

MÁRCIA YOLANDA ROSALVES

**RELAÇÕES ENTRE OS PÓLOS DO *VISTO* E DO *SABIDO* NO
CABRI 3D: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO
ENSINO MÉDIO**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

MÁRCIA YOLANDA ROSALVES

**RELAÇÕES ENTRE OS PÓLOS DO *VISTO* E DO *SABIDO* NO
CABRI 3D: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO
ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática**, sob a orientação da **Profa. Dra. Ana Paula Jahn**.

**PUC/SP
São Paulo
2006**

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos ou científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

ASSINATURA: _____ LOCAL E DATA: _____

DEDICATÓRIA

A meus pais, Marlene e Nilson Rosalves

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Ana Paula Jahn, pela orientação, dedicação, incentivo e, principalmente, pelo apoio em todos os momentos desta pesquisa.

À Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado pelas valiosas críticas e sugestões na banca de qualificação.

À Profa. Dra. Lulu Healy, pela análise detalhada do trabalho na fase de qualificação, pelas sugestões apresentadas e pelo apoio em muitos e distintos momentos desta pesquisa.

A todos os professores e participantes do grupo de pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática – TecMem, pelo apoio e contribuições ao longo da pesquisa.

A todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC de São Paulo.

Aos colegas de mestrado, em especial, Mônica, Samuel, Ângelo, Cícera, Alessandro, Olga e Carlos.

Aos alunos que participaram desse estudo.

Aos meus pais, Marlene e Nilson Rosalves.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURA

LISTA DE QUADRO

RESUMO

ABSTRACT

APRESENTAÇÃO DO ESTUDO.....	1
CAPÍTULO 1 - QUESTÕES ENVOLVIDAS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL.....	3
1.1 Algumas Pesquisas relacionadas ao Ensino e Aprendizagem da Geometria Espacial.....	3
1.2 Problemas de Representação Plana de Figuras Espaciais.....	3
1.2.1 Posição da Base quanto às Extremidades da Folha.....	6
1.2.2 Forma da Base.....	7
1.2.3 Posição do Vértice da Pirâmide.....	8
1.3 O “Visto” e o “Sabido” na Evolução dos Desenhos de Pirâmides.....	9
1.4 Relações entre Representação Plana e Objeto Geométrico.....	14
1.5 Problemática do Desenho.....	15
1.6 Objetivos do Nosso Estudo.....	18
CAPÍTULO 2 – METODOLOGIA DE ESTUDO.....	19
2.1 <i>Design Experiment</i>	19
2.1.1 Características de um <i>Design Experiment</i>	20
2.2 Os Participantes da Pesquisa.....	22
2.2.1 O Papel do Observador em um <i>Design Experiment</i>	22
2.2.2 O Papel do Professor.....	23
2.2.3 Os Sujeitos.....	23
2.3 O Experimento.....	23
2.3.1 Familiarização ao <i>Cabri-géomètre II</i>	24
2.4 Atividades realizadas no Ambiente Papel e Lápis.....	25
2.4.1 Exercícios 1 e 5.....	25
2.4.2 Exercício 2.....	28
2.4.3 Exercício 3.....	30
2.4.4 Exercício 4.....	31
2.4.5 Exercício 6.....	32

2.4.6 Exercício 7.....	34
2.5 Considerações sobre os Resultados Obtidos.....	37
CAPÍTULO 3 - PROPOSTA INICIAL DO <i>DESIGN</i> PARA O <i>CABRI 3D</i>	39
3.1. Descrição das Atividades.....	39
3.2 Apresentação do Software <i>Cabri 3D</i>	40
3.3 Atividades de Familiarização ao <i>Cabri 3D</i>	43
3.3.1 Atividade 1.....	43
3.3.2 Atividade 2.....	47
3.3.3 Atividade 3.....	49
3.3.4 Atividade 4.....	50
3.3.5 Atividade 5.....	53
3.3.6 Atividade 6.....	56
3.3.7 Atividade 7.....	58
3.4 Atividades que envolvem uma Propriedade Geométrica.....	60
3.4.1 Atividades 8, 9 e 10.....	60
3.5 Atividade de aplicação de Propriedade Geométrica.....	62
3.5.1 Atividade 11.....	63
3.6 Coleta e Análise dos Dados.....	66
CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DAS INTERAÇÕES DO <i>CABRI 3D</i>	68
4.1 Atividade 1.....	68
4.2 Atividade 2.....	75
4.3 Atividade 3.....	78
4.4 Atividade 4.....	79
4.5 Atividade 5.....	82
4.6 Atividade 6.....	83
4.7 Atividade 7.....	84
4.8 Atividade 8.....	86
4.9 Atividade 9 e 10.....	87
4.10 Atividade 11.....	89
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	92
BIBLIOGRAFIA.....	95
ANEXOS.....	97
ANEXO 1.....	98
ANEXO 2.....	105

LISTA DE FIGURA

Figura 1.1: Representação de um quadrado e uma pirâmide de base quadrada.....	4
Figura 1.2: Um plano P e três pontos A , B e C	5
Figura 1.3: Visão frontal em perspectiva de uma pirâmide de base quadrada.....	8
Figura 1.4: Representação clássica da pirâmide de base quadrada.....	9
Figura 1.5: Organização das categorias em função do sabido.....	12
Figura 1.6: Procedimentos realizados a partir de uma face.....	13
Figura 2.1: Exemplo extraído de Cavalca (1998).....	29
Figura 2.2: Desenho priorizando a aresta.....	35
Figura 2.3: Desenho pertencente à categoria 8.....	36
Figura 2.4: Desenho pertencente à categoria 3.....	36
Figura 3.1: Ferramentas do <i>Cabri 3D</i>	40
Figura 3.2: Plano horizontal de referência.....	41
Figura 3.3: Pontos no plano.....	41
Figura 3.4: Pontos no plano horizontal em uma vista frontal.....	41
Figura 3.5: Criação de ponto no espaço.....	42
Figura 3.6: Paralelepípedos no plano horizontal.....	42
Figura 3.7: Tetraedro, Dodecaedro e menu de atributos.....	43
Figura 3.8: Pontos no plano horizontal de referência e fora dele.....	45
Figura 3.9: Retas.....	45
Figura 3.10: Plano definido por três pontos.....	46
Figura 3.11: Segmentos de reta numa vista frontal.....	48
Figura 3.12: Figura baseada nos pontos médios dos segmentos de reta.....	49
Figura 3.13: Cubo com duas faces paralelas pintadas.....	50
Figura 3.14: Tetraedro regular.....	51
Figura 3.15: Tetraedro regular e um triângulo equilátero	52
Figura 3.16 (a) e (b): Exploração da caixa-preta.....	52
Figura 3.17: Paralelepípedo ABCDEFGH definido por dois pontos E e F	54
Figura 3.18: Paralelepípedo ABCDEFGH cortado pelo plano MNP.....	55
Figura 3.19: Paralelepípedo ABCDEFGH “recortado” pelo plano MNP.....	55
Figura 3.20: Pirâmide de base quadrada.....	56
Figura 3.21: Base da pirâmide (vista inferior).....	57
Figura 3.22: Retas concorrentes no ponto O e o ponto P no espaço.....	59

Figura 3.23: Intersecção $\overleftrightarrow{OP}$ dos planos β e γ	59
Figura 3.24: Teorema fundamental do Perpendicularismo.....	61
Figura 3.25: Conseqüência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo.....	61
Figura 3.26: Segunda conseqüência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo.....	62
Figura 3.27: Pirâmide ABCDE da Atividade 11.....	64
Figura 3.28: Pirâmide ABCDE e reta $\overleftrightarrow{AC}$ (Atividade 11(a)).....	64
Figura 3.29: Vista frontal da pirâmide ABCDE.....	66
Figura 4.1: Criação de pontos (Dupla 2).....	69
Figura 4.2: Posições da reta p em relação ao plano (Dupla 1).....	70
Figura 4.3: Posições de retas (Dupla 2).....	71
Figura 4.4: Plano definido por três pontos (Dupla 2).....	71
Figura 4.5: Manipulação dos pontos que definiram o plano (Dupla 3).....	72
Figura 4.6: Plano definido por um ponto e uma reta (Dupla 1).....	72
Figura 4.7: Plano definido por reta e ponto (Dupla 3).....	73
Figura 4.8: Plano definido por reta e ponto (Dupla 3).....	73
Figura 4.9: Criação de plano (Dupla 3).....	74
Figura 4.10: Posições de segmentos de reta em relação ao plano (Dupla 1).....	76
Figura 4.11: Posições de segmentos de reta em relação ao plano (Dupla 3).....	77
Figura 4.12: Posições de segmentos de reta em relação ao plano (Dupla 2).....	77
Figura 4.13: Construção do triângulo a partir dos pontos médios dos segmentos de reta.....	78
Figura 4.14: Caixa Preta da atividade 4.....	80
Figura 4.15: Mensagem fornecida pelo software (Dupla 2).....	81
Figura 4.16: Construção do centro do triângulo equilátero (Dupla 3).....	81
Figura 4.17: Caixa Preta da atividade 6.....	83
Figura 4.18: Desenho realizado pela Dupla 2.....	85
Figura 4.19: Intersecção entre planos (Dupla 2).....	85
Figura 4.20: Arquivo da Atividade 8.....	86
Figura 4.21: Construção da Dupla A.....	88
Figura 4.22: Conseqüência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo (Dupla B).....	89
Figura 4.23: Construção da pirâmide (Atividade 11).....	90

LISTA DE QUADRO

Quadro 1.1: Resultado da atividade.....	5
Quadro 1.2: Propriedades geométricas da pirâmide conservadas no desenho.....	11
Quadro 1.3: Funções e domínios do desenho.....	17
Quadro 2.1: Distribuição dos sujeitos durante o experimento.....	24
Quadro 2.2: Exercícios 1 e 5.....	26
Quadro 2.3: Exercício 2.....	28
Quadro 2.4: Exercício 3.....	30
Quadro 2.5: Exercício 4.....	31
Quadro 2.6: Exercício 6.....	33
Quadro 2.7: Exercício 7.....	34
Quadro 2.8: Distribuição dos desenhos por categoria.....	35
Quadro 2.9: Distribuição dos desenhos quanto à forma da base.....	37
Quadro 3.1: Distribuição das atividades.....	39
Quadro 3.2: Atividade 1.....	44
Quadro 3.3: Atividade 2.....	47
Quadro 3.4: Atividade 3.....	49
Quadro 3.5: Atividade 4.....	51
Quadro 3.6: Atividade 5.....	53
Quadro 3.7: Atividade 6.....	56
Quadro 3.8: Atividade 7.....	58
Quadro 3.9: Atividade 8, 9 e 10.....	60
Quadro 3.10: Atividade 11.....	63

RESUMO

A presente pesquisa está inserida no contexto do ensino-aprendizagem da Geometria Espacial na Educação Básica, referindo-se, em particular, às relações entre os objetos geométricos e suas representações planas. Os trabalhos de Parzysz (1988; 1993) destacam as dificuldades dos alunos com a representação de objetos tridimensionais, no que se refere à sua elaboração (codificação) e interpretação (decodificação), bem como o conflito gerado pelos pólos do visto e sabido que são as bases do presente estudo. Os resultados apresentados nas pesquisas desse autor referem-se a experimentações no ambiente convencional de papel&lápis. Considerando as limitações desse ambiente e as dificuldades de identificação de relações espaciais dado seu caráter estático, optou-se por utilizar o ambiente de geometria dinâmica *Cabri 3D*. Assim, o estudo teve por objetivo investigar o papel das representações dinâmicas nesse software. Mais precisamente, pretendeu-se analisar as possibilidades de gestão dos pólos do visto e do sabido nas interações dos sujeitos com as ferramentas e representações do *Cabri 3D*. O desenvolvimento da pesquisa deu-se por meio de um estudo experimental fortemente inspirado na metodologia do *Design Experiment* na perspectiva de Steffe e Thompson (2000) e Cobb et al (2003), sendo realizado com alunos do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo. Os resultados mostraram que, em determinadas situações, as perdas de informações no *Cabri 3D* são menores que no ambiente papel&lápis. Existem também evidências de que tanto o aspecto dinâmico – com possibilidades de manipular e mudar o ponto de vista do objeto representado – como o de “tratamento”, enriquecimento da representação no uso das ferramentas de construção, auxiliam no processo de decodificação, ampliando a interpretação do desenho por parte dos alunos e levando-os a um melhor aproveitamento das interferências perceptivas.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Espacial; Cabri 3D; representações planas; pólos visto e sabido.

ABSTRACT

This research involves the teaching and learning of the geometry of space (three-dimensional geometry) in school mathematics. It considers, in particular, the relationships between geometrical objects and their representations in the plane. The works of Parzysz (1988; 1993), which served as the theoretical base for this study, point to the difficulties students that experience in interpreting representations of three-dimensional objects, in terms of construction (codification) and interpretation (decodification), as well as the conflict between the poles of seeing and knowing. The results presented by Parzysz concern experimentations carried out in the conventional paper-and-pencil environment. Considering the limitations of this environment and the difficulties associated with the identification of spatial relations given its static nature, the dynamic geometry environment of *Cabri 3D* was chosen as the context for this study. The aim was to investigate the role of the dynamic representation of this software in the study of space geometry. More precisely, the study seeks to analyse the possibilities related to the poles of seeing and knowing in the interactions of subjects with the tools and representations of *Cabri 3D*. The empirical part of the research involved the development of an experimental study strongly inspired by the methodology of Design Experiments, using the perspective of Steffe and Thompson (2000) and Cobb *et al.* (2003). High school students from a public-sector school in the city of São Paulo participated in this experiment. The results show that, in certain situation, the loss in information associated with Cabri 3D representation of spatial objects are less than in the paper-and-pencil environment. The evidence also suggested that both the dynamic aspect – with the potential to manipulate and change the point of view onto the object represented – and the “treatment” – the enriching of representations made possible by the use of the construction tools – aided in the process of decodification, amplifying the interpretation of the drawing on the part of the student and enabling a better use of perceptive inferences.

KEYWORDS: Geometry of Space; *Cabri 3D*; representations in the plane; poles of seeing and knowing.

APRESENTAÇÃO DO ESTUDO

A escolha do tema desta pesquisa deve-se, em grande parte, à nossa experiência profissional na Educação Básica e ao interesse pela tecnologia e o que ela pode proporcionar no ensino e na aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, em particular, da Geometria Espacial.

As dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria Espacial é uma questão conhecida. De fato, os alunos encontram muitas dificuldades na passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial. Embora, os alunos estejam habituados a figuras geométricas, como cubo, esfera, pirâmide, etc., é no Ensino Médio que o aluno trabalha de forma sistemática tais figuras. Para Carvalho et al. (1998), esta ampliação de horizontes nem sempre é fácil para os alunos, quando entram para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passam a enfrentar várias limitações. Em geral,

as relações entre as figuras geométricas fundamentais na Geometria Espacial são bem mais complexas do que na Geometria Plana. O estudo de paralelismo, por exemplo, que na Geometria Plana é reduzido ao paralelismo entre retas, no espaço se complexifica pelo fato de existirem, no espaço, retas que não são nem paralelas nem concorrentes e pelas relações de paralelismo envolvendo planos (CARVALHO, et al., 1998, p. 161).

Nossa problemática insere-se no contexto do ensino e da aprendizagem da Geometria Espacial, referindo-se, em particular, às dificuldades dos alunos do Ensino Médio nas relações entre os objetos geométricos e suas representações planas.

Assim, o estudo pretende investigar o papel das representações dinâmicas em ambiente informático do tipo DGS¹. Mais precisamente, em relação ao ambiente informático, optamos por utilizar o recém-lançado *Cabri 3D*, visando a analisar, como as representações nesse ambiente são codificadas e decodificadas pelos alunos e em que medida essas representações participam no desenvolvimento das habilidades de visualização e possibilitam a interpretação de propriedades geométricas de objetos espaciais.

¹ Da expressão em Inglês *Dynamic Geometry Systems* e traduzido por nós como Sistemas de Geometria Dinâmica.

Nosso trabalho está organizado em quatro capítulos, cujos conteúdos descrevemos brevemente a seguir.

No Capítulo 1, apresentamos os trabalhos nessa temática que servem de base para nossa pesquisa e que auxiliam na elaboração e realização das atividades de ensino, enfatizando os princípios do pólo do visto e do sabido.

No Capítulo 2, apresentamos a metodologia adotada – a do *Design Experiment*, na perspectiva de Steffe e Thompson (2000) e Cobb et al (2003); e um estudo experimental preliminar no ambiente papel e lápis.

O Capítulo 3, é composto das atividades a serem realizadas no *Cabri 3D* que será desenvolvido em duas fases. A primeira tem por objetivo a familiarização com o ambiente *Cabri 3D* e a segunda fase envolve atividades de exploração e construção, visando a introduzir uma propriedade da Geometria Espacial e propiciar aos sujeitos o levantamento de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas.

No Capítulo 4, apresentaremos a descrição dos dados, a análise das soluções e interações dos sujeitos de nosso estudo experimental. Na análise, pretendemos investigar a interação do sujeito com as representações e ferramentas do ambiente, qual o papel do software *Cabri 3D* na gestão dos pólos do visto e do sabido.

Por fim, apresentaremos nossas considerações finais sobre o estudo realizado, assim como a discussão dos resultados.

CAPÍTULO 1

QUESTÕES ENVOLVIDAS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL

1.1 Algumas Pesquisas relacionadas ao Ensino e Aprendizagem da Geometria Espacial

Neste trabalho, serão consideradas algumas pesquisas relacionadas à temática do ensino e aprendizagem de Geometria Espacial. Em particular, este estudo refere-se ao contexto francês: Parzysz (1988 e 1991), Parzysz e Colmez (1993), Chaachoua (1997) e ao contexto brasileiro: Cavalca (1998), que são as pesquisas que norteiam o presente trabalho.

1.2 Problemas de Representação Plana de Figuras Espaciais

Na representação de objetos espaciais no plano, necessariamente, há perda de informações. De fato, a passagem de um objeto geométrico espacial para um desenho em um suporte bidimensional que o representa, é feita por meio de projeções que não conservam todas as propriedades do objeto geométrico espacial. Os alunos acreditam ou têm a ilusão que podem, graças a um desenho suficientemente sofisticado e próximo do objeto, fazer uma representação sem ambigüidades (PARZYSZ, 1988, p. 79). Além disso, tendem a considerar as propriedades do desenho como aquelas do próprio objeto.

Parzysz (1991) relata que o ensino de Geometria Espacial em escolas secundárias francesas faz uso de representações gráficas de objetos, mas, normalmente, a única função desses desenhos é ilustrar. Em geral, são estereótipos e não têm (ou não adquirem) status matemático. Os desenhos contêm muitas convenções implícitas de diferentes tipos que podem favorecer o aparecimento de concepções errôneas sobre objetos geométricos, entre estudantes, caso essas convenções não sejam dominadas.

Para dar idéia das representações gráficas usadas na escola, o autor cita livros didáticos da escola secundária francesa que inspiram o que é feito em sala de aula e conclui que os desenhos em Geometria Espacial aparecem como “esboços melhorados”, em lugar do resultado da aplicação de propriedades geométricas. Observa também que os desenhos representando configurações clássicas (planos, prismas, pirâmides, esferas) são extremamente estereotipados, no sentido que, por exemplo, um plano sempre é representado por um paralelogramo.

Parzysz (1988) apresenta a relação entre objeto geométrico e suas várias representações. Para o autor, existem dois níveis de representações:

- Nível 1: representações próximas - as de objetos planos e modelos de objetos tridimensionais, como, por exemplo, maquete.
- Nível 2: representações distantes - as planas de objetos tridimensionais, por exemplo, desenhos em um suporte bidimensional.

Os desenhos que representam objetos espaciais têm a relação entre um objeto geométrico e sua representação mais “nebulosa” que no caso da Geometria Plana e fica difícil perceber, no desenho, algumas propriedades do próprio objeto 3D.

Parzysz (1988) apresenta dois exemplos para ilustrar tal afirmação: a Figura 1A (nível 1), representando um quadrado e suas diagonais, na qual a perpendicularidade pode ser facilmente conjecturada. Ao contrário, a Figura 1B (nível 2) representa uma pirâmide regular de base quadrada, é menos evidente que a altura seja perpendicular às diagonais da base, sendo necessário fazer apelo a uma representação próxima ou estar bem familiarizado com as propriedades do objeto 3D.

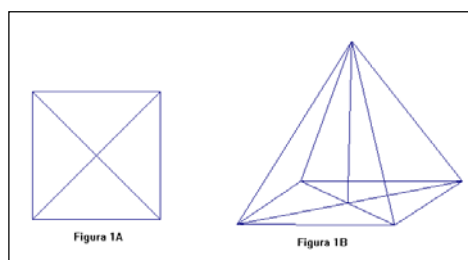


Figura 1.1: Representação de um quadrado e uma pirâmide de base quadrada
(Parzysz, 1988, p. 82)

Para o autor citado, nem tudo pode ser mostrado em uma representação; algumas propriedades da representação aparecem somente graças à vontade do leitor: é a restituição do significado. Uma restituição poderia não ter lugar sem a convivência entre o autor da representação (o transmissor) e seu leitor (o receptor), o que só é possível graças a uma cultura geométrica comum.

Assim, nas representações referentes à Geometria Espacial, dois problemas surgem, como, geralmente, acontece quando a comunicação está em jogo: o problema de codificar (elaboração de uma representação gráfica) e decodificar (interpretação de uma representação gráfica).

Para ilustrar o problema de decodificação, Parzysz (1988) realizou a seguinte atividade: o desenho (Figura 1.2) representa um plano P e três pontos A, B, C no espaço.

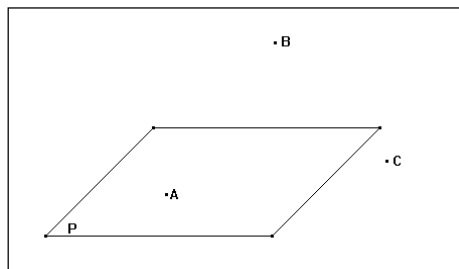


Figura 1.2: Um plano P e três pontos A, B e C (Parzysz, 1988, p. 83)

Para cada um destes três pontos, o aluno deveria dizer se o ponto pertence ao plano P ou não ou se o desenho não permite decidir. O quadro abaixo mostra os resultados dos 109 alunos (12 - 13 anos) envolvidos no estudo.

	Em P	Fora de P	Não responderam
Ponto A	81	0	28
Ponto B	0	78	31
Ponto C	1	63	45

Quadro 1.1: Resultado da atividade (Parzysz, 1988, p. 83)

Como destaca Parzysz (1988), teoricamente, é impossível afirmar se um determinado ponto pertence ao plano P ou não. No caso, se a representação do ponto é interior (exterior) à representação do plano, o ponto é visto como pertencente (fora) ao plano. Os resultados da atividade mostram que os alunos têm essa interpretação, tendendo a considerar o desenho, como uma representação próxima do objeto.

Os problemas da codificação de um objeto geométrico 3D em um único desenho têm sua origem na impossibilidade de oferecer uma representação próxima a ele, e na obrigação subsequente de recorrer a uma representação distante, na qual existe perda adicional de informação (PARZYSZ, 1988, p. 83). O transmissor é confrontado a um dilema, em razão do que a pessoa conhece e vê do objeto 3D. De fato, segundo Parzysz (1988), o pólo do sabido entra em conflito com o que a pessoa vê, ou seja, com o pólo do visto.

- **Pólo do visto** - consiste em representar um objeto tal qual ele se apresenta aos olhos do sujeito, baseado em sua observação e imagem visual;
- **Pólo do sabido** - consiste em representar as propriedades e as relações do objeto que o sujeito julga importante.

Na maioria dos casos, Parzysz e Colmez (1993) discutem a dificuldade de satisfazer de maneira concreta os dois pólos, influenciados pelos aspectos cognitivos e perceptivos. Segundo os autores, a situação do sujeito em relação aos dois pólos depende de vários fatores: ela evolui com a idade, mas também com as capacidades gráficas, com os conhecimentos geométricos, com a natureza da tarefa, com a visão objetiva, etc.

Uma materialização da existência deste conflito pode ser encontrada nas produções dos alunos, como mostra um experimento realizado por Parzysz (1988) que sintetizamos a seguir.

Nesse experimento, a atividade proposta consiste em representar uma pirâmide regular de base quadrada, baseada em um “esqueleto” feito de varetas de madeira. O professor descreve isto e pede aos alunos - depois de retirar o objeto - para fazer um desenho, com o seguinte propósito: “alguém que não sabe nada sobre isto, deve poder reconhecer que o desenho representa uma pirâmide regular de base quadrada” (PARZYSZ, 1988, p. 84).

A atividade foi realizada com 88 alunos de três classes (12 - 13 anos). No desenho, Parzysz (1988) ressalta que os alunos deveriam considerar a igualdade de comprimento das arestas laterais e da base e também os ângulos retos. Somente 18 alunos dos 88 consideraram essas propriedades e só dois dos 18 de um modo suficiente para determinar a natureza precisa do objeto representado. Isto mostra que as propriedades da pirâmide de base quadrada não são tão evidentes para os alunos e que o desenho não pode, por si só, substituir o objeto.

Parzysz (1988) estudou as produções dos alunos (desenhos), interessando-se pelos pontos destacados na seqüência.

1.2.1 Posição da Base quanto às Extremidades da Folha

Parzysz (1988) chamou “horizontal” a uma reta paralela às extremidades superior e inferior da folha e “vertical” a uma reta paralela às extremidades esquerda e direita da folha, adotando assim os seguintes critérios para análise:

- H: pelo menos, uma das extremidades do quadrilátero representando a base é horizontal.

- S: o quadrilátero tem um eixo vertical de simetria.
- X: outros casos.

Os resultados mostram que o primeiro caso “H” representa três quartos do número total de estudantes, o que para o autor não foi surpreendente, pois a folha é usada como referência para posicionar a base da pirâmide.

1.2.2 Forma da Base

Parzysz (1988) adotou os seguintes tipos para análise:

- Quadrado;
- Losango;
- Retângulo;
- Paralelogramo;
- Trapézio;
- X: outros quadriláteros.

Os resultados mostram uma grande semelhança entre os resultados das três classes (12 - 13 anos). A forma da base representada por um trapézio e outros quadriláteros teve somente 10% do número total. O losango e o paralelogramo constituem, para cada um deles, quase 40% do número total, em média, portanto, eles correspondem juntos à grande maioria das produções.

O losango e o paralelogramo correspondem a uma visão “lateral” do objeto, e o quadrado e o retângulo, a uma visão a partir da base (superior/inferior ou frontal). Esta diferença de “pontos de vista” pode explicar o pequeno número de alunos que desenhou um quadrado ou uma base retangular, pois uma visão a partir da base dá menos efeito de profundidade que uma visão lateral. Dos alunos que desenharam quadrado ou retângulo como base, o retângulo (2% do número total) em comparação ao quadrado (10%), tem uma desvantagem. Na realidade, o quadrado é uma imagem verdadeira (próxima) da base da pirâmide e isto pode ser considerado na representação como sabido, ou seja, o que é sabido substitui o que é visto.

A alta porcentagem de losango (quase 40%), o que para o autor inicialmente foi surpreendente, pode ser explicada por uma preocupação entre os alunos por preservar as propriedades do objeto no desenho. Segundo o autor, a base quadrada seria idealmente representada por um quadrado; mas tal representação de uma pirâmide não é muito satisfatória, visualmente falando. Ao representar-se a base por um paralelogramo, preserva-se o paralelismo dos lados, e o efeito de perspectiva é muito mais convincente, mas o losango,

além de preservar a parte principal da vantagem visual do paralelogramo, mantém a igualdade de comprimento dos lados (PARZYSZ, 1988, p. 86 - 87).

Para o autor, os alunos que escolheram a base paralelogramo, encontram-se no pólo do visto, e os que preferem o losango, encontram-se no pólo do sabido, pois têm a ilusão que o losango corresponde, graças a um desenho suficientemente sofisticado e próximo do objeto, a uma representação próxima, sem ambigüidades.

1.2.3 Posição do Vértice da Pirâmide

Parzys (1988) adotou os seguintes critérios para análise:

- A: representação do vértice sobre uma reta perpendicular à base da pirâmide, passando pela intersecção das diagonais do quadrilátero da base.
- B: representação do vértice sobre a mediatriz do lado “inferior” do quadrilátero da base.
- C: representação do vértice sobre a mediatriz do lado “superior” do quadrilátero da base.
- X: outros casos.

Observa-se que os casos A, B e C não são exclusivos. Em particular, em uma visão “frontal” em perspectiva, as três condições são realizadas simultaneamente (Figura 1.3). Em tal caso, foi dado prioridade para A.

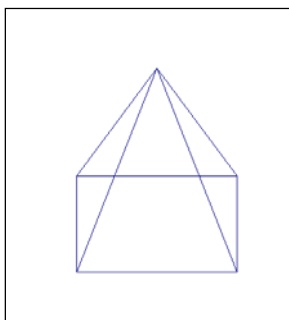


Figura 1.3: Visão frontal em perspectiva de uma pirâmide de base quadrada

Os resultados mostram uma predominância de A (metade do número total), geralmente, corresponde à representação clássica. B teve 20% a 25%, o que não foi esperado no início pelo autor e só apareceu no exame das produções dos alunos.

A representação B corresponde mais exatamente a outra prioridade na construção da representação: em vez de começar desenhando a base, o sujeito representa primeiro uma face lateral (como um triângulo isósceles).

