YUK WAH HSIA

A UTILIZAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO PELO ALUNO AO ESTUDAR INTEGRAL

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

YUK WAH HSIA

A UTILIZAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO PELO ALUNO AO ESTUDAR INTEGRAL

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob a orientação do **Professor Doutor Benedito Antonio da Silva**.*

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

______________________________ ______________________________

Assinatura Local e Data

Aos meus pais e meu tio,
In memorian

Agradecimentos

*Ao Professor **Doutor Benedito Antonio da Silva**, que orientou este trabalho com dedicação, empenho e competência.*

*Aos Professores, **Doutora Cristina Cerri** e **Doutor Saddo Ag Almouloud** pela participação na Banca Examinadora e pelas sugestões e comentários que contribuíram para a evolução do trabalho.*

*Aos **Professores do Programa de Ensino de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP**, por todo incentivo dado ao longo do curso.*

*Aos **Professores Doutores Ana Chiummo, Norma Sueli Gomes Allevato, Waldemar De Maio, Walter Paulette** e ao Professor **Mestre Ayrton Barboni**, pelo incentivo e amizade.*

*À **direção** e aos **estudantes** do Curso de Matemática da Universidade Paulista, que contribuíram no experimento deste trabalho.*

*Aos **colegas do Mestrado**, pelo companheirismo.*

*Aos amigos, **Alberto, Luciana, Maria Helena, Maryneusa**.*

*À **minha família**, pelo apoio, compreensão e estímulo.*

A Autora

Resumo

Esta pesquisa procurou investigar como o aluno utiliza o livro didático, ao estudar o objeto matemático "Integral". Buscou-se mapear os indícios das estratégias que o aluno lançava mão: para situar o tema proposto, no livro didático indicado, para extrair as idéias principais e estratégias utilizadas pelo autor, resumindo-as num esquema, para resolver exercícios propostos pelo livro. Buscou, ainda, identificar como o estudante apresentava sua produção escrita, se apresentava idéias encadeadas, por meio de mudanças de registros de representação semiótica, sob a ótica de Duval, ao se referir aos aspectos cognitivos da aprendizagem. Para tal, foi elaborado um roteiro de tarefas a serem desenvolvidas por alunos do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição particular da Grande São Paulo. Participaram do experimento, um grupo de alunos do 2º semestre, que ainda não estudaram Integral e um grupo de 5º semestre, que já tiveram contato com o conceito. Com isso, pretendia verificar se as estratégias utilizadas por um grupo ou por outro grupo seriam diferentes. Os dados obtidos revelaram que não houve diferenças perceptíveis entre as produções de um ou de outro grupo. Os dados revelaram também que os estudantes desempenharam as tarefas com entusiasmo e seriedade. A fundamentação teórica e o livro escolhido mostraram-se ferramentas eficazes na análise dos protocolos. Ficou evidenciado que os alunos na sua totalidade, localizava o tema consultando o índice, confeccionaram um esquema pedido, destacando os tópicos que julgaram essenciais e ao resolver o exercício proposto, buscaram subsídios nos exemplos e exercícios resolvidos no texto, utilizando vários registros de representação. Embora, não sendo escopo de nossa investigação, varias manifestações dos estudantes apontaram para a pertinência da leitura do livro texto como uma atividade preliminar no ensino aprendizagem de um conceito matemático.

Palavras-chave: livro texto; registro de representação semiótica; integral; compreensão de texto; conversão de registros.

Abstract

This paper investigated student's use of the text book when learning the mathematical object "Integral. Its aim was to map the indications of strategies used by students in order to: 1. situate the proposed theme in the student book; 2.extract the main ideas and the strategies used by the author, summarizing them in a scheme; 3. solve the exercises proposed in the book. It was also the focus of this paper to identify how students delivered their written production - whether they presented linked ideas, through changes in registers of semiotic representation, according to Duval's viewpoint, when referring to learning cognitive aspects. Therefore, a task plan has been created, to be performed by the students of the Undergraduate Mathematics Course of a private institution in Great São Paulo. The participating groups were a second semester group, who have not learned Integral yet, and a fifth semester group, who have already had contact with the concept. A comparative study of the different strategies adopted by each group has been developed. The achieved results revealed that there has been no meaningful difference between the productions of the two groups. The data also revealed that the students performed the tasks with enthusiasm and commitment. The theoretical basis and the book chosen turned out to be efficient tools in the analysis of the protocols. Results showed that the students as a whole could find the theme in the index, performed the required schema, highlighting the topics they judged essential and, while solving the proposed exercises, looked for subsided in the examples and exercises solved in the text, making use of several registers of representation. Although not included in the scope of this investigation, several of the students' manifestations suggested the pertinence of reading the text book as a preliminary activity in the mathematical concept of learning.

Key-words: Textbook, registers of semiotic representation, integral, text comprehension, registers conversion

Sumário

Apresentação

Segundo Duval (1999), educação matemática tem sido muito sensível às necessidades de mudança nos últimos cinqüenta anos. Pesquisas em psicologia de desenvolvimento, novas tecnologias, novas exigências em avaliação têm dado suporte a essas mudanças. Mas seus impactos tornam-se mais efetivos no currículo matemático e nas formas de ensino do que nas explicações dos profundos processos de compreensão e aprendizagem da Matemática.

Dificuldades de tal pesquisa originam-se da necessidade de definir um quadro teórico, no qual o confinamento epistemológico específico à atividade matemática e às funções cognitivas do pensamento que o envolve não estão separados. Isso requer ir além do estudo local do conceito adquirido em cada nível do currículo e além da mera referência às várias teorias gerais de aprendizagem e mesmo além da descrição global da atividade do aluno em sala. (Duval, 1999)

Encontra-se em muitos manuais, a afirmação de que o Cálculo foi inventado por dois homens, Newton e Leibniz. Courant (2000) considera isso simplista. Segundo ele, o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz, porém, ambos desempenharam papel decisivo em sua construção. Havia na Europa do século XVII, em sua maior parte fora das escolas, um grupo de cientistas ativos que se empenhava em dar continuidade aos trabalhos já realizados por Galileu e Kepler. Por meio de correspondências e de viagens, esses homens mantinham entre si estreito contato.

Dois problemas chamavam atenção deles. Em primeiro lugar, o problema das tangentes: determinar as retas tangentes a uma curva, que era problema fundamental do Cálculo Diferencial. Em segundo lugar, o problema da quadratura: determinar a área da região delimitada por uma curva, o problema fundamental do Cálculo Integral. O grande mérito de Newton e Leibniz foi o fato de terem identificado a estreita relação entre estes dois problemas. Nas mãos deles, cada um utilizando métodos próprios, conseguiram tratar de maneira unificada esses dois grandes problemas. (Courant, 2000)

Ao ingressarem na Universidade, tanto pública como particular, os alunos da área de ciências exatas se defrontam com a disciplina Cálculo Diferencial e Integral (CDI) como curso básico, pré-requisito para vários outros. Segundo Candido, Barufi e Monteiro (2004), espera-se que essa disciplina, por meio de vários tipos de problemas atuais e reais, propicie aos alunos uma visão mais ampla de como o conhecimento matemático pode ser articulado.

Antes de chegar à Universidade, os alunos trabalharam alguns conceitos matemáticos, muitas vezes de maneira isolada, e na melhor das hipóteses, um enfoque significativo, e apesar de os professores de Cálculo esperarem haver domínio de algumas técnicas operatórias e da linguagem lógico-formal, isso não está satisfatoriamente estabelecido. A matemática com a qual os estudantes trabalharam, muitas vezes permaneceu no âmbito da intuição, com algum aspecto voltado, talvez, para o prazer da descoberta. Para a maioria dos alunos, a matemática da Escola Média pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa se defrontar parece constituir uma grande dificuldade. (Barufi, 2002)

E ainda segundo Barufi (2002), frente a essas dificuldades, muitas vezes, os professores desenvolvem seus programas limitando-se ao “adestramento” dos estudantes, pensando que a memorização de algoritmos seja suficiente, e que, no futuro, eles descobrirão sozinhos os significados dos conceitos e da utilização dessas técnicas, ao enfrentarem problemas cuja resolução os exige.

Nesse caso, alguns deles são apenas receptáculos de uma série de resultados nos quais acreditam porque alguém, detentor do conhecimento, afirmou. O máximo que poderão fazer é repetir definições que guardaram na memória episódica, procurando reproduzi-los da mesma maneira que lhes foram transmitidos, ou resolver problemas semelhantes aos que viram resolvidos, aplicando técnicas que, de tanto repetir, conseguiram razoavelmente memorizar.

Entretanto, para resolver problemas, antes de tudo, é necessário ter idéias e, para isso, é preciso conhecer os significados das ferramentas disponíveis. Somente depois é possível tomar decisões sobre quais ferramentas utilizar. E no caso do Cálculo, além da coleção de idéias, extremamente férteis, existe um conjunto de termos específicos e símbolos correspondentes, sendo que o todo se constitui num mundo novo para os estudantes.

Malta (2003) em seu artigo “Linguagem, Leitura e Matemática”, afirma que durante alguns anos, os professores estiveram imobilizados pela convicção de que o grande número de reprovações na disciplina CDI era exclusivamente causado pela deterioração do ensino pré-universitário, especificamente do ensino médio, e portanto, sua solução só poderia advir de uma ação neste segmento de ensino.

Ainda segundo a autora, esse quadro mudou e hoje, prepondera a convicção de que não só a ineficiência do ensino fundamental e médio se insere num amplo contexto social, político e cultural no qual a universidade tendo um papel extremamente importante, mas também, de que as questões referentes às dificuldades de aprendizado não se encerram no ensino pré-universitário. E segundo Malta, nos últimos 15 anos muito se tem refletido, discutido e pesquisado sobre a questão das dificuldades do aprendizado em Matemática nas disciplinas básicas dos cursos universitários na área das ciências exatas.

As dificuldades de aprendizagem dos conceitos fundamentais, como Derivada e Integral, têm impulsionado os educadores matemáticos a pesquisarem em várias direções, tais como: o estudo de diferentes teorias cognitivas, novas metodologias, uso das novas tecnologias, análise do material didático.

A Integral traz no seu ensino problemas específicos como conceito, técnicas, aplicações etc..., e foram encontradas várias pesquisas sobre o tema. São elas:

1- *The Improper Integral. An Exploratory Study with First-Year University Students*, cujos autores são Alejandro S. Gonzalez-Martín e Matías Camacho.

Nesta pesquisa os autores, Matias Camacho e Ramón Depool Rivero (Departamento de Analise Matemática – Universidade de La Laguna, Ilhas Canárias, Espanha) analisaram as respostas de um grupo de universitários de 1º ano para um questionário, com o objetivo de determinar as dificuldades que eles tinham quando executavam tarefas não rotineiras, relativas a integrais impróprias e identificar os obstáculos e dificuldades relativas a esse conteúdo, como também em detectar certos erros e dificuldades, que são levantadas quando fazem conversões entre os registros gráfico e algébrico, ou como eles manuseiam elementos num mesmo registro.

A fim de descobrir o nível da compreensão dos alunos, segundo o ponto de vista de Duval, os pesquisadores delinearam um questionário com nove questões, compostas por tarefas de cálculo e determinação de convergência das integrais impróprias, como também questões intuitivas e alguns resultados paradoxais (por exemplo, uma figura como um comprimento infinito com um volume finito). Os estudantes também foram solicitados a interpretar muitos dos resultados obtidos.

Os pesquisadores tentaram responder as seguintes perguntas: Como os alunos reagem quando enfrentam exercícios do tipo não algoritmo, questões de raciocínio e questões não rotineiras sobre o tópico em que estão estudando? Em qual sistema de representação os alunos sentem-se mais confortáveis? Eles percebem os resultados contraditórios a que chegaram? São eles capazes de articular diferentes sistemas de representação nas questões relativas a integral imprópria? Eles estabelecem alguma relação entre o conhecimento novo como o anterior, particularmente com a integral definida, series e seqüências?

O questionário, utilizando Computer Algebra System (CAS), foi respondido por 31 alunos (13 rapazes e 18 moças), no final do segundo semestre do curso de 2000, durante uma aula de uma hora. As respostas dos alunos foram categorizadas e seis alunos, 19,35% do total, foram entrevistados.

Depois de ler as respostas dos trinta e um questionários, os pesquisadores concluíram que os alunos preferem trabalhar no registro algébrico e questões não rotineiras como também questões, em que são solicitados a justificar suas respostas, deixam-nos confusos.

Foi observado que os alunos não têm idéia clara do conceito de Integral, concebem-na sempre como área, mas a principal dificuldade deles relaciona-se à falta de conhecimento dos conceitos prévios, tais como convergência, seqüência e integral definida.

Foi notado também que os alunos não estão habituados a combinar vários registros para interpretar os resultados, ou falham ao usar o registro gráfico quando são solicitados para isso e preferem utilizar o registro algébrico (ou se limitam a este registro). Poucos se mostram capazes de coordenar dois registros.

Com relação a transferência dos conhecimentos prévios, observou-se que poucos conseguem fazer isso e em muitos casos, este conhecimento prévio revelou-se incompleto, impossibilitando a transferência.

2- *Using Derive to Understand The Concept of Definite Integral*, cujos autores são Matías Camacho e Ramón Depool Rivero. Neste trabalho, eles apresentam os resultados de um estudo piloto realizado numa universidade em Venezuela, com o objetivo de determinar o conceito de área e integral definida retido pelos alunos depois de eles terem sido instruídos usando DERIVE CAS (Computer Algebra System).

É uma pesquisa que tem por objetivo analisar as potencialidades e dificuldades encontradas, ao introduzir o software DERIVE no ensino e aprendizagem de Cálculo durante o primeiro ano na Universidade Politécnica, Venezuela.

Cientes de que qualquer método de ensino e aprendizagem produz resultados de curto prazo, médio prazo e longo prazo, os pesquisadores, Matias Camacho Machín e Ramón Deepol Rivero tentaram determinar os efeitos de curto prazo do programa de instrução combinando o método usual de ensino com Práticas Laboratoriais delineadas com base em vários sistemas de representação.

Durante as Práticas Laboratoriais, o conceito de integral definida é introduzido começando com o clássico problema da quadratura e mostrando como a integral definida surge quando se tenta aproximar a área de uma certa região do plano limitada por uma curva pelo eixo X.

Os pesquisadores visavam a que os alunos assimilassem não somente o aspecto algébrico como também as perspectivas gráfica e numérica do conceito de Integral Definida e vissem cálculos da Integral Definida de uma função (contínua ou não) não exclusivamente como a diferença de uma primitiva estimada ao fim de uma seqüência de integração.

O objetivo dessa pesquisa era analisar a influência do uso do DERIVE Computer Algebra System, sobre a idéia da área limitada por uma curva com o eixo X, quando este conceito é introduzido por meio de um programa de ensino diferente dos métodos tradicionais.

O projeto foi delineado usando as idéias teóricas propostas por Duval, referentes aos sistemas semióticos de representação. Os pesquisadores se preocuparam principalmente com tarefas que tratavam do conhecimento, tratamento e conversão das representações algébricas, gráficas e numéricas.

O experimento foi realizado com um grupo de onze estudantes matriculados num curso regular de Cálculo I. O programa oficial foi ensinado, com a diferença de que os alunos realizaram praticas laboratoriais em computadores, segundo um modelo instrucional delineado para trabalhar com DERIVE. As unidades temáticas foram: Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Quando o curso terminou, um questionário de 8 questões foi apresentado para checar a aprendizagem.

Para classificar as respostas, uma categorização foi feita para cada item das respostas e para cada estudante. Isso permitiu aos pesquisadores a sistematizar o caminho seguido por cada aluno quando resolvia cada problema. Finalmente, dois dos alunos foram escolhidos para entrevista baseando-se no desempenho deles e ao tipo de resposta dado. A entrevista era baseada no questionário e foi levado a cabo um mês depois do mesmo ser completado.

Pelos resultados obtidos do questionário e das entrevistas, os pesquisadores concluíram que os alunos conseguem reconhecer as representações semióticas, gráfica e algébrica, conseguem realizar tratamentos nessas representações, entretanto, eles têm problemas em conversão de representações. Os alunos preferem trabalhar em representação algébrica em vez de gráfica. Os pesquisadores também acreditam que o trabalho baseado em praticas laboratoriais teve alguma influência na maneira em que os alunos interpretaram as tarefas propostas.

3- *Definitions and Images for the Definite Integral Concept*. Os autores são Shaker Rasslan e David Tall. O trabalho consistia em um questionário delineado para explorar os esquemas cognitivos para o conceito da integral definida evocado por 41 alunos do high school (Ensino Médio).

Os pesquisadores Shaker Rasslan (Center for Mathematics Education – Oranim School of Education, Israel) e David Tall (Mathematics Education Research Center – University of Warwick, UK) realizaram a pesquisa com 41 pré-universitários, após terem freqüentado um programa de treinamento. O conceito da Integral Definida, na Inglaterra, é ensinado nos dois últimos anos da escola para alunos com idade entre 16 e 18 anos.

A pesquisa procurava responder as seguintes questões: Quais as definições da Integral Definida são dadas pelos alunos do High School? Quais as imagens da Integral Definida que os alunos usam em vários problemas? Quais são as concepções errôneas relativas a Integral Definida que os alunos exibem?

Para responder essas questões, um questionário foi delineado com 6 questões sobre a integral definida. A amostra compreendia 41 alunos em quatro classes do último ano e todos eles tiveram acesso a calculadoras gráficas e encontraram todos os conceitos no teste. O questionário foi respondido pelos alunos nas suas salas de aula, não precisavam se identificar e levaram cerca de 40 a 50 minutos para completar o questionário.

De acordo com os pesquisadores, uma das metas desse estudo foi expor algumas imagens comuns da Integral Definida de uma função que os alunos do ensino médio têm. Isso é muito importante para detectar o ponto de partida, quando se quer ensinar esse conceito.

Concluíram os pesquisadores que a maioria dos alunos não escreveram significativamente sobre a definição da Integral Definida e tiveram dificuldades em interpretar problemas sobre cálculo de área e a integral em contextos maiores.

4- *Conceito de Integral: Uma Proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem*. A autoria é de José Manuel Ribeiro de Melo. Seu trabalho tinha como objetivo, a elaboração e a aplicação de uma seqüência de ensino, implantada num ambiente computacional.

Segundo Melo, o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral têm sido focado numa prática metodológica tradicional baseada em definições, teoremas, propriedades, exemplos e exercícios, cujo resultado tem apresentado um índice muito alto de reprovações. Para o autor, uma das possibilidades de reverter este quadro é a utilização de novas tecnologias computacionais como ferramentas didáticas no curso de Cálculo.

Para obter os dados para sua pesquisa, Melo elaborou e aplicou uma seqüência didática aplicada a trinta alunos do segundo semestre do curso de Matemática. Foram quatro sessões de três horas de duração, durante o horário normal de aulas. A realização dos trabalhos foi observada pelo pesquisador, professor de Cálculo e dois monitores.

Para atender este objetivo, o autor trabalhou com duplas de estudantes, visando a uma produção de diálogos, troca de hipóteses e conclusões de forma mais espontânea. As várias etapas foram elaboradas de modo que permitissem aos alunos construírem conceitos, para que tornar significativo o conceito de Integral.

Os resultados da aplicação da seqüência evidenciaram que num ambiente computacional, o ensino e aprendizagem passam a ser mais significativos, contextualizados e motivantes, para os alunos e para os professores.

5- ***A Noção de Integral no Contexto das Concepções Operacional e Estrutural*.** A autoria de Aguinaldo Herculino de Oliveira, que tinha como meta analisar a abordagem da noção de Integral em dois livros didáticos nos aspectos operacional e estrutural.

Esta pesquisa analisa a abordagem da noção de Integral em dois livros de Cálculo. Fundamenta-se na teoria de Sfard, segundo a qual as noções matemáticas são tratadas inicialmente como processos em que são evidenciadas suas características (concepção operacional) e depois como objetos (concepção estrutural). A passagem da primeira se dá através de três estágios hierarquizados: interiorização, condensação e reificação.

Os livro escolhidos foram Calculus de M. Spivak e Cálculo de James Stewart. O primeiro livro apresenta a Integral axiomaticamente, isto é, a partir de uma construção refinada de definições e teoremas, Spivak primeiramente define a Integral e depois trabalha suas propriedades. O segundo apresenta Integral partindo de uma longa introdução sobre o cálculo de áreas, depois a definição e em seguida, obtém suas propriedades. Seu ponto forte é a enorme quantidade de exercícios que envolvem manipulações algorítmicas e aplicações.

A pesquisa evidenciou que o tratamento formalizado por Spivak vai em direção oposta da teoria de Sfard, que postula que primeiro deve ocorrer a concepção operacional e depois, a estrutural. Vários exercícios com características estruturais propiciam a passagem da primeira para segunda concepção. Em Stewart, o tratamento respeita o postulado, porém há poucos exercícios com características estruturais e nos capítulos que tratam da noção de Integral, apresenta projetos que propiciam a reificação da noção de Integral.

6- *A Noção de Integral em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica.* A autoria é de Carlos Antonio da Silva. O autor analisa como o tema Integral é tratado em dois livros didáticos à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica, propondo-se a analisar o tema Integral à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Trata-se de uma analise qualitativa e os livros escolhidos foram de Hamilton Guidorizzi, Um Curso de Cálculo, V.1 , e Cálculo de James Stewart, por serem usados atualmente nas universidades e possuírem abordagens diferenciadas e foram destinados a públicos diferentes.

Silva (2004) analisou como os diversos registros são empregados pelos autores e concluiu que os registros são apresentados, os tratamentos e conversões são explorados, de modo que o aluno pode se tornar um agente ativo na sua aprendizagem e o professor pode assumir então o papel de facilitador dessa aprendizagem.

Segundo Silva (2004), no processo de organização e comunicação de saberes pela escola, é necessário considerar a natureza conflituosa entre a construção do conhecimento e sua transmissão, sendo que a última apresenta uma distância considerável entre a concepção teórica e organizacional dos conteúdos a serem ensinados e sua viabilização pelo esquema escolar e apresentação em sala de aula. Ou melhor, entre o que foi pensado para a aprendizagem como proposta curricular, passando pelas diretrizes pedagógicas, pelos livros didáticos, pelos programas, pela apresentação em sala de aula e pelo que é cobrado nas avaliações e vai sofrendo adequações e determinações que refletem, em cada um desses níveis, tensões próprias e contraditórias.

Ainda segundo o autor, na construção do conhecimento matemático, o aluno se vê como um pesquisador na luta pelas novas descobertas e nessa perspectiva, os livros tornam-se objetos importantes nesta maneira de se ensinar.

Os resultados da análise feita mostram que os livros quando bem explorados, podem levar os alunos a um maior entendimento, por meio da utilização das conversões, com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora.

Segundo Romanatto (2004), a situação de sala de aula brasileira permite dizer que nem a palavra do professor e nem os modernos meios tecnológicos de comunicação podem substituir o livro didático nas atividades escolares, pois este acumula várias funções, como, por exemplo, a de ser instrumento de intercâmbio e inter-relação social, permitindo a comunicação no tempo e no espaço, assim como constitui várias fontes de informações. Portanto, considerando-se que ler é interpretar os símbolos gráficos e compreender o significado, os objetivos da habilidade de ler deverão principalmente levar o aluno utilizar a leitura como fonte de informação e aperfeiçoamento cultural.

No seu artigo “O Ensino do Cálculo e da Análise”, Ávila faz um relato do ensino do Cálculo no Brasil. Até aproximadamente 1960, o ensino dessa disciplina seguia os moldes dos livros europeus, como o de autoria do francês Édouard Goursat ou do italiano Francesco Severi. Os cursos eram estruturados incorporando o que hoje costuma ser distribuído como Cálculo propriamente e a Análise Matemática. Aprendia-se o Cálculo juntamente com a Análise. O modelo seguido era “Cours d’Analyse” das escolas francesas, nos quais eram incluídas as disciplinas de Cálculo de uma ou mais variáveis, funções de uma variável complexa, geometria diferencial de curvas e superfícies e um pouco de análise de Fourier e, à parte, ficava a Geometria Analítica como ainda é hoje.

O próprio autor, que cursou a faculdade de 1953 e 1956, teve um curso de três anos de Análise Matemática, conforme descrito acima. Logo no primeiro ano, começou com a teoria dos números reais, noções de topologia na reta, funções contínuas em intervalos fechados, conjuntos compactos, etc... juntamente com derivadas e aplicações, máximos e mínimos, comportamento das funções e não havia menções a trigonometria, logaritmos e exponencial, tópicos que figuravam no ensino médio.

Segundo Ávila (2002, p. 84), a partir de 1960, os livros americanos tomaram o lugar dos livros europeus, surgindo assim o costume de ensinar o Cálculo primeiro, ficando a Análise Matemática para depois, numa disciplina separada. Apesar dessa mudança, ainda resistiu a apresentação rigorosa do Cálculo desde o primeiro ano por influência dos professores europeus, o que pode ser notado em alguns livros de autores brasileiros e a marca mais visível disso é a introdução, logo no início do curso, da definição de limite em termos de ε e δ, e a conseqüente dedução das suas propriedades.

De acordo com o autor, um dos primeiros autores que mudou significativamente o modo de apresentar Cálculo foi Serge Lang, cujo livro apareceu pela primeira vez em meados dos anos sessenta, logo seguido pelo de Bob Seeley. Esses autores reconheciam que não era realista ensinar a teoria rigorosa do limite no inicio de um curso de Cálculo, e seus textos, principalmente o primeiro, influenciaram muitos dos livros que têm sido escritos desde então.

Barufi (1999) realizou sua tese de doutorado buscando compreender as dificuldades existentes no processo ensino-aprendizagem do CDI, a partir dos livros adotados, um instrumento sempre presente no trabalho do professor em sala de aula. Para a autora, bons livros sempre existiram e que a escolha do livro pelo professor pode revelar suas crenças e as metodologias a serem adotadas para a aquisição do conhecimento.

No outro artigo seu “O Provão e o Ensino da Matemática”, Ávila comenta que um fator que pesa muito nas deficiências do aprendizado, principalmente da Matemática, é o uso exagerado de preleções no ensino, tanto no superior como no ensino fundamental e médio. O aluno é conduzido a uma atitude muito passiva, esperando que lhe “ensinem”, quando devia ser induzido a “aprender”. É cada vez mais generalizada a idéia de fazer o aluno ter mais iniciativa no aprendizado, pois este já chega à universidade esperando que o professor lhe “ensine” o que tem que aprender. Nas faculdades particulares, os alunos na maioria trabalham, portanto, dispõem pouco tempo ou quase nenhum tempo para estudo fora da sala de aula. Conseqüentemente, esperam aprender nas preleções do professor durante a aula.

Sabe-se que ninguém aprende Matemática porque assiste às aulas, por mais talentoso que seja o professor em suas exposições, afirma Ávila. É preciso fazer os alunos trabalharem individualmente com muita disciplina e persistência.

Entretanto, Malta (2003) aponta como indício do despreparo dos alunos ao ingressar na universidade, a incapacidade de utilização da linguagem escrita, visível na dificuldade de construir frases completas e consistentes e sem erros de ortografia, demonstrado pelos alunos.

A autora enfoca a importância da linguagem no processo da aprendizagem em matemática e ressalta a necessidade do aprender a ler e a se expressar de forma organizada; ler no sentido mais amplo possível, no sentido de adquirir conhecimentos a partir de fontes de registro, tais como livros, textos, hiper-textos ou meios de registro de conhecimentos que venham a ser criado, sem a interveniência direta de um explicador ao vivo, além de conduzir o aluno a desenvolver suas capacidades de leitura em matemática e de expressão do próprio raciocínio que os leve à compreensão e utilização de resultados matemáticos.

A proposta do nosso trabalho é investigar como o aluno utiliza o livro didático, quando ele estuda um tema como Integral de Riemann para funções reais. Ele entende o que está estudando? Ele apresenta algum interesse pelo livro didático? Ele consegue relacionar os conceitos apresentados com os registros utilizados? Ele manifesta interesse em estudar usando um livro didático?

Tentar obter essas respostas é muito importante, porque segundo Romanatto (2004), a leitura de um livro didático apresenta inúmeras vantagens sobre outros meios de comunicação, sendo a reflexão a principal delas. A leitura torna indispensável o esforço para compreender, o que é altamente disciplinador e educativo. Outra vantagem: o desenvolvimento da criatividade. O leitor, muitas vezes, enriquece o texto: vai além dos fatos narrados: “lê” nas entrelinhas, usa a imaginação.

Na tentativa de obtenção das respostas, vamos solicitar aos alunos a realização de tarefas como: leitura de texto do tópico do tema Integral em um livro didático, que é o “Cálculo”, Volume 1, de James Stewart, colocar as idéias principais do texto em um esquema e por fim, resolver um exercício do livro. Além disso, vamos utilizar entrevistas para enriquecer os resultados.

O nosso trabalho será organizado em cinco capítulos: no primeiro capítulo desenvolvemos a fundamentação teórica de Raymond Duval, os registros de representação semiótica, quanto a compreensão matemática e depois, a compreensão de textos. No capitulo dois, apresentamos um breve relato sobre a evolução do conceito de Integral. No capitulo três, tratamos das escolhas metodológicas, dos procedimentos realizados e a realização do experimento. No capitulo quatro, as análises das tarefas e entrevistas realizadas e no capítulo cinco, as considerações finais.

A pesquisa fundamenta-se na teoria de Duval, cuja idéia da aquisição do conhecimento matemático baseia-se na necessidade de distinguir o objeto matemático de sua representação e para atingir essa meta, diferentes representações semióticas de um objeto matemático precisam ser utilizadas. Logo, o conhecimento matemático é adquirido quando o aluno consegue converter dois registros de representação do mesmo objeto matemático.

Capítulo I

Fundamentação Teórica

A Teoria "Registros de Representação Semiótica" de Raymond Duval dará suporte teórico à nossa pesquisa, pois aborda os aspectos cognitivos relativos à aquisição dos conhecimentos matemáticos e será baseado num texto seu, "*Representation, vision e visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for learning".*

Segundo Duval (1999), essa teoria procura primeiramente determinar o funcionamento cognitivo subjacente à diversidade dos processos matemáticos, a fim de entender as dificuldades de muitos estudantes com a aprendizagem matemática e a natureza destas, visto que o objetivo do ensino da disciplina é contribuir para o desenvolvimento das capacidades dos alunos em raciocinar, analisar e visualizar, para enfrentar um ambiente tecnológico e computacional de crescente complexidade.

Diferentemente de outros campos de conhecimento (como botânica, geologia, astronomia, física...), em que as representações semióticas são imagens ou descrições sobre algum fenômeno do mundo real, a única forma de obter o acesso aos objetos matemáticos é a produção de alguma representação semiótica, e ainda segundo o autor, não se pode confundir o objeto matemático com sua representação.

Conforme o autor, no processo ensino-aprendizagem, os recursos utilizados são a língua falada e a língua escrita. Aprendemos a falar imitando o que ouvimos e aprendemos a escrever quando dominamos a fala, o que requer atenção e conhecimento, e ao escrever, surge um registro.

A história mostra que o progresso da Matemática sempre esteve ligado ao desenvolvimento de diversos sistemas semióticos baseados em dois diferentes sistemas sensórios: linguagem e imagem. Exemplificando Duval: notações simbólicas originaram-se da escrita, o que levou a escrita algébrica e, desde o século XIX, a criação das linguagens formais. Existia a construção das figuras planas com instrumentos, aí em perspectiva e depois em “gráficos”, a fim de *traduzir* curvas em equações.

Cada novo sistema semiótico fornecia meio específico de representação e processos para o pensamento matemático. Por essa razão, foram chamados de registros de representação. São quatro tipos muito diferentes de registros, e isso vincula uma complexa interação cognitiva apoiando qualquer atividade matemática.(Duval, 2003)

	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
Registros Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	*1. Língua Natural.* *2. Associações verbais* *3. Formas de raciocinar:* - argumentação a partir de observações, de crenças... - dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	*Figuras geométricas planas ou perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3).* - apreensão operatória e não somente perceptiva. - construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	*4. Sistemas de escritas:* - numéricas (binárias, decimal, fracionária...); - algébricas; - simbólicas (línguas formais). - Cálculo	*Gráficos cartesianos.* - Mudanças de sistemas de coordenadas. - Interpolação, extrapolação.

Fig. I.1 – Classificação dos diferentes registros de representação

Fonte: Duval, 2003 p. 14

Para Duval, a aprendizagem matemática é um campo privilegiado para estudar os registros de representação semiótica porque envolve um paradoxo cognitivo, os objetos matemáticos, que não são objetos reais, necessitam de representações para se tornarem acessíveis e perceptíveis, mas elas não podem ser confundidas com os objetos matemáticos e essa distinção é muito importante para a compreensão matemática, para que o conhecimento adquirido não se torne inutilizado fora do contexto.

As representações são muito importantes para comunicação, como também para atividade cognitiva do pensamento. Existem representações mentais que dependem da interiorização das representações semióticas e essas últimas são produções de conhecimento que permitem representações diferentes do mesmo objeto e elas não são subordinadas às representações mentais.

Para que um sistema semiótico funcione como registro de representação, segundo o autor, três atividades devem estar envolvidas: ser uma representação identificável, permitir o tratamento (transformação interna ao registro), e por último, permitir a conversão, que é a transformação de um registro em um outro.

1.1 – Operações Cognitivas: Tratamento e Conversão

Segundo Duval, os processos matemáticos são compostos de dois tipos de transformações de representações. Existem transformações que são feitas no mesmo registro de representação, como cálculo aritmético ou algébrico. Chama-se de “tratamento” este tipo de transformação.

Existem, também, transformações que impõem uma mudança de registros, isto é, a representação de um objeto é “traduzida” em uma representação diferente do mesmo objeto em outro registro, por exemplo, quando se parte de uma sentença em língua natural para uma expressão literal ou a transformação de equações em gráficos cartesianos. Chama-se de conversão este tipo de transformação.

Duval (1999) afirma que não se dá muita atenção à diferença entre esses dois tipos de operações cognitivas que estão subjacentes aos processos matemáticos, pois se muitos estudantes conseguem realizar alguns tratamentos, poucos conseguem realmente converter representações.

A atividade matemática requer habilidade de mudança de registro, ou por causa de outra apresentação de dados, que se encaixam melhor do que em um modelo já conhecido, ou porque dois registros podem agir juntos, como figuras e língua natural ou notações simbólicas em geometria.

Do ponto de vista didático, Duval (1999) afirma que somente alunos que podem realizar mudança de registros não confundem o objeto matemático com sua representação e eles podem transferir seu conhecimento para outros contextos diferentes daqueles do ensino.

Dois fatos mostram a grande complexidade da operação de conversão:

- Qualquer conversão pode ser congruente ou não-congruente. Quando a conversão é congruente, a representação de partida é transparente para a representação do registro de chegada, isto é, a conversão pode ser vista como uma fácil tradução unidade a unidade.
- Análises bastante exatas do caráter congruente ou não-congruente da conversão de uma representação em outra podem ser dadas sistematicamente e explicam muitos erros, fracassos, enganos ou bloqueios mentais.
- A congruência ou a não congruência de qualquer conversão depende de sua direção. A conversão pode ser congruente em uma direção e não-congruente na direção oposta, levando a contrastes surpreendentes no desempenho dos alunos.

Para o autor, é surpreendente ver como a maioria dos professores e mesmos psicólogos dão muito pouca atenção às diferenças entre tratamento e conversão. Essas duas operações cognitivas são agrupadas na unidade dos processos matemáticos para resolver problemas, e quando uma mudança de registro deve ser introduzida no ensino, geralmente se escolhe a direção em que ela é congruente, evitando-se as situações que levam a dificuldades.

Para Duval, a coordenação entre os registros deve ser colocada em jogo, ela não é conseqüência da compreensão matemática; ao contrario, ela é uma condição essencial para isso.

1.2 – Visão e Visualização

Segundo Duval (1999), do ponto de vista psicológico, visão se refere à percepção visual e, por extensão, a uma imagem visual. Como percepção, visão envolve duas funções cognitivas essenciais:

- A primeira consiste em dar acesso direto a qualquer objeto físico. Essa é a razão pela qual percepção visual é sempre tomada como um modelo para noções epistemológicas da intuição. Nada é mais convincente do que o que é visto. Nesse sentido, visão é o oposto da representação, mesmo das imagens mentais, porque representação é algo que fica no lugar de alguma coisa. Essa função é epistemológica.
- A segunda função é bem diferente. Visão consiste em apreender simultaneamente vários objetos ou a um campo todo. Em outras palavras, visão parece dar imediatamente uma completa apreensão de qualquer objeto ou situação. Nesse sentido, visão é o oposto do discurso, da dedução... que requer uma seqüência de atos, focalizando uma cadeia de sentenças. Essa função é sinóptica.

Desse modo, percepção visual desempenha em uma maneira muito imperfeita a função sinóptica. Primeiramente, porque nós estamos num mundo tridimensional: somente um lado das coisas pode ser visto, e apreensão completa requer movimento, tanto de quem está olhando como daquilo que está sendo visto.

Em qualquer caso, conforme Duval, esse movimento é a transformação do conteúdo percebido: há somente uma justaposição das vistas sucessivas que pode ser de face cheia, de perfil, de cima, de baixo. Em segundo lugar, porque percepção visual sempre focaliza numa parte particular do campo e pode saltar de uma parte a outra. Não existe percepção visual sem um tal exploração.

Existe aí o ponto de ruptura entre percepção visual e visualização. Uma representação semiótica não mostra as coisas como elas são em ambientes 3D ou como elas podem ser fisicamente projetadas num pequeno suporte material 2D. Isso é problema da percepção visual.

Uma representação semiótica mostra relações, ou melhor, organização das relações entre unidades representadas. Estas unidades representacionais podem ser formas 1D ou 2D (figuras geométricas), coordenadas (gráficos cartesianos), ou palavras (rede semântica)... E estas unidades devem ser bi-dimensionalmente conectadas porque qualquer organização requer no mínimo duas dimensões para se tornar obvia.

Deste modo, compreensão envolve apreender a estrutura global, não há compreensão sem visualização. E é por esta razão que visualização não pode ser reduzida a visão, pois visualização faz visível tudo aquilo que não acessível pela visão. Aí está então a lacuna entre percepção visual e visualização.

Percepção visual precisa de exploração por meio de movimentos físicos, porque ela nunca dá uma apreensão completa do objeto. Ao contrário, visualização pode fornecer de imediato uma apreensão completa de qualquer organização das relações, mas isso requer um longo treino, entretanto, o que a visualização apreende pode ser o começo de uma série de transformações.

A forma de olhar não é a mesma em visão e visualização. Dois fenômenos confundem este tema. Primeiramente, quando elas são graficamente produzidas, as representações semióticas são objetos da apreensão visual perceptiva. Nesse sentido, visualização é sempre mostrada dentro da percepção visual ou dentro da sua extensão mental, de acordo com Duval.

Além disso, algumas representações semióticas, como desenhos, visam ser representações icônicas: existe uma semelhança relativa entre o conteúdo e o objeto representado, quando alguém o reconhece (uma árvore, um carro, uma casa...) de imediato, sem nenhuma outra informação. Na matemática, visualização não trabalha com tais representações icônicas: olhá-las não é suficiente ver, isto é, perceber e compreender o que está realmente representado.

A diferença entre percepção visual e visualização gera duas conseqüências para a aprendizagem matemática.

Visualização se refere a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica, que não é mental nem física. O uso da visualização requer um treino especifico para cada registro. Figuras geométricas ou gráficos cartesianos não são diretamente disponíveis como são as representações icônicas.

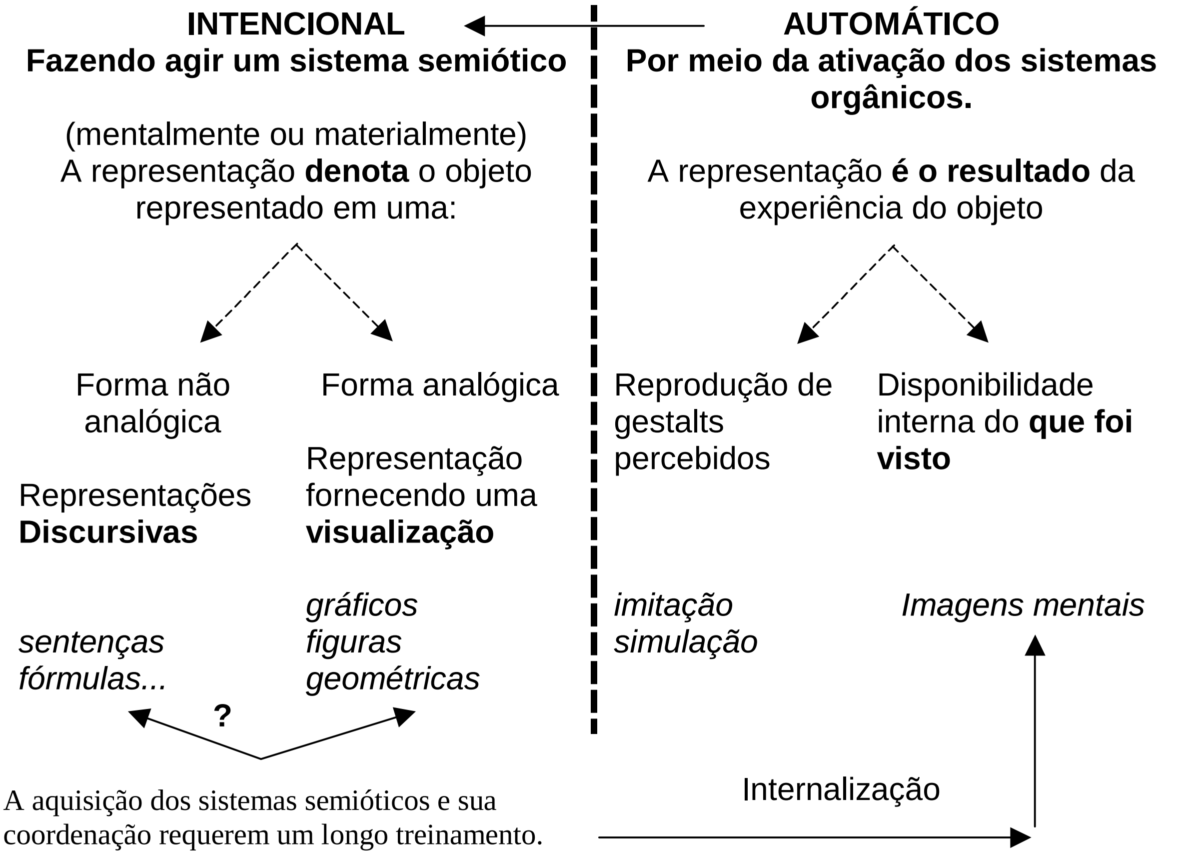
Assim, suas aprendizagens não podem ser reduzidas ao treino para construí-las, e é devido a simples razão que construção requer atenção para focalizar sucessivamente em algumas unidades e propriedades, enquanto visualização consiste em apanhar diretamente a configuração inteira das relações e discriminando o que é relevante nela. Freqüentemente, os estudantes vão não mais longe que uma apreensão local e não vêem a organização global relevante, mas uma representação icônica.

Segundo Duval, acredita-se que aprender como construir gráficos ou figuras geométricas é suficiente para aprender visualização em matemática. Além disso, neste tipo de tarefas os estudantes conseguem resultados satisfatórios. Mas qualquer tarefa de construção requer somente uma sucessão de apreensões locais: precisa-se de focalizar em unidades não na configuração final. Construir um gráfico requer somente computar algumas coordenadas e desenhar uma curva: alguns vão sempre da tabela de dados, ou equações para os eixos graduados.

Visualização requer uma mudança oposta: deve-se ir do gráfico todo para alguns valores visuais que apontam os traços característicos do fenômeno representado ou aquilo que corresponde a um tipo de equação e aponta para alguns valores característicos da equação. Portanto, visualização causa a antecipação do tipo de equação a ser procurada.

Logo, para Duval (1999), aprender matemática implica a coordenação de um registro fornecendo visualização e outro registro desempenhando uma das quatro funções discursivas, e essa conexão entre registros compõe a arquitetura cognitiva em que os alunos podem reconhecer o mesmo objeto através de diferentes representações e podem fazer conexões objetivas entre matemática empírica e dedutiva.

A seguir, é reproduzido o esquema utilizado por Duval (1999) para explicar o funcionamento da sua arquitetura cognitiva.



1.3 - Compreensão de Textos

Como nossa pesquisa quer investigar o manuseio do livro didático pelos alunos, além da aprendizagem matemática, recorremos também à teoria de Duval que aborda a compreensão de textos, baseando-se nos textos “La compréhension de Textes” e “La interaction des Niveaux de Representation Dans La Compréhension des Textes”.

Para Duval (1991), a compreensão de texto é um fenômeno submetido a importantes variações. Ela pode, sobre um mesmo tema e para um mesmo leitor, apresentar diferenças consideráveis de custo ou de sucesso. Alguns dizem que existem textos fáceis de ler, outro que são ao contrário e outros que não conseguem ler, apesar do interesse que podem ter sobre o tema tratado.

Admite-se comumente que compreender um texto é compreender o que o texto enuncia em relação às situações, os fenômenos, os acontecimentos ou os problemas que ele trata. Segundo Duval (1991), uma tal compreensão só se torna real para o leitor se ela corresponder a uma compreensão dessas situações ou acontecimentos.

Conforme o autor, quando se analisam os modelos de compreensão elaborados até o presente, pode-se destacar que todos são essencialmente centrados sobre o leitor e não levam em conta as características próprias do texto que podem modificar a situação de leitura e a natureza da tarefa de compreensão, visto que os tratamentos que intervêm na compreensão de um texto não são unicamente ligados ao grau de complexidade da forma lingüística do texto, eles dependem também do conteúdo cognitivo que o texto lança mão.

Duval chama de conteúdo cognitivo de um assunto ou de um tema, o conjunto das representações correspondentes que permitem a compreensão, fazendo associações ou inferências, controlando a pertinência ou a legitimidade do mesmo. Esta compreensão pode ser, em muitos casos, a compreensão que um especialista pode ter do assunto tratado.

O autor chama de organização redacional de um texto só se tratando das unidades de nível superior: as frases. A especificidade das frases em relação a todas outras unidades de nível inferior, nas quais elas podem ser decompostas, é que elas são unidades de discurso e não mais somente da língua. Isso quer dizer passando da língua ao discurso, muda-se de universo: com a frase, passa-se na intenção, naquilo que o locutor quer dizer. Isso indica em qual perspectiva as frases vão ser consideradas.

Para o autor, de uma parte, cada frase marca uma relação que o texto estabelece ou rejeita entre dois objetos do conteúdo cognitivo. De outra parte, entre as diferentes frases, não existe somente elos externos marcados pelos conectores, mais existem relações internas de sinônimo, antônimo ou de superordenação referentes às expressões que mencionam ou que descrevem os objetos do conteúdo cognitivo.

A organização redacional de um texto não pode então ser determinada a partir das frases tomadas isoladamente, pois cada uma está então considerada como uma seqüência de unidades elementares cuja combinação obedece somente às regras sintáxicas e às exigências semânticas.

Então, para Duval (1991), compreender o que um texto descreve ou explica, um leitor deve previamente dispor de um conjunto de dados e de procedimentos. Isto recobre, para começar, aquilo que permite a compreensão da linguagem falada ambiente e o acesso ao código escrito: é a parte invariante da base do conhecimento, aquela que permite entender por meio da seqüência de signos escritos, a expressão oral correspondente.

Existem, contudo, também os conhecimentos conceituais: é a parte que, para um mesmo leitor, pode variar consideravelmente de um texto ao outro, conforme os assuntos tratados. O processo de compreensão quando da leitura é o mesmo quando a distância entre a base de conhecimentos do leitor e o conteúdo cognitivo varia.

Esta questão permite encontrar a questão relativa a difícil diferenciação entre compreensão quando da leitura e compreensão geral. Duval (1991) cita dois casos.

O primeiro caso é aquele cuja distância é reduzida, isto é, o leitor já tem uma compreensão do conteúdo cognitivo: os conhecimentos apresentados ou utilizados no texto fazem parte de sua base de conhecimentos. Nesse caso, a leitura se faz a partir das representações do nível cognitivo já adquirido, o que permite fazer economia de certos tratamentos exigidos pelo nível da organização redacional ou isso os facilita.

Para o autor, o leitor está então livre da imposição de seguir com atenção todo desenrolar do texto para compreender aquilo que está escrito ou explicado. Esses conhecimentos já adquiridos intervirão quando da leitura como esquemas, permitindo integrar as determinações semânticas, sintáticas e pragmáticas do texto. Certos desses esquemas foram descritos com roteiros, nos quais dizem respeito às experiências das situações correntes, ou como episódios pelos relatos.

O essencial do processo de compreensão consistiria então nesse conhecimento dos esquemas, cujos textos seriam somente uma descrição particular, mais ou menos completa, na sua aplicação sob forma de solicitação das diferentes categorias em que está a organização. Em outros termos, a compreensão quando da leitura se faz a partir de uma grade leitura.

Conforme Duval, o segundo caso é aquele em que esta distância é importante, ele se produz cada vez que a leitura tem por meta a aquisição de um conhecimento novo, ou a modificação das representações da leitura sobre uma situação, sobre um problema, sobre acontecimentos, etc...

A possibilidade de uma aprendizagem pela leitura (de manuais, de publicações, ou de artigos de documentação) repousa sobre esta existência de uma diferença entre o conteúdo cognitivo do texto e a base de conhecimentos do leitor.

A compreensão do que está explicitamente apresentado no nível da organização redacional se torna a passagem obrigatória para alcançar a compreensão do conteúdo cognitivo. É relativamente a uma tal situação que a distinção entre bons leitores e leitores fracos pode ter um sentido.

Para Duval, os primeiros se revelam melhor que os segundos, na medida em que levam em conta e tratar corretamente uma categoria particular de palavras funcionais, aquelas que se relacionam mais diretamente à organização redacional do texto.

De fato, existem palavras funcionais (artigos, preposições) cujo tratamento só exige, na maioria da suas ocorrências em um texto, considerar palavras vizinhas, sem que seja necessário ter a frase inteira onde elas aparecem.

Sozinhos, os “bons leitores” podem restituir esta segunda categoria de palavras funcionais, mesmo sobre textos para os quais eles não dispõem de uma base de conhecimentos suficiente.

Esses tratamentos de natureza lingüística, todavia, não são sempre suficientes para alcançar uma compreensão do conteúdo cognitivo, em caso de distância grande, tratamentos paralelos são requisitados. Dessa forma, Duval introduz a noção de situação de leitura.

Os dois fatores de variação que o autor vai descrever, se referem de um lado a distância entre a base de conhecimentos do leitor e o conteúdo cognitivo e, por outro lado, a distância entre a organização redacional do texto e do mesmo conteúdo cognitivo. Então, levando em conta esses dois fatores, podemos distinguir quatro situações de tipo de leitura. Em cada uma delas, o nível da identificação das palavras, a natureza da tarefa de leitura e a natureza dos tratamentos requeridos para compreensão mudam.

A seguir, estão as quatro situações citadas pelo autor.

Texto: Correspondência entre a organização redacional e o nível cognitivo.

		Congruência	Não-Congruência
Leitor: o conteúdo cognitivo é, para ele	Familiar	I. Situação trivial sem riscos de erro.	II. Situação trivial com riscos de erro.
	Novo	III. Situação, normativa, para uma aprendizagem, exigindo tratamentos paralelos.	IV. Situação, exigindo, a mais, tratamentos ortogonais.

Fonte: Duval (1991)

Nas duas primeiras situações I e II, a compreensão do texto pode ser reconduzida a uma tarefa de reconhecimento. A não congruência introduz riscos de interpretação errônea, seja por um falso reconhecimento induzido pela organização redacional, seja por antecipações muito rápidas que conduzem a negligenciar a organização redacional do texto. Um percurso único e rápido do texto, sem retorno, pode ser suficiente para a compreensão no momento da leitura nesses dois primeiros casos. Exceto o modo de identificação das palavras e das frases, a compreensão releva os mesmos tratamentos daqueles que são requisitados para a compreensão da linguagem falada em uma conversação.

Esta primeira situação de leitura não passa além de uma prática oral do texto. Vê-se então o porquê a simples revisão pode ser considerada como um critério suficiente de compreensão e porque, para o leitor, todo retorno ao texto parece inútil. Duval (1991) observa, no entanto, que um percurso rápido e único do texto, na situação II de leitura, aumenta os riscos de interpretação errônea no leitor, erros muitos rapidamente explicados por uma falta de atenção.

As outras duas situações de leitura, III e IV, são diferentes. A compreensão é uma produção de conhecimento novo para o leitor, pois existe uma defasagem importante entre a base de conhecimento do leitor e o conteúdo cognitivo. Nessas duas situações, um percurso único e rápido do texto, sem pausa, sem retorno, ou mesmo, sem uma segunda leitura, não é suficiente.

O processo de compreensão não pode se limitar ao tempo de um percurso visual, único e não interrompido. Exige-se uma atividade que prolongue este percurso e que conduza um retorno sobre certas partes do texto, para responder as questões, para efetuar comparações entre certas expressões, para verificar a coerência de certas inferências, para determinar aquilo que passou sob silêncio.

Esta atividade que não é simultânea ao longo de uma leitura corrente, ela exige outros tratamentos, como aqueles requisitados nas duas primeiras situações sendo necessários: reformulações locais, questões, comparações entre passagens diferentes do texto, retorno sobre os dados de sua própria base de conhecimentos. Isso diz respeito a que Duval (1991) chama de “expansão discursiva da leitura”.

Esses tratamentos podem depender de um outro registro: sublinhar, marcas de retorno a outra passagem, transcrição em esquema... Duval fala nesse caso de uma "prática escrita" do texto. Em caso de congruência entre os níveis de representação, os tratamentos que permitem a compreensão do texto, isto é, a apropriação do conteúdo cognitivo novo pelo leitor é favorecida pela organização redacional do texto: eles podem ser facilmente efetuados paralelamente ao desenrolar tematizado pelo texto. Em caso da não-congruência, tratamentos suplementares devem também intervir.

Para Duval (1995), analisar de modo preciso o que recobre a compreensão de um texto é importante, em primeiro lugar, dissociar os processos da compreensão de um texto e a prática da leitura corrente. Por prática da leitura corrente, o autor entende por um percurso visual único e regular do texto, sem retornos e sem paradas longas. Um tal percurso pode ser suficiente, ou considerado como tal para compreender um texto.

Isso porém, não é o caso para todos os leitores e para todos os textos, paradas longas, retornos, vários percursos, até mesmo uma atividade de informação ou de tratamento à margem desses percursos, se revelam muitas vezes necessários. Isso depende das situações de leitura. Enquanto que a compreensão de um texto seja simultânea a sua leitura corrente ou que não seja, os processos de compreensão do texto repousam sempre sobre duas operações fundamentais: a segmentação do texto em unidades e a recontextualização das unidades segmentadas.

A importância da operação de segmentação surgiu com a constituição dos primeiros modelos de compreensão. Eles evidenciaram a necessidade de compor os textos em unidades que não sejam palavras nem frases, mas de unidades textuais de informação. Três tipos desse procedimento podem ser colocados em ação para distinguir as unidades no texto: a segmentação cognitiva, a segmentação proposicional e a segmentação funcional. Para Duval (1995), são sobretudo, as duas primeiras que foram consideradas nos modelos de compreensão de texto.

A segmentação cognitiva se efetua a partir de uma lista de perguntas, a resposta a cada pergunta delimitando uma unidade de informação textual que deve ser encontrada no texto. Esta lista de questões originou-se das representações completas de situação chamada de esquemas/roteiros. Esta segmentação repousa inteiramente sobre representações que são independentes da expressão lingüística e do grau de explicitação redacional. Ela conduz a negligenciar unidades de informação explicitamente dadas no texto, mas que não respondem a nenhuma das questões relativas aos esquemas conceituais de ação ou de situação. A segmentação cognitiva é seletiva e extrínseca à organização redacional do texto.

De acordo com Duval, a segmentação proposicional se efetua ao contrário como uma codificação independentemente de toda referência a um conteúdo cognitivo determinado. As unidades textuais de informação são definidas como proposições, conforme a interpretação lógica do termo. As regras determinam a priori uma correspondência entre a natureza das palavras de uma parte e um outro dos dois termos característicos da proposição, o predicado e seu argumento (ou seus argumentos).

A segmentação proposicional que só leva em conta critérios morfo-sintáxicos é uma operação que não deixa nada escapar de todas as indicações lingüísticas fornecidas pela redação do texto. Pode parecer mais próxima do texto do que a segmentação cognitiva e também parecer congruente à segmentação visual do texto. Determinar as proposições principais (as macro-proposições) e encontrar a organização do texto a partir desta lista torna então uma tarefa difícil.

Não é suficiente discriminar todas as unidades de informação que são explicitamente mobilizadas em um texto, é necessário também apreender as conexões que as unem em um todo. Duval (1995) chama esta operação de recontextualização.

Da mesma forma como existem diferentes formas de segmentação conforme o procedimento utilizado, existem igualmente diferentes procedimentos de recontextualização. Elas se distinguem essencialmente pelo aspecto da totalidade integrante que é privilegiado para recontextualizar as unidades resultantes da segmentação. Duval (1995) vai se deter somente em duas formas de recontextualização: uma puramente cognitiva e a outra, redacional.

A recontextualização cognitiva mobiliza essencialmente os conhecimentos relativos às situações, aos objetos ou às questões que o texto evoca, ou dos quais ele trata, independentemente daquilo que a redação do texto explicita. O conjunto dos conhecimentos mobilizados é independente da organização redacional do texto.

É esta operação de recontextualização cognitiva que constitui a operação central do processo de compreensão. Efetivamente, as perguntas que permitem a segmentação cognitiva do texto são organizadas em uma rede, representando os componentes e a estrutura de uma ação ou de uma situação. A leitura do texto solicita uma ou várias dessas redes.

Cada rede determina relações que os segmentos do texto preenchem, permitindo então a efetuação simultânea das operações de segmentação e recontextualização. Cada vez que uma informação é encontrada em um texto, ela é colocada em relação com outras informações.

As informações que faltam ou implícitas se encontram determinadas e situadas da mesma maneira. A recontextualização cognitiva corresponde a ativação de um esquema interpretativo mobilizável por todo um conjunto de textos e em todas as situações de leitura onde a diferença entre o conteúdo cognitivo do texto e a base de conhecimentos do leitor são pouco importantes.

A recontextualização redacional, segundo Duval (1995), é a operação que explicita todas as relações que existem entre as unidades discriminadas pela segmentação funcional. A recontextualização redacional é interna ao texto, e ela só pode ser efetuada posteriormente a segmentação, isso quer dizer que a recontextualização redacional é independente do conteúdo cognitivo do texto.

A compreensão de um texto repousa sempre sobre duas operações fundamentais: sua segmentação em unidades e a recontextualização das unidades obtidas pela segmentação.

Do ponto de vista de uma aprendizagem da compreensão de texto, para Duval (1995), é essencial distinguir os níveis de organização que constituem um texto como texto e mobilizar explicitamente as formas de segmentação e de recontextualização que lhes são específicas: segmentação funcional e recontextualização redacional, segmentação e recontextualização cognitivas.

Essas formas caracterizam dois processos de compreensão que parecem ser inversos. Um conduz a desprender a organização redacional do texto, enquanto ela dá acesso ao conteúdo cognitivo do texto. Outro parte de uma base de conhecimentos correspondente ao conteúdo cognitivo do texto, e esta base fornece esquema para desprender a organização redacional do texto, ou para antecipar o desenvolvimento, ou para identificar rapidamente a participação dela.

Por analogia com outros modos de conhecimento, Duval (1995) chama esses dois processos respectivamente de "processo indutivo" e "processo dedutivo".

As diferenças entre os dois processo são mostradas no quadro a seguir. (Duval, 1995)

Processo Indutivo de Compreensão	**Processo Dedutivo de Compreensão**
1- Segmentação Funcional: As unidades são determinadas em relação às funções discursivas (referenciais e metalingüística). O texto, na totalidade de suas construções e de suas marcas sintáxicas, é levado em conta. *Esta forma de segmentação, diferente da segmentação visual da forma escrita do texto, é sistemática e independe do conteúdo cognitivo.*	**1- Segmentação Cognitiva:** As unidades são determinadas como elementos de resposta a uma grade de perguntas. Esta resposta pode ser constituída por uma palavra ou uma frase. A resposta pode também não se encontrar no texto. Não é necessário de entrar nos detalhes da construção sintáxica de cada frase. Procedimento visuais de reconhecimento por combinação com as perguntas ou por complementação associativa podem ser suficientes. *Esta forma de segmentação é seletiva e depende do conteúdo cognitivo.*

2- Recontextualização Redacional	**2- Recontextualização Cognitiva**
As diferentes relações que cada unidade discriminada pode ter com as outras discriminadas são explicitadas sobre a base de relações semânticas entre as expressões, e de ligações discursivas marcadas por conectores argumentativos e temporais. *Esta forma de recontextualização é seletiva. Ela depende de um postulado de conectividade textual conforme a qual cada frase tem ao menos um elo interno ou externo com ao menos uma outra frase do texto.*	As unidades discriminadas são integradas numa organização de conhecimentos, que são relativos ao mundo descrito ou evocado pelo texto. Para que a recontextualização cognitiva seja possível essa organização deve já fazer parte da base de conhecimentos do leitor. *Esta forma de recontextualização é sistemática. Ela é independente da organização redacional.*

Fonte: Duval (1995)

Para Duval (1995), a compreensão de um texto depende de um desses dois processos ou de sua interação. O processo indutivo está centrado sobre a organização redacional e o processo dedutivo permanece num conjunto de conhecimentos ultrapassando largamente aquilo que o texto mobiliza ou explicita. Uma compreensão dependente desses dois processos é uma compreensão evolutiva, aquela que permite uma aprendizagem pela leitura.

Capítulo II

O objeto Matemático: Integral

Vamos, neste capítulo, apresentar um breve relato sobre o desenvolvimento do conceito de Integral, foco de interesse da nossa pesquisa.

O notável progresso da ciência e da tecnologia, durante o século XX, só foi possível graças em grande parte ao desenvolvimento da Matemática, cujo ramo conhecido por Cálculo Diferencial e Integral, desempenhou o papel de um poderoso instrumento para resolver uma variedade de problemas de Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia, outros campos e recentemente alguns das Ciências Sociais.

São inúmeras as aplicações de Cálculo, em questões como: a velocidade com que um foguete deve ser lançado, para que não volte a tombar na Terra? Se uma cultura de bactérias cresce proporcionalmente à quantidade que existe em cada instante e se a população duplica ao fim de uma hora, quanto terá aumentado ao fim de duas horas? Se uma força de dez quilos faz esticar uma corda elástica, qual o trabalho necessário para esticar a corda de quatro metros?

Segundo Apostol (1997), sendo o Cálculo uma compilação de idéias atraentes e excitantes, seu aspecto notável é o seu poder de síntese. Muitos dos problemas acima estão relacionados com conceitos como velocidade, área, volume, taxa de crescimento, continuidade, tangente a uma curva, que podem ser formulados, reduzindo-se a dois outros problemas mais especializados, de natureza puramente geométrica; o primeiro é determinar um número que dê a medida da área de uma região plana sob uma curva e o segundo, é determinar um número que dê o declive de uma reta tangente a uma curva, em um ponto.

Para o autor, fundamentalmente, o Cálculo ocupa-se da formulação exata e da resolução desses dois problemas particulares, como mostra a fig. II.1.

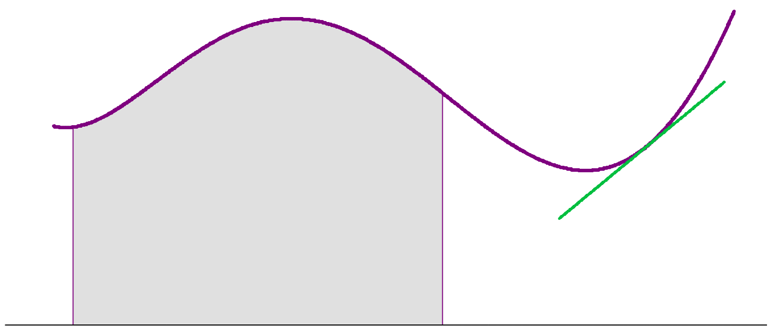


Fig. II.1
Fonte: Apostol (1994) p. 2

A nossa pesquisa quer investigar como os alunos utilizam o livro didático ao estudar Integral de Riemann, portanto, focalizaremos a evolução do conceito de Integral.

O Cálculo Integral originou-se há mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo designado “método de exaustão”, cujas idéias são elementares e podem ser resumidas da seguinte forma: dada uma região cuja área se pretende determinar, nela se inscreve uma região poligonal, cuja área é facilmente determinável, e que se aproxima da primeira dada. A seguir, escolhe-se outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e o processo continua, tomando poligonais com número cada vez maior de lados, de modo a “cobrir” toda a região dada. (Apostol, 1997, p. 3)

A figura seguinte ilustra o caso do cálculo da área de uma região semicircular.

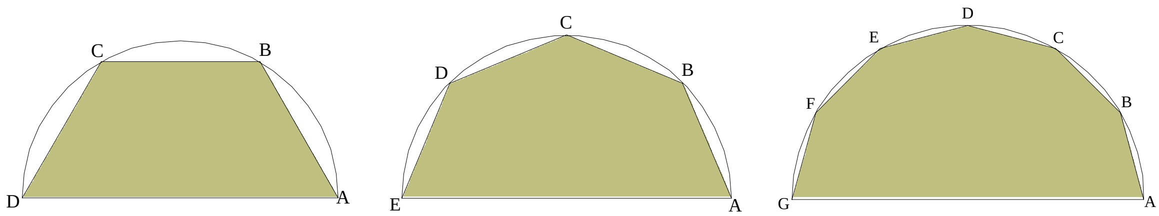


Fig. II.2. O método de exaustão aplicada a uma região semicircular.
Fonte: Apostol (1994) p. 3

Para o autor, o desenvolvimento do método de exaustão esperou quase 18 séculos para que o emprego de símbolos e técnicas algébricas se tornassem parte usual da matemática, pois a álgebra elementar era completamente desconhecida no tempo de Arquimedes, fato que tornava impossível estender o método a qualquer classe de regiões, sem conhecer um modo adequado de expressar os extensos cálculos, em uma forma compacta e simplificada.

No século XVI, o desenvolvimento matemático foi estimulado pelos resultados alcançados pelos italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari na determinação das soluções algébricas para as equações cúbicas e do quarto grau, encorajando a aceitação da nova linguagem algébrica. Com a introdução dos símbolos algébricos, o antigo método de exaustão foi “ressuscitando”.

Nessa época, pioneiros como Cavalieri, Torricelli, Roberval, Fermat, Pascal e Wallis foram responsáveis por muitas descobertas, que gradualmente, foram transformando o método de exaustão evoluindo para o que é hoje chamado de Cálculo Integral. Este ramo da Matemática recebeu o seu maior impulso no século XVII, devido principalmente aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o seu desenvolvimento continuou até o século XIX, época em que matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernard Riemann (1826-1866) lhe deram uma base matemática sólida.

II.1 - Arquimedes e a área do círculo.

Segundo Ávila (2005), Arquimedes, da escola de Alexandria, ocupou-se intensamente com o cálculo de áreas e volumes de diversas figuras geométricas, inclusive o círculo e a esfera, valendo-se muito de argumentos intuitivos e pouco rigorosos, mas obtidos os resultados, demonstrava-os com impecável rigor.

De acordo com o autor, no seu artigo "Arquimedes, o rigor e o método", os escritos de Arquimedes são dotados de uma estrutura lógica que nem sempre revelam os caminhos que o guiaram em suas descobertas. No entanto, no prefácio do seu livro, "A Quadratura da Parábola", Arquimedes fez uma referência a um método mecânico de descoberta, comunicada por meio de uma carta dirigida a Erastóstenes, em que dizia,

> *(...) julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos. (...) Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, alguns conhecimentos das questões do que sem esse conhecimento. (...) Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.*

Ávila afirma que usando um raciocínio apenas intuitivo, e baseando-se na visualização geométrica, é possível ver que a área do círculo é igual à área de um triângulo de base, cuja medida é igual à da circunferência do círculo e altura igual ao raio r. O autor, para mostrar este fato, divide o círculo em n setores iguais por meio da divisão da circunferência em n partes iguais (Fig. II.3). Esses setores são cada vez mais parecidos com triângulos, quanto maior for n. E como eles têm a mesma altura r, a soma de suas áreas é o produto da soma dos comprimentos das bases pelos raios divido por dois. Como a soma dos comprimentos das bases é exatamente o comprimento da circunferência, que é $2\pi r$, a área do círculo é a área do referido triângulo, com base $2\pi r$ e altura r, isto é, a

$$\text{área do círculo} = \frac{2\pi r \, . r}{2} = \pi \, r^2 \, .$$

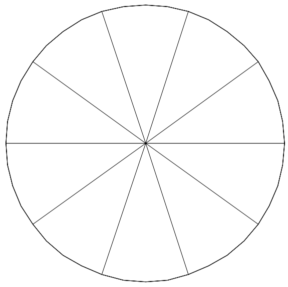


Fig. II.3
Fonte: Ávila (2005) p. 211

Esse raciocínio, embora utilize notação moderna (a notação π data do século XVIII), reflete essencialmente o método de exaustão, atribuído a Eudoxo e aperfeiçoado por Arquimedes.

Ávila (2005) relata que Arquimedes na tentativa de calcular a área do círculo, ia nele inscrevendo polígonos regulares no círculo, começando com hexágono, e dobrando o número de lados a cada passo. Fazia o mesmo, com polígonos circunscritos ao círculo. Desse modo, a área do círculo estava sempre compreendida entre as áreas de um polígono inscrito e um polígono circunscrito de n lados (Fig. II.4), e essas áreas vão se tornando cada vez mais próximas, quanto maior for n.

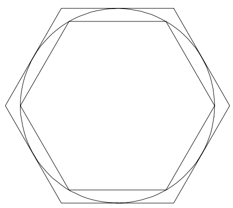


Fig. II.4
Fonte: Ávila (2005) p. 212

II.2 - Arquimedes e a área do segmento de parábola.

Eves (2002) afirma que Arquimedes, usando o método da exaustão, foi quem mais se aproximou da atual noção de Integral, e um dos exemplos de seus trabalhos mais antigos foi a quadratura do um segmento parabólico. Por meio do método mecânico, inspirado no ponto de equilíbrio da alavanca, Arquimedes intuiu que a área do segmento da parábola era $\frac{4}{3}$ da área de um triângulo cuja base é a corda que liga os extremos do segmento e altura igual à da parábola.

Para provar que a área do segmento da parábola é $\frac{4}{3}\Delta ABC$ Arquimedes apelou para geometria e propriedades da parábola.

Segundo Eves, dada a corda AB, C é o ponto de tangência da reta paralela a corda AB, L é o ponto médio de AB, N é o ponto médio do segmento BC e M é o ponto médio do segmento AC (Fig. II.5). D e E são pontos pertencentes à parábola, determinados pelas interceptação das retas paralelas ao segmento CL, e que passam por M e N, respectivamente, formando assim os triângulos ΔCEB e ΔCDA. Usando a geometria da parábola, Arquimedes mostrou que $\Delta CDA + \Delta CEB = \frac{\Delta ACB}{4}$.

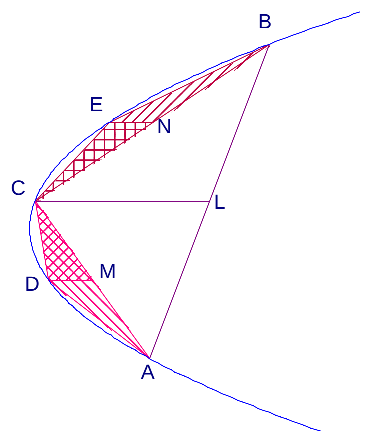


Fig. II.5
Fonte: Eves (2002) p. 421

Repetindo sucessivamente esse raciocínio concluiu que a área do segmento parabólico é dada, nos moldes atuais, por:

$$\Delta ABC + \frac{\Delta ABC}{4} + \frac{\Delta ABC}{4^2} + \frac{\Delta ABC}{4^3} + \ldots = \Delta ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \frac{4}{3}\Delta ABC$$

Atualmente, esse cálculo se faz abreviadamente, utilizando-se a soma de uma série geométrica. Arquimedes, contudo, procedia nos moldes do método de exaustão, chegando a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que hoje figuram nos textos elementares de Cálculo. Foi ele que, pela primeira vez, registrou e trabalhou com uma série infinita (EVES, 2002).

Eves (2002, p. 424) afirma que,

> *(...) no período que vai das realizações de Arquimedes até praticamente o início da Idade Moderna, os trabalhos embrionários quase não foram ativados. Por volta de 1450, os trabalhos de Arquimedes começaram a chegar à Europa Ocidental, por meio de uma tradução, encontrada em Constantinopla, de uma cópia de seus manuscritos e só no início do século XVII, suas idéias, até então conhecidas, passaram por outros desdobramentos. A obra de Arquimedes, referente ao método por ele utilizado, somente foi descoberta por volta de 1916.*

Segundo o autor, foi Johann Kepler (1571-1630) um dos primeiros europeus que desenvolveu idéias relativas a infinitésimos em trabalhos com a integração, recorrendo a procedimentos similares aos de Arquimedes, para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes dos barris de vinho, ocupando-se em calcular suas capacidades.

> *As idéias do Cálculo surgiram aos poucos, nas obras de vários matemáticos do século XVII e foram amadurecendo gradualmente, adquirindo forma mais acabada nos trabalhos de Newton e Leibniz, cada um trabalhando independentemente, formalizaram um cálculo manipulável e proveitoso.* (Eves, 2002)

II.3 – Newton e o cálculo fluxional

Isaac Newton nasceu na Inglaterra em 1642. Ele fez uma importante descoberta matemática, o método dos fluxos, "*Method of Fluxions",* que só foi publicado em 1736.

O método, criado por Newton, resolveu o problema da determinação da tangente a uma curva por uma equação $f(x,y)=0$. Para ele, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, isto é, x e y eram os fluentes, quantidades que fluem com o tempo; à taxa de variação desses fluentes, ele chamou de fluxo do fluente, representados por $\dot{x}$ e $\dot{y}$, que na notação moderna corresponderiam a $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$, onde t representa o tempo (EVES 2002, p. 439).

Um outro conceito foi introduzido por Newton, chamado momento de um fluente: tratava-se do incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x, por exemplo, em um intervalo de tempo também infinitamente pequeno. Desse modo, o momento do fluente x era dado por $\dot{x}o$, que modernamente pode ser representado por dx, e Newton salientou que se podia, em qualquer problema, desprezar os termos que apareciam multiplicados por potências de o iguais ou maiores que 2 e obteria assim uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Como exemplo, considerou a curva cúbica $x^3 - a\,x^2 + axy - y^3 = 0$, substituindo x por $x+\dot{x}o$ e y por $y+\dot{y}o$, e era obtido

$$x^3 + 3x^2(\dot{x}o) + 3x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - ax^2 - 2ax(\dot{x}o) - a(\dot{x}o)^2 + axy + ay(\dot{x}o) + a(\dot{x}o)(\dot{y}o) + ax(\dot{y}o) - y^3 - 3y^2(\dot{y}o) - 3y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0$$

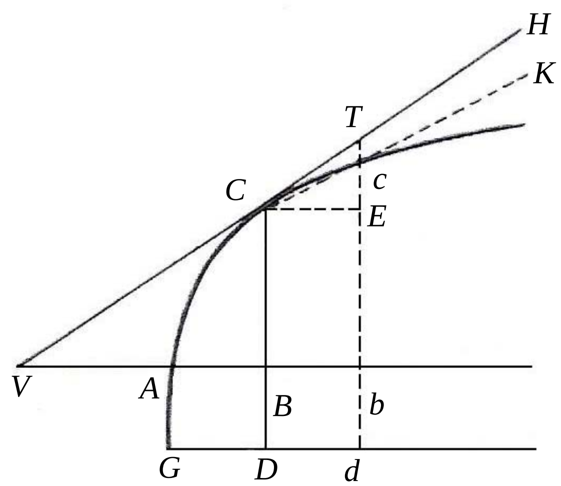
e desprezava-se os termos em que o figura com expoente igual ou maior que dois, que para Newton eram infinitamente pequenos, dividia-se a sentença por o, obtendo $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$.

Donde, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$, que em notação moderna é $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$, que é o teorema da função implícita, quando $f(x,y) = 0$ define implicitamente y como uma função diferenciável de x com $f_y \neq 0$.

Ao desprezar os termos em que o aparece com expoente igual ou maior que dois, Newton apresenta idéias embrionárias sobre limites, retomando os infinitésimos (“infinitamente pequenos”) .

Entre as numerosas aplicações do método, encontravam-se a determinação dos máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e concavidade de curvas, como também a determinação de muitas quadraturas e retificações de curvas. Segundo Palaro (2006, p. 94),

> *"[...] Chamando de fluxões às velocidades dos movimentos ou dos aumentos e de fluentes às quantidades geradas, esclareci aos poucos (nos anos 1665 e 1666) o método das fluxões, que aproveito aqui na Quadratura das curvas.*
>
> *As fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempos iguais, mas são infinitamente pequenos; e para ser mais exato, diria que estão na primeira razão dos aumentos nascentes, mas podem ser representados por quaisquer linhas proporcionais a elas. Se as áreas ABC, ABDG forem descritas pelas ordenadas BC e BD, que se movem uniformemente ao longo da base AB, então as fluxões dessas áreas estarão entre si como as ordenadas BC e BD que as descrevem e poderão ser representadas por aquelas ordenadas; isto é, tais ordenadas estão na mesma proporção que os aumentos nascentes das áreas. [...]*



Desse modo, Newton enunciou os problemas fundamentais do Cálculo, sendo dada a relação das quantidades fluentes, encontra a relação de suas fluxões e inversamente. Esse fato se traduz hoje, pelo conhecido Teorema Fundamental do Cálculo, que em termos da geometria significa resolver o problema do cálculo da área sob uma curva com o traçado da tangente a um ponto da curva.

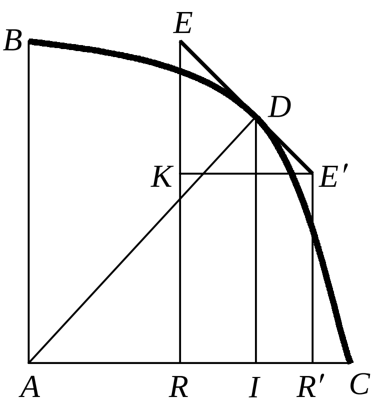
II.4 – Leibniz e seu cálculo formal

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646, e desde cedo manifestou grande interesse pelo estudo.

Ávila relata que durante o período de 1672 a 1676, quando cumpria uma missão diplomática em Paris, Leibniz entrou em contato com Christiaan Huygens, que o aconselhou a ler uma publicação de Blaise Pascal sobre certos problemas geométricos, já que desejava ser matemático.

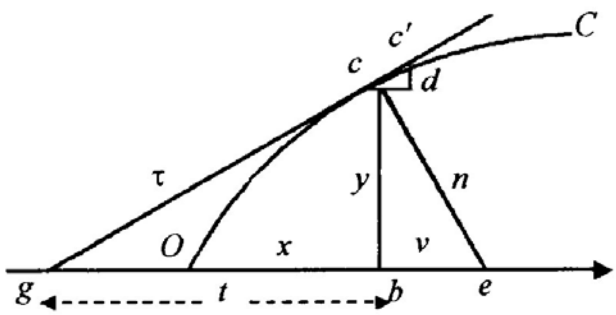
Segundo Palaro (2006), Leibniz, ao ler a obra de Pascal, "*Traité des sinus du quart de cercle" (Tratado sobre os senos de um quadrante de um círculo",* uma passagem chamou sua atenção, a qual foi descrita por Katz (Katz apud Palaro, 1998, p. 490):

> *[...] considerando o quadrante ABC de um círculo de unitário e sendo D um ponto para o qual seno é DI, Pascal traçou uma pequena tangente EDE' à curva ABC em D e os segmentos ER e E'R' perpendiculares ao raio AC, notando que os triângulos EKE' e DIA são semelhantes, encontrou que* $\frac{DI}{DA} = \frac{E'K}{EE'} = \frac{RR'}{EE'}$ *e, portanto,* $DI \cdot EE' = DA \cdot RR'$. *Considerando que, para um intervalo RR' infinitamente pequeno, o segmento EE' é considerado igual ao arco de círculo, Pascal afirma que o retângulo formado pelo seno DI e o arco infinitesimal (ou a tangente EDE'), representado por EE', é igual ao retângulo formado pelo raio DA e a parte do eixo entre as extremidades do arco dada RR', ou seja, Pascal mostrou que a soma dos senos ou quadratura de qualquer arco de um quadrante de um círculo é igual à porção da base entre os senos extremos multiplicada pelo raio do círculo.*



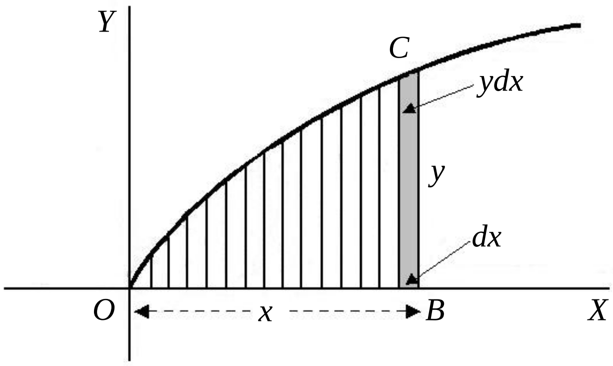
De acordo com a autora, foi a leitura dessa publicação que inspirou Leibniz para uma das suas idéias fundamentais na criação do Cálculo, a de "triângulo característico", pois percebeu que o "triângulo infinitesimal" inscrito em círculos por Pascal, poderia ser generalizado e aplicado a curvas arbitrárias. A exemplificação desta idéia, é de Baron descrita por Palaro (2006, p. 104).

> *[...] OcC é uma curva arbitrária; $\tau = cg$ é uma tangente à curva em c; $n = ce$ é a normal à curva, também, em c; e $y = cb$ é obtido pela projeção ortogonal do ponto c sobre o eixo horizontal. Tomando um ponto c' pertencente à tangente, mas tão próximo de c que cc' é confundido com a própria curva, Leibniz obtém o triâgulo característico cdc' em c, que é semelhante aos triângulos cbe e gbc, chegando às relações $cd : dc' : cc' = y : v : n = t : y : \tau$ (em notação atual, $\frac{cd}{y} = \frac{dc'}{v} = \frac{cc'}{n}$ e $\frac{cd}{t} = \frac{dc'}{y} = \frac{cc'}{\tau}$), úteis em transformações de quadraturas.*



Em um artigo publicado em 1686, Leibniz enfatiza a relação inversa entre diferenciação e integração, e conforme Palaro (2006, p. 107), ele considerou a Integral como sendo a área sob uma curva, descrita por Baron da seguinte forma:

> *[...] A área é composta por muitas faixas retangulares verticais infinitamente finas ydx e indica a soma das áreas de todas essas faixas por $\int y dx$, que é a área sob a curva $y = f(x)$ e compreendida entre as retas $y = 0$ e $y = x$; considerando que a diferencial da área de OCB é a área do retângulo ydx à direita, ou seja, $d\int y dx = y dx$, mostra a relação inversa entre d e $\int$ e, reciprocamente, $\int dy = y$.*



Eves (2002) afirma que Leibniz usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina summa (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como se faz hoje, assim como escrevia $\int xdy$ e $\int ydx$ para integrais. Segundo Ávila, o cálculo de Leibniz, na sua origem, é mais complicado que o de Newton. Seu formalismo, porém, é a sua grande virtude.

Ávila afirma que o raciocínio de Newton envolvia passagens em que ele dividia os dois membros de uma equação pelo infinitésimo o (supondo-o diferente de zero), depois desprezava termos com o fator o (supondo esse infinitésimo igual a zero). Esse tipo de procedimento se apresentava também no Cálculo de Leibniz, cujos "infinitésimos" eram denotados $dx, dy, dz, etc.$ e que algumas vezes eram cancelados como fatores diferentes de zero, outras vezes eram desprezados como equivalentes a zero. O Cálculo foi dominado, por muito tempo, por essas contradições, até que surgiram trabalhos que fundamentaram logicamente a disciplina no começo do século XIX.

Entretanto, o grande mérito de Newton e Leibniz foi a identificação da estreita relação entre a determinação das retas tangentes a uma curva, e a determinação da área da região limitada por uma curva. Nas mãos deles, cada um utilizando métodos próprios, conseguiram tratar esses problemas de maneira unificada (Courant, 2000).

Os conceitos fundamentais do Cálculo em bases aceitáveis, rigorosamente falando, seriam estruturados pelo grande analista francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e seus sucessores do século XIX.

II.5 – Augustin-Louis Cauchy

Embora a derivada fosse um conceito moderno, que surgiu no século XVII, a integral remontava ao tempo de Arquimedes, há mais de dois milênios. Ele já calculava áreas e volumes de figuras geométricas por um procedimento embrionário dos métodos modernos do Cálculo Integral. Contudo, naquela época, a Matemática era geométrica e ainda não havia ferramenta desenvolvida, de tal maneira que facilitasse o “desabrochar” de um Cálculo Integral sistematizado.

A situação, no século XVII, já era bem diferente. O uso de símbolos algébricos já se desenvolvera no século anterior com François Viéte e depois, com os trabalhos de René Descartes, Pierre de Fermat e outros seus contemporâneos. A moderna notação da Geometria Analítica se difundira e tornara possível a criação de métodos sistemáticos e unificados de tratamento do cálculo de áreas e volumes. Por essa razão, o Cálculo Integral, como é conhecido hoje, pôde evoluir.

Com o desenvolvimento das técnicas de Cálculo, ocorrido até o início do século XIX, o cálculo de Integral, que tinha forte motivação geométrica, se inverteu; agora, define-se a Integral, em termos numéricos, embora com alguns apelos a inspiração geométrica, associando a Integral à área de superfícies sob gráfico de funções positivas.

Em 1823, foi publicada uma obra de Cauchy, “*Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitesimal”,* contendo quarenta lições e as vinte últimas referiam-se ao Cálculo Integral. Na vigésima primeira lição, Cauchy definiu Integral usando a idéia de soma, diferentemente da idéia comumente usada no século XVIII, que abordava a integração como operação inversa da diferenciação (Palaro, 2006).

Embora a integração fosse abordada como a inversa da diferenciação até o século XVIII, Cauchy definiu a Integral como o limite da soma de um conjunto infinitamente crescente de partes pequenas, tendendo a zero. Considerou somas do tipo $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i\text{-}1}\right)\left(x_i\text{-}x_{i\text{-}1}\right)$, sendo *f* uma função contínua no intervalo $\left[a,b\right]$ e x_i, com i variando de *1* a *n*, são os pontos de partição desse intervalo.

Por meio do registro da língua natural e o do algébrico e com o auxílio do registro gráfico (Fig. II.6), apresentamos uma idéia geométrica de Integral de Cauchy, relacionada com áreas de figuras planas.

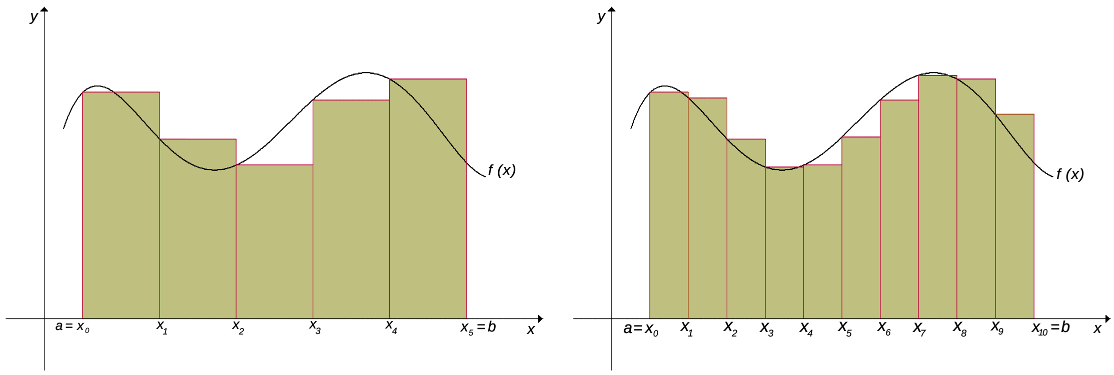


Fig. II.6

São dadas, inicialmente, a função $y = f(x)$, f contínua num intervalo fechado $\left[a, b\right]$, e uma partição $P = \left\{x_0, x_1, \ldots, x_n\right\}$, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ e $x_0 = a$ e $x_n = b$, do intervalo $\left[a, b\right]$, de modo que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_i - x_{i-1} = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x_n .$$

Em seguida, multiplica-se cada Δx_i $\left(i = 1, 2, 3, \ldots, n\right)$ pelo valor de $f\ (x_{i-1})$, obtendo

$$S = \left(x_1 - x_0\right) f\left(x_0\right) + \left(x_2 - x_1\right) f\left(x_1\right) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\, f\left(x_{n-1}\right),$$

a soma dos produtos obtidos, que poderá ser expressa por $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i\text{-}1}\right)\left(x_i\text{-}x_{i\text{-}1}\right)$.

A quantidade ***S*** dependerá do número ***n,*** que indica a quantidade de sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da partição P do intervalo $[a, b]$. É importante destacar que se os Δx se tornarem muito pequenos quando ***n*** se torna muito grande, o valor de ***S*** atingirá um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e do intervalo de $[a, b]$. Este limite será chamado de Integral Definida por Cauchy.

> $[\ldots]$ *os estudos de Cauchy, nesse particular, foram muito incompletos. A partir dessa época, intensificavam-se as investigações sobre os fundamentos do Cálculo, levando ao desenvolvimento da Análise Matemática e da Teoria das Funções.* $[\ldots]$ *Por volta de 1854, o eminente matemático alemão Bernhard Riemann realizou um estudo aprofundado da integral.* (ÁVILA, 2005, p. 213)

III.6 - A Integral de Riemann

Foi Riemann quem ampliou a definição de Integral formulada por Cauchy, estendendo a possibilidade de integrar funções não contínuas.

Para tanto, considerou uma função limitada, $f:[a,b]\to$ e uma partição arbitrária $P=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ do intervalo de $[a,b]$, sendo $[x_{i-1}, x_i]$ os intervalos dessa partição. Para cada $i=1,2,\ldots,n$, denotou por $\boldsymbol{m_i}$ o ínfimo e $\boldsymbol{M_i}$, o supremo dos valores de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A existência de $\boldsymbol{m_i}$ e $\boldsymbol{M_i}$ estão garantidas pelo fato de f ser limitada no intervalo $[a,b]$. A seguir, definiu a soma inferior $s(f,P)$ e a soma superior $S(f,P)$ da função f em relação à partição P como:

$$s(f,P)=m_1(x_1-x_0)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

e

$$S(f,P)=M_1(x_1-x_0)+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}).$$

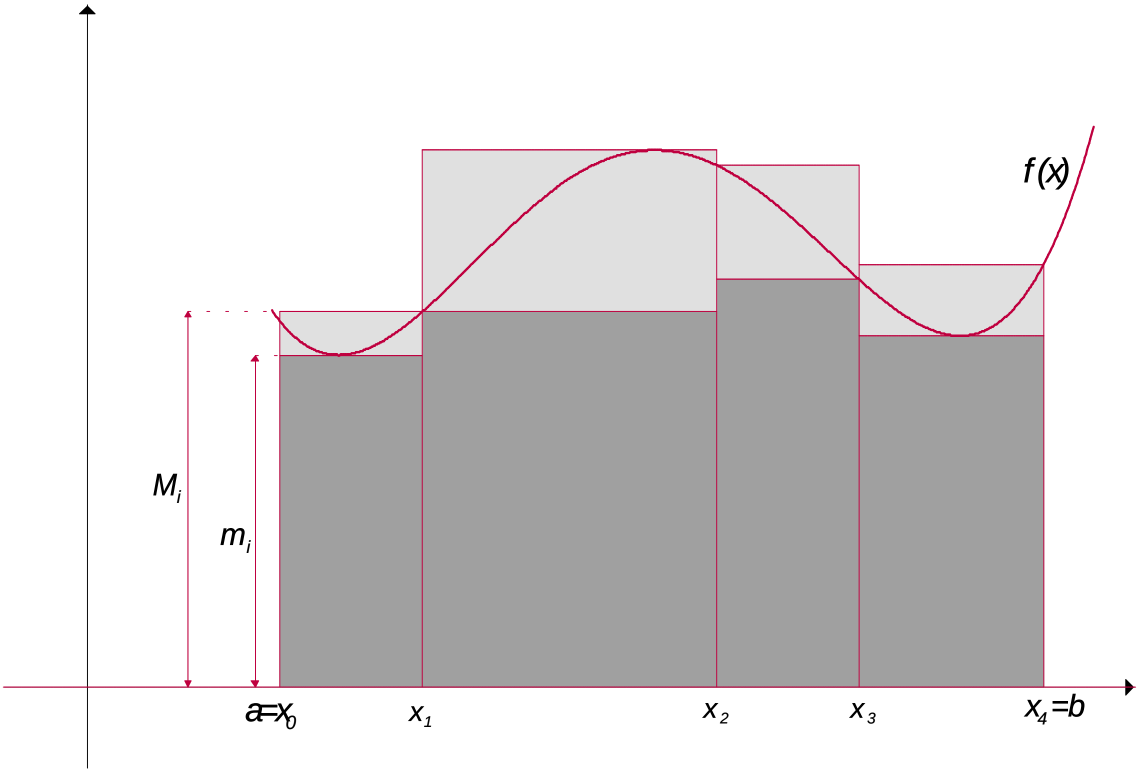


Fig. II.7

No primeiro intervalo $[x_0, x_1]$, Fig. II.7, a função f tem o menor valor $\boldsymbol{m_1}$ e o maior valor $\boldsymbol{M_1}$; similarmente, no $i-ésimo$ intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ o menor valor da f é $\boldsymbol{m_i}$ e o maior valor da f é $\boldsymbol{M_i}$.

É importante observar que f deve ser limitada em $[a,b]$, pois é essencial para que todos $\boldsymbol{m_i}$ e $\boldsymbol{M_i}$ existam, como também é necessário considerá-los como ínfimos e supremos, respectivamente, em vez de mínimos e máximos, uma vez que a função considerada não é necessariamente contínua.

Se $\boldsymbol{m}$ é o ínfimo e ***M*** o supremo de f em $[a,b]$, tem-se para toda partição P do intervalo $[a,b]$, $\mathrm{m}.(b-a) \le s(f,P) \le S(f,P) \le \mathrm{M}.(b-a)$. Assim, para uma mesma partição P, tem-se $s(f,P) \le S(f,P)$.

Porém, esta relação se mantém para partições distintas? Para responder essa pergunta, define-se refinamento de uma partição da seguinte maneira: Seja

Q uma partição de $[a,b]$, se $P \subset Q$, então a partição Q é mais fina que P, ou que Q é um refinamento de P.

Riemann demonstra que sendo $P \subset Q$, tem-se $s(f,P) \le s(f,Q)$ e $S(f,P) \ge S(f,Q)$, o que indica quando se refina uma partição, a soma inferior aumenta e a soma superior diminui. Ainda mais, demonstrou que para quaisquer partições P e Q de $[a,b]$, tem-se sempre $s(f,P) \le S(f,Q)$, isto é, no registro da língua natural, toda soma inferior de f é menor ou igual a qualquer soma superior. Dessa forma, vê-se que o conjunto de todas as somas superiores de f em P é limitada inferiormente por uma soma inferior em Q. Assim, esse conjunto possui ínfimo.

Riemann definiu esse ínfimo como sendo a integral superior de f e denotou por $\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx$.

Também o conjunto das somas inferiores de f é limitado superiormente por qualquer soma superior de f. Logo, esse conjunto possui um supremo, que Riemann definiu como sendo a integral inferior de f e denotou por $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$.

Quando esses dois números coincidem, isto é, $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx$, a função é dita integrável, segundo Riemann e a integral é denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Após isto, Riemann provou que as funções contínuas são integráveis, segundo essa definição. Mostrou também que existem funções não contínuas, porém, limitadas que são também integráveis. Isso evidencia que o conjunto das funções integráveis segundo Cauchy está contido no conjunto daquelas integráveis segundo Riemann.

Depois, a questão colocada foi a de procurar quais são as funções limitadas Riemann integráveis, chegando finalmente à demonstração do seguinte resultado: toda função $f:[a,b]\rightarrow$, limitada com um número finito de descontinuidade é Riemann-integrável.

Mais tarde, com a utilização da medida de Lebesgue, foi possível ampliar esse resultado, mostrando-se que toda função de $[a,b]$ em limitada, cujo conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula, é Riemann-integrável.

Desse modo, ficam incluídas no conjunto das funções Riemann-integraveis, por exemplo, aquelas que possuem um conjunto de pontos de descontinuidade enumerável.

A integral de Riemann também pode ser expressa em termos de limites de somas. Para isso, dada uma partição P do intervalo $[a,b]$, denomina-se norma de P e indica-se por $|\boldsymbol{P}|$, o comprimento do maior subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ da partição. Em seguida, é escolhido arbitrariamente um ponto $\boldsymbol{c_i}$ em cada um desses subintervalos $[x_{i-1},x_i]$, expressando a soma de Riemann por $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot[x_i-x_{i-1}]$.

Mostra-se a seguir que sendo $f:[a,b]\rightarrow$ limitada, tem-se que o limite $I=\lim_{|P|\to 0} S(f,P)$ existe, se e somente se, f é Riemann-integrável. E mais, no caso afirmativo, tem-se que $I=\int_a^b f(x)\,dx$.

Dessa forma, fica evidenciado que se f é integrável, então $\int_{\underline{a}}^{b} f=\int_{a}^{\overline{b}} f=\int_a^b f=\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot[x_i-x_{i-1}]$, para qualquer $\boldsymbol{c_i}$.

Nesta altura, colocaremos em destaque algumas constatações.

Em primeiro lugar, quanto à função f integranda, a Integral de Cauchy trata apenas das funções contínuas enquanto Riemann trabalha com funções limitadas no intervalo $[a,b]$. Como toda função contínua no intervalo fechado é limitada, vê-se que as funções integráveis, segundo Cauchy também são segundo Riemann.

No livro didático utilizado neste trabalho, o autor trabalha com exemplos de funções contínuas e positivas no decorrer do tópico 5.1.

Em segundo lugar, quanto à partição do intervalo $[a,b]$, Cauchy utiliza sempre partições tais os subintervalos têm o mesmo comprimento enquanto na Integral de Riemann, os subintervalos apresentam comprimentos arbitrários. No livro de Stewart, todas as partições são com subintervalos de mesmo comprimento.

Em terceiro lugar, na Integral de Cauchy, o ponto cujo valor da função é tomado como altura dos retângulos é o extremo inferior de cada subintervalo da partição, enquanto na Integral de Riemann, esses pontos são escolhidos arbitrariamente em cada intervalo.

Capítulo III

Procedimentos Metodológicos

Com o objetivo de investigar como o aluno manuseia o livro didático quando ele estuda um tema como Integral, neste capítulo vamos apresentar os procedimentos utilizados e o seu delineamento metodológico.

Nossa pesquisa tem uma abordagem qualitativa, e segundo Bogdan e Biklen, como destacam Lüdke e André, *a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (*1986, p.13*)*

Ainda conforme Bogdan e Bilklen, uma pesquisa qualitativa apresenta várias características, que foram apontadas pelas autoras:

- O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos; inclui transcrições de entrevistas e de depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos. Todos os dados da realidade são considerados importantes. O pesquisador deve atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado. (1986, p. 12)

- Nesses estudos, há sempre uma tentativa de capturar a “perspectiva dos participantes”, isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo. O pesquisador precisa ter cuidado ao revelar os pontos de vista dos participantes, deve encontrar meios para checá-las, discutindo-as abertamente com os participantes para que elas possam ser ou não confirmadas. (1986, p. 12)

- Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do inicio dos estudos. As abstrações se formam ou se consolidam basicamente a partir da inspeção dos dados. (1986, p. 13)

Lüdke e André (1986) afirmam que o fato de não existirem hipóteses ou questões especificas formuladas *a priori* não implica a inexistência de um quadro teórico que oriente a coleta e a análise de dados. O desenvolvimento do estudo aproxima-se a um funil: no início há questões ou focos de interesse muito amplos, que no final se tornam mais direitos e específicos. O pesquisador vai melhor precisando esses focos à medida que o estudo se desenvolve.

Com a finalidade de responder as perguntas da pesquisa, optamos por entrevistas baseadas em tarefas, baseando-se no texto “A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research” de Gerald A. Goldin.

Conforme o autor, entrevista baseada em tarefas para o estudo do comportamento matemático envolve minimamente um sujeito (o solucionador do problema) e um entrevistador (o clínico), interagindo em relação a uma ou mais tarefas (questões, problemas ou atividades) introduzidas ao sujeito de uma forma pré-planejada. O último componente justifica o termo "baseada em tarefas", para que as interações do sujeito não sejam meramente com os entrevistadores, mas também com o ambiente das tarefas.

Normalmente, segundo o autor, providências como gravação de vídeo e/ou áudio, notas de observadores e o trabalho do sujeito são tomadas para análises posteriores do que aconteceu durante a entrevista. Pela análise do comportamento ou interações verbal e não verbal, o pesquisador espera fazer inferências sobre o raciocínio matemático, aprendizagem, e/ou solução de problemas dos sujeitos. A partir dessas inferências, espera-se aprofundar a compreensão dos vários aspectos da educação matemática.

Goldin (2000) afirma que o delineamento das entrevistas baseadas em tarefa precisa levar em conta os propósitos da pesquisa, que podem incluir investigação exploratória, refinamento de observação, descrições, inferências e/ou questionar a aplicabilidade de um modelo de ensino, aprendizagem ou solução de problemas.

Além disso, entrevistas baseadas em tarefas podem servir como instrumento de pesquisa para fazer observações sistemáticas na psicologia da aprendizagem matemática e solução de problemas matemáticos. Elas também podem ser adaptadas como ferramentas de avaliação para descrever o conhecimento do sujeito e/ou melhorar a prática da educação matemática e o seu valor e para qualquer desses propósitos, repousa no fato de que elas fornecem um ambiente matemático que pode ser controlado. Tarefas matemáticas podem ser ajustadas, baseadas nos resultados de pesquisa anterior.

Contingências de entrevista podem ser decididas explicitamente e modificadas quando apropriadas. Comparando com o convencional método papel e lápis, entrevistas baseadas em tarefas tornam possível centrar a atenção da pesquisa mais diretamente sobre os processos de solução das tarefas de matemática do sujeito, do que somente sobre os padrões de respostas certo ou errado nos resultados produzidos.

Portanto, para Goldin (2000), existe uma possibilidade de investigar em uma variedade de tópicos importantes mais profundamente do que é possível por outros meios experimentais – tópicos tais como cognição complexa associada à aprendizagem matemática, mecanismos de exploração matemática e solução de problemas, relações entre solução de problemas e aprendizagem, relações entre afeto e cognição, e assim por diante.

Nossa pesquisa teve sua origem em uma pergunta feita pela Professora Cristina Cerri, ao final da apresentação da dissertação "A Noção de Integral em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica" de Carlos Antonio da Silva, em 2004 – PUC, São Paulo. Nessa ocasião, a professora deixou em aberto a seguinte questão: Como os alunos utilizam o livro didático e como eles mobilizam os registros presentes na apresentação do tema?

Com a finalidade de responder essa pergunta, elaboramos um conjunto de tarefas, baseando-se nas seguintes escolhas:

III.1 – Tema – Escolhemos o tema Integral –De acordo com o breve relato histórico sobre a Integral apresentado no capítulo I, vimos que este objeto matemático dispõe de vários registros de representação, para possibilitar o acesso ao seu conceito.

Ao descrever o objeto Integral, além do discurso na forma da linguagem escrita, tivemos que recorrer constantemente aos registros gráficos e algébricos para tornar claras as explicações dadas, utilizando também a linguagem formal, para tornar o discurso mais sintético. O recurso aos vários registros foi quase que simultâneo, um remetendo ao outro sem cessar. A necessidade dos registros puramente visuais foi imprescindível para que a compreensão do conceito ocorresse. (Conversão dos registros).

III.2 - O livro didático – "Cálculo" de James Stewart (da editora Pioneira Thompson Learning, 2002). Este livro é atual e aborda os temas partindo de uma situação problema, dando ênfase às aplicações e agregando novas tecnologias como o uso de calculadora gráfica.

De acordo com Silva (2004), que fez a análise deste livro quanto aos registros de representação de Integral, diversos deles são utilizados, não só na apresentação do conteúdo, como também, nos exemplos e nos enunciados dos exercícios propostos, e em alguns casos propondo aos leitores a mudança de registro. Para definição, o autor do livro explora vários registros, dando preferência ao registro gráfico.

Além disso, Stewart afirma, no prefácio do seu livro, que a ênfase deste está na compreensão dos conceitos, devendo ser a meta principal no ensino do cálculo e que tentou implementá-la por meio de sua “Regra de Quatro”: “Tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente, além do ponto de vista verbal ou descritivo”.

Embora não faça referência aos de registros de representação, quando o autor do livro afirma que quer implementar sua “Regra de Quatro”, não pudemos deixar de notar alguma semelhança com a teoria de Duval, referente à conversão de registros de representação para apreensão do objeto matemático e Stewart afirma que para a compreensão dos conceitos, os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente.

Ainda no prefácio, o autor faz uma dedicatória aos estudantes, afirmando que existe uma diferença entre ler um texto de cálculo e um jornal ou um romance, ou até mesmo um livro de física. Para que ele não desanime se tiver que ler uma passagem mais de uma vez para entendê-la, o aluno deve ter lápis, papel e uma calculadora à mão para esboçar um diagrama ou fazer um cálculo.

Stewart sugere aos alunos que leiam e tentem compreender uma seção do texto antes de começar os exercícios, em particular, deve examinar as definições para entender o significado exato dos termos, pois parte da meta do curso de Cálculo é induzi-lo a pensar logicamente, aprender a escrever a solução dos exercícios de uma forma conexa, passo a passo e com sentenças explicativas – e não uma fileira de equações desconexas ou fórmulas.

O método proposto por Stewart aos alunos sobre como estudar, em muitos aspectos está de acordo com a teoria de Duval, segundo a qual compreender um texto é elaborar uma representação da situação que é descrita. Isto é, ler um texto não é somente descobrir os elementos desta situação, mas também suas relações e sua organização global. Como o texto só pode dar esses elementos um após o outro, a atividade de leitura comporta um movimento duplo de descobrir as informações e de reorganizá-las. (Segmentação redacional e....). Este trabalho permite ao leitor construir uma representação da situação. É necessário também fazer os alunos sempre voltar ao texto para completar ou corrigir a construção que eles estão elaborando.

O capitulo V do livro de Stewart refere-se a Integral. O autor apresenta um tópico introdutório designado por "Áreas e Distâncias" (Tópico 5.1) ao longo de onze paginas, utilizando fartamente registros de representação algébrica, numérica, gráfica, tabelas e língua natural, terminado o mesmo com uma coleção de 24 exercícios sob registros de língua natural, gráficos cartesianos, tabelas e linguagem formal.

O autor inicia destacando as várias situações em que a Integral pode ser utilizada. Para introduzir o desenvolvimento do assunto, começa com a tentativa de determinar a área sob uma curva ou a distância percorrida e acaba se valendo do mesmo tipo especial de limite. Passa a trabalhar com as duas questões até chegar à definição de Integral.

Para a realização do experimento, nós levamos os livros, que foram fornecidos aos alunos a fim de possibilitar a execução das tarefas.

III.3 – Observação – A presença da observadora foi muito importante, pois as tarefas exigiam constantemente atentar nas posturas dos alunos frente às mesmas, sem interferência nem da aplicadora nem da observadora.

III.4 - Os alunos – Os participantes da pesquisa são alunos do segundo e quinto semestres do curso de Matemática de uma universidade da cidade de São Paulo, do período noturno. Por ocasião da aplicação das tarefas, os alunos do 2º semestre ainda não conheciam o conceito de Integral e estavam estudando Derivadas, e os alunos do 5º semestre já tiveram contato com o conceito.

III.5 - As tarefas – Elas foram planejadas para investigar se os alunos, sem conhecer o tema Integral e sem o auxilio do professor, mobilizando os registros contidos num texto, conseguem apreender as informações e se iniciar na aprendizagem do tema, munidos apenas com os conhecimentos prévios de geometria (cálculo de áreas), cálculo numérico (operações com números racionais) e noção de função. O outro foco de nosso interesse era identificar quais os registros são privilegiados por eles com esse fim.

As tarefas foram realizadas no período normal das aulas e a participação foi espontânea. Os alunos resolveram as atividades individualmente, e foram lhes oferecido papel e lápis para esse fim e não havia borracha, pois também interessamos-nos em ver os registros que são abandonados durante a resolução da tarefa. As sessões para realização das tarefas duraram aproximadamente 120 minutos, nas salas de aula.

Para esta pesquisa, um roteiro foi composto com cinco tarefas. Ele foi inspirado, em parte, por um projeto do grupo “math-français” de l’Irem de Strasbourg, que é composto por professores de francês e de matemática, sob direção de R. Duval. Os professores de matemática franceses também se depararam com uma nova dificuldade e que ultrapassava seu campo de intervenção: nos problemas que eles propõem, o primeiro obstáculo que os alunos encontram é o da leitura do texto do enunciado.

Em relação aos alunos brasileiros, Malta (2003) cita: “*Dentre os indícios mais apontados pelos professores do despreparo dos alunos que ingressavam na universidade, está a incapacidade de se expressar, a incapacidade de utilização da linguagem escrita, visível na dificuldade de construir frases completas e consistentes (e sem erros de ortografia) que os alunos demonstravam”.*

Conforme o relatório do projeto, “*Un Travail Interdisciplinaire en Français et en Mathématique*” publicado em “*Les revues pédagogiques de la Mission Laïque Française” – Activités mathématiques et scientifiques*, em abril de 1999, para os professores deste projeto, tanto em matemática como em francês, a importância de uma aprendizagem específica da leitura como também da escrita se impunha. Esta dificuldade surgiu com intensidade quando os alunos tinham que abordar textos que não eram narrativos: textos científicos (em biologia, em economia, em geografia, em matemática), textos argumentativos (em francês, em filosofia, especialmente). Entre outras dificuldades, encontravam-se também aquelas ligadas à abstração crescente das noções ensinadas, e à produção de texto tanto de demonstrativos como argumentativos.

Consciente da necessidade de enfrentar, juntos e de um modo comum, os professores de francês e de matemática se encontraram sob direção de R. Duval desde de 1990 e conduziram uma experiência alimentada por sensibilidades e os diferentes pontos de vista dos docentes destas disciplinas.

As reflexões levaram os pesquisadores a conduzir a experiência segundo dois eixos:

- um trabalho sobre a atividade de compreensão de textos, principalmente sobre o tratamento das informações.
- um trabalho sobre o raciocínio, propriamente dito (com propósito da demonstração em matemática e da argumentação em francês).

Para os pesquisadores franceses, os enunciados dos problemas não devem conter somente informações simples e com frases curtas, ao contrário, para eles, os alunos devem adquirir ferramentas, que os habilitem de modo autônomo, a abordar textos complexos, relevar e organizar as informações que aí se encontram, e hierarquizá-las e estabelecer as conexões lógicas que as unem. Fazer matemática, para esses pesquisadores, é coordenar diversos registros (figuras, língua natural, calculo...) e lhes interessavam descobrir em que uma passagem por uma mudança de registros permite auxiliar estas aprendizagens.

Um espaço de uma hora semanal foi reservado para as atividades referentes a esse projeto. Os dois professores, de francês e de matemática, intervinham simultaneamente e a gestão da classe ficava a cargo de um ou de outro, conforme a atividade proposta, cada um segundo sua competência. O trabalho mais específico de cada uma das disciplinas prosseguia no curso, com a reutilização e prolongamento daquilo que foi feito na aula comum. Este trabalho podia ser igualmente conduzido de modo separado na aula de francês e de matemática, mas necessitaria então de um ajuste indispensável entre os dois professores, a fim de permitir uma análise dos resultados obtidos.

As atividades apresentadas, pelas pesquisas francesas, se encaixavam em duas perspectivas:

- *Escolha dos textos*: Para a atividade de compreensão de texto, foram escolhidos textos que não se supõe um conhecimento prévio para que cada aluno pudesse, por uma leitura do texto, construir uma representação descrita, ou textos que não têm relação imediata com os conhecimentos próprios dos alunos, a fim de que estes não pudessem substituir uma leitura atenta apelando aos outros saberes.
- *Pela atividade proposta*: Quando os alunos são solicitados para traduzir, por um esquema, a organização das informações de um texto, a fim de materializar a representação elaborada no momento da leitura, torna-se possível observar onde se situam as dificuldades que eles encontram no modo de organização própria à atividade de leitura.

Observando essas duas perspectivas, e para elaboração do nosso roteiro, selecionamos o tópico 5.1 “Áreas e Distâncias” (Stewart, p. 367) com a finalidade de estruturar as cinco tarefas.

Primeira tarefa - Localizar no livro o tema Integral.

A primeira tarefa tem por objetivo verificar como os alunos manuseiam o livro. Se eles procuram o tema solicitado folheando o livro, sem consultar o índice. Se eles apresentam curiosidades em conhecê-lo. Se eles apresentam interesse de ler o prefácio. Enfim, se eles manifestam interesse pelo livro, além do que foi pedido para fazer.

A fim de que observar os alunos durante a realização desta tarefa, eles entraram na sala de dois em dois, e a dupla seguinte entrava na sala quando a primeira terminava a primeira tarefa e prosseguia na realização de outras tarefas.

Segunda tarefa – Por um esquema, traduza as informações contidas no tópico 5.1.

A segunda tarefa é o cerne da nossa pesquisa e tem a preocupação de verificar se os alunos sabem mobilizar vários registros para estudar, e qual o registro privilegiado por eles para essa finalidade.

Ao serem solicitados a fazer um esquema, os alunos se enquadram numa situação de leitura, em que existiria uma lacuna entre sua base de conhecimento e o conteúdo cognitivo do texto. A compreensão do que está explicitamente apresentado no nível da organização redacional torna-se passagem obrigatória para alcançar a compreensão do conteúdo cognitivo, isto é, o leitor (aluno) terá de fazer tratamento sobre as palavras (pronomes, conjunções), levando em conta as frases.

Entretanto, nosso texto é um texto matemático, além de levar em conta as palavras nas frases, o leitor (aluno de matemática) terá de considerar também os registros de representação do objeto matemático em questão. Ele terá de fazer apelo a outras formas de expressão: aos números, aos gráficos, às notações,... , etc, pois para aprender matemática é suposta interação entre esses vários tipos de representações, além das discursivas.

De acordo com Duval, existem quatro situações de leitura. Queremos investigar em qual situação cada um deles se enquadra.

Terceira tarefa – Como o autor começa o estudo do tema Integral?

A terceira tarefa da nossa pesquisa tem a finalidade de investigar se os alunos, embora tivessem sido solicitados a localizar o tema Integral, realmente iniciam as suas buscas no tópico cujo título não contempla a palavra “Integral”, já que o mesmo se encontra no tópico 5.4.

QuartaTarefa – Suponha que você seja solicitado para resolver algum dos exercícios da pagina 376, qual você escolheria? Justifique sua escolha.

Quinta Tarefa – Agora, você poderia resolver o exercício escolhido?

A quarta e a quinta atividade objetivam investigar a escolha de um problema dentre de muitos propostos pelos alunos e as estratégias que eles lançam mão para resolver um exercício quando solicitados e se mobilizam vários registros simultaneamente.

III.5 - Entrevistas – As entrevistas foram realizadas com a finalidade de complementar e esclarecer os dados coletados.

Capítulo IV

Resultados

Analisamos, neste capítulo, os resultados obtidos com a realização das tarefas. As produções foram obtidas com 14 alunos participantes do curso de Matemática, de uma instituição particular, sendo oito deles do 2º semestre, que estavam iniciando seus estudos em Cálculo Diferencial e Integral e do 5º semestre, seis alunos que já conheciam o conceito de Integral. As tarefas foram executadas individualmente.

Para a realização das tarefas, os livros, levados por nós, foram entregues aos alunos assim que eles sentavam-se nas carteiras, e sobre estas estavam o lápis e um caderno para as produções; a seqüência das tarefas era fornecida aos alunos em folhas separadas, e estas eram diferentemente coloridas para que se pudesse identificar a tarefa que o aluno estava executando.

Primeira tarefa: Localizar no livro didático o tema Integral.

Nesta tarefa, queremos conhecer como o aluno começa se relacionar com o livro didático, quando se depara com ele. Esse nosso interesse é justificado, pois conforme Malta (2003), [..] *é muito comum ouvir de professores que "os alunos não gostam de ler" e por parte dos alunos que "ler é muito difícil"* [...].

Descrição das ações dos alunos para localizar o tema Integral no livro, observamos que:

- Apenas três alunos (dois do 5º semestre e um do 2º) ficaram esperando que lhes fossem dado a ordem de começar a tarefa, comportando-se como se estivessem em aula. Os outros começaram a manusear o livro, tentado localizar no índice o tema que figura na tarefa.

- Dois alunos, um de cada semestre, começaram folheando o livro ao acaso, sendo que um deles foi dos que só começaram a tarefa quando "autorizado"; somente após algum tempo é que recorreram ao índice para localizar o tema.

- Dois alunos leram o prefácio; outros foram direto ao capitulo de Integral.

Constatamos que, quanto à abordagem do livro didático, os alunos de diferentes semestres não apresentam diferença na forma como iniciam o estudo .

O livro utilizado apresenta o capítulo 5 com a denominação "Integrais" e o inicia com os itens 5.1 – "Áreas e distâncias", seguindo com os tópicos 5.2 "A Integral Definida", 5.3 "O Teorema Fundamental do Cálculo", 5.4 "Integrais Indefinidas e o Teorema da Variação Total", 5.5 " A Regra da Substituição", 5.6 "O Logaritmo Definido como um Integral".

Todos os alunos anotaram em seu caderno de produção: "página 366", que é exatamente o número que figura no índice, e abriram o livro nesta página.

2ª Tarefa – Por um esquema, traduzir as informações contidas no tópico 5.1

Nesta tarefa, estamos interessados nas produções dos alunos, após a leitura do texto.

Malta (2003) observou que, [...] *com raras exceções, os alunos que ingressavam na universidade não compreendiam a linguagem matemática, [...] o aprendizado se resumia em aprender a utilizar alguns algoritmos, sem relacioná-los com os conceitos,* e eles têm muita dificuldade *em justificar suas respostas* *quando solicitados, demonstrando pobreza de linguagem como também dificuldade de perceber e identificar o próprio raciocínio.*

Para esta análise, vamos observar, primeiramente, as produções dos alunos quanto à utilização dos registros de representação e depois, faremos uma classificação quanto à situação de leitura em que eles se encaixam, com base na teoria de Duval.

Segundo o autor, para compreender um texto, o leitor deve possuir uma base de conhecimento que é aquela que vai permiti-lo compreender a língua falada além do código escrito, isto é, a seqüência de código escrito e a expressão oral correspondente. Os textos podem se diferenciar pelo conteúdo cognitivo, ser familiar ou novo; mas, também podem se diferenciar pela organização redacional, ser congruente ou não congruente. Desse modo, são verificadas quatro as situações de leitura: a primeira, familiar e congruente (I), familiar e não congruente (II), novo e congruente (III) e novo e não congruente (IV).

Nas duas primeiras situações, um percurso único e rápido do texto, sem retorno, pode ser suficiente para a compreensão no momento da leitura, pois não passa de uma prática oral do texto; porém na situação II, Duval observa que um único percurso rápido aumenta os riscos de má interpretação do leitor, o que pode ser explicado por uma falta de atenção por parte do mesmo.

Na situação III e IV, a compreensão do texto é uma produção de conhecimento novo para o leitor, existindo uma defasagem entre sua base de conhecimento e o conteúdo cognitivo. O processo de compreensão exige um percurso prolongado e com retorno sobre certas partes do texto, para responder as questões, para efetuar comparações entre certas expressões, para verificar a coerência de certas inferências, para determinar aquilo que passou desapercebido.

Nesta tarefa, três alunos (dois do segundo semestre e outro do quinto semestre) utilizaram somente o registro da língua natural para fazer o esquema solicitado, nota-se claramente nas duas produções, que eles segmentaram o texto para realizar a tarefa solicitada. Ilustramos abaixo uma produção desta natureza.

2- O tópico 5.1 aborda o assunto integral definida.

• O assunto específico é área e distância

• A definição de área, ou melhor, como encontrar a área de uma região é mais fácil em regiões com lados retos, porém, se torna mais complexa encontrar a área de regiões com lados curvos.

• O autor usa exemplos e figuras para ilustrar as explicações

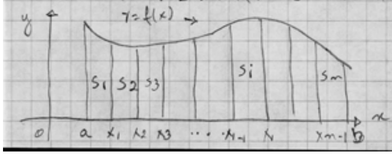
• Pela tangente, secante e limite (soma)

Observamos que sete alunos (cinco do segundo semestre e dois do quinto semestre) utilizaram os registros da língua natural e gráfico para dar conta do esquema solicitado, incluindo também muitas vezes o registro algébrico. Apresentamos a seguir uma produção desse tipo.

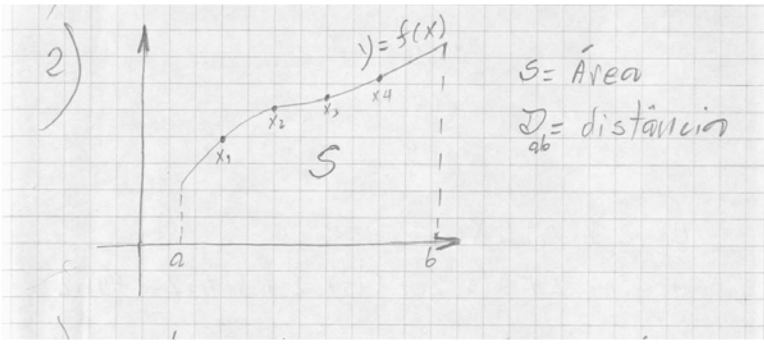
2) Nesta seção vamos descobrir que na tentativa de achar a área sob uma curva ou distância percorrida por um carro, vamos acabar tendo o mesmo tipo especial de limite.

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f nos extremos direitos ~~no~~ dos subintervalos. Então a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O pensamos intuitivamente como sendo a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos que é

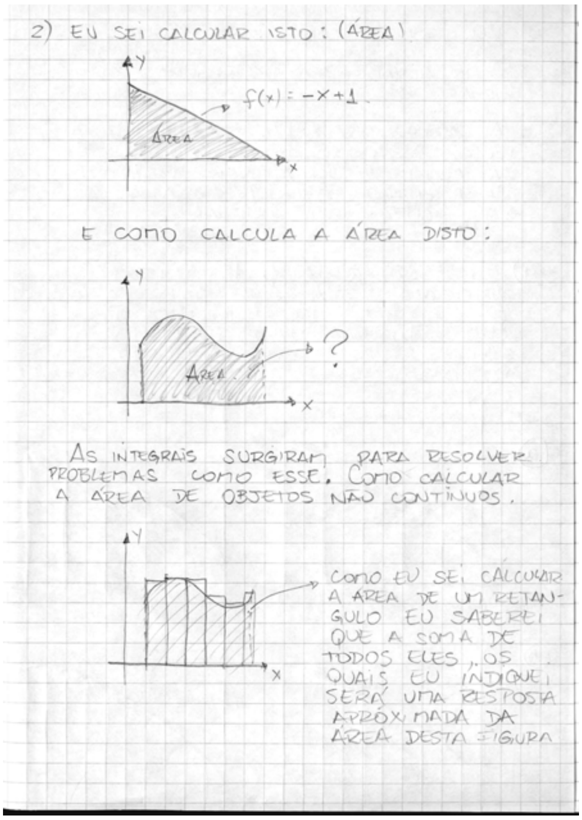
$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots f(x_n)\Delta x$$



Três alunos (um do segundo semestre e dois do quinto semestre) enfatizaram o registro gráfico incluindo em menor proporção o registro algébrico para tentar fazer o esquema solicitado. Em suas produções revelam claramente que não entenderam o texto lido, e um deles inclusive efetuando erros como colocar as variáveis x_i no gráfico da função f. Em entrevista posterior, perguntamos ao aluno por que ele fez isso, ele respondeu que não gostava de fazer esse tipo de tarefa, pois não tinha o hábito de ler textos matemáticos, apenas os exemplos e exercícios resolvidos, e que também não percebera que tinha errado. Apresentamos abaixo a produção deste ultimo aluno.



A última produção, de um aluno do 5º semestre, expressou um diálogo com ele mesmo, utilizando o registro gráfico e o da língua natural para realizar a tarefa. Esta produção está num formato diferente dos demais. Todo seu esquema foi dialogado, o aluno conversando com o texto, para formar suas próprias imagens mentais e organizar seu raciocínio. Isto está de acordo com Romanatto (2003), que afirma: [...] *a leitura torna indispensável um esforço para compreender, o que é altamente disciplinador e educativo, [...] leva também ao desenvolvimento da criatividade.*



Constatamos, então, que ler um texto matemático é uma situação à qual os alunos não estão habituados, e fazer um esquema da leitura feita é uma situação que é nova e gera muitas estratégias distintas para que a tarefa fosse cumprida.

Terceira tarefa: Como o autor começa o estudo do tema Integral?

Nesta tarefa, queremos observar se o aluno, embora tenha sido solicitado localizar o tema Integral, percebeu que o capítulo não começa exatamente com Integral e se ele conhece a razão.

Nove alunos perceberam que o capitulo de Integral começa com a noção de medidas, e eles usaram o registro da língua natural expressar tal fato.

3) ELE COMEÇA COM UM PROBLEMA:

COMO ACHAR ÁREA DE FIGURAS COM CURVAS?

A PARTIR DISSO ELE DESENVOLVE A IDEIA PARTINDO DO PONTO QUE JÁ CONHECEMOS ÁREA DE POLÍGONOS, PARA ENTÃO DESENVOLVER A ÁREA DAS FIGURAS COM CURVAS.

Quarta tarefa: Suponha que você seja solicitado para resolver algum dos exercícios da página 376, qual você escolheria? Justifique

Nesta tarefa, queremos investigar como o aluno aborda os exercícios, se ele começa resolvendo os mais fáceis, se escolhe os que são similares aos exercícios resolvidos ou exemplos dados.

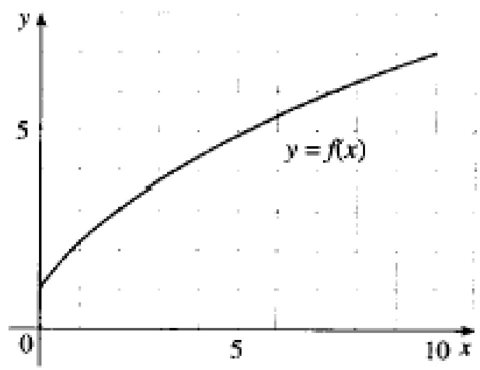
Todos os alunos escolheram o exercício nº 1, cujo enunciado reproduzimos a seguir.

neste capítulo, tenha em mente

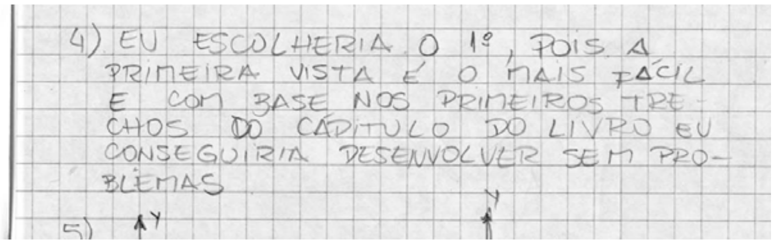
[redacted]1 Exercícios

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, use cinco retângulos para encontrar estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 10$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.

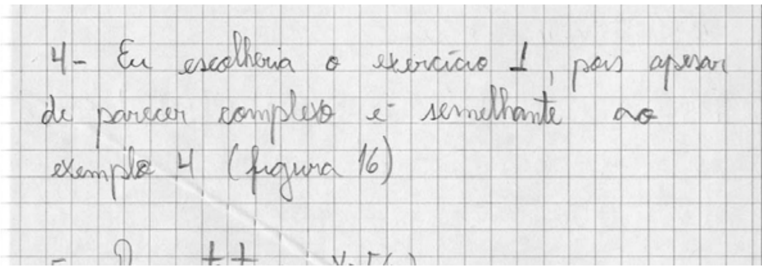
(b) Ache novas estimativas usando dez retângulos em cada caso.



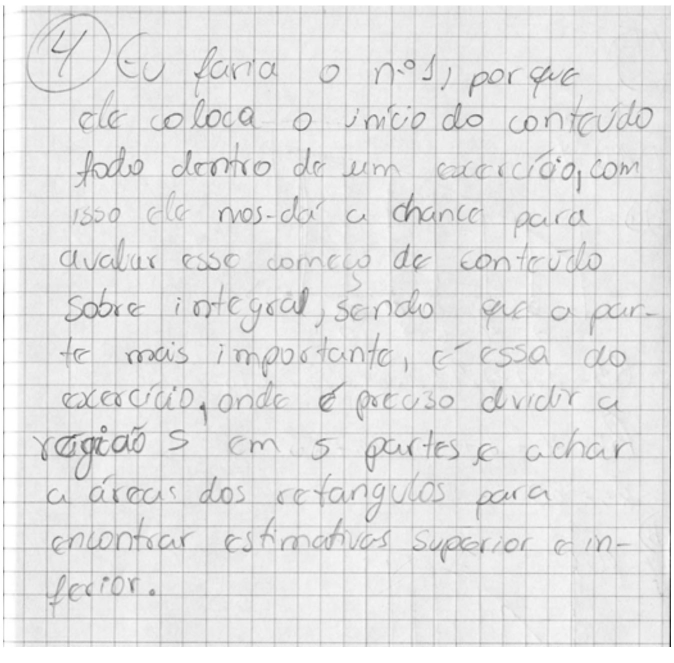
Seis deles (três do segundo semestre e três do quinto semestre) consideraram o exercício nº 1, o mais fácil. Por exemplo,


4) EU ESCOLHERIA O 1º, POIS A
PRIMEIRA VISTA É O MAIS FÁCIL
E COM BASE NOS PRIMEIROS TRE-
CHOS DO CAPÍTULO DO LIVRO EU
CONSEGUIRIA DESENVOLVER SEM PRO-
BLEMAS
5)

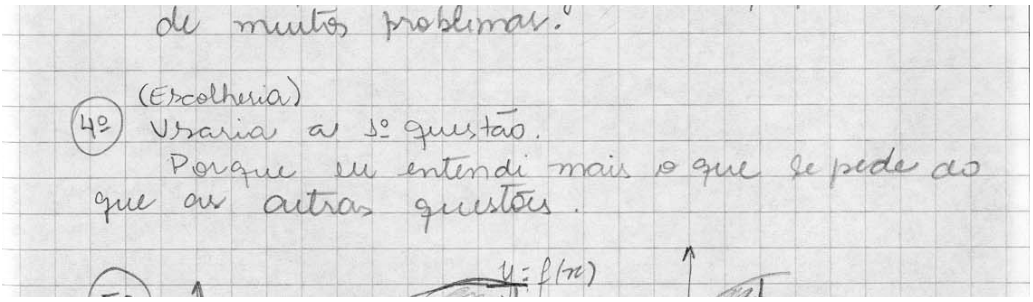
Sete dos alunos (cinco são do segundo semestre e um do quinto semestre) justifcaram porque tem semelhança com o exemplo do tópico estudado.


4- Eu escolheria o exercício 1, pois apesar
de parecer complexo é semelhante ao
exemplo 4 (figura 16)

Outro aluno deste grupo justificou a escolha da seguinte maneira como se vê abaixo.


4) Eu faria o nº1, porque
ele coloca o início do conteúdo
todo dentro de um exercício, com
isso ele nos-dá a chance para
avaliar esse começo de conteúdo
sobre integral, sendo que a par-
te mais importante, é essa do
exercício, onde é preciso dividir a
região S em 5 partes e achar
a áreas dos retangulos para
encontrar estimativas superior e in-
ferior.

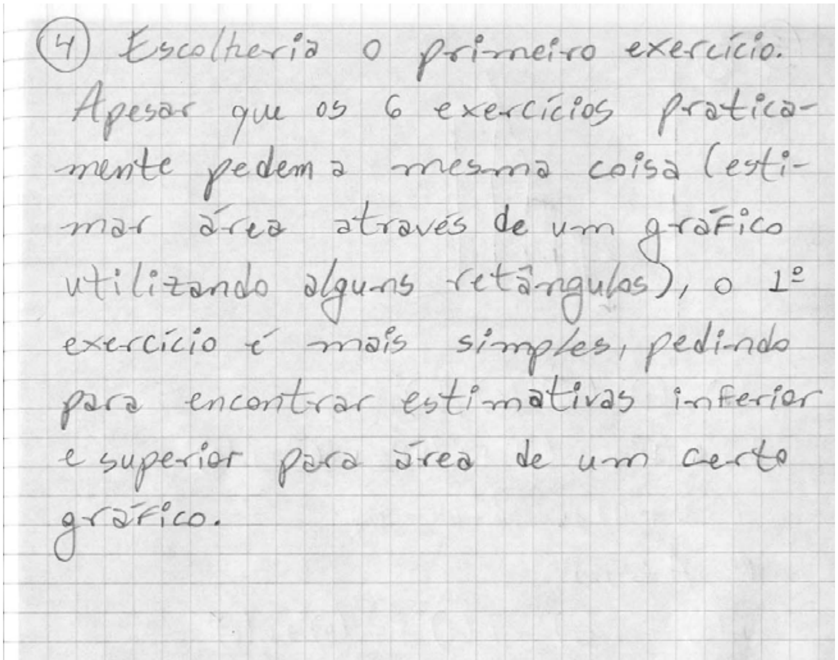
Apenas um aluno (do 5º semestre) justificou porque é a questão cujo enunciado que melhor entendeu.



de muitos problemas."

(Escolheria)
4º Usaria a 1º questão.
Porque eu entendi mais o que se pede do que as outras questões.

Um aluno do 5º semestre explicita enfaticamente a influência da leitura do texto apresentado na escolha do exercício escolhido pra resolver.



4) Escolheria o primeiro exercício.
Apesar que os 6 exercícios praticamente pedem a mesma coisa (estimar área através de um gráfico utilizando alguns retângulos), o 1º exercício é mais simples, pedindo para encontrar estimativas inferior e superior para área de um certo gráfico.

A maneira dos alunos, uns com mais, outros com menos destaque, ressaltaram nas suas justificativas, o trabalho que haviam realizado na utilização do texto do livro. Uns referiram-se a tópicos no registro da língua natural, outro no registro gráfico.

Quinta tarefa: Agora, você poderia resolver o exercício escolhido?

Nesta tarefa, estamos interessados em conhecer as estratégias que os alunos utilizam para resolver os exercícios.

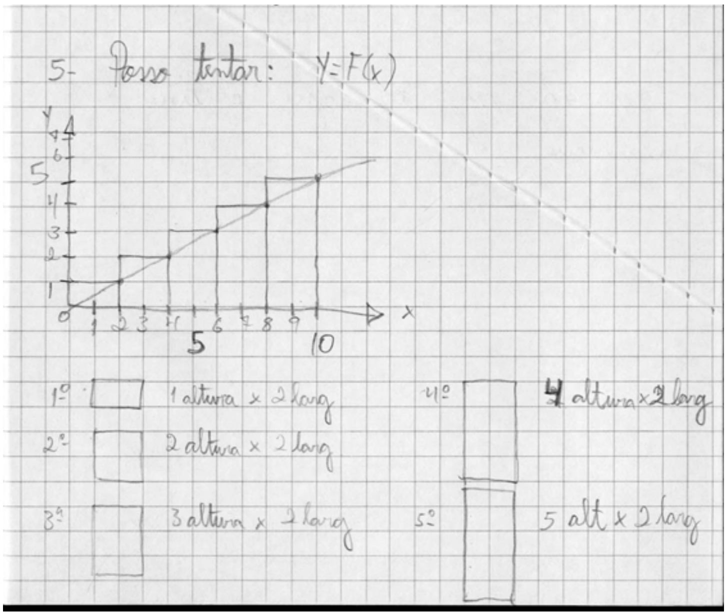
Para resolver o exercício escolhido, o aluno precisa saber determinar as áreas de cinco retângulos, cujas bases justapostas completam o intervalo [*a, b*] e cuja altura (y) é o valor da função (cujo gráfico é fornecido), calculado ora no extremo inferior, ora no extremos superior da base.

Nesta tarefa, doze alunos tentaram resolver o exercício escolhido (seis do segundo semestre e seis do quinto semestre) e dois entregaram em branco, desistiram de resolver. Numa entrevista feita posteriormente, um desses alunos declarou que entendeu o enunciado do exercício, porém não conseguiu construir os retângulos solicitados, o cálculo do valor de suas alturas foi a grande fonte de dificuldades para a resolução exercício.

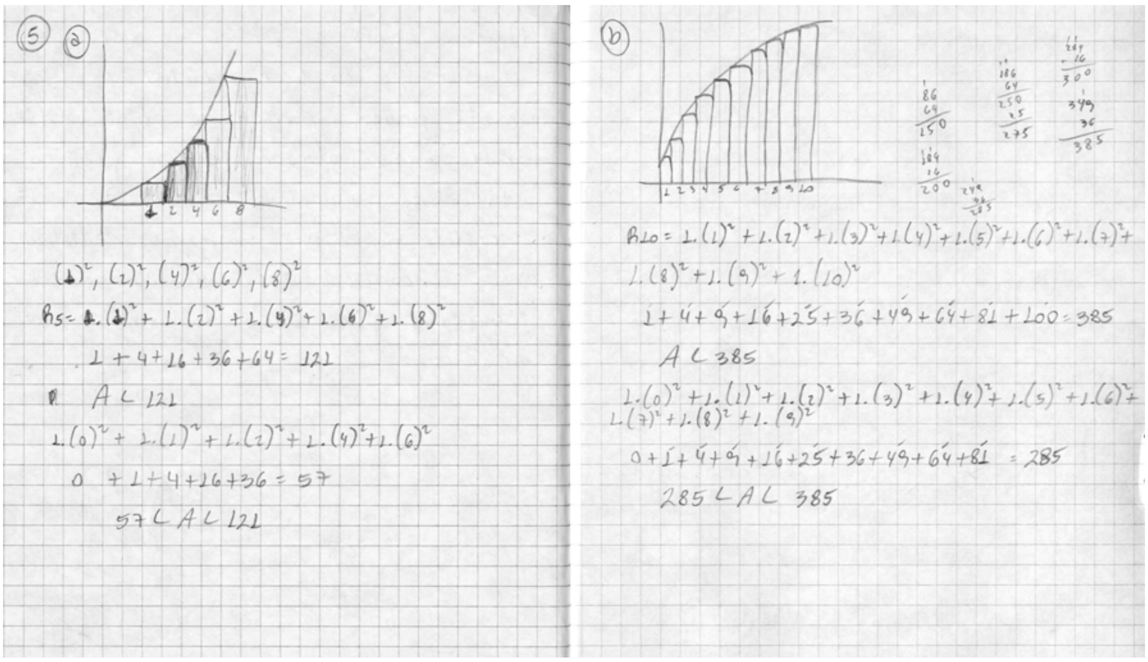
Dez deles (cinco do 2º semestre e cinco do quinto semestre) utilizaram o registro gráfico, numérico, sendo que dois deles também utilizaram o registro da língua natural.

Embora a maioria dos alunos conseguiu construir os retângulos, alguns construíram apenas retângulos superiores, apresentando apenas a estimativa superior solicitada, como o protocolo a seguir.

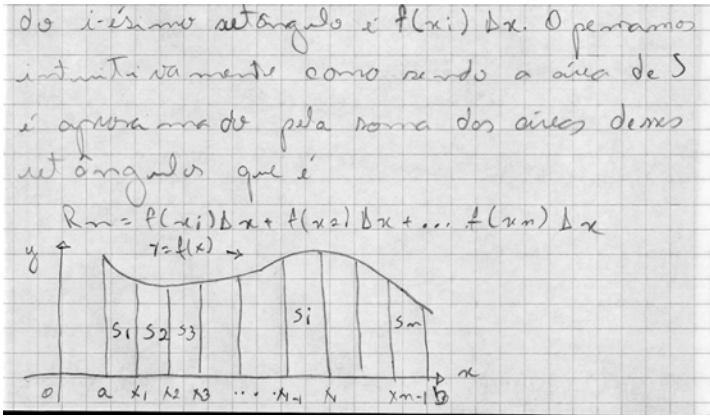
Esse aluno, em sua resolução, utilizou os registros gráfico, numérico, língua natural, além de ilustração de figuras geométricas.



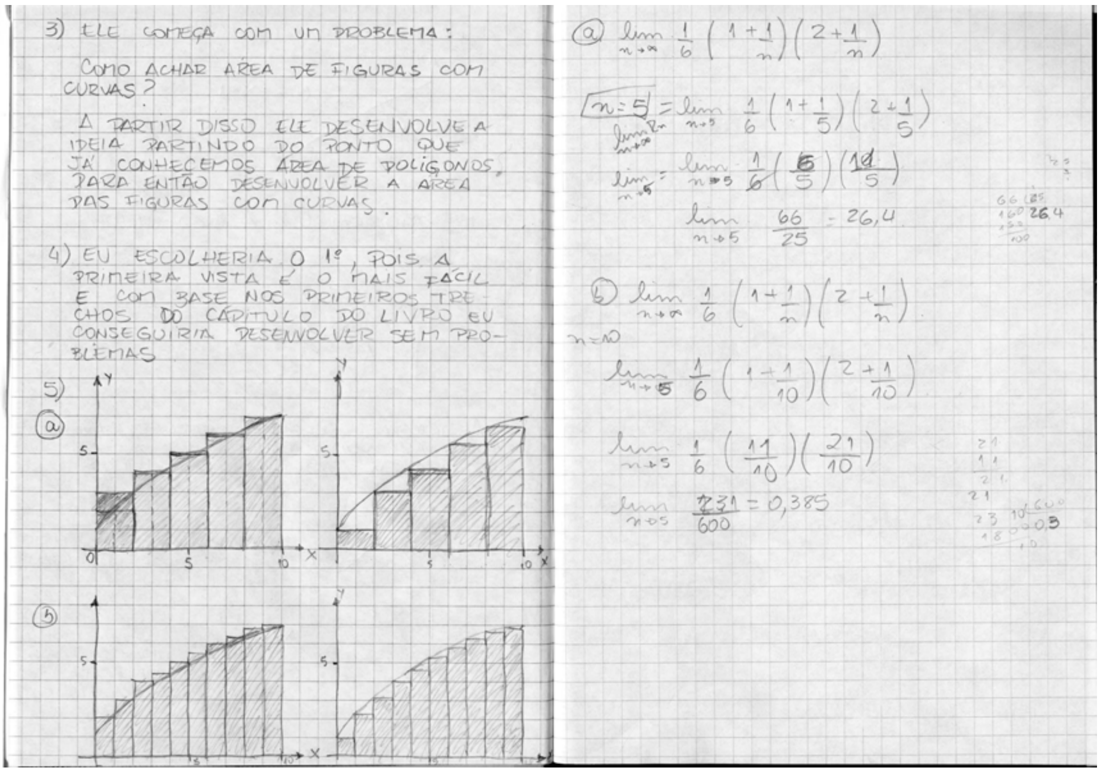
Outro aluno construiu apenas retângulos inferiores, não em numero de cinco, porém 10. A seguir, apresentamos a reprodução deste protocolo.



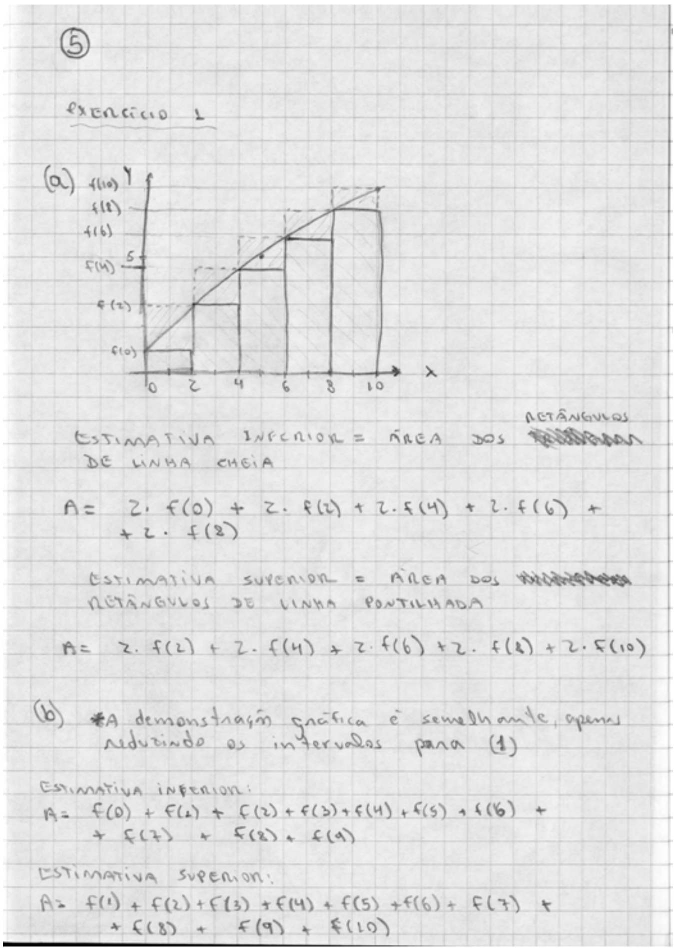
Alguns estudantes construíram figuras que não são retângulos, como o protocolo abaixo.



A produção abaixo indica que o estudante percebeu perfeitamente o que o exercício pedia, apresentando uma resolução correta no registro gráfico tanto para o item a quanto para o item b do enunciado, porém no calculo numérico, não atentou para o fato que se pedia era uma estimativa e passou a fazer cálculos de limites. Isto talvez seja decorrência da idéia de que todo problema de matemática deve ter uma única e exata solução numérica.



Entretanto, dois alunos conseguiram resolver completamente o exercício, demonstrando ter entendido como é determinada a altura do retângulo. Reproduzimos abaixo o protocolo.



5

EXERCÍCIO 1

(a)

ESTIMATIVA INFERIOR = ÁREA DOS ~~RETÂNGULOS~~ RETÂNGULOS DE LINHA CHEIA

$A = 2 \cdot f(0) + 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(4) + 2 \cdot f(6) + 2 \cdot f(8)$

ESTIMATIVA SUPERIOR = ÁREA DOS ~~RETÂNGULOS~~ RETÂNGULOS DE LINHA PONTILHADA

$A = 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(4) + 2 \cdot f(6) + 2 \cdot f(8) + 2 \cdot f(10)$

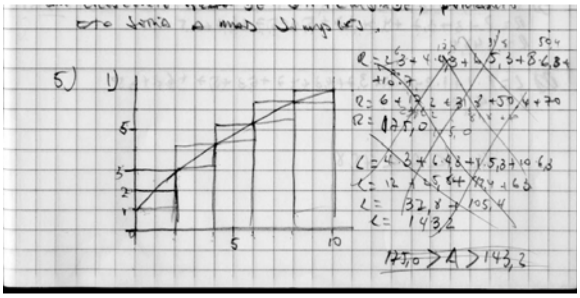
(b) *A demonstração gráfica é semelhante, apenas reduzindo os intervalos para (1)

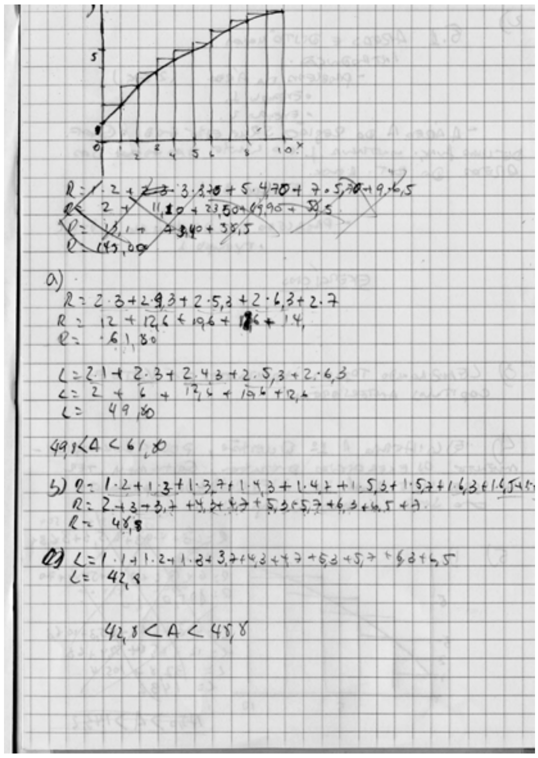
ESTIMATIVA INFERIOR:

$A = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9)$

ESTIMATIVA SUPERIOR:

$A = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$





Observamos que os alunos estavam impedidos de apagar qualquer tentativa de solução, porque não havia borracha para isso. Assim sendo, este aluno anulou os cálculos, que julgou errados, refazendo-os em seguida.

Pudemos constatar que com apenas uma leitura do texto, pode fornecer aos alunos os primeiros subsídios para a compreensão das idéias envolvidas no conceito de Integral. Claro está, que para alguns alunos ainda seria necessário um aprofundamento, que ficou evidenciado em dificuldades apresentadas na resolução do exercício.

Ao final de uma sessão, quando um aluno nos acompanhou até o carro para levar o material utilizado, ele comentou: “Depois desta experiência, acho que os professores de Matemática deveriam ensinar utilizando livros didático, seria mais completo e mais estimulante aprender desse modo”.

Capítulo V

Conclusão e Considerações Finais

Esta pesquisa tem por meta investigar como os alunos utilizam o livro didático e como eles mobilizam os registros de representação contidas em um texto sobre a noção de Integral. Partimos dos resultados do trabalho de Silva (2004), sobre as representações semióticas nos livros didáticos, e outras pesquisas em Educação Matemática que tratam das dificuldades dos alunos relacionadas com a disciplina de Cálculo.

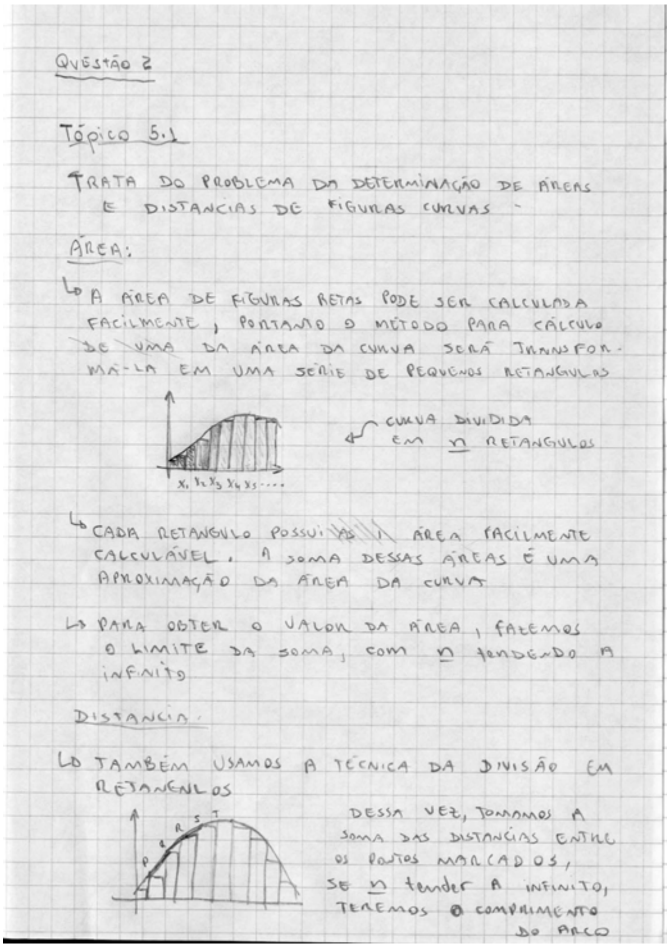
O trabalho foi evoluindo, primeiramente, quanto à fundamentação teórica que embasasse nossa investigação. Julgamos adequada para nossa investigação, a teoria “Registros de Representação Semiótica”, de Duval, que Silva já utilizara no seu trabalho. Esta teoria forneceu, então, uma base em que nós pudemos nos apoiar para a próxima etapa, a elaboração do experimento propriamente dito.

O aporte necessário para o desenvolvimento desta etapa, está apoiado num trabalho do Grupo Math-Français de l’IREM de Strasbourg, sob direção de Duval, sobre as dificuldades de abordagem de textos não narrativos, dificuldades estas ligadas à abstração das noções envolvidas e a produção de textos argumentativos ou demonstrativos. Compusemos, então, o roteiro de tarefas.

Percebemos, durante a realização das tarefas, que os alunos ficaram entusiasmados com a possibilidade de aprender Matemática, utilizando o livro didático, diferentemente da forma que tem sido ensinado-lhes. Isto nos surpreendeu, pois, a nossa perspectiva era que os alunos não gostassem de estudar utilizando livro, mas, sim recorrendo às anotações de aula, que muitos verbalizaram ser a maneira mais fácil. Além disso, o entusiasmo de muitos deles foi relevante, para mais uma vez, sinalizar que esta pesquisa tem razão de ser.

A sugestão dos professores, componentes da banca examinadora, sobre a oportunidade de a pesquisa conter um estudo sobre o objeto matemático, deu origem ao capítulo sobre a evolução do conceito de Integral. Esta contribuição dos professores foi de grande importância, pois já estudáramos o conceito no curso de graduação e retomamos discussões sobre ele no grupo de mestrado, porém as idéias estavam dispersas. Assim sendo, quando esboçamos um relato sobre a evolução do conceito, isso nos possibilitou perceber que nesta tarefa, utilizamos variados registros de representação e a conversão de registros foi fundamental par a elaboração desse esboço.

Quanto à pergunta da investigação, destacamos que a maioria dos alunos se mostra interessada diante de uma nova possibilidade de iniciar o estudo de um conceito, diferentemente da aula expositiva introdutória de um assunto. Dentre as manifestações dos alunos nesse sentido, destacamos a frase de um estudante: "*Gostei de saber que os conceitos que eu estudo tem aplicação na vida prática*". Quanto à compreensão de texto, percebemos, pela forma que o esquema solicitado foi apresentado, os alunos fazem uma segmentação do mesmo, destacando e pontuando tópicos. Em cada um dos tópicos pontuados, a maioria dos estudantes expressou a sua compreensão sobre o conceito estudado, recorrendo a marcantemente pelos menos dois registros, um visual (gráfico) e outro discursivo. Grande parte deles utilizou também outros registros como numérico, algébrico, além de símbolos matemáticos que figuravam no texto. Segue um exemplo de um esquema.


QUESTÃO 2

TÓPICO 5.1

TRATA DO PROBLEMA DA DETERMINAÇÃO DE ÁREAS E DISTANCIAS DE FIGURAS CURVAS -

ÁREA:

A ÁREA DE FIGURAS RETAS PODE SER CALCULADA FACILMENTE, PORTANTO O MÉTODO PARA CÁLCULO ~~DE UMA~~ DA ÁREA DA CURVA SERÁ TRANSFORMÁ-LA EM UMA SÉRIE DE PEQUENOS RETANGULOS

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 ....

CURVA DIVIDIDA EM n RETANGULOS

CADA RETANGULO POSSUI ~~AS~~ ÁREA FACILMENTE CALCULÁVEL. A SOMA DESSAS ÁREAS É UMA APROXIMAÇÃO DA ÁREA DA CURVA

PARA OBTER O VALOR DA ÁREA, FAZEMOS O LIMITE DA SOMA, COM n TENDENDO A INFINITO

DISTANCIA:

TAMBÉM USAMOS A TÉCNICA DA DIVISÃO EM RETANGULOS

P Q R S T

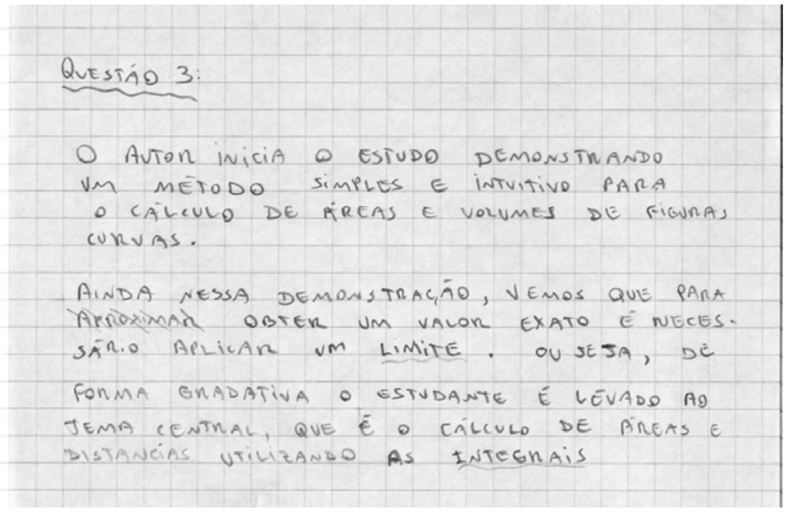
DESSA VEZ, TOMAMOS A SOMA DAS DISTANCIAS ENTRE OS PONTOS MARCADOS, SE n tender A INFINITO, TEREMOS O COMPRIMENTO DO ARCO

Em entrevista com os estudantes do 2º semestre, realizada no final desta tarefa, eles verbalizaram que foi a primeira vez que se depararam com uma tarefa, que propunha a leitura de texto de matemática, cujo conteúdo desconheciam, elaborando posteriormente, um esquema sobre o conteúdo envolvido na leitura.

Percebemos que as estratégias para a elaboração de tal esquema foram variadas, sendo que alguns alunos privilegiaram o registro na língua natural, outro o gráfico e sendo que muitos deles utilizaram simultaneamente três ou quatro registros. Isto se deve ao fato de o autor do livro também utilizar vários registros de representação no texto trabalhado.

A escolha dos registros de representação semiótica de Duval mostrou-se apropriada como ferramenta de análise das produções dos alunos, mesmo porque no livro escolhido, a variação de registros de representação é fartamente utilizada.

A escolha do livro também propiciou a motivação dos alunos no engajamento da atividade como aponta a produção abaixo.



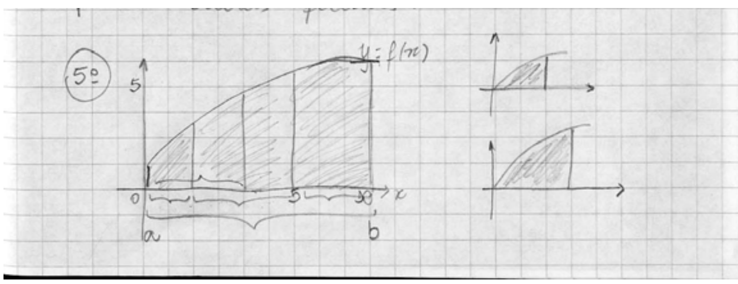
QUESTÃO 3:

O AUTOR INICIA O ESTUDO DEMONSTRANDO UM MÉTODO SIMPLES E INTUITIVO PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES DE FIGURAS CURVAS.

AINDA NESSA DEMONSTRAÇÃO, VEMOS QUE PARA ~~APROXIMAR~~ OBTER UM VALOR EXATO É NECESSÁRIO APLICAR UM LIMITE. OU SEJA, DE FORMA GRADATIVA O ESTUDANTE É LEVADO AO TEMA CENTRAL, QUE É O CÁLCULO DE ÁREAS E DISTÂNCIAS UTILIZANDO AS INTEGRAIS

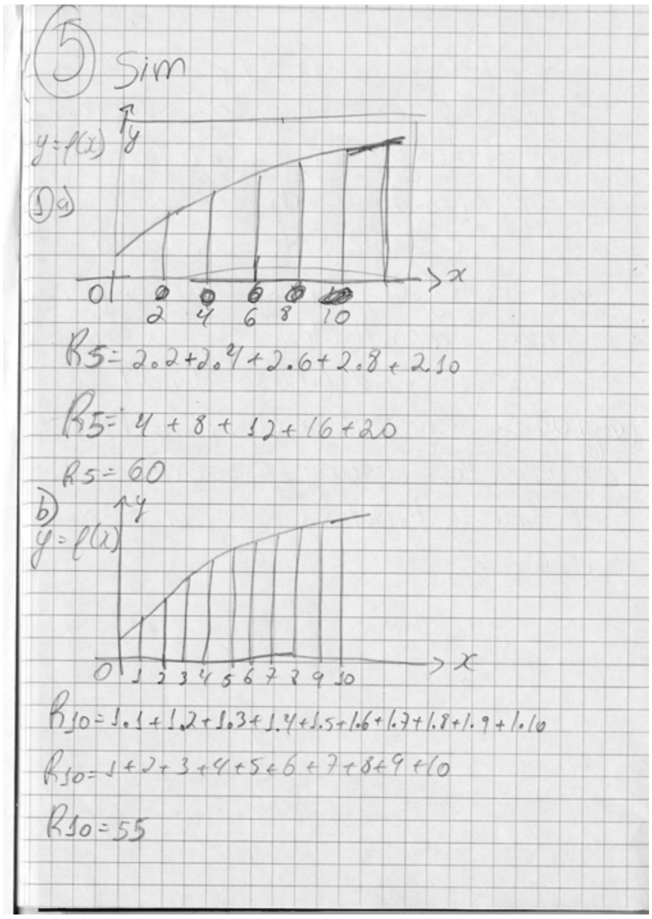
Destacamos também que para a resolução de exercício, os alunos recorreram a algum exemplo ou exercício resolvidos e, além disso, utilizaram vários registros disponíveis para tal finalidade.

Detectamos uma dificuldade apresentada por aproximadamente metade dos alunos, referente ao significado de função, revelado no momento da construção de retângulo cuja altura era dada pelo valor da função em um ponto. Tal dificuldade se revelou logo na segunda tarefa, em que alguns desses alunos apresentaram construção de figuras que não são retângulos, pois a “base superior” é curvilínea.



Na resolução do exercício nº 1 escolhido por eles, em que deveriam determinar as áreas de cinco retângulos, cujas bases justapostas completam o intervalo [*a, b*] e cuja altura (*y*) é o valor da função cujo gráfico é fornecido, calculado ora no extremo inferior, ora no extremo superior da base, muitos desistiram da tarefa e outros deixaram a resolução incompleta. Eles não conseguiram perceber que cada retângulo deveria tocar o gráfico dado, visto que sua altura é dada pelo valor da função num ponto determinado.

A nosso ver, isto é conseqüência do não entendimento, por parte dos estudantes, de que o gráfico de uma função é o conjunto dos pontos (*x*, *f(x)*), cuja simbologia muitas é até expressa, porém, sem nenhuma vinculação coma representação dos pontos componentes do gráfico, no plano cartesiano.



Os esquemas elaborados pelos alunos, assim como as produções referentes a resolução de exercícios fornecem indicações que a maioria deles perceberam pelos menos os rudimentos do conceito que está sendo tratado no livro. Evidentemente, com uma só leitura nem sempre é possível para um aluno adquirir totalmente o conhecimento relativo ao objeto matemático, porém, este inicio mostrou-se um eficaz ponto de partida para o aprofundamento da noção. Principalmente, na resolução do exercício, ficou evidenciado que os alunos voltavam para os exemplos tratados e/ou exercícios resolvidos no texto, para buscar subsídios para a execução da tarefa. Nessa busca, também pode se constatar que os estudantes procuram relacionar os conceitos trabalhados com os variados registros utilizados.

Com a questão “Os alunos apresentam algum interesse pelo livro didático”, pretendíamos observar como seria o primeiro contato deles com o livro. Isto é, queríamos saber se os alunos se restringiam sua atenção apenas ao tópico indicado, se procuravam diretamente o tema, folheando o livro, se iriam no início do capitulo 5, cujo cabeçalho “Integrais”; se iniciariam pelo capítulo introdutório denominado “Áreas e distâncias”; se tentavam iniciar já pelo 2º tópico denominado “A Integral Definida”. Pretendíamos ainda investigar se algum aluno mostrava interesse em conhecer o livro em sua totalidade, além do tópico mencionado na tarefa. Observamos dois alunos tentaram localizar o tópico indicado ao acaso, folheando o livro, mas em seguida recorreram ao índice. Todos os demais localizaram o capítulo referente à Integral, imediatamente ao abrir o livro, leram seu prefácio, viram a pagina em que estão elencados os capítulos e em seguida, localizaram o tema no sumário.

Na fundamentação teórica, foi destacado que um fator importante na interpretação de textos é a distancia entre a base de conhecimento do leitor e o conteúdo cognitivo. Pretendíamos investigar que diferenças apresentam na resolução das questões das tarefas, um aluno do 2º semestre, que nunca estudou Integral e um aluno do 5º semestre, que já teve contato com o conceito. A análise dos protocolos revelou que não houve diferenças perceptíveis entre as produções de um e de outro grupo.

Embora uma única leitura não seja suficiente para que os estudantes apreendam todos os conceitos periféricos que envolvem o tema central tratado, pudemos constatar que o objetivo proposto foi alcançado, uma vez que, a totalidade dos alunos se direcionou exatamente para o conteúdo indicado, trabalharam com seriedade e afinco, no desenrolar das tarefas e ao se proporem a resolver um exercício, efetuaram um movimento de ida e volta ao texto, utilizando variados registros de representação, o que mostra que tanto a fundamentação teórica, quanto o livro escolhido mostraram-se eficazes para a investigação.

Vários dos estudantes, que trabalharam nesta investigação, manifestaram-se afirmando que seria interessante uma prática, que partisse da leitura preliminar do livro texto, com a possibilidade de consultas ao professor sobre dificuldades apresentadas na leitura e posteriores discussões sobre os conteúdos propriamente tratados. Com base no trabalho realizado e nas produções dos estudantes, deixamos como possibilidade de continuação de pesquisa, a indagação: Como a leitura do livro texto pode contribuir para o desenvolvimento cognitivo do aluno de um curso de Cálculo Diferencial e Integral?

Referências Bibliográficas

APOSTOL, T. M., “*CÁLCULO*”. Volume 1. Rio de Janeiro: Editora Reverté Ltda, 1994.

ÁVILA, G., “*Introdução à Análise Matemática*”. 2ª Edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.

_________, “*Análise matemática para licenciatura*”. 2ª edição. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2005.

_________, “Arquimedes, o rigor e o método”. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, nº 32, p. 39-48, junho de 2002.

_________, “*O Provão e o Ensino da Matemática*”. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, nº 4, p. 27-45, junho de 2002.

_________, “*O Ensino do Cálculo e da Análise*”. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, nº 33, 83-95, dezembro de 2002.

BARUFI, M. C. B., “*O cálculo no Curso de Licenciatura em Matemática*”. EDUCAÇÃO MATEMATICA EM REVISTA, São Paulo, p. 69 – 72. nº 9 – Edição Especial – março de 2002.

________________, “*A construção/negociação de significados do curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*”. Tese de Doutorado. USP, 1999.

CAMACHO, M.; RIVERO, R. D., "*Using Derive to understand the Concept of Definite Integral*". International Journal for Mathematics Teaching and Learning, December, 5th, 2003, pp. 1-16

CANDIDO, C. C. et al. "*Dificuldades no ensino/aprendizagem de Cálculo*". (2004). Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupo_trabalho/gdt04-Claudia&Maria&Martha.doc.

COURANT, R; ROBBINS, H., *O QUE É MATEMÁTICA? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

DUVAL, R. (1991). "*Interaction des Niveaux de Représentation Dans la Compréhension des Textes*". Annales de Didatique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg. p. 163-196.

___________ (1995). "*La Compréhension de Texte*" in Sémiosis et pensée humaine. Berna: Peter Lang, p. 323-372.

____________(1999). "*Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking*. Basic Issues for learning". *Proceedings XXI Psychology of Mathematics Education,* nº 1. México: Eric, p. 2-26.

___________ (2003). "*Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*". In: Alcântara Machado, S. D. (Ed.) Aprendizagem Matemática: Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, p. 11-34.

EVES, H. "*Introdução à História da Matemática*". Tradução: Hygino H. Domingues. 3ª Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

GOLDIN, G. A. *A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research*. In Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc., Publishers. p. 517-545, 2000.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.; CAMACHO, M., "*The Improper Integral, an Exploratory Study with First-Year University Students*". Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics. Creta, 2002.

KREMER, D. et al (2000). "*Un Travail Interdisciplinaire en Français et en Mathématiques*". REPERES – IREM nº 38. Strasbourg. p. 107-127. 2000.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

LIMA, E. L., "Curso de Análise". Vol. 1. 11.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

MALTA, I., "*Linguagem, Leitura e Matemática*". Mat, 08/2003. Pontifícia Universidade Católica – PUC – Rio. Rio de Janeiro. 11, p. 2003. Nacional.

MELO, J. M. R., *Conceito de Integral: Uma Proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem*. São Paulo. 2002. Dissertação de Mestrado. PUC-SP.

OLIVEIRA, A. H., *A Noção de Integral no Contexto das Concepções Operacional e Estrutural*. São Paulo. 2004. Dissertação de Mestrado. PUC-SP.

PALARO, L. A., *A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue*. São Paulo. 2006. Tese de Doutorado. PUC-SP.

ROMANATTO, M. "*O Livro Didático: alcance e limites*". São Paulo. 2004. Disponível em http://www.sbempaulista.org.br/epem/anai/mesas_redondasmr19-Mauro.doc. Acesso em: 01/06/2005.

SILVA, C. A., A *Noção de Integral em Livros Didáticos e os Registros de Representação Semiótica*. São Paulo. 2004. Dissertação de Mestrado. PUC-SP.

STEWART, J. *Cálculo, volume 1*. 4ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2002.

TALL, D.; RASSLAN, S., "*Definitions and Images for the Definite Integral Concept*". Disponível em http: www.warwick.ac.uk/staff/david.tall/downloads.html.