capítulo VI, faremos à apresentação e a análise dos resultados coordenando dois enfoques: o quantitativo e o qualitativo.

Por fim, no capítulo VII, as conclusões, apoiadas nas discussões dos resultados das análises realizadas no capítulo anterior que constam de uma sinopse do quadro teórico utilizado, comentários e reflexão sobre a pesquisa, de uma síntese dos principais resultados, resgate da questão de pesquisa e sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1

A PESQUISA: UM PLANO EM PERSPECTIVA

1.1. OBJETIVOS

Esta pesquisa é um estudo diagnóstico, com professores que atuam no Ensino Fundamental, cuja preocupação central é compreender o estado (suas concepções) em que se encontra o conceito de fração para professores que atuam nessa etapa do ensino escolar. Subjacente a esta preocupação central, traçamos alguns objetivos de nossa investigação.

- fazer um levantamento dos trabalhos brasileiros que têm investigado o conhecimento do professor sobre um tópico da Matemática e ou o desenvolvimento de seu pensamento no bojo de um determinado campo conceitual;
- investigar o que pensam os professores, crenças e valores próprios em relação ao conceito de fração e seus diferentes significados, de modo a perceber suas possibilidades em caminhar tal aprendizagem por parte dos alunos;
- reconhecer e discutir as dificuldades dos professores quando lhes é solicitado que reflitam dentro do contexto dos números racionais – fração, tanto do ponto de vista do conhecimento matemático como da Educação Matemática e, ainda, a partir de questões que emergem da realidade do educando;

- contribuir para elaboração de um estudo teórico – prático no âmbito da formação de professores (de Matemática);
- iniciar um processo contínuo, por meio do diálogo com os professores do Ensino Fundamental, que tenha como meta identificar processos heurísticos fundamentais à construção de noções matemáticas.

1.2. ÁREA TEMÁTICA E INSERÇÃO DO ESTUDO

O tema do estudo está inserido na linha de pesquisa “Conceitos matemáticos: formação e evolução”, está voltado para à formação do professor, especialmente, àquele que ensina Matemática no Ensino Fundamental.

Nessa perspectiva, cabe destacar que este estudo é parte integrante de um projeto de pesquisa desenvolvido dentro de um projeto mais amplo, que envolve a cooperação entre Oxford Brookes University, sob a coordenação da professora Terezinha Nunes e o Centro das Ciências Exatas Tecnológicas PUC – SP, sob a coordenação das professoras Sandra Magina e Tânia Campos.

O projeto tem por objetivo investigar a formação e o desenvolvimento do conceito de fração no Ensino Fundamental, tanto do ponto de vista de seu ensino como do ponto de vista de sua aprendizagem. Portanto, os sujeitos de investigação do projeto serão, tanto professores como alunos, tendo como premissa básica dois eixos de estudo, isto é, duas fases: o diagnóstico e a intervenção.

Nesse contexto, os estudos da primeira fase estão sendo desenvolvidos. No que se refere à aprendizagem, Moutinho (dissertação em andamento) propõe investigar o conceito de fração em alunos de 4ª série (2º ciclo) e 8ª série (4º ciclo)

com o objetivo de comparar o desempenho do aluno que está, praticamente, no início do ensino de fração com aqueles que estão concluindo o Ensino Fundamental e que, teoricamente, já deveriam ter se apropriado desse conceito.

Concomitantemente, Velumes (dissertação em andamento) propõe realizar investigação análoga à de Moutinho com alunos de 5ª e 6ª séries (3º ciclo), tendo como objetivo diagnosticar a competência desses alunos para lidar com situações envolvendo frações.

O estudo de Rodrigues (dissertação em andamento) foca sua atenção no Ensino Médio. Por fim, a pesquisa de Damico (tese em andamento) volta-se ao nível Superior, para investigar as concepções e as competências dos alunos iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática e alunos concluintes, muitos dos quais já atuam em sala de aula.

A primeira fase do projeto será completada com nosso estudo, desenvolvido com professores que atuam no Ensino Fundamental (1º, 2º, 3º ciclos), momento em que serão analisados os problemas elaborados e resolvidos, por professores, envolvendo o conceito de fração.

1.3. JUSTIFICATIVA E PROBLEMA DE PESQUISA

Com o ensino e a aprendizagem das frações as coisas parecem que não vão bem. De acordo com as pesquisas recentes realizadas por Silva (1997); Campos (1999); Bezerra (2002); Nunes (2003) têm evidenciado em suas conclusões diversas dificuldades em relação ao conceito de fração, tanto do ponto de vista de seu ensino como em relação a sua aprendizagem.

As dificuldades com a aprendizagem podem ser constatadas na análise do desempenho apresentado pelos alunos das 4ª e 5ª séries do Ensino Fundamental, em duas questões propostas pelo Sistema Nacional de Avaliação Básica (Saeb - 2001) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp - 1998), respectivamente. Desse modo, a questão abaixo foi retirada do último relatório divulgado pelo Saresp (1988) em relação a um teste de Matemática aplicado em alunos da 5ª série do Ensino Fundamental.

Das figuras abaixo, quais representam frações equivalentes a $\frac{1}{4}$?

Fonte: Saresp: Questão 10, p.35, 1988.

Figura 1: Representação de frações equivalentes no significado parte-todo.

Embora se trate de uma questão semelhante àquelas com frequência apresentadas em livros didáticos e em atividades escolares, o índice de respostas corretas para essa questão foi de apenas 26%. O baixo índice de acerto corrobora com nossa assertiva de que os alunos encontram grande dificuldade para trabalhar com as representações fracionárias. Na análise da referida questão, o relatório do Saresp (1988) pontua que era esperada uma atuação bem melhor por parte dos alunos, levantando como hipótese para essa má atuação o não domínio, por parte destes, do conceito de frações equivalentes.

A segunda questão a ser apresentada faz parte da avaliação realizada pelo Saeb (2001, p.29), com alunos da 4ª série do Ensino Fundamental. A questão foi a seguinte:

“Para fazer uma horta, Marcelo dividiu um terreno em sete partes iguais. Em cada uma das partes, ele plantará um tipo de semente. Que fração representará cada uma das partes dessa horta”?

Neste item, os conceitos requeridos estão ligados ao reconhecimento das partes de um todo, isto é, $\frac{1}{7}$. Provavelmente, não é uma fração que nunca tenha aparecido em situações-problema de sala de aula; no entanto, apenas 35% dos alunos acertaram a questão, o que é um indício que a maioria deles não aprendeu os conceitos necessários para resolução da situação, especialmente, os que se referem à relação parte-todo.

As evidências relatadas apontam para a necessidade de se construir um método de ensino que de fato possibilite ao aluno a plena compreensão do conceito de fração.

No entanto, o que vem se observando em relação ao ensino é uma ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos e uma forte tendência para introduzir o conceito de fração, apenas a partir da relação parte-todo. Campos et al. (Apud Nunes, 1996, p.191) afirmam que:

Um método de ensino... simplesmente encorajam os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado desse novo tipo de número.

Geralmente, esse procedimento de ensino recorre às tradicionais situações das divisões de um chocolate ou de uma pizza, em partes iguais, em que a fração

representa a “superposição” de dois números inteiros, isto é, o número total de partes é o denominador e as partes pintadas é o numerador da fração.

Este procedimento, porém, pode ser limitado, pois compreender a fração como parte ou pedaços de um todo e utilizar o procedimento da dupla contagem pode, por exemplo, dar conta de uma situação na qual a fração $\frac{2}{3}$ represente um chocolate dividido em três partes iguais e duas foram tomadas, porém, não é tão simples a compreensão da fração $\frac{4}{3}$ nesse contexto.

De todo modo, existe uma discussão sobre o uso e o ensino das frações. Há estudos, como o de Rodogoff (citado por Clementes, 1998), que afirmam que o conhecimento de fração não é algo natural e torna-se pouco importante o seu uso na sala de aula, sendo necessário somente para estudo de mais Matemática.

Discordamos dessa idéia, pois acreditamos assim como Behr et al (1983), que o conceito de fração é uma das mais complexas e importantes idéias matemáticas e que o seu ensino e aprendizagem envolvem três aspectos:

O primeiro é o prático, isto é, as frações, em suas diferentes representações, surgem, com frequência em diversas situações relacionadas à expressão de medida e de quantidades. Este fato evidencia a necessidade da extensão do conjunto dos números naturais.

O segundo aspecto refere-se a uma perspectiva do ponto de vista psicológico, ou seja, o trabalho com as frações surge como uma oportunidade privilegiada para alavancar e expandir estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual.

O terceiro aspecto diz respeito à perspectiva da Matemática, pois serão justamente os primeiros estudos com as frações que fundamentarão idéias

matemáticas mais complexas como, por exemplo, as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino de Matemática.

Em que pesem todas as considerações feitas até aqui a respeito do ensino e aprendizagem das frações, acreditamos que uma abordagem desse conceito em diferentes contextos e em diversas situações, bem como uma valorização mais os aspectos conceituais do que dos operatórios, poderiam minimizar, de fato, as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem desse conceito e tornar seu ensino mais eficiente. Nessa perspectiva, o papel do professor é imprescindível, pois cabe a ele a cuidadosa escolha e adequação das situações que dão significado ao conhecimento.

Posto isto, um dos pontos importantes apontados nos PCN é o ensino centrado no aluno, no sentido de um ensino que leve o aluno a construir seu conhecimento a partir de relações próprias, o que nos remete à idéia de uma mudança de paradigma educacional, pois passa de um ensino expositivo, centrado na capacidade do professor de explicar o conteúdo proposto, para um ensino construtivista, centrado na capacidade do aluno entender, reconstruindo um determinado conteúdo.

Dessa forma, seja o professor polivalente ou especialista, o que ele precisa saber para ensinar não é equivalente ao que seu aluno vai aprender, são conhecimentos mais amplos, tanto no que se referem ao nível de profundidade quanto ao tipo de saber.

Portanto, além dos conteúdos definidos para diferentes níveis de escolaridade, nos quais o professor atuará, sua formação deverá ir além desses conteúdos, incluindo conhecimentos necessariamente a ele articulados, que compõe um campo de aplicação e aprofundamento da área.

Para desempenhar seu papel de mediador entre o saber matemático e o aluno, o professor precisa de um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção da Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Shulman (1986) chama a atenção para a necessidade de o professor conhecer muito bem os conteúdos que ensina, não do mesmo modo que o cientista, mas o suficiente para poder traçar caminhos para torná-los compreensíveis e significativos.

Tornar o saber acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado e aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico, geralmente, são difíceis de serem comunicados diretamente aos alunos. Esta consideração, segundo os PCN, implica rever a idéia que persiste na escola de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. Admitir essa idéia significa refletir sobre a concepção do professor a respeito da Matemática: suas crenças e valores próprios.

Salientamos que o termo “concepção” empregado em nosso estudo tem o mesmo sentido da definição atribuída por Thompson, citado por Cury (1999, p. 38):

A concepção de um professor sobre a natureza da matemática pode ser vista como as crenças conscientes ou subconscientes daquele professor, os conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências relacionadas com a disciplina. Essas crenças, conceitos, opiniões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia matemática, embora para alguns professores elas podem não estar desenvolvidas e articuladas em uma filosofia coerente.

Diante das questões aqui apresentadas em relação ao conceito de fração e da necessidade de se refletir sobre as concepções do professor que ensina Matemática, é que justificamos a realização desta pesquisa.

Estamos partindo da hipótese de que o desempenho dos alunos mantém estreita relação com as concepções de seus professores e que o modo pelo qual a fração será introduzida, bem como o trabalho com seus diferentes significados dependerá, sobremaneira, das concepções do professor. Apoiados nessa hipótese lançamos mão de nossa questão de pesquisa:

“É possível reconhecer as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas) do Ensino Fundamental no que diz respeito ao conceito de fração em seus diferentes significados?”

Decorrem dessa questão principal, duas outras indagações:

“Se sim, quais são?”

“Se não, por quê?”

1.4. PRESSUPOSTOS BÁSICOS

Nossa pesquisa está ancorada, por um lado, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1998) e nas idéias teóricas de Nunes; Bryant (1997); Nunes et. al. (2001), no que diz respeito à formação do conceito e, por outro lado, nas idéias de Nóvoa (1992), Shulman (1992) e Perrenoud (1999) que se referem à formação do professor.

Para Vergnaud (1999; 1988), os conhecimentos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações e cada situação, normalmente, não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito e, portanto, para a formação de um conceito é necessário um conjunto de situações, de invariantes e

de representação. Nunes (1999), apoiada na Teoria dos Campos Conceituais e nos estudos de Kieran (1988; 1994), discute teoricamente que cinco significados são centrais para a formação do conceito de fração.

Perrenoud (1999) refere-se ao conhecimento do professor como conhecimento em ação, ao mesmo tempo, afirma que as competências profissionais constroem-se não apenas na formação, mas também na ação diária de um professor. Nóvoa (1992) discute que a formação do professor se dá em duas dimensões: na individual e na coletiva. Shulman (1992) destaca que cada área do conhecimento tem uma especificidade própria, o que justifica a necessidade de se estudar o conhecimento do professor, tendo em vista a disciplina que se ensina.

1.5. METODOLOGIA DA PESQUISA

Nosso propósito é o de trabalhar sobre os dados obtidos a partir de atividades produzidas por professores. A coleta de dados foi realizada durante o segundo semestre de 2003, com 67 professores que atuavam em sete escolas públicas, na zona leste, da cidade de São Paulo.

Os procedimentos adotados foram divididos em duas fases: inicialmente, solicitamos a esses professores a elaboração de seis problemas envolvendo o conceito de fração e, posteriormente, pedimos para que resolvessem os próprios problemas que haviam elaborado anteriormente. A estratégia adotada para a coleta de dados possibilitou-nos dois momentos de análise: um no qual analisamos os enunciados dos problemas elaborados e o outro em que analisamos as estratégias empregadas na resolução dos problemas.

O tempo decorrido entre o momento de elaboração e o de resolução dos próprios problemas elaborados foi de quase 30 dias. A opção por realizar a pesquisa em momentos distintos, justifica-se pelo fato de acreditarmos que de alguma maneira, o professor poderia reformular ou reestruturar o problema por ele elaborado no momento de sua resolução.

A definição de nosso referencial teórico foi iniciada no primeiro semestre de 2003 e estendeu-se ao longo do desenvolvimento do trabalho na procura de estudos que pudessem contribuir para a análise e interpretação dos resultados, especialmente, aqueles voltados à área da Educação Matemática que focalizavam o conhecimento do professor para ensinar Matemática, em particular, o conceito de fração.

Desse modo, pudemos observar que a análise dos dados em razão de suas características intrínsecas conduziu-nos ao emprego de um tratamento quantitativo, seguido pelo qualitativo para a devida apresentação dos resultados.

1.6. FATORES QUALITATIVOS DE ANÁLISE

Os fatores qualitativos de análise emergirão baseados na observação dos dados obtidos, possibilitando-nos, à luz de nosso referencial teórico, a categorização dos procedimentos e das estratégias utilizadas pelos professores, tanto na elaboração como na resolução.

Momento em que poderemos perceber e discutir as concepções, os valores próprios e a relação do professor com a Matemática, especialmente, quanto às suas concepções em relação ao conceito de fração.

Nessa perspectiva, analisaremos os tipos de estrutura lógica subjacentes à formulação dos problemas (significados), os tipos de resolução, as estratégias utilizadas bem como o emprego dos invariantes do conceito (ordem e equivalência), das variáveis de quantidades contínuas e discretas, e finalmente os procedimentos e estratégias empregadas para resolução dos problemas.

No próximo capítulo versaremos a respeito da teoria que subsidiou nosso estudo.

CAPÍTULO 2

PRINCÍPIOS DA PSICOLOGIA COGNITIVA PARA COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

2.1. INTRODUÇÃO

Para o planejamento e realização de um estudo científico é preciso contar com o suporte de uma boa teoria, a partir da qual todas as etapas da pesquisa sofrerão influência de seus pressupostos. É preciso, portanto, que este estudo faça escolhas quanto a seu suporte teórico. Nesse sentido, o desenvolvimento deste estudo basear-se-á na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990), além de considerarmos outras idéias teóricas, sobretudo aquelas que referem a uma classificação sobre o significado da fração, como os estudos de Kieren (1988) e de sobremaneira a classificação proposta por Nunes (1997; 2001).

2.2. VERGNAUD: TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

O objetivo da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) é possibilitar uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência a aprendizagem da matemática, permitindo situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual, isto é, estudar as teias de relação existente entre os conceitos matemáticos, no sentido proposto por Kieren (1988). Esta teoria

possibilita duas análises importantes: a primeira refere-se à relação existente entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação, e a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre o significado e o significante.

Nesta perspectiva, significado é definido por Vergnaud (1993), como sendo uma relação do sujeito com as situações e os significantes, de modo mais preciso os esquemas evocados no sujeito individual, por uma situação ou por um significado, constituem o significado dessa situação ou desse significante para aquele indivíduo. Assim, a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud:

é uma teoria cognitivista que visa favorecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas. (Vergnaud, 1990, p. 133).

Neste contexto, a Teoria dos Campos Conceituais retoma e aprofunda os estudos de Piaget no que tange à noção de esquema, tendo como um dos seus pressupostos básicos que o conhecimento constitui-se e desenvolve-se ao longo de um período de tempo e a partir da interação adaptativa do sujeito com as situações que experimenta. Cabe pontuar, que para Vergnaud (1993) o esquema refere-se à forma estrutural da atividade, isto é, diz respeito à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas. Conforme o autor citado define:

O conceito de esquema é particularmente adaptado para designar e analisar classes de situações para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, a um momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Mas ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos esquemas são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito. (Vergnaud 1995, p.176).

Diante do exposto, quais situações e ou conjunto de situações, são necessários para a construção de um dado conceito? O questionamento resulta do fato de o ser humano não se relacionar de forma mecânica ou imediata com o outro e com a realidade. Para essas relações precisa-se, uma dimensão simbólica ou representacional. Assim, a Teoria dos Campos Conceituais busca compreender as relações existentes entre os conceitos dentro dos processos de aprendizagem.

Dessa forma, definiremos o que seja Campo Conceitual para Vergnaud (1993), partindo de uma rápida discussão antes de apresentar uma definição direta. Se, por um lado, os conceitos de que nos utilizamos, estão embebidos na vida cotidiana e não surgem por simples apreensão sensível diretamente do real; por outro lado, os conceitos só funcionam, quando estão reunidos em proposições, sentenças, enunciados e teoremas e não operam em vão.

Em outros termos, os conceitos são mobilizados no cotidiano para dar conta dos desafios enfrentados pelo sujeito. Daí surge um aspecto importante do Campo Conceitual que diz respeito a um conjunto de situações. O conceito só adquire sentido dentro de situações ou conjunto de situações. Portanto, para Vergnaud um dos pilares de um campo conceitual é o conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, todos em estreita conexão entre si.

O sujeito frente a uma nova situação mobilizará o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tentará adaptá-lo à nova situação. Cabe esclarecer que o termo “situação” utilizado por Vergnaud (1993) não tem a mesma idéia da situação didática, empregada por Brousseau.

Para Vergnaud situação tem a ver com o contexto, no qual o problema (ou tarefa) encontra-se inserido, de forma a contribuir, para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significados.

Portanto, a aquisição do conhecimento ocorre por meio de situações-problema já conhecidas, e esse conhecimento tanto pode ser explícito – expresso de forma simbólica, como implícito, usado dentro de uma ação, na qual o sujeito escolhe as operações adequadas frente a uma determinada situação, sem, contudo conseguir expressar as razões de suas escolhas Vergnaud (1988). Assim, neste contexto, podemos destacar três idéias:

- o conhecimento dá-se pela adaptação do indivíduo ao meio, isto é, o processo de conhecimento é tratado como um caso particular do processo de equilibração. Assim, a apreensão de novas estruturas e novos objetos às estruturas já existentes pela ação do sujeito diz respeito à assimilação, enquanto sua modificação às novas características do objeto relaciona-se com a acomodação;
- o conhecimento, portanto pode ser traçado pelo modo como um indivíduo atua sobre o objeto, isto é, a ação é o principal fator no processo do conhecimento;
- os indivíduos desenvolvem diferentes tipos de conhecimento, dependendo do tipo de abstração que fazem. Sendo assim, o conhecimento lógico-matemático dá-se com base na abstração reflexiva, ou seja, consiste em isolar as propriedades e as relações das próprias operações da pessoa.

No entanto, Vergnaud (1993) retoma essa idéia, para explicar os invariantes, os quais junto com as situações e as representações simbólicas constituem o alicerce triangular da formação do conceito. Ao considerar um

campo conceitual como um conjunto de situações, destacamos que uma das vantagens dessa abordagem pelas situações é permitir a produção de uma classificação apoiada na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada um deles. Nesse cenário, Vergnaud (1993) analisou os tipos de situações-problema matemáticos, os tipos de formulação dos mesmos aliados às idades psicológicas e à maturação matemática, chegando às estruturas envolvidas na resolução dos problemas a fim, de entender as filiações e saltos dos conhecimentos dos estudantes, isto é, compreender as relações e a evolução das concepções e prática do sujeito frente a uma dada situação.

Assim, dentre as muitas estruturas estudadas, duas podem ser destacadas: as aditivas e as multiplicativas. O presente estudo encontra-se inserido dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Cabe explicitar que esse campo envolve o conjunto de situações, cujo tratamento implica em uma ou várias multiplicações e divisões, quanto o conjunto dos conceitos e teoremas, que permite analisar tais situações. Entre outros conceitos, identificamos a proporção simples e múltipla, função linear e não-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, **fração**, número racional, múltiplo e divisor, como conceitos pertencentes às estruturas multiplicativas.

Nessa perspectiva, Vergnaud (1993) considera que existe uma série de fatores que influenciam a formação e o desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema. Por exemplo, para que percebamos quais os conhecimentos que o sujeito traz consigo frente a um dado objeto matemático, é necessário buscar o entendimento do que o indivíduo realiza e de como realiza, relacionando estes dois aspectos.

Assim, o estudo do desenvolvimento de um campo conceitual requer que um conceito seja visto como uma composição de uma terna de conjuntos, representada segundo Vergnaud por S, I, R:

- S – é um conjunto de situações que torna o conceito significativo, isto é, a realidade;
- I – é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades, relações);
- R – é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes.

Para Vergnaud (1993), os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação, não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

Diante do exposto, como afirma Vergnaud (1990), o conceito não pode ser reduzido à sua definição, sobretudo se nos interessarmos por seu ensino e aprendizagem, pois é base com nessas situações e problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Dessa forma, podemos distinguir duas classes de situações:

- uma na qual o sujeito dispõe em seu repertório, em dado momento, de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- outra na qual o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Segundo Vergnaud (1993), o conceito de esquema interessa às duas classes de situações, mas não funciona do mesmo modo nos dois casos. No primeiro caso, observam-se, para uma mesma classe de situações, comportamentos automatizados, organizados por um só esquema. Ao passo que, no segundo caso, observa-se a sucessiva utilização de vários esquemas que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem estar acomodados.

Dessa forma, os conhecimentos contidos nos esquemas podem ser designados pelas expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação ou também pela expressão mais global, “invariantes operatórios”.

Conforme Vergnaud:

Os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos feitos pelo aluno. Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas Vergnaud (1988) citado por Magina et al. (2001 p.13).

Nesta perspectiva, o teorema-em-ação está relacionado com as estratégias tomadas e utilizadas pelo sujeito em situação de solução de um dado problema, sem que ele seja capaz de explicar ou justificá-las. Aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos, passíveis de serem verdadeiros ou falsos, portanto, tendo um domínio de validade restrito. O conceito-em-ação é a manifestação do próprio conceito com suas propriedades e definições e quando são manifestados, geralmente, são explícitos.

Reside nesse contexto o porquê de se estudar um conceito dentro do campo conceitual, e é justamente, nesse *mote*, é que Vergnaud (1993) encontra

respaldo para defender que o conhecimento de um determinado campo conceitual desenvolve-se ao longo de um período de tempo. Para ilustrar tal argumentação, vamos tomar o exemplo da multiplicação.

A aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada. No campo dos números naturais, os alunos vivenciam um conjunto de situações que forma uma concepção de que a multiplicação sempre aumenta, ou seja, o produto é sempre maior do que os dois fatores. Ao raciocinar sobre os números racionais, é necessário um outro conjunto de situações que dê conta de superar essa dificuldade, provocando a ruptura dessa expectativa, por exemplo, 10 multiplicado por $\frac{1}{2}$.

À luz deste exemplo, podemos afirmar que o campo conceitual multiplicativo abrange um número maior de situações que necessitam ser melhor elucidadas e analisadas com cuidado, a fim de facilitar a hierarquia das competências possíveis desenvolvidas pelos alunos, dentro e fora da escola, pois resolver algumas operações de multiplicação, não representa quase nada, isso pode ser apenas a ponta do iceberg conceitual.

A situação apresentada a seguir é uma tentativa de aplicar sistematicamente a teoria de Vergnaud (1983) para a análise do conceito de fração. Acreditamos como sugere o autor citado que possa ser possível construir o conceito de fração, coordenando uma interação entre os três conjuntos da terna – o das Situações, dos Invariantes e das Representações.

Assim, em nosso estudo o conjunto de Situações refere-se a problemas contemplando os cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Medida,

Quociente e Operador Multiplicativo; o conjunto de Invariantes Operatórios, isto é, concernente às propriedades do conceito – equivalência e ordenação –, objetos e relações que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações; e o conjunto de representações que permite que o sujeito represente as situações por intermédio de signos e símbolos matemáticos.

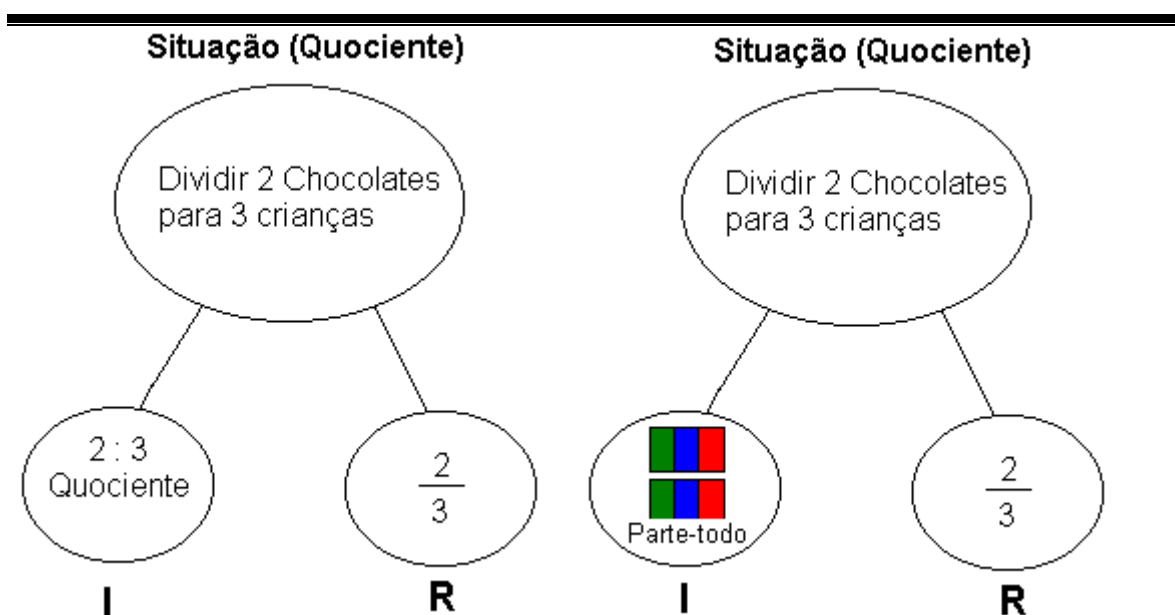
É importante esclarecer, que ao enquadrar o nosso estudo à teoria dos campos conceituais, o fato de apresentarmos, a priori, uma classificação para situações no conjunto S (Referente) ela não tem sentido em si mesma e sim, mantém uma estreita relação com as estratégias escolhidas pelo sujeito para resolver tal situação (invariantes) e com os símbolos matemáticos que o sujeito dispõe em seu repertório para representar tal situação – (Representações).

Para exemplificar o que acabamos de afirmar, tomemos a seguinte situação:

Dividir duas barras de chocolate para três pessoas.

Esta situação, dentro dos limites do nosso estudo, seria classificada, a priori, como uma situação tipicamente envolvendo o significado Quociente, pois a divisão ($2 : 3 = \frac{2}{3}$) seria uma estratégia bem adaptada para resolver tal situação.

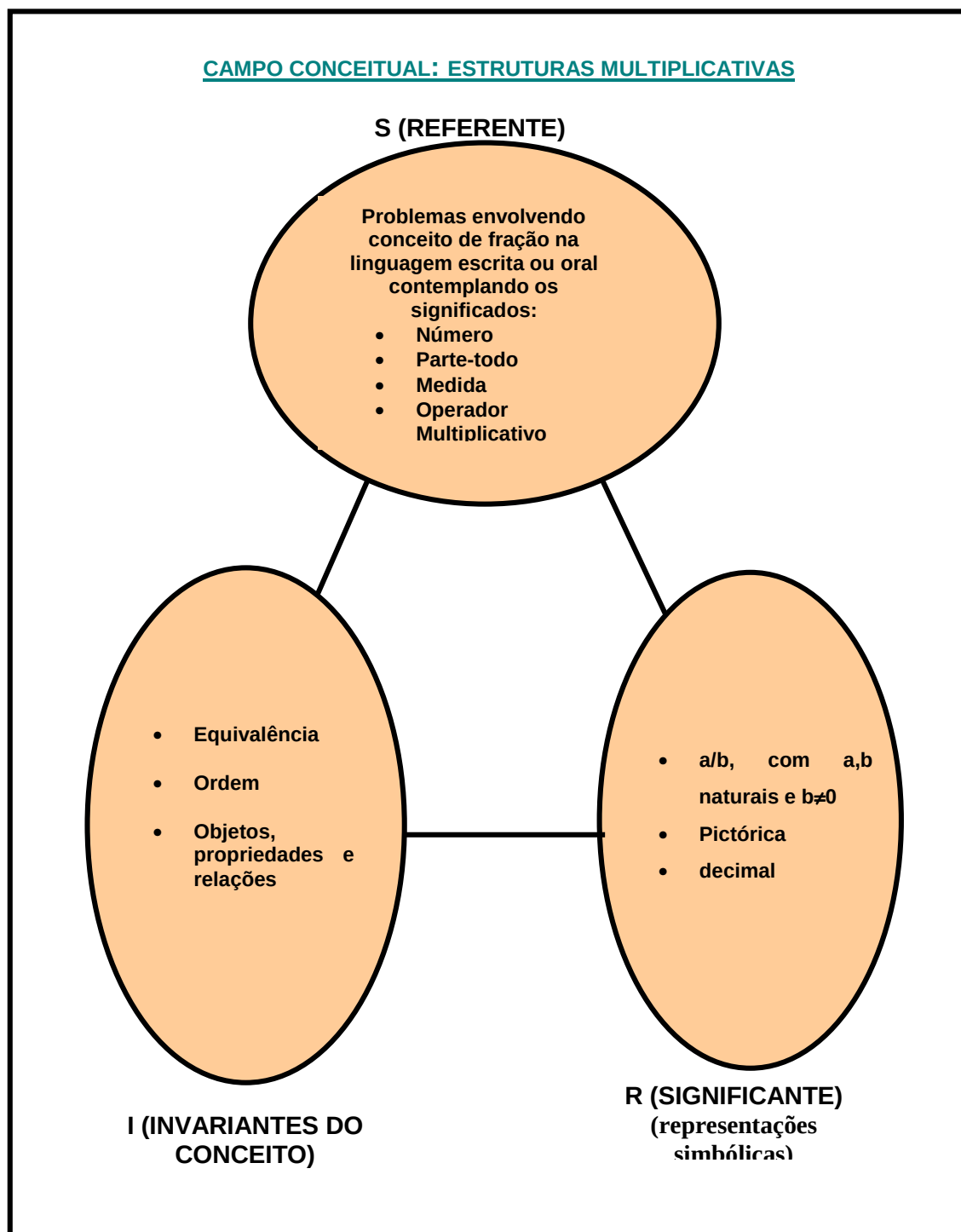
Entretanto, o sujeito poderá recorrer à estratégia de dividir o todo (cada chocolate) em partes iguais (três pessoas) e apoiando-se na correspondência um para um e na dupla contagem, responder à situação de maneira correta, porém, utilizando-se de outro significado, o de Parte-todo.



Quadro 2.1: Representação da situação quociente.

Nesta situação o sujeito poderá interpretá-la como operador multiplicativo, já que é possível ele responder, tal situação, dizendo que cada pessoa receberá $\frac{1}{3}$ da quantidade de chocolate. Isto é, na situação a que se fez referência o sujeito utilizaria como estratégia de resolução $\frac{1}{3}$ de dois chocolates, ou seja, $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$ e dizer que cada criança irá receber $\frac{2}{3}$.

Apresentaremos, de maneira sistemática, o enquadramento do nosso estudo na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1997), por meio de um esquema inspirado em Santos (2003). A figura a seguir representa a terna S (conjunto de situações), I (conjunto de invariantes do conceito de fração) e R (conjunto de representação do conceito), e sua relação com o presente estudo:



Quadro 2.2: Enquadramento da teoria dos campos conceituais ao conceito de fração.

Para melhor compreendermos o conceito de fração, basear-nos-emos nessa estrutura teórica. Assim, para exemplificar o que acabamos de afirmar,

tomemos a fração $\frac{2}{3}$. Podemos encontrar essa representação como solução de diversas situações problema, cujo domínio cognitivo para sua resolução, difere em cada uma das situações, como pode ser constatado nos cinco exemplos que apresentaremos abaixo:

Exemplo 1: Represente na reta numérica a fração $\frac{2}{3}$.

O sujeito frente a esse problema (situação) deverá reconhecer, a princípio, a fração $\frac{2}{3}$ como um número (significado) e não uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, $\frac{2}{3}$ é um número compreendido entre 0 e 1. Mesmo considerando esse intervalo há a necessidade que o sujeito compreenda que à direita e à esquerda de $\frac{2}{3}$ existem infinitos números. Terá ainda que admitir que há duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal.

Exemplo 2: Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em três partes iguais e deu duas partes para Maurício. Que fração representa a parte de chocolate que Maurício recebeu?



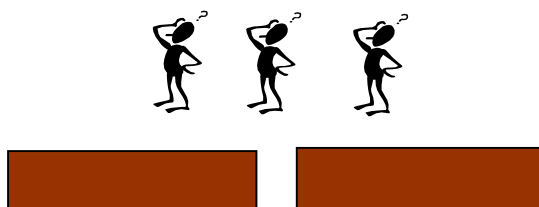
O sujeito frente a esta situação deverá identificar que o todo foi dividido em três partes iguais, portanto, trata-se de uma comparação parte-todo (significado); bem como deve identificar que o número total de partes refere-se ao denominador e que as partes pintadas do chocolate correspondem ao numerador. Nessa

situação-problema, o aluno precisa desenvolver algumas competências, tais como: a identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que se considera, como unidade em cada caso concreto), de realizar divisões (o todo se conserva, mesmo quando dividimos em partes, há a conservação da quantidade), manipular a idéia da conservação de área (no caso das representações contínuas).

Exemplo 3: João terá de passar por uma prova de fogo. Seu amigo colocou dentro de uma caixinha três bolas coloridas, duas azuis e uma branca, e apostou com João: se você tirar uma bola dessa caixa sem ver, e ela for azul, você ganha o jogo. Que fração representa a chance de João ganhar o jogo?

Na situação, a possibilidade de João ganhar o jogo é expressa por uma medida (significado) obtida pelo quociente entre o número de bolinhas azuis e o número total de bolinhas da caixa, ou seja, pela fração $\frac{2}{3}$.

Exemplo 4: Divida dois chocolates para três pessoas. Que fração representa o que cada pessoa recebeu de chocolate?



Nesta situação problema, o sujeito deverá perceber que a divisão é uma boa estratégia para resolvê-la, isto é, o quociente representa a quantidade de chocolate que cada criança receberá. Deverá admitir, então, que $2 : 3$ é igual a $\frac{2}{3}$, bem como aceitar o número $\frac{2}{3}$ como uma resposta bem adaptada à tal situação, ao invés de $2 : 3 = 0,6666...$

Situações envolvendo quociente pressupõem, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado parte-todo, pois nas situações de quociente temos duas variáveis (2 chocolates para 3 crianças), ao passo que no significado parte-todo temos referência a uma variável (o inteiro ou a unidade).

Exemplo 5: Na quinta série “A”, há 36 alunos. Numa avaliação de Matemática sobre frações, $\frac{2}{3}$ dos alunos conseguiram resultados satisfatórios.

Quantos alunos conseguiram bons resultados?

O esquema abaixo retrata tal situação.

Estado Inicial	Operador	Estado Final
36 alunos	(dividir por 3, multiplicar por 2) ou o inverso: multiplicar por 2 e dividir por 3	24 alunos

Na situação, o sujeito deverá perceber que a fração desempenha o papel de transformação, ao mesmo tempo em que conduz a idéia de que os números racionais formam um grupo (estrutura algébrica) com a multiplicação (Ciscar 1988 p.74). Encontramos, assim, nesta situação, um contexto natural para a composição de transformações (funções, operador – significado), a idéia de inversa (o operador que reconstrói o estado inicial) e a idéia de identidade (o operador que não modifica o estado inicial).

Pontuamos os exemplos acima para alegar, como sugere Vergnaud (1993), se o que desejamos é a construção do conceito de fração, um dos possíveis caminhos de entrada é explorar esse conceito em diversas e diferentes situações, que combinadas favoreçam o entendimento de tal conceito de maneira sólida.

A afirmação acima encontra sustentação na teoria dos campos conceituais de Vergnaud, pois a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do sujeito frente a essas tarefas (invariantes operatórios) permitem que analisemos sua competência. Competência essa que segundo ele, se refere à capacidade do sujeito na resolução de uma dada situação-problema em escolher estratégias adequadas e bem adaptadas para fazer frente à situação, podendo ainda ser avaliada considerando três aspectos:

- acerto e erro, considerando que competente é aquele que acerta;
- análise do tipo de estratégia utilizada;
- análise da capacidade de escolher a melhor forma para resolver um problema de uma situação particular.

Na análise dos acertos e erros, poderemos encontrar subsídios para avaliar os meios utilizados pelos sujeitos para realizar uma determinada tarefa, bem como conhecer as reais dificuldades enfrentadas pelos sujeitos.

Finalmente, entendemos que nesse cenário, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1993) contribui de maneira ímpar para a Educação Matemática, visto que oferece uma sólida e plausível explicação ao surgimento e desenvolvimento do conceito.

2.3. NUNES

Os estudos realizados por Nunes e seus colaboradores contemplam resultados significativos de como se dá a compreensão dos conceitos matemáticos em crianças. Embora estes pesquisadores tratem em seus estudos, tanto de conceitos concernentes às estruturas aditivas como às multiplicativas,

ater-nos-emos ao campo das estruturas multiplicativas, especialmente, ao conceito de fração.

Nunes; Bryant (1997), afirmam que com as frações as aparências podem ser tão enganosas, sendo possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações sem que ninguém perceba, pois, às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações, usando os termos fracionais corretamente, falando sobre frações de modo coerente, resolvendo alguns problemas fracionais, mesmo assim certos aspectos essenciais das frações ainda lhes escapam.

Nesse sentido, Nunes; Bryant (1997) alega que essa falsa impressão de que as crianças têm algum domínio do conceito de fração, pode estar associada à forma com que esse conteúdo lhes é apresentado – todos divididos em partes. Assim, as crianças são informadas de que o número total de partes é o denominador e as partes (pintadas), o numerador. Agregados a isso são fornecidos às crianças algumas instruções sobre poucas regras de calcular que permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração sem, contudo, compreender o significado desse novo tipo de número.

Nesse contexto, Nunes; Bryant (1997) retomam pesquisas relevantes, cujos resultados confirmam a suspeita de que as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza. De fato, estes estudos servem como uma advertência dos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em frações. Dentre os estudos, destacam-se os realizados no Brasil por Campos e Cols. (1995), e na Inglaterra por Kerslake (1986).

Nunes; Bryant (1997) sugerem que existe uma conexão entre divisão e fração, ficando, especialmente, clara quando se pensa em um tipo de problema envolvendo quantidades contínuas, pois se pensarmos em um problema como, por exemplo, três barras de chocolate divididas para quatro pessoas, o resultado da divisão será fração. Esta conexão não é acidental, faz referência a uma análise matemática de números racionais feita por Kieren (1988), ao sugerir que as frações são números produzidos por divisões e que, portanto, são números do campo dos quocientes.

Diante de tal reflexão, Nunes; Bryant (1997) argumentam que, se isso estiver certo, então, deveremos buscar a origem da compreensão do conceito de fração nas crianças, em contextos que propiciem situações de divisão.

Neste cenário, como poderíamos praticar um ensino que desse conta de levar as crianças à compreensão do conceito de fração? Nunes; Bryant (1997) argumentam que de fato, há uma lacuna entre a compreensão que as crianças têm das propriedades básicas de frações e as tarefas resolvidas nos contextos das avaliações educacionais. Assim, afirmam:

... quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais elas vêem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola, concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação-problema. (Nunes; Bryant, 1997, p.212)

Para ilustrar a situação, a autora faz referência a um estudo realizado por Mack (1993), com estudantes de 6ª série nos Estados Unidos, cuja técnica consistiu em apresentar às crianças os mesmos problemas alternadamente, como situações que elas poderiam encontrar na vida cotidiana e como problemas

simbólicos ou vice-versa. A pergunta de tal situação era a seguinte: *“suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em seis pedaços de tamanhos iguais e a outra em oito pedaços de tamanhos iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, de qual você ganhará mais?”* Foi seguida pela pergunta *“diga-me que fração é maior, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{8}$?”*. Mack (1993), citada em Nunes; Bryant (1997, p.212), observaram que os estudantes tiveram sucesso nas situações de vida cotidiana, contudo nas situações em que se depararam com problemas simbólicos, apresentaram muitas dificuldades - resposta por meio de algoritmos falhos ou comparações inadequadas. Por exemplo, ao comparar $\frac{1}{8}$ com $\frac{1}{6}$, muitos estudantes alegaram que $\frac{1}{8}$ era maior que $\frac{1}{6}$, pois 8 é maior que 6.

Nesse contexto, Mack (1993) afirma que a desconexão feita pelas crianças entre a compreensão da divisão e fração desenvolvida fora da escola e as representações simbólicas aprendidas na escola deve-se à forma que este conteúdo é introduzido na aprendizagem das crianças e poderia ser possível superar esta lacuna: *“movendo-se para trás e para frente em seu conhecimento desenvolvido fora da escola e as representações simbólicas, os alunos deveriam vir a compreender quais conexões têm de ser feitas”*.(Nunes; Bryant, 1997. p. 213).

Em que pesem todas as dificuldades até aqui pontuadas, quer seja do ponto de vista do ensino quer seja do ponto de vista da aprendizagem, Nunes destaca dois invariantes que são considerados centrais no conceito de fração: as noções de ordenação e de equivalência. No que se refere à ordenação de fração,

observa-se que existem duas idéias básicas e centrais que devem ser levadas em consideração no ensino de fração. A primeira é que, para um mesmo denominador, quanto maior for o numerador, maior será a fração; contudo – a segunda idéia diz respeito a uma situação em que, para um mesmo numerador, quanto maior o denominador menor será a fração.

Notamos que a primeira idéia é relativamente simples, pois a estratégia utilizada para resolver esta situação é semelhante à comparação de dois números naturais, embora a afirmação que o denominador deve ser constante para uma comparação direta a ser feita entre os numeradores, pode oferecer alguma dificuldade. A segunda idéia pode oferecer mais dificuldade, pois as crianças precisam pensar em uma relação inversa entre o denominador e a quantidade representada pela fração.

No que concerne à noção de equivalência de fração, devem ser considerados dois aspectos essenciais: equivalências em quantidades extensivas e em quantidades intensivas. Quantidades extensivas referem-se à comparação de duas quantidades de mesma natureza e na lógica parte-todo. Portanto, são suscetíveis de ser adicionadas e medidas por uma unidade de mesma natureza. Em uma típica situação de parte-todo, o todo é uma área dividida em áreas iguais.

Se adicionarmos $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ do todo equivalente, o total será $\frac{2}{3}$.

Quantidades intensivas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes, portanto, não suscetíveis de adição e são medidas de uma relação de duas magnitudes, cada uma vindo de diferente quantidade intensiva. Por exemplo, para fazer uma laranjada, é necessário que tenhamos uma parte de concentrado de laranja para duas de água. Na laranjada (a mistura)

a fração que representa a quantidade de concentrado de laranja pode ser descrita como $\frac{1}{3}$.

Da mesma forma que a quantidade de água poderá ser descrita como sendo $\frac{2}{3}$ da mistura. Se fizermos essa mesma mistura em duas jarras distintas, jarra A e jarra B e, em seguida, juntarmos os conteúdos das jarras A e B em outro recipiente, jarra C, a quantidade de concentrado de laranja continuará sendo de $\frac{1}{3}$, ao invés de $\frac{2}{3}$. Pontuamos essas situações para caracterizar que, em quantidades intensivas não é possível adicionar frações da mesma forma que em situações de quantidades extensivas.

Nunes; Bryant (1997) chamam a atenção, que ao tratar de equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade), por exemplo, as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ só pertencerão a uma classe de equivalência de frações se os dois todos forem equivalentes. Se nós estivéssemos referindo a $\frac{1}{4}$ de um todo e $\frac{2}{8}$ de um todo não equivalente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ não poderiam pertencer à mesma classe de equivalência de frações.

A equivalência de fração em contexto de quantidades intensivas difere das quantidades extensivas, pois, nesse contexto podemos falar em equivalência entre duas frações, referindo-se a todos diferentes. Por exemplo, se fizermos um litro de suco usando um copo de concentrado para três copos de água, o suco terá a mesma concentração e gosto que dois litros de suco feito com dois copos

de concentrado e seis copos de água. Em situações de quantidades intensivas, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são equivalentes mesmo que o todo não seja o mesmo.

Os trabalhos de Nunes e seus colaboradores, por nós revisados, possibilitaram-nos maior compreensão dos diversos aspectos relevantes, envolvidos no ensino e na aprendizagem do conceito de fração, contribuindo dessa forma, de maneira ímpar para o desenvolvimento do presente estudo.

Nesse arcabouço de interpretações, ora fazendo referência aos números racionais, ora às frações assumiremos neste estudo, assim como Nunes et al. (2003) que se o que se quer de fato é uma aprendizagem significativa do conceito de fração, esta poderá ser obtida, com maior êxito, quando explorado este conceito em situações que contemplem seus cinco significados.

De todo modo, a autora aponta que no ensino de frações, a definição curricular, muitas vezes, se faz somente a partir da representação das frações, ao mesmo tempo, afirma que existem muitas análises dos significados do conceito de frações, mas existem poucos estudos mostrando a importância dessas análises.

2.4. FRAÇÕES E SEUS CINCO SIGNIFICADOS

Uma situação dada ou um simbolismo particular não evoca em um indivíduo todos os esquemas disponíveis, isto é, quando se diz que uma palavra tem determinado significado, estamos recorrendo a um subconjunto de esquemas, e dessa forma, operando uma restrição ao conjunto dos esquemas possíveis. Para ilustrar o que acabamos de discutir, tomemos como exemplo, o

significante $\frac{1}{4}$. O significado desse símbolo dependerá dos esquemas que o sujeito possui para dar significado a essa representação.

O sujeito poderá dar como significado à fração $\frac{1}{4}$, uma relação parte-todo, ou seja, uma pizza dividida em quatro partes congruentes sendo uma parte tomada, ou ainda, uma pizza dividida igualmente para quatro pessoas, isto é, $\frac{1}{4}$ significando o quociente da divisão entre duas variáveis. Poder-se-ia interpretar, ainda, a fração $\frac{1}{4}$ como um número na reta numérica, ou seja, 0,25; como operador, $\frac{1}{4}$ de litro de leite, ou seja, 250 ml de leite e, finalmente, a interpretação de $\frac{1}{4}$ como sendo medida, isto é, a chance de se tirar uma bola azul em uma caixa que contenha uma bola azul e três bolas vermelhas.

Diante do exposto, acreditamos que o conceito de fração poderá ser construído se contemplado um conjunto de situações, explorando seus diferentes significados, dentro de um contexto de quantidades contínuas e discretas.

Cabe salientar que entendemos por quantidades contínuas aquelas que são passíveis de serem divididas exaustivamente, sem que necessariamente percam suas características. Por exemplo, um chocolate pode ser dividido em inúmeras partes sem deixar de ser chocolate.

Por outro lado, quantidades discretas dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, em que o resultado da divisão deve produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades. É o que encontramos, por exemplo, em uma situação que temos de dividir sete bolinhas

para três crianças. O resultado dessa divisão será duas bolinhas para cada criança e sobrar uma bolinha. Portanto, as frações não funcionam como ferramenta bem adaptada para resolver tal situação. Em contraponto, se lançarmos mão de uma situação em que devemos distribuir sete chocolates para três crianças, encontraremos na fração uma ferramenta bem adaptada para expressar o resultado de tal situação, isto é, cada criança receberá $2\frac{1}{3}$ de chocolate.

De fato, existem diferentes classificações a priori dos tipos de situações e dos significados de números racionais, especialmente, os que concernem à sua representação fracionária, sem que a importância dessas classificações para o ensino tenha sido esclarecida. Desse modo, assumiremos em nosso estudo assim como Kieren (1988) e Nunes et al. (2003), que identificam, pelo menos, cinco significados possíveis que devem ser levados em consideração no ensino e aprendizagem das frações: **Número, Parte-todo, Medida (com quantidades intensivas e extensivas), Quociente (uma divisão) e Operador Multiplicativo.**

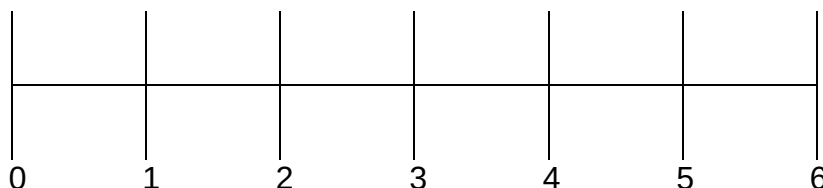
Assim, à luz do acarbouço teórico aqui levantado, passaremos a descrever as idéias básicas de cada significado, considerado em nosso estudo, bem como apresentaremos dois exemplos de cada significado, em quantidades contínuas e discretas.

Fração como Número

As frações, assim como os números inteiros, são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de representação fracionária, a ordinária e a decimal. Ao admitir a fração

com o significado de número, não é necessário fazer referência a uma situação específica ou a um conjunto de situações para nos remeter a essa idéia. Nessa perspectiva, também, não tem sentido abordar esse significado em quantidades contínuas e discretas.

Exemplo 1: Represente na reta numérica as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{2}$.



Exemplo 2: Represente o número $\frac{1}{2}$ na forma decimal.

Fração como Parte-Todo

A idéia presente neste significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais em que cada parte poderá ser representada como $\frac{1}{n}$.

Assim, assumiremos como significado parte-todo um dado todo (contínuo ou discreto), dividido em partes iguais em situações estáticas, nas quais a utilização de um procedimento de dupla contagem dá conta de chegar a uma representação correta, isto é, esse procedimento consiste em quantas partes o todo foi dividido (denominador) e o número de partes tomadas (numerador).

Exemplo 1: Uma barra de chocolate foi dividida em quatro partes iguais. João comeu três dessas partes. Que fração representa o que João comeu? (quantidade contínua).

Exemplo 2: Na doceira, há quatro bolos de chocolate e dois bolos de morango de mesmo formato. Que fração representa a quantidade de bolos de chocolate em relação ao total de bolos? (quantidade discreta).

Fração como medida

Assumiremos a fração com o significado medida em situações de quantidades intensivas e extensivas. Algumas medidas envolvem frações por se referirem as quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis, dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de zero a um, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos são fracionários. Outras medidas envolvem frações por se referirem as quantidades intensivas.

Por exemplo, ao fazer uma laranjada podemos utilizar um copo de concentrado de laranja para dois copos de água, e a receita será medida pela razão um para dois que pode ser representada como sendo $\frac{1}{2}$ (relação parte-parte). Com essa medida, podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de laranjada mantendo o mesmo sabor e, além disso, esta quantidade poderá nos remeter à idéia de fração, se considerar que o todo (a mistura) é constituído de três partes, $\frac{1}{3}$ é a fração que corresponde à medida de concentrado de laranja na mistura e, $\frac{2}{3}$ é a fração que corresponde à medida de água na mistura.

Exemplo 1: Na escola de Pedro, foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio? (quantidade discreta)

Exemplo 2: Um pintor deverá obter uma determinada cor de tinta misturando duas latas de tinta branca com três latas de tinta azul. Depois de obtida a mistura, que fração representa a medida de tinta azul em relação à mistura das tintas? (quantidade contínua).

Fração como Operador Multiplicativo

Associamos a esse significado o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo; ao passo que em quantidades discretas sua aplicação atua como um multiplicador divisor. Nesta perspectiva, assim como um número inteiro, a fração poderá ser vista como valor escalar aplicado a uma quantidade, que no caso do número inteiro, por exemplo, poderíamos dizer duas balas, no caso da fração, poderíamos dizer $\frac{3}{4}$ de um conjunto de balas. A idéia implícita nesses exemplos é que o número é um multiplicador da quantidade indicada.

Exemplo1: Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{5}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu. (quantidade contínua).



Exemplo 2: Gustavo tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo Fernando $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldadinhos de chumbo Gustavo deu a Fernando? (quantidade discreta).

Fração como Quociente

Este significado está presente nas situações em que a divisão surge como uma estratégia bem adaptada para resolver um determinado problema. Isto significa que conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo. Pressupõe, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado parte-todo, pois nas situações de quociente temos duas variáveis, por exemplo: chocolate e criança. Na situação de quociente, a fração corresponde à divisão (três chocolates para quatro crianças), e também ao resultado da divisão (cada criança receberá $\frac{3}{4}$).

Exemplo 1: Tenho 30 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para cinco crianças. Quantas bolinhas cada criança ganhará? Que fração representa essa divisão? (quantidade discreta).

Exemplo 2: Foram divididas igualmente para quatro crianças três barras de chocolate. Cada criança receberá um chocolate inteiro? Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate? Que fração de chocolate cada criança receberá? (quantidade contínua).

Apresentada a categoria de classificação, concordamos com Nunes; Bryant (1997) que, por trás do ensino e aprendizagem de frações, existe uma diversidade

e complexidade de conceitos envolvidos. Na próxima seção, faremos algumas considerações a respeito da razão, da porcentagem e da probabilidade.

2.5. RAZÃO, PORCENTAGEM E PROBABILIDADE.

No presente estudo, consideramos as situações de ensino que de fato têm como objetivo a construção do conceito de fração, que deveriam levar em conta os diferentes significados nos diferentes contextos que a fração pode assumir: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. No entanto, percebemos que existem algumas situações, nas quais as frações podem ser interpretadas como razão, probabilidade e porcentagem. Então, seriam esses outros significados para a fração? Neste estudo, acreditamos que não, pois, por de trás de tais interpretações estão os significados medida, parte-todo e operador multiplicativo.

No contexto que se refere à probabilidade como, por exemplo, em uma caixa há três bolas verdes e oito bolas vermelhas, qual a probabilidade de se sortear ao acaso uma bola verde? A resposta da situação é $\frac{3}{11}$, ou seja, de cada 11 bolas contidas na caixa, três são verdes. De fato, nesta situação está implícito o significado medida. A fração $\frac{3}{11}$ representa a probabilidade da ocorrência desse evento, que é medida pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

Nas situações que se referem à porcentagem como, por exemplo, João teve aumento de seu salário de 12%, isto é, $\frac{12}{100}$, está implícito em tal situação o

significado operador multiplicativo. Neste caso, só tem sentido em dizer 12% ou $\frac{12}{100}$ referindo-se a uma quantidade, discreta ou contínua, como destacam Ciscar & Garcia (1970), as porcentagens têm aparecido como operador no sentido de que $\frac{a}{100}$ de x ou $a\%$ significa aplicar a fração $\frac{a}{100}$ sobre x .

No caso das razões, devemos analisar com mais cautela, pois nem sempre as razões estão presentes nos contextos que lhes podemos dar o “status” de fração. Para esclarecer o que acabamos de afirmar, tomemos, por exemplo, dois contextos que podem ser expressos em forma de razão.

Exemplo 1: Para fazer um determinado suco, é necessário um copo de concentrado para três copos de água.

Esta situação nos remete à idéia de que a receita do suco pode ser expressa por uma razão: um para três, ou $\frac{1}{3}$. A situação poderia ser expressa, ainda, por uma fração como, por exemplo, $\frac{1}{4}$ que expressaria não mais o concentrado em relação à quantidade de água, mas, sim à quantidade de concentrado em relação à quantidade total da mistura medida.

Todavia, existem diversas situações, nas quais não podemos pensar a razão como fração, por exemplo, quando nos referimos à seguinte situação: dois reais a cada três quilos de cebola. A representação em termos de razão seria: dois para três, ou ainda, $\frac{2}{3}$.

Em que pesem todas as considerações feitas, sobre a razão, existe outro aspecto que gostaríamos de discutir nesse momento. Podemos somar duas razões? Para começar discutir esse aspecto, tomemos como exemplo, a seguinte

situação: Dois recipientes iguais contêm sucos nas seguintes razões: o recipiente A tem um copo de concentrado para três copos de água; e o recipiente B tem dois copos de concentrado para três copos de água. Se juntarmos as quantidades dos dois recipientes, qual será a razão da nova quantidade de suco? Nesta situação-problema, as razões são:

$$\text{Recipiente A} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Recipiente B} = \frac{2}{3}$$

A tendência seria somar as razões para indicar a razão da nova quantidade de suco. Mas é possível somarmos razão? Não, pois sabemos que em tal situação só seria possível somar razão, se elas fizessem referência ao mesmo todo. Neste caso, sabemos que só é possível somar as razões (quantidades intensivas) se elas puderem ser transformadas em frações (quantidades extensivas), expressando uma relação parte-todo de um mesmo todo ou todos iguais, o que não ocorre no caso das razões sugeridas acima isto é, em que existe uma relação parte-parte, concentrado e água.

Então, para resolver tal situação poderíamos recorrer, por exemplo, a transformação das razões em frações, ou seja, constituir o todo, visto que as quantidades (concentrado e água) podem ser reunidas em um mesmo todo.

Linguagem de Razões

Quantidade intensiva

Linguagem de Frações

Quantidade extensiva

$$\text{Recipiente A} = \frac{1}{3} \text{ (razão)} \quad \text{Fração correspondente} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{ concentrado} \\ \frac{3}{4} \text{ água} \end{array} \right\}$$

$$\text{Recipiente B} = \frac{2}{3} \text{ (razão)} \quad \text{Fração correspondente} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ concentrado} \\ \frac{3}{5} \text{ água} \end{array} \right\}$$

Dessa forma, teríamos:

$$\text{Concentrado da Mistura: } \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20}$$

$$\text{Água da Mistura: } \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{27}{20}$$

$$\text{Razão da Mistura: } \frac{\text{concentrado}}{\text{água}} = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{27}{20}} = \frac{13}{27}$$

Fizemos esta discussão e destacamos alguns exemplos, embora não seja o foco de nosso estudo, para justificar o fato de não considerarmos razão, probabilidade e porcentagem como sendo outros significados de fração, pois estas interpretações emergem de situações, cuja resolução de determinados problemas pode recorrer às frações, como tratamento didático estando implícita os significados – medida, parte-todo e operador multiplicativo.

No próximo capítulo, apresentaremos nosso objeto de estudo - **fração** - sob três enfoques: o da Matemática, da Educação Matemática e da escola.

CAPÍTULO 3

FRAÇÃO NA MATEMÁTICA, NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA.

3.1. INTRODUÇÃO

Ao estudarmos um “ente” matemático, não podemos perder de vista dois aspectos: o da Matemática como ciência (sua evolução e formalidade) e o da Matemática como disciplina escolar (seu ensino e sua aprendizagem).

Neste sentido, no presente capítulo propor-se-á a apresentar do conceito de fração sob três diferentes enfoques. O primeiro refere-se à fração na Matemática, momento que descreveremos a trajetória histórica de sua construção, bem como sua definição formal e suas propriedades.

O segundo diz respeito ao conceito de fração do ponto de vista da Educação Matemática, momento que revisaremos estudos relevantes correlatos com o cerne de nossa pesquisa.

O terceiro enfoque refere-se à fração na escola, momento que descreveremos as recomendações e sugestões contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

3.2. FRAÇÃO NA MATEMÁTICA

Nesta seção, faremos uma breve descrição histórica sobre a fração, seu surgimento e suas diferentes representações em algumas culturas e, em seguida, apresentaremos o objeto matemático – a fração, do ponto de vista formal da própria Matemática.

3.2.1. Na história

A noção de número está associada através dos tempos, a todos os tipos de atividade humana. As primeiras informações a respeito da idéia de número são do período paleolítico, no entanto, poucos progressos fizeram neste campo até se dar a transição ao período neolítico, durante o qual já existia uma atividade comercial importante entre diversas povoações.

Assim, nesse período, as idéias de número basearam-se na formação de linguagens, cujas palavras exprimiam coisas muito concretas e poucas abstrações. Contudo já havia lugar para alguns termos numéricos simples (distinção entre um, dois e muitos) e depois da utilização, durante muitos séculos, dos números para contar, medir, calcular, o homem começou a especular sobre a natureza e propriedades dos próprios números.

Podemos observar que as coisas não transcorreram de modo muito diferente com as frações. Existe um consenso entre diversos pesquisadores da história da Matemática como, por exemplo, Boyer (1974); Caraça (1998), entre outros, que o surgimento da Matemática deve-se ao fato de problemas oriundos da vida diária, ou seja, salvo sua evolução e seu formalismo, a Matemática

emerge de uma apreensão sensível do real, isto é, de uma tentativa de construir modelos matemáticos para resolver problemas reais.

No Oriente Antigo, a história da Matemática com a descoberta do *Papiro de Rhind* (descoberto em 1858; escrito por volta de 1650 a.C. por Ahmes) e do *Papiro de Moscovo* apresenta-nos a Matemática egípcia, que pode ser constatada, por intermédio dos problemas neles contidos, que esse povo já tinha se familiarizado com as frações. Estas, porém, eram escritas de forma diferente da que utilizamos atualmente, ou seja, $\frac{1}{10}$ era representado com $\overline{10}$, possibilitando, desde aquela época, a idéia de um inteiro e não de uma unidade fracionada (Struik, 1987).

Podemos notar que a aritmética egípcia fazia uso do cálculo de frações, porém as frações eram reduzidas à soma das chamadas ‘frações unitárias’, o que significa afirmar frações de numerador um. As únicas exceções eram $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, para os quais existiam símbolos especiais. O Papiro de Rhind tem uma tabela que dá as equivalências em frações unitárias a todos os números ímpares de 5 a 101, por exemplo:

$$n=5 \Rightarrow \overline{3} \overline{15} \left(\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \right)$$

$$n=7 \Rightarrow \overline{4} \overline{28}$$

Segundo o autor citado:

O princípio subjacente a esta redução especial a frações unitárias não é claro. Este cálculo com frações deu à matemática egípcia um caráter complicado e pesado, mas, apesar destas desvantagens, a maneira de operar com frações unitárias foi praticada durante milhares de anos, não só no período grego, mas também na Idade Média (Struik, 1987, p.53).

As frações foram conhecidas na antigüidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram durante muito tempo mal fixadas, não homogêneas e inadaptadas às aplicações práticas. Não foram também consideradas desde sua origem, como números; nem se concebia a noção de fração geral $\frac{m}{n}$, como m vezes o inverso de n . (Ifrah, 1996)

Boyer (1974) comenta que as frações $\frac{1}{8}$, por exemplo, eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes – 1650 D. C. – mas a fração geral parece ter sido um enigma aos egípcios. Assim, estes só concebiam as frações denominadas “unitárias” (as de numerador igual a um) e só exprimiam as frações ordinárias por meio das somas de frações desse tipo (por exemplo: $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$).

Observamos que, com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações submetiam-se às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1). No Papiro de Rhind, podemos observar que para a resolução de um problema para achar dois terços de $\frac{1}{5}$ procede-se ao método, como descreveremos a seguir, o que indica alguma percepção das regras gerais usadas pelos egípcios.

Para a decomposição de $\frac{2}{5}$ o processo de dividir ao meio é inadequado; mas começando com um terço de $\frac{1}{5}$ encontra-se a decomposição dada por Ahmes, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. No caso de $\frac{2}{7}$ aplica-se duas vezes a divisão por dois a $\frac{1}{7}$ para obter o resultado $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$. A obsessão egípcia

com dividir por dois e tomar a terça parte percebe-se no último caso da tabela $\frac{2}{n}$ para $n = 101$. Talvez um dos objetivos da decomposição de $\frac{1}{2n}$ fosse chegar a frações unitárias menores que $\frac{1}{n}$ (Boyer, 1974, p. 11).

A extensão dos conceitos numéricos foi crescente e se outrora serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos. De agora em diante, não só se podiam comparar duas grandezas “por estimativa”, mas era possível dividi-las em parcelas ou, pelo menos, supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie escolhida como padrão. Apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas, os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida. Assim:

A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como $\frac{34}{1265}$: onde 34 é o numerador e 1265 é o denominador. Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal (Ifrah, 1996, p. 327).

Entre os babilônios, que já sabiam resolver equações do 1º e do 2º graus, também, era comum o uso de frações e, em tabuletas de argila provenientes do período babilônico antigo (1990 a 1600 a.C.) é possível encontrar tabelas de números incluindo frações.

Entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde a época dos pitagóricos, por exemplo, no Livro V dos Elementos de Euclides, era possível encontrar a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (aproximadamente 408 a 355 a.C.),

que não só sugere a definição atual de igualdade de frações $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se $ad = bc$, como é muito próxima às definições de número real surgidas no século XIX.

Em que pesem todas as considerações feitas até aqui, encontramos a noção da fração (representando uma medida ou uma quantidade) em diversas civilizações, porém, a maneira de representá-la, é diferente.

Contudo, podemos observar que nos séculos XI e XII, por um lado a aritmética indu-arábica produzia um sistema de numeração e de escrita de frações, no qual o numerador era colocado sobre o denominador; por outro lado, as tradições judias exprimiam as frações por intermédio de uma linguagem retórica, como quantidades de partes de unidades originadas dos pesos e medidas.

Na segunda metade do século XV, a principal linha de desenvolvimento da matemática passa pelo crescimento das cidades mercantis sob a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura. A grande era voltada às navegações e descobertas. As frações passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas, e os tipos de representação e conceitos da Antiguidade foram aperfeiçoados e adaptados às soluções dos problemas da época.

As frações com numeradores maiores que o inteiro apareceram somente a partir do século XVI, representação essa já bem próxima das contidas nos livros dos séculos XIX e XX, com expressão de divisão. A notação moderna deve-se aos hindus pela sua numeração decimal de posição e aos árabes que criaram a famosa barra horizontal, separando o numerador do denominador.

Em suma, neste breve relato histórico, observamos que do ponto de vista histórico, para a formação conceitual das frações, os grandes *insights* vão da pré-história até a Idade Média. Após esse período, observamos que houve uma preocupação maior com o aperfeiçoamento da escrita e a utilização para os decimais.

Finalmente, a presença dos números em nossa vida diária é datada desde os tempos mais remotos, para ser mais preciso, estão presentes desde as primeiras tentativas do homem como ser social. Os números, em geral, estão inseridos em diversos contextos, que não poderíamos imaginar sua existência sem a presença dos números: no comércio, nos horários, nos impostos, nas estatísticas, nas contagens, entre outros. No mundo contemporâneo – a era da tecnologia, os números e suas operações são imprescindíveis na informatização. As novas ferramentas de trabalho – como calculadora e computador – surgem como uma possibilidade de facilitar e libertar o homem das atividades mecânicas e repetitivas (cálculo e aplicação de fórmulas). Esta inovação, também, contribui, de maneira decisiva, para a abertura de novos caminhos que trazem em seu bojo possibilidade de exploração conceitual que compreende as idéias envolvidas em cada criação matemática.

3.2.2. O objeto matemático

Como descrevemos na seção anterior, a necessidade de novos números foi sentida desde muito cedo na história da Matemática, sugerida naturalmente, por problemas práticos. Seguindo esse raciocínio com a construção do conjunto dos números racionais isso não foi de maneira diferente.

Nesse sentido, tomaremos para início de nossa discussão, a respeito da construção dos números racionais, as idéias apresentadas por Caraça (1998), quando enfatiza que nem sempre é possível comparar dois segmentos de tamanhos diferentes e exprimir com um número inteiro a quantidade de vezes que um dado segmento cabe no outro.

Do fato, decorre a construção de um novo campo numérico que, segundo Caraça (1998) é construído levando em consideração três aspectos:

- a) o princípio da extensão leva-nos a criar novos números por meio dos quais se possa exprimir a medida de dois segmentos;
- b) a análise da questão mostra que a dificuldade reside na impossibilidade da divisão (exata em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor);
- c) o princípio da economia: com os novos números sejam abrangidas todas as hipóteses de medição; – que os novos números sempre sejam reduzidos aos números inteiros quando o dividendo for múltiplo do divisor.

Nesse contexto, Caraça (1998) define números racionais da seguinte maneira: dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que cada um dos quais contém o número inteiro de vezes o segmento u – $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u . Por definição, diz-se que a medida do segmento $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$ como unidade, o número $\frac{m}{n}$, escrevemos:

$$1) \overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}. \text{ Quaisquer que sejam os números inteiros } m \text{ e } n \text{ (} n \text{ não}$$

nulo); se m for divisível por n , o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro

que é quociente da divisão; se m não for divisível por n , o número $\frac{m}{n}$ diz-

se *fracionário*. O número $\frac{m}{n}$ é, em qualquer hipótese, racional –, o número

m chama-se *numerador* e o número n *denominador*. Em particular, da

igualdade $\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$, resulta que;

2) $\frac{n}{1} = n$ visto que, se $\overline{AB} = n \cdot \overline{CD}$, é também $\overline{AB} = \frac{n}{1} \cdot \overline{CD}$ em que;

3) $\frac{n}{n} = 1$ porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n} \cdot \overline{AB}$, são equivalentes.

No entanto, para ficar completo o conhecimento do campo dos números racionais torna-se necessária uma fundamentação teórica rigorosa do ponto de vista da Matemática como ciência. Dessa forma, argumentaremos que o conjunto dos números racionais possui uma estrutura de corpo comutativo ordenado que segundo Ávila:

Um corpo (comutativo) é um conjunto não vazio C , munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, cada uma delas fazendo corresponder um elemento de C a cada par de elementos de C , as duas operações estando sujeitas aos axiomas de corpo. A soma de x e y de C é indicada por $x + y$ e a multiplicação de x e y é indicada por xy (Ávila, 200, p.15)

Nesse sentido, os axiomas de corpo do conjunto dos números racionais são:

1) Associatividade

Dados quaisquer $x, y, z \in C$,

$(x + y) + z = x + (y + z)$ em relação à adição, isto é, podemos associar as

parcelas. No caso das frações dados $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ com b, d e $f \neq 0$, temos:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$(xy)z = x(yz)$ em relação à multiplicação; em relação à multiplicação, isto é, podemos associar os fatores. No caso das frações dados $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ com b, d e $f \neq 0$, temos:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

2) Comutatividade

Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{C}$,

$x + y = y + x$ em relação à adição, isto é, podemos comutar a ordem das parcelas. No caso das frações dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ com b e $d \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$xy = yx$ em relação à multiplicação; isto é, podemos comutar a ordem dos fatores. No caso das frações dados a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$ com b e $d \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

3) Distributividade da multiplicação em relação à adição

Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{C}$,

$x(y + z) = xy + xz$, isto é, dados a, b, c, d , e $f \in \mathbb{Z}$, com a, b, c, d , e $f \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf}$$

4) Existência do Zero

Existe um elemento em C , chamado “Zero” ou “elemento neutro”, indicado pelo símbolo 0 , tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in Z$. No caso das frações, dados $a, b \in Z$, com $b \neq 0$ temos que:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

5) Existência do elemento oposto

A todo elemento $x \in C$ corresponde um elemento x' tal que $x + x' = 0$. Esse elemento x' , que se demonstra ser único para cada x , é indicado por $-x$. No caso das frações, dados a e $b \in Z$, com $b \neq 0$ temos que:

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$

6) Existência do elemento unidade

Existe um elemento em C , designado “elemento unidade” e indicado com o símbolo “1”, tal que $1 \cdot x = x$, para todo $x \in C$. No caso das frações, dados

a e $b \in Z$, com $b \neq 0$ temos que:

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

7) Existência do elemento inverso

A todo elemento $x \in C$, $x \neq 0$ corresponde um elemento $x'' \in C$ tal que $x \cdot x'' = 1$, que se demonstra ser único para cada x , e é indicado com x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. No caso das frações, dados a e $b \in Z^*$, temos que

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 1$$

Ainda, o Conjunto dos Números Racionais é um corpo ordenado, pois nele existe um subconjunto P , denominado conjunto dos elementos positivos, tal que:

- a) a soma e o produto de elementos positivos resulta em elementos positivos;
- b) dado $x \in \mathbb{C}$, ou $x \in \mathbb{P}$, ou $x = 0$, ou $-x \in \mathbb{P}$.

Nota: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ temos que:

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{C}, \text{ ou } \frac{a}{b} \in \mathbb{P}, \text{ ou } \frac{a}{b} = 0, \text{ ou } -\frac{a}{b} \in \mathbb{P}$$

Seguindo o raciocínio que o conjunto dos números racionais é um corpo comutativo e ordenado poderíamos afirmar que a ordenação estabelece-se dando as definições de igualdade e desigualdade.

Ordenação

No que se refere à igualdade, definimos da seguinte maneira: dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais, quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial.

Como consequência o número $s = \frac{p}{q}$ pode não ter os mesmos numeradores e denominadores que $r = \frac{m}{n}$, visto que cada uma das n partes iguais em que a unidade é dividida pode, por sua vez, ser subdividida em k partes, sendo k qualquer. Concluimos que: dado um número racional $r = \frac{m}{n}$, todo número racional $s = \frac{p}{q}$ onde $p = m \cdot k$, $q = n \cdot k$ (k inteiro qualquer não nulo), é igual a r .

Façamos os produtos $m \cdot q$ e $p \cdot n$; temos que $m \cdot q = mnk$ e $pn = mnk$, donde $mq = pn$; a definição de igualdade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \longleftrightarrow m \cdot q = p \cdot n$$

Podemos traduzir essa igualdade como sendo: $m \cdot q = p \cdot n$ leva $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ e

reciprocamente, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ leva $m \cdot q = p \cdot n$.

Do fato, decore o seguinte enunciado: não altera o número racional quando multiplicamos ou dividimos seu numerador ou seu denominador pelo mesmo número natural.

Do exposto acima, decorre a propriedade de redução ao mesmo denominador, que permite efetuar sempre a redução de dois números racionais ao mesmo denominador. Dados $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ podem-se escrever:

$$r = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} \text{ e } s = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}$$

No que diz respeito à desigualdade entre dois números racionais r e s , por definição diz-se maior aquele que, com o mesmo segmento de unidade, mede um segmento maior. Por consequência: se dois números têm o mesmo denominador, será maior (menor) o que tiver maior (menor) numerador;

- a) se dois números têm o mesmo numerador, será maior (menor) o que tiver menor (maior) denominador;
- b) se dois números não têm o mesmo numerador nem o mesmo denominador reduzem-se ao mesmo denominador e comparam-se em seguida: dados

$$r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}, \text{ tem-se}$$

$$r = \frac{m \cdot q}{n \cdot q}, s = \frac{n \cdot p}{n \cdot q}, \text{ donde}$$

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \iff m \cdot q > n \cdot p$$

Em suma, dizemos que um número racional r é menor do que outro número racional s se a diferença $r - s$ for positiva. Quando esta diferença $r - s$ é negativa, dizemos que o número r será maior do que s . Para indicar que r é menor do que s escrevemos: $r < s$.

Do ponto de vista geométrico, um número que está à esquerda é menor do que um número que está à direita na reta numerada. Na próxima seção, apresentaremos a fração sobre a ótica das pesquisas em Educação Matemática e uma revisão nos estudos correlatos com nossa pesquisa.

3.3. FRAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Observamos que existe um consenso entre os vários pesquisadores, de que a construção do conceito do número racional e, especialmente, o conceito de fração não ocorre de maneira natural. Uma abordagem que, de fato, leve à construção de maneira significativa desse importante conceito matemático, deverá contemplar um conjunto de situações que dê sentido a esse objeto matemático.

Para tanto, as frações quando aplicadas a problemas reais e analisadas do ponto de vista pedagógico assumem várias “interpretações”. Nesse sentido, encontramos diversos educadores matemáticos cujos estudos caminham nessa direção.

Assim, Kieren (1975) foi pioneiro a introduzir a idéia de que os números racionais consistem em vários constructos, sendo que para a compreensão da noção de número racional torna-se necessário um claro entendimento da confluência desses constructos. O autor sugere, nesse trabalho, que a compreensão desses diversos constructos é necessária para se obter um completo entendimento da natureza do número racional. Em sua lista de constructos, Kieren (1975) analisa sete interpretações para os números racionais:

- Os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas;
- Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais;
- Os números racionais são classes de equivalência de frações;
- Os números racionais são números da forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são inteiros e $b \neq 0$;
- Os números racionais são operadores multiplicativos;
- Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito, isto é, há números da forma $x = \frac{a}{b}$ onde x satisfaz a equação $bx = a$;
- Os números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numérica.

Posteriormente, Kieren (1980) analisa os números racionais por meio de cinco idéias que consideradas básicas:

- Relação parte-todo;
- Quociente;
- Medida;
- Razão;
- Operador.

O referido autor em seu artigo, *Personal Knowledge of Rational Numbers*, retoma a discussão apresentando um modelo teórico de construção do conhecimento matemático, relacionando-o, especificamente, ao conhecimento do

número racional. Um dos aspectos de sua teoria é a suposição da existência de uma rede ideal de conhecimento pessoal de número racional, consistindo em seis níveis. O primeiro, o nível mais primário, contém constructos que são mais locais e próximos ao nível de fato. O segundo nível compreende constructos de partição e equivalência e formação de unidades divisíveis. Os quatro constructos de números racionais, medida, quociente, número proporcional e operador formam um terceiro nível.

No quarto nível, Kieren (1988) pressupõe conhecimento de relações funcionais e escalares do qual o constructo mais formal de fração e equivalência de número racional depende. No quinto nível, Kieren sintetiza os constructos de números racionais e relaciona noções para gerar o constructo geral do campo conceitual multiplicativo. E, por fim, essa rede de estrutura de conhecimento é completada pelo conhecimento de números racionais como um elemento de um campo infinito de quocientes.

De forma mais ampla, Behr et al. (1992) propõe sete interpretações para as frações, chamadas por ele de subconstructos:

- O subconstructo da medida fracionária que indica quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Os autores citados propuseram isso como uma reformulação da noção parte-todo.
- O subconstructo razão, embora os autores não esclarecem as idéias inerentes a esse subconstructo.
- O subconstructo taxa que define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. No entanto, é necessário fazer uma distinção entre taxas e razões. Distinção essa que decorre do fato de que

as primeiras são possíveis de serem somadas ou subtraídas, enquanto as razões não o são.

- O subconstructo quociente, que vê o número racional como resultado de uma divisão;
- O subconstructo das coordenadas lineares, que interpreta o número racional como um ponto na reta numérica, isto é, os números racionais formam um subconjunto dos números reais; as propriedades associadas à topologia métrica da reta numerada racional estão entre a densidade, distâncias e não completividade;
- O subconstructo decimal, que enfatiza as propriedades associadas ao nosso sistema de numeração;
- O subconstructo operador, que vê a fração como uma transformação.

Parece que estas interpretações propostas por Behr et al. (1992) é uma tentativa de contemplar e expandir as idéias proposta por Kieren (1988).

Neste contexto, outra análise importante, foi a apresentada por Ohlsson (1987) que analisa os números racionais levando em consideração quatro interpretações.

- $\frac{a}{b}$ é uma comparação em que a e b são quantidades em que uma é descrita em relação à outra;
- $\frac{a}{b}$ é uma partição em que a é uma quantidade e b um parâmetro. O numerador é operado em um caminho que é determinado pelo denominador;

- $\frac{a}{b}$ corresponde às idéias de operações compostas, parâmetro e quantidade. O numerador é o multiplicador, e o denominador é um divisor aplicado à mesma quantidade;
- O quarto caso é parâmetro / parâmetro, que não é interpretado nessa análise.

Todos os trabalhos que citamos apontam para um considerável avanço no que diz respeito a uma semântica das frações, pois podemos observar que existe uma concordância, entre os estudos aqui citados, de que o quociente, razão, operador e alguma versão da relação parte-todo são conceitos centrais. Todavia, as análises aqui apresentadas não são fáceis de serem conciliadas. A primeira razão é que elas diferem em relação aos objetos da análise: frações X números racionais; e uma segunda razão é que os critérios usados para fazer as distinções dentro de cada análise, não têm sido especificados.

3.3.1. Estudos correlatos

Nesta seção, apresentaremos a revisão de literatura focalizando alguns estudos que consideramos relevantes, cujos resultados contribuirão efetivamente para o desenvolvimento de nosso trabalho. Assim, os estudos que fazem parte da presente revisão, têm como enfoque principal a aquisição do conceito do número racional.

Em seus estudos, realizados na Inglaterra com 1000 crianças com faixa etária entre 11 e 15 anos, Kerslake (1986) investigou com profundidade uma série

de problemas trabalhados com alunos, analisando as estratégias de resolução e os erros, pois alguns desses problemas envolviam o conceito de fração.

Na busca de encontrar informações a respeito dos caminhos, pelos quais os alunos pensam sobre as frações, o estudo possibilitou observar três aspectos que emergiram dos dados obtidos. O primeiro aspecto referia-se se os alunos seriam capazes de pensar frações como números ou se pensavam que a palavra “número” implicaria somente a números inteiros. Os segundo e terceiro aspectos possibilitaram a descoberta dos modelos de frações que as crianças dispunham e como elas visualizavam a idéia de equivalência.

Kerslake (1986) propôs, entre outros, um mesmo problema de dois diferentes modos: com contexto e sem contexto. O problema sem contexto pedia aos alunos a resolução de 3: 5, e o problema com contexto foram: “Três barras de chocolate foram divididas igualmente para cinco crianças. Quanto cada um recebeu?” A pesquisadora constatou que aproximadamente 65% dos alunos obtiveram sucesso no problema com contexto, ao passo que no problema sem contexto o índice de sucesso foi significativamente menor.

A autora analisa algumas dificuldades apresentadas pelos alunos ao conceber 3: 5 (sem contexto) como sendo $\frac{3}{5}$. A pesquisadora argumenta que esta dificuldade pode estar relacionada ao fato de que os alunos não conectam a divisão (3:5) à representação fracionária $\frac{3}{5}$. Além disso, a autora observa que um número relativamente grande de aluno interpreta 3:5 como 5:3.

Nas observações das frações e números inteiros, notou-se que quando se perguntava aos alunos “quantas frações se escondem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?” Eles

respondiam: “uma”, referindo-se a $\frac{1}{3}$. Dessa forma, podemos concluir que os alunos observam apenas os denominadores das frações e não se dão conta das frações existentes entre elas, ou seja, entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Em seus estudos, Kerslake (1986) observou, ainda, durante as entrevistas que o diagrama com frequência ajuda na resolução de determinados problemas como, por exemplo, entender a fração como parte de um todo por meio de um círculo dividido em partes iguais e sombreado algumas delas. No entanto, o uso de diagramas no modelo parte-todo nem sempre possibilita a visualização imediata de determinadas situações como, por exemplo, $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Nesta situação fazem-se necessárias outras divisões da mesma figura para sua compreensão.

Frente a essas evidências, a autora, baseada nas idéias de Kieren, argumenta que o conceito de número racional é diferente de número natural, visto que eles não fazem parte do meio natural dos alunos e as diversas interpretações do número racional resultam em uma variedade de experiências necessárias.

Assim, a autora conclui que o entendimento dos números racionais como elemento do campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Neste sentido, há necessidade de se estender o modelo parte-todo e incluir o aspecto quociente da fração, assim a autora conclui, finalizando que as frações representadas como pontos sobre a reta numerada podem ser discutidas mais significativamente com as crianças.

Desse modo uma das questões propostas era: “Aqui estão três doces. Há quatro crianças que desejam a sua parte. Como você pode fazer?” Os alunos dividem os três doces para quatro pessoas, mas não se preocupam se as partes

são iguais ou não. Na intenção de observar o processo de divisão realizado pelo aluno, foi avaliado que elas não fazem a conexão entre 3:4 e $\frac{3}{4}$; pois só um dos alunos teve mais dificuldade e traçou três retas sobre as três bolas (doces), os demais desenharam uma cruz sobre cada bola.

Quando perguntaram ao aluno que traçou três retas sobre as três bolas, se todos os pedaços tinham o mesmo tamanho, ela respondeu: “O desenho não está muito correto”. Ela não pensou na maneira de como fazer, mas, quando lembrou do modelo , realizou a divisão de forma mais adequada que a anterior.

A estratégia utilizada por 11 alunos foi criar um desenho, representando a situação, ou seja, os três doces que seriam repartidos e as quatro crianças, distribuindo pedaço por pedaço para cada uma das crianças.

Em seus estudos, Kerslake (1986) encontrou também evidências da falta de compreensão dos alunos sobre equivalência de frações, mesmo, quando eles tiveram sucesso em algumas situações que envolviam a equivalência de frações. Os estudos apontam que, embora os alunos tivessem apresentado um bom desempenho nos itens de equivalência que ela apresentou, eles não necessariamente encontraram frações equivalentes com o mesmo objetivo de efetuar a adição e somavam frações com denominadores diferentes, por exemplo,

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \text{ deram como resultado } \frac{5}{7}.$$

A autora afirma que, embora alguns alunos tenham transformado as frações em frações equivalentes com o mesmo denominador, parecem não perceber a conexão entre equivalência de fração e adição.

Finalmente, Kerslake (1986) em seus estudos encontrou evidências consideráveis para constatar que o único modelo de fração com o qual os alunos

se sentiram confortáveis e familiarizados foi o de fração, como parte de um todo. A familiaridade com o modelo parte-todo os dificultou a entender o aspecto da divisão ou da distribuição, isto é, por exemplo a fração $\frac{a}{b}$ pode ser vista como sendo coisas “a” distribuídas entre pessoas “b”.

Mesmo esse que aspecto (divisão) apareça com freqüência em livros-textos e seja a base para o método utilizado para transformar a fração em decimais, os alunos foram muito relutantes para reconhecer quaisquer conexões entre $\frac{a}{b}$ e $a : b$.

Em seus estudos realizados no Brasil, Campos (citada por Nunes; Bryant 1997) foi capaz de mostrar claramente que, a introdução da fração pelo modelo parte-todo simplesmente induz os alunos a aplicarem um procedimento de dupla contagem sem necessariamente entender o significado da fração.

A autora citada trabalhou com um grupo de alunos com idade aproximada de 12 anos que haviam aprendido o procedimento de dupla contagem solicitando-lhes que nomeassem as frações em três situações.

Na primeira situação, a autora utilizou um modelo bem próximo daquele que os alunos habitualmente aprendem em sala de aula. Apresentou uma figura, cujo todo foi dividido em partes iguais e as partes pintadas eram contíguas. A segunda situação era menos típica em relação àquelas trabalhadas em sala de aula. Apresentava como na primeira situação um todo dividido em partes iguais, mas as partes pintadas não eram contíguas. A terceira situação não retratava uma situação típica de sala de aula, pois o todo não estava explicitamente dividido em partes iguais e a região pintada da figura tinha de ser descoberta

pelos alunos na análise da relação parte-todo. A figura abaixo apresenta as três situações propostas por Campos (citada por Nunes: Byant, 1997):

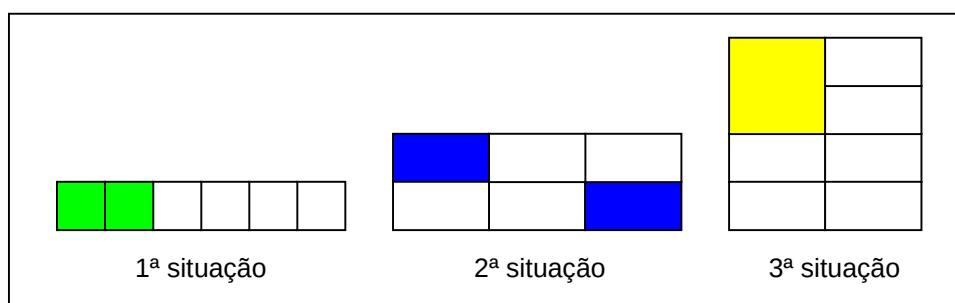


Figura 3: Situações propostas por Campos (citada por Nunes; Bryant, 1997, p.193)

Os resultados dos estudos apontaram para as situações 1 e 2, um desempenho bem próximo do “teto”, embora alguns alunos tenham se apoiado no procedimento da dupla contagem, nomearam as frações contando as partes pintadas para o numerador e as partes não pintadas para o denominador.

Com relação à terceira situação, o desempenho dos alunos foi significativamente inferior aos demonstrados nas situações 1 e 2, pois ao apoiarem suas estratégias de resolução no procedimento da dupla contagem, 56% dos alunos escolheram $\frac{1}{7}$ como a fração correspondente.

Os resultados dos estudos de Campos (citada por Nunes; Bryant, 1997) confirma a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

Em seus estudos, Pothier e Sawada (1990), ao investigarem sobre a partição, tanto em figuras geométricas como em grupos de objetos, com uma aproximação para o conceito de fração, apontam que os livros-texto limitam o uso de modelos físicos para um trabalho introdutório para as frações. Os autores evidenciam que os alunos completam tais exercícios, sem que necessariamente atentem para as propriedades geométricas de tais figuras (inteiro) ou das partes e, conseqüentemente nomeiam as frações para partes não iguais de um inteiro.

Assim, Pothier e Sawada (1990) argumentam que exercícios baseados em diagramas de figuras previamente repartidas que os alunos usam para identificar várias frações ou para representá-las, colorindo o número determinado de partes, pode representar parte das dificuldades enfrentadas pelos alunos no trabalho com o conceito das frações.

Nos estudos de Kieren e Nelson (1978) com o objetivo de compreender as estratégias que crianças e adolescentes utilizam para resolver situações, que os números racionais aparecem como operadores, bem como se existiam estágios de desenvolvimento quanto ao significado número racional como operador, realizaram uma pesquisa com 45 sujeitos distribuídos de 4ª a 8ª séries.

Os resultados do estudo podem evidenciar a existência de três níveis de desenvolvimento relacionados à fração como operador. No primeiro nível, há uma concepção fracionária, por parte das crianças, que é denominado pelo operador $\frac{1}{2}$ ou metade. No segundo nível, chamado intermediário, os sujeitos conseguem manipular operadores unitários ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$) e compostos ($\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$). Só no terceiro nível é que se tem habilidade para manipular composição com todas as formas de operador. Os resultados do estudo apontam também que os sujeitos utilizam-se da estratégia de partição para controlar as situações de frações como operador.

Com o objetivo de avaliar os efeitos de um trabalho de um ensino de frações, Tinoco e Lopes (1994) elaboraram uma proposta de ensino que contemplava situações didáticas que visava minimizar o impacto das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem do conceito de fração.

O estudo foi realizado com um grupo de 101 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de escolas municipais e outro grupo constituído de 30 alunos do 1º ano do Curso de Formação de Professores “primários” (CFP) pertencentes a escolas estaduais, ambas do Rio de Janeiro.

Na proposta de ensino, a ênfase dada era centrada em três aspectos: (a) a construção do conceito de fração pelo aluno como um número; (b) a exploração do conceito de fração em conjuntos discretos e (c) a noção de frações equivalentes, como representações da mesma quantidade. Os sujeitos foram submetidos a um pré-teste e um a pós-teste além de entrevistas.

Da análise qualitativa dos dados obtidos, as autoras ressaltaram alguns tipos de resolução. Na questão típica de fração, em conjunto discreto, foram encontradas dois tipos de estratégias de resolução. “Silvia ganhou $\frac{3}{4}$ dessas balas. Pinte as balas que ela ganhou.” Abaixo do enunciado da questão desenhou 16 balas iguais.

A primeira estratégia identificada foi fazer cálculo, isto é, contar o total de balas determinando $\frac{3}{4}$ de 16 e pintando 12 balas, sem fazer agrupamentos.

Uma segunda estratégia identificada foi o agrupamento das balas em quatro grupos iguais e pintando três deles.

A terceira estratégia foi formar grupos de quatro balas e, em cada um deles pintar três das balas. Esta última estratégia é completamente diversa daquela utilizada com as frações em conjunto contínuo, mais relacionado com as razões.

Em outra questão enfocando a noção de frações equivalentes, o estudo propôs a seguinte questão: “ $\frac{2}{7}$ $\frac{\square}{14}$ $\frac{10}{\triangle}$. Qual o valor do quadrado? Qual o valor do triângulo?”

As autoras citadas levantaram como hipótese para essa questão que a dificuldade residia na presença da fração intermediária. Esta hipótese foi confirmada na entrevista, uma vez que o aluno afirmou que o quadrado era quatro e o triângulo ele não sabia qual o valor.

Ao tampar a fração intermediária, as autoras refizeram a pergunta, obtendo a resposta 35. Esta evidência sugere, segundo as autoras, que os alunos não estão familiarizados com a transitividade da equivalência e que esta dificuldade pode ser superada no processo de ensino, com situações que leve o aluno, por exemplo, a obter uma fração equivalente a $\frac{3}{15}$ com denominador 10.

Com relação às questões envolvendo ordenação de frações, os critérios utilizados pelos alunos basearam-se em três estratégias: (1) frações com o mesmo numerador; (2) frações com o mesmo denominador e (3) frações com numeradores e denominadores diferentes. Nesse último caso os alunos recorrem ao uso de diagramas.

Em suas conclusões, as autoras evidenciam que em relação ao pré e ao pós-teste houve uma diminuição significativa das respostas em branco, o que denota um maior encorajamento dos alunos para atacar os problemas; uma melhora sensível nas questões de conceitualização e equivalência. Por outro lado, constatou-se ainda que alguns tipos de erro persistiram, sugerindo que a maioria deles é obstáculo epistemológico ou vício adquirido em sala de aula.

Os estudos realizados por pesquisadores do Programa de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (PROEM), sob a orientação de Beatriz D'Ambrósio (1989), com o objetivo de analisar a concepção dos alunos quanto ao conceito de fração, realizaram uma investigação com 76 alunos com idades entre 9 e 12 anos, cursando as 4ª e 5ª série do Ensino Fundamental de três escolas particulares da cidade de São Paulo.

Para a realização do estudo, os pesquisadores aplicaram um teste seguido de entrevista. O teste continha questões convencionais (tratadas nos livros didáticos) e situações novas. Cada questão foi analisada e discutida individualmente.

Os resultados apontam algumas dificuldades dos alunos ao trabalhar com o conceito de fração. Estas dificuldades são retratadas, por exemplo, pela confusão que os alunos fizeram com os significados de numerador e denominador (ora o numerador era o número total de partes, ora era o número de elementos). Outra dificuldade diz respeito ao mecanismo de contagem de elementos (muito usado em quantidades discretas) que na tentativa de transferir esse tipo de procedimento para quantidades contínuas, os alunos cometem o equívoco de não relacionar as partes entre si levando em consideração as suas áreas. Os resultados apontam ainda que os alunos demonstraram facilidade ao lidar com frações com numerador um.

Os pesquisadores do PROEM explicitam ainda em suas conclusões que tanto o currículo como a metodologia empregada torna o ensino deficiente e que a formação do professor é cada vez mais inadequada à educação. Pontuam ainda que as dificuldades encontradas pelos alunos de 4ª e 5ª séries não se reduzem a

esta etapa de escolarização, mas também se estendem aos alunos de séries mais avançadas e até mesmo são encontradas no curso de pedagogia.

Finalmente, os pesquisadores chamam a atenção para os erros cometidos pelos alunos, pois estes devem ser encarados como indicadores das concepções e construções dos próprios alunos, ao invés de valorizar respostas e interpretações corretas visando apenas o “sucesso” na vida escolar.

Em seus estudos, com futuros professores, Silva (1997) teve como objetivo investigar as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração, nas concepções parte-todo, medida e quociente. A finalidade do estudo era possibilitar aos futuros professores das séries iniciais uma reflexão a respeito dos principais pontos da introdução do número fracionário no ensino, levando-os a trabalhar com diversas concepções do conceito.

Para realização de seus estudos Silva (1997) elaborou uma seqüência didática baseada na metodologia de pesquisa Engenharia Didática. Com base nos resultados obtidos, constatou que com relação aos aspectos didáticos, confirmando os resultados de Kieren (1988) e Campos (1989), a concepção dos professores ao associar a fração a uma figura, esta deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, considerando a área e a forma dessa figura. Esta necessidade é estabelecida pelo uso da dupla contagem das partes na identificação da fração, ao mesmo tempo em que conduz à idéia, conforme denominou a autora, de “discretização do contínuo”, pois a referência do inteiro inicial é substituída pelo número de partes conseguidas, após a divisão.

Foi observada também a dificuldade dos professores perceberem o desenho e a divisão de figuras como suportes para solução de algumas situações descritas no trabalho, nas quais as figuras aparecem previamente divididas.

Houve dificuldades para perceber as várias maneiras com que se pode dividir mais do que um inteiro ao mesmo tempo.

Silva (1997) destacou ainda a falta de entendimento do conceito de medição, o que dificultou realizar medições com unidades não usuais; uma tendência ao uso de algoritmos, em detrimento de um trabalho construtivo com a representação de figuras, sobretudo nas operações de adição e subtração. Independente do contexto, os futuros professores apresentaram, normalmente, os decimais como resultados das divisões, ao invés de perceberem a representação de um quociente por meio de uma fração.

Com relação aos obstáculos de origem epistemológica, a autora citada constatou que o conhecimento dos números naturais conduz à crença de que a adição e a subtração de frações seguem uma lógica análoga à dos números naturais, ou seja, basta somar os numeradores e os denominadores das frações envolvidos na operação. Observou ainda que o uso constante de nosso sistema métrico, representado exclusivamente por números decimais, dificultou a percepção das representações fracionárias.

Finalmente, apoiada nos resultados obtidos, a autora destaca como positivo o envolvimento dos futuros professores nas propostas, não havendo resistência a nenhuma discussão, o que levou a uma mudança de comportamento para quase todas dificuldades apresentadas.

Entretanto, a autora observa que alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, apresentam raízes profundas, sugerindo a necessidade de um trabalho mais a longo prazo, para que essas raízes possam ser removidas e pudesse crescer novamente com mais força em outras direções.

O trabalho apresentado por Bezerra (2001) objetivou investigar uma abordagem de ensino das frações, que pretendeu estudar a aquisição do conceito de fração e suas representações, com base em situações-problema que fosse significativas e desafiadoras para os alunos.

Para tanto, o autor realizou seus estudos em uma classe de alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, considerando que o contato desses alunos com frações fosse inédito. Nesse sentido, abordou em sua sequência de ensino as frações nas concepções parte-todo e quociente, contemplando tanto quantidade contínua como quantidade discreta.

Para validar seus estudos, Bezerra (2001) inicialmente aplicou um pré teste para duas turmas, uma denominada Grupo Experimental (GE) e outra denominada Grupo Controle (GC). No GE, o pesquisador utilizou 12 encontros sendo dois para aplicação do pré e do pós-teste e dez encontros utilizados efetivamente para aplicação da sequência de ensino.

No GC, houve apenas a aplicação do pré e do pós-teste, nesse intervalo de tempo os alunos, pertencentes a esse grupo, não tiveram contato com esse conteúdo, pois Bezerra (2001) objetivou com esse grupo a observação se algum acréscimo significativo de aprendizagem poderia ter ocorrido de maneira informal fora da escola.

Da análise dos resultados, o autor citado conclui que embora as crianças apresentem, após a intervenção, avanços cognitivos, ainda perduram alguns tipos de erros que o autor relaciona em seis categorias:

- E_1 – relacionar parte-parte, em quantidades discretas ou contínuas.

O erro foi observado em uma relação do tipo parte-todo que o aluno procedeu à contagem da parte destacada e, em seguida, procedeu à contagem

das demais partes, esquecendo de relacionar o todo. Para exemplificar, Bezerra (2001) apresenta uma questão que mostra o desenho de três corações e que um deles foi pintado, cuja pergunta era: “Como você pode representar numericamente o coração pintado em relação a todos os corações?” A resposta obtida foi $\frac{1}{2}$, que é característica do E_1 , ou seja, relacionar parte-parte.

- E_2 – relacionar todo-parte, em quantidades discretas ou contínuas.

O erro compreende a inversão das posições do numerador com o denominador.

- E_3 – representar uma fração, utilizando somente números naturais.

Este tipo de resposta, segundo o autor, evidencia que o aluno ainda não conseguiu operar com o novo conjunto numérico, assim, representa com o conhecimento anterior a nova situação, isto é, o conjunto dos números naturais.

- E_4 – considerar a palavra usada na leitura de uma fração, como sendo a quantidade a ser assinalada.

Este erro representa a ação do aluno, quando lhe foi solicitado que circulasse a quinta parte de um conjunto de dez elementos. O procedimento utilizado em tal situação foi circular cinco elementos do conjunto.

- E_5 – com quantidades discretas, centrar-se em única figura (observação da quantidade contínua) e desprezar as demais que compõe o todo.

Para Bezerra (2001), esse tipo de erro está relacionado ao procedimento do aluno frente a uma quantidade discreta, fixa-se em apenas uma figura e a considera como contínua, efetuando apenas a divisão dessa figura, desprezando as demais.

- E_6 – realizar uma divisão de uma quantidade contínua, desprezando a conservação das áreas na figura e repartindo as partes, segundo um critério aleatório.

Assim, o autor conclui em seus estudos que uma maneira de introduzir os números fracionários seria aquela baseada em situações que procurassem dar significado ao aluno. Nesse sentido, a seqüência de ensino proposta pelo autor citado contempla inicialmente situação em que está presente o modelo quociente. Embora no decorrer da intervenção, o autor citado apresenta situações com o modelo parte-todo, ele acredita que esse modelo é importante, mas não deve ser o único e tão pouco o início para o aprendizado dos alunos, pois, ele parece oferecer uma barreira maior entre os números naturais e os fracionários.

3.4. FRAÇÃO NA ESCOLA

Nessa seção, descreveremos as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para introdução do conceito de fração. Desse modo, iniciaremos a descrição a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), já que é nessa etapa escolar que as frações são introduzidas.

3.4.1. Fração e os Parâmetros Curriculares Nacionais

Segundo os PCN (1997), a abordagem dos números racionais tem como objetivo principal levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos por eles, são insuficientes para resolver determinados problemas. Sendo assim, os PCN recomendam que a construção da idéia do número racional

deve estar relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero.

No entanto, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com as idéias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais. Portanto, a aprendizagem dos números racionais demanda certo tempo e uma abordagem adequada.

Assim, sugerem que a introdução do estudo dos números racionais seja feita pelo seu reconhecimento no contexto diário. Nesse sentido, devemos observar que eles aparecem no cotidiano das pessoas muito mais em sua representação decimal do que na forma fracionária. Este documento sugere como um trabalho interessante, o uso da calculadora em atividades que os alunos são convidados a dividir um por dois, um por três, um por quatro, etc., nas quais eles perceberão que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar números naturais, podem ser aplicadas para obter a escrita dos racionais na forma decimal, acrescentando-se ordens à direita da unidade e de forma decrescente.

Nesse cenário, percebemos que os PCN indicam a abordagem dos números racionais, iniciando-se pela sua representação decimal, visto que esta representação aparece com mais frequência na vida cotidiana do aluno.

No que se refere à representação fracionária dos números racionais, os PCN evidenciam que o contato dos alunos com essa representação é bem menos freqüente, pois limita-se a metades, terços, quartos, na maioria das vezes, pela via da linguagem oral do que pelas representações.

De todo modo, esse documento pontua que a prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a

relação parte-todo. Neste caso, a fração indica a relação que existe entre o número de partes e o total de partes. Outro significado das frações é a do quociente; baseia-se na divisão de um número natural por outro ($a : b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$).

Esta situação, para o aluno, diferencia-se da interpretação anterior (parte-todo), pois dividir “um chocolate em três partes e comer duas dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir dois chocolates para três pessoas”. (PCN, 1997, p.103).

Os PCN sugerem, também, uma terceira situação diferente das duas anteriores, aquela em que a fração é usada como espécie de índice comparativo entre duas quantidades e uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão.

Podemos observar que além dessas três interpretações já descritas, acrescenta-se mais um significado da fração: operador, isto é, quando ela desempenha um papel de transformação, ou seja, algo que atua sobre uma situação e a modifica, sugerindo que esse quarto significado seja explorado nos ciclos posteriores.

Resumidamente, constatamos que os PCN sugerem que as frações sejam abordadas no segundo ciclo do Ensino Fundamental com os seguintes significados: relação parte-todo, quociente e razão, o outro significado, fração como operador, a ser trabalhado nos ciclos posteriores.

Diante desse contexto, os PCN apontam ainda, que a construção do conceito do número racional, no 2º Ciclo, pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo; pois se trata de um trabalho que apenas

será iniciado no segundo ciclo do Ensino Fundamental e consolidado nos dois ciclos finais.

Já nos terceiro e quarto ciclos, a abordagem dos números racionais deve ter como objetivo levar os alunos a perceber que números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema, como as que envolvem as medidas de uma grandeza e o resultado de uma divisão. Sob essa perspectiva, os PCN recomendam que, para abordar o estudo dos números racionais, deveríamos recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas, de forma a possibilitar bons contextos para seu ensino.

Assim, poderíamos discutir com os alunos, por exemplo, como os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles empregavam apenas as frações unitárias, com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Assim, em uma situação na qual precisam dividir, por exemplo, 19 por oito, eles utilizavam um procedimento que, em nossa notação, pode ser expresso por: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Desse modo, os PCN sugerem que esse tipo de problema poderá ser explorado e discutido com os alunos, e, por exemplo, solicitar que alunos mostrem que a soma acima indicada é $\frac{19}{8}$.

Observamos que os PCN, nos 3º e 4º ciclos, reforçam a idéia já sugerida para o ensino dos números racionais no 2º ciclo, de que os números racionais assumem diferentes significados em diversos contextos: relação parte-todo, divisor e razão e acrescentam outras interpretações diferentes, tais como:

- o número racional usado como índice comparativo entre duas unidades, reforçando a idéia já explicitada anteriormente para o 2º Ciclo;

- o número racional envolvendo probabilidades: a chance de sortear uma bola verde de uma caixa em que há duas bolas verdes e oito bolas de outras cores é de $\frac{2}{10}$;
- o número racional explorado em contextos de porcentagem como, por exemplo, 70 em cada 100 alunos de uma Escola gostam de futebol: $\frac{70}{100}$, 0,70 ou 70%, ou ainda, $\frac{7}{10}$, e 0,7.;
- o número racional com o significado de um operador, já sugerido anteriormente, isto é, quando desempenha o papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

Os PCN pontuam que, na perspectiva do ensino, não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações, ou seja, a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo dos 3º e 4º ciclos que possibilite a análise e a comparação das variadas situações problema.

Finalmente, as recomendações feitas pelos PCN traduzem uma inovação para o ensino, se analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Esta inovação é traduzida pela ênfase dada por esse documento ao ensino de fração baseada na resolução de situações-problema, levando em consideração dois aspectos fundamentais – (a) os significados que a fração poderá assumir em cada situação; (b) as diferentes formas para sua representação.

Entendemos que existe necessidade de melhor discussão a respeito dos diferentes significados que a fração pode assumir em diferentes contextos, e que

o resultado dessa discussão poderá apontar novos caminhos, tanto ao ensino como à aprendizagem do conceito de fração.

Ainda podemos acrescentar a isso uma necessária coordenação entre os aspectos formais e os cognitivos que envolvem o conceito de fração. O papel do professor é imprescindível nesse processo, pois cabe a ele a cuidadosa escolha de situações que possibilitem a coordenação desses aspectos.

Neste sentido, no próximo capítulo apresentaremos algumas considerações sobre a formação do professor, na perspectiva da legislação e das pesquisas que focalizam essa formação, especialmente, as que tratam da formação do professor que ensina Matemática.

CAPÍTULO 4

A FORMAÇÃO DOCENTE: PROBLEMAS, PERSPECTIVAS E DESAFIOS

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, discutiremos a formação do professor, quer do ponto de vista de sua formação inicial, quer do ponto de vista de sua formação continuada, bem como seu papel frente aos novos desafios impostos pelo mundo contemporâneo. Entendemos ser necessário a inserção desta discussão em nosso estudo, por termos a convicção de que os professores exercem um papel importante, não apenas porque explicam, mostram e gerenciam a situação em sala de aula, mas também por causa da cuidadosa escolha e adequação das situações que dão significado ao conhecimento.

Para tanto, elegemos a teoria de Perrenoud (2000), Nóvoa (2001), Shulman (1992), Moreira e David (2004) e outros estudos relevantes que tratam do conhecimento do professor que ensina Matemática, na perspectiva de discutir alguns fatores relevantes na formação desse professor. Dessa forma, discorreremos sobre a profissão docente, a legislação pertinente à formação do professor, sobre um modelo de competência docente e a relação do professor com o saber matemático.

4.2. A PROFISSÃO DOCENTE

Como toda profissão, o magistério teve uma trajetória construída historicamente. A forma como surgiu a profissão, as interferências do contexto sóciopolítico no qual ela esteve e está inserida, as exigências mostradas pela realidade social, as finalidades da educação em diferentes momentos, o papel e o modelo de professor, o lugar que a educação ocupou e ocupa nas prioridades do governo, os movimentos e lutas da categoria e as pressões da população ou da opinião pública, em geral, são alguns dos principais fatores determinantes do que foi, é e virá a ser a profissão do magistério.

Neste contexto, a função do docente vem passando por diversas transformações resultantes de mudanças nas concepções de escola e da construção do saber que vêm ocorrendo na sociedade, e que trazem como consequência a necessidade de respeitar a prática escolar cotidiana.

Além disso, as novas relações sociais e de trabalho criadas no mundo contemporâneo, com suas distintas tecnologias, introduzem um novo contexto em que a informação e a comunicação ocupam papéis centrais (Gatti, 1996).

Tudo isso desenha um cenário educacional com exigências para cujo atendimento os professores não foram, e talvez nem estejam sendo preparados. Dentre as exigências que se apresentam para o papel docente estabelecidas na proposta de diretrizes para a formação inicial de professores da educação básica, (Ministério da Educação, 2000), destacam-se:

- orientar e mediar o ensino para aprendizagem dos alunos;
- assumir e saber lidar com a diversidade existente entre os alunos;
- incentivar atividades de enriquecimento curricular;

- elaborar e executar projetos para desenvolver conteúdos curriculares;
- utilizar novas tecnologias, estratégias e materiais de apoio;
- desenvolver hábitos de colaboração e trabalho em equipe.

Podemos acrescentar a estas exigências do MEC a necessidade do professor ter a clareza que os conteúdos de ensino não têm sustentação em si mesmo, mas, constituem-se como meios, para que os alunos possam desenvolver capacidades e constituir competências.

Para tanto, a formação inicial, como preparação profissional, possui um papel fundamental para possibilitar que os professores apropriem-se de determinados conhecimentos e possam experimentar, em seu próprio processo de aprendizagem, o desenvolvimento de competências necessárias para atuar nesse novo cenário. Começaríamos, então, nossa discussão discorrendo sobre a Legislação que, de uma maneira geral, traça as diretrizes para os cursos de formação de professores.

4.3. A LEGISLAÇÃO E A FORMAÇÃO DOCENTE: SUPORTE LEGAL

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, 1996) organiza a educação escolar anterior à superior num mesmo segmento denominado Educação Básica, integrando assim, a Educação Infantil ao Ensino Fundamental obrigatório de oito anos ao Ensino Médio.

De todo modo, trata-se de uma educação básica unificada, como preconiza a LDBEN e, ao mesmo tempo, diversa de acordo com o nível escolar, pois demanda um esforço para manter a especificidade que cada faixa etária de atendimento impõe às etapas da escolaridade básica. Mas exige, ao mesmo

tempo, o prosseguimento dos esforços para superar rupturas, não só dentro de cada etapa, como entre elas. Para tanto, será indispensável superar, na perspectiva da Lei, as rupturas que também existem na formação dos professores de crianças, adolescentes e jovens.

Quando define as incumbências dos professores, a LDBEN não se refere a nenhuma etapa específica de escolaridade básica, mas traça um perfil profissional que independe do tipo de docência: multidisciplinar ou especializada, como podemos notar no seu Artigo 13:

Os docentes incumbir-se-ão de:

- I. Participar da elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino;*
- II. Elaborar e cumprir plano de trabalho, segundo a proposta pedagógica do estabelecimento de ensino;*
- III. Zelar pela aprendizagem dos alunos;*
- IV. Estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento;*
- V. Ministrar os dias letivos e horas-aula estabelecidos, além de participar integralmente dos períodos dedicados ao planejamento;*
- VI. Colaborar com as atividades de articulação da escola com as famílias e a comunidade.*

Estas circunstâncias descritas sugerem indicativos legais importantes que devem ser levados em conta para desenhar o perfil do profissional docente em sua formação:

- posiciona o professor como aquele que tem a incumbência de zelar pela aprendizagem, inclusive, daqueles com dificuldade de aprendizagem, toma como referência na definição de suas responsabilidades, o direito de aprender do aluno e não apenas a liberdade de ensinar do professor, o que significa que não é mais suficiente que um professor ensine, terá de ter competência para produzir resultados na aprendizagem do aluno;

- associa o exercício da autonomia do professor, na execução de um plano de trabalho próprio, ao trabalho coletivo de elaboração da proposta da escola, e ainda;
- aplica a responsabilidade do professor, para além da sala de aula, colaborando na articulação entre escola e comunidade.

A LDBEN dedica, ainda, um capítulo específico à formação dos profissionais da educação, com destaque aos professores. O capítulo tem em seu início os fundamentos metodológicos destacados que nortearão a formação, como podemos notar no Artigo 61:

A formação de profissionais da educação, de modo a atender aos objetivos dos diferentes níveis e modalidades de ensino e as características de cada fase do desenvolvimento do educando, terá como fundamentos:

- I. A associação entre teorias e práticas, inclusive mediante a capacitação em serviço;*
- II. Aproveitamento da formação e experiências anteriores em instituições de ensino e outras atividades.*

Definindo os princípios, a LDBEN (1996) dedica ainda dois artigos aos tipos e modalidades dos cursos de formação inicial de professores e sua localização institucional como podemos observar em seus Artigos 62 e 63.

Art. 62: A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em unidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal.

Art. 63: Os institutos superiores de educação manterão:

- I. Cursos formadores de profissionais para a educação básica, inclusive o curso normal superior, destinado à formação de docentes para a educação infantil e para as primeiras séries do ensino fundamental;*
- II. Programas de formação pedagógica para portadores de diplomas de educação superior que queiram se dedicar à educação básica;*
- III. Programas de educação continuada para profissionais de educação dos diversos níveis.*

Observando os dois artigos a que nos referimos anteriormente, é possível notar aspectos que favorecem uma articulação entre formação para atuação multidisciplinar e atuação de professor especialista em disciplina ou área de conhecimento. Esses aspectos são contemplados à medida que se atribui aos Institutos de Educação Superior (ISEs) a função de oferecer formação inicial para professores de toda a Educação Básica (da Educação Infantil ao Ensino Médio).

Talvez esta seja a mais importante inovação contida na LDBEN, no que diz respeito à formação dos profissionais em educação (professores), visto que esta medida pode representar um “ponto final” na desarticulação entre formação dos professores de Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental e formação dos professores para os anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

Esta desarticulação tem trazido à formação dos alunos o prejuízo da descontinuidade, gerando gargalos no fluxo da escolarização, representada, sobretudo, pelos índices de evasão e de repetência observados na transição entre 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.

Outros dois aspectos inovadores contidos no bojo da LDBEN merecem destaque quando se referem aos cursos de formação de professores. O primeiro é que, conforme conjugam diferentes licenciaturas por áreas ou disciplinas, os ISEs têm ainda a possibilidade de ser um potencial articulador dessas últimas, fazendo com que a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade, que são princípios organizadores do currículo da Educação Básica, passem a ser, também, princípios organizadores dos currículos de formação em nível superior de seus professores.

Ao passo que o segundo inclui entre as funções dos Institutos Superiores de Educação a formação pedagógica de profissionais de nível superior e a formação continuada de professores em serviço. A LDBEN posiciona-os, como articuladores entre esta e aquela. Assim, devemos refletir na melhoria de ambas as dimensões do processo de desenvolvimento profissional.

Em que pesem algumas considerações, é inegável que a LDBEN traz em seu bojo inovações importantíssimas do ponto de vista de suporte legal à concepção da formação do professor, quer seja quanto à formação inicial, quer seja quanto à formação continuada. Mas, por outro lado, também devemos reconhecer que este aspecto inovador trazido pela LDBEN/96, embora necessário não é suficiente, pois existem ainda outros pontos cruciais que devem ser agregados. Um deles diz respeito ao modelo de competência docente, o que passaremos a discutir, a seguir.

4.4. A DEFINIÇÃO DE UM MODELO DE COMPETÊNCIA DOCENTE

Historicamente e nos últimos anos, de modo mais acentuado a sociedade sofreu mudanças, a escola transformou-se e as propostas de ensino precisam acompanhar essas transformações. Além das influências sociais, o ensino também sofreu reformulações provenientes dos resultados das pesquisas que foram desenvolvidas no ensino e na aprendizagem no âmbito das diversas áreas curriculares.

Assim, vinculado a todo este contexto, destaca-se o fato de que a educação passou a ser considerada uma área essencial no desenvolvimento econômico e social das nações. Nessa perspectiva, muitas foram as

investigações sobre como se ensina, como se aprende e especialmente como se propõe a formação continuada dos professores.

Neste contexto, qual seria, então, um perfil de professor profissional que desse conta em seu ofício de fazer frente a esta conjuntura?

O professor, independentemente do nível de ensino em que atuar, necessita ter uma formação que inclua competência na especificidade de sua tarefa em um determinado momento sócio-histórico. Esta competência deveria lhe possibilitar reavaliar, constantemente, tanto sua experiência anterior como aluno como seu presente aprendizado de docente que atua em um mundo complexo, contraditório e em constante mudança.

Desse modo, Perrenoud (2000, p.15), define competência *“como capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos para enfrentar um tipo de situação”*.

Do professor, são exigidos: investimento emocional, conhecimento científico-teórico-pedagógico, conduta ética e compromisso com a aprendizagem dos alunos. Isto, sem dúvida, envolve o desenvolvimento da capacidade de participação coletiva para tomada de decisões, orientadas por um modelo de professor reflexivo, ou seja, que considera seu fazer docente e as práticas pedagógicas que ocorrem na escola, como objeto permanente de reflexão. Esta perspectiva de educação continuada embrica-se com o desenvolvimento da capacidade de avaliar situações e comportamentos e integra-se ao projeto educativo, constituído em cada instituição escolar.

Não obstante, faz-se necessário que o professor seja capaz de ultrapassar os conhecimentos do senso comum sem, no entanto, desconsiderá-lo. O professor dever ser alguém com habilidades de investigação para compreender o

saber fazer derivado, não só do curso de formação, mas também de sua matriz cultural. Especial atenção deve ser dispensada em relação a uma formação sólida reclamada pelos avanços do mundo contemporâneo e para aprender a conviver com a diversidade e ser solidário com os demais.

De todo modo, como mediador privilegiado da relação que cada indivíduo estabelece com o mundo e que lhe permite constituir sentidos e significados, além de habilidades e atitudes, cabe ao professor construir competências para interagir produtivamente com os alunos. Nesta perspectiva, retomando a idéia de competência, quais seriam, então, as competências prioritárias que deveriam ser levadas em conta na formação do professor?

Perrenoud (2000) discute, nesse sentido, que existem dez domínios de competências, sugerindo como prioritárias para atuação do professor. O autor organiza essas competências em dez grandes famílias, a saber:

- 1) organizar e dirigir a situação de aprendizagem;
- 2) administrar a progressão das aprendizagens;
- 3) conceber e fazer evoluir os dispositivos de diferenciação;
- 4) envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho;
- 5) trabalhar em equipe;
- 6) participar da administração da escola;
- 7) informar e envolver os pais;
- 8) utilizar novas tecnologias;
- 9) enfrentar os deveres e os dilemas éticos da profissão;
- 10) administrar sua própria formação continuada.

Agregadas a essas dez famílias de competência, todas tidas como prioritárias e de referência, o autor subdivide cada uma dessas famílias em competências mais específicas a serem trabalhadas em formação contínua.

O autor citado destaca que um professor, ao longo de sua carreira profissional, desenvolve uma série de competências que são tratadas como pouco nobres ou como “ossos do ofício”: acalmar a classe, estabelecer certa ordem, corrigir provas, dar uma orientação, ajudar um aluno em dificuldade, fazer com que os alunos trabalhem em grupo, explicar de novo uma reação ou um conceito mal compreendido, planejar um curso, dialogar com os pais dos alunos, mobilizá-los em torno de um projeto ou de um enigma, sancionar na medida adequada.

Se, por um lado, esse conjunto de competências é tido de “menor importância”, de outro lado estão as competências ligadas ao conhecimento teórico, que são muito valorizadas. Frente a tais considerações, não acreditamos que as competências ligadas ao conhecimento teórico devam sobrepor-se às aquelas construídas ao longo da experiência, mas sim, que os dois aspectos sejam coordenados e tratados com a mesma importância.

Além disso, Perrenoud (2000) evidencia que o professor deve dominar os conteúdos a serem ensinados. Todavia, isso apenas não basta, é preciso que seja criada uma linguagem acessível aos alunos e uma interligação entre os diversos domínios ensinados, bem como traduzir esses conteúdos em objetivos de aprendizagem.

O trabalho do professor com seus alunos, conforme o autor deve se iniciar a partir daquilo que eles já conhecem e não começar do zero. Os erros e as dificuldades devem ser encarados como uma ferramenta para ensinar, sendo

identificados não como uma punição ao aluno, mas como uma pista que é a origem dos mesmos para transpô-los.

O autor enfatiza, ainda, que o professor deve criar situações que conduzam à aprendizagem, aderindo a um procedimento construtivista que se oponha às tradicionais formas de transmitir o saber, como propor soluções para problemas sem que os alunos tenham oportunidade de compartilhar seus pensamentos.

O autor ao se referir à competência de administrar a progressão das aprendizagens destaca a importância de criar situações-problema desafiadoras que estimulem os alunos a novos conhecimentos, apoiados nos já construídos anteriormente, isto é, a situação proposta deve oferecer aos alunos desafios que estejam a seu alcance, bem como deve representar a possibilidade deles progredirem.

Discorrendo sobre a competência de administrar a progressão das aprendizagens, outro aspecto surge como central, que é a aquisição de uma visão longitudinal dos objetivos de ensino. Talvez este aspecto configure-se em um grande problema a ser enfrentado, pois o professor, normalmente, ao longo de sua vida profissional, concentra suas atividades em um mesmo ciclo de ensino (Fundamental, Médio e Superior), perdendo a dimensão do que é ensinado e trabalhado em outros ciclos, ou seja, é possível, por exemplo, um professor trabalhar durante vários anos com alunos do Ensino Médio, sem saber o que de fato é ensinado aos alunos no Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries).

Perrenoud (2000) chama-nos a atenção para competência importante: a questão da avaliação, colocando-a em uma perspectiva de relação diária entre o professor e seus alunos, cujo objetivo é auxiliar cada um a aprender, portanto não tendo nenhum motivo para ser padronizada nem mesmo a necessidade de

prestação de seus resultados a terceiros. Adotar esta perspectiva significa considerar cada situação de aprendizagem como fonte rica de informações ou de hipóteses para delimitar melhor os conhecimentos e a atuação dos alunos.

No ensino atual, há uma tendência para tratar os alunos de maneira homogênea, sobretudo em razão do grande número de estudantes em cada sala de aula. Trabalhar com a heterogeneidade de uma turma, também se constitui em uma competência. Mas como trabalhar estas diferenças em uma turma numerosa e dispondo de tão pouco tempo? Perrenoud (2000) destaca que a resposta a tal questão pode estar na criação dos chamados dispositivos múltiplos, ou seja, atribuindo tarefas autocorretivas, empregando softwares interativos, organizando o espaço em oficinas, criando grupos de estudo, desenvolvendo a cooperação entre os alunos, dentre outras.

Diferente dos cursos universitários e profissionalizantes, o ensino básico é obrigatório e, em decorrência disso, as crianças e adolescentes assistem a quase 40 aulas semanais sem poderem optar por não fazerem isso. Na verdade, a maioria talvez não gostasse de estar lá, mas está por obrigação. Dessa forma, uma competência a ser desenvolvida pelo professor é suscitar em seus alunos o desejo de aprender, dar sentido ao que está sendo ensinado, oferecendo oportunidades para que os alunos expressem suas opiniões e negociem regras.

O autor ainda destaca outras competências, como: “trabalhar em equipe”, ligada à capacidade do professor estabelecer relações interpessoais; “participar da administração da escola”, destacando a importância do professor preocupar-se com os projetos e metas da instituição onde trabalha e não apenas com suas aulas; “informar e envolver os pais”, ressaltando a importância de dirigir reuniões

de informação e debate, fazer entrevistas e envolver os pais na construção dos saberes.

Os avanços do mundo moderno colocam para o professor uma outra competência – utilizar as novas tecnologias em suas tarefas diárias. Utilizar o computador como ferramenta mediadora entre o ensino e a aprendizagem de um determinado conteúdo, pois exige do professor a competência de organizar e dirigir situações de aprendizagens, explorando as potencialidades didáticas dos “programas” em relação aos objetivos do ensino. Para tanto, o professor deve dominar as novas tecnologias e estar sempre atualizado.

Somam-se a isso as competências aqui discutidas e outras que são intrínsecas à profissão docente: o professor não deve apenas ser um especialista, mas deve, além disso, preocupar-se com questões sociais para o bem-estar da comunidade com a qual trabalha. Cabe ao professor ainda administrar sua formação contínua, tanto do ponto de vista individual como coletivo, sempre buscando novos conhecimentos e novas estratégias.

No entanto, Nóvoa (2001) diferente de Perrenoud (2000), destaca dois níveis de competências como sendo prioritários na ação profissional dos professores: o professor como um organizador do trabalho escolar, em suas diversas dimensões, e o professor como alguém que compreende um determinado conhecimento e é capaz de reelaborá-lo, no sentido de sua capacidade de ensinar um grupo de alunos.

Neste cenário, Nóvoa (2001) concebe a formação do professor como um aprender contínuo, centrado em dois pilares: na própria pessoa do professor, como agente, e na escola, como lugar de crescimento profissional permanente. Esta concepção, todavia, pressupõe uma mudança na lógica da formação do

professor, ou seja, passa de uma lógica que separava os diferentes tempos de formação, privilegiando claramente a inicial, para outra que percebe esse desenvolvimento como um processo.

Dessa forma, a formação do professor deve ser entendida, como um ciclo que abrange a experiência do professor como aluno na Educação Básica, como aluno dos cursos de graduação, como aluno em atividades de estágio supervisionado, como professor iniciante e como professor titular.

Nóvoa (2001) centraliza sua discussão na formação continuada dos professores, pois, segundo ele, a universidade pode oferecer ao professor um conjunto de conhecimento e de saberes, mas o professor precisa transformá-los em conhecimento profissional. Assevera-se afirmando que só se aprende ensinar ensinando. Neste sentido, destaca três idéias que são fundamentais no processo de formação continuada de professores:

- a formação de professores é sempre um exercício de escuta e de palavra. De escuta dos outros, novos conhecimentos, novas experiências e, sobretudo de escuta dos colegas, sejam eles mais novos ou mais experientes. De palavra, porque deve permitir que o professor verbalize suas percepções a respeito das coisas da educação e de sua própria experiência;
- a formação de professor é sempre um espaço de mobilização da experiência, pois um professor nunca é uma página em branco, que nada sabe. A formação só atingirá seus objetivos, se for capaz de fazer o professor transformar sua própria experiência em novos conhecimentos profissionais. Entende que a experiência por si só não é formadora, pois pode ser a rotina, a repetição de erros e processos de ensino inadequados.

Formadora é a reflexão sistemática, a indagação rigorosa e o inquérito efetivo a respeito de novas práticas e novas experiências e, sobretudo, formadora é a capacidade de refletir em voz alta e ser capaz de aprender com os outros;

- a formação de professor deve ser ainda um processo de desenvolvimento pessoal, mas também um momento de consolidação do docente coletivo, que é infinitamente maior do que a soma das experiências individuais de cada um.

Em suma, Nóvoa (2001) enfatiza que na formação dos professores é necessário avançar para além da descrição naturalista da prática pedagógica e construir a capacidade de análise dessa prática. É preciso, portanto, construir competências para descrição, sistematização e formalização das práticas concretas da sala de aula e da formação dos professores. Para tanto, o professor precisa tomar a palavra, registrar e divulgar essas novas práticas. É preciso saber analisar e analisar-se.

Tendo posto as competências gerais de um professor, passaremos, a seguir, a discutir esse professor frente ao saber matemático, já que nosso estudo está interessado em investigar especificamente a relação desse professor com esse campo de saber determinado.

4.5. O PROFESSOR E O SABER MATEMÁTICO

Embora encontremos uma acentuada presença de investigações e teorias que versam sobre a formação de professores, de uma maneira geral, como os estudos de Nóvoa (2001), Perrenoud (2000), Shulman (1992), os estudos de

Oliveira e Ponte (1996) revelam que, de modo geral, existem poucas pesquisas sobre a formação do professor, referindo-se a seus conhecimentos para ensinar Matemática.

Constatação similar, encontramos nos estudos realizados por Fiorentini et al (2003). Estes autores destacam num balanço de 25 anos da pesquisa brasileira, que há um pequeno número de estudos que investigam a formação do professor para ensinar Matemática no Ensino Fundamental. Seu estudo constatou que, até fevereiro de 2002, havia apenas um conjunto de 112 teses e dissertações defendidas nos programas de Pós-Graduação em Educação Matemática ou Educação que investigavam a formação de professores que ensinam Matemática (polivalentes ou especialistas) no Brasil.

Na tentativa de compreender a complexidade do saber docente, destacamos os estudos de Shulman (1992), que enfatizam que cada área de conhecimento tem uma especificidade própria, o que justifica sobremaneira a necessidade de se investigar o conhecimento do professor levando em consideração a disciplina que ele ensina. O autor identifica três vertentes no conhecimento do professor quando se refere ao conhecimento da disciplina para ensiná-la:

(a) o conhecimento do conteúdo da disciplina, ou seja, o professor deve ter sólida e clara compreensão da disciplina que vai ensinar baseado em diferentes perspectivas e estabelecer relações entre os diversos tópicos do conteúdo da disciplina e entre sua disciplina e outras áreas do conhecimento;

(b) o conhecimento didático da disciplina, isto é, uma combinação desencadeada entre o conhecimento da disciplina e o do modo de ensinar, tornando, assim, a disciplina compreensível para o aluno;

(c) o conhecimento do currículo que envolve a compreensão do programa o conhecimento dos materiais que o professor irá disponibilizar para ensinar sua disciplina, a capacidade de fazer articulações horizontais e verticais do conteúdo a ser ensinado e a história da evolução curricular do conteúdo a ser aprendido.

Neste sentido, pesquisas que focalizam os saberes matemáticos envolvidos na atuação do professor, apontam em seus resultados que parece haver uma lacuna entre o conhecimento do professor, o conteúdo a ser ensinado e a forma de como ele pode ser aprendido. Esta evidência é apontada, por exemplo, nos estudos de Oliveira e Ponte (1996), quando afirmam baseados nos resultados de pesquisa, que o conhecimento dos professores e futuros professores sobre os conceitos matemáticos e a aprendizagem dessa disciplina é muito limitado, quase sempre marcado por sérias incompreensões.

Na busca de compreender quais os conhecimentos necessários para a atuação do professor, pesquisadores têm se dedicado a investigar que conhecimentos matemáticos os professores devem ter para ensinar Matemática.

Neste sentido, Monteiro (2001) destaca que o conhecimento matemático necessário para ensinar deverá possibilitar ao professor condições de tratá-lo corretamente, tanto do ponto de vista de torná-los compreensíveis a seus alunos, como do ponto de vista de sua relação com outros temas. A autora destaca ainda que é desejável que os futuros professores reconheçam a importância do papel da Matemática, tanto no desenvolvimento do pensamento e da orientação espacial como em seu papel imprescindível na organização de informações.

Pires (2003) considera pelas especificidades de sua profissão, que os professores que ensinam Matemática devem conhecer de Matemática não é equivalente ao que seus alunos irão aprender. Evidencia, ainda, que além de

conhecer a Matemática, os professores devem conhecer sobre a Matemática e ter uma clara compreensão dos processos de aquisição do conhecimento matemático (aprendizagem de seus alunos).

Agregados ao conhecimento da e sobre a Matemática de e sobre os processos de aquisição dos conhecimentos matemáticos, estão os que se referem ao conhecimento didático e ao conhecimento do currículo da disciplina matemática. Nesse sentido, Oliveira e Ponte (1996) consideram que os conhecimentos didáticos dos conteúdos matemáticos possibilitam ao professor aprofundar as reflexões sobre sua prática, analisar os objetivos de aprendizagem, as tarefas matemáticas e os papéis do professor e do aluno durante a realização de uma atividade matemática.

No que concerne ao conhecimento do currículo, este permite ao professor fazer articulações horizontais e verticais do conteúdo a ser ensinado, bem como uma análise histórica crítica sobre a evolução curricular do conteúdo a ser ensinado. Esta compreensão do currículo possibilita ao professor o entendimento de certos movimentos de mudança ocorridos como, por exemplo, a mudança curricular proveniente da Matemática Moderna.

Em suma, parece haver um consenso entre os diversos pesquisadores, embora seus estudos, às vezes, partam de perspectivas distintas, que os conhecimentos necessários ao professor que ensina Matemática devem ser sustentados por um “sólido” conhecimento de e sobre a Matemática (considerando também as variáveis curriculares), de e sobre o processo de geração das noções matemáticas, sobre as interações em sala de aula e a respeito do processo instrutivo.

Frente às considerações feitas até aqui, parece-nos que uma questão apresenta-se como desafiadora – como integrar as idéias teóricas sobre os saberes matemáticos necessários à atuação docente aos cursos de formação? Acreditamos que ainda exista um longo caminho a percorrer, pois, apesar de existirem alguns avanços nesse sentido, o que temos observado nos cursos de formação de professores ainda é uma prática desarticulada entre a Matemática (como ciência) e a Matemática escolar (como disciplina, portanto, sendo passível de ser ensinada e aprendida, de ser reinventada e reconstruída).

Nesse sentido, Moreira & David (2004), no artigo “Números Racionais: Conhecimentos da Formação Inicial e Práticas Docentes na Escola Básica” restringem suas considerações a certos aspectos dos números racionais, apresentam uma análise do conhecimento matemático veiculado no processo de formação inicial do professor no Curso de Licenciatura da UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais).

No entanto, evidencia que apesar das pesquisas mostrarem que, em termos da prática docente, a construção dos números racionais é uma das mais complexas operações da Matemática escolar, esse conjunto é visto como um objeto extremamente simples ao longo dos cursos de formação. O tratamento dado ao conjunto dos números racionais refere-se apenas à definição, demonstrações formais e propriedades, em outras palavras:

...é como se a teoria da Matemática científica sobre os números racionais resultasse da ação de um fortíssimo compactador que condensa – e, portanto, de certa maneira, esconde – uma variedade imensa de idéias matemáticas em alguns enunciados formais: as definições e os teoremas relativos às propriedades das operações. MOREIRA e DAVID (2004 p.16).

Adotar esta perspectiva como tratamento didático, para o conjunto dos números racionais, nos cursos de formação de professores, parece-nos, não apenas, não ser suficiente, como também não favorece a explicitação das idéias matemáticas subjacentes às propriedades e às definições. Pois o trabalho com números racionais, do ponto de vista da Matemática escolar, pressupõe não só operar com significados concretos da fração e de outras interpretações, mas também compreender as relações entre seus elementos, as novas formas de representações, a nova ordem, as novas operações e suas novas propriedades.

A compreensão de todas estas questões poderia permitir ao professor propor e discutir com seus alunos, por exemplo, por que no processo de extensão dos campos numéricos algumas propriedades e definições mantêm-se válidas e outras, não. No domínio dos números naturais, o fato de que dois conjuntos são rotulados pelo mesmo número falado – digamos ambos os conjuntos têm cinco elementos, pode ajudar os alunos a entenderem a equivalência entre dois conjuntos. Esta situação é, provavelmente, mais complicada com as frações, quando a equivalência de frações é designada por palavras diferentes – um terço, dois sextos – e diferentes signos numéricos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$.

De todo modo, Moreira e David (2004) afirmam que o tratamento dado ao conjunto dos números racionais, como alvo dado e estático desenvolve-se orientado pelos valores conceituais e estéticos na Matemática acadêmica, garantindo dessa forma, em tese, um estatuto de formação teórico-científico. Portanto, esta visão predominante no processo de formação, pode ter algumas implicações sérias, uma vez que a articulação entre o processo de formação na licenciatura com a prática escolar é concebida como uma tarefa a ser executada, essencialmente, fora do espaço da formação matemática.

Os autores sugerem que a construção de uma articulação mais adequada entre o processo de formação e a prática docente escolar está inteiramente ligada a uma concepção de formação que tome como referência central a Matemática em sua condição de disciplina escolar, “ao invés de se tentar integrar a prática escolar a uma formação específica orientada pela Matemática científica” (Moreira e David, 2004, p.17).

Finalmente, o conhecimento do professor configura-se como um conhecimento contextualizado e dinâmico, um saber que emerge da ação e situa-se em um dado contexto. Enfim, a Matemática que o professor precisa saber não é a mesma do cientista e nem mesmo aquela que seus alunos irão aprender. A essa idéia, somam-se ainda os conhecimentos sobre a disciplina, sobre os estilos de aprendizagem de seus alunos, sobre um repertório de técnicas de ensino e competências de gestão de sala de aula.

4.6. REFLEXÕES FINAIS SOBRE O CAPÍTULO

Sem dúvida, necessitamos de professores críticos, transformadores e criativos que valorizem a educação como instrumento necessário à construção da cidadania e que persigam a construção de uma escola de qualidade a todos os alunos sem exceção. Neste sentido, devemos ter como perspectiva não mais uma formação baseada na racionalidade técnica, que considera o professor como mero executor de decisões alheias, mas sim, uma perspectiva orientada pela compreensão de que o professor decide e é capaz de confrontar suas ações cotidianas com as produções teóricas, rever suas práticas.

Neste contexto, pensar a formação do professor, significa tomá-la como um “continuum” e entender que ela é, também, autoformação, uma vez que os professores reelaboram os saberes iniciais em confronto com suas experiências práticas cotidianamente vivenciadas nos contextos escolares. É nesse confronto e num processo coletivo de troca de experiências e práticas que o professor vão constituindo seus saberes, refletindo na e sobre a prática.

Mediante todas estas reflexões, torna-se necessário delinear um novo paradigma para nortear o “ofício” de professor – de detentor do saber acumulado para mediador desse saber; de transmissor de conhecimento para facilitador do conhecimento; em suma, torna-se necessário reconstruir a relação professor – saber – aluno.

Cabe ressaltar que as reflexões feitas no presente capítulo, tanto do ponto de vista da legislação como das pesquisas que versam sobre a formação e os conhecimento matemáticos dos professores, irão permear a análise de nossos resultados.

No próximo capítulo, apresentaremos a metodologia utilizada para a realização do estudo, os sujeitos da pesquisa, o universo do estudo e os procedimentos adotados na coleta de dados.

CAPÍTULO 5

A PESQUISA: UM PLANO EM AÇÃO

5.1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste estudo é investigar junto a professores que atuam no Ensino Fundamental, suas concepções em relação ao conceito de número racional em sua representação fracionária. Para tanto, traçamos um desenho metodológico do presente estudo, o qual está relatado neste capítulo. Nele apresentaremos a discussão teórico-metodológica, o universo de estudo, o estudo piloto e o estudo principal. Iniciaremos a apresentação pela discussão teórico-metodológica do estudo.

5.2 DISCUSSÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

A pesquisa-diagnóstica deste estudo é do tipo qualitativa, pois permite observar, interpretar e analisar as atividades produzidas por professores relacionadas às suas concepções a respeito de um dado conceito matemático. Desse modo, a coleta e análise dos dados, pelas suas características intrínsecas conduzem-nos para utilização de uma abordagem metodológica quantitativa/qualitativa para apresentação dos resultados.

Diante desta perspectiva, iremos nos apoiar no método de Análise de Conteúdo de Bardim (1977), que é em um método de tratamento e análise de

informações, colhidas por meios de técnicas de coleta de dados, consubstanciadas em um documento, cujo objetivo, dentre outros, é compreender criticamente o significado contido na comunicação escrita, tanto do ponto de vista de seu conteúdo manifesto como de seu conteúdo latente – as significações explícitas ou ocultas.

Este método tem como ponto de partida a mensagem, podendo esta ser espontânea ou provocada. Em nosso estudo a mensagem foi provocada, enfocando no centro das análises as concepções dos que as produzem – produtor. Dessa forma, três pressupostos básicos garantem a relevância deste enfoque:

- toda mensagem escrita contém, potencialmente, uma grande quantidade de informações sobre seu autor, isto é, suas concepções a respeito de determinado assunto, que em nosso caso, refere-se ao conceito de fração;
- o produtor/autor é antes de tudo um selecionador e essa seleção não é arbitrária. Da multidão de manifestações da vida humana, seleciona o que considera mais importante para dar seu recado e interpretá-la de acordo com seu quadro de referência, ou seja, as concepções do professor, talvez, mantenham estreita relação com sua formação, sua experiência e sua visão de mundo;
- o “conhecimento”, do qual o autor é o expositor, determina suas concepções a respeito de uma dada realidade.

Outro aspecto relevante que nos levou a optar para utilizar esse tratamento metodológico – a Análise de Conteúdo cabe explicitar que é a possibilidade de criar categorias de análise a posteriori, que emergem do conteúdo das respostas.

Bardin (1977) assinala que existem três etapas básicas no trabalho com esse método:

- a pré-análise, que consiste simplesmente na organização dos dados coletados;
- a descrição analítica – o material e os dados constituem o “corpus”, que é portanto, submetido a um estudo aprofundado, orientado a princípio, pelas hipóteses e referências teóricas;
- a interpretação referencial – apóia-se no material de informação, que se inicia já na etapa da pré-análise e avança com maior intensidade. Momento em que o pesquisador deverá ser reflexivo e coordenar qualitativamente os dois aspectos da informação – o conteúdo manifesto e o latente.

Nesta perspectiva e à luz de uma boa metodologia, o método de estudo desta pesquisa foi desenhado:

1) Com o objetivo do trabalho e a questão de pesquisa em mente, passamos a conceber um instrumento para coleta de dados que desse conta de responder à nossa questão de pesquisa à luz de uma boa teoria. Esta etapa do estudo está associada à etapa que Bardin (1977) considera como sendo a primeira fase da análise de conteúdo – a pré-análise.

2) De posse dos dados coletados, passamos à segunda fase do estudo: o tratamento quantitativo dos dados, segundo uma categoria de análise definida, ou seja, a descrição analítica dos dados constitui, portanto, a segunda fase do método.

3) Depois de termos “debruçado” sobre os dados, dando-lhes um tratamento quantitativo, esta etapa do estudo refere-se ao momento de um

tratamento qualitativo dos dados – coordenando seus dois aspectos – o conteúdo latente e o manifesto.

Por fim, acreditamos que o uso da metodologia de Análise de Conteúdo configura-se em uma metodologia bem adaptada às características intrínsecas da pesquisa. Diante do exposto, passaremos a descrever o universo de estudo.

5.3. UNIVERSO DE ESTUDO

O presente estudo foi realizado com professores que atuam no ensino fundamental em escolas públicas da cidade de São Paulo, que estão inseridas na zona leste, região pouco favorecida economicamente e com sérios problemas sociais. De acordo com dados levantados no Plano de Gestão 2003, no item – caracterização discente e docente, a maioria da comunidade escolar é moradora de cortiços, favelas ou pequenas casas onde se acomodam todos os membros da família, geralmente, numerosa.

Conforme, esses dados, os sujeitos participantes do estudo também são moradores em bairros localizados no entorno das escolas, em sua maioria, e, portanto, sofrem das mesmas privações de toda a comunidade. Existe uma carência de locais que possibilitam atividades de cultura e de lazer.

Delineado o contexto do nosso universo de estudo, passaremos a seguir a descrever as etapas desta pesquisa: o estudo piloto e o estudo principal. Iniciaremos pela descrição do estudo piloto.

5.4. FASE 1: ESTUDO PILOTO

O estudo piloto foi realizado com um grupo de oito professores de uma escola pública da cidade de São Paulo, que atuava nos primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, escolhidos aleatoriamente entre um grupo de 27. O estudo consistiu em solicitar ao grupo de professores a elaboração de quatro problemas, individualmente e sem apoio de qualquer instrumento, envolvendo o conceito de número racional em sua representação fracionária.

A aplicação do estudo piloto teve uma duração média de 30 minutos e ao final, estávamos de posse de oito protocolos, contendo um total de 32 problemas, que foram analisados à luz dos cinco significados da fração já descritos no capítulo IV desta dissertação. Optamos pela não descrição do resultado dessa análise por julgarmos não ser necessária, visto que nosso objetivo com a análise do estudo era estabelecer parâmetros para elaboração do instrumento diagnóstico do estudo principal.

O estudo piloto, porém nos serviu de referência para que pudéssemos fazer alguns ajustes no instrumento diagnóstico do estudo principal. O ajuste básico feito entre um estudo e outro foi a ampliação da quantidade de problemas a serem elaborados. Percebemos que o número de problemas deveria ser aumentado de quatro para seis, entendendo que um maior número de problemas possibilitaria um universo mais amplo para a análise, bem como os sujeitos da pesquisa teriam um maior número de possibilidades para a formulação dos problemas podendo contemplar dessa forma, um universo maior de significados de fração.

Notamos, ainda, a necessidade de não apenas analisar e classificar os enunciados dos problemas, mas também examinar e classificar as estratégias de resolução utilizadas pelos sujeitos, pois reduzir a análise apenas ao enunciado do problema seria desconsiderar um dado importante: as concepções do professor no momento da formulação e no momento da resolução.

Finalmente, o estudo piloto possibilitou o desenho de um instrumento diagnóstico que acreditamos dar conta de nossos objetos, além de responder satisfatoriamente à nossa questão de pesquisa. Passaremos, então, à descrição do estudo principal.

5.5. FASE 2: ESTUDO PRINCIPAL

O estudo principal consistiu em solicitar a um grupo de 67 professores a elaboração de seis problemas, envolvendo o conceito de número racional em sua representação fracionária. Assim, os itens que fizeram parte deste estudo serão descritos com mais detalhes: o universo de estudo, o material utilizado, o procedimento e as estratégias empregadas na coleta de dados.

5.5.1 Sujeitos

O estudo foi realizado em sete escolas estaduais localizadas na zona leste, no Município de São Paulo, sendo que três dessas escolas agregavam classes das séries iniciais do Ensino Fundamental, (1º e 2º ciclo) e as outras quatro escolas, classes de 5ª série do Ensino Fundamental a 3ª série do Ensino Médio. O critério usado para escolha das escolas foi o da acessibilidade.

As escolas das séries iniciais funcionavam em dois períodos, agregavam cerca de 46 professores polivalentes sendo distribuídos da seguinte forma: 21 professores de 1ª e 2ª séries e 25 de 3ª e 4ª séries. As escolas que agregavam da 5ª série do Ensino Fundamental a 3ª série do Ensino Médio funcionavam em três períodos. Nessas escolas, a coleta de dados restringiu-se a professores de matemática que atuavam, especialmente, nas 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental (3º ciclo), totalizando 21 professores.

Dessa forma, nossa população foi de um total de 67 professores que, por razões metodológicas, foram divididos em três grupos. O grupo 1; constituído de 21 professores polivalentes que atuavam nas 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental que, obviamente, não estavam trabalhando formalmente com o ensino do conceito de fração em suas respectivas classes, que denominaremos de G_1 .

O grupo 2, foi constituído 25 professores polivalentes, que atuavam nas 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental e que trabalhavam formalmente com o ensino conceito de fração em suas respectivas classes; que denominaremos de G_2 . O grupo três foi constituído de 21 professores especialistas que atuavam nas 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e que trabalhavam com a “extensão” do conceito de fração em suas respectivas séries, que passaremos doravante a denominá-lo de G_3 .

Cabe ressaltar que consideramos como professor polivalente, aquele que trabalhava com todos os componentes curriculares em suas respectivas séries e que teve sua formação no curso de Habilitação Específica para o Magistério das séries iniciais do Ensino Fundamental. Já os professores denominados de especialistas, são aqueles que trabalhavam especialmente com o ensino da

Matemática e com formação em cursos de licenciatura em Matemática ou similares.

Os dados da tabela abaixo descrevem o número de escolas, bem como a distribuição dos professores por escola.

Tabela 5: Distribuição dos sujeitos de pesquisa, por escola.

Escola	A	B	C	D	E	F	G	Total
Grupo 1	10	7	5	-	-	-	-	21
Grupo 2	11	8	6	-	-	-	-	25
Grupo 3	-	-	-	3	4	8	6	21
Total	21	15	11	3	4	8	6	67

De acordo com os dados da tabela 1, os professores do estudo estão distribuídos: grupos 1 e 2 (professores polivalentes) – nas escolas A, B e C e o grupo 3 (professores especialistas) nas escolas D, E, F e G.

5.5.2. Material utilizado

No presente estudo, o material empregado resumiu-se em:

- um caderno composto de quatro folhas – material elaborado pelo pesquisador para a coleta de dados
- lápis, borracha, caneta para anotações do pesquisador e dos sujeitos da pesquisa.
- um pacote de folhas de sulfite, distribuídas aos sujeitos da pesquisa, como material para rascunho.

5.5.3. Descrição do Instrumento empregado para coleta de dados

O instrumento diagnóstico utilizado na coleta de dados contemplou uma organização, na qual foi possível sua utilização nas duas fases do estudo, isto é, na elaboração e na resolução dos problemas. A primeira folha, a capa, composta de perguntas, por meio das quais tivemos a possibilidade de traçar algumas características do perfil dos sujeitos de pesquisa, tais como idade e tempo de serviço. As demais folhas do referido instrumento, (folha 2, folha 3 e folha 4), tiveram uma organização com espaços adequados, tanto para a formulação dos enunciados dos problemas, como para sua resolução. O instrumento, em sua íntegra, encontra-se em anexo.

5.5.4. Procedimentos

A coleta de dados, como já explicitado, foi feita em duas sessões com duração média de 50 minutos, durante o Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC). Como nosso universo de estudo constou de sete escolas, foram necessários 14 encontros, dois em cada escola em momentos distintos, para que pudéssemos efetivamente concluir a coleta de dados.

Na primeira sessão, reservamos os primeiros dez minutos para entrega do caderno e do material a ser utilizado pelos sujeitos da pesquisa. Estes foram informados que a atividade consistia na elaboração de seis problemas que contemplassem o número racional em sua representação fracionária. Foram informados, que a atividade deveria ser individual e sem apoio de nenhum tipo de

instrumento, tais como: livros didáticos, apostilas, entre outros. Nesta primeira sessão, o tempo médio gasto sessão variou de 30 a 40 minutos. Cabe salientar que contamos com o apoio de um auxiliar de pesquisa, o professor coordenador (PCP) de cada escola, que teve a função de auxiliar na distribuição e no recolhimento do material usado na coleta de dados.

De posse dos dados coletados, na primeira sessão, partimos para a primeira análise dos resultados que consistiu em classificar os enunciados dos problemas elaborados pelos professores à luz dos cinco significados da fração: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicador.

Cabe destacar que, com o intuito de validar nossa classificação e consolidar a categoria de análise, contamos ainda com a classificação feita por sete professores de matemática, que denominamos de juízes. Todos esses professores, graduados em matemática e alunos do Programa Estudo Pós Graduados em Educação Matemática (quatro alunos do programa de mestrado e três do programa de doutorado).

Para tanto, cada juiz recebeu um caderno com todos os problemas elaborados pelos sujeitos e uma síntese constando as idéias básicas de cada significado com um exemplo clássico de cada um. Cada juiz procedeu a sua classificação individualmente e sem nossa interferência. Com o resultado de todos os juízes em mãos, passamos, então, a confrontar a análise de todos os problemas um a um. Dessa forma, sendo considerada como classificação definitiva, aquela que, pelo menos, cinco pontos de vista foram coincidentes. Assim, ao total foram analisados de 402 problemas.

Depois de concluída essa primeira etapa de coleta e classificação dos enunciados dos problemas, partimos para outra fase da nossa coleta de dados –

a segunda seção. O tempo médio entre a primeira e a segunda sessão foi de aproximadamente 30 dias, tempo suficiente para concluir nossa primeira análise.

Com relação à segunda sessão, esta consistiu em solicitar aos mesmos sujeitos participantes da primeira sessão, que resolvessem os problemas por eles elaborados. É oportuno pontuar que os sujeitos não foram informados sobre essa dinâmica da coleta de dados, isto é, após a elaboração dos problemas não foram informados que os resolveriam posteriormente.

Concluída a segunda sessão, o próximo passo consistiu em analisar os procedimentos, as estratégias utilizadas pelos sujeitos na resolução dos problemas. Os critérios e os resultados dessa análise serão detalhados no próximo capítulo, momento em que apresentaremos os resultados, coordenando dois aspectos: o quantitativo e o qualitativo.

No próximo capítulo, apresentaremos os resultados dessa classificação, bem como as categorias que usaremos para as análises dos dados. Os resultados como já sinalizamos no presente capítulo, serão apresentados e analisados em duas etapas: primeira etapa – análise da elaboração dos problemas – e segunda etapa – análise da resolução.

CAPÍTULO 6

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

6.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior apresentamos nosso universo de estudo e a metodologia empregada na coleta de dados. Com base nesses dados, o presente capítulo propor-se-á a apresentar a análise dos resultados coordenando duas perspectivas de análise: a quantitativa e a qualitativa. No entanto, nossa análise será divididas em duas etapas.

A primeira etapa refere-se ao enunciado dos problemas elaborados, momento em que os dados serão apresentados observando: o tipo de situação elaborada - consistente ou inconsistente - a utilização dos diferentes significados da fração - N° (número), PT (parte-todo), ME (medida), QO (quociente) e OM (operador multiplicativo) - as variáveis utilizadas - quantidades contínuas e discretas - e os invariantes do conceito de fração - ordem e equivalência.

No que tange à segunda etapa, esta se refere à observação das estratégias e dos esquemas de ação utilizados pelo sujeito no momento da resolução dos problemas e as variáveis empregadas como procedimento de resolução. Com base nessas estratégias será possível categorizar os procedimentos de resolução utilizados pelos sujeitos frente a situações por eles elaboradas.

Antes de iniciar a análise propriamente dita, gostaríamos de relatar um pouco sobre o perfil dos sujeitos da amostra. Este relato deve-se ao fato de

acreditarmos que alguns fatores, como formação e tempo de experiência, podem interferir, sobremaneira, na concepção de nossos sujeitos que, conseqüentemente, podem se constituir em objeto de análise à luz dos aspectos quantitativos e qualitativos.

6.2. PERFIL DOS PROFESSORES

Nossa amostra apresenta algumas características que gostaríamos de retomá-las nesse momento:

- a) todos os sujeitos são professores de escolas públicas estaduais;
- b) o grupo denominado G_1 foi constituído por professores das 1^{as} e 2^{as} séries do Ensino Fundamental que, no momento da coleta de dados, não estavam trabalhando com ensino de fração;
- c) o grupo denominado G_2 foi formado de professores das 3^{as} e 4^{as} séries do Ensino Fundamental que, no momento da coleta de dados, estavam trabalhando com ensino de fração;
- d) o grupo denominado G_3 foi integrado por professores que, no momento da coleta de dados, estavam atuando predominantemente nas 5^{as} e 6^{as} séries do Ensino Fundamental, e que, portanto, estavam trabalhando com a extensão do ensino de fração.

A seguir, apresentaremos o perfil da amostra considerando as seguintes perspectivas: formação e tempo de experiência no exercício do magistério, em relação aos professores polivalentes e especialistas.

6.2.1. Professores Polivalentes

O grupo formado pelos professores polivalentes foi constituído por um total de 46 sujeitos, dos quais cerca de 84%, ou seja, 39 professores, além de possuírem uma formação inicial nos cursos de Habilitação Específica para o Magistério, nível médio, possuíam também formação em curso superior de diferentes áreas.

Tabela 6.1: Distribuição dos professores de acordo com a sua formação.

Curso	Pedagogia	Letras	Hist./Geog.	Biologia	Ed. Artística
Quantidade de Professores.	20 de 39 51,2%	08 de 39 20,5%	05 de 39 12,8%	04 de 39 10,2%	02 de 39 5%

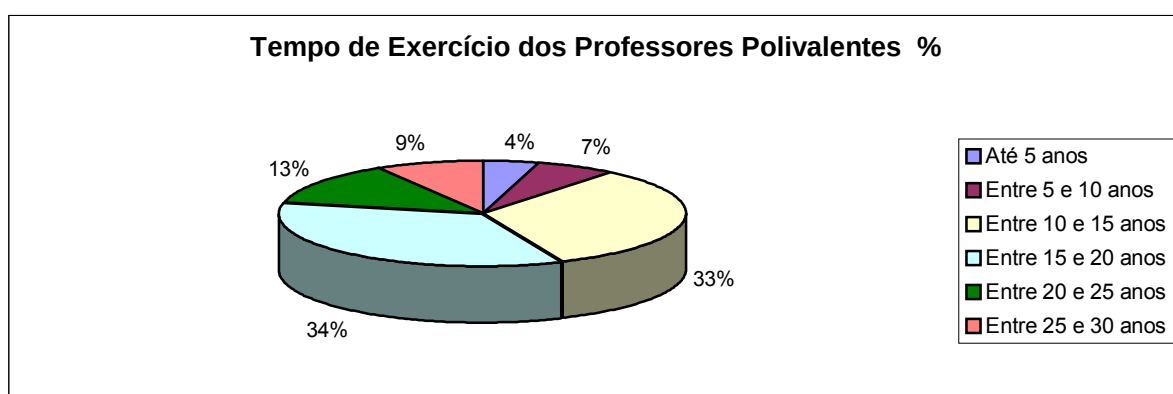
Pelos dados da Tabela 6.1, podemos constatar que a maioria - 51,2% - dos professores polivalentes, possui formação inicial em nível médio - curso de Habilitação Específica para o Magistério e curso superior de Pedagogia. Esta tendência pode estar ligada ao fato de que o curso de Pedagogia contempla, aparentemente, uma matriz curricular bem próxima das chamadas “disciplinas pedagógicas” oferecida nos cursos de Habilitação Específica para o Magistério, em nível médio. Talvez nesta similaridade aparente, reside o fato desses professores preferirem o curso de Pedagogia.

Observamos, ainda, que nenhum professor desse grupo, possui formação em Matemática ou em cursos similares.

Com relação ao tempo de experiência, constatamos que a maioria dos professores desse grupo já ministrou aulas em todas as séries iniciais do Ensino Fundamental - 1ª a 4ª séries. Esta distribuição pelas diferentes séries quase

sempre se apresentou de maneira eqüitativa, exceção feita a apenas dois professores, que sempre ministraram aulas a alunos de 3ª e 4ª séries, durante oito e dez anos, respectivamente. O gráfico a seguir apresenta a distribuição destes 46 professores com relação ao tempo em que exerce sua profissão.

Gráfico 6.1: Tempo de experiência dos professores polivalentes



Pela análise do gráfico, constatamos que esse grupo de professores possui um razoável tempo no exercício do magistério, e que quase 90% atuam há mais de dez anos nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

6.2.2. Professores Especialistas

O grupo de professores especialistas, na totalidade, teve sua formação em cursos de Licenciatura em Matemática e atuava predominantemente, nas 5ª e 6ª

séries do Ensino Fundamental. Alguns completavam a sua jornada de trabalho semanal atuando em outras séries.

Os professores especialistas possuíam, no geral, um tempo de experiência na docência inferior ao tempo dos professores polivalentes, se considerarmos que cerca de 80% desse grupo possuíam, em média, cinco anos de experiência no momento da nossa pesquisa como mostram os dados da tabela a seguir:

Tabela 6.2: Tempo de experiência dos professores especialistas.

Tempo	Até 5 anos	6 - 10 anos	11 - 15 anos	16 ou mais
Quantidade de professores	6 de 21 28,57%	11 de 21 53,38%	3 de 21 14,28%	1 de 21 4,77%

Todas essas características foram apresentadas na expectativa de delinear o perfil dos sujeitos da pesquisa com o objetivo de detectarmos outros tipos de análise, tais como: conhecer se a concepção do professor, com pouca experiência, apresenta diferença significativa em relação à concepção do professor mais experiente, quando se trata do conceito de fração.

A pretensão da pesquisa, ao apresentar seus resultados, não é qualificar em “melhor” ou “pior” a concepção desses professores em relação ao conceito de fração. Também não objetivamos generalizar nossos resultados para além do universo pesquisado, pois temos consciência que se trata de um estudo com um pequeno número de sujeitos, os quais foram escolhidos sem o rigor da aleatoriedade estatística.

Acreditamos, no entanto que, nossos resultados poderão trazer contribuições significativas no sentido de aprofundar o nosso entendimento sobre as concepções dos professores no que diz respeito ao tema do nosso estudo. O estudo também poderá contribuir para examinarmos a influência que a formação

do professor e a sua experiência docente podem ter sobre suas concepções. Temos fortes razões para acreditar que os resultados desse estudo diagnóstico poderão contribuir para futuros estudos que objetivem investigar novas abordagens para o ensino de fração, como pretendemos apontar no final do trabalho.

6.3. PRIMEIRA ETAPA DE ANÁLISE: DA ELABORAÇÃO

Nesta fase da análise, serão observadas e classificadas as situações elaboradas pelos sujeitos de pesquisa. Para efeito desta análise, retomaremos sucintamente as idéias teóricas de Vergnaud (1998), ao afirmar que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos (significados) apoiados em uma variedade de situações e que cada situação, normalmente, não pode ser analisada com ajuda de apenas um conceito, ao mesmo tempo em que um conceito, por mais simples que seja não pode ser apropriado com base na vivência de uma única situação.

Dessa forma, o desenvolvimento de um conceito requer que este seja visto como uma composição de uma terna de conjuntos: um conjunto de situações, um conjunto de invariantes e um conjunto de representações. À luz desses pressupostos teóricos, vamos proceder à primeira parte da análise de dados, ou seja, analisaremos as situações (problemas) elaboradas pelos sujeitos referentes ao conceito de fração.

Para tanto, serão considerados quatro enfoques de análise, a saber:

- o primeiro deles diz respeito à consistência ou inconsistência dos problemas elaborados, sendo considerados como consistentes, os problemas que apresentam clareza na linguagem, os dados fornecidos são coerentes com o

contexto utilizado, demonstrando que se trata de uma situação bem elaborada, envolvendo o conceito de fração. Como inconsistentes, consideramos os problemas elaborados com as seguintes características: inadequação na linguagem utilizada, imprecisão na formulação da pergunta do problema, insuficiência de dados para resolução do problema, a resolução do problema não requer o conceito de fração e apresenta erro conceitual.

- o segundo enfoque refere-se à utilização dos diferentes significados da fração em diferentes contextos, ou seja, classificaremos os problemas considerados consistentes de acordo com os seguintes significados: número (Nº), parte-todo (PT), medida (ME), operador multiplicativo (OM) e quociente (QO).
- o terceiro enfoque refere-se à utilização das variáveis de quantidade contínuas e discretas e a utilização ou não do ícone - desenho - na apresentação do problema.
- o último enfoque diz respeito à utilização dos invariantes do conceito, isto é, o emprego das noções de ordem e equivalência.

O quadro a seguir, retrata resumidamente os quatro enfoques de análise:

Enfoque 1 Problemas (Situações)	Enfoque 2 Significados	Enfoque 3 Quantidades	Enfoque 4 Invariantes do Conceito
Consistentes Inconsistentes	Número Parte-todo Medida Operador Multiplicativo Quociente	Contínuas Discretas	Ordem Equivalência

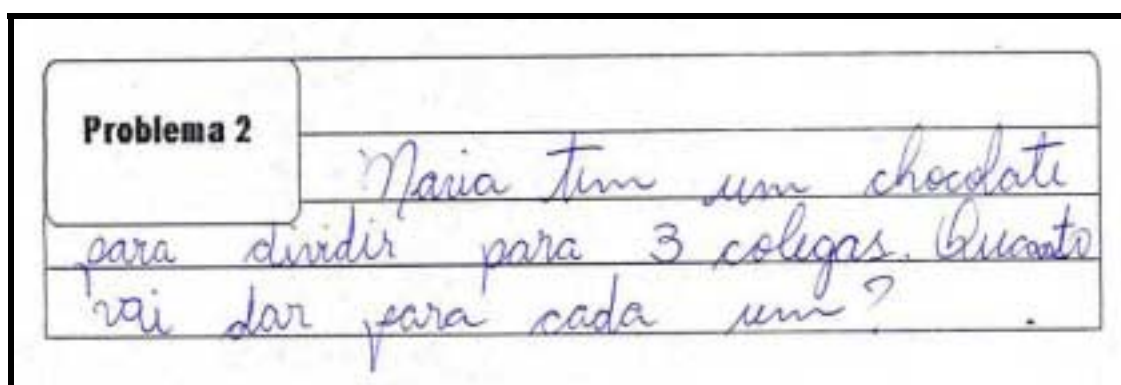
Quadro 6.1: Enfoques de análise

6.3.1. Enfoque 1: dos problemas elaborados

Para esta análise, um total de 402 problemas será considerado; este número significa a multiplicação entre um número de sujeitos de nossa amostra e o número de problemas por eles elaborados, isto é, 67 professores tendo elaborado um total de seis problemas cada um. No entanto, limitar-nos-emos, em classificar os problemas elaborados como consistentes ou inconsistentes.

A título de ilustração, apresentaremos dois exemplos dos problemas elaborados, considerados consistentes e inconsistentes, respectivamente. Este problema foi elaborado por uma professora do grupo G_2 , que no momento da coleta de dados estava atuando em uma 4ª série do Ensino Fundamental.

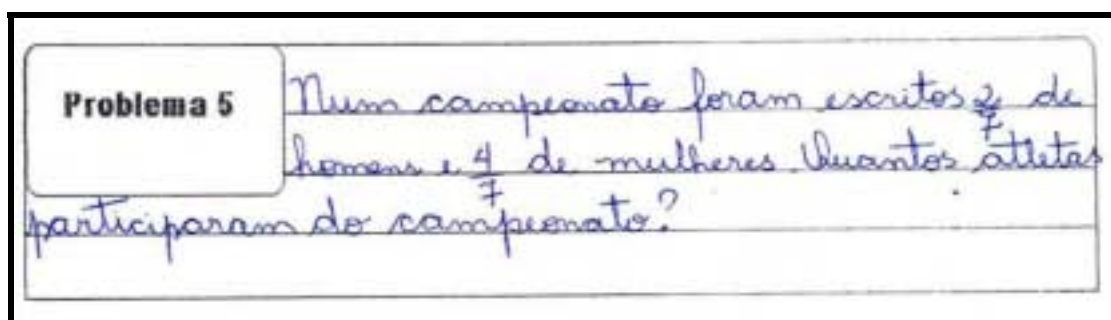
Figura 6.1: problema consistente (G_2 – S24).



O problema apresentado foi elaborado por uma professora do grupo G_2 , que no momento de nossa coleta de dados, atuava numa 4ª série do Ensino Fundamental. Ela possuía 13 anos de experiência na docência, tendo formação nos cursos de Habilitação Específica para o Magistério e Pedagogia.

Consideramos o problema como consistente, do ponto de vista do nosso estudo, pois, além de apresentar clareza no enunciado, a representação fracionária surge como uma ferramenta bem adaptada para resolver tal situação, evidenciando, dessa forma, a impossibilidade de se obter uma resposta no campo

dos números naturais. Além do mais, tal situação ainda poderá permitir uma discussão a respeito da necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, visto que a resposta ao problema apresentado não pode ser representada por um número natural.

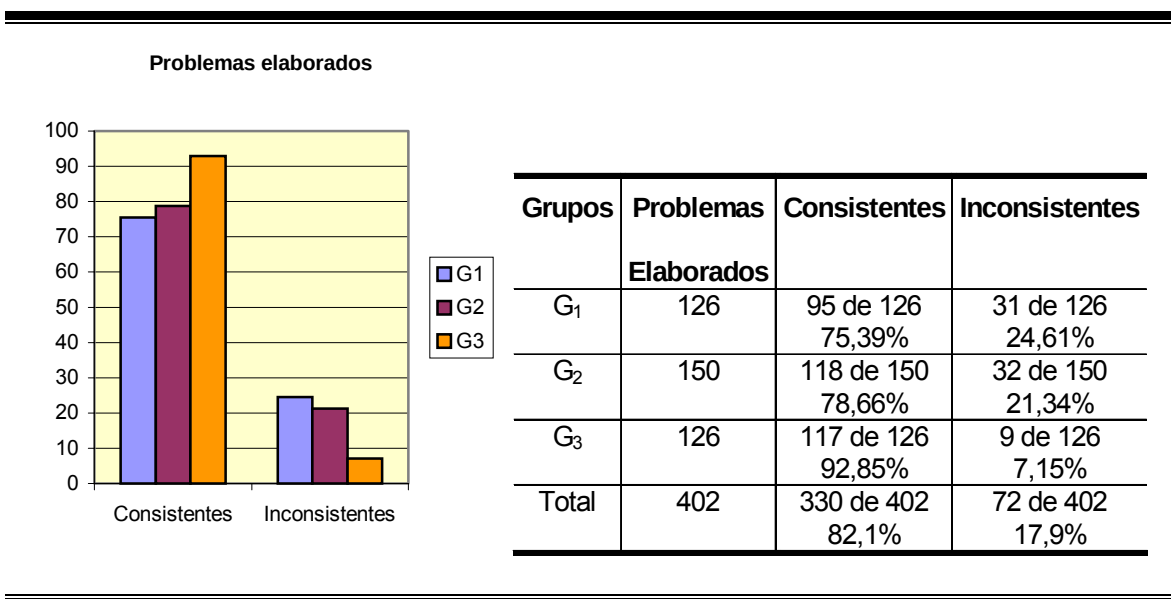
Figura 6.2: problema inconsistente (G_2 – S14).

O problema apresentado acima foi elaborado também por uma professora do grupo G_2 , que no momento de nossa coleta de dados, atuava em uma 3ª série do Ensino Fundamental. Ela possuía 20 anos de experiência na docência, e com formação em Habilitação Específica para o Magistério e curso de Pedagogia.

Nesta situação, percebemos o uso da representação fracionária para expressar certa quantidade, no caso, número de homens e número de mulheres, sem haver uma preocupação com as especificidades desse tipo de número (fração). Em outras palavras, é como se fosse possível, de maneira simples, estender as operações realizadas no campo dos números naturais aos fracionários, sem levar em consideração outros procedimentos (significados), das operações com frações. Soma-se a esse fato, a não explicitação do todo-referência, como se fosse possível adicionar simplesmente as duas quantidades $\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}\right)$, e dizer que $\frac{6}{7}$ é a quantidade de atletas que participariam do campeonato. Podemos dizer que esta situação assemelha-se muito àquelas utilizadas com os números naturais para trabalhar situações de composição, dentro das estruturas aditivas. Por exemplo, num campeonato foram inscritos sete homens e seis mulheres. Quantos atletas participaram do campeonato?

O gráfico abaixo retrata o número total de problemas elaborados por cada grupo (G_1 , G_2 e G_3) e a quantidade percentual dos problemas considerados consistente ou inconsistentes.

Gráfico 6. 2: Apresentação percentual dos problemas elaborados: consistentes x inconsistentes



Pelos dados do gráfico 6.2, podemos observar que do total dos 402 problemas elaborados, cerca de 17,9% do total, ou seja, 72 problemas foram considerados inconsistentes. O índice percentual de inconsistência presente nos grupos G_1 e G_2 – formado por professores polivalentes – ficou percentualmente próximo, isto é, 24,61% e 21,34%, respectivamente. Fato que nos leva a supor que mesmo os professores do G_2 , que, no momento da coleta de dados, estavam trabalhando com o conceito de fração, em suas respectivas turmas, cometem certos “equivocos” na formulação de problemas, assemelhando-se àqueles professores que não estavam trabalhando com conceito de fração.

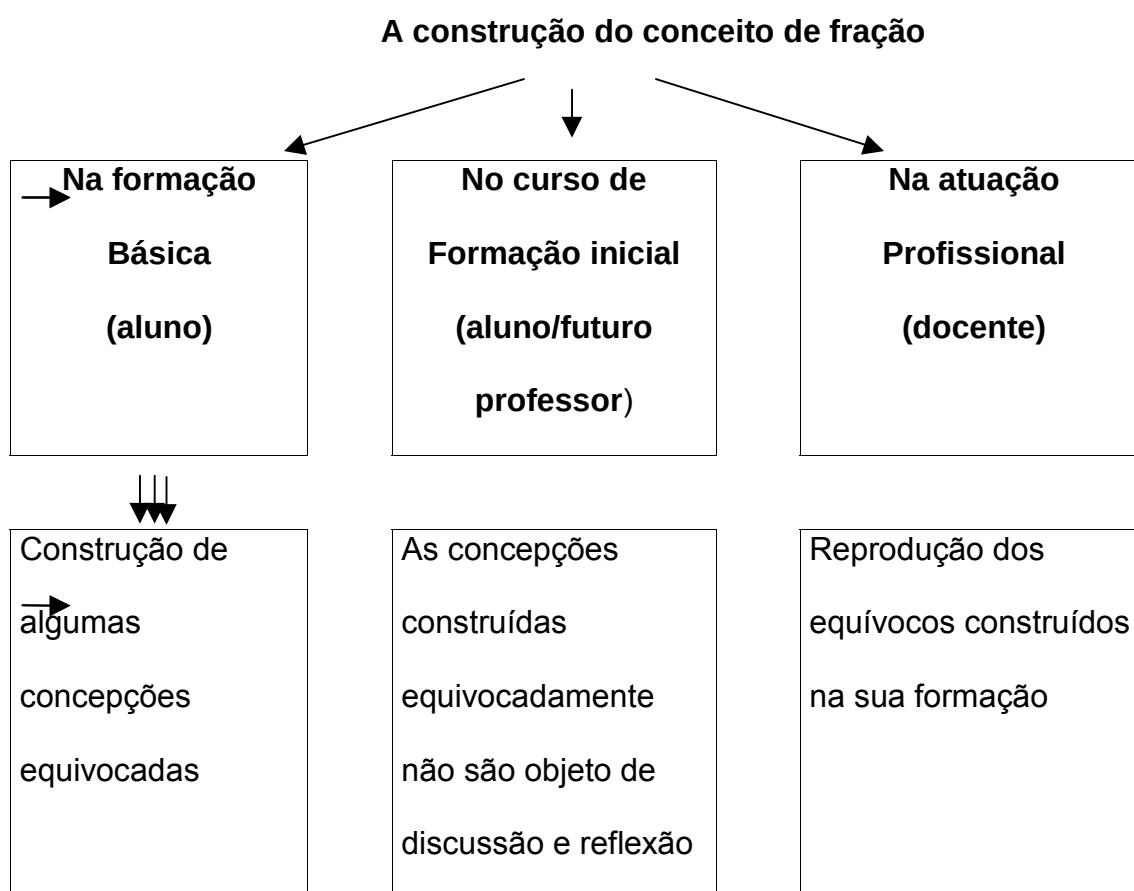
De certo modo, esta constatação, revela-se preocupante, pois esperávamos que os professores do G_2 , pelo fato de estarem trabalhando com

conceito de fração, formulassem problemas bem próximos aos apresentados nos manuais de referência e dos trabalhados por eles em sala de aula. Em outros termos, a expectativa era que o índice percentual de problemas inconsistentes no G_2 fosse inferior ao apresentado no G_1 .

Esta evidência nos remete a uma outra análise. Apoiado nas idéias defendidas por Nóvoa (2001) que a formação é um ciclo que abrange a experiência do docente como aluno (Educação de Base), como aluno-mestre (graduação), como estagiário (prática de supervisão), como iniciante (nos primeiros anos da profissão) e como titular e que, esses momentos, só serão formadores, de fato, se forem objeto de reflexão e discussão permanente.

Neste sentido, existem fortes indícios de que a concepção do professor sobre determinados assuntos, no caso, a elaboração de problemas envolvendo conceito de fração, que se torna explícita no momento dessa elaboração, é aquela construída ao longo de sua trajetória como aluno da Educação Básica. Concepção essa que talvez não tenha sido objeto de reflexão e discussão em sua formação inicial e nem durante sua trajetória profissional como professor que, portanto permanece engessada em sua mente. “Ninguém em situação de sala de aula promove o desenvolvimento daquilo que não teve a oportunidade de desenvolver em si mesmo”. (Proposta de Diretrizes para Formação Inicial de Professores da Educação Básica, 2000).

Essa idéia que queremos defender, sobre a concepção do professor que se torna explícita no momento da elaboração de problemas, poderia ser representada esquematicamente, como mostra o quadro a seguir:



Queremos sugerir com essa idéia que é provável que a concepção do professor, sobre o conceito de fração, está bem próxima daquela construída, como aluno da Educação Básica. Ao mesmo tempo, questionamos, a partir desse esquema, se os atuais modelos de formação reproduzem cíclica e acriticamente concepções distorcidas do conhecimento, especialmente quando se trata do conhecimento sobre o conceito de fração. No entanto, temos clareza que essa evidência é apenas a ponta de um “*iceberg*” e a tarefa de desvelá-lo é uma questão que demanda estudo profundo a respeito e tempo, em função dos diversos olhares críticos.

Corroborando com esta idéia, Carvalho (1989), depois de trabalhar com professores nas séries iniciais, afirma, em suas conclusões, que as professoras

que possuem concepção da matemática diferente da que tiveram como alunas, conseguiram-na a partir de um curso ou de um estágio, com espaço de discussão e reflexão sobre sua prática e a disposição de trabalhar com seus alunos de maneira diferente.

Seguindo essa linha de raciocínio, encontramos também uma valiosa contribuição em Tardif (2002), quando afirma que ao longo de sua história de vida pessoal e escolar, o professor interioriza certo número de conhecimentos, competências, crenças e valores, que são reutilizados, de maneira não reflexiva, mas com grande convicção durante sua atuação. Nesse cenário, os saberes experiências dos professores não estão baseados apenas em sua atuação em sala de aula, mas que decorrem em grande parte de pré-concepções de ensino e de aprendizagem herdadas de sua história de vida e de sua história escola.

Em face de tais evidências, algumas indagações se fazem latente neste momento: será que esses equívocos cometidos na formulação dos problemas estão presentes na sala de aula? Ou são minimizados pela utilização dos manuais didáticos? Não temos a pretensão de responder tais indagações com esse estudo, pois, a formulação para tais respostas demandaria uma observação e uma reflexão mais amíúde da ação do professor na sala de aula, e isso não se constitui em objeto dessa pesquisa.

Ainda, em relação aos dados do gráfico 6.2, constatamos um índice de 7,15 percentuais dos problemas inconsistentes apresentados pelos professores do G₃ (professores especialistas), ou seja, nove do total de problemas elaborados (126), significando que essa redução é três vezes menor comparativamente aos índices percentuais apresentados pelos G₁ e G₂ (professores polivalentes), que foram respectivamente 24,61% e 21,34%. Embora, o índice percentual de

problemas inconsistentes apresentados pelos professores especialistas, seja inferior ao índice apresentados pelos polivalentes, os tipos de equívocos cometidos não se diferem entre eles.

A diferença percentual apresentada entre o grupo de professores polivalentes e especialistas pode indicar uma relação com a natureza e a especificidade de sua formação inicial, pois, enquanto os professores polivalentes tiveram a sua formação inicial nos cursos de Habilitação Específica para o Magistério, os professores especialistas tiveram sua formação inicial nos cursos de licenciatura em matemática, conforme relatado no início deste capítulo. O desempenho diferenciado apresentado pelos professores polivalentes pode estar relacionado também, ao fato de os mesmos terem dado continuidade a seus estudos em nível de graduação, quase exclusivamente nos cursos de pedagogia.

Queremos sugerir, de certo modo, que tal diferença era esperada, pelo fato de acreditarmos que, o tratamento dado aos conceitos matemáticos, especialmente ao conceito de fração, difere significativamente nos dois cursos de formação.

Tais diferenças são pontuadas no documento elaborado pelo Ministério da Educação, intitulado “Proposta de Diretrizes para Formação inicial de Professores da Educação Básica”, (2000). Este documento explicita que os cursos para formação de professores para atuação multidisciplinar (polivalentes), geralmente, caracterizam-se por tratar de modo superficial (ou mesmo não tratar) os conhecimentos a respeito dos objetos de ensino com os quais o futuro professor irá trabalhar nem mesmo quando a formação desses professores ocorre nos cursos superiores de Pedagogia.

Por outro lado, a ênfase dada nos cursos de licenciatura é quase que exclusivamente nos conteúdos específicos das áreas de conhecimento. Em outros termos, no caso da Matemática, especialmente o tratamento dado ao conceito de fração, como afirma Moreira & David (2004), é orientado pelos valores conceituais e estéticos, garantindo, em tese, um “status” de formação teórico-científica. Podemos inferir que seja esta a evidência que justificaria a diferença percentual dos problemas inconsistentes elaborados por cada grupo (polivalentes e especialistas).

Em virtude desta distinção apresentada na formação inicial de professores polivalentes e especialistas, nossa expectativa traduzia-se na possibilidade dessas diferenças, ou até mesmo dos equívocos cometidos, terem sido sanados ou amenizados na formação continuada, ou ainda em uma reflexão sobre a prática diária.

No entanto, constatamos que isso nem sempre ocorre, se considerarmos que a variável “tempo de experiência” não foi relevante na elaboração dos problemas inconsistentes, visto que foram encontradas inconsistências tanto nos problemas elaborados por professores que atuavam há apenas um ano, como naqueles com mais de 20 anos de experiência.

Esta evidência também vem corroborar com a idéia defendida nesse capítulo de ser provável que a concepção que os professores trazem em relação ao conceito de fração é bem próxima daquela construída como aluno da Educação Básica.

Fundamentamos a idéia anterior em Nóvoa (2001), que defende a idéia de que a experiência, por si só, não é formadora, pois pode ser uma mera repetição, uma mera rotina. Para ele, formadora é a reflexão sobre essa experiência.

Com relação à consistência dos problemas, podemos constatar, de maneira geral, que o percentual de problemas elaborados de forma consistente ficou em 82,1% do total dos problemas elaborados nos três grupos, ou seja, 330 do total de 402 problemas. Os índices percentuais apresentados pelos grupos G_1 e G_2 ficaram bem próximos, cerca de 75,39% e 78,66%, respectivamente enquanto no grupo G_3 esse índice ficou em patamares de 92,85%, bem próximo ao teto máximo. Essa diferença, de certo modo, já era esperada e pode estar relacionada com o tratamento diferenciado dispensado ao conceito de fração, tanto em seus aspectos conceituais, quanto nos procedimentais, nos cursos de formação de professores polivalentes e especialistas, conforme discutimos anteriormente.

No grupo de professores polivalentes (G_1 e G_2), houve uma tendência em elaborar problemas a partir de certo contexto, utilizando-se de situações bem próximas do cotidiano do aluno, isto é, bem próximas da sua realidade. Todos os problemas elaborados por este grupo, considerados como consistentes, partiram de um determinado contexto.

Esta tendência de explorar o conceito de fração a partir de um contexto familiar ao aluno se confirmou nos problemas elaborados pelo grupo de professores especialistas, embora com menos ênfase, já que dos 117 problemas elaborados por esse grupo, 29 deles - cerca de 25% - foram providos apenas do contexto algoritmo. Os problemas que exploravam apenas o contexto algoritmo eram do tipo: calcule o valor da expressão $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$. Esta é mais uma evidência na direção de existir diferenças relacionadas à natureza de suas formações, conforme já apontado anteriormente.

De um modo geral, apresentamos alguns dados a respeito dos tipos de problemas consistentes ou inconsistentes, focalizando certos aspectos da formação do professor, baseados em suas concepções a respeito do conceito de fração. A seguir, analisaremos os problemas considerados consistentes, levando-se em conta os diferentes significados que a fração pode assumir em diferentes contextos.

6.3.2. Enfoque 2: Significados

Para procedermos à análise dos problemas consistentes elaborados, levaremos em consideração a incidência dos cinco significados da fração: número, parte-todo, medida, operador multiplicativo e quociente. Assim, nossa análise, constará de um total de 330 problemas considerados consistentes, conforme já tratados na seção anterior. Retomaremos, resumidamente, nesse momento, embora já tenhamos explicitado no capítulo II as idéias básicas de cada significado, de nossas categorias de análise.

(PT) Parte-todo

Nessa categoria, encaixam-se as situações que trazem em seu contexto a idéia de partição, isto é, apresenta de modo explícito em seu enunciado um todo dividido em n partes iguais, e cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$.

Exemplo: *Uma barra de chocolate foi dividida em quatro partes iguais. João comeu três dessas partes. Que fração representa o que João comeu?*

(Nº) Número

Nesta categoria, a fração é tratada como os números inteiros, possível de ser somada, subtraída, multiplicada ou dividida sem, necessariamente, fazer referência a uma situação específica.

Exemplo: Calcule $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$

(ME) Medida

As situações classificadas como medida remetem à idéia de que a relação entre duas variáveis pode ser expressa por uma fração em contexto de quantidades intensivas e extensivas.

Exemplo: Foram vendidos 100 números de uma rifa de uma bicicleta. Carlos comprou 13 números. Qual a chance de Carlos ser o ganhador do prêmio?

(OM) Operador multiplicativo

Situações classificadas como operadores multiplicativos trazem em seu contexto a idéia de que a fração, assim como o número inteiro desempenha um papel de valores escalares aplicados a uma quantidade. A fração em situação de operador multiplicativo pode ser vista, como uma “máquina” que transforma uma determinada quantidade em outra.

Exemplo: Ana deu $\frac{3}{4}$ da sua coleção de figurinhas para sua prima. Quantas figurinhas sua prima recebeu, sabendo que Ana possuía 30 figurinhas em sua coleção?

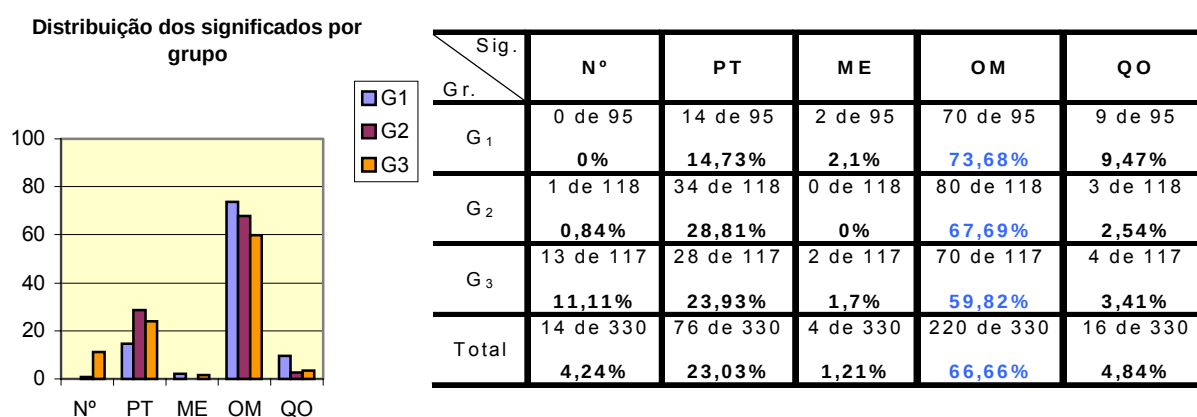
(QO) Quociente

São classificadas como quociente, as situações em que a fração pode ser interpretada como a divisão entre dois números naturais – duas grandezas – ($\frac{a}{b} = a \div b$, com a e b naturais, e $b \neq 0$), isto é, situações em que a divisão representa uma estratégia bem adaptada para resolver tal situação.

Exemplo: Dividindo cinco chocolates para sete crianças, quanto de chocolate cada criança irá receber?

À luz dessa categoria, o gráfico 6.3 apresenta a distribuição dos problemas por significado em cada grupo.

Gráfico 6.3 – Distribuição dos significados por grupo



Os resultados apontam para predominância expressiva do significado operador multiplicativo, em todos os grupos, tendo uma ocorrência ligeiramente

mais acentuada no grupo G_1 . Tal dado nos chama atenção, porque este significado muito se presta para a utilização de problemas no contexto algoritmo, do tipo: calcule $\frac{3}{5}$ de 15. Esta idéia está presente até mesmo nos problemas, que vêm com uma roupagem do contexto familiar (cotidiano) do aluno, como por exemplo: “João ganhou $\frac{3}{5}$ da coleção de bolinhas do seu primo? Quantas bolinhas João ganhou, sabendo que seu primo possuía 30 bolinhas?

Podemos inferir ainda, com base nos dados, que essa tendência em elaborar problemas contemplando o significado operador multiplicativo, revela uma divergência entre a concepção dos professores polivalentes, explicitada espontaneamente e as recomendações contidas nos PCN, visto que este documento sugere, como tratamento didático para o início do ensino das frações, no segundo ciclo, uma abordagem partindo de situações que envolvam a relação parte-todo.

O percentual de problemas elaborados com o significado operador multiplicativo supera nos três grupos a somatória percentual dos outros quatro significados, isto é, medida, quociente, parte-todo e número. Esta evidência pode estar relacionada, talvez, à concepção do professor em relação à própria Matemática - fazer Matemática significa, essencialmente, fazer cálculos. Neste sentido, talvez, problemas envolvendo o significado operador multiplicativo possibilitem mais facilmente o emprego de um conjunto de técnicas operatórias e procedimentos para a sua resolução.

O segundo significado mais explorado, nos três grupos, foi o significado parte-todo, com menor incidência percentual no grupo G_1 . Embora este significado tenha sido o segundo mais explorado, por todos os grupos, a sua

incidência percentual é da ordem de três vezes menor que o significado operador multiplicativo, de modo geral.

Fato, que de certo modo, nos surpreendeu, pois a nossa expectativa era a de obter, entre o grupo de professores polivalentes, um maior número de problemas envolvendo o significado parte-todo, tendo em vista que este significado é o mais contemplado nos livros didáticos de 3^a e 4^a séries e também é recomendado pelos PCN, como uma boa abordagem para o início do ensino das frações.

Com relação ao significado quociente, embora existam estudos relevantes, como por exemplo, Kieren (1988), Nunes (1997), sugerindo que esse significado seria uma boa abordagem para o início do ensino das frações, de uma maneira geral, constatamos que tal significado foi pouco contemplado nos três grupos, ficando o índice percentual em patamares de 4,84% do total de problemas elaborados. Este fato nos leva a supor que o significado quociente é pouco explorado no ensino das frações, uma vez que ele foi pouco contemplado na elaboração dos problemas.

Os significados número e medida tiveram uma incidência muito baixa nos três grupos. No entanto, apesar dessa pouca expressiva, podemos observar que no grupo G₃ o significado número foi contemplado em cerca de 11,11% do total dos problemas elaborados. Isto talvez encontre explicação no trabalho mais consistente com a reta numérica e conteúdos similares, que são trabalhados apenas a partir da 5^a série. Talvez os próprios professores polivalentes não saibam discernir o valor numérico de uma fração do tipo: $\frac{3}{4}$ ou $\frac{9}{4}$.

Finalizando, constatamos que em nenhum dos grupos, houve uma distribuição de situações que contemplasse equitativamente todos os significados da fração. Este dado é relevante e preocupante, pois retomando as idéias teóricas de Vergnaud (1998) de que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de uma variedade de situações, constatamos que há uma forte tendência, tanto dos professores polivalentes como dos professores especialistas, em privilegiar apenas um tipo de situação: aquela que contempla a fração com o significado de operador multiplicativo.

Na próxima sessão passaremos a apresentar e a analisar as situações de acordo com a utilização de duas variáveis: quantidades contínuas e quantidades discretas.

6.3.3. Enfoque 3: Variáveis

Apresentaremos a seguir, a análise dos dados sob o enfoque da utilização das duas variáveis: quantidades contínuas e quantidades discretas por significado. Para tanto, levaremos em conta para essa análise que as quantidades contínuas e discretas diferem significativamente, dependendo da situação em que elas estão inseridas.

As quantidades contínuas são aquelas passíveis de serem divididas exaustivamente, sem que necessariamente percam as suas características. Por exemplo, é possível dividir um chocolate em n partes iguais, sendo que cada parte mantém as mesmas características do todo. As quantidades discretas fazem referência a um conjunto de objetos idênticos, e cada objeto representa uma unidade e o conjunto dessas unidades constitui o todo. Nesse tipo de

quantidade, a ação de dividir deverá produzir subconjuntos com mesmos números de unidades, como por exemplo: a divisão de carrinhos em partes iguais, sendo que todas as partes são constituídas pelo mesmo número de objetos.

Nesta análise, salientamos que não incluiremos o significado número e o significado medida. O primeiro, pelo fato de que a fração como número não precisa necessariamente referir-se a quantidades específicas e, o segundo, deve-se ao fato de que a quantidade de problemas elaborados com esse significado foi pouco expressiva, pois, do total de problemas elaborados apenas quatro contemplaram esse significado.

A tabela abaixo apresenta a distribuição das quantidades contínuas e discretas, por significado, em cada grupo.

Tabela 6.3 – distribuição das quantidades contínuas e discretas por significado.

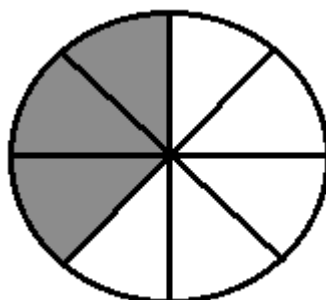
GR	G ₁		G ₂		G ₃		Total	
	C	D	C	D	C	D	C	D
PT	12 de 14	2 de 14	30 de 34	4 de 34	20 de 28	8 de 28	62 de 76 81,57%	14 de 76 18,43%
OM	15 de 70	55 de 70	23 de 80	57 de 80	18 de 66	48 de 66	56 de 216 25,92%	160 de 216 74,08%
QO	8 de 9	1 de 9	2 de 3	1 de 3	2 de 4	2 de 4	12 de 16 75%	4 de 16 25%

Pelos dados da tabela acima, podemos constatar que tanto as quantidades contínuas como as discretas são contempladas na elaboração dos problemas, no entanto não há uma distribuição equitativa entre os três significados analisados. Nos três grupos, há uma tendência em utilizar quantidades contínuas na elaboração de situações com significado parte-todo, visto que do total dos 76

problemas analisados, 62 problemas contemplam essa quantidade, ou seja, 81,57% desse total.

Constatamos a partir de uma análise mais aprofundada dos enunciados, que estrutura lógica presente em 90% dos problemas, envolvendo o significado parte-todo em quantidades contínuas, faz referência a figuras geométricas (retângulos e quadrados) e pizzas, quase sempre apresentadas de maneira icônica¹ e, previamente, divididas em partes iguais, que muito se assemelha aos modelos propostos pela maioria dos livros didáticos, como pode ser observado em um problema elaborado por um sujeito do G₂.

João comprou uma pizza e a dividiu em oito partes iguais. Sua mãe comeu três partes dessa pizza. Represente a quantidade que sobrou para João em forma de fração.



Este tipo de situação merece algumas considerações, pois, ao propô-la o professor pode ter a falsa idéia que de fato ela foi compreendida e respondida acertadamente pelo aluno, como evidenciam os estudos de Nunes; Bryant (1997) e Pothier & Sawada (1990).

Para Nunes; Bryant (1997) esse tipo de situação pode induzir a um procedimento de dupla contagem e transmitir a falsa idéia que tal situação tenha sido compreendida de fato. Pothier & Sawada (1990) em seus estudos alega que

1. Icônica representação da situação utilizando a representação gráfica, ou seja, o desenho.

uma parte das dificuldades com o trabalho das frações reside no uso extensivo de modelos previamente repartidos (quantidades contínuas), não possibilitando ao aluno prestar atenção nas propriedades geométricas da figura (inteiro) ou das partes, dando nome freqüentemente ou representando simbolicamente as frações para partes não iguais de um inteiro.

Com relação aos problemas envolvendo o significado operador multiplicativo, podemos constatar que há uma tendência, nos três grupos, em explorar esse significado, predominantemente, em quantidades discretas, visto que, de uma maneira geral, do total dos problemas analisados, cerca de 74,08%, ou seja, 160 dos 216.

Nos três grupos, observamos que a estrutura lógica predominante nos enunciados dos problemas remete à idéia da fração aplicada a um determinado conjunto de objetos, como podemos observar no problema elaborado por um sujeito do G₂.

Luís perdeu $\frac{3}{5}$ das 30 figurinhas que possuía em um jogo. Quantas

figurinhas Luís perdeu?

Constatamos ainda que, parece não haver um “cuidado” na utilização das quantidades contínuas e discretas quando estas estão inseridas em situações com o significado de operador multiplicativo.

No caso das quantidades discretas, parece não haver uma preocupação com a quebra de unidade dos elementos do conjunto a que se faz referência. Por exemplo, deparamos-nos, algumas vezes, com problemas enunciados da

seguinte maneira: “num ônibus tem 45 pessoas, das quais $\frac{3}{7}$ são mulheres.

Quantas mulheres têm no ônibus”? Ou ainda, “calcule $\frac{2}{3}$ de dez figurinhas”.

Com relação às quantidades contínuas, há uma tendência, embora não significativa em discretizá-las. Esta evidência pode ser constatada, por exemplo, com a recomendação feita no problema elaborado por um sujeito do grupo G_1 , quando sugere que “utilize para um litro 1000ml”.

De um litro de leite, $\frac{3}{4}$ foram utilizados para fazer um bolo. Quanto restou?

(Utilize 1L = 1000ml).

Este tratamento do contínuo como discreto, pode estar relacionado ao fato de que em situações de quantidades discretas, a aplicação da fração sobre um dado conjunto produzirá, na maioria das vezes, subconjuntos, ou seja, ($\frac{3}{4}$ de 20 bolinhas é igual a 15 bolinhas).

Nessa situação, há uma ação coordenada de multiplicação e divisão (ou vice-versa). Esta idéia parece, no entanto, ser transferida para situações de quantidades contínuas, envolvendo a fração como operador multiplicativo, pois ao sugerir que se utilize a equivalência de 1L = 1000ml pressupõe aplicar $\frac{3}{4}$ a 1000ml e obter 750ml e dizer que restaram 250ml, ao invés de aplicar $\frac{3}{4}$ sobre a quantidade contínua (um litro) obtendo $\frac{3}{4}$ e dizer que restou foi $\frac{1}{4}$.

Em suma, nas situações de operador multiplicativo, em quantidades contínuas, parece que a representação fracionária $\left(\frac{a}{b}, b \neq 0\right)$ não é considerada

como resposta adequada a uma determinada situação, havendo necessidade de discretizar o contínuo.

Com relação às quantidades discretas, parece que não existe um cuidado com a quebra da unidade, ou seja, é como se fosse possível dividir uma “pessoa” em partes iguais. A evidência desses fatos foi encontrada, tanto nos problemas elaborados pelos professores polivalentes como nos problemas elaborados pelos especialistas.

Com referência ao significado quociente, embora este significado não tenha sido muito explorado pelos três grupos na elaboração dos problemas, constatamos que, no geral, há uma tendência acentuada para abordar esse significado em quantidades contínuas; uma vez que o número de problemas, considerando o total geral dos três grupos, envolvendo essa quantidade, é da ordem de três vezes mais do que a utilização das quantidades discretas.

Esta tendência para utilizar mais as quantidades contínuas do que a discreta, em situação de quociente, pode estar ligada à concepção do professor em relação à representação fracionária, como uma estratégia de resolução de uma determinada situação, pois nos parece haver maior aceitação da representação fracionária associada a uma situação quociente com quantidades contínuas do que associada a quantidades discretas. Em outras palavras, a fração $\frac{4}{3}$ como resposta a uma situação no contexto contínuo como, por exemplo, (dividir quatro chocolates para três crianças), parece ser mais aceita do que a fração $\frac{9}{3}$ como resposta a uma situação de contexto discreto como, por exemplo, (dividir nove figurinhas para três crianças), embora ambas as situações tenham

exatamente a mesma natureza. Trata-se de uma situação de partilha em que temos a quantidade total e queremos saber quanto cada pessoa deverá receber.

A estrutura lógica presente nos enunciados não difere entre os três grupos. A idéia de partição entre duas variáveis, vindas de quantidades diferentes, é predominante nos três grupos, como pode ser constatada na situação elaborada pelo sujeito do G3.

Mamãe comprou quatro chocolates e dividiu igualmente para três crianças.

Quanto de chocolate cada uma recebeu?

Notamos ainda, que nas situações de quociente em quantidades contínuas, a fração com numerador maior que um, apareceu na maior parte das situações. De fato, acreditamos que talvez sejam as situações envolvendo o significado quociente as mais adequadas para se introduzir as frações com o numerador maior que um (frações impróprias).

6.3.4. Enfoque 4: os invariantes

Nesta seção, apresentaremos a análise do emprego dos invariantes do conceito de fração – ordem e equivalência - (Nunes, 2003); levando em consideração a incidência de cada um nas situações elaboradas por nossos sujeitos.

Neste sentido, constatamos com base nas análises de nossos dados que a noção de equivalência não apareceu de maneira explícita em nenhuma das situações elaboradas pelos três grupos (polivalentes e especialistas). No entanto, a incidência deste invariante apareceu de maneira implícita, ou seja, como conceito subjacente à resolução de uma situação de ordenação ou adição de frações, quase sempre relacionado a uma situação com o significado operador

multiplicativo, como pode ser observado em uma situação elaborada por um sujeito do G₃.

“Lúcia comeu $\frac{2}{5}$ do chocolate e Luiz comeu $\frac{1}{3}$. Quem comeu mais? Que fração representa os que os dois comeram juntos?”

Observamos que as respostas às duas questões do problema podem recorrer às noções de equivalência, isto é, para fazer frente a primeira e segunda questão, os esquemas de ação mobilizados podem ser o de procurar duas frações equivalentes às frações dadas, com o mesmo denominador ora comparando, ora somando os numeradores para decidir quem comeu mais ou quanto comeram juntos.

Com relação ao invariante – ordem, embora as situações o tenham contemplado de maneira explícita, sua ocorrência foi pouco expressiva, se considerarmos que dos 330 problemas analisados, apenas 12 problemas, ou seja, 3,63% do total de problemas elaborados, referiam-se ao emprego desse invariante nos três grupos (G₁, G₂ e G₃). O uso do invariante, quase que, exclusivamente, se deu baseado em situações com o significado operador multiplicativo, como aquela a que nos referimos anteriormente. “Quem comeu mais?”

Embora existam estudos recentes como, por exemplo, o de Nunes (2003), que nos chama a atenção para a importância de se trabalhar as noções de ordem e equivalência no ensino das frações, principalmente em um trabalho consistente a partir de diferentes e diversas situações em que tais noções estejam presentes, constatamos que as noções de ordem e equivalência são pouco exploradas a partir das situações. Fato que nos leva a supor que há fortes indícios que tais

noções sejam (se são) trabalhadas em sala de aula muito mais a partir da representação das frações do que das situações, como por exemplo, encontre frações equivalentes à fração $\frac{3}{4}$ (multiplicações sucessivas do numerador e do denominador por números inteiros) ou ainda, diga qual é a maior fração $\frac{3}{5}$ ou $\frac{5}{4}$, se referindo apenas ao contexto algorítmico.

6.3.5. Síntese dos resultados da 1ª etapa da análise

Com base na primeira etapa da análise dos dados, podemos observar à luz dos quatro enfoques de análise adotados, que:

- houve uma tendência, tanto dos professores polivalentes como especialistas, em elaborar bons problemas partindo de situações próximas do cotidiano do aluno. Embora esse dado seja positivo, do ponto de vista do nosso estudo, constatamos que certos equívocos foram cometidos na elaboração dos problemas, pelos três grupos, o que resultou na proposição de problemas inconsistentes;
- constatamos que houve uma tendência, nos três grupos, em elaborar problemas, envolvendo o conceito de fração, utilizando apenas dois significados: operador multiplicativo e parte-todo, mais acentuadamente o primeiro;
- com relação à utilização das quantidades contínuas observamos que, nos três grupos, ambas foram contempladas na elaboração dos problemas, no entanto não houve uma distribuição eqüitativa entre os cinco significados. Nas situações parte-todo predominaram as quantidades contínuas e nas

situações com o significado operador multiplicativo predominou as discretas;

- com relação à utilização dos invariantes da fração (ordem e equivalência, constatamos que estes tiveram uma ocorrência muito baixa (ou mesmo não tiveram) nos problemas elaborados. Esta evidência foi observada tanto nos problemas elaborados pelos professores polivalentes como pelos especialistas.

Na próxima seção procederemos à análise dos dados levando em consideração as estratégias empregadas na resolução dos problemas.

6.4. SEGUNDA ETAPA DE ANÁLISE: RESOLUÇÃO

Nesta seção, temos a intenção de realizar uma análise da qualidade dos tipos de resolução e das estratégias utilizadas por nossos sujeitos, frente às situações por eles elaboradas. Para efeito dessa análise a dividiremos em duas partes: tipo de resolução e estratégias empregadas em cada significado.

6.4.1. Tipos de resolução

Após a leitura cuidadosa dos dados identificamos, predominantemente, três categorias dos tipos de resolução que denominaremos a partir de agora de:

- **Algoritmo**
- **icônica**
- **mista**

A categoria algoritmo refere-se à aplicação de um conjunto de técnicas operatórias, com a aplicação de uma ou mais operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), para resolução de uma determinada situação. Para exemplificar esta categoria, apresentaremos a resolução de um professor pertencente ao grupo G_3 formado em Matemática e com nove anos de experiência na docência de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.

Figura 6.3. Exemplo da categoria algoritmo.

Problema 3 Comprei um eletrodoméstico por R\$ 1.200,00. Paguei $\frac{1}{6}$ deste valor como entrada e o restante foi dividido em 10 parcelas iguais. Calcular o valor da entrada e o valor das parcelas.

$\frac{1}{6}$ DE 1200,00 = $\frac{1}{6} \cdot 1200,00 = 200,00$ ENTRADA

1200,00 - 200,00 = 1000,00 RESTANTE A SER DIVIDIDO

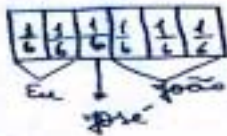
1000,00 $\div$ 10 = 100,00 PARCELAS

RESPOSTA: A ENTRADA FOI DE R\$ 200,00 E CADA PARCELA SERÁ DE R\$ 100,00

A categoria icônica, diz respeito ao emprego da representação gráfica (desenho e figuras), para resolução de uma determinada situação. Neste caso, a resposta a uma determinada situação apóia-se, exclusivamente, na observação da representação gráfica. Como exemplo dessa categoria, apresentaremos a resolução de um professor do grupo G₂, formado no curso de Magistério das séries iniciais e no superior em Pedagogia, com 13 anos de experiência na docência de 3^a e 4^a séries no Ensino Fundamental.

Figura 6.4: Exemplo da categoria icônica

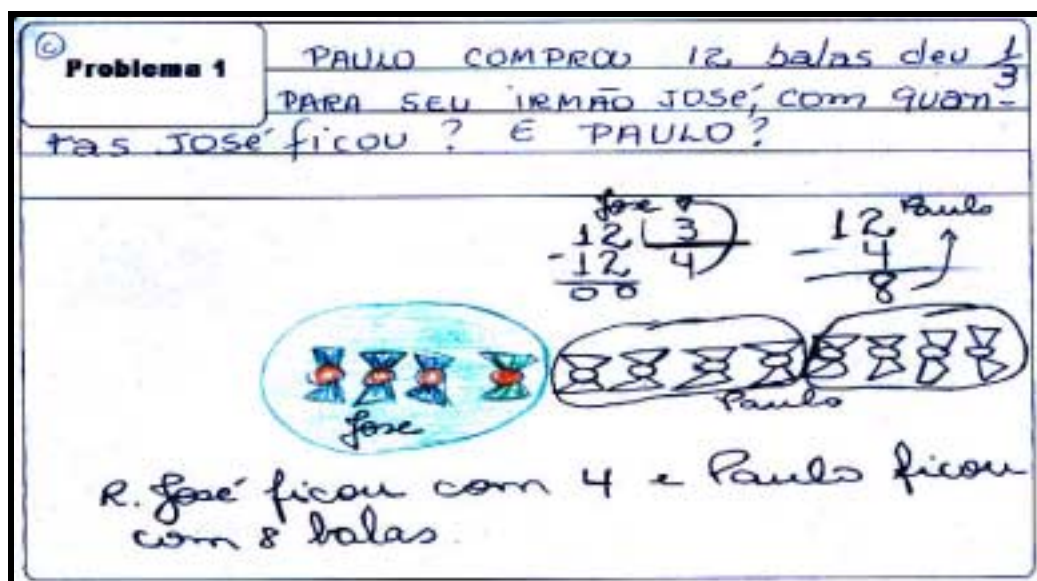
Problema 6 Eu comi $\frac{2}{6}$ de uma pizza. João $\frac{1}{2}$ e José quantas partes comeu?



José comeu $\frac{1}{6}$ da pizza.

A terceira categoria, que denominaremos de mista, refere-se ao emprego coordenado, para resolução de uma determinada situação, das categorias algoritmo e icônica ao mesmo tempo. Em outras palavras, o sujeito frente a uma determinada situação lança mão, para sua resolução do algoritmo e da representação gráfica simultaneamente. O exemplo desta categoria seria uma resolução apresentada por um professor do grupo G₁, com 32 anos de experiência na docência nas séries iniciais de Ensino Fundamental com formação no curso de Magistério das séries iniciais, nos cursos de Pedagogia e Educação Artística.

Figura 6.5: Exemplo da categoria mista.



Definidas as categorias de análise, apresentaremos, a seguir, um panorama geral das duas etapas da nossa análise: da elaboração e da resolução. No que se refere a 1ª etapa – elaboração – apresentaremos o total de problemas elaborados, total de problemas consistente e total de problemas inconsistentes em cada grupo. Com relação à 2ª etapa – resolução – apresentaremos a

incidência da utilização de cada categoria – algoritmo, icônica e mista – nas resoluções apresentadas por cada grupo. Momento em que, destacaremos a quantidade de problemas com resolução corretas e incorretas em cada categoria, bem como o número de resolução dada aos problemas inconsistentes, em cada categoria e o número de problemas em branco em cada grupo. A tabela 6.4 retrata tal distribuição.

Tabela 6.4: Panorama geral das etapas de análise.

Etapas								
1ª etapa: elaboração				2ª etapa: resolução				
GR	Total de problemas elaborados	Cons.	Incons.	Categoria	Consistente		Inconsistente	
					Certo	Errado	Resolução	Em branco
G ₁	126	95	31	Algoritmo	64	10	25	
				Ícônica	10	-	6	
				Mista	10	1	-	
G ₂	150	118	32	Algoritmo	59	13	21	6
				Ícônica	30	2	5	
				Mista	14	-	-	
G ₃	126	117	9	Algoritmo	83	6	9	
				Ícônica	16	-	-	
				Mista	12	-	-	
TG	402	330	72	Algoritmo	206	29	55	6
				Ícônica	56	2	11	
				Mista	36	1	-	

LEGENDA: GR – Grupo; TG – Total Geral; Cons. – Consistente; Incons. - Inconsistente

Podemos observar, com base nos dados da tabela 6.4, que há uma tendência, em todos os grupos, em empregar a categoria algoritmo como estratégia de resolução, visto que das 330 resoluções analisadas, cerca de 69,4% (229), apresentam procedimentos de resoluções centrados, exclusivamente, na categoria algoritmo. Face aos resultados e dentro dos limites da nossa amostra, é razoável supor, que há fortes indícios, que o trabalho com as frações na sala de aula é muito mais centrado nos aspectos procedimentais (utilização de regras e

algoritmos) do que nos aspectos conceituais. Behr et al.(1983), apontam essa ênfase nos procedimentos e algoritmos, como uma das principais causas das dificuldades das crianças em aprenderem e aplicarem os conceitos de fração.

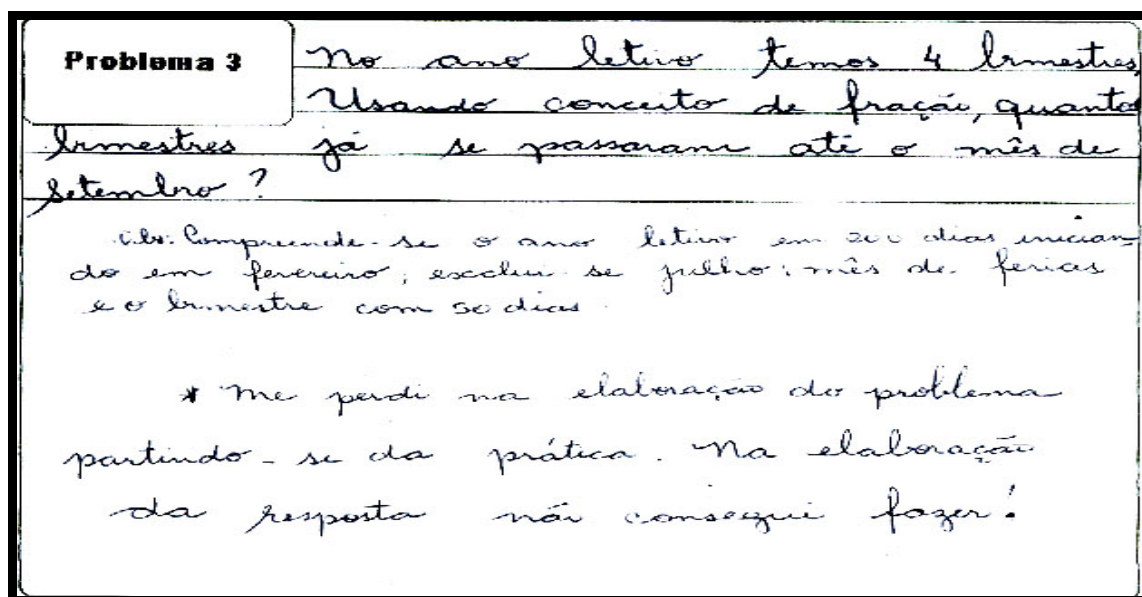
Constatamos ainda, com base nos dados da tabela 6.4 que, a maioria dos equívocos (erros) cometidos, na resolução dos problemas elaborados, estão concentrados na categoria algoritmo, se considerarmos que das 32 resoluções equivocadas, 29 (90,62%) deve-se ao fato da aplicação inadequada de algum tipo de algoritmo.

Observamos ainda, que mesmo nos problemas considerados inconsistentes a resolução apresentada, em sua maioria, foi centrada no uso da categoria algoritmo. Este procedimento pode ter induzido a não reflexão a respeito da inconsistência do problema, tendo em vista que a maioria dos procedimentos matemáticos adotados estava coerente do ponto de vista da formalidade Matemática – uso adequado de regras para operar com as frações.

Este fato nos chamou a atenção, pois, nossa expectativa era a de que os professores percebessem a inadequação dos dados do problema, e até mesmo a inconsistência de alguns enunciados e os reformulassem no momento da resolução.

No entanto, constatamos que apenas seis problemas (8,33%) dos 72 considerados inconsistentes, foram deixados em branco pelo grupo G_2 no momento da resolução, pelo fato de perceberem a inadequação dos dados do problema ou até mesmo por perceberem a sua inconsistência, como podemos observar no problema elaborado pelo sujeito do grupo G_2 .

Figura 6.6: Inconsistência percebida no momento da resolução



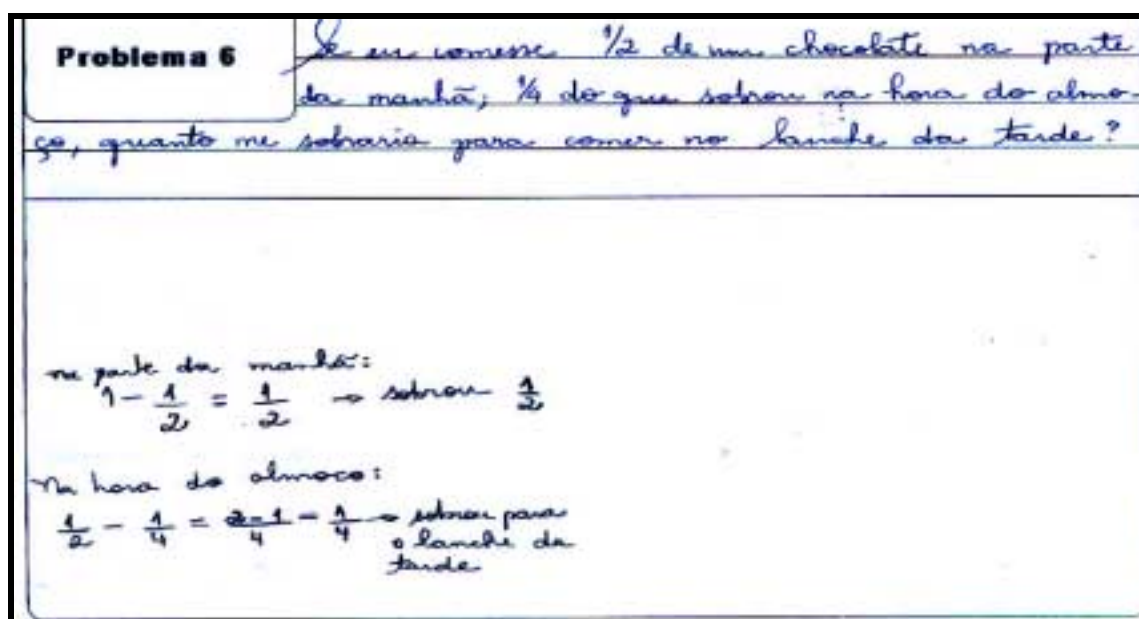
A primeira resposta dada ao problema, embora não tenha ficado registrado, foi $\frac{3}{4}$, isto é, se, o ano tem quatro bimestres, até setembro já se passaram três bimestres. É possível que no momento da elaboração do problema ela tenha pensado de fato neste contexto para dar tal resposta. No entanto, ao refletir sobre o problema proposto a professora descartou a resposta $\frac{3}{4}$ e apresentou uma justificativa da impossibilidade de resolução, em outras palavras, percebeu a inconsistência do enunciado. Todavia, não se preocupou em reformular o enunciado do problema de maneira que ele pudesse ser resolvido.

De todo modo, procuramos destacar, nesta análise, que a categoria algoritmo é a estratégia mais utilizada na resolução dos problemas elaborados por todos os grupos, ao mesmo tempo podemos observar que a maioria dos equívocos cometidos na resolução dos problemas deveu-se à utilização inadequada de algum tipo de algoritmo.

Para exemplificar estes equívocos, apresentaremos a seguir a estratégia utilizada por uma professora do grupo G₂. Salientamos que essa professora atuava no Ensino Fundamental (3^a e 4^a séries) há 16 anos e tem sua formação no curso de Magistério das séries iniciais do Ensino Fundamental e habilitação plena em Pedagogia.

Exemplo G₂ – S5 – problema seis

Figura 6.7: Exemplo da utilização da categoria algoritmo.



O problema elaborado, de acordo com a nossa classificação, envolve o significado operador multiplicativo em quantidades contínuas, porém, a resolução apresentada pela professora recorre à estratégia parte-todo isto é, do todo subtrai uma parte ou algumas partes.

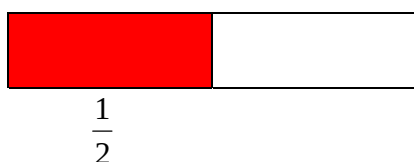
Podemos observar que a estratégia utilizada pela professora está centrada exclusivamente na categoria algoritmo, no caso regras para subtrair frações. Ao adotar esse procedimento podemos notar que a professora nem se deu conta do equívoco cometido na segunda operação, quando faz $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Tal operação

está correta do ponto de vista das regras para subtrair frações, porém não retrata corretamente a resolução do problema proposto.

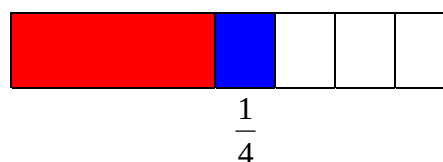
O equívoco cometido está relacionado ao fato de não considerar a outra metade como sendo o novo todo-referência e por desconsiderar a unidade do estado inicial. As operações foram feitas como sendo uma extensão das operações realizadas com os números naturais, ou seja, como as operações realizadas nos problemas envolvendo transformação (protótipo aditivo com estado inicial e transformação conhecida), isto é, se eu tenho 12 balas, dou três para o meu primo e cinco para minha irmã, fico com um total de quatro balas ($12-3=9$; $9-5=4$).

Todavia, acreditamos que uma mudança de estratégia de resolução, por exemplo: a utilização de diagramas (desenho), poderia facilitar a compreensão da situação proposta e até mesmo evitar o equívoco cometido com a utilização do algoritmo, pois, a partir desta perspectiva, baseando-se na percepção e na lógica parte-todo a situação poderia ser compreendida mais significativamente. Dessa forma teríamos:

Representação da situação inicial



Representação da segunda situação



A situação representada pelo algoritmo poderia ser a seguinte:

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} .$$

Essa situação retrata os perigos de se adotar estratégias de resolução centradas, exclusivamente, em algoritmo, cujos resultados podem não retratar a

solução da situação proposta, tendo implicações sérias no ensino das frações. Fato que nos leva a concordar com Vergnaud (1981), quando afirma que a falta de uma suficiente distinção entre o conceito e sua representação, ou seja, entre o significado e o significante, tornam-se com freqüência os símbolos e as operações sobre esses símbolos pelo essencial do conhecimento e da atividade matemática, enquanto esse conhecimento e esta atividade matemática situam-se principalmente no campo conceitual.

6.4.2. Distribuição das categorias por significados

A tabela a seguir, retrata a distribuição percentual da utilização das categorias - algoritmo, icônica e mistas nas situações com significado parte-todo, operador multiplicativo e quociente em cada grupo. Cabe ressaltar que nesta análise não levaremos em consideração os significados medida e número pelo fato da incidência desses significados ter sido pouca expressiva, conforme discutido na etapa de análise anterior.

Tabela 6.5: Distribuição das categorias por significado.

SIG	PT			OM			QO		
	GR	ALG.	ICON.	MIST.	ALG.	ICON.	MIST.	ALG.	ICON.
G ₁	4 de 14	8 de 14	2 de 14	53 de 70	4 de 70	13 de 70	7de 9	2 de 9	0 de 9
G ₂	9 de 34	20 de 34	5 de 34	60 de 80	11 de 80	9 de 80	3 de 3	0 de 3	0 de 3
G ₃	8 de 28	16 de 28	4 de 28	66 de 70	0 de 70	4 de 70	3 de 4	1 de 4	0 de 4
TOTAL	21de 76 27,76%	44 de 76 57,89%	11de 76 14,48%	179de220 81,36%	15de220 6,82%	26de220 11,81%	13de16 81,25%	3de16 18,75%	0de16 0%

Podemos constatar, com base na Tabela 6.5, que nas situações com o significado operador multiplicativo há uma tendência, nos três grupos, em utilizar a categoria algoritmo como procedimento de resolução. Este dado vem corroborar com a idéia defendida neste capítulo, de que há uma valorização no ensino das frações, do ponto de vista do professor, mais dos aspectos procedimentais do que dos conceituais da fração. Neste sentido, parece-nos que a situação envolvendo o significado operador multiplicativo possibilita uma ação mais imediata de determinadas regras de resolução.

Nas situações com o significado parte-todo, há uma predominância nos três grupos em utilizar a categoria icônica, como procedimento de resolução. É provável que esta preferência esteja relacionada com a abordagem contida na maioria dos livros, de introduzir o trabalho com o conceito de fração a partir da relação parte-todo em quantidades contínuas (chocolates, pizzas, etc.) representadas simbolicamente por meio de desenhos previamente divididos em partes iguais.

Com relação às situações envolvendo o significado quociente, pudemos observar, nos três grupos, uma tendência em utilizar, como procedimento de resolução, a categoria algoritmo baseada exclusivamente na operação de divisão. Esta tendência pode estar relacionada à não aceitação da representação fracionária como resposta a uma operação de divisão, visto que em situações de quociente a idéia presente é a de partição (divisão) entre duas grandezas vindas de quantidades diferentes. Dessa forma, o procedimento utilizado em uma situação de divisão como, por exemplo: dividir igualmente três chocolates para

quatro crianças seria de efetuar o algoritmo da divisão e obter como resposta o número 0,75 de chocolate ao invés de conectar a divisão 3:4 ao número $\frac{3}{4}$.

Embora, entendamos que a categoria mista possa representar um procedimento adequado, do ponto de vista didático, evitando certos equívocos como aquele retratado na seção 6.4.1 observa-se que a ocorrência desta categoria foi pouco expressiva nos três grupos. A incidência dessa categoria nas situações com significado parte-todo e operador multiplicativo ficou em patamares de 14% e 11%, respectivamente e não foi contemplada nas situações com o significado quociente.

Esta evidência nos leva a refletir sobre os caminhos escolhidos pelo professor para fazer frente a determinadas situações que requeiram a utilização de diferentes pontos de vista para sua resolução, objetivando uma melhor compreensão e o entendimento das mesmas. Talvez os professores, polivalentes e especialistas, não tenham clareza e nem mesmo utilizam as diferentes possibilidades de resolução de problemas envolvendo o conceito de fração e optem pelas mais triviais.

Da análise dos tipos de resolução empregados em cada significado podemos constatar que há uma predominância do uso da categoria algoritmo como procedimento de resolução, nos três grupos. Passaremos, a seguir, para uma análise mais aprofundada das estratégias utilizadas nessa categoria.

6.4.3. As estratégias de resolução presentes na categoria algoritmo

Conforme, constatamos na seção anterior, os tipos de resolução apresentada tanto por professores polivalentes quanto especialistas, estão

basicamente centrados na categoria algoritmo. Tendo em vista esta valorização dos aspectos procedimentais, focalizaremos as estratégias empregadas nesta categoria nas situações com significado parte-todo, operador multiplicativo e quociente.

Nas situações envolvendo o significado operador multiplicativo e parte-todo, observamos que as estratégias empregadas para resolução estão basicamente centradas no convênio de duas operações: multiplicação – divisão (ou vice-versa). Para exemplificar as estratégias de resolução empregada nesses dois significados, apresentaremos duas resoluções feitas por professores do grupo G_3 e G_2 , respectivamente.

Situação 1.

Figura 6.8: Estratégias utilizadas na categoria algoritmo – situação operador multiplicativo.

Problema 3 Uma determinada consumidora quer comprar uma calça que custa R\$25,00, mas ela só tem $\frac{3}{4}$ do valor da calça. Quanto falta para ela comprar a calça?

$$25 \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{4} = 18,75$$

$$\begin{array}{r} 25,00 \\ - 18,75 \\ \hline 06,25 \end{array}$$

R. Falta R\$ 6,25

Podemos observar, na resolução apresentada, que a fração $\frac{3}{4}$ assume um papel de multiplicador-divisor, atuando sobre o valor (R\$ 25,00) e transformando

seu valor durante o processo. Ao aplicar a fração $\frac{3}{4}$ ao número 25, está imprimindo neste caso, uma ação ampliação – redução desse valor ($25 \times 3 \div 4$). Esta idéia é defendida por BHER et. al. (1983), quando afirmam que, ao conferir às frações o significado de operador multiplicativo, significa concebê-la como uma máquina – função. Isto é, uma fração $\frac{p}{q}$ quando atua, por exemplo, sobre um conjunto discreto de n elementos transformando num conjunto com np elementos.

Cabe ressaltar que esta estratégia, multiplicador-divisor é utilizada tanto pelo grupo de professores polivalentes como pelo grupo de professores especialistas.

Com relação às estratégias de resolução utilizadas nas situações parte-todo, vários estudos têm apontado uma tendência em explorar tais situações a partir de representações estáticas, geralmente, usando figuras geométricas. Nessas situações, as frações são definidas a partir da representação $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, se apoiando na estratégia da dupla contagem, como afirma NUNES (1997). Todavia, encontramos diversas situações envolvendo as frações com significado parte-todo, cuja resolução extrapola esta estratégia rígida da dupla contagem, como pode se observar na resolução de uma professora pertencente ao grupo G₂.

Situação 2.

Figura 6.9: Exemplo da utilização da categoria algoritmo – Situação parte-todo.

Problema 1 Para pagar a mensalidade da faculdade, João gasta 630 reais, o que representa $\frac{4}{7}$ do seu salário. Quanto é o salário de João?

$\frac{4}{7} = 630$
 $630 \div 4 = 157,50$
 $7 \times 157,50 = 1.102,50$

R: O Salário de João é de R\$ 1.102,50

Apesar de se tratar de uma situação parte-todo, visto que a partir de algumas partes devemos reconstruir o todo, podemos observar, assim como na situação anterior, que a estratégia de resolução adotada apóia-se no convênio de duas operações: divisão—multiplicação. Embora, existam similaridades entre as duas estratégias, do ponto de vista da categoria algoritmo (convênio de duas operações – multiplicação/divisão), duas distinções devem ser feitas. A primeira distinção diz respeito ao todo-referência. Na situação 1 o valor R\$25,00 representa o todo (unidade), enquanto na situação 2 o valor R\$ 630,00 representa partes de um todo. Essa diferença pode parecer tão “óbvia”, mas entendemos que, do ponto de vista didático, ela deve ser feita para evitar certos equívocos, como aquele relato na seção 6.4.1 – que se aplica a um determinado algoritmo que não possibilita encontrar o resultado adequado à situação proposta.

A segunda refere-se ao papel que a fração desempenha na resolução das duas situações. Na resolução 1, como já explicitado anteriormente, a fração assume um papel de operador e na resolução 2 desempenha um papel de

relação parte-todo, isto é, quando se faz $630 \div 4 = 157,50$, está calculando o valor de uma parte para construir o todo ($157,50 \times 7 = 1102,50$).

A similaridade entre as duas situações, a que nos referimos anteriormente, reside no fato de que o convênio divisão – multiplicação é uma estratégia bem adaptada para ambas situações, embora essas operações não obedeçam à mesma ordem.

Situação 1: $(25 \div 4) \times 3 = 18,75$

Situação 2: $(630 \div 4) \times 7 = 1102,50$

Nas situações quociente, a estratégia utilizada na categoria algoritmo, refere-se à operação de divisão de uma variável por outra de natureza diferente. A resolução apresentada por uma professora do grupo G_1 , retrata essa estratégia.

Figura 6.10. Exemplo do uso da categoria algoritmo, situação quociente.

Problema 4 c	Comprei 8 pães e dividi entre 12 crianças. Quanto cada criança comeu?
$8 \div 12$ $\begin{array}{r} 8 \overline{) 12} \\ 08 \\ \underline{00} 0,66 \\ 8 \end{array}$ Cada criança vai comer 0,66 dos pães	

Podemos observar que a estratégia usada, pela professora, é a divisão do número de pães pelo número de pessoas, ou seja, $8 \div 12$. Notamos ainda, que embora reconheça que a operação de divisão é uma ferramenta bem adaptada para resolver tal situação, há necessidade de se efetuar o algoritmo da divisão para obter o resultado expresso em sua forma decimal 0,666..., não admitindo, portanto, a fração $\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$ como resposta da operação da divisão, ao mesmo tempo em que não percebe a inadequação da expressão decimal nesse contexto.

Esta constatação pode evidenciar o não reconhecimento da fração como número e, por extensão, o seu não reconhecimento como resposta a uma operação de divisão, conforme ressalta David & Fonseca (1997).

No transcorrer da nossa análise, à luz do quadro teórico proposto, procuramos classificar os problemas elaborados por professores polivalentes e especialistas, levando em consideração quatro enfoques de análise, bem como procuramos identificar e classificar os tipos de procedimentos e estratégias de resolução empregada em cada significado. Embora, tenhamos constatado que não houve uma diferença expressiva, entre os professores polivalentes e especialistas, no que tange a elaboração e a resolução de problemas envolvendo o conceito de fração, observamos algumas situações bem elaboradas do ponto de vista do nosso estudo. Apresentaremos, a seguir, dois exemplos como representantes dessas situações.

6.5. A SITUAÇÃO PARTE-TODO E A QUOCIENTE

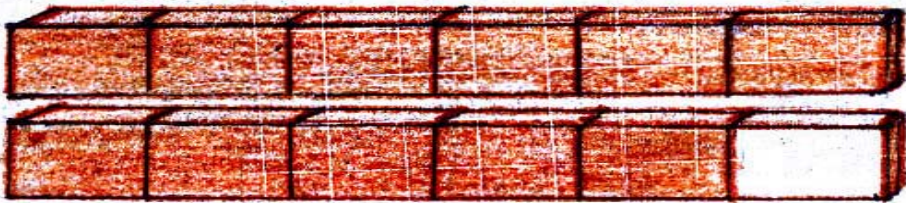
Dentro dos limites da nossa amostra, ou seja, entre os 402 problemas elaborados e resolvidos, foi possível, conforme já retratamos anteriormente, a realização de várias análises, tanto àquelas referentes ao tipo de situação quanto àquelas referentes às estratégias de resolução. Entre as várias situações por nós analisadas encontramos um número delas, que de fato, podem se constituir em boas situações para o trabalho com as frações em sala de aula. Destacaremos na presente sessão duas delas. Essas situações exploram as frações a partir de quantidades contínuas e suas resoluções são representantes da categoria icônica.

Problema 1

Figura 6.11 – Situação parte-todo elaborada pelo G2S15.

Problema 4

Renato ganhou 2 barras de chocolates. Ele dividiu-as em 6 partes iguais e comeu 11 das duas barras. Represente com desenhos as partes do chocolate comidas por Renato.



Resp: Renato comeu 1 barra de chocolate inteira e mais 5 pedaços da outra barra, ou seja, $1 + \frac{5}{6}$.

Essa situação apesar de tratar-se de uma situação com o significado parte todo, extrapola as concepções construídas com as típicas situações envolvendo tal significado. Diversos estudos têm apontado que uma maneira comum de se trabalhar com as situações parte-todo em sala de aula é a de apresentar um todo dividido em partes iguais, com algumas delas pintadas e informar que a fração que representa tal situação é constituída por um numerador (número de partes pintadas) e pelo denominador (número total de partes), isto é, partes pintadas/total de partes.

Campos et. al. (1995), em seus estudos mostrou claramente a ineficácia de tal procedimento, trabalhando com uma situação em que o todo não estava dividido explicitamente em partes iguais. Campos et.al. (1995) constataram que a utilização do método da dupla contagem levou os alunos a não considerar a conservação da área.

A situação 1, proposta pela professora, extrapola a idéia de que uma situação o significado parte-todo só é possível representada por frações com numerador menor que o denominador (frações próprias). Tal idéia até certo ponto é aceitável, pois se são partes de um todo, como admitir fração maior que um? Essa questão nos leva a refletir sobre a unidade, sobre o todo referência.

Na situação proposta pela professora, porque a fração $\frac{11}{12}$ (processo da dupla contagem), não retrata a resposta?

Admitir essa resposta, como correta, na lógica parte-todo seria cometer dois equívocos. O primeiro seria considerar os dois chocolates, (discretização do contínuo), como sendo o todo referência e o segundo diretamente conectado ao primeiro, seria considerar, do ponto de vista da Matemática, como correta a

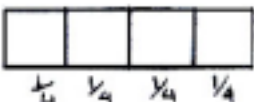
operação $\frac{6}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{12}$.

Problema 2

Figura 6.12: situação quociente elaborada pelo G1S6.

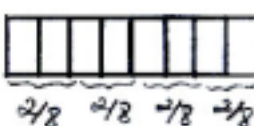
Problema 3

Tenho 1 chocolate para dividir para 4 crianças. O que eu devo fazer?



cada um recebe $\frac{1}{4}$

ou



cada um recebe $\frac{2}{8}$

R. Ainda existem outras maneiras

Na primeira etapa de análise, conforme explicitado na metodologia, contamos com a classificação feita por sete juízes. Dessa forma, cada problema foi analisado e classificado, nesta etapa, levando em consideração oito pontos de vista (pesquisador mais sete juízes). Momento em que classificamos por unanimidade, como inconsistente a referida situação, pois, a pergunta feita parecia ser descabida do ponto de vista da categoria de análise por nós proposta. Porém ao analisar a estratégia de resolução empregada pela professora, na segunda etapa de análise (resolução), revimos tal posição, e percebemos que se tratava de uma situação consistente e que, portanto valeria a pena ser discutida.

Trata-se de uma situação com significado quociente, em que a fração refere-se à divisão de uma variável por outra de natureza diferente, no caso chocolate por crianças. Então, a divisão ($1 \div 4$) deveria expressar o que cada criança receberia de chocolate, ou seja, $\frac{1}{4}$, como já discutimos anteriormente. No entanto, o questionamento feito em tal situação – “o que eu devo fazer?” - permite outras possibilidades de estratégias de resolução, como pode ser observado na estratégia utilizada pela professora.

Parece-nos que a estratégia utilizada pela professora segue a lógica da relação parte-todo, centrada em apenas uma variável – chocolate. Na primeira e na segunda estratégia, divide-se o chocolate em partes iguais (4 e 8) e indica as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ (baseado na relação parte-todo), respectivamente , como sendo as frações que cada criança receberia de chocolate nos dois procedimentos.

No entanto, poderíamos admitir que o significado quociente esta presente de maneira implícita em tal procedimento, pois se dividíssemos o chocolate, por exemplo, em 100 partes iguais, a representação por diagramas não seria uma

estratégia bem adaptada para expressar a fração correspondente ao que cada criança receberia, como no caso dos dois procedimentos apresentados pela professora. Então, deveríamos dividir 100 por 4 ou seja, total de partes do chocolate pelo total de crianças (significado quociente), obter 25 como quociente e indicar $\frac{25}{100}$ (relação parte-todo), como a quantidade correspondente ao que cada criança receberia.

Entendemos que esta situação, quando trabalhada em sala de aula, principalmente com questionamentos abertos, como se observa na situação aqui discutida - o que eu devo fazer?- podem encorajar os alunos na resolução do problema, possibilitando, sobretudo, momentos de comparação, de validação e equivalência de suas respostas. Dessa forma, o conceito de equivalência das frações, por exemplo, poderia ser construído de maneira mais significativa e natural pelos alunos.

Na próxima seção apresentaremos uma síntese dos principais resultados obtidos na segunda etapa da análise.

6.6. SÍNTESE DOS PRINCIPAIS RESULTADOS DA 2ª ETAPA DE ANÁLISE

Da análise dos tipos de procedimento e estratégias de resolução foi possível constatar que:

- que há de uma maneira geral, nos três grupos, uma tendência em valorizar um conjunto de regras e técnicas – categoria algoritmo – para resolver problemas envolvendo o conceito de fração. Embora, este tipo de estratégia tenha sido comum em todos os grupos, constatamos que o

grupo G apresentou, em certas resoluções, um nível mais sofisticado de formalidade Matemática;

- numa análise mais aprofundada dos tipos de procedimentos empregados na resolução em cada significado, observamos que nos problemas envolvendo o significado parte-todo em quantidades contínuas há uma predominância, nos três grupos, da representação icônica como procedimento de resolução e nas situações envolvendo o significado operador multiplicativo predominam o uso do algoritmo;
- nas situações envolvendo o significado quociente constatamos que houve uma tendência, nos três grupos, em empregar a categoria algoritmo na resolução dos problemas. Embora, reconheçam que a operação de divisão é uma boa ferramenta para resolver problemas de quociente, parece não fazer a conexão entre essa operação e a representação fracionária;
- a utilização da categoria algoritmo, em determinadas ocasiões conduziu a certos equívocos na resolução dos problemas, principalmente relacionados à conservação da unidade e a uma tentativa de extensão das operações realizadas no campo dos naturais às operações com as frações.

No próximo capítulo, apresentaremos as conclusões de nosso estudo e sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

7.1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa teve por objetivo realizar um diagnóstico junto aos professores que atuavam no Ensino Fundamental. Nossa preocupação central foi a de compreender o estado – concepções - em que se encontrava o conceito de fração para professores dessa etapa do ensino escolar.

Para alcançar o objetivo proposto percorremos um longo caminho, o qual teve início com a problematização, relevância do estudo e a elaboração da questão de pesquisa (capítulo 1). Na seqüência, buscamos subsídios teóricos que pudessem nos auxiliar no desenvolvimento do nosso estudo. Para tanto, apoiamos-nos, sobretudo na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, no que se refere à formação do conceito, e nas idéias teóricas de Nunes e Kieren concernentes aos diferentes significados da fração (Capítulo 2).

Em seguida, procuramos apresentar uma discussão teórica sobre o objeto matemático do nosso estudo – **fração** – sob dois aspectos: o da Matemática como ciência - sua evolução histórica e construção formal - e o da Matemática como disciplina escolar - seu ensino e sua aprendizagem -, momento em que visitamos diversos estudos correlatos ao nosso, como por exemplo: Kieren, Behr, Kerslake, entre outros (Capítulo 3). Procuramos fechar nossas questões teóricas com uma discussão a respeito dos estudos que focalizam a formação do

professor, de um modo geral e, especialmente, aquelas que tratam do conhecimento do professor que ensina matemática (Capítulo 4).

Sustentados por essas idéias teóricas e à luz das leituras de pesquisas inspiradoras, relacionadas ao nosso estudo, definimos e construímos o plano de ação da nossa pesquisa – metodologia – composto de duas fases: a primeira consistiu na elaboração de problemas e a segunda na resolução dos problemas elaborados na fase anterior. Tivemos como público-alvo 67 professores, entre polivalentes e especialistas, que atuava no Ensino Fundamental, distribuídos em sete escolas públicas estaduais da cidade de São Paulo (Capítulo 5).

Assim, o presente capítulo se propõe a fazer o fechamento do estudo, isto é, apresentar as conclusões baseadas na análise dos resultados encontrados (Capítulo 6). Para que nossas idéias se desenvolvam, observando um desencadeamento lógico, o presente capítulo está dividido em três partes. A primeira voltada para uma síntese dos principais resultados. Em seguida, com base nesses resultados, responderemos à questão de pesquisa que foi exposta no início deste estudo (Capítulo 1) e, finalmente, apresentaremos algumas sugestões para futuras pesquisas.

7.2 SÍNTESE DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

Nessa seção apresentaremos uma síntese dos principais resultados discutidos no capítulo da análise. Para tanto, dividiremos esta seção em duas partes: a da elaboração e a da resolução dos problemas.

Elaboração

Com base na análise dos problemas elaborados pudemos observar que houve uma tendência, tanto dos professores polivalentes como dos especialistas, em elaborar bons problemas partindo de situações próximas do cotidiano do aluno. Embora este dado seja positivo do ponto de vista do nosso estudo, constatamos que foram cometidos certos equívocos na elaboração dos problemas, tanto pelos professores polivalentes, como pelos especialistas, mais acentuadamente entre os primeiros. Estes equívocos levaram à proposição de problemas inconsistentes. A ocorrência de tais equívocos estava relacionada, principalmente ao fato dos professores raciocinarem sobre as situações em que as frações estavam envolvidas, como extensão das situações envolvendo os números naturais, sem ressignificá-las. Tivemos 22,82% de problemas inconsistentes entre os professores polivalentes e 7,15% entre os professores especialistas.

Constatamos, ainda que a variável - tempo de experiência - não interferiu na elaboração dos problemas inconsistentes, ou seja, encontramos a ocorrência de certos equívocos tanto nos problemas elaborados por professores pouco experientes (um ano de atuação no ensino), quanto nos problemas daqueles professores mais experientes (com mais de 10 anos na docência).

Com relação aos diferentes significados que a fração pode assumir em diversas situações, os dados apontaram que não há uma distribuição eqüitativa entre os cinco significados. Constatamos que existe uma predominância expressiva nos três grupos (G_1 , G_2 e G_3), em elaborar problemas contemplando o significado - operador multiplicativo - tendo uma ocorrência mais acentuada no

grupo G_1 . Os índices percentuais foram: (73,68%) no G_1 ; (67,69%) no G_2 e (59,82%) no G_3 . Esta tendência revela, de certo modo, uma divergência entre a concepção dos professores polivalentes (G_1 e G_2) e as recomendações contidas nos PCN, visto que tais manuais não sugerem como tratamento didático, para o início do ensino das frações, uma abordagem partindo de situações envolvendo o significado operador multiplicativo.

Quanto ao significado parte-todo, este foi o segundo mais explorado na elaboração dos problemas por todos os grupos. No entanto, a sua ocorrência se torna pouca expressiva comparativamente à ocorrência do significado operador multiplicativo, visto que, de uma maneira geral, houve uma diferença de 43 pontos percentuais em favor desse último. A ocorrência de problemas envolvendo este significado foi: (14,73%) no G_1 ; (28,81%) no G_2 e (23,93%) no G_3 . Estes dados apontam mais uma divergência entre a concepção dos professores polivalentes (G_1 e G_2) e as recomendações contidas nos PCN, tendo em vista que este documento sugere, para início do trabalho com frações, uma abordagem partindo do significado parte-todo.

Os resultados apontaram também que, embora existam estudos relevantes, como, por exemplo, Kieren e Nunes, sugerindo que o significado quociente seria uma boa abordagem para o início do ensino das frações, este significado foi pouco explorado na elaboração dos problemas pelos três grupos – (9,47%) no G_1 ; (2,54) no G_2 e (3,41) no G_3 .

Os significados número e medida tiveram uma incidência muito baixa nos três grupos, ou mesmo não tiveram.

Com relação à utilização das quantidades contínuas e discretas, os nossos resultados apontaram que ambas são contempladas na elaboração dos

problemas. No entanto, não houve uma distribuição equitativa entre os dois significados mais explorados da fração. Nos problemas envolvendo o significado parte-todo predominaram as quantidades contínuas e nos problemas envolvendo o significado operador multiplicativo, as quantidades discretas, isto para todos os grupos. Mesmo quando as quantidades contínuas estavam presentes nos problemas com significado operador multiplicativo, houve uma tendência em discretizar do contínuo.

Finalmente, com relação à utilização dos invariantes do conceito (ordem e equivalência), estes tiveram uma ocorrência quase nula nos problemas elaborados pelos três grupos, isto é, do total dos 330 problemas analisados, apenas 12 (3,63%), contemplaram esses invariantes – quatro no G_1 ; três no G_2 e cinco no G_3 .

Resolução

Analisando os tipos de resoluções, identificamos três categorias: algoritmo, icônica e mista. Os resultados mostraram que houve, de uma maneira geral, uma tendência em valorizar um conjunto de regras e técnicas - categoria algoritmo - para resolver problemas envolvendo o conceito de fração. Embora este tipo de estratégia fosse comum em todos os grupos, constatamos que o grupo G_3 apresentou, em certas resoluções, um nível mais sofisticado de formalidade Matemática, provavelmente decorrente de sua formação inicial.

De todo modo, quando partimos para uma análise mais aprofundada dos tipos de procedimentos empregados na resolução dos problemas em cada significado, identificamos que, nos problemas envolvendo o significado parte-todo em

quantidades contínuas houve uma predominância, nos três grupos, em empregar o ícone (representação por diagramas) como procedimento de resolução, geralmente apoiada na estratégia da dupla contagem – número de partes pintadas para o numerador da fração e o total de partes para o denominador.

Com relação aos problemas envolvendo o significado operador multiplicativo em quantidades contínuas e discretas, os resultados mostraram uma tendência, nos três grupos, em utilizar procedimentos de resolução centrados em algoritmo, baseados, quase que exclusivamente, na estratégia de aplicação do convênio multiplicação e divisão entre dois números naturais e em certas técnicas para operar com as frações: (exemplo: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$).

Nos problemas envolvendo o significado quociente observamos que houve uma tendência entre os professores polivalentes e especialistas em resolver tais problemas, usando a categoria algoritmo, baseados na estratégia da divisão entre duas variáveis. Constatamos ainda que, embora reconheçam que a divisão é uma boa ferramenta para resolução desses problemas, parecem não aceitar a representação fracionária como resposta a esta operação, tendo a necessidade de efetuar o algoritmo da divisão e expressar o resultado usando a representação decimal.

Finalmente, apesar de termos identificado três categorias de tipos de resolução, os dados mostraram que, há uma supremacia da categoria algoritmo em todos os grupos, fato que, por diversas vezes, conduziu-os a certos equívocos na resolução de determinadas classes de problemas relacionados, principalmente, à conservação da unidade e à tentativa de extensão das operações realizadas no campo dos naturais às operações com frações.

7.3 RESPONDENDO A QUESTÃO DE PESQUISA

No início desse estudo levantamos certas dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem do conceito de fração, ao mesmo tempo em que sugerimos que estas dificuldades poderiam ser minimizadas por um trabalho que privilegiasse o ensino de fração, a partir de diversos contextos explorando os seus diferentes significados. Destacamos, neste sentido, a importância do papel do professor, pois cabe a ele a cuidadosa escolha e adequação das situações que dão significado ao conceito.

Assim, o conhecimento que o professor (polivalente ou especialista) precisa ter para ensinar não é equivalente ao que seu aluno vai aprender; são conhecimentos mais amplos, tanto no que se refere ao nível de profundidade, quanto ao tipo de saber.

Nesta perspectiva, partimos da hipótese que o desempenho dos alunos mantém estreita relação com as concepções de seus professores e que o modo pelo qual o conceito de fração será introduzido dependerá, sobremaneira, das concepções que seus professores têm sobre este conceito. Apoiados, nessa hipótese, lançamos mão da nossa questão de pesquisa:

É possível reconhecer as concepções dos professores, que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas), do Ensino Fundamental, em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados?

- ***Se sim, quais são?***
- ***Se não, por quê?***

Face aos resultados e dentro dos limites da nossa amostra, defendemos a idéia de que é possível reconhecer as concepções dos professores, como também temos plena convicção que não poderemos generalizar nossos resultados para além do universo pesquisado, pois se tratou de um estudo com um pequeno número de sujeitos, os quais foram escolhidos sem o rigor da aleatoriedade estatística.

Dessa forma, a partir da análise dos resultados, foi possível encontrar certas evidências que sustentam nossa afirmação sobre a possibilidade de identificar as concepções dos professores que atuam no Ensino Fundamental, em relação ao conceito de fração. Tendo respondido nossa questão central, passaremos a apresentar estas evidências e posteriormente discutir quais são essas concepções.

A primeira evidência diz respeito à utilização dos diferentes significados da fração. O resultado da classificação dos problemas elaborados mostra, salvo pequena diferença, que houve uma tendência entre os professores polivalentes e especialistas, em elaborar problemas contemplando o significado operador multiplicativo seguido pelo significado parte-todo, havendo uma predominância expressiva em favor do primeiro.

Uma outra evidência refere-se à similaridade existente, entre os três grupos, na utilização das quantidades contínuas e discretas. Os dados mostram que a primeira é utilizada nos problemas envolvendo o significado parte-todo e a segunda é utilizada, quase que exclusivamente, nos problemas envolvendo o significado operador multiplicativo.

A terceira evidência que levantamos está relacionada aos invariantes do conceito de fração, ordem e equivalência. Constatamos, em todos os grupos, que estes invariantes tiveram uma ocorrência quase nula.

A última evidência está relacionada aos procedimentos e estratégias de resolução empregadas por todos os grupos, tanto pelos professores polivalentes como pelos especialistas. Constatamos, a partir da análise dos dados, que há uma tendência em valorizar o algoritmo nos problemas envolvendo o significado operador multiplicativo e quociente e a representação icônica nos problemas envolvendo o significado parte-todo.

Olhando para estes resultados e nos restringindo sempre aos limites da nossa mostra, é razoável concluir que a concepção dos professores polivalentes e especialistas está bem próxima, em relação à elaboração de problemas envolvendo o conceito de fração em seus diferentes significados. Podemos até, de certo modo, inferir que esta concepção é limitada e preocupante, do ponto de vista do nosso estudo, visto que estamos defendendo, assim como Vergnaud e Nunes, que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de uma variedade de situações.

Analisando os tipos e as estratégias de resolução empregadas, pelos três grupos na resolução dos problemas, os dados mostraram uma tendência em valorizar estratégias de resolução centradas em procedimentos e algoritmo, embora entre os professores especialistas pudéssemos notar certas estratégias mais sofisticadas de resolução. Este fato permite-nos concluir que há fortes indícios de uma valorização, em sala de aula, dos aspectos procedimentais, em detrimento dos aspectos conceituais da fração. Estes indícios são detectados na clara preferência dos professores (polivalentes e especialistas) em valorizar os

aspectos procedimentais. Esta preferência, provavelmente justifica o número de problemas elaborados com o significado operador multiplicativo, visto que, problemas envolvendo esse significado muito se presta à utilização do algoritmo como procedimento de resolução.

Face às considerações feitas acima, levantamos uma hipótese conclusiva, e não excludente sobre as concepções dos professores, polivalentes e especialistas, em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados. Se, por um lado, os dados mostraram que existem diversas similaridades entre as concepções dos professores polivalentes e especialistas, em relação à elaboração e resolução de problemas envolvendo o conceito de fração, por outro lado, os espaços de formação destes dois grupos, polivalentes e especialistas, são natureza e especificidades distintas, conforme foi retratado no capítulo seis. Então, cabe questionar, a partir desse paradoxo, o lugar comum em que tais concepções foram construídas.

À luz deste questionamento, é razoável concluir que a concepção dos professores (polivalentes e especialistas) explícita nos momentos da elaboração e da resolução de problemas envolvendo o conceito de fração, sem apoio de nenhum tipo de material, carrega fortes marcas daquela construída enquanto aluno da Educação Básica. Concepção esta com raízes tão profundas que é provável que permaneçam engessadas em suas mentes. Este fato leva-nos a concordar com as idéias defendidas por Tardif, quando discute que os saberes dos professores não estão baseados apenas em sua atuação de sala de aula, mas decorrem, em grande parte, de pré-concepções de ensino e aprendizagem herdadas de sua história de vida e principalmente de sua história escolar.

Partindo dessa hipótese conclusiva, é momento de refletir e questionar se estas questões são, e se são, como estão sendo percebidas, trabalhadas e discutidas nos atuais cursos de formação inicial de professores. No entanto, temos clareza que este questionamento é apenas a ponta de um *iceberg*, e a tarefa de desvelá-lo é uma questão que demanda estudo profundo e tempo, em função dos diversos olhares críticos.

Finalmente, ao refletir sobre o fechamento deste estudo, temos a convicção que se faz necessário um trabalho consistente de formação de professores, tanto de professores especialistas como polivalentes, a partir de novos enfoques didáticos e pedagógicos sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de fração. Dessa forma, provavelmente consigamos minimizar, a médio e longo prazo, as dificuldades encontradas por professores e alunos no trabalho este conceito.

7.4 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

No decorrer da análise e durante o fechamento desse estudo algumas questões ficaram latentes e agora vamos torná-las explícitas. Um primeiro questionamento seria: como o conceito de fração, do ponto de vista do seu ensino, vem sendo tratado nos cursos de formação inicial de professores especialistas? Sugerimos que esta investigação seja pautada na análise dos dados coletados a partir três instrumentos de avaliação sobre conhecimentos básicos dos números racionais dos licenciandos; entrevistas interativas com alunos concluintes; entrevistas interativas com professores do curso pesquisado, além de diversos documentos como, ementas, planejamentos e grades curriculares, entre outros. Uma outra variação desta sugestão seria a realização

de uma investigação análoga nos cursos de formação de professores polivalentes.

Outra sugestão seria o questionamento: como iniciar um processo contínuo, por meio do diálogo com os professores do Ensino Fundamental, que tenha como meta identificar processos heurísticos fundamentais à construção de noções matemáticas, especialmente do número fracionário? A resposta a tal questão exigiria do pesquisador um trabalho junto com um grupo de professores, polivalentes ou especialistas, no contexto da escola, e um exercício de escuta e de palavra, com vistas ao encorajamento dos professores a uma mudança de suas perspectivas quanto à natureza da aprendizagem Matemática. O desenvolvimento desse projeto poderia compreender três etapas: a primeira seria elaboração compartilhada - pesquisador/professor - de atividades de ensino pautada na metodologia – resolução de problemas. Uma outra etapa consistiria na aplicação destas atividades - cada professor aplicaria em sua respectiva turma – e, a última etapa e seria dedicada à discussão e análise reflexiva dos resultados obtidos a partir da aplicação da atividade. Todos estes momentos exigirão do pesquisador um exercício de humildade intelectual.

Finalmente, a descrição rigorosa e sistemática dessa experiência poderia constituir-se em um rico material de análise e reflexão, indicando novas perspectivas rumo a um projeto mais amplo que vislumbre outras possibilidades de formação continuada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

ÁVILA, G. **Introdução à análise Matemática**. 2ª ed. rev. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1997.

BEHR, M. J. et al. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1983. p. 296-333.

BEZERRA, F. J. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações**: uma abordagem criativa para a sala de aula. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação**. Brasília, DF, 1996.

_____, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1997.

_____, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação de Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1998.

_____, Ministério da Educação e do Desporto. **Proposta para Diretrizes para formação inicial de professores da Educação Básica em Cursos de Nível Superior**. Brasília, DF, 2000.

_____, Ministério da Educação e do Desporto. **Sistema Nacional de Avaliação Básica**. Brasília, DF, 2002.

CAMPOS, T. et al. (1995), **Lógica das equivalências**: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, [19--]. Não publicada.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARVALHO, D. L. **A concepção de matemática dos professores também se transforma**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

CISCAR, S. L.; GARCÍA, M. S. (coord). **Fracciones**: la relacion parte/todo. Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

CLEMENTS, M. A.; DELCAMPO, G. **How natural is fraction knowledge?** Trabalho apresentado ao 6º Congresso Internacional de Educação Matemática, Budapeste, 1988.

CURY, H. N. Concepções e crenças dos professores de matemática: pesquisas realizadas e significados dos termos utilizados. **Bolema**, São Paulo, ano 12, n. 13, p.29-44, 1999.

DAVID, M. M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica**, Minas Gerais, v. 3, n. 14, mar./abr.1997.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

_____ et.al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. **Revista Educação em Revista**, Belo Horizonte, 2003, p. 102. Dossiê Educação Matemática.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 155-196.

GATTI, B. **Formação de professores e carreira**: problemas e movimentos de renovação. Campinas: Autores Associados, 1997.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo, 1996.

KERSLAKE, D. **Fractions: children's strategies and errors**: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T. E. Number and measurement: **mathematical, cognitive and instrucional foundations of rational number**, Columbus, OHERIC/SMEA, p. 101-144, 1976.

_____. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: J. HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): **Number concepts and operations in the Middle Grades**. New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-80.

_____. Multiple views of multiplicative structures. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (eds.): **The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics**. New York: State University of New York Press. 1994. p. 389-400.

MACK, N. K. **Learning rational numbers with understanding**: the case of informal knowledge. In: T. P. Carpenter; E. Fennema, and T.A. 1993.

MAGINA, S. et al. **Repensando adição e subtração**. São Paulo: PROEM, 2001.

MONTEIRO, C. A formação para o ensino da Matemática na perspectiva da ESE de Lisboa. In: SERRAZINA, L. (Org.). **A formação para o ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico**. Lisboa: INAFOP, 2001. p. 21-28.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na Escola Básica. Rio Claro, **BOLEMA**, ano 17, n. 21, p. 1-19, 2004.

NÓVOA, A. **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

_____. **Programa de formação continuada para profissionais do Ensino Médio**. Síntese da teleconferência proferida em 2004.

NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

_____; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

_____ et al. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p. 53-92.

OLIVEIRA, H. M.; PONTE, J. P. Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: 7º SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Actas...** Lisboa: APM, 1996.

OLIVEIRA, J. **Constituição da República Federativa do Brasil**. São Paulo: Saraiva, 1996.

PERRENOUD, P. **10 Novas Competências para Ensinar**. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIRES, Célia Maria Carolino. Formação inicial e continuada de professores de Matemática: possibilidades de mudanças. In: 5º ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Porto Alegre: UNISINOS, 2003.

POTHIER, Y.; SAWADA, D. Partitioning: an approach to fractions. In: **Arithmetic Teacher**, v. 38, p. 12-16, 1990.

PROEM. **Uma análise da construção do conceito de fração**. Coordenadora: Campos, T.N. e Orientadora: D'Ambrósio, B. 1989.

SANTOS, S. S. **A formação do professor não especialista em conceitos elementares do bloco tratamento da informação**. 2003. Dissertação (Mestrado

em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

SÃO PAULO, Secretaria dos Negócios da Educação. **Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar**. São Paulo. 2000.

SHULMAN, L. S. Those who understand knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1992.

SILVA, M. J. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

STRIJK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TINOCO, L. A. A.; LOPES, M. L. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. In: **A Educação Matemática em Revista-SBEM**, n. 2, p. 13-18, 1º sem. 1994.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press Inc., 1983. p. 127-174.

_____. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). **Research agenda in Mathematics Education**: number concepts and operations in the Middle Grades. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.

_____. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). 1º Seminário Internacional de Educação Matemática. **Anais...** Rio de Janeiro: Seminário Internacional de Educação Matemática, 1993. p. 1-26.