Nesta atividade do desenho de base quadrada, Parzysz (1988) observou que os alunos representaram a pirâmide do modo clássico (33 desenhos de 88). Isto corresponde às seguintes características:

- Base representada por um paralelogramo (possivelmente, um losango);
- Representação do vértice sobre uma reta perpendicular à base da pirâmide passando pela intersecção das diagonais do quadrilátero da base.

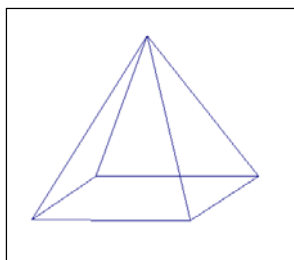


Figura 1.4: Representação clássica da pirâmide de base quadrada

Parzysz (1988) concluiu que, se a representação clássica pertencer à competência desses alunos, o desempenho deles não estará no mesmo nível. Para esses alunos, não existem escolhas conscientes e deliberadas de uma perspectiva, como também de uma posição do objeto, mas, o uso empírico da perspectiva com preocupação de preservar algumas propriedades do objeto.

Os resultados de Parzysz (1988) mostram que:

1. Existe uma dialética entre aquisição de conhecimentos em Geometria Espacial e domínio de representações 3D. Na representação gráfica de objetos espaciais, é necessário abandonar uma parte das propriedades geométricas, por exemplo, ao desenhar um bloco retangular sabemos que as arestas são paralelas e perpendiculares entre si, mas não será possível transferir a todas as arestas estas propriedades.
2. É necessário habituar-se a uma representação 3D, como modelo de um objeto.

Em outro artigo, Parzysz e Colmez (1993) realizaram a mesma atividade da pirâmide de base quadrada e analisaram as produções dos alunos mais detalhadamente, com base no pólo do visto e do sabido. É o que passamos a descrever no que segue.

1.3 O “Visto” e o “Sabido” na Evolução dos Desenhos de Pirâmides

Neste artigo, Parzysz e Colmez (1993) retomam a atividade do desenho da pirâmide de base quadrada com o objetivo de estudar como os alunos gerenciam o conflito visto/sabido e

sua evolução na representação de um sólido geométrico por meio de um desenho, explicitamente, em uma tarefa de comunicação.

Pretendia-se investigar as representações que demonstravam (ou transmitiam) as propriedades geométricas de objetos espaciais em representações planas, resultado de uma articulação entre os dois pólos.

A atividade realizada por Parzysz e Colmez (1993) teve cerca de 1500 desenhos, produzidos por mais de 1200 alunos de 8 a 17 anos, que foram coletados, analisados e classificados em 21 categorias. Os autores consideram os seguintes critérios de codificação:

- Em relação à incidência: o desenho é realmente uma pirâmide?
- Em relação à atividade: por onde o aluno começou o desenho?
- Quanto ao procedimento utilizado: quais traços que se seguiram do início até a conclusão do desenho?
- Situação do desenho entre os pólos do visto e do sabido:
 - O visto: qual o ponto de vista?
 - O sabido: quais propriedades da pirâmide são preservadas no desenho?
“Exaustividade” da representação (número de faces e arestas representadas).
- Referencial espacial (posição da base ou existência de um eixo de simetria, em relação aos lados da folha);
- Quanto às características do objeto:
 - Elementos de simetria, tradução dos elementos de simetria correspondentes do objeto desenhado;
 - Triângulo isósceles: existência e posição de uma face;
 - Altura: existência, direção e posição relativa à base;
- Eventuais comentários que permitiram indicar informações não codificadas (realismo do desenho, textos explicativos, tracejados).

A atividade foi realizada depois da discussão de algumas propriedades de uma pirâmide de base quadrada com os alunos. Em seguida, uma pirâmide de base quadrada foi colocada diante dos alunos por cerca de 30 minutos, mudando sua posição de vez em quando. Todos os instrumentos de desenho eram permitidos.

A pirâmide foi escolhida pelo fato de possuir várias simetrias que não podem ser diretamente representadas no plano: a base quadrada deve ser representada por paralelogramo e as faces isósceles, por faces não isósceles.

O quadro 1.2, reproduzido do artigo, permite ordenar as categorias sobre o pólo do

sabido. Uma categoria é mais próxima deste pólo do que outra se ela conservar um número maior de propriedades da pirâmide.

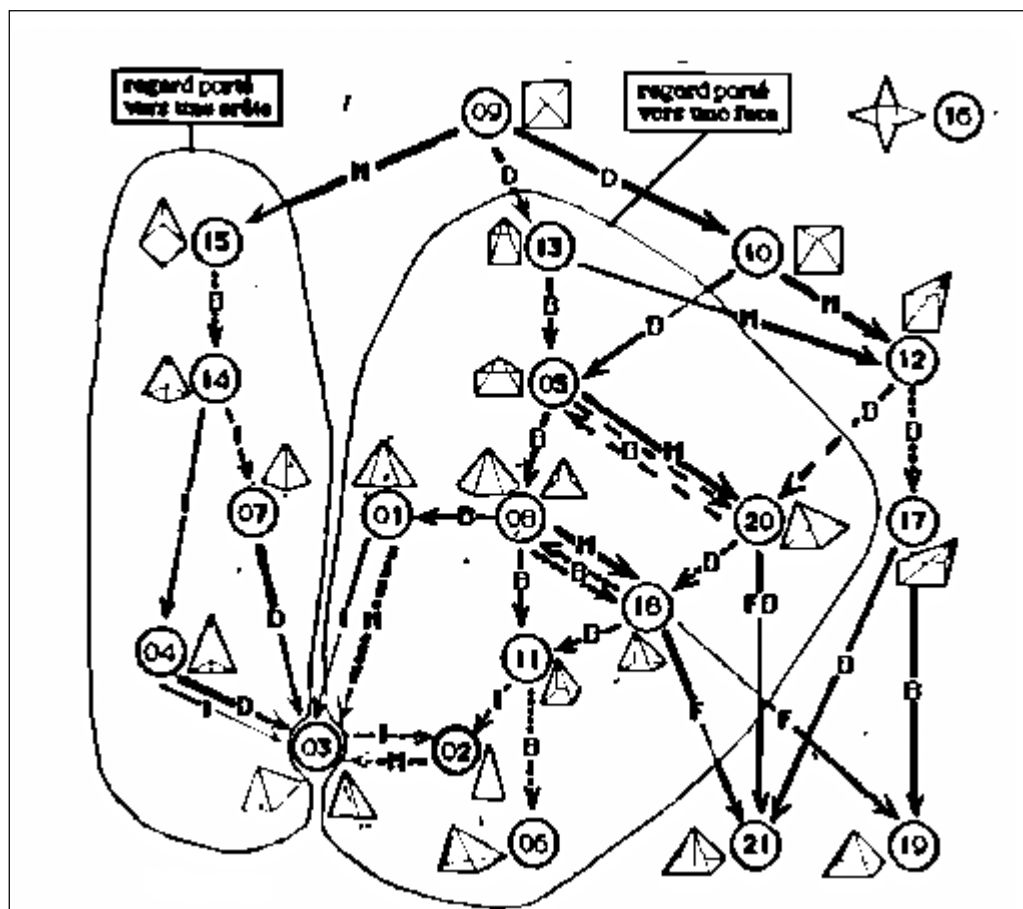
Categorias Propriedades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de arestas laterais distintas	4	2	3	3	4	4	3	4	4	4
Nº de lados distintos da base	1	1	1 à 2	3	4	4	2	4	4	4
Nº de faces isósceles	0 à 2	1	0 à 2	0	2	0 à 1	0 à 2	2	4	2
Ortogonalidade das arestas da base					X				x	X
Igualdade dos comprimentos							X		x	X
Simetria mediana	?	X			X			X	x	X
Simetria diagonal	?			x			X		x	
Conservação de paralelismo					X				x	X

Categorias Propriedades	11	12	13	14	15	17	18	19	20	21
Nº de arestas laterais distintas	4	4	4	3 à 4	3 à 4	4	4	4	4	4
Nº de lados distintos da base	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Nº de faces isósceles	0	0	2	0 à 2	0	0	1	0	0 à 1	0
Ortogonalidade das arestas da base		X	x		X	X				
Igualdade dos comprimentos		X	x	x	X				x	
Simetria mediana			x							
Simetria diagonal				x	X					
Conservação de paralelismo		X	x	x	X	X	X	X	x	X

Quadro 1.2 - Propriedades geométricas da pirâmide conservadas no desenho

(Parzys; Colmez, 1993, p. 44)

No diagrama (Figura 1.5), os autores colocam em evidência duas famílias de desenhos: a primeira (à esquerda), reagrupa os desenhos em que o olhar fixa-se sobre uma aresta; e a segunda (à direita), reagrupa os desenhos em que o olhar fixa-se sobre uma face.



Legenda:

- M → parte da simetria mediana
- D → parte da simetria diagonal
- B → parte de uma propriedade da base
- F → parte da face isósceles
- I → parte da informação de incidência

Figura 1.5: Organização das categorias em função do sabido
(Parzysz; Colmez, 1993, p. 45)

Para os autores, a escolha do aluno por uma família não é deliberada e pode aparecer somente quando o desenho foi terminado. Alguns indícios levaram os autores a pensar que, na maioria dos casos, o aluno teve uma intenção a priori. São eles:

- A presença de duas famílias na mesma folha de alguns alunos.
- A presença de vários desenhos da mesma família, mostrando uma tomada de consciência do efeito produzido e buscando reforçá-lo.
- Os traçados mal apagados mostrando uma evolução do desenho.

O estudo permitiu que os autores esboçassem uma síntese da evolução da gestão, pelo

aluno, do conflito visto/sabido em relação à representação de uma pirâmide.

A análise da evolução dos desenhos mostrou que a representação de triângulos adjacentes é preponderante entre os alunos mais jovens: com exceção da categoria 9, os desenhos mais freqüentes nas 2ª e 3ª séries são das categorias 1, 2 e 3. Os desenhos dessas três categorias são fundamentados no triângulo, em geral, isósceles, triângulo isolado ou, mais freqüentemente, triângulos adjacentes (procedimento F1). Ou ainda, triângulos aos quais se acrescentaram arestas. Para os autores, nas primeiras séries, quando é apresentada a pirâmide e perguntado o nome do objeto, obtém-se como resposta “triângulo”, sinal da forte relação estabelecida entre objeto espacial e objeto plano.

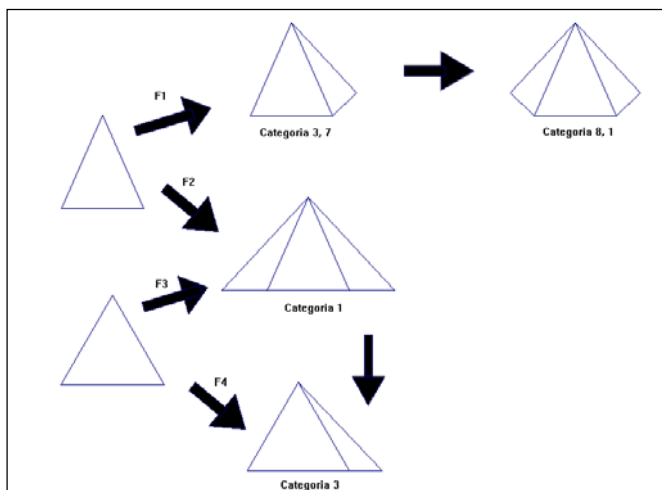


Figura 1.6: Procedimentos realizados a partir de uma face (Colmez; Parzysz, 1993, p. 48)

Os autores constataram também que as simetrias e as propriedades das faces tornam-se presentes nos procedimentos dos alunos a partir da 5ª série.

A categoria 9 (vista de cima) é:

- o único desenho que conserva todas as propriedades métricas;
- um tipo de desenho muito freqüente até a 7ª série;
- o que apresenta o inconveniente de não ser imediatamente perceptível, como representação de um objeto tridimensional;

Esta categoria 9 é superada pela categoria 13, na 4ª série e pelas categorias 14 e 18, seguidas pelas categorias 5, 15 e 8 da 5ª até a 8ª série.

A presença importante em todos os níveis da categoria 9 não pode ser interpretada de maneira uniforme. Assim:

- na 3ª série, sua presença indica que os alunos levam em conta as propriedades de simetria. Entretanto, alguns alunos, mesmo nesse nível, têm consciência de que a

interpretação de tal desenho como objeto espacial não é evidente e tentam disfarçar esse inconveniente, substituindo o quadrado por um retângulo;

- na 6ª série, a vista de cima serve de refúgio àqueles que, frequentemente, após algumas tentativas não conseguem fazer um desenho entre as duas grandes famílias (aresta e face);

Os resultados de Parzysz e Colmez (1993) mostram que a gestão do conflito visto/sabido reveste-se de diversas formas ao longo da escolaridade obrigatória.

A evolução do nível escolar e a divisão das produções em categorias mostram uma evolução do sabido, porém sempre com o visto servindo de controle. Em síntese, os autores declaram que parece desejável dar um status claro, consistente e explícito aos desenhos de Geometria Espacial.

1.4 Relações entre Representação Plana e Objeto Geométrico

A passagem de objetos tridimensionais, cujo significado está no espaço, com suas representações gráficas que estão no plano, apresenta dificuldades para muitos alunos. Cavalca (1998), em sua dissertação de mestrado, discute o desenvolvimento de habilidades de visualização e interpretação de objetos espaciais e suas representações.

O autor baseou-se em algumas hipóteses próximas as idéias anteriores apresentadas de Parzysz, a saber:

- os alunos têm dificuldade com a representação gráfica, no que se refere tanto à sua elaboração como à sua interpretação;
- a representação gráfica não é utilizada no processo de resolução de questões e serve apenas como ilustração.

Além disso, o autor também considera que a capacidade de “ver” um objeto geométrico espacial representado no plano não é inata, ela deve e pode ser desenvolvida, com a qual concordamos, no sentido de considerar um ensino adequado ao desenvolvimento de habilidades de visualização no espaço.

Cavalca (1998) aponta que o ensino da Geometria Espacial no Brasil vem sendo desenvolvido somente por meio de fórmulas e cálculos algébricos, deixando de lado as representações planas de objetos espaciais. Para o autor, essa abordagem é insuficiente para que haja um aprendizado adequado da Geometria Espacial.

No desenvolvimento de sua pesquisa, Cavalca (1998) utilizou uma seqüência didática visando a favorecer o desenvolvimento das capacidades de interpretar e fazer representações

gráficas planas de objetos do espaço e de resolver problemas, utilizando processos apoiados na visualização.

Esta sequência didática foi aplicada a alunos em formação inicial do curso de Ciências com habilitação em Matemática. As atividades foram desenvolvidas nas aulas da disciplina de Geometria Analítica. Esses alunos freqüentavam a faculdade à noite, trabalhavam durante o dia e alguns já eram professores em escolas de Ensino Fundamental.

A sequência tinha como objetivo estabelecer uma relação entre os objetos do espaço e suas representações planas, com apoio de material concreto e na freqüente mudança de registros (gráficos e língua natural).

Com o acompanhamento da evolução dos alunos ao longo de toda a experimentação, Cavalca (1998) conclui ter sido possível oferecer-lhes uma sequência de atividades que os ajudou a desenvolver suas capacidades de interpretar representações gráficas e resolver problemas por meio de processos apoiados na visualização. Isto significa que eles conseguiram estabelecer uma relação entre objeto do espaço e suas representações planas.

Ao reconhecer a importância do desenho no ensino de Geometria Espacial, Chaachoua (1997) fez um estudo da evolução do desenho no ensino, baseando-se em trabalhos anteriores sobre a problemática do desenho na representação em Geometria.

1.5 Problemática do Desenho

Em sua tese de doutorado, Chaachoua (1997) discute a distinção entre desenho, figura e objeto geométrico. Assim como o estudo de Chaachoua (1997), nosso trabalho de dissertação está centrado particularmente nas funções do desenho na resolução de problemas da Geometria Espacial. A pesquisa de Chaachoua (1997) foi realizada na França com alunos de 15 e 16 anos e professores de Matemática do Ensino Médio em dois ambientes distintos – papel e lápis e computacional.

No ensino da Geometria, o autor citado considera, sobretudo, na Geometria Espacial, os seguintes tipos de objetos:

- Objeto geométrico: é um objeto teórico, idealizado.
- Objeto psíquico: sinônimo de objeto material.
- Desenho: representação sobre um suporte material.
- Figura: uma criação da imaginação, uma idéia a ser representada.

Chaachoua (1997) baseia-se na distinção apresentada por Laborde (1992) que considera o desenho como um modelo do objeto geométrico. Para esta autora, o desenho permite identificar certas propriedades do objeto geométrico, mas ele o faz de modo parcial

não dando conta de todas as propriedades geométricas, assim como mencionado, existe uma perda de informação.

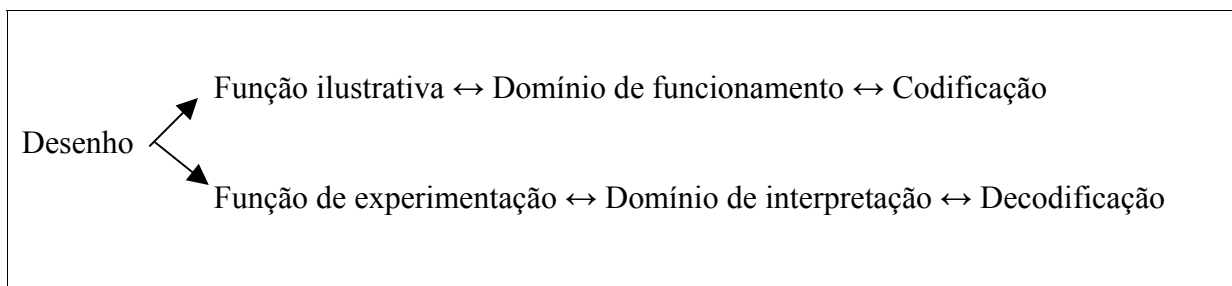
Em Geometria Espacial, diversas propriedades do objeto geométrico não podem ser traduzidas por relações espaciais sobre uma folha de papel, a menos que se apele a códigos e convenções de representações.

Chaachoua (1997) observa que se pode relacionar um domínio de funcionamento ao desenho, ou seja, a passagem de um objeto geométrico espacial a um desenho que o represente, isto se faz com a ajuda de uma tradução de certas propriedades geométricas do objeto em relações espaciais sobre o desenho (sua representação). Estas relações espaciais são as traduções das propriedades geométricas do objeto espacial, projetado no plano. Tais propriedades constituem o domínio de funcionamento do desenho. Inversamente, todas as propriedades espaciais do desenho não podem ser interpretadas, como propriedades do objeto, assim, ao desenho está atrelado um domínio de interpretação.

Além desses dois domínios, para Chaachoua (1997) o desenho tem diversos estatutos dentro do ensino. Ao iniciar o Ensino Fundamental, a criança manipula objetos psíquicos. Em particular, ela deverá se situar, localizar e perceber o objeto em relação a si ou às percepções fixadas. Já, no Ensino Médio, o aluno é levado a trabalhar no nível de “objeto geométrico”. O desenho vai desempenhar um papel importante nessa passagem do primeiro ao segundo tipo de objeto.

O desenho no Ensino Médio é considerado como um modelo de um objeto geométrico em Geometria Plana e Espacial. Para a Geometria Espacial, o trabalho sobre os objetos geométricos pode necessitar do desenho, modelo do objeto geométrico e/ou necessitar da utilização de maquetes. O autor apresenta duas funções que o desenho pode assumir no ensino, como descrevemos a seguir.

- Função ilustrativa: passar do objeto geométrico ao desenho, isto é, o sujeito realiza um desenho para traduzir os dados do problema. Esta função depende do domínio de funcionamento do desenho como modelo de um objeto geométrico.
- Função de experimentação: passar do desenho ao objeto geométrico, isto é, no tratamento do desenho, as propriedades devem ser interpretadas dentro do domínio geométrico. Esta função é parte do domínio de interpretação do desenho como modelo de objeto geométrico.



Quadro 1.3: Funções e domínios do desenho

A função de experimentação sobre o papel e lápis está limitada por razões materiais ligadas ao meio: imprecisão do traçado, impossibilidade de tornar temporariamente invisível uma parte do desenho, limitação do número de elementos pertinentes ao objeto que podem ser gerados no desenho. O caráter estático contribui para que relações espaciais pertinentes ao desenho sejam difíceis de ser distinguida ou identificada.

Conforme Chaachoua (1997), certos ambientes de Geometria Dinâmica, em razão da maneira como os desenhos podem ser gerados, oferecem um melhor domínio de funcionamento e um meio para desqualificar certas interpretações ilícitas, permitindo ampliar o campo de experimentação do desenho de um objeto geométrico espacial. Em termos gerais, o autor destaca que os Sistemas de Geometria Dinâmica permitem construir e explorar objetos geométricos de forma interativa, dinamizando o ensino da Geometria por meio de construções geométricas usualmente feitas com régua e compasso. Para tratar de problemas geométricos, sua potencialidade reside no desenvolvimento de atividades de exploração, em que o aluno interage com o computador, solucionando problemas que dificilmente poderiam ser resolvidos no papel e lápis.

Em seu estudo Chaachoua (1997), observou em que medida o uso da Geometria Dinâmica aproxima o objeto material da tela do computador (desenho) do objeto teórico (figura), por meio de representações gráficas, ou seja, discutiu as questões relativas ao desenvolvimento da leitura geométrica do desenho pelo aprendiz.

O recém-lançado *Cabri 3D* é um representante dos softwares de Geometria Dinâmica. Chaachoua (1997) em sua pesquisa utilizou um protótipo, cabe observar que ele se diferencia sobremaneira do atual e no capítulo 3 será apresentado em detalhes.

Estas pesquisas serviram de referências para a determinação de nossos objetivos de estudo, conforme descrevemos abaixo.

1.6 Objetivos do Nosso Estudo

As pesquisas realizadas sobre a problemática do uso dos desenhos na resolução de problemas da Geometria Espacial mostram que é preciso repensar a função do desenho no ensino. O uso de figuras estereotipadas não garante aos alunos habilidades de visualização necessárias para resolver problemas de Geometria Espacial de Posição com sucesso.

Em termos de síntese, alguns pontos destacados nas pesquisas referenciadas, são:

- os alunos têm dificuldade com a representação de objetos espaciais no plano, no que se refere à sua elaboração e interpretação;
- a necessidade de trabalhar claramente, pelo menos no Ensino Médio, os princípios da representação plana de figuras espaciais, para o aluno não ser um escravo de desenhos estereotipados;
- a representação nem sempre é utilizada no processo de resolução de problemas, servindo apenas como mera ilustração.

Admitimos, como Chaachoua (1997), que o domínio de interpretação de um desenho, modelo de um objeto geométrico no ambiente convencional papel e lápis é muito reduzido e, a priori, a função de experimentação do desenho nesse ambiente pode não ter a mesma qualidade em um ambiente informático, como o *Cabri 3D*, por exemplo.

Portanto, nossa pesquisa pretendeu investigar:

- O papel das representações no ambiente informático Cabri 3D, quanto às funções dos desenhos dinâmicos que esse ambiente permite produzir;
- As possibilidades de gestão do conflito visto/sabido na produção e interpretação, pelos alunos, de desenhos no Cabri 3D.

Com esse propósito, optamos por elaborar, aplicar e analisar os resultados de um estudo experimental, compreendendo duas fases: uma no papel e lápis e a outra no ambiente informático Cabri 3D, como apresentaremos nos capítulos 2 e 3.

Este estudo experimental inspirou-se fortemente na metodologia do *Design Experiment*. No próximo capítulo, apresentaremos essa metodologia na perspectiva de Steffe e Thompson (2000) e Cobb et al. (2003) e um estudo experimental preliminar no ambiente papel e lápis.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DE ESTUDO

Neste capítulo, serão apresentadas as escolhas metodológicas para o desenvolvimento da pesquisa, assim como o processo envolvido na elaboração das atividades a serem realizadas pelos alunos e os critérios para a análise dos dados obtidos.

A metodologia utilizada para o desenvolvimento desta dissertação foi o *Design Experiment* na perspectiva de Steffe e Thompson (2000) e Cobb et al. (2003), conforme descrita abaixo.

2.1 *Design Experiment*

Para Steffe e Thompson (2000), a metodologia *Design Experiment* é usada para entender o raciocínio e a aprendizagem Matemática dos estudantes, que é indicada pelo que eles dizem, fazem e como se comportam em certa atividade Matemática. A idéia básica dos pesquisadores em um *Design Experiment* é construir modelos da Matemática dos estudantes, que se refere a estes modelos e inclui as modificações que os estudantes fazem em seus modos de operar.

Olhar o que há por trás do que os estudantes falam e fazem na tentativa de compreender suas realidades matemáticas é uma parte essencial do *Design Experiment*.

Um *Design Experiment* envolve uma sucessão de episódios de ensino que inclui um agente pedagógico - o professor, um ou mais estudantes, uma testemunha dos episódios de ensino – o observador e um método para registrar o que acontece durante o episódio. Estes registros, se disponíveis, podem ser usados na preparação dos episódios subseqüentes como também no direcionamento de uma retrospectiva da análise conceitual do *Design Experiment*. Estes elementos são os mesmos a todo *Design Experiment* (Steffe; Thompson, 2000).

Uma das características que distingue esta metodologia das demais é a insolubilidade entre os papéis de pesquisador e professor, pois, muitas vezes os papéis são redistribuídos de forma a atribuir ao pesquisador o papel de professor. Esta é uma das razões pelas qual esta metodologia foi adotada no presente estudo. Pretendemos desenvolver o trabalho em nossa escola de atuação, assumindo o duplo papel de professor-pesquisador.

2.1.1 Características de um *Design Experiment*

A primeira característica do *Design Experiment* é seu caráter pragmático. De fato, o propósito do *Design Experiment* é desenvolver um modelo sobre o processo de aprendizagem dos estudantes e sobre os meios que são elaborados para possibilitar essa aprendizagem dos estudantes.

Nesta dissertação, as atividades que serão propostas terão como objetivo criar condições e situações (processos) que permitam desenvolver habilidades para a visualização e interpretação de objetos espaciais, com base em suas representações planas. Os meios que serão utilizados para possibilitar o processo de aprendizagem incluem representações e interpretações em dois ambientes – o convencional do papel e lápis e o informático do *Cabri 3D*.

Embora o *Design Experiment* tenha essa característica prática, ele é administrado em um número limitado de contextos, sendo aparente a preocupação com o modelo. Sua intenção não é só investigar o processo que possibilita novas formas de aprendizagem em contextos específicos, mas, sim, destacar aspectos esperados da aprendizagem e meios de possibilitá-la em uma classe mais ampla de fenômenos.

A segunda característica do *Design Experiment* é a intervenção. Segundo Cobb et al. (2003), a intenção é investigar as possibilidades de melhoria educacional, provocando novas formas de aprendizagem aos estudantes. Durante a preparação do *Design Experiment*, são utilizadas pesquisas que já foram realizadas na área e seus resultados empíricos e teóricos. O processo de criar formas de aprendizagem durante a pesquisa proporciona uma medida de controle quando comparada com uma investigação puramente naturalista. Além disso, tentando possibilitar uma forma específica de aprendizagem, o pesquisador encontra fatores pertinentes que contribuem para o aparecimento de inter-relações com outras pesquisas já realizadas.

O ensino e aprendizagem da Geometria Espacial relacionando com questões de representações planas de objetos espaciais tem sido objeto de inúmeros estudos. Nosso trabalho está baseado nas pesquisas de Parzysz (1991), na qual o autor ressalta que os desenhos podem, a um baixo custo educacional, servir como uma ferramenta eficiente e ser usada na resolução de problemas. Em nosso estudo, investigamos o papel do *Cabri 3D*, visando analisar como as representações nesse ambiente são codificadas e decodificadas pelos alunos e em que medida elas participam no desenvolvimento das habilidades de visualização e possibilitam a interpretação de propriedades geométricas de objetos espaciais.

A terceira característica do *Design Experiment* é a condição do *Design* desenvolver modelos partindo de uma hipótese. Para Cobb et al. (2003), a hipótese tem duas faces: a prospectiva e a reflexiva. A face prospectiva é implementada com hipóteses sobre processos de aprendizagem e sobre os meios de possibilitar a aprendizagem que devem estar expostos em detalhes no processo. Um objetivo igualmente importante é nutrir o aparecimento de outros caminhos potenciais para aprendizagem. A face reflexiva pretende testar conjecturas do experimento, freqüentemente, em vários níveis de análise. O *Design Experiment* é, no início, uma conjectura sobre os meios que possibilitam uma forma particular de aprendizagem e que será testado posteriormente. Durante a aplicação do *Design*, as conjecturas podem ser reformuladas e testadas.

Uma das hipóteses do presente trabalho é que o software *Cabri 3D* permite desenvolver habilidades de visualização e interpretação de objetos espaciais, possibilitando uma melhoria na resolução de problemas de Geometria Espacial. Parzys (1991) ressalta que o ensino da representação plana de objetos espaciais desenvolve habilidades de codificação e decodificação, mas seu estudo foi realizado no contexto do papel e lápis, sem, contudo considerar ou fazer referência a representações computacionais. Esse será um diferencial para nosso estudo que integrará um ambiente computacional (o *Cabri 3D*).

Os aspectos prospectivos e reflexivos do *Design Experiment* resultam em uma quarta característica: o *Design Experiment* é cíclico. Como são desenvolvidas conjecturas e talvez alteradas ou reformuladas ao longo do processo, as novas conjecturas devem ser submetidas a um novo teste. O resultado é um processo cíclico que caracteriza ciclos de elaboração e revisão. Claro que projetar ciclos exige atenção sistemática para comprovar a aprendizagem e envolve, com freqüência, o desenvolvimento paralelo de medidas sensíveis para a aprendizagem. O resultado da aprendizagem torna-se foco da investigação durante o próximo ciclo (Cobb et al., 2003).

O projeto de dissertação pretende investigar como a construção e interação com representações no ambiente *Cabri 3D* podem possibilitar uma melhoria na aprendizagem. Entretanto, o *Cabri 3D* é um software “novo”, não se pode ter certeza de como os alunos vão se comportar diante dele e como as escolhas dos desenvolvedores (criadores) e as características implementadas serão apreendidas pelos sujeitos. Assim, as atividades a serem realizadas no *Cabri 3D* deverão ser elaboradas e testadas continuamente.

A quinta característica, segundo Cobb et al. (2003), do *Design Experiment* reflete suas raízes pragmáticas novamente: os modelos desenvolvidos no processo de experimentação são

relativamente modestos, pois preocupam-se com os processos de aprendizagem de domínios específicos.

Nesta dissertação, verificamos os processos de aprendizagem em Geometria Espacial, mais especificamente, o papel ou funções das representações no *Cabri 3D* na resolução de problemas de posição, relacionados a sólidos geométricos. Isso torna o trabalho bem específico e delimitado, sobretudo se considerarmos a amplitude da temática em jogo, por exemplo.

2.2 Os Participantes da Pesquisa

O presente estudo foi iniciado por seis alunos da 2ª série do Ensino Médio, porém o trabalho foi concluído apenas por quatro alunos deles no decorrer da 3ª série do Ensino Médio. Fizeram parte do estudo um observador e o pesquisador que assumiu o papel de professor.

2.2.1 Papel do Observador em um *Design Experiment*

A comunicação com os estudantes pode ser estabelecida mais facilmente se o professor-pesquisador tiver uma história de interação com os alunos envolvidos no *Design Experiment*. Assim, reconhecer a linguagem matemática e a ação corrente dos alunos em uma interação que tenha sido vivenciada anteriormente, são importantes ao professor-pesquisador e observamos que a comunicação deve estar estabelecida. Em nosso estudo, o pesquisador já foi professor dos alunos envolvidos no *Design Experiment*.

Entretanto, o professor-pesquisador poderá encontrar alunos operando de modo inesperado e, aparentemente, inusitado. Nestes casos, usualmente, é interessante para o professor-pesquisador ter um observador no *Design Experiment* para uma interpretação alternativa do evento.

Estando imerso na interação, o professor-pesquisador não será capaz de refletir e tomar atitudes. Isso é muito difícil porque ele deverá estar exercendo duas funções - na interação e fora dela. É quase impossível concluir com êxito o *Design Experiment* se não houver conceitos elementares disponíveis para o professor-pesquisador que possam ser usados para interpretar a situação corrente, pois o professor-pesquisador poderá ser pego tentando responder o que o aluno somente disse ou fez e não irá refletir em cima da contribuição feita pelo estudante. Neste caso, o observador poderá ajudar o professor-pesquisador em dois aspectos: entender o aluno e opinar sobre futuras ações.

No presente estudo, contaremos com um observador que acompanhará todas as atividades, cuja função principal é tomar nota das ações e fatos principais observados.

2.2.2 O Papel do Professor

As ações do professor ocorrem em um contexto de interação com os sujeitos, de modo a auxiliar os alunos participantes na parte técnica, sobretudo no uso de ferramentas do software. O professor também fará intervenções quando perceber que os alunos chegaram a um impasse no processo de resolução, sempre com o objetivo de deixar a responsabilidade da resolução com os alunos e incentivando-os a justificar suas respostas ou a expressarem suas idéias.

A intenção do trabalho é que os sujeitos tenham controle de suas resoluções, tomando decisões e seguindo direções de exploração por eles escolhidas.

2.2.3 Os Sujeitos

Os sujeitos participantes do experimento têm como principal característica o fato de terem sido alunos do professor-pesquisador durante a 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo. O fato não se estendeu até o final da pesquisa, pois quando estes alunos iniciaram a 3ª série do Ensino Médio, o estudo ainda não tinha terminado, mas eles deixaram de ser alunos do professor-pesquisador.

O grupo de estudantes começou com seis sujeitos, mas, por problemas particulares dos alunos só quatro terminaram o estudo, porém isso não foi empecilho para a continuidade do estudo, já que a intenção era observar os desenvolvimentos relevantes que as atividades do *Design Experiment* permitem, garantindo, assim, um estudo aprofundado e detalhado dos resultados.

A decisão de trabalhar com alunos da 2ª série do Ensino Médio e, posteriormente da 3ª série do Ensino Médio, ocorreu em função do conteúdo de Geometria, tanto a revisão da Plana como o início da Espacial, acontecer no final da 2ª série do Ensino Médio.

Os estudantes foram convidados a participar de encontros semanais de 1h30 de duração, que ocorreram fora do horário escolar. Os alunos convidados eram considerados pelo professor-pesquisador e por seus colegas bons estudantes.

2.3 O Experimento

O grupo de atividades dividiu-se em três conjuntos: o primeiro, referiu-se a uma

familiarização com o ambiente de Geometria Dinâmica, o *Cabri-géomètre II*², o segundo era formado por atividades no papel e lápis e o terceiro, de atividades que seriam realizadas no *Cabri 3D*.

Os primeiro e segundo grupos de atividades, respectivamente, no *Cabri-géomètre II* e no papel e lápis, foram realizados com seis alunos. Nas duas primeiras sessões, as atividades do *Cabri 3D* contaram com os mesmos seis alunos. Nas duas sessões consecutivas, tiveram cinco alunos e nas duas últimas, só quatro alunos, conforme o quadro abaixo.

<i>Cabri II</i>	Papel e lápis	<i>Cabri 3D</i>		
8 sessões	1 sessão	1ª e 2ª sessões	3ª e 4ª sessões	5ª e 6ª sessões
6 alunos	6 alunos	6 alunos	5 alunos	4 alunos

Quadro 2.1: Distribuição dos sujeitos durante o experimento

2.3.1 Familiarização com o *Cabri-géomètre II*

O primeiro conjunto de atividades, conforme documento do Anexo 1, tinha como foco a familiarização com o “arrastar” e com a idéia de construções robustas, por meio do *Cabri-géomètre II*, um ambiente de Geometria Dinâmica que possibilita construir e explorar figuras geométricas de forma interativa. As figuras mantêm as propriedades ao serem movimentadas, conservando as relações entre seus componentes.

Os alunos não tinham conhecimento prévio de um ambiente desse tipo, mas estavam estudando Geometria Plana na 2ª série do Ensino Médio. As atividades propostas não tinham como objetivo esgotar o assunto, mas, sim, explorar as ferramentas do *Cabri-géomètre II* e inserir os alunos no contexto da Geometria Dinâmica.

As atividades foram elaboradas para que permitissem que o aluno investigasse propriedades geométricas, levantasse hipóteses e as testasse. Algumas atividades foram dirigidas, com o objetivo de desenvolver habilidades de construção e outras, as chamadas de caixa-preta³, em que é dada uma figura ao aluno, por meio de um arquivo, cujos passos da construção são omitidos e deve-se obter outra figura com os mesmos elementos e que se comporte da mesma maneira. Com a caixa-preta, pretendia-se que o aluno percorresse algumas etapas: observação, exploração, levantamento de hipóteses, confirmação ou não dessas hipóteses e validação.

² Desenvolvido por Jean-Marie Laborde, Franck Bellemain e Yves Baulac, no Instituto de Matemática Aplicada de Grenoble (IMAG), da Universidade Joseph Fourier (França). Atualmente, distribuído por *Texas Instruments*.

³ A caixa-preta foi desenvolvida pelo grupo de pesquisadores do Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática (LSD2) da Universidade Joseph Fourier, Grenoble – França.

Assim, realizaram-se oito encontros, sendo propostas nove atividades realizadas em quatro episódios de ensino. Como algumas ferramentas não puderam ser utilizadas, foram inseridas oito novas atividades desenvolvidas em mais quatro encontros.

As atividades foram realizadas individualmente por meio de fichas de atividades e os alunos podiam discutir suas construções.

2.4 Atividades realizadas no ambiente papel e lápis

O segundo conjunto de atividades é composto por seis questões, envolvendo representações de objetos de Geometria Espacial e uma atividade de representação plana de uma pirâmide de base quadrada. Este conjunto de atividades foi realizado em um encontro de 1h30 de duração, sendo o trabalho desenvolvido individualmente por meio de fichas.

Os exercícios propostos basearam-se nas atividades realizadas na dissertação de mestrado de Cavalca (1998) e na tese de doutorado de Chaachoua (1997). Por sua vez, este último utilizou e adaptou suas atividades, apoiando-se na tese de doutorado de Parzysz (1989). A atividade da representação da pirâmide de base quadrada é uma reprodução daquela realizada inicialmente por Parzysz (1988). Estas atividades visavam a colocar em evidência as consequências das convenções e tipos de representações na leitura de desenhos espaciais pelos alunos.

Assim como Chaachoua (1997), nosso trabalho está, especialmente, interessado na interpretação dos alunos para a leitura de um desenho espacial que pode ser influenciado por representações estereotipadas usadas de um modo implícito no ensino de Geometria Espacial.

Por um lado, a leitura de um desenho vai depender das propriedades geométricas e convenções disponíveis ao aluno e, por outro, de uma leitura de caráter perceptivo, ou seja, envolvendo os pólos do sabido e do visto.

O objetivo desses exercícios é estudar, como os alunos gerenciam as relações visto/sabido na interpretação de um desenho tridimensional representado no plano.

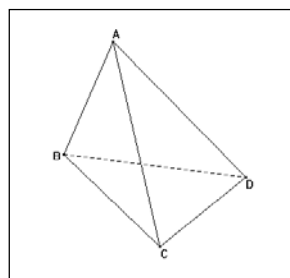
Nos exercícios propostos aos alunos, eles deveriam basear-se em um desenho dado, responder perguntas envolvendo relações de incidência. Cada uma das respostas deveria ser justificada, pois permitiria interpretar as respostas dos alunos.

2.4.1 Exercícios 1 e 5

Os exercícios 1 e 5 foram baseados, adaptados e apoiados nos propostos na tese de doutorado de Chaachoua (1997). Assim como esse autor, optamos por uma análise dos exercícios 1 e 5 conjuntamente.

Exercício 1

a) O que você acha que a figura ao lado representa?
Justifique sua resposta.



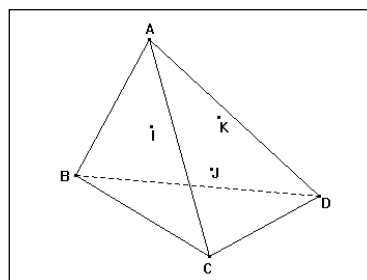
b) Os pontos I, J e K estão em um mesmo plano?

() Sim

() Não

() Não sei

Justifique sua resposta.



Exercício 5

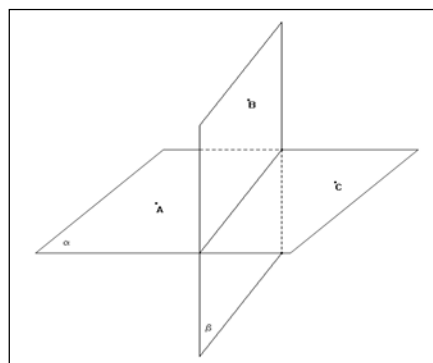
Os pontos A, B e C estão em um mesmo plano?

() Sim

() Não

() Não sei

Justifique sua resposta.



Quadro 2.2: Exercícios 1 e 5

Os exercícios 1(b) e 5 foram propostos considerando duas variáveis, a saber:

a) Natureza dos objetos estudados: sólido ou não

No exercício 1, foi proposto um tetraedro que Chaachoua (1997) afirma ser um sólido habitual no ensino francês. Nossa hipótese é que o mesmo ocorre no contexto brasileiro, com o objetivo de verificar tal hipótese, acrescentamos o item (a) para observar a apreensão dos alunos sobre uma possível representação desse objeto. Os alunos poderiam considerar, como sendo a representação de um tetraedro (figura espacial), atribuindo significado para o segmento tracejado ou poderiam considerar o desenho de um quadrilátero com suas diagonais, colocando-se em uma situação plana.

No exercício 5, não se utilizou um sólido e, sim, a representação de dois planos secantes.

b) Posição dos pontos

No exercício 1:

- os pontos I, J e K estão no interior do triângulo ABD;
- os pontos I, J e K estão no exterior do triângulo BCD;
- os pontos J e K estão no interior do triângulo ACD e I está no interior do triângulo ABC.

No exercício 5:

- os pontos A e C estão no interior do paralelogramo que representa o plano α e no exterior do paralelogramo que representa o plano β ;
- o ponto de B está no interior do paralelogramo que representa o plano β e no exterior do paralelogramo que representa o plano α .

A resposta esperada aos exercícios 1(b) e 5 seria “três pontos distintos e não colineares determinam um único plano”, na qual o aluno usaria uma propriedade geométrica para a determinação de um plano por meio de três pontos. Este tipo de resposta pertence ao pólo do sabido.

Para Chaachoua (1997), no exercício 1(b), justificativas do tipo “os pontos I, J e K estão na mesma face ABD”, significa uma interpretação que os pontos estão no interior do triângulo ABD e, portanto, no mesmo plano. Já, no exercício 5, justificativas como “os pontos A, B e C não estão no mesmo plano ou o ponto B não pertence ao plano α contendo A e C” expressam que o plano é reduzido ao polígono que o representa. Estas respostas aos exercícios 1(b) e 5 mostram a interpretação da delimitação do espaço interior do plano, como se os pontos fossem internos ao polígono que o representa. Estes tipos de respostas situam-se no pólo do visto.

Para Chaachoua (1997), a variável “sólido” reforça as interpretações que encorajam as respostas pertencentes ao pólo do visto. Por esta razão, o autor acredita que o exercício 1 teria mais respostas pertencentes ao pólo do visto do que o exercício 5.

Resultados

Do total de seis alunos, três responderam o exercício corretamente. A justificativa destes últimos fez referência à base triangular e às faces, também, triangulares. Outra justificativa considerou as faces visíveis no desenho do tetraedro, mas não mencionou a natureza da base e uma das respostas não teve justificativa.

No exercício 1(a), considerando a natureza do sólido, as justificativas de dois alunos mostraram que a aresta tracejada parece não ter significado, pois consideraram o desenho como a representação de uma figura plana. Outro aluno, apesar de responder que a figura

representava um triângulo, mostrou em sua justificativa que estava confundindo triângulo e pirâmide, pois mencionou estes dois objetos, usando os termos como sinônimos.

As justificativas do exercício 1(b) mostram que todos alunos consideraram as faces do sólido como representando um plano. Para esses alunos, três pontos estão em um mesmo plano quando é possível identificar um polígono com esses três pontos em seu interior, mas no desenho não é possível identificar tal situação, ou seja, os alunos não puderam decidir a pertinência dos pontos aos planos definidos pelas faces do sólido. De fato, os três pontos estão simultaneamente no interior de dois triângulos.

Nenhum aluno mobilizou a propriedade relativa à determinação de um plano por três pontos não-colineares, ou seja, não se posicionaram no pólo do sabido para decodificar o desenho. Assim, podemos considerar que as justificativas dos alunos foram de modo essencial baseadas no pólo do visto. Mais precisamente, sendo o objeto um sólido, os alunos limitaram-se aos planos determinados por suas faces.

As justificativas para o exercício 5 mostram que os alunos consideraram, novamente, os planos como sendo os polígonos representados ou explicitados no desenho. Para os alunos, três pontos estão em um mesmo plano quando é possível identificar um polígono com esses três pontos em seu interior. Como no desenho não é possível identificar tal situação, os alunos responderam que os três pontos não estão em um mesmo plano. Este tipo de interpretação pertence novamente ao pólo do visto.

2.4.2 Exercício 2

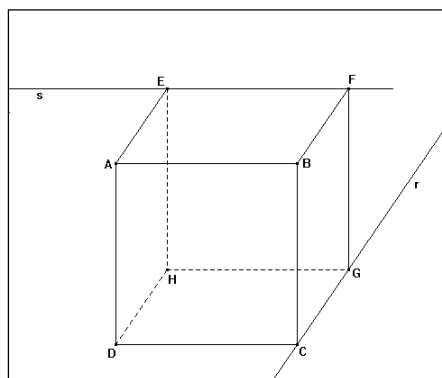
Este exercício foi adaptado de um exemplo dado por Cavalca (1998) em sua dissertação de mestrado.

Exercício 2

Considere as retas r (que passa por C e G) e s (que passa por E e F). As retas r e s se interceptam?

- () Sim
- () Não
- () Não sei

Justifique sua resposta.



Quadro 2.3: Exercício 2

Em seu exemplo, Cavalca (1998) considerou que alguns alunos tratam figuras espaciais como se fossem figuras planas, posicionando-se no pólo do visto. Para ilustrar esta constatação, o autor citado mostrou um exemplo no qual vários alunos responderam que, dentre os pontos A, B e C, este último era o mais próximo da reta r (a partir da representação abaixo).

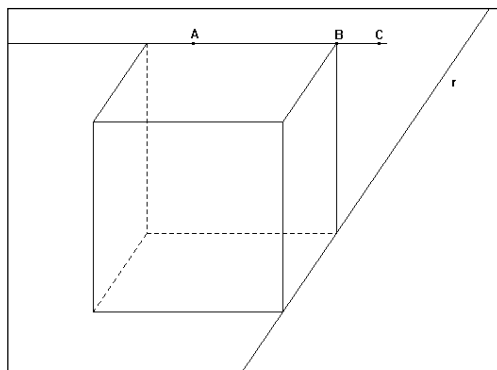


Figura 2.1: Exemplo extraído de Cavalca (1998, p. 13)

No exercício 2 deste estudo, foi proposto um cubo, um sólido habitual no ensino brasileiro, duas retas reversas suportes de duas arestas do cubo. Retiramos os pontos A, B e C do exemplo original de Cavalca (1998), pois o objetivo desta atividade é verificar a interpretação dos alunos quanto à posição de duas retas reversas em uma dada representação. Se o aluno considerar a figura espacial como plana e privilegiar o que vê (pólo do visto), o aluno responderá “sim”.

Resultados

Metade dos alunos (3) interpretou o desenho, como sendo a representação de uma figura plana, posicionando-se no pólo do visto, pois consideraram a intersecção das retas cruzando-se no desenho, como se houvesse um prolongamento dessas retas. Dois destes alunos usaram uma propriedade geométrica para afirmar que as retas interceptam-se, mas, em ambos os casos foram usados conceitos ligados à Geometria Plana. As respostas dadas faziam referência a retas paralelas para justificar a intersecção das retas. Estas respostas não consideraram que no espaço podem existir retas que não são nem paralelas, nem concorrentes.

A justificativa da outra metade (3) dos alunos considerou que as retas não se interceptam, interpretando o desenho como uma representação de um objeto espacial, o cubo, mas também o cubo é um objeto familiar, dando uma interpretação mais próxima e esperada, ainda que os alunos não utilizassem os termos corretos.

2.4.3 Exercício 3

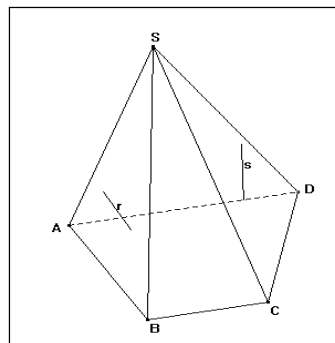
O exercício está baseado em uma atividade realizada na tese de doutorado do Chaachoua (1997).

Exercício 3

Seja uma reta r do plano (SAB) e uma reta s do plano (SCD). As retas r e s são secantes (se interceptam)?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Não sei

Justifique sua resposta.



Quadro 2.4: Exercício 3

O exercício apresenta um sólido - a pirâmide SABCD e duas retas r e s representadas por duas linhas no interior das faces SAB e SCD.

Para este exercício, foram especificadas algumas relações entre os objetos geométricos; os dados permitem decidir, com base no desenho, se as retas são secantes ou não. Para Chaachoua (1997), é a este tipo de situação que os alunos são, geralmente, confrontados na resolução de problemas de Geometria Espacial, em que a construção é possível no desenho, prolongando o traçado das retas r e s .

Chaachoua (1997) considerou a resposta “não, porque as respectivas intersecções com a reta de intersecção dos planos SAB e SCD são distintas”, como correta para este exercício. Em uma resposta do tipo “não, porque r e s não estão em um mesmo plano”. O autor considera que a interpretação do aluno é de que estar em um mesmo plano significa estar na mesma face. Já em uma resposta “não, os planos não são secantes”; Chaachoua (1997) imagina que para os alunos, como as faces (SAB) e (SCD) não têm nenhuma aresta em comum, então, as retas r e s não podem ser secantes.

Resultados

As justificativas de quatro alunos mostram que duas retas são secantes quando elas se interceptam e aos alunos é importante que o desenho mostre a intersecção das retas, isto é, que elas sejam representadas “cruzando-se”. Como não é o caso no desenho dado, eles consideram que as retas não se interceptam, ficando no pólo do visto.

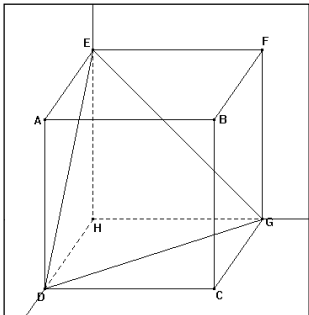
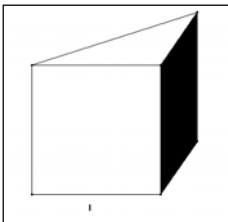
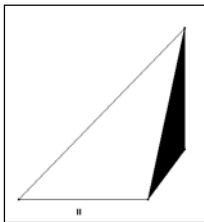
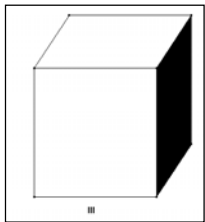
Dos outros dois alunos restantes, um deles fez referência ao fato das retas r e s não serem paralelas, como justificativa para sua resposta de que as duas retas interceptam-se. Esta resposta considerou o seguinte critério: “duas retas não paralelas, são secantes”. O aluno não levou em conta a possibilidade de que, no espaço, existem retas que não são nem paralelas, nem concorrentes, também não considerou a intersecção dos planos e das retas r e s com essa intersecção.

Já o segundo aluno, respondeu que “existe uma reta que liga os pontos A e D, passando as retas r e s ”. Ainda que tal resposta não esclareça a posição relativa das retas r e s (entre si), pode ser considerada como relativa ao pólo do visto, atendo-se somente às relações espaciais do desenho.

2.4.4 Exercício 4

Esta atividade foi realizada por Cavalca (1998) em um teste diagnóstico que visava a obter dados mais específicos sobre as possíveis dificuldades dos alunos no que se refere à visualização espacial.

Exercício 4

Quais das figuras I, II e III têm a mesma forma que a menor das partes em que o cubo fora cortado?

☐ I
☐ II
☐ III
☐ Nenhuma das três
☐ Não sei

Justifique sua resposta.

Quadro 2.5: Exercício 4

O exercício apresenta um cubo “cortado” em duas partes por um plano que passa por três de seus vértices. Em seguida, apresentam-se os desenhos de um prisma triangular reto, de um tetraedro e de um cubo, identificados com os números I, II e III, respectivamente.

No desenho do cubo cortado, os segmentos foram pontilhados para indicar as arestas encobertas e não foi feito sombreado e nas outras figuras só foram representadas as arestas visíveis e uma das faces foi sombreada.

Para Cavalca (1998), este tipo de questão permitiria observar se os alunos conseguem, baseados em uma representação plana distinguir formas espaciais.

Para Cavalca (1998), na resolução do exercício, os alunos deveriam observar que todas as faces da parte menor resultante do corte do cubo eram triangulares e apenas uma das figuras apresentadas tinha todas as faces em forma de triângulo (II) e o número de vértices da parte menor do cubo só coincidia com o número de vértices da Figura II.

Segundo Cavalca (1998), para o aluno resolver a atividade poderia usar as seguintes estratégias:

- olhar o desenho e imaginar o cubo cortado. Localizar e imaginar, isoladamente, a parte menor para compará-la com as Figuras I, II e III até identificar qual delas coincide com a parte menor;
- tentar, mentalmente, fazer coincidir cada uma das Figuras, I, II e III, com alguma das partes do cubo cortado. Quando houver coincidência entre uma figura e uma parte do cubo, avaliar se esta é a menor;
- olhar a figura e imaginar o cubo cortado, identificando a parte menor. Desenhar essa parte menor e comparar com as respostas possíveis.

Resultados

Na resolução do exercício, três alunos observaram que as faces da parte menor resultante do corte do cubo eram triangulares e apenas uma das figuras apresentadas tinha todas as faces em forma de triângulo (II).

Os demais alunos tentaram imaginar o corte do cubo, um deles acabou respondendo que não sabia e os outros dois, que nenhuma das Figuras (I, II e III) correspondia ao corte imaginado, o pólo do visto não foi suficiente e não foram mobilizadas propriedades geométricas (ausência de elementos do pólo do sabido), mesmo o cubo sendo familiar, a secção foi difícil de ser identificada pelos alunos.

2.4.5 Exercício 6

O exercício 6 foi inspirado em uma atividade realizada por Parzysz (1988).

Exercício 6

Considerando a figura ao lado:

a) O ponto A pertence ao plano α ?

() Sim

() Não

() Não sei

Justifique sua resposta.

b) O ponto B pertence ao plano α ?

() Sim

() Não

() Não sei

Justifique sua resposta.

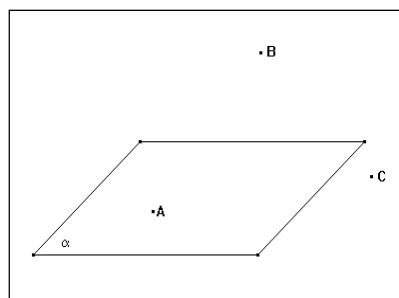
c) O ponto C pertence ao plano α ?

() Sim

() Não

() Não sei

Justifique sua resposta.



Quadro 2.6: Exercício 6

O desenho representa um plano α e três pontos A, B, C. Para cada um dos pontos, o aluno deve responder se o ponto pertence ou não ao plano α ou se o desenho não permite concluir.

Para Parzysz (1988), é teoricamente impossível afirmar se um determinado ponto pertence ao plano α ou não. Com base no pólo do visto, há uma interpretação que se a representação do ponto for interior ao quadrilátero que representa o plano, o ponto será visto como pertencente ao plano. Para o autor, também, é possível notar certa influência da horizontalidade, fato que leva muitos alunos a considerarem que o ponto C pertence ao plano α , porque é mais fácil imaginar o prolongamento do plano α horizontalmente que obliquamente.

Resultados

Todos os alunos consideraram que o ponto A pertence ao plano α e o ponto B e C não pertencem ao plano α , com exceção de um aluno que, para o item (b), imaginou um triângulo B α A, ligando os pontos dois a dois e para o item (c), pensou em um triângulo ABC, também, ligando os pontos dois a dois. O ponto α , um dos vértices do primeiro triângulo, corresponde ao paralelogramo que representa o plano (“rótulo”).

Podemos notar que as justificativas expressam que o plano é reduzido ao polígono que o representa. As respostas mostram a delimitação do espaço interior do polígono, como sendo o plano representado, sendo este tipo de resposta referente ao pólo do visto.

2.4.6 Exercício 7

Este exercício foi retirado de uma atividade realizada por Parzysz e Colmez (1993) que consistia em representar uma pirâmide de base quadrada (descrição no quadro abaixo).

Exercício 7

Faça um desenho cuidadoso de uma pirâmide como esta que está sobre a mesa, de forma que um de seus colegas, vendo o seu desenho, possa reconhecer este objeto entre outros sólidos.

Quadro 2.7: Exercício 7

A pirâmide ficou exposta durante 20 minutos, com mudança de posição de tempos em tempos. Os alunos estavam organizados em círculo com a pirâmide sobre uma carteira ao centro. Assim conforme Parzysz e Colmez (1993), foram usados os seguintes critérios de observação para categorizar os desenhos:

- como o aluno iniciou o desenho: por uma face ou pela base da pirâmide?
- o desenho desenvolveu-se sobre o olhar fixado sobre uma aresta ou sobre uma face?
- existe algum tipo de perspectiva?
- as propriedades da pirâmide estão preservadas no desenho?
- qual a posição da base quanto às extremidades da folha?
- qual a forma da base?
- qual a posição do vértice da pirâmide?
- também consideramos eventuais comentários que permitam indicar informações não codificadas (realismo do desenho, textos explicativos, tracejados, etc.).

Resultados

Os seis alunos produziram nove desenhos, e três alunos produziram dois desenhos na mesma folha. Todos desenhos estão reproduzidos no Anexo 2.

As análises dos desenhos dos alunos, segundo os critérios estabelecidos mostram que seis produções começaram por uma face lateral e três, pela base. Quanto à escolha do ponto de vista, oito produções priorizaram uma face, e só uma delas, uma aresta (Figura 2.2).

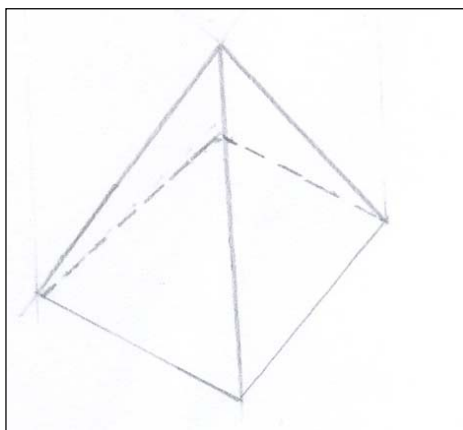


Figura 2.2: Desenho priorizando a aresta

Os desenhos foram classificados nas seguintes categorias (Capítulo 1, p. 12):

Categorias	Desenhos
Categoria 3	5
Categoria 8	1
Categoria 11	1
Categoria 15	1
Sem classificação	1

Quadro 2.8: Distribuição dos desenhos por categoria

A categoria 15 privilegia o ponto de vista e permite conservar a simetria diagonal, o desenho da Figura 2.2 é um exemplo desta categoria que conserva um número maior de propriedades e, por este motivo, está mais próxima do pólo do sabido.

A categoria 8 usa o recurso das fugantes não paralelas, permite conservar a simetria mediana das duas faces isósceles (Figura 2.3).

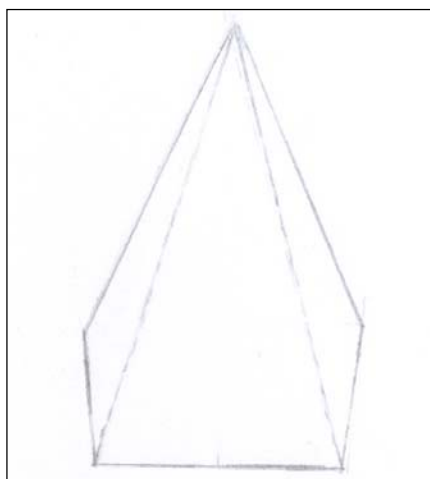


Figura 2.3: Desenho pertencente à categoria 8

Os desenhos mais freqüentes foram da categoria 3, o desenho dessa categoria está fundamentado no triângulo, em geral, isósceles, triângulo isolado ou, mais freqüentemente, triângulos adjacentes (Figura 2.4). Esta categoria, conforme estudo realizado no Capítulo 1, é mais freqüente nas 2ª e 3ª séries do Ensino Fundamental, estando mais próxima do pólo do visto.

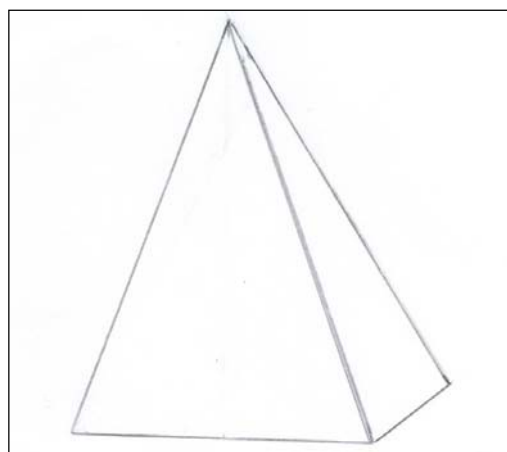


Figura 2.4: Desenho pertencente à categoria 3

As análises dos desenhos considerando a posição da base quanto às extremidades da folha mostram que o caso em que “pelo menos, uma das extremidades do quadrilátero representando a base é horizontal” representa a maioria dos desenhos, sete do total de nove. O caso em que “o quadrilátero tem um eixo vertical de simetria” aparece somente em um desenho. Só um aluno fez a face lateral (triângulo isósceles) com a aresta paralela à extremidade inferior da folha. A maioria dos alunos usou a folha como referência para

posicionar a base. Os alunos parecem ter iniciado seus desenhos com base em um segmento de reta paralelo à extremidade inferior da folha.

Os resultados quanto à forma da base estão indicados no quadro abaixo.

Forma da base	Produções dos alunos
Quadrado	2
Losango	2
Triângulo	2
A forma da base não é explícita	3

Quadro 2.9: Distribuição dos desenhos quanto à forma da base

A forma da base representada por um quadrado pode ser explicada por uma preocupação, entre alguns alunos, por uma imagem verdadeira (próxima) da base da pirâmide, e isto pode compensar, até certo ponto, a representação, ou seja, o que é sabido substitui o que é visto.

A forma da base representada por um losango pode ser explicada por uma preocupação, entre alguns alunos, em preservar as propriedades do objeto no desenho. O losango tem como vantagem a parte visual e mantém a igualdade de comprimento dos quatro lados. Na realidade, o losango corresponde à ilusão que podemos, graças a um desenho suficientemente sofisticado e próximo do objeto, fazer uma representação próxima, sem qualquer ambigüidade.

Já o estudo da posição do vértice da pirâmide mostrou uma predominância da representação do vértice sobre a mediatriz do lado “inferior” do quadrilátero da base (6 desenhos do total de 9). Este tipo de representação corresponde mais exatamente (mas não de um modo sistemático) a outra prioridade na construção da representação: em vez de começar desenhando a base, o aluno representa primeiro uma face lateral (como um triângulo isósceles).

2.5 Considerações sobre os Resultados Obtidos

Nas respostas dos alunos, observamos que existe uma presença de conceitos ligados à Geometria Plana, o que não acontece em relação à Geometria Espacial.

Embora os alunos tenham se mostrado capazes de reconhecer os sólidos geométricos, percebemos uma falta de precisão na linguagem usada.

Em suas respostas, os alunos mostraram que o uso de regras e convenções nas representações planas de objetos espaciais não são dominadas, pois as representações planas utilizadas nas atividades foram interpretadas como figuras planas.

Os alunos apresentaram dificuldade para distinguir uma figura espacial, cujas faces são polígonos, dos polígonos propriamente ditos.

Podemos notar que as respostas dos alunos estão apoiadas no pólo do visto, raramente os alunos usaram propriedades geométricas (pólo do sabido) para justificar suas respostas.

Na representação plana da pirâmide de base quadrada, os alunos tentaram incluir efeitos de tridimensionalidade para o desenho, como, por exemplo, arestas tracejadas, mas não suficientes para demonstrar um domínio de técnicas de perspectiva. A maioria das produções dos alunos assemelha-se à categoria 3 de Parzysz e Colmez (1993), que tiveram maior incidência nas séries iniciais.

Após as análises das atividades no papel e lápis, podemos identificar algumas dificuldades dos alunos e perceber que estes se situaram no pólo do visto e, em poucos momentos, o pólo do sabido é usado. Pautados nesta constatação, concluímos que estes alunos apresentam comportamentos semelhantes aos de Parzysz, mostrados antes.

No próximo capítulo, o conjunto de atividades que serão realizadas no *Cabri 3D* que será desenvolvido em duas fases. A primeira, com o objetivo de familiarização com o software e a introdução de alguns conceitos de Geometria Espacial. A segunda, compreende problemas de construção e de Geometria de Posição, que serão resolvidos com o apoio do *Cabri 3D*. Na interação do sujeito com as ferramentas e representações do *Cabri 3D*, pretendemos investigar qual o papel do software na gestão dos pólos do visto e do sabido, bem como os aspectos técnicos e conceituais que interferem nas construções propostas.

CAPÍTULO 3

PROPOSTA INICIAL DO *DESIGN* PARA O *CABRI 3D*

Neste Capítulo, faremos uma apresentação do *Cabri 3D*, de suas ferramentas e menu.

3.1 Descrição das Atividades

Para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, elaboramos três tipos de atividades: de familiarização, exploração e construção que devem ser desenvolvidas com o auxílio do software *Cabri 3D*, em duas fases: a primeira fase, é a de familiarização dos alunos com as ferramentas do software; a segunda fase, envolve atividades de exploração e construção, visando a explorar propriedades da Geometria Espacial e propiciar aos sujeitos o levantamento de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas, bem como verificar quais relações e propriedades da Geometria Espacial são consideradas pelos sujeitos.

As duas fases de nosso *Design* estão distribuídas em seis encontros de 1h30 cada, compreendendo:

- Primeiro encontro: apresentação do menu do software *Cabri 3D* e uma atividade de familiarização. Esse primeiro encontro, tem o objetivo de apresentar o *Cabri 3D* aos sujeitos de forma que as características específicas desse software não se tornem um empecilho para o desenvolvimento das atividades que serão propostas nos próximos encontros.
- No segundo, terceiro e quarto encontros, são propostas atividades de construção e exploração do *Cabri 3D*. As atividades dão continuidade à familiarização iniciada no primeiro encontro.
- No quinto encontro, são apresentadas as atividades de exploração e construção, visando a explorar uma propriedade da Geometria Espacial e propiciar a formulação de conjecturas baseadas em explorações empíricas pelos sujeitos.
- No sexto e último encontro, é proposta uma atividade de construção com exploração de propriedades da Geometria Espacial conjecturadas no encontro anterior.

Encontros	1º	2º, 3º e 4º	5º	6º
Atividades	1	2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10	11

Quadro 3.1: Distribuição das atividades

Em síntese, buscamos observar a interação dos sujeitos com o software, quais as dificuldades ou facilidades, enfim, qual o papel para esses alunos, em particular, desse ambiente nas atividades propostas.

3.2 Apresentação do Software *Cabri 3D*

A apresentação expositiva do software *Cabri 3D*⁴ visa a mostrar seus menus (Figura 3.1) e algumas características do software, introduzindo ferramentas essenciais para o desenvolvimento das atividades que seguem. Pretende-se fazer uma breve apresentação do software com base na exposição de sua interface e alguns de seus recursos.

O *Cabri 3D* permite criar, construir, ver e manipular objetos geométricos em três dimensões (retas, planos, cones, esferas, poliedros), utilizando propriedades usuais da geometria.

Sendo um software de geometria dinâmica, possibilita movimentar objetos de base, deformando a figura e mantendo as propriedades que lhe foram atribuídas no momento da construção.

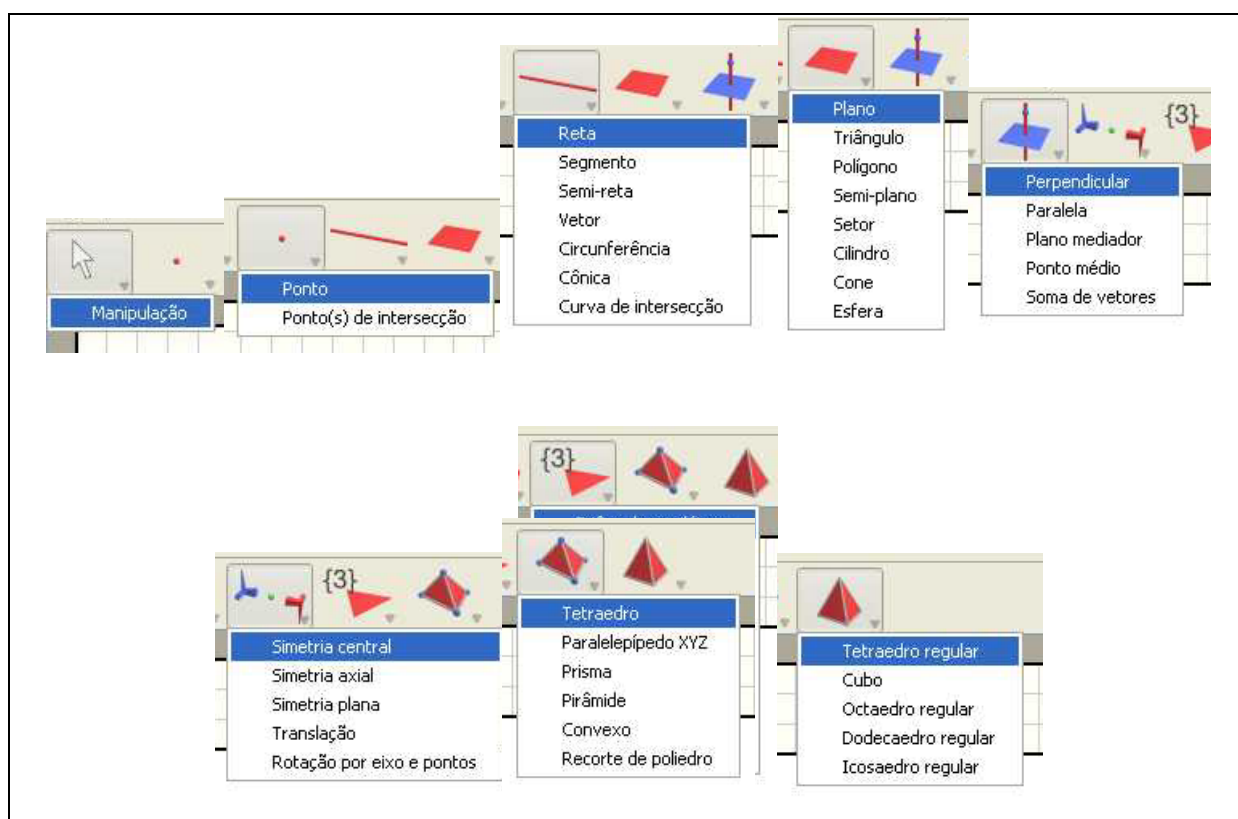


Figura 3.1: Ferramentas do *Cabri 3D*

⁴ O *Cabri 3D* foi desenvolvido por Cabrilog e traz os mesmos princípios e objetivos do projeto *Cabri-Géomètre*, disponível no site: www.cabri.com

Com o software aberto, o professor-pesquisador faz comentários sobre o quadrilátero representando o plano horizontal de referência (Figura 3.2), enfatizando que o plano se estende, além desse quadrilátero e que todos os objetos, por *default*, localizam-se nesse plano. Para ilustrar tal situação, será usada a ferramenta “Ponto” para criar vários pontos no quadrilátero (parte visível do plano) e fora dele (Figura 3.3) e depois posicionando o plano em uma vista frontal, ilustra-se que todos os pontos estão contidos no plano (Figura 3.4), o que não é possível perceber visualmente, somente após o uso da manipulação direta (com o botão direito do mouse), que permite mudar o ponto de vista do desenho representado na tela do computador.

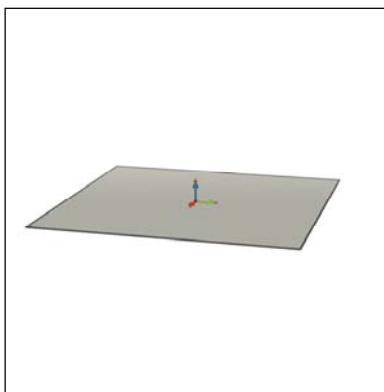


Figura 3.2: Plano horizontal de referência

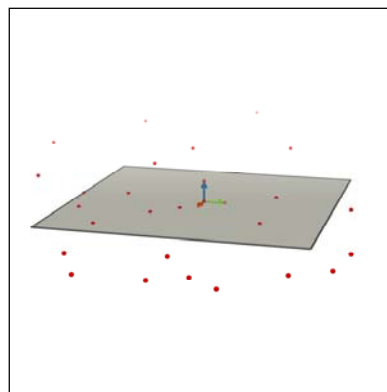


Figura 3.3: Pontos no plano

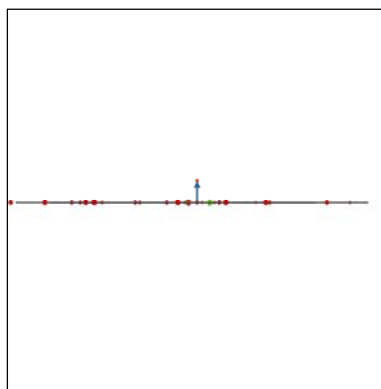


Figura 3.4: Pontos no plano horizontal em uma vista frontal

Na apresentação, também, será mostrado como criar um ponto no espaço, com o uso da tecla *Shift* no momento da criação, aparecendo uma grade, dando a idéia de o ponto pertencer a um plano horizontal (plano xy), e movimentando o ponto verticalmente, altera-se a cota z, conforme Figura 3.5.

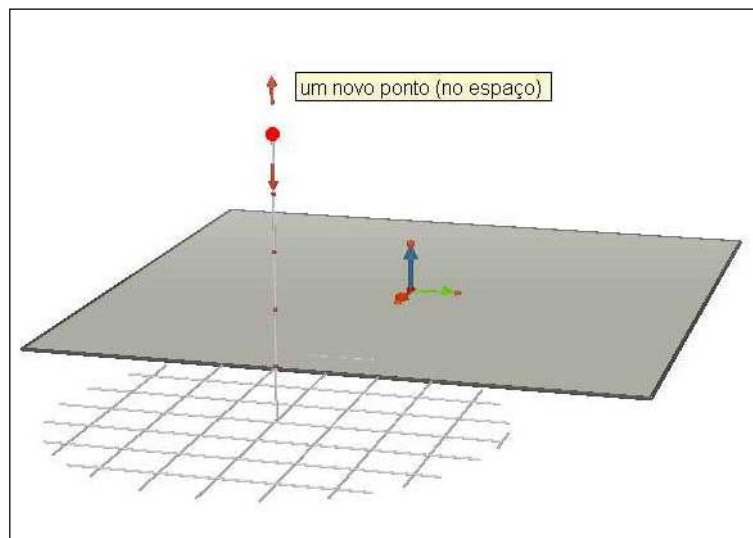


Figura 3.5: Criação de ponto no espaço

Com a construção de vários paralelepípedos formados por dois pontos indicando uma das diagonais (Figura 3.6), um podendo ser no plano horizontal e outro no espaço (não pertence a esse plano), será enfatizada a questão do uso da tecla *Shift* (para pontos que não pertencem ao plano horizontal), o que esses pontos representam e a manipulação do objeto, como mudanças de pontos de vista.

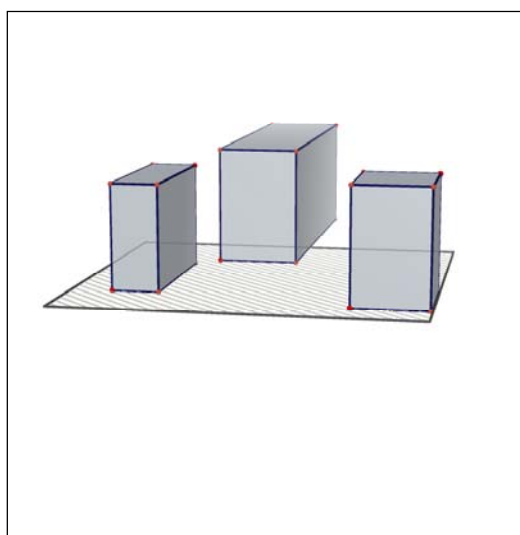


Figura 3.6: Paralelepípedos no plano horizontal

Por fim, serão apresentadas algumas construções de cubo, tetraedro, esfera, etc., com o intuito de destacar a “Ajuda de ferramentas” e os atributos do desenho que podem ser alterados, com o botão direito do mouse quando selecionado o objeto.

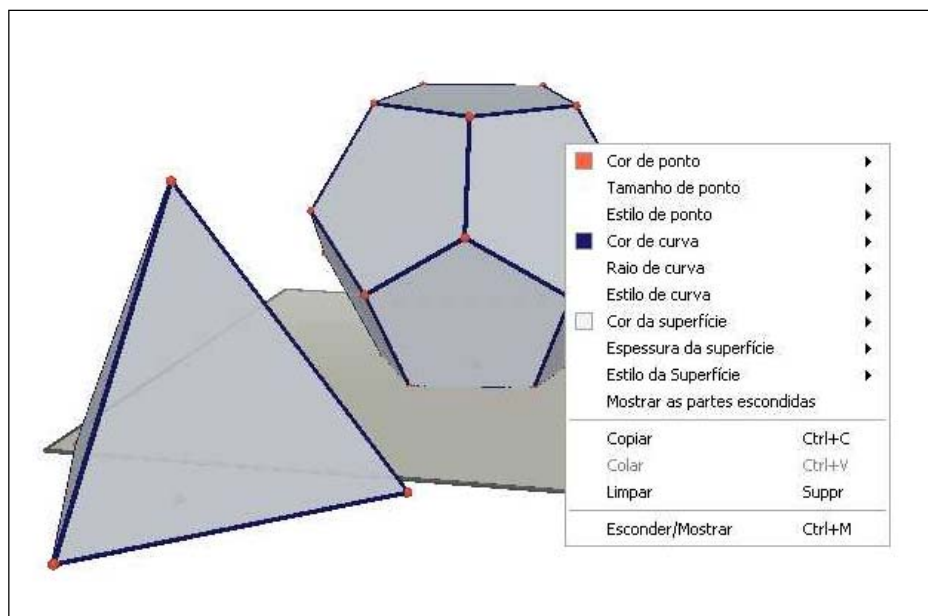


Figura 3.7: Tetraedro, Dodecaedro e menu de atributos

Outra característica importante do *Cabri 3D* é a possibilidade de se utilizar diferentes tipos de perspectiva. A utilizada por *default*, é uma perspectiva central, com distância ao observador de 40 cm, mas é possível alterar essa perspectiva sempre que desejado com a opção “Nova vista”. Optamos por manter essa perspectiva e não explorar outras pelo fato dos alunos não conhecerem de modo formal tais projeções. As mudanças de ponto de vista serão exploradas manualmente com o botão direito do mouse.

Na sequência, apresentamos as atividades propostas para este estudo.

3.3 Atividades de familiarização ao *Cabri 3D*

As primeiras sete atividades são compostas por diversas construções para a utilização das ferramentas básicas do menu do *Cabri 3D*, cujo objetivo principal é familiarizar o aluno com as ferramentas do software e com a idéia da manipulação direta em Geometria do Espaço, observando o sujeito em relação aos aspectos conceituais e técnicos e ao uso de tais ferramentas, visando a oferecer um ambiente favorável à elaboração e validação experimental de conjecturas, bem como a ampliação do campo de experimentação dos desenhos de objetos geométricos tridimensionais (Capítulo 1, p. 17).

3.3.1 Atividade 1

A atividade 1 pode ser vista como uma construção guiada e propõe a utilização das seguintes ferramentas básicas do *Cabri 3D*: ponto, reta e plano. A ficha do aluno para esta primeira atividade está reproduzida abaixo.

Atividade 1: *Criando pontos, retas e planos.*

- ☑ A ferramenta “**Ponto**” cria pontos no plano e no espaço.
Ao acionar essa ferramenta e criar um ponto, este pertence ao plano horizontal representado na tela (plano “cinza”).
Para criar um ponto no espaço, é necessário apertar a tecla *Shift* no momento da criação.
- 🖨 Crie dois pontos A e B pertencentes ao plano horizontal (ponto no plano) e, em seguida, crie dois outros pontos X e Y não pertencentes ao plano horizontal (ponto no espaço).
- 🖱 Movimente os pontos e observe como eles se comportam. Com o botão direito do mouse, modifique o ponto de vista da situação. Utilize também a rotação automática.
- 💾 Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1_1.

- ☑ A ferramenta “**Reta**” cria retas a partir de dois pontos distintos.
- 🖨 Crie a reta t passando por A e B e a outra reta s passando por X e Y. Agora, crie uma reta p utilizando um ponto do plano horizontal e um ponto fora desse plano.
- 🖱 Movimente esta última reta e observe o que acontece.
- 🖋 Descreva com suas palavras a posição da reta p em relação ao plano horizontal. Anote suas observações em uma caixa de texto (use “**Documento**” e “**Nova vista texto**”).
- 💾 Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1_2.

- ☑ A ferramenta “**Plano**” determina um plano.
- 🖨 Utilize a ferramenta “**Plano**” do Cabri 3D e verifique as possibilidades de criação de um plano. Experimente cada uma dessas possibilidades.
- 🖱 Para observar os diferentes planos criados, movimente os objetos e modifique o ponto de vista (botão direito do mouse). Utilize também a rotação automática.
- 💾 Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ1_3.

Quadro 3.2: Atividade 1

Na primeira parte da atividade 1, o aluno deverá criar dois pontos no plano horizontal de referência e dois no espaço (não pertencentes a esse plano). Conforme descrito, os pontos, por *default*, são localizados no plano horizontal, tanto se forem criados na parte visível ou na não visível desse plano. Assim como na apresentação, será enfatizado o uso da tecla *Shift* para a criação de pontos no espaço, não pertencentes ao plano. Isto, a princípio, poderá ser uma dificuldade, por esta razão, o enunciado da atividade 1 traz instruções de como criar tais pontos no espaço. Para verificar sua solução, o aluno poderá posicionar o plano em uma vista frontal, conforme sugerido na exposição inicial (Figura 3.8). Caso não seja espontâneo, os alunos serão motivados, pelo professor-pesquisador a movimentar os objetos e mudar constantemente o ponto de vista.

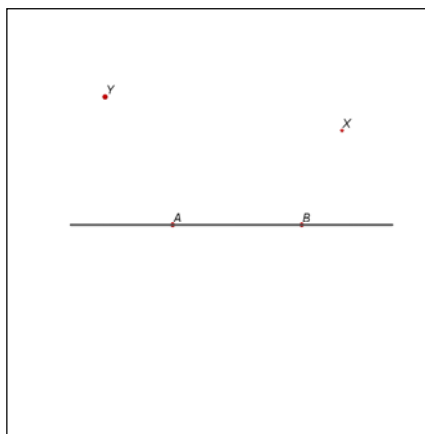


Figura 3.8: Pontos no plano horizontal de referência e fora dele

Na segunda parte da atividade 1, o aluno poderá criar retas apoiado nos pontos existentes. O aluno será orientado a sempre exibir a “Ajuda de ferramentas” no lado direito da área de trabalho com “Atributos” e “Vista atual”. A “Ajuda de ferramentas” traz informações sobre as mesmas ou opções do menu, explicitando como os objetos devem ser criados.

Na criação das retas t e s , o aluno utilizará os pontos já criados; na criação da reta p , o aluno poderá utilizar pontos já criados ou fazer novos pontos.

O aluno deverá movimentar a reta p e descrever sua posição em relação ao plano horizontal. Como podemos observar na Figura 3.9, a reta p intercepta o plano horizontal (é secante a ele). Nessa fase inicial, o professor estará observando a manipulação dos alunos e incentivando-os à manipulação e movimentação de seus objetos, inclusive a mudança de ponto de vista (com o botão direito do mouse).

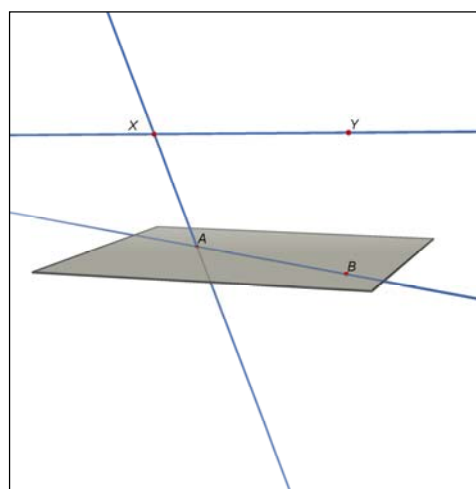


Figura 3.9: Retas

Na terceira parte da atividade 1, o aluno deverá explorar a criação dos planos. A ferramenta “Plano” permite criar um plano a partir de três pontos não colineares, de uma reta e um ponto fora dela e de duas retas coplanares. O aluno poderá utilizar os pontos e retas já criados ou não.

Na criação de um plano por duas retas coplanares, é possível que os alunos tenham dúvidas relativas ao termo, ou mesmo, à idéia. Eles, provavelmente, sabem que retas coplanares são retas que estão no mesmo plano, mas a questão é: quando duas retas estão no mesmo plano ou quando elas definem um plano? Na atividade 3, se for confirmada esta dificuldade, será retomado o conceito de retas coplanares para esclarecer e sanar as possíveis dúvidas apresentadas na solução da atividade 1.

Uma dificuldade que poderá acontecer em relação à visualização dos planos criados é que se o aluno criar um plano por uma reta e um ponto contidos no plano horizontal (sem utilizar a tecla *Shift*), o software criará um plano coincidente com o plano horizontal existente e, pode ser que não perceba que este plano foi criado, mesmo com o recurso momentâneo de cores, indicando essa sobreposição.

Outra dúvida que poderá aparecer, será quando o aluno criar um plano por três pontos não-colineares (A, B, C) e este poderá perceptivamente não conter os três pontos simultaneamente, ou seja, um dos pontos poderá não ser representado na região interior do quadrilátero que representa esse plano (Figura 3.10). Como não poderia deixar de ocorrer, o plano é delimitado por um quadrilátero e existem pontos que não estão em seu interior, podendo dar a impressão (perceptivamente) de que o ponto não pertence a esse plano.

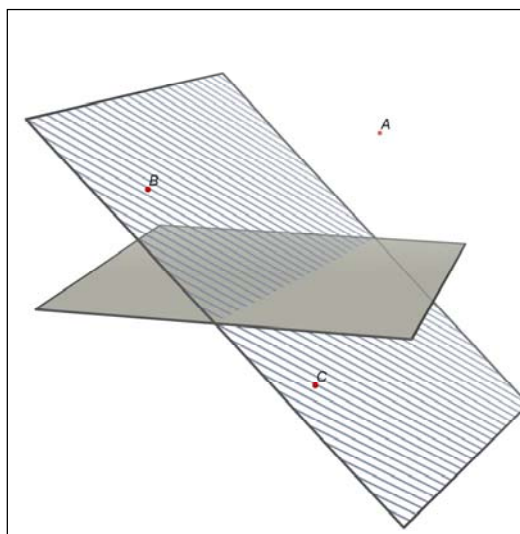


Figura 3.10: Plano definido por três pontos

O professor-pesquisador questionará os alunos a respeito desta situação, buscando resgatar as informações da apresentação expositiva, bem como observar se as interpretações dos alunos referem-se ao aspecto perceptivo-visual (pólo do visto) ou se eles seriam capazes de controlar corretamente suas representações baseados em suas criações e nos conceitos envolvidos.

Com esta atividade, espera-se que os alunos familiarizem-se com os comandos de criação dos entes primitivos, com a manipulação ou movimentação dos objetos e com o uso do botão direito do mouse para as mudanças de ponto de vista.

3.3.2 Atividade 2

Nesta atividade, pretendemos explorar a posição dos segmentos de reta em relação a um plano e ampliar o uso de ferramentas do software. O enunciado da atividade 2 encontra-se no quadro abaixo.

Atividade 2: *Criando segmentos.*

-  Crie um plano qualquer e, em seguida, construa:
 - a) um segmento de reta que “*fure*” esse plano;
 - b) um segmento de reta que não “*fure*” esse plano;
 - c) um segmento de reta contido nesse plano.Utilizando a opção “**Ponto(s) de intersecção**” do menu, valide suas construções.
-  Em cada caso, o que você pode observar? Responda em uma caixa de texto (use “**Documento**” e “**Nova vista texto**”).
-  Movimente os objetos e modifique o ponto de vista. Utilize também a rotação automática.
-  Ligue os **pontos médios** dos três segmentos de reta construídos.
-  Qual a figura obtida? Responda na caixa de texto.
-  Movimente os objetos.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ2.

Quadro 3.3: Atividade 2

Na primeira parte da atividade 2 (criação de um plano qualquer), esperamos que o aluno com a ferramenta “Plano” introduzida antes, crie um plano diferente daquele por *default* da tela, embora possa utilizar o mesmo.

Na continuação da atividade 2, solicita-se a construção de segmentos de reta. Para o item (a), o aluno deverá criar um ponto em cada semi-espço; para o item (b), dois pontos no mesmo semi-espço e no item (c), dois pontos contidos no plano. Pautados nos pontos criados em cada item, espera-se que os alunos unam esses pontos, construindo três segmentos de reta. Para todos os itens, o aluno também poderá criar uma reta e dela construir segmentos de reta, tendo essa reta como suporte.

Esperamos, também, observar o que o aluno compreende por segmento de reta que “fura” e não “fura” o plano, respectivamente, relacionando essa idéia com a existência (ou não) de pontos de intersecção. E, ainda, mobilizam-se conhecimentos para o caso do segmento de reta contido no plano, considerando que os pontos extremidades do segmento devem pertencer ao plano e, neste caso, a intersecção é o próprio segmento.

Ao final desses itens, os alunos podem usar a ferramenta “Ponto de intersecção” para validar experimentalmente suas construções, ou ainda, utilizar o recurso de posicionar o plano em uma vista frontal (Figura 3.11).

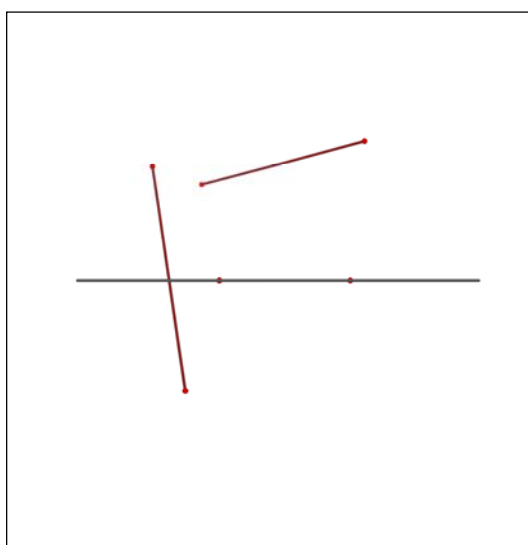


Figura 3.11: Segmentos de reta numa vista frontal

Após as construções dos segmentos, é necessário que o aluno modifique o ponto de vista, pois é possível que algum segmento não esteja na posição desejada, por exemplo, um segmento que, perceptivamente, não furava o plano, na mudança do ponto de vista, podemos perceber que ele intercepta o plano. Assim, pretendemos observar se o aluno considera o plano, além do quadrilátero que o representa, ou seja, que ele se estende além da parte visível. Em outras palavras, é importante observar até que ponto os alunos são “contaminados” pelo pólo do visto.

A segunda parte da atividade 2 visa a introduzir a ferramenta “Ponto médio” que constrói o ponto médio de um segmento (ou entre dois pontos). Nesta etapa, o enunciado solicita ligar os pontos médios e responder qual a figura obtida. Para ligá-los, o aluno poderá utilizar as ferramentas “Segmento”, ou ainda, as ferramentas “Triângulo” ou “Polígono” (Figura 3.12).

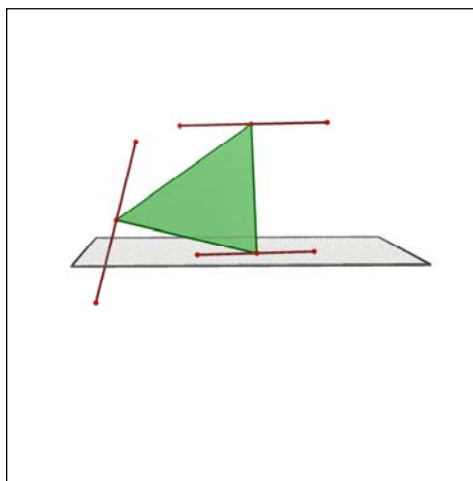


Figura 3.12: Figura baseada nos pontos médios dos segmentos de reta

Pretendemos que os alunos familiarizem-se com algumas ferramentas, buscando sempre controlar experimentalmente suas construções realizadas no *Cabri 3D*, por meio da manipulação e movimentação dos objetos geométricos e da mudança do ponto de vista da figura (botão direito do mouse).

3.3.3 Atividade 3

Nesta atividade, pretendemos explorar os elementos de um cubo, tais como: faces paralelas ou secantes, arestas perpendiculares, paralelas ou reversas e ampliar o uso de ferramentas do software. A terceira atividade está transcrita no quadro que segue.

Atividade 3: *Elementos de um cubo.*

Crie um cubo.

a) Pinte de **vermelho** duas faces paralelas distintas.

b) Pinte de **azul** duas faces secantes.

c) Pinte de **rosa** duas arestas perpendiculares.

d) Pinte de **verde** duas arestas paralelas.

e) Pinte de **marrom** duas arestas reversas.

Lembre-se: duas retas são **reversas** quando não estão contidas em um mesmo plano (e conseqüentemente, não se interceptam).

☒ **Observação:** Para pintar uma face de um cubo, é necessário criar o polígono correspondente à face. E para pintar uma aresta de um cubo, é necessário criar o segmento de reta correspondente a esta aresta.

Movimente o objeto e modifique o ponto de vista. Utilize também a rotação automática.

Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ3.

Quadro 3.4: Atividade 3

A atividade 3 visa a introduzir a ferramenta “Cubo” que fornece um cubo com base em uma face quadrada em um plano, definida por seu centro e um ponto (vértice).

Nos itens (a) e (b), o aluno deverá colorir, respectivamente, duas faces paralelas (Figura 3.13) e duas faces secantes. Para tanto, é preciso criar o polígono correspondente à face. Esta informação aparece no enunciado da atividade para auxiliar o aluno na solução.

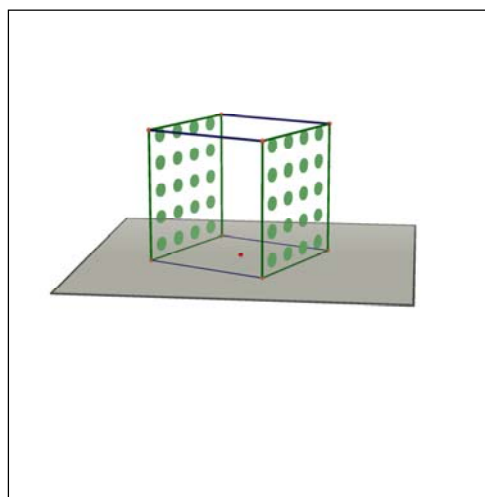


Figura 3.13: Cubo com duas faces paralelas pintadas

Nos itens (c), (d) e (e), o aluno deverá pintar, respectivamente, duas arestas perpendiculares, duas arestas paralelas e duas arestas reversas. Para pintar uma aresta de um cubo, é preciso criar o segmento de reta correspondente a esta aresta. Esta informação aparece no enunciado da atividade para auxiliar o aluno na construção.

Outra informação presente no enunciado, para auxiliar o aluno na resolução da atividade, é a definição de retas reversas, pois é possível que nem todos os alunos estejam familiarizados com esse termo ou conceito, como percebemos no estudo realizado no papel e lápis.

Depois da resolução desta atividade, será feita uma intervenção do professor para esclarecer dúvidas ou reforçar a idéia de retas coplanares, presente anteriormente na criação de planos (Atividade 1). Com o uso da resolução da atividade 3, serão criados planos baseados nos pares de arestas. Esperamos que os alunos percebam não ser possível criar um plano quando se tenta selecionar duas retas reversas e, sim, somente por retas concorrentes ou paralelas ou por uma reta e um ponto fora dela.

3.3.4 Atividade 4

Nesta atividade, do tipo “caixa preta”, pretendemos explorar uma figura previamente construída. Conforme descrito no Capítulo 2 (p. 24), é fornecido um arquivo com uma construção, cujos passos da construção estão omitidos e é solicitado ao aluno que descubra e

construa outra figura com os mesmos elementos e que se comporta da mesma maneira.

O enunciado da atividade 4 encontra-se no quadro abaixo.

Atividade 4: *Descobrimos a construção*

-  Abra o arquivo CXPETA1.fig.
-  Investigue as propriedades dessa figura, movimentando os pontos e modificando o ponto de vista (botão direito do mouse).
-  Descreva as propriedades dessa figura. Anote suas observações em uma caixa de texto.
-  Sua tarefa é construir uma figura com os mesmos elementos e que se comporta da mesma maneira que a figura dada.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ7.

Quadro 3.5: Atividade 4

Um dos objetivos da atividade 4 é caracterizar e construir um tetraedro regular, com base em uma face triangular equilátera em um plano, definida por centro e ponto (vértice). Ao abrir o arquivo, a figura fornecida está posicionada de modo a tornar oculta a figura obtida pela secção paralela ao plano horizontal (Figura 3.14). Esta escolha visa a motivar a movimentação/manipulação inicial dos objetos.

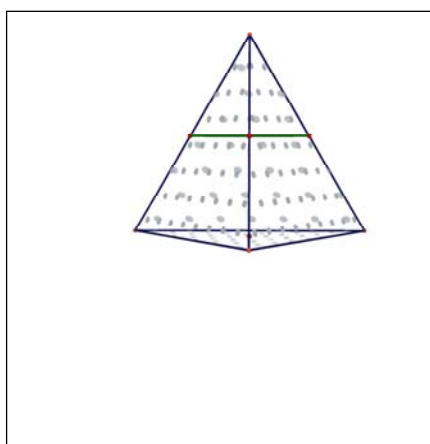


Figura 3.14: Tetraedro regular

Nesta atividade, esperamos que o sujeito percorra algumas etapas: observação, exploração, levantamento de hipóteses, confirmação ou não dessas hipóteses por meio da validação experimental, entre outras.

Na observação da figura, o aluno poderá movimentar pontos de base ou modificar o ponto de vista da figura e, assim, será possível observar as características das faces (triangulares), bem como da secção paralela ao plano horizontal (Figura 3.15).

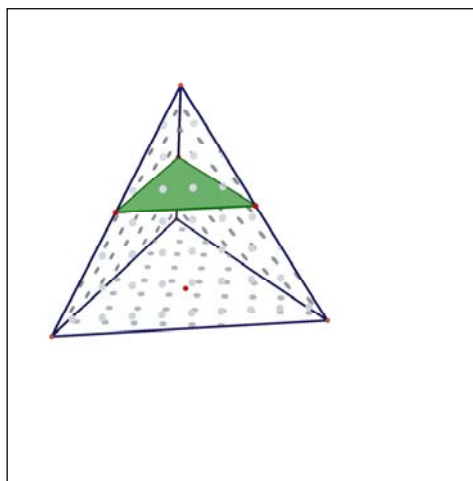


Figura 3.15: Tetraedro regular e um triângulo equilátero

Na exploração da figura, o aluno deverá estar atento às mensagens do software e com a ferramenta “Manipulação”, podemos obter por meio de mensagens de texto os nomes dos objetos, como mostram as Figuras 3.16 (a) e (b).

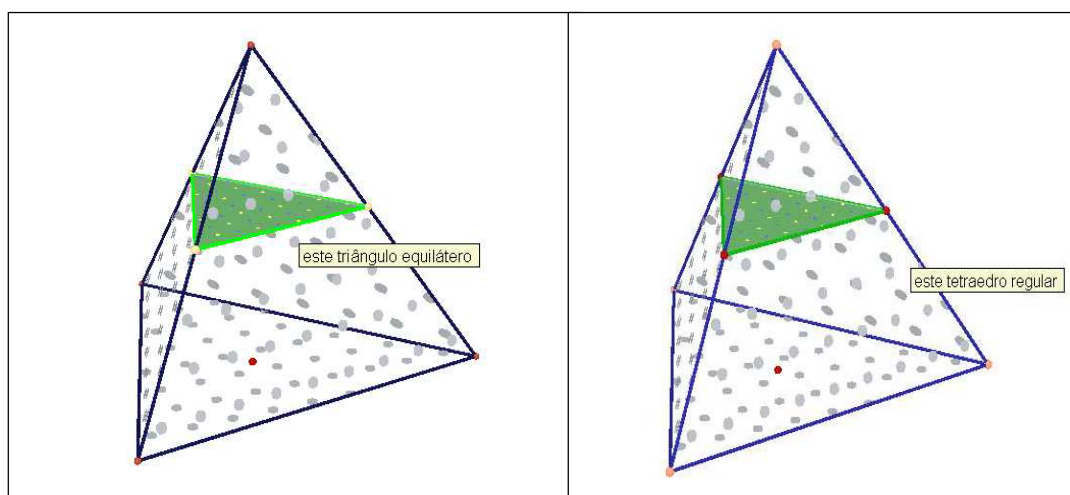


Figura 3.16 (a) e (b): Exploração da caixa-preta

Na exploração da figura, pela manipulação e movimentação da figura para posições particulares, o aluno poderá perceber que a figura é um tetraedro regular com um triângulo equilátero feito com base nos pontos médios das arestas laterais do tetraedro regular.

Na etapa seguinte da atividade, o aluno deverá construir uma figura com as mesmas propriedades da figura dada. Nesta etapa, esperamos que o aluno use a ferramenta “Tetraedro regular” para construir o tetraedro e use a ferramenta “Ponto médio”, introduzida anteriormente, para construir os três pontos médios das arestas laterais. Para construir o triângulo equilátero, o aluno poderá usar as ferramentas “Segmento” ou “Triângulo” ou

“Polígono”.

Se o aluno usar a ferramenta “Segmento”, determinando somente o “contorno”, o software não reconhecerá a figura como triângulo equilátero (polígono regular). Para o software reconhecer esse objeto como triângulo equilátero, o aluno deve usar as ferramentas “Triângulo” ou “Polígono”.

A ferramenta “Triângulo equilátero” constrói um triângulo equilátero por eixo e ponto ou, em um plano, por centro e ponto. Para o aluno utilizar esta ferramenta, ele deverá fazer algumas construções prévias, o que não é provável dada a pouca experiência com o software. No entanto, se o aluno assim o desejar, será orientado pelo professor-pesquisador no uso das ferramentas.

É necessário ressaltar o fato de que o *Cabri 3D* não tem ferramenta de medida (distância, comprimento ou ângulo), normalmente, usado no *Cabri Géomètre II*. É possível que os alunos manifestem interesse por tais ferramentas e, nesse momento, o professor-pesquisador irá propor uma discussão sobre essa ausência.

Com esta atividade, poderemos perceber se os alunos recorrem às propriedades e conceitos da Geometria Espacial ou se ficam restritos a observações e justificativas baseadas na reprodução da figura dada. Em outros termos, observaremos se os objetos são considerados pelos alunos em termos de propriedades (pólo do sabido) ou somente dos aspectos perceptivos (pólo do visto).

3.3.5 Atividade 5

Nesta atividade, pretendemos explorar secções planas de um paralelepípedo.

A ficha do aluno para a quinta atividade vem reproduzida no quadro abaixo.

Atividade 5: “Recortando” um paralelepípedo.

-  Com a opção “**Paralelepípedo**” do Cabri 3D, crie um paralelepípedo ABCDEFGH.
- ☒ **Atenção:** o paralelepípedo é criado a partir de dois pontos, correspondendo às extremidades de uma diagonal.
-  Estude as secções determinadas neste paralelepípedo pelos planos definidos pelos pontos M, N, e P, nos seguintes casos:
 - a) $M = A$, $N =$ ponto médio de CG e $P =$ ponto médio de DH .
 - b) $M = A$, $N = C$ e $P =$ ponto médio de FG .
 - c) $M = A$, $N =$ ponto médio de CG e $P =$ ponto médio de FG .
 - d) $M =$ ponto médio de AE , $N =$ ponto médio de BC e $P =$ ponto médio de GH .Em cada caso, tente justificar suas respostas.
-  Para melhor visualizar, crie sempre os planos determinados pelos pontos M, N, P e utilize “**Recorte de poliedro**”. Movimente os objetos e mude o ponto de vista.
-  Para cada item, salve uma figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ8_<letra do item>.

Quadro 3.6: Atividade 5

Na atividade 5, o aluno deverá construir um paralelepípedo, definido por dois pontos representando uma diagonal. O primeiro ponto (ponto E) do paralelepípedo pode estar no plano horizontal e o segundo ponto (ponto C) deve ser obrigatoriamente fora do plano horizontal de referência (usando a tecla *Shift*). A Figura 3.17 mostra os dois pontos que formam a diagonal (pontos C e E). Para nomear os vértices do paralelepípedo, o aluno deverá acionar a opção ponto, selecionar cada vértice e nomeá-lo via teclado.

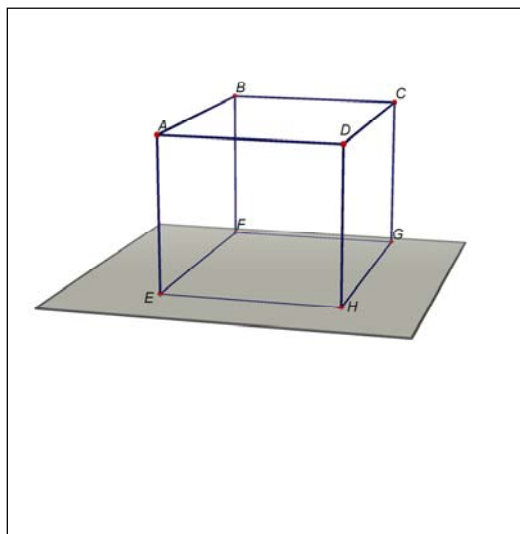


Figura 3.17: Paralelepípedo ABCDEFGH definido por dois pontos E e F

Na sequência da atividade, os alunos deverão recorrer ao paralelepípedo construído, com o intuito de obter diferentes secções, construídas com base na intersecção do paralelepípedo e por um plano definido por três pontos dados.

Antes de utilizar a ferramenta, “Recorte de poliedro” que constrói a intersecção de um poliedro e de um semi-espço, sendo este definido por um plano e um ponto. O aluno deverá modificar o ponto de vista e observar o número de arestas e faces, buscando visualizar e caracterizar a figura obtida. Nessa atividade, as secções deverão ser descobertas de forma empírica pelos sujeitos. A expectativa é gerar investigações a respeito das percepções de secções diferentes, validações experimentais das secções encontradas e o uso de ferramentas do *Cabri 3D*.

Por exemplo, no item (a) da atividade 5, o aluno pode identificar as intersecções do plano com as arestas e faces do paralelepípedo e determinar a quantidade de vértices do polígono obtido (Figura 3.18), observando em quais faces e arestas o plano intercepta e usando a ferramenta “Ponto(s) de intersecção”.

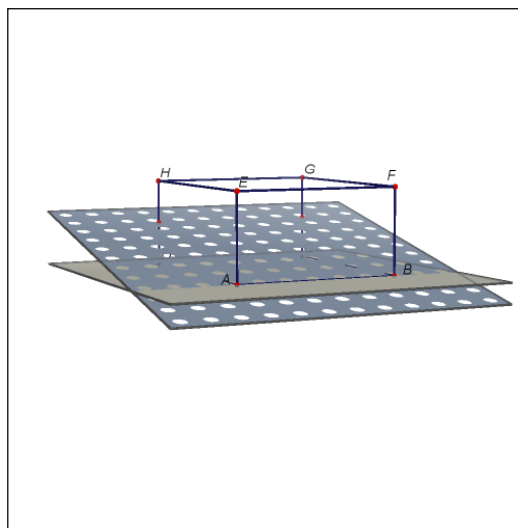


Figura 3.18: Paralelepípedo ABCDEFGH cortado pelo plano MNP

Observando a figura, podemos notar que duas faces opostas de um paralelepípedo são paralelas, então, qualquer plano que corte estas duas faces o faz obtendo retas paralelas e, ainda, um paralelepípedo é obtido tomando, para as arestas laterais, retas perpendiculares ao plano da base, tendo ângulos retos. Logo, o polígono obtido dessa secção é um retângulo (Figura 3.19).

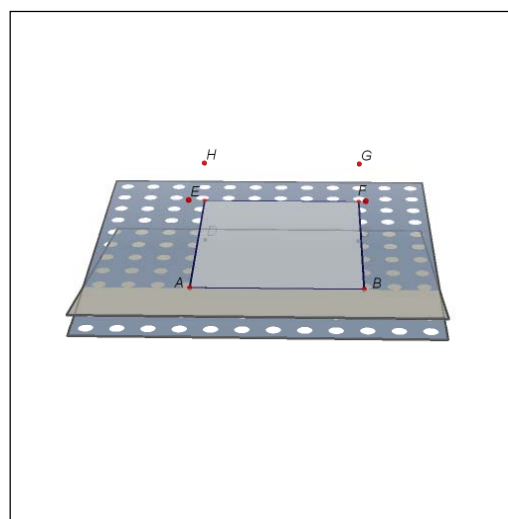


Figura 3.19: Paralelepípedo ABCDEFGH “recortado” pelo plano MNP

As soluções dos itens (b), (c) e (d) desta atividade trilham os mesmos procedimentos do item (a). Na resolução desta atividade, o aluno deverá controlar o tamanho do paralelepípedo, pois se este for muito grande, não será possível visualizar ou identificar as intersecções do plano com as arestas e faces do paralelepípedo.

Para ajudar na visualização do polígono obtido na secção, o aluno poderá, depois da construção do paralelepípedo e da criação do plano, obter os pontos de intersecção do plano com as arestas do paralelepípedo, criando os vértices do polígono da referida secção.

Pretendemos, assim, que os alunos familiarizem-se com as ferramentas e manipulação dos objetos, buscando controlar experimentalmente suas construções e observar se eles consideram em suas justificativas os aspectos visuais e perceptivos (pólo do visto) e as propriedades geométricas do objeto (pólo do sabido).

3.3.6 Atividade 6

Nesta atividade, do tipo caixa preta, pretendemos explorar uma figura previamente construída, de modo semelhante à Atividade 4 já descrita. O enunciado da atividade 6 encontra-se no quadro abaixo.

Atividade 6: *Descobrimo e reproduzindo construções*

-  Abra o arquivo CXPRETA2.cg3.
-  Investigue as propriedades dessa figura, movimentando os pontos e modificando o ponto de vista (botão direito do mouse).
-  Sua tarefa é construir uma figura com os mesmos elementos e que se comporta da mesma maneira que a figura dada.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ6.

Quadro 3.7: Atividade 6

Um dos objetivos da atividade 6 é caracterizar e construir uma pirâmide de base quadrada (Figura 3.20), objeto da atividade realizada no ambiente papel e lápis, conforme descrita no capítulo 2.

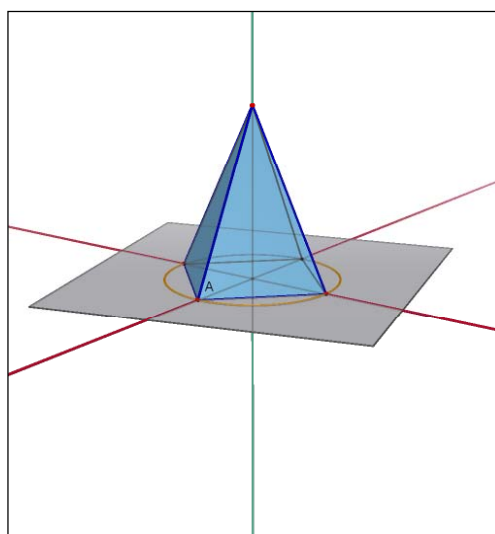


Figura 3.20: Pirâmide de base quadrada

Nesta atividade, esperamos que o sujeito percorra algumas etapas: observação, exploração, levantamento de hipóteses, confirmação ou não dessas hipóteses e validação.

Na observação da figura, o aluno poderá modificar o ponto de vista da figura e, assim, perceber que a base da pirâmide é um quadrado inscrito numa circunferência (Figura 3.21). A intersecção das diagonais do quadrado coincide com o centro do quadrado e da circunferência. No ponto de intersecção das diagonais do quadrado, passa uma reta perpendicular ao plano.

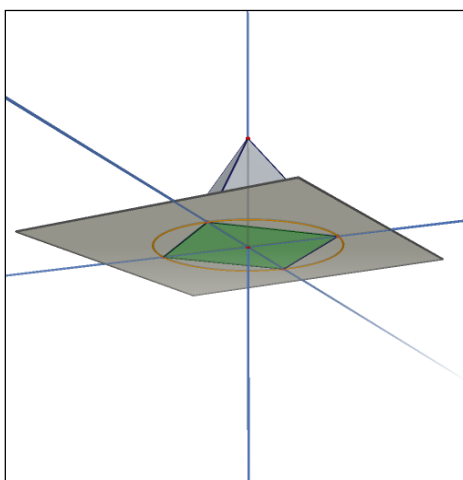


Figura 3.21: Base da pirâmide (vista inferior)

Para construir uma figura com as mesmas propriedades da figura dada, o aluno poderá usar a ferramenta “Quadrado” que constrói um quadrado por eixo e ponto ou em um plano por centro e vértice.

Com base no quadrado, é possível construir suas diagonais, a circunferência com centro no quadrado e passando pelo vértice e a perpendicular ao plano horizontal passando pelo ponto de intersecção das diagonais do quadrado. Utilizando a ferramenta “Pirâmide”, uma pirâmide pode ser definida por um polígono convexo (no caso o quadrado) e um ponto sobre a perpendicular ao plano passando pelo centro do quadrado.

Outra maneira de construir a pirâmide é construir uma circunferência; uma reta passando pelo centro da circunferência e um ponto A sobre a circunferência; uma reta perpendicular à reta criada anteriormente passando pelo centro; ponto de intersecção das retas com a circunferência, obtendo os vértices do quadrado; com a ferramenta “Polígono” construir o quadrado. Em seguida, a reta perpendicular ao plano passando pelo centro da circunferência; um ponto sobre esta reta; e, finalmente, com a ferramenta “Pirâmide”, obter a pirâmide pelo quadrado e o ponto sobre a reta perpendicular ao plano.

Como na atividade 4, do tipo caixa preta, pretendemos observar se os objetos são considerados pelos alunos em termos de propriedades (pólo do sabido) ou somente dos aspectos perceptivos (pólo do visto) e ainda, no uso de novas ferramentas, como “Quadrado”, “Circunferência”, “Pirâmide” e, o mais importante, a manipulação, mudança do ponto de vista e rotação automática.

3.3.7 Atividade 7

Nesta atividade, pretendemos explorar a intersecção de planos no confronto das soluções realizadas no ambiente papel e lápis e no ambiente informático *Cabri 3D*.

O enunciado da sétima e última atividade de familiarização está reproduzida no quadro que segue.

Atividade 7:

- ☒ Num plano α há duas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ concorrentes num ponto O . Fora de α há um ponto P . Qual é a intersecção dos planos $\beta = (P, A, B)$ e $\gamma = (P, C, D)$? Justifique sua resposta.
-  Resolva a atividade sem usar o *Cabri 3D*.
-  Verifique sua resposta no *Cabri 3D*.
-  Anote suas observações em uma caixa de texto.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ7.

Quadro 3.8: Atividade 7

Na solução do papel e lápis, esperamos que o aluno faça um desenho para ilustrar a situação descrita no enunciado da atividade, mas, como mencionado no Capítulo 1 (p. 17), no papel e lápis, a função de experimentação (ligada à decodificação) está limitada por razões materiais ligadas ao meio. De fato, o caráter estático contribui para que relações espaciais pertinentes ao desenho sejam difíceis de ser distinguidas ou identificadas, ou seja, o aluno não consegue “ver” de maneira satisfatória as relações dos objetos geométricos. Esperamos não ser o caso com o *Cabri 3D*.

No papel e lápis, outra maneira de resolver a atividade é pensar nos pontos de intersecção dos planos. Os planos têm o ponto P em comum e as retas que formam o plano, são concorrentes no ponto O , portanto, a intersecção é a reta formada pelos pontos O e P .

Na atividade 7, no *Cabri 3D*, o aluno terá de criar duas retas concorrentes e um ponto no espaço. (Figura 3.22).

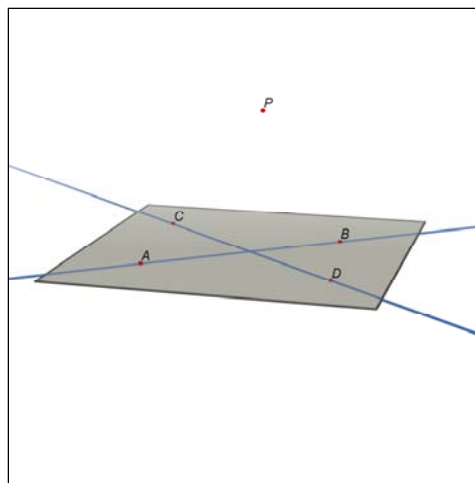


Figura 3.22: Retas concorrentes no ponto O e o ponto P no espaço

Em seguida, criar dois planos utilizando as retas criadas (ou pontos de criação de uma reta) e o ponto no espaço para obter a intersecção desses dois planos criados β e γ .

Uma maneira de o aluno validar sua resposta é utilizando a ferramenta “Curva de intersecção”, obtendo a intersecção entre os planos (Figura 3.23).

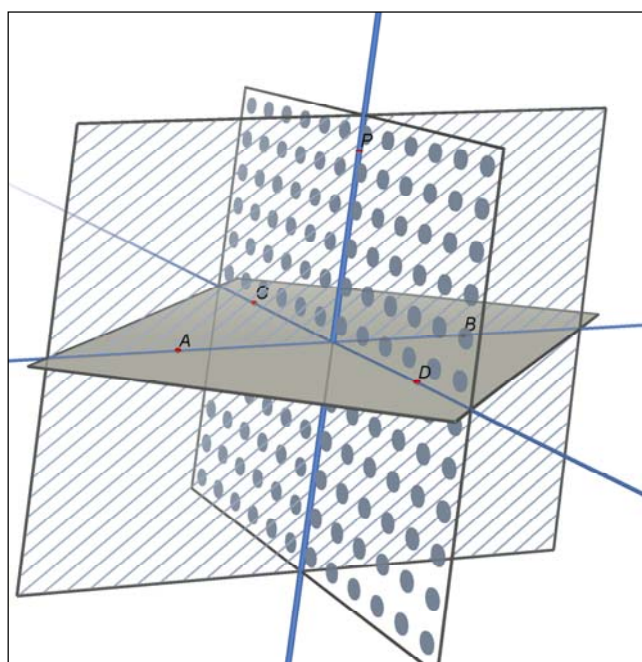


Figura 3.23: Intersecção $\overleftrightarrow{OP}$ dos planos β e γ

Pretendemos, com essa atividade, observar o papel do software na interpretação da situação espacial proposta, comparando os comportamentos dos alunos nos dois ambientes. Ainda que os alunos respondam corretamente no ambiente papel e lápis, teremos por hipótese

que o software proporciona uma visualização melhor e amplia a função de experimentação, por consequência, a decodificação, por meio de movimentação e manipulação dos objetos geométricos e mudança do ponto de vista.

3.4 Atividades que envolvem uma propriedade geométrica

A seguir, as atividades propostas exploram uma propriedade da Geometria Espacial, visando a levar os sujeitos à formulação de conjecturas baseadas em suas explorações empíricas.

3.4.1 Atividades 8, 9 e 10

As atividades 8, 9 e 10 têm como objetivo estudar o Teorema Fundamental do Perpendicularismo. Os enunciados das atividades 8, 9 e 10 estão reproduzidas no quadro abaixo.

Atividade 8:

-  Abra o arquivo Figura1.
-  Investigue as propriedades dessa figura, movimentando os pontos e modificando o ponto de vista (botão direito do mouse).
-  Descreva com suas palavras, as posições relativas de:
 - a) reta a e plano horizontal;
 - b) reta b e plano horizontal;
 - c) retas a e b ;
 - d) retas a e t ;
 - e) retas b e t ;
 - f) retas t e plano horizontal.
-  O que você pode concluir? Anote suas observações em uma caixa de texto.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ8.

Atividade 9:

-  Crie duas retas (a e b) concorrentes em um ponto P num plano qualquer. Em seguida, crie uma reta t perpendicular à reta a em um ponto O e ortogonal a reta b .
-  Investigue a posição da reta t em relação ao plano.
-  Anote suas observações em uma caixa de texto.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ9.
Lembre-se: duas retas são **ortogonais** quando são reversas e formam ângulo reto.

Atividade 10:

-  Crie duas retas (a e b) concorrentes em um ponto P num plano qualquer. Agora, crie uma reta t ortogonal às retas a e b .
-  Investigue a posição da reta t em relação ao plano.
-  Anote suas observações em uma caixa de texto.
-  Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ10.

Quadro 3.9: Atividades 8, 9 e 10

A atividade 8 inclui um arquivo chamado Figura1, em que o aluno investigará as propriedades desta figura (Figura 3.24).

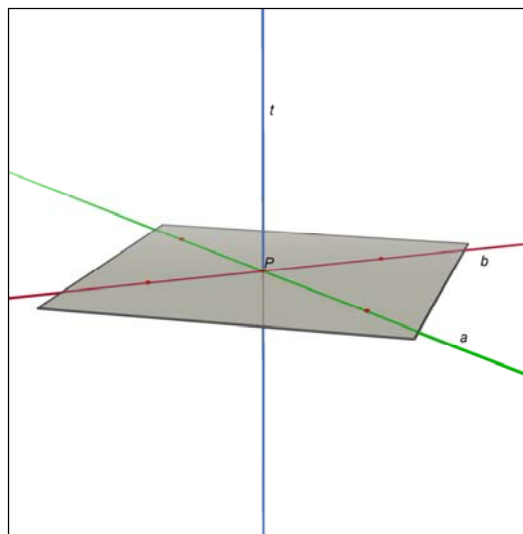


Figura 3.24: Teorema fundamental do Perpendicularismo

A figura pretende ser uma representação do Teorema Fundamental do Perpendicularismo: *Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então, ela é perpendicular ao plano* (Fundamentos de Matemática Elementar, 1985, p.36).

Pretendemos, com esta atividade, que o aluno investigue e observe as posições relativas entre as retas e as posições relativas entre as retas e o plano, em particular, a reta t .

A atividade 9 tem como objetivo construir uma das consequências do Teorema Fundamental do Perpendicularismo: *Num plano, há duas retas (a e b) concorrentes (em P). Se uma reta (t) é perpendicular a uma delas (a em O) e ortogonal a outra (b), então, essa reta (t) é perpendicular ao plano* (Fundamentos de Matemática Elementar, 1985, p.37) - Figura 3.25.

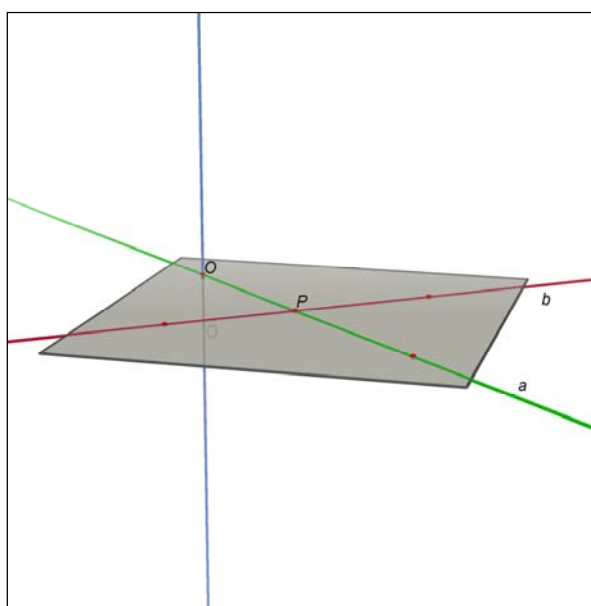


Figura 3.25: Consequência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo

A atividade 10 tem como objetivo estabelecer, por construção, uma outra consequência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo: *Se uma reta (t) é ortogonal a duas retas (a e b) concorrentes (em P) de um plano, então, essa reta (t) é perpendicular ao plano* (Fundamentos de Matemática Elementar, 1985, p.38) - Figura 3.26.

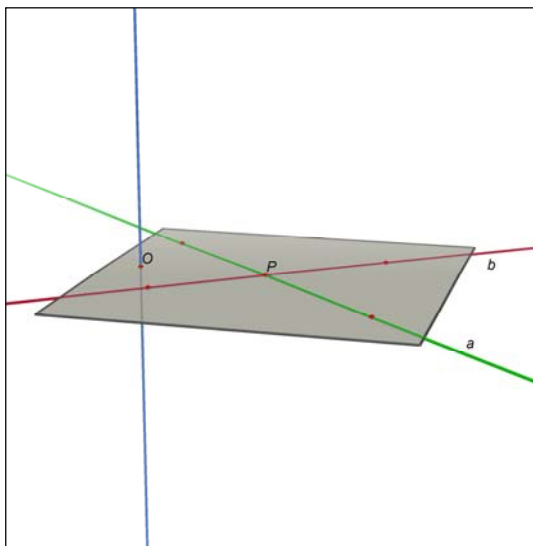


Figura 3.26: Segunda consequência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo

Ao final das atividades 8, 9 e 10, visamos à formulação do Teorema Fundamental do Perpendicularismo, considerando as consequências do teorema enfatizadas nas atividades 9 e 10. Para tal, será feita uma discussão ao final dessas três atividades, com o objetivo que os alunos atentem para o teorema enunciado anteriormente e suas consequências da definição de reta e plano perpendiculares, trazendo a seguinte conclusão: *Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano, é formar ângulo reto com duas retas concorrentes do plano* (Fundamentos de Matemática Elementar, 1985, p.39).

Na atividade 8, cabe salientar que é fornecido um “arquivo pronto” para exploração. As atividades 9 e 10 são de construção e necessitam de interpretações e considerações do pólo do sabido e, a todo momento, os alunos serão incentivados a descrever as propriedades que relacionam os objetos.

3.5 Atividade de aplicação de propriedade geométrica

A última atividade visa a verificar, quais as relações e propriedades da Geometria Espacial, conjecturadas nas atividades anteriores, são consideradas pelos sujeitos.

3.5.1 Atividade 11

Nesta atividade, pretende-se explorar o Teorema Fundamental do Perpendicularismo e suas consequências, observando o papel do software em uma atividade de aplicação de um teorema.

A ficha da atividade 11 está reproduzida no quadro abaixo.

Atividade 11:

 Construa uma pirâmide ABCDE, sendo ABCD um quadrado e a aresta AE perpendicular às arestas AB e AD.

 Investigue as posições das retas:

a) $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{CD}$;

c) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BE}$;

d) $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{CA}$.

Justifique suas respostas.

 Salve sua figura, nomeando o arquivo da seguinte forma: <iniciais da dupla>_ativ11.

Quadro 3.10: Atividade 11

Para uma representação da situação, o aluno deve elaborar uma construção com o auxílio das ferramentas do *Cabri 3D*. Em relação a alguns elementos da construção (pirâmide, reta perpendicular, por exemplo), esperamos que os alunos não apresentem dificuldades, pois estão familiarizados com eles e com as ferramentas correspondentes, presente em estudos anteriores (no papel e lápis e na atividade 6 da primeira fase do *Design*).

Na construção da pirâmide, esperamos que os alunos comecem construindo o quadrado da base ABCD utilizando a ferramenta “Quadrado”, já conhecida. Em seguida, é possível que eles tentem passar à construção de uma reta perpendicular às arestas AB e AD, o que não é possível no *Cabri 3D*, pois na construção de uma reta perpendicular ao lado do quadrado da base AB passando por A, o software constrói a reta suporte do lado do quadrado AD. Nesse caso, esperamos que os alunos percebam tal impossibilidade (interpretem esse feedback do sistema) e mobilizem as propriedades conjecturadas nas três atividades anteriores (8, 9 e 10), ou seja, considerem uma reta perpendicular ao plano da base passando por A, percebendo que se a aresta AE é perpendicular às arestas AB e AD (cujas retas suportes são concorrentes em A e ambas contidas no plano da base), então é perpendicular a esse plano.

Após a construção da reta perpendicular ao plano da base passando por A, acreditamos que os alunos utilizem a ferramenta “Ponto” para criar o ponto E na reta perpendicular e com o uso da ferramenta “Pirâmide” construam a pirâmide selecionando o quadrado da base e o ponto E, ferramentas estas já utilizadas anteriormente (Figura 3.27).

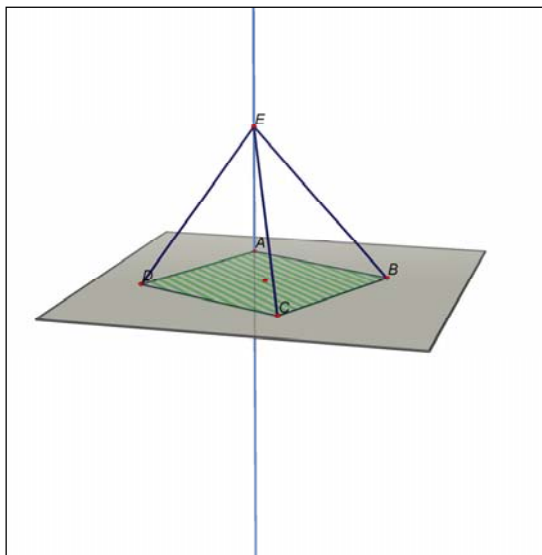


Figura 3.27: Pirâmide ABCDE da Atividade 11

A partir da construção, solicitamos ao aluno investigar as posições relativas de alguns pares de retas. No item (a), iniciamos com as retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Para uma melhor percepção da situação, espera-se que o aluno construa a referida reta $\overleftrightarrow{AC}$, conforme Figura 3.28.

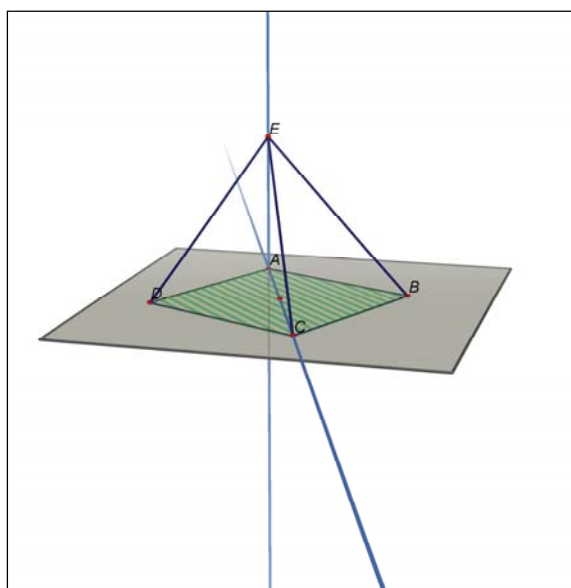


Figura 3.28: Pirâmide ABCDE e reta $\overleftrightarrow{AC}$ (Atividade 11(a))

Nossa hipótese é que os alunos considerem que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ está contida no plano da base. A partir daí, para facilitar a análise e justificativa do caso pedido, é necessário atentar, assim como na construção da reta perpendicular $\overleftrightarrow{AE}$, ao fato de que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é concorrente com as arestas AB e AD no ponto A, ambas perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AE}$ e, portanto, a reta $\overleftrightarrow{AC}$ também é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE}$. No entanto, acreditamos que os alunos, por meio de manipulações e verificações experimentais, identifiquem perceptivamente essa posição da reta $\overleftrightarrow{AC}$, e sintam-se satisfeitos com uma resposta baseada no pólo do visto. Nesse caso, estão previstas intervenções do professor-pesquisador, em termos de questionamentos referentes às posições das retas ($\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$) e às explicações do porque isso acontece e qual a propriedade envolvida.

No item (b), os alunos devem considerar as posições das retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Nesse caso, a aresta CD (ou reta suporte $\overleftrightarrow{CD}$) é concorrente com a aresta AD no ponto D. Novamente, esperamos que o aluno recorra a uma das conseqüências do Teorema Fundamental do Perpendicularismo apresentado na Atividade 9, considerando que se as duas retas ou arestas CD e AD são concorrentes e a reta $\overleftrightarrow{EA}$ é perpendicular a aresta AD, então a aresta CD é ortogonal à reta $\overleftrightarrow{EA}$. Se necessário, os alunos serão incentivados a retomarem as condições e resultados da Atividade 9.

Para o item (c), as retas a serem investigadas são $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$. Na mudança de ponto de vista para uma posição frontal da situação, é possível observar que a reta $\overleftrightarrow{AE}$, perpendicular ao plano da base ABCD, tem uma “inclinação” diferente da aresta BE em relação ao plano da base (Figura 3.29). Pautados nesta mudança de ponto de vista, acreditamos que os alunos considerem a hipótese de que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ não são perpendiculares nem ortogonais.

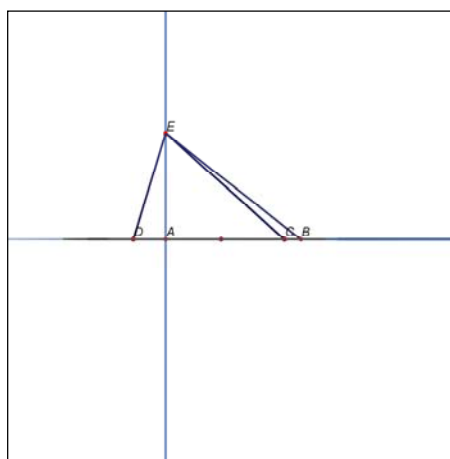


Figura 3.29: Vista frontal da pirâmide ABCDE

Na observação da situação sob diferentes pontos de vista (por exemplo, o da Figura 3.28), esperamos que os alunos descartem a hipótese das retas serem concorrentes. Restando investigar se essas retas são reversas, os alunos podem utilizar a ferramenta “Plano” para validar essa hipótese, pois como enfatizado no final da Atividade 3, não existe um mesmo plano que contenha duas retas reversas e o *Cabri 3D* indica isso satisfatoriamente, não determinando o plano. Com essa operação, pode ser confirmado que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são reversas.

No último item (d), o aluno deve investigar as posições das retas $\overleftrightarrow{EC}$ e $\overleftrightarrow{CA}$. Como pode ser observado, por exemplo, na Figura 3.28 essas retas interceptam-se no ponto C, portanto são concorrentes. Quanto ao perpendicularismo, este pode ser descartado devido à comparação da posição da reta $\overleftrightarrow{AE}$ com a reta $\overleftrightarrow{EC}$, como descrito no item anterior.

Nesta atividade, é importante ressaltar o uso ou não do Teorema Fundamental do Perpendicularismo e suas conseqüências, conjecturados e enunciados anteriormente, para a elaboração das justificativas da atividade. Isso é visado com a atividade, enfatizando ou direcionando para uma resolução baseada no pólo do sabido.

3.6 Coleta e Análise dos Dados

Nosso estudo foi realizado em seis sessões de quase 1h30 de duração cada uma. Os alunos foram organizados em duplas, aleatoriamente no primeiro encontro.

Cada dupla trabalhava em um computador e dispunha de uma ficha de atividades. As interações entre os alunos foram áudio gravadas, as telas dos computadores contendo as resoluções dos estudantes foram capturadas, o professor-pesquisador e o observador fizeram

anotações sobre as produções dos alunos nos encontros e os arquivos de figura *Cabri 3D* contendo, também, as caixas de textos foram salvos (comentários).

No próximo capítulo, a análise dos dados envolverá a síntese das diferentes fontes de dados, visando a documentar as construções computacionais e as estratégias desenvolvidas por dupla e as intervenções necessárias realizadas pelo professor-pesquisador. Desta maneira, pretendemos investigar, na interação do sujeito com as representações e ferramentas do ambiente, qual o papel do software *Cabri 3D* na gestão dos pólos do visto e do sabido.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DAS INTERAÇÕES NO *CABRI 3D*

Este capítulo apresenta a descrição dos dados e a análise das soluções apresentadas pelas duplas de alunos que fizeram parte do estudo experimental.

Esta análise busca descrever os aspectos empíricos e conceituais abordados na solução das atividades, ou seja, o uso de propriedades geométricas e/ou de aspectos perceptivos (espaço-gráfico) por parte dos alunos. Com essa descrição, pretendemos caracterizar o papel do ambiente *Cabri 3D*, como ferramenta de construção, exploração e verificação, especialmente, relacionados aos pólos do visto e do sabido.

Participaram do *design* seis alunos organizados em três duplas. Na sequência do texto, as duplas serão identificadas por:

- Dupla 1 – Bruna e Hellen;
- Dupla 2 – Cristina e Tatiane;
- Dupla 3 – Rodrigo e Thaigo.

Lembramos que esta descrição e respectivas análises estão baseadas nos arquivos de figuras *Cabri 3D*, incluindo, também, nas caixas de texto, nas telas de computador capturadas a cada um minuto, nas fichas com respostas dos alunos (uma ficha para cada dupla), nas áudio gravações das interações entre os alunos e nas anotações do professor-pesquisador e do observador.

4.1 Atividade 1

A atividade 1 tinha como proposta a criação de pontos, retas e planos, visando a familiarização do aluno com essas ferramentas do software e com a idéia da manipulação direta em Geometria do Espaço, visando a observar o sujeito em relação aos aspectos conceituais e técnicos no uso de tais ferramentas.

As duplas não apresentaram dificuldades na interpretação do plano horizontal de referência – mostrado por *default* nem na criação de pontos no plano horizontal e no espaço (não pertencem ao plano horizontal), compreenderam que estes últimos pontos devem ser criados com a tecla *Shift*. Nenhuma dupla criou pontos no plano horizontal, fora da parte visível deste, utilizando, assim, o quadrilátero que o representa como referência para suas construções. Os pontos no espaço (não pertencentes ao plano horizontal de referência) foram criados, em geral, no semi-espaço superior, ou seja, na região acima do plano de referência.

Influenciados pela apresentação inicial do professor-pesquisador, os alunos modificaram constantemente o ponto de vista da situação com o botão direito do mouse, posicionando o plano horizontal de maneira frontal para validar suas criações (Figura 4.1). As duplas usaram também a ferramenta “Manipulação” para movimentar os pontos. Este fato pode ser observado pela anotação feita pela dupla 2 em uma caixa de texto do arquivo: “com o Shift, qualquer ponto que eu queira mexer verticalmente é possível” (Dupla 2, sessão 1, Atividade 1).

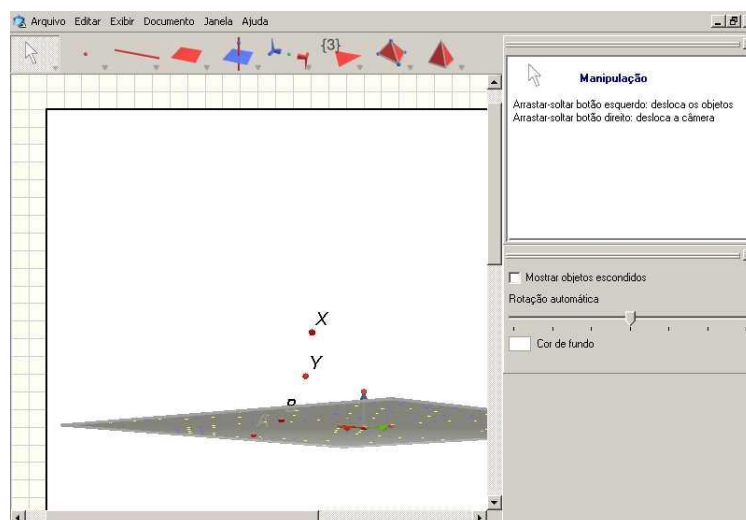


Figura 4.1: Criação de pontos (Dupla 1, sessão 1, Atividade 1)

A seqüência da atividade foi a construção de retas. As três duplas usaram os pontos criados no item anterior, criaram a reta t no plano, passando pelos pontos A e B (ambos pertencentes ao plano horizontal) e, em seguida, criaram a reta s no espaço (não contida no plano de referência) passando pelos pontos X e Y (não pertencentes ao plano horizontal). Estas operações foram realizadas sem dificuldades.

Para a reta p , definida por um ponto no plano de referência e outro no espaço (não pertencente ao plano horizontal), a dupla 3 usou corretamente o ponto B do plano horizontal e o ponto Y do espaço. Com a utilização da ferramenta “Manipulação” e a mudança do ponto de vista, em um primeiro momento, concluiu que “a reta estará passando por um ponto do plano e por um ponto do espaço, em posição diagonal” (Dupla 3, sessão 1, Atividade 1), mas continuou a manipular a reta p e notou que, para uma posição particular do ponto Y , se ele estivesse acima do ponto B – a reta faria um ângulo de 90° com o plano. Então, a resposta foi reformulada para este item da atividade, respondendo na ficha “a reta estará passando por um ponto do plano e por um ponto do espaço” (Dupla 3, sessão 1, Atividade 1).

A dupla 1 usou o ponto A do plano e o ponto X do espaço. Após o uso da ferramenta “Manipulação” e mudança do ponto de vista, concluiu, inicialmente, que “a reta p está paralela ao plano” (Dupla 1, sessão 1, Atividade 1). As alunas continuaram a manipular e a mudar o ponto de vista, e com base nas observações perceptivas, acabaram mudando a resposta e concluindo que “a reta p está furando o plano” (Dupla 1, sessão 1, Atividade 1) – Figura 4.2.

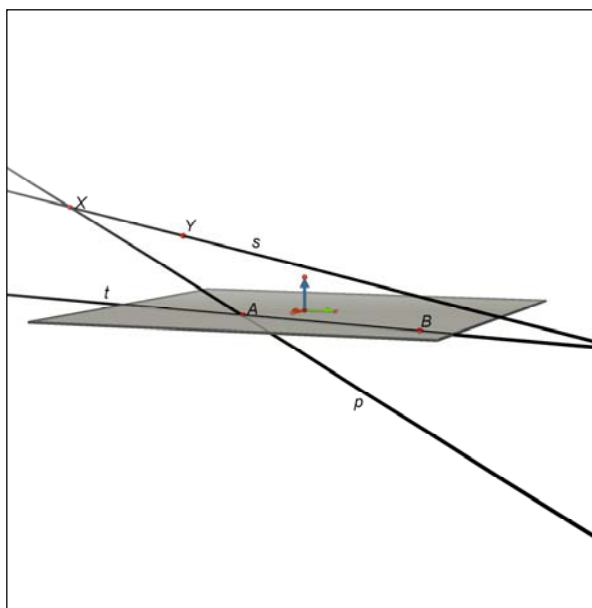


Figura 4.2: Posição da reta p em relação ao plano (Dupla 1, sessão 1, Atividade 1)

A dupla 2 usou os mesmos pontos que a dupla 1, isto é, os pontos X e A para criar a reta p . Da mesma maneira que a dupla citada, usou a ferramenta de “Manipulação”, modificou o ponto de vista e concluiu que “os pontos B e Y não se movimentam, são pontos fixos, mexendo-se apenas a reta p , assim, observando que o ponto A e X se movimentam” (Dupla 2, sessão 1, Atividade 1). A dupla referia-se ao fato de quando movimentavam os pontos A e X , a reta p era alterada em sua direção, o que não acontecia quando manipulava os pontos B e Y . É provável que os alunos tentaram observar o que se movimentava na manipulação, mas não atentando à questão dos pontos que definem cada uma das retas. No caso, há um equívoco em afirmar que B e Y são fixos, devendo notar que tais pontos não definem nem pertencem à reta p , e não estavam sendo movimentados, conforme Figura 4.3.

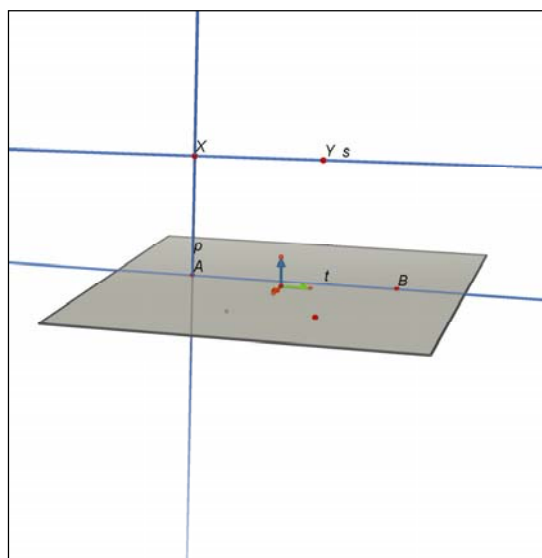


Figura 4.3: Posições de retas (Dupla 2, sessão 1, Atividade 1)

Na última parte da atividade, criação de planos, primeiro, os alunos criaram um plano por três pontos. A dupla 3 usou dois pontos contidos no plano horizontal de referência e um ponto no espaço (não pertencente a esse plano). As outras duplas usaram três pontos quaisquer no espaço (não pertencentes ao plano horizontal de referência), conforme Figura 4.4.

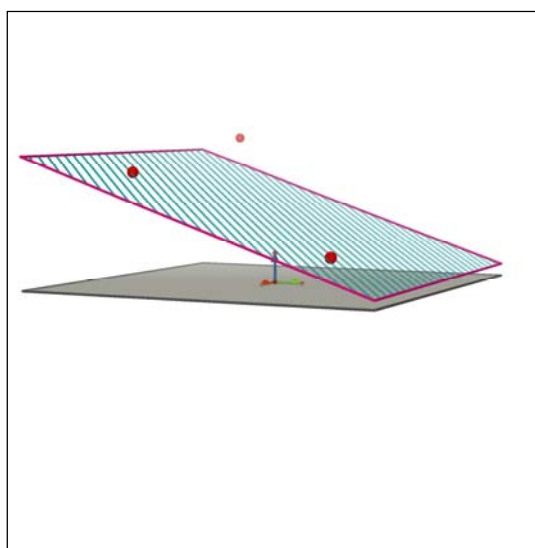


Figura 4.4: Plano definido por três pontos (Dupla 2, sessão 1, Atividade 1)

A Figura 4.5 mostra um arquivo da dupla 3, com a manipulação de um dos pontos que determina o plano em um primeiro momento, um dos pontos está na parte visível do plano criado e depois este ponto é movimentado para parte não visível do plano, dando a impressão

perceptivamente de que o ponto não pertence ao plano. A dupla também percebeu que este ponto altera a inclinação do plano ao ser manipulado.

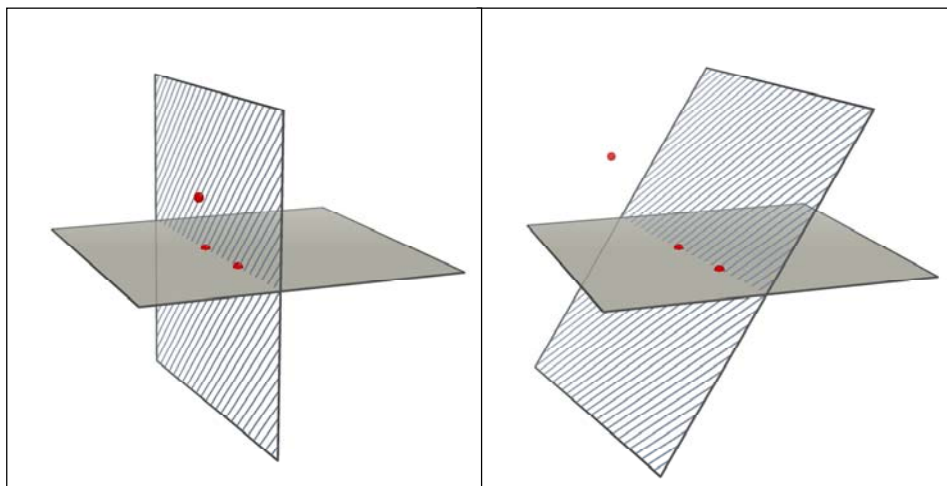


Figura 4.5: Manipulação dos pontos que definiram o plano
(Dupla 3, sessão 1, Atividade 1)

Nesse momento da criação de plano por três pontos distintos, o professor-pesquisador reforçou o que foi abordado na apresentação do software, no sentido dos alunos atentarem para o fato da representação do plano não se limitar ao quadrilátero.

Em seguida, os alunos criaram um plano por um ponto e uma reta. A dupla 1 construiu uma reta perpendicular ao plano horizontal de referência e um ponto contido nesse mesmo plano para criar o novo plano. Tanto a reta como o ponto estavam perceptivamente na parte visível do plano (Figura 4.6).

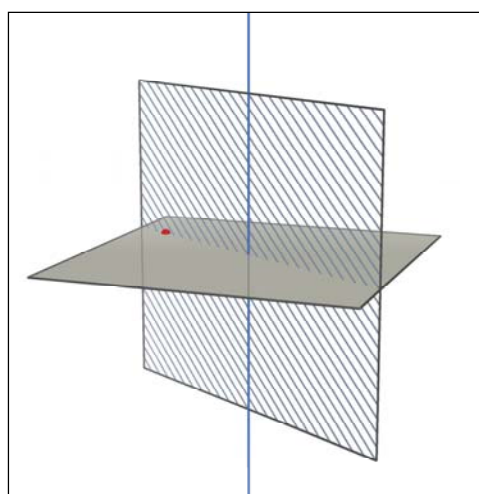


Figura 4.6: Plano definido por um ponto e uma reta (Dupla 1, sessão 1, Atividade 1)

A dupla 2 criou uma reta e um ponto fora do plano de referência (espaço), e a reta e o ponto estavam ambos contidos no novo plano perceptivamente. Já com a tecla *Shift*, a dupla 3 criou uma reta e um ponto no espaço (não pertencente ao plano horizontal de referência), mas a reta não estava visualmente contida no plano (Figura 4.7).

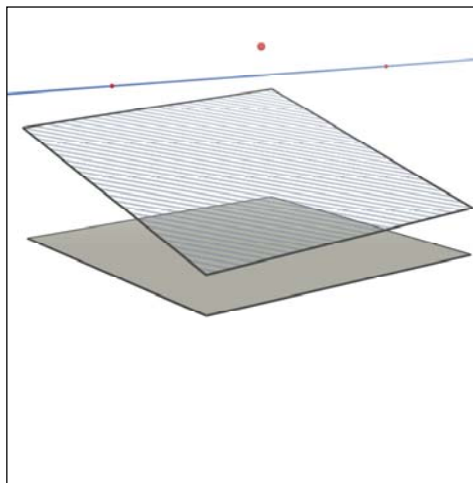


Figura 4.7: Plano definido por reta e ponto (Dupla 3, sessão 1, Atividade 1)

Nesse momento, o professor-pesquisador observou a representação e fez uma intervenção com o seguinte questionamento: “mas essa reta está contida no plano?”. Os alunos responderam positivamente, afirmando que o plano foi criado com tal reta e iniciaram uma discussão com o professor-pesquisador no sentido de “avaliar” a representação para que tal informação ficasse mais evidente. A partir daí, manipularam a reta e o ponto que determinam o plano, de modo, que os dois objetos estivessem perceptivamente contidos no plano, conforme Figura 4.8.

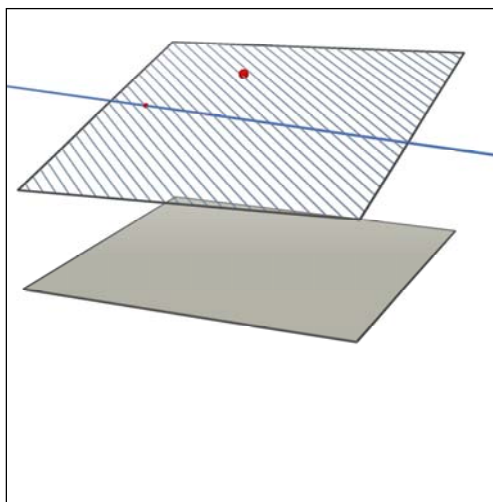


Figura 4.8: Plano definido por reta e ponto (Dupla 3, sessão 1, Atividade 1)

Na criação de plano por retas coplanares, todas as duplas tiveram alguma dificuldade. A dupla 1 criou o plano por duas retas contidas no plano de referência e fez a seguinte observação “as duas retas estão contidas no plano” (Dupla 1, sessão 1, Atividade 1). A dupla 3 criou retas contidas no plano horizontal e uma fora do plano de referência; em seguida, tentou criar um plano por uma reta no plano e outra do espaço e não conseguiu, pois a seleção da segunda reta, não era possível. O software fornecia a seguinte mensagem “... e um novo ponto (no espaço)” ou “...e um novo ponto (sobre reta)” (Figura 4.9). A dupla 2 não desenvolveu este item da atividade por falta de tempo.

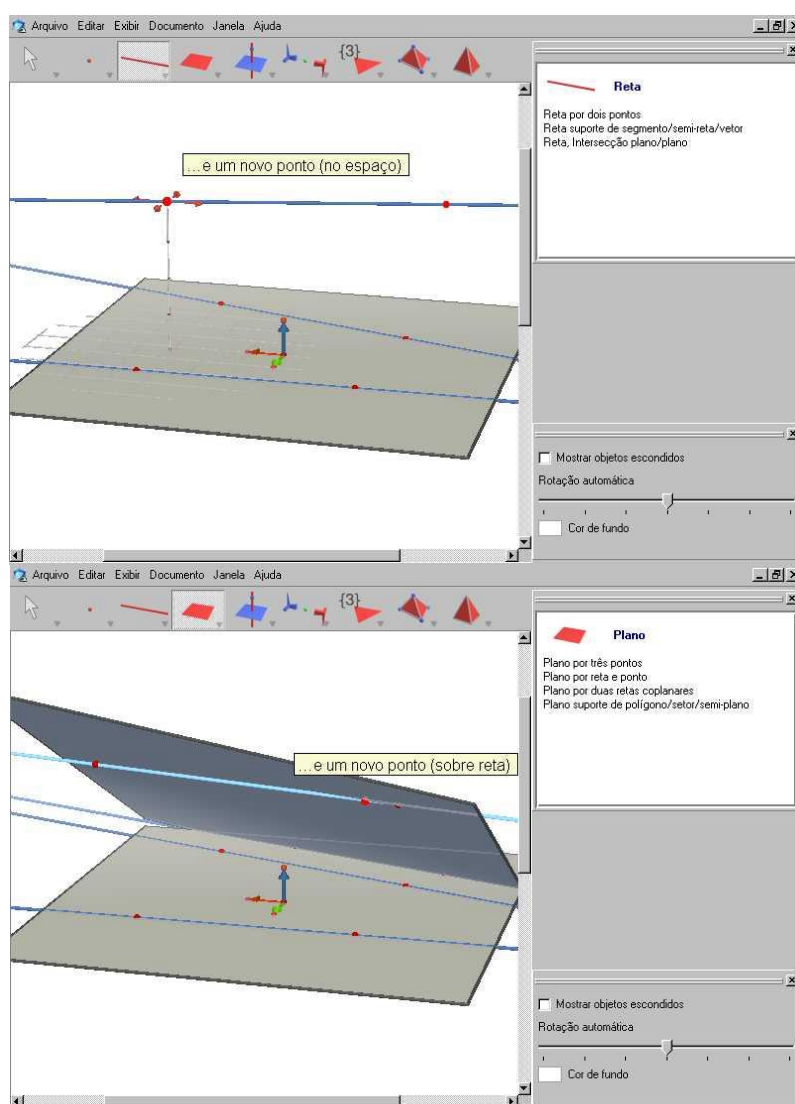


Figura 4.9: Criação de plano (Dupla 3, sessão 1, Atividade 1)

A dificuldade na criação de plano por retas coplanares era esperada, como descrevemos no capítulo anterior (Capítulo 3, p. 47) e, provavelmente, devemos ao fato dos

alunos desconhecerem a existência de retas reversas ou não compreenderem o que são retas coplanares. Nesse sentido, optamos por retomar esta questão na atividade 3.

De um modo geral, os alunos prestaram atenção nas mensagens do software, o que auxiliou nas resoluções, com frequência, eles usaram o plano horizontal como referência e suas construções de pontos ou de retas, se não eram no plano horizontal, eram no semi-espaço superior (acima) do plano horizontal de referência. Observamos também que os alunos procuraram representar pontos ou retas na parte visível dos planos quando não era o caso, acabavam por modificar a posição dos objetos.

Esta atividade atingiu seu objetivo principal, o de introduzir e familiarizar os alunos com as ferramentas “Ponto”, “Reta” e “Plano”. Na atividade 1, demos ênfase aos aspectos técnicos, como criar pontos não pertencentes ao plano de referência, visto que por *default* são criados no plano horizontal, na manipulação dos objetos, e como mudar o ponto de vista (uso do botão direito do mouse). Em termos de manipulação dos alunos, podemos considerar que a atividade foi realizada com sucesso, ou seja, os alunos demonstraram um bom domínio desses recursos e por, inúmeras vezes, por iniciativa própria manipularam e modificaram o ponto de vista para melhor adequar suas representações às respostas dadas. Como esperado, por se tratar da primeira utilização do *Cabri 3D*, as atividades dos alunos foram suportadas pelo pólo do visto.

4.2 Atividade 2

Na segunda sessão, os alunos continuaram com as atividades de familiarização. A primeira explorava a posição de segmentos de reta em relação a um plano.

A primeira parte da atividade solicitava a criação de um plano. Só a dupla 3 não criou um novo plano, usando o plano horizontal já existente no *Cabri 3D*. As demais duplas criaram outro plano por três pontos distintos, sendo ambos, um de cada dupla, secantes ao plano horizontal de referência.

A dupla 1 sentiu dificuldade para entender a posição que o segmento de reta deveria ter em relação ao plano. Ela construiu um segmento que não “furava” o plano, com um dos pontos das extremidades do segmento de reta pertencente ao plano (Figura 4.10). A justificativa da dupla, como reproduzida a seguir mostra esta interpretação: “observamos que em cada caso, um está diferente do outro, tendo o segmento A cortando o plano, o segmento B sai a partir do plano e o segmento C está inteiramente contido no plano” (Dupla 1, sessão 2, Atividade 2). As alunas nomearam os segmentos de reta, segundo a letra do item da atividade. Quando questionadas pelo professor-pesquisador em qual caso o segmento de reta “fura” o

plano, indicaram corretamente o item (a), e não o (b). Isso levou o professor-pesquisador a intervir na idéia de “furar” o plano e na percepção de que o enunciado da atividade merece reformulação dada sua ambigüidade. Neste caso, no sentido físico e matemático.

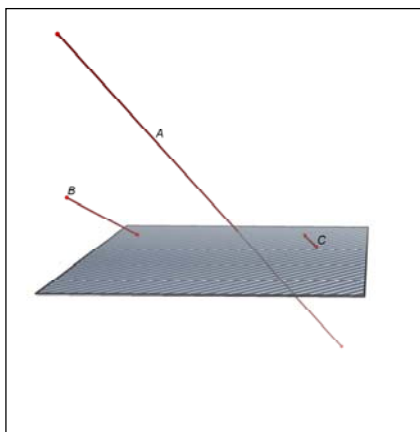


Figura 4.10: Posições de segmentos de reta em relação ao plano
(Dupla 1, sessão 2, Atividade 2)

A dupla 3 forneceu como resposta ao segundo item, segmento que não “fura” o plano, a resposta ilustrada na Figura 4.11. No entanto, esta resposta é equivocada e está completamente baseada no pólo do visto.

De fato, o segmento tem suas extremidades como pontos do plano horizontal (criados sem o uso da tecla *Shift*) e, portanto, está inteiramente contido no plano horizontal de referência. Os alunos não consideraram essa característica dos pontos das extremidades e, como, perceptivamente (visual) estão representados na parte não visível do plano, concluíram de modo incorreto sua posição relativa a esse plano.

Na discussão da atividade, o professor-pesquisador pediu que os alunos mudassem o ponto de vista para uma vista frontal, podendo, assim, perceber a posição do segmento de reta em relação ao plano. A dupla constatou que o segmento de reta que deveria estar fora do plano, estava contido no plano e usando a tecla *Shift* movimentou os pontos das extremidades do segmento de reta, tirando-os do plano. A dupla, em sua justificativa, observou que “somente na reta que fura o plano, há intersecção” (Dupla 3, sessão 2, Atividade 2).

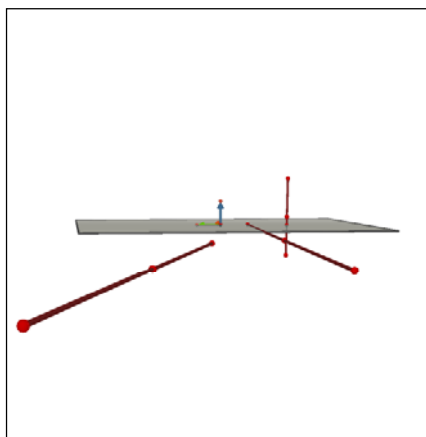


Figura 4.11: Posições de segmentos de reta em relação ao plano
(Dupla 3, sessão 2, Atividade 2)

A dupla 2 criou retas, em vez de segmentos de reta, o que gerou problemas no uso da ferramenta “Ponto(s) de intersecção”, pois, embora os alunos considerarem o segmento, como a parte da reta, a ferramenta do *Cabri 3D* não o reconhece (Figura 4.12). Desta forma, fornece a(s) intersecção(ões) das retas com o plano e não dos segmentos. O professor-pesquisador alertou sobre esse aspecto, indicando a utilização da ferramenta “Segmento”, o que foi feito pela dupla.

A justificativa da dupla mostra a interpretação da posição dos segmentos de reta em relação ao plano: “na primeira reta, podemos observar que ela perfura o novo plano que fizemos; na segunda reta, observamos que o segmento, como o exercício pede, passa apenas pelo plano sem perfurá-lo, na terceira reta, ela fica contida apenas no plano” (Dupla 2, sessão 2, Atividade 2).

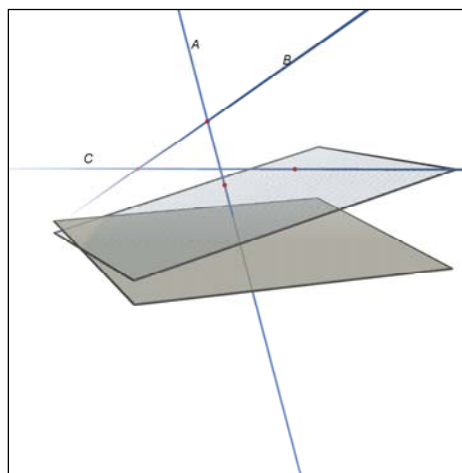


Figura 4.12: Posições de segmentos de reta em relação ao plano
(Dupla 2, sessão 2, Atividade 2)

Na seqüência da atividade, todas as duplas não tiveram dificuldades, ligando os pontos médios dos três segmentos de reta anteriormente construídos, respondendo que a figura obtida é um triângulo (Figura 4.13).

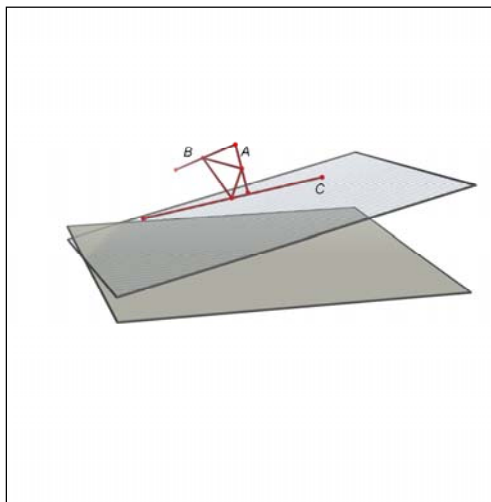


Figura 4.13: Construção do triângulo a partir dos pontos médios dos segmentos de reta
(Dupla 3, sessão 2, Atividade 2)

No geral, todas as duplas tiveram dificuldades para perceber na ferramenta “Ponto(s) de intersecção” quando o software não seleciona o segundo objeto para a intersecção ou a intersecção não existe, ou é o próprio objeto. Como esta era uma fase de familiarização ao *Cabri 3D*, o professor-pesquisador chamou a atenção para este fato, visando a um fechamento da atividade e melhor preparação para as atividades futuras.

Nesta atividade, a mudança do ponto de vista (botão direito do mouse) e a “Rotação automática” foram de extrema importância na resolução da atividade. De fato, as duplas, como descrito, cometeram erros na posição dos segmentos de reta em relação ao plano, o que foi percebido e revisto pelos alunos, graças ao aspecto dinâmico e aos recursos de manipulação do software. Esta atividade fez com que os alunos dessem importância à manipulação dos objetos e a familiaridade à mudança de ponto de vista no *Cabri 3D*, auxiliando-os na observação (pólo do visto) e, conseqüentemente, a validação das suas respostas.

4.3 Atividade 3

Nesta atividade, pretendíamos explorar os elementos de um cubo, como faces paralelas ou secantes, arestas perpendiculares, paralelas ou reversas e ampliar o uso de ferramentas do software. No início da atividade, houve discussão coletiva sobre os conceitos

de cubo, retas paralelas, perpendiculares e sobre a interpretação da definição de retas reversas contida no enunciado. O professor-pesquisador tentou resgatar, com os alunos, seus conhecimentos sobre o cubo, destacando seus elementos.

Os alunos não tiveram dificuldades para criar um cubo, com a ferramenta “Cubo”, mas, sim, para “pintar” seus elementos. A pintura de muitos elementos em uma só figura prejudicou a visualização e o controle perceptivo na resolução da atividade. O professor-pesquisador sugeriu, então, o uso de dois cubos com o estilo da superfície vazia, um para identificar as faces paralelas e secantes e outro para identificar as arestas perpendiculares, paralelas e reversas.

Ao final da atividade, o professor-pesquisador solicitou que os alunos criassem planos a partir das arestas perpendiculares, paralelas e reversas, apesar de não estar no enunciado da atividade, visando a retomar a questão de retas coplanares e determinação de planos que apresentou problemas na Atividade 1.

Nesta atividade, o mais importante foi a determinação de planos por duas retas coplanares; no caso, retas suportes de arestas paralelas e perpendiculares, e a não possibilidade de determinação baseado em duas retas reversas. Com esta atividade, os alunos perceberam que as retas reversas não podem determinar um plano, pois, quando tentaram selecionar a segunda reta, observaram a mensagem fornecida pelo software e o fato do plano não ser criado, o que foi dado ênfase ao final desta atividade pelo professor-pesquisador.

4.4 Atividade 4

Nesta atividade, do tipo “caixa preta”, foi explorada uma figura previamente construída pelo professor-pesquisador (Figura 4.14). Conforme descrito no Capítulo 3 (p. 24), foi fornecido um arquivo com uma construção, cujos passos estão omitidos e foi solicitado ao aluno que descobrisse e construísse outra figura com os mesmos elementos que se comportam da mesma maneira que a figura dada. A figura fornecida representa um tetraedro regular com um triângulo equilátero feito com base nos pontos médios das arestas laterais do tetraedro regular.

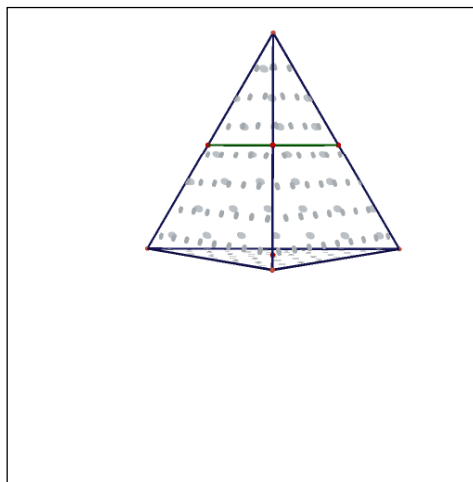


Figura 4.14: Caixa Preta da atividade 4

A posição inicial (de abertura do arquivo) foi escolhida visando a provocar/incentivar a manipulação por parte dos alunos, a fim de identificar a pirâmide.

Primeiro, todas as duplas manipularam (movimentando os pontos) e mudaram o ponto de vista (botão direito do mouse) da figura dada, tentando investigar as características dela.

Na resolução da tarefa, os alunos não mostraram dificuldades na construção do tetraedro regular nem para perceber que o triângulo era formado pelos três pontos médios das arestas laterais do tetraedro regular. Todas estas observações deram-se perceptivamente e pelas mensagens fornecidas pelo software.

As duplas 1 e 2, para construírem o triângulo equilátero: fizeram um plano pelos três pontos médios, pois o intuito era usar a ferramenta “Triângulo equilátero”, mas, para isso observaram corretamente na janela de “Ajuda de ferramentas” que é necessário um plano, o centro e um dos vértices do triângulo equilátero. No caso, elas não tinham o centro, então, abandonaram a idéia de empregar essa ferramenta e finalizaram com a ferramenta “Triângulo”. Depois, perceberam que mesmo não sendo usada a ferramenta “Triângulo equilátero”, o *Cabri 3D* reconhece o triângulo construído como equilátero, a partir da mensagem de identificação do objeto (cf. Figura 4.15).

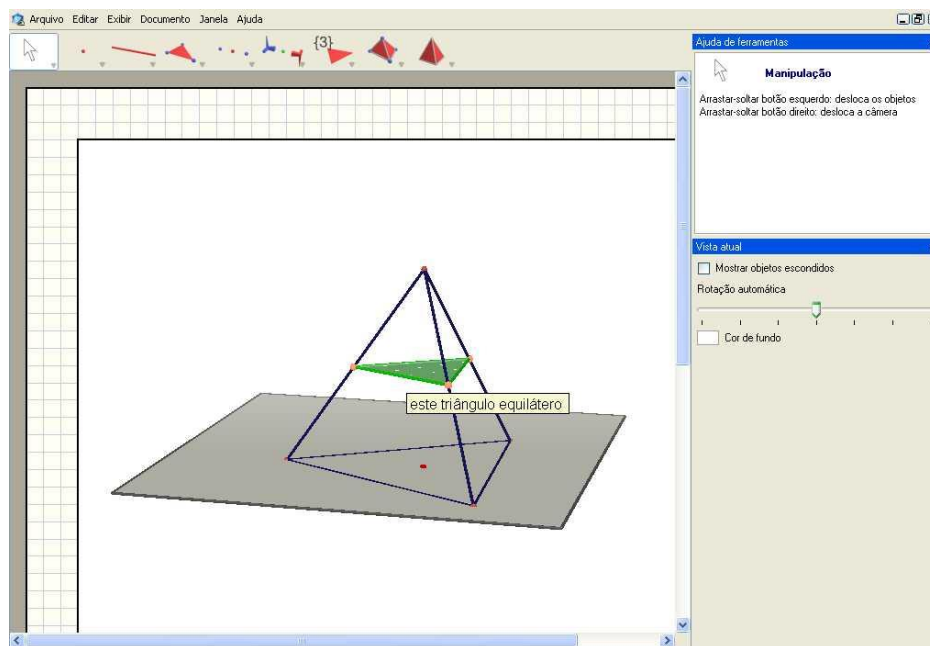


Figura 4.15: Mensagem fornecida pelo software (Dupla 2, sessão 3, Atividade 4)

Já a dupla 3 usou a ferramenta “Polígono”, mas mesmo obtendo o triângulo equilátero sentiu necessidade de usar a ferramenta “Triângulo equilátero” para definir esse objeto. Entretanto, para tal construção era necessário um plano, um centro e um ponto, nesses elementos faltava o centro. Eles construíram o centro do polígono, utilizando a ferramenta “Perpendicular” (Reta perpendicular ao plano da base, passando pelo centro da base do tetraedro regular) – Figura 4.16, e por meio da ferramenta “Ponto(s) de intersecção” determinaram a intersecção entre a reta perpendicular e o triângulo criado como polígono previamente. Notamos que o triângulo equilátero já estava construído, mas a dupla achou necessário construir a figura a partir da ferramenta “Triângulo equilátero”.

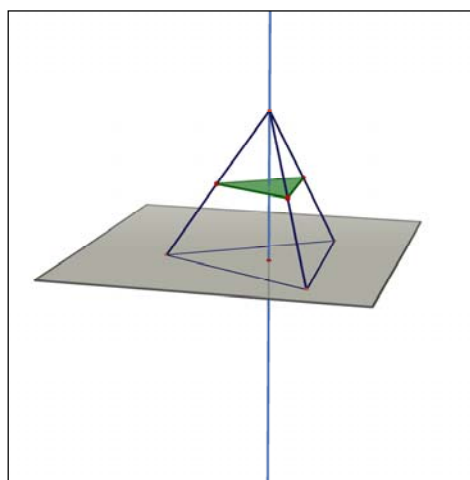


Figura 4.16: Construção do centro do triângulo equilátero (Dupla 3, sessão 3, Atividade 4)

Nesta atividade, as duplas mostraram que construir um triângulo equilátero por três pontos médios das arestas laterais de um tetraedro regular não foi suficiente, para o objeto ser um triângulo equilátero, porque os alunos ficaram no pólo do visto e não do sabido, para eles foi preciso uma confirmação do software ou a construção com a ferramenta “Triângulo equilátero”.

4.5 Atividade 5

A partir desta atividade, o aluno Thiago deixou de fazer parte do estudo e seu companheiro de dupla, Rodrigo continuou a realizar as atividades individualmente.

Nesta atividade, pretendíamos explorar algumas secções planas de um paralelepípedo.

No início da atividade, os alunos tiveram dificuldades para entender que se tratava de secção plana em um poliedro. O professor-pesquisador discutiu com eles, usando o exemplo de uma pedra de sabão cortada por uma faca (com um único corte), discutindo sobre a figura obtida nesse corte.

Após a discussão, todos os alunos construíram o paralelepípedo apoiado no plano horizontal de referência e de um tamanho relativamente pequeno de modo a ter sua base inteira contida no plano horizontal de referência.

Em seguida, as duplas, ao criarem o plano de secção do paralelepípedo, foram motivadas a responder a figura obtida, antes do uso da ferramenta “Recorte de poliedro”, observando os pontos de intersecção entre o plano e as arestas do paralelepípedo, mudando o ponto de vista (botão direito do mouse) ou usando a ferramenta “Rotação automática”. Dessa maneira, pretendíamos que os alunos observassem quantas e quais arestas do paralelepípedo foram cortadas pelo plano, isto é, o número de vértices ou lados do polígono obtido pela secção no paralelepípedo. Esta fase foi realizada pelos alunos perceptivamente – pólo do visto e nenhuma figura foi identificada antes do uso da ferramenta “Recorte de poliedro”, eles só atentaram para os números de vértices e lados que a figura tinha. Após o uso da ferramenta “Recorte de poliedro”, tivemos as respostas descritas na sequência.

No item (a), os alunos responderam que se tratava de um retângulo e somente o aluno Rodrigo justificou parcialmente sua resposta, “a figura formada é a de um retângulo, pois possui quatro lados em que dois pares de lados são paralelos” (Rodrigo, sessão 3, Atividade 5).

Para o item (b), a dupla 1 e o aluno Rodrigo responderam “trapézio”. Rodrigo justificou sua resposta, “a figura formada é a de um quadrilátero que possui lados e ângulos diferentes. É um trapézio” (Rodrigo, sessão 3, Atividade 5). A dupla 2 deu a seguinte

resposta: “A figura terá quatro lados não sendo iguais. A figura tem lados e nem ângulos iguais” (Dupla 2, sessão 3, Atividade 5).

No item (c), as duplas 1 e 2 identificaram um pentágono e Rodrigo respondeu que “a figura que será formada parece que terá cinco lados” (Rodrigo, sessão 3, Atividade 5).

No item (d), as duplas 1 e 2 responderam hexágono. Rodrigo respondeu “a figura que será formada parece que terá seis lados” (Rodrigo, sessão 3, Atividade 5).

Embora os alunos tenham sido motivados a justificar suas respostas, levando em consideração as arestas paralelas e perpendiculares do paralelepípedo, não houve um retorno positivo nesse aspecto. As respostas dadas ficaram no pólo do visto, e aos alunos a percepção da figura obtida foi suficiente para identificar as secções tornando-se evidências que não necessitavam ser justificadas.

4.6 Atividade 6

Nesta atividade, também do tipo caixa preta, foi explorada uma figura previamente construída (Figura 4.17), de modo semelhante à Atividade 4, já descrita. A figura fornecida representa uma pirâmide de base quadrada.

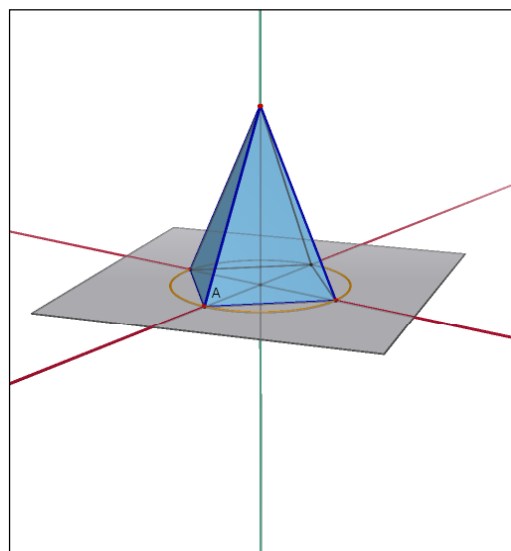


Figura 4.17: Caixa Preta da atividade 6

Todas as duplas, antes da tarefa solicitada, manipularam e mudaram o ponto de vista da figura dada, tentando observar as características da figura, assim como solicitado no enunciado da atividade.

A dupla 1 começou sua construção pelo quadrado da base, em seguida, construiu uma circunferência usando o centro e um dos vértices do referido quadrado. No quadrado,

traçaram suas diagonais e usando a ferramenta “Perpendicular” construíram uma reta perpendicular ao plano da base, passando pelo centro do quadrado. Por último, com a ferramenta “Pirâmide” construíram uma pirâmide de base quadrada com um ponto sobre a reta perpendicular criada.

O aluno Rodrigo seguiu os mesmos passos que a dupla 1, a única diferença é que ele começou construindo a circunferência e, depois, o quadrado.

Já a dupla 2 descreveu sua construção como segue: “esta figura foi desenvolvida através de um quadrado, quatro triângulos, uma reta perpendicular, duas retas e por último uma circunferência” (Dupla 2, sessão 4, Atividade 6). Podemos notar que diferentemente dos outros alunos, elas não usaram a ferramenta “Pirâmide” e, sim, a ferramenta “Triângulo” para construir as quatro faces laterais da pirâmide. A apreensão perceptiva do objeto é de forma “decomposta”, ou seja, identificando cada elemento separadamente.

Como atividade de familiarização, as duplas usaram novas ferramentas, como “Quadrado”, “Circunferência”, “Pirâmide” e o mais importante, a manipulação, mudança do ponto de vista e rotação automática, sendo este objetivo desta atividade. De fato, explorar uma figura previamente construída e construir outra figura com os mesmos elementos e que se comporta da mesma maneira.

4.7 Atividade 7

Nesta atividade, foi explorada a intersecção de planos no confronto das soluções realizadas no ambiente papel e lápis e no ambiente informático *Cabri 3D*.

A primeira parte da atividade foi realizada no papel e lápis. Os alunos fizeram uma representação da situação proposta (enunciado), que os levou às conclusões transcritas e vemos na sequência.

O aluno Rodrigo respondeu que “a intersecção é no ponto O ” (Rodrigo, sessão 4, Atividade 7), a dupla 1 respondeu que “a intersecção dos planos β e γ são os pontos O e P ” (Dupla 1, sessão 4, Atividade 7). Estas respostas não são completas, mas caminham para a solução. Na medida que identificaram corretamente o ponto O , Rodrigo e os pontos O e P , dupla 1, que definem a reta $\overleftrightarrow{OP}$ de intersecção dos planos β e γ .

Já a dupla 2 respondeu que “a intersecção dos planos ocorre nos pontos T e S ” (Dupla 2, sessão 4, Atividade 7). Para entender esta resposta, é preciso observar a Figura 4.18.

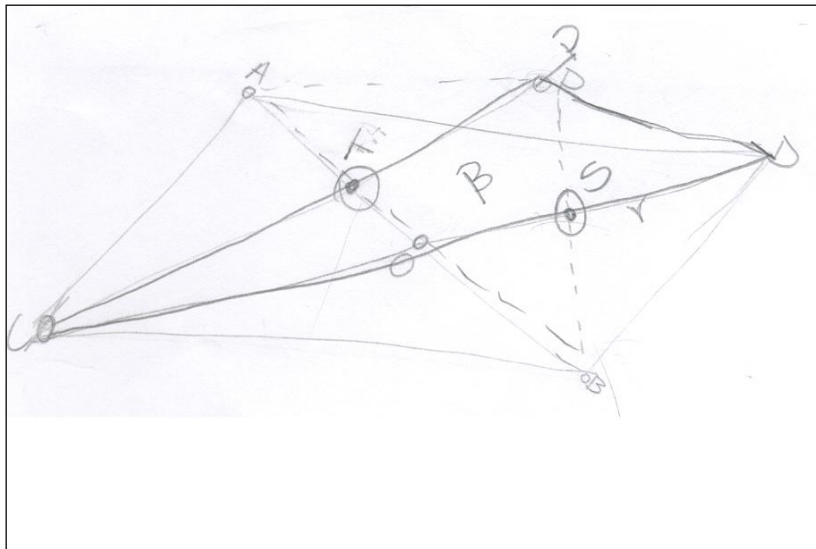


Figura 4.18: Desenho realizado pela Dupla 2 (sessão 4, Atividade 7)

Na Figura 4.18, as alunas criaram os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e baseadas nos pontos extremidade construíram o quadrilátero ACBD. Em seguida, criaram o plano $\beta = (P, A, B)$ ligando os três pontos que definem o plano, o mesmo foi feito para o plano $\alpha = (P, C, D)$, obtendo, assim, a intersecção entre estes dois triângulos, ou seja, pontos T e S .

Em seguida, os alunos resolveram a mesma atividade no *Cabri 3D*. A conclusão dos alunos foi a mesma da dupla 2 “o ponto de intersecção é a reta que passa pelos pontos O e P ” (Dupla 2, sessão 4, Atividade 7). Podemos notar uma mudança significativa na resposta da dupla 2, em relação ao ambiente papel e lápis. Inicialmente, no papel e lápis, a resposta era incorreta e com a construção e visualização no *Cabri 3D*, foi totalmente diferente. A representação da situação e uso da ferramenta “Curva de intersecção” mostrou claramente a intersecção dos planos para essa dupla (Figura 4.19).

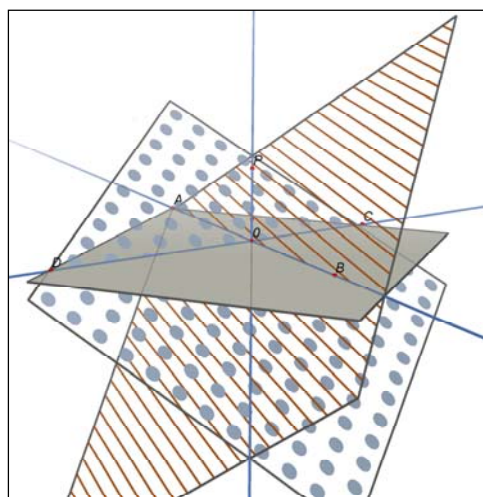


Figura 4.19: Intersecção entre planos (Dupla 2, sessão 4, Atividade 7)

A dupla 1 que tinha dado com resposta da intersecção dos planos α e β , os pontos O e P e Rodrigo, o ponto O , também, foi beneficiada com o uso do *Cabri 3D*. Os recursos do *Cabri 3D* apoiaram uma “nova” representação que, por sua vez, apoiou a identificação da intersecção. O software permitiu “ver” e, nesse caso, pode ser melhor que as resoluções no papel e lápis.

Nas atividades seguintes, mudaremos a identificação das duplas, dada a desistência da aluna Tatiane que provocou a alteração das duplas. Desta forma, as duplas ficaram dispostas e serão identificadas por:

- dupla A – Bruna e Hellen.
- dupla B – Rodrigo e Cristina.

4.8 Atividade 8

A atividade 8 tem como objetivo estudar o Teorema Fundamental do Perpendicularismo. Para tal, foi dado um arquivo, conforme a Figura 4.20, para que os alunos investigassem suas propriedades, manipulando os objetos, enriquecendo a construção e mudando o ponto de vista com o botão direito do mouse.

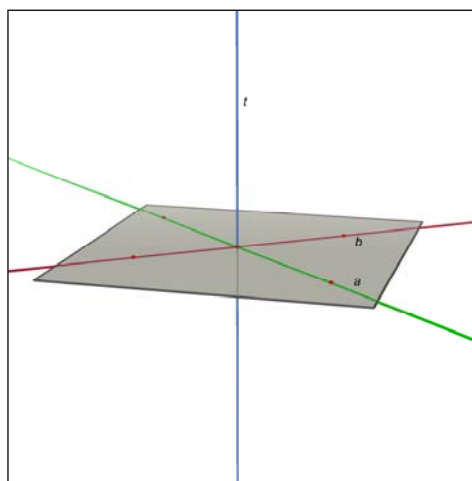


Figura 4.20: Arquivo da Atividade 8

Os alunos movimentaram e modificaram o ponto de vista da figura. Em seguida, passaram a investigar algumas posições relativas entre os objetos. Nos itens (a) e (b), os alunos descreveram a posição das retas a e b em relação ao plano horizontal. A dupla A respondeu que as retas estão contidas no plano e a dupla B deu à mesma resposta e acrescentou que a reta a está “interceptando a reta b e t ” e que a reta b está “interceptando a reta a e t ” (Dupla B, sessão 5, Atividade 8).

O item (c) referia-se à posição das retas a e b . A dupla A respondeu que “existe um ponto de intersecção entre elas” (Dupla A, sessão 5, Atividade 8). Já a dupla B analisou esse item, incluindo a reta t , respondendo que “se interceptam pela reta perpendicular t , perpendicular à a ” (Dupla B, sessão 5, Atividade 8). A análise das interações mostram que essa característica foi observada perceptivamente pelos alunos.

Nos itens (d) e (e), foram descritas as posições das retas a e b em relação à reta t . A dupla B interpretou que as retas a e b “formam um ângulo de 90° ” com a reta t (Dupla B, sessão 5, Atividade 8). A dupla A respondeu que “a reta t é perpendicular às retas a e b ” (Dupla A, sessão 5, Atividade 8).

No último item (f) da atividade, a dupla B respondeu que a reta “ t fura o plano” (Dupla B, sessão 5, Atividade 8) e a dupla A respondeu que a reta t é “perpendicular ao plano” (Dupla B, sessão 5, Atividade 8).

No final da atividade, as duplas anotaram suas conclusões, a dupla B respondeu que “nós concluímos que as retas a e b contidas no plano se interceptam pela reta t que fura o plano, tais retas movimentam a reta t ” (Dupla B, sessão 5, Atividade 8) ou seja, não viram o perpendicularismo e a dupla A escreveu que “as retas a e b estão contidas no plano, onde a reta t é perpendicular a elas. Logo a reta t é perpendicular ao plano” (Dupla A, sessão 5, Atividade 8).

Notamos, na observação das telas capturadas, que as respostas foram baseadas na manipulação e mudança do ponto de vista dos objetos. Os alunos não realizaram nenhuma construção para dar apoio às suas repostas, considerando perceptivamente às relações entre os objetos, o que para eles foi suficiente para identificar as posições relativas, tornando-se evidências que não necessitavam de validações, nem experimentais. Assim, resolveram a atividade somente a partir de elementos do pólo do visto.

4.9 Atividade 9 e 10

As atividades 9 e 10 são uma continuação da atividade anterior, abordando as consequências do teorema fundamental do perpendicularismo.

Na atividade 9, solicitamos a criação de duas retas (a e b) concorrentes em um ponto P num plano qualquer e, em seguida, a criação de uma reta t perpendicular à reta a em um ponto O e ortogonal à reta b , com o propósito de investigar a posição da reta t em relação ao plano. No que se refere ao termo ortogonal, havia no enunciado da atividade um lembrete sobre retas ortogonais, fazendo referência a retas reversas. O professor-pesquisador retomou e comentou sobre a atividade 3, na qual as duplas identificaram arestas perpendiculares, paralelas e

reversas de um cubo. Este comentário foi suficiente para que as duplas seguissem com a construção da situação proposta no enunciado da atividade. As duas duplas fizeram construções semelhantes (Figura 4.21).

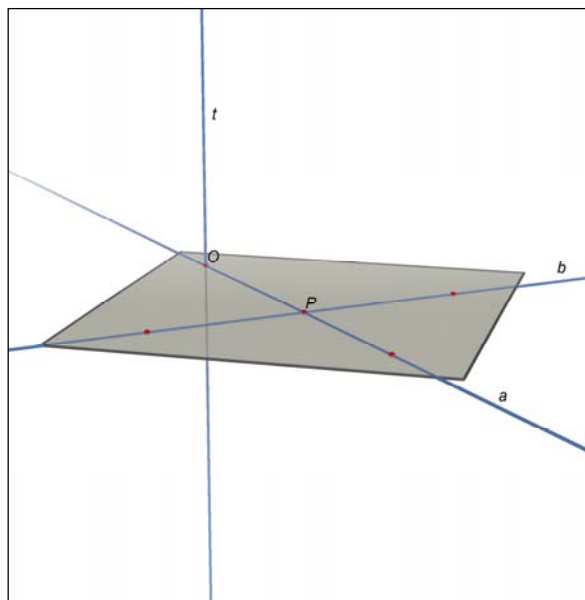


Figura 4.21: Construção da Dupla A (sessão 5, Atividade 9)

Após a construção proposta, que mobilizou o pólo do sabido, no sentido que o aluno teve que recorrer a conhecimentos e propriedades para construir a representação de forma correta.

Na seqüência, as duplas, baseadas na observação, manipulação, mudança do ponto de vista dos objetos e na resolução da atividade anterior, responderam sobre a posição da reta t em relação ao plano. A dupla B respondeu que “a reta t fura o plano e forma um ângulo de 90° ” (Dupla B, sessão 5, Atividade 9) e a dupla A respondeu que a reta t “é perpendicular ao plano” (Dupla A, sessão 5, Atividade 9).

Na atividade 10, o enunciado solicitava a criação de duas retas (a e b) concorrentes em um ponto P num plano qualquer – no caso, as duas duplas usaram o plano horizontal de referência – e, em seguida, pedia-se para criar uma reta t ortogonal às retas a e b (Figura 4.22).

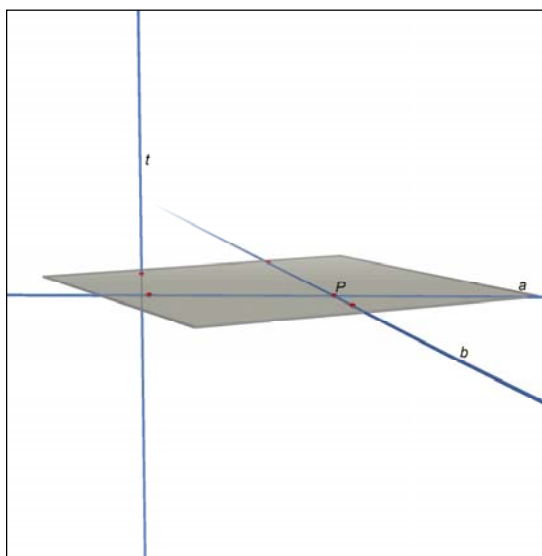


Figura 4.22: Consequência do Teorema Fundamental do Perpendicularismo
(Dupla B, sessão 5, Atividade 10)

Depois da construção da situação proposta, a atividade visava investigar a posição da reta t em relação ao plano. Inspiradas na observação, manipulação, mudança do ponto de vista dos objetos foram dadas às respostas. A dupla A respondeu que “a reta t é perpendicular ao plano e ortogonal as retas a e b ” (Dupla A, sessão 5, Atividade 10) e a dupla B respondeu que “a reta t fura o plano formando ângulos de 90° com as retas a e b que são concorrentes entre si, sendo a reta t ortogonal as retas a e b ” (Dupla B, sessão 5, Atividade 10).

A análise das telas capturadas e das interações dos alunos mostram que, novamente, as respostas dadas foram baseadas na manipulação dos objetos e na mudança do ponto de vista, ou seja, nos aspectos perceptivos.

Ao final da resolução das atividades 8, 9 e 10, o professor-pesquisador discutiu as respostas dadas visando um fechamento das atividades, procurando institucionalizar o teorema e suas consequências. Como as conclusões dos alunos nestas atividades foram baseadas no pólo do visto, foi dada ênfase à importância de validações experimentais utilizando as ferramentas do *Cabri 3D*, mas também ao uso propriedades geométricas e justificativas ou explicações sobre o porque daqueles resultados.

4.10 Atividade 11

Esta atividade pretende explorar o Teorema Fundamental do Perpendicularismo e suas consequências, observando o papel do software numa atividade de aplicação do referido teorema. A atividade solicitava a construção de uma pirâmide ABCDE, sendo ABCD um quadrado e a aresta AE perpendicular às arestas AB e AD (Figura 4.23).

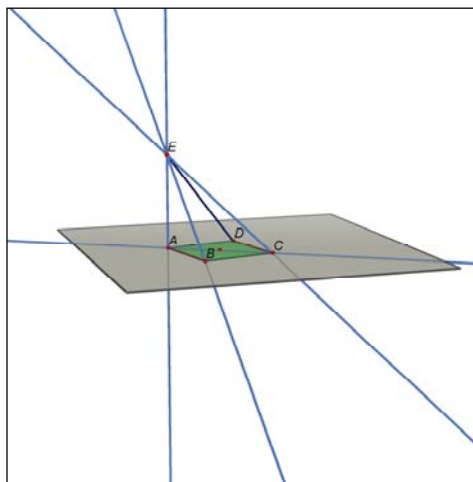


Figura 4.23: Construção da pirâmide (Atividade 11)

As duplas não tiveram dificuldades em construir a pirâmide, usando a ferramenta “Perpendicular” para construir a reta $\overleftrightarrow{AE}$ perpendicular às arestas AB e AD, identificando corretamente nessa construção o quadrado (contido no plano horizontal) e o ponto A, sendo o ponto A a intersecção das arestas AB e AD. Como mencionado no capítulo anterior, a construção da reta perpendicular deveria ser feita selecionando um plano e um ponto. Para finalizar a construção, as duplas usaram a ferramenta “Pirâmide” e optaram por um “Estilo de superfície” vazio, o que, segundo os alunos, “melhora” a visualização dos elementos da pirâmide.

Após a construção da pirâmide ABCDE, foi solicitado que as duplas investigassem as posições de alguns pares de retas. No item (a), foi investigada a posição das retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. As duas duplas responderam que as retas “são perpendiculares”. A dupla B deu como justificativa o fato da reta $\overleftrightarrow{AC}$ estar cruzando-se com as arestas AB e AD, e estas serem perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{EA}$. A dupla A, em sua resposta, considerou que a reta $\overleftrightarrow{EA}$ é perpendicular ao plano, e “como a reta $\overleftrightarrow{AC}$ está contida nesse plano, as duas retas se cruzam formando um ângulo de 90° ” (Dupla A, Sessão 6, Atividade 11(a)).

Para o item (b), os alunos responderam quanto à posição das retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. As duas duplas deram como resposta que “as retas são ortogonais”. A dupla B argumentou que as retas não se cruzam, mas formam um ângulo de 90° e a reta $\overleftrightarrow{CD}$ está “junto” da aresta AD”. A dupla A respondeu que as retas não se encontram, mas formam um ângulo de 90° . Pelas telas capturadas, notamos que as duplas mudaram o ponto de vista para uma posição frontal, o que contribui em suas respostas.

No item (c), os alunos investigaram as posições das retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BE}$. As respostas dadas pelas duplas foram que as retas são “reversas”. A dupla B, inicialmente, achou que as retas eram ortogonais, mas com a mudança do ponto de vista, notaram que as posições das retas $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{BE}$ eram bem diferentes e, portanto, não formavam em ângulo de 90° . Após esta constatação, um dos alunos fez referência à Atividade 3, em que identificaram retas reversas no cubo e que na pirâmide “não fica 90° , pois vai inclinando”. O aluno refere-se à inclinação da reta $\overrightarrow{BE}$, que não é perpendicular ao plano da base. Baseados na atividade anterior e no fato de que a reta $\overrightarrow{EA}$ foi construída com a ferramenta “Perpendicular” e a reta suporte da aresta BE não, responderam que as retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BE}$ eram reversas. A dupla A declarou que as retas não se cruzam e que “não conseguiam enxergar um ângulo de 90° , mesmo mudando o ponto de vista” (Dupla A, sessão 6, Atividade 11(c)).

No item (d), foi questionada a posição das retas $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{CA}$. As duplas responderam que as retas são “concorrentes”. A dupla B referiu-se explicitamente à intersecção, respondendo “as retas se cruzam no ponto C e não formam um ângulo de 90° ”. Para esta conclusão, consideraram a posição das retas $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{EC}$, e a maneira que as duas retas foram construídas.

As respostas foram baseadas, tanto no pólo do visto como do sabido, as construções realizadas das três atividades anteriores contribuíram para os aspectos desse “sabido”. O visto foi mobilizado na constante mudança de ponto de vista da situação, o que contribuiu na identificação de aspectos espaciais pertinentes à situação. O pólo do sabido foi usado nas justificativas, mas de maneira um tanto informal. Notamos nos argumentos das duplas que elas resgataram e fizeram referência a conceitos e idéias presentes em outras atividades e em momentos anteriores. Com relação às respostas, a dupla B teve tendência a melhor formular e especificar elementos importantes da situação – pontos de intersecção, planos – e ainda argumentou sobre as ferramentas utilizadas para construir alguns objetos. Já a dupla A mobilizou alguns conhecimentos, mas parece ter se apoiado mais na percepção e dificilmente engajou-se em justificativas ou explicações para suas conclusões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A título de conclusão do presente trabalho, este item pretende retomar os objetivos do estudo, bem como descrever, de forma sintética, os principais resultados obtidos no desenvolvimento das atividades do *design*, em suas fases nos ambientes papel e lápis e computacional.

Mais precisamente, em relação ao ambiente informático, optamos por utilizar o *Cabri 3D*, visando analisar como as representações nesse ambiente são codificadas e decodificadas pelos alunos e em que medida elas participam no desenvolvimento das habilidades de visualização e possibilitam a interpretação de propriedades geométricas de objetos espaciais.

As contribuições de Parzysz (1988 e 1991) acerca das perdas de informações nas representações planas dos objetos geométricos, das questões de codificação e decodificação de objetos espaciais e das influências e contágios dos pólos do visto na atitude dos sujeitos em relação às suas representações foram os principais fundamentos para esta pesquisa.

Ao final da resolução das atividades, observando os comportamentos dos alunos, temos evidências de que as perdas de informações no *Cabri 3D* podem ser consideradas menores que as do ambiente papel e lápis. Foi o caso, por exemplo, da Atividade 11 desenvolvida no *Cabri 3D*, em que os alunos analisaram posições relativas de pares de retas definidas a partir de arestas e vértices de uma pirâmide de base quadrada. Ainda que algumas respostas tenham sido baseadas em aspectos perceptivos, todas as respostas foram corretas. O mesmo não aconteceu na Atividade 2, realizada no papel e lápis, em que alguns alunos responderam que duas retas suportes de arestas reversas de um cubo interceptavam-se. Fica evidente que na representação do cubo, no papel e lápis, não foi possível para alguns alunos a consideração de que as retas não poderiam interceptar-se, ou seja, o contágio do pólo do visto não motivou (ou até inibiu) uma interpretação conceitual da posição relativa dessas retas (pólo do sabido). De fato, a representação plana no papel e lápis, dadas suas características, permitiu aos alunos o prolongamento das retas e a identificação do ponto de intersecção entre elas. Isso não ocorre no *Cabri 3D*, o qual facilita a percepção da posição das retas (reversas) com seus recursos de manipulação e mudança de pontos de vista, e não permite a determinação desse ponto de intersecção, fornecendo um feedback para tal ação – a não visualização dessa intersecção que não existe.

No caso da aprendizagem da Geometria, considerando a necessária presença das representações (dos desenhos que devem se tornar figuras), a idéia era investigar em que

medida as relações dos pólos do visto e do sabido podem ser favoravelmente alteradas pelas possibilidades dinâmicas e experimentais do ambiente informático. Partimos da hipótese de que a interação com o *Cabri 3D* poderia acrescentar elementos perceptivos pertinentes à situação (permitindo “melhor ver”), o que resultaria numa melhor codificação e decodificação de objetos espaciais por parte dos alunos. Globalmente, podemos dizer que nossa hipótese foi validada. Afirmamos isso com base, por exemplo, em episódios que mostram que no ambiente papel e lápis, os alunos tiveram dificuldades na interpretação de objetos espaciais, respondendo de maneira incorreta a alguns exercícios. É o caso da Dupla 3, na Atividade 1, na qual os alunos criaram planos por três distintos com a ferramenta “Plano”, e com a manipulação dos pontos usados para determinar o plano, analisaram corretamente que os pontos podem ou não estar perceptivamente no quadrilátero que o representa. Isso permitiu-observar que, para esses alunos, o plano não é limitado ao referido quadrilátero e a possibilidade de um controle adequado dessas relações espaciais, não apenas no pólo do visto, mas auxiliado pelo uso das ferramentas (cf. Cap. 4, p. 72). Identificamos aí uma certa evolução, pois para esses mesmos alunos, na Atividade 6 do estudo preliminar realizado no papel e lápis, os pontos pertencentes ao plano correspondiam apenas aqueles representados na região interna do paralelogramo que o representava.

No ambiente informático *Cabri 3D*, a interpretação envolvendo a decodificação mostrou-se diferente das realizadas no ambiente convencional, os alunos responderam as atividades com maior êxito, servindo-se da mudança de ponto de vista (com o botão direito do mouse) e da manipulação direta dos objetos.

Podemos dizer que, tanto no caso do estudo no ambiente papel e lápis, como no ambiente *Cabri 3D*, os alunos privilegiaram o pólo do visto, no entanto, esse “visto” não é o mesmo nos dois ambientes. Notam-se novos elementos que vêm se juntar ao pólo do visto diferente daqueles do papel e lápis. Isto pode ser observado na resolução da Atividade 5 no *Cabri 3D*, que abordou secções planas em um paralelepípedo, com uso de diversas ferramentas, inclusive a de “Recorte de poliedro” e também a mudança do ponto de vista. Os alunos conseguiram identificar as secções obtidas, baseando-se somente no pólo do visto, não buscando justificar suas respostas. Para eles, os elementos percebidos (pólo do visto) foram suficientes, tornando-se evidências que não necessitavam ser justificadas. Diferentemente, na atividade 4 do papel e lápis, na qual são dada três figuras como resultado de um cubo seccionado, três alunos responderam que mesmo tentando imaginar os cortes não conseguiam identificar qual seria a figura obtida ou consideraram cortes em que nenhuma das três figuras possíveis seriam obtidas. Para estes alunos, o não “visto” no papel e lápis acabou tornando-se

evidente no *Cabri 3D*. Isso remete a outra problemática extremamente complexa, a do engajamento dos alunos na produção de provas e justificativas geométricas, em situações em que há evidências para eles. Se por um lado, podemos interpretar como positiva a influência dos recursos do *Cabri 3D* para “permitir ver”, e integrar elementos ou hipóteses geométricas nas estratégias, por outro deparamo-nos com a dificuldade de fazer avançar a atividade dos alunos na direção da explicação e argumentação matemática. É nesse sentido que indicamos a necessidade de se repensar as características e natureza de certas atividades clássicas de Geometria Espacial no papel e lápis, visando adequá-las a esse novo contexto dos ambientes de Geometria dinâmica.

Assim, as resoluções das atividades, tanto no papel e lápis quanto no *Cabri 3D*, em geral, não foram baseadas no pólo do sabido. No entanto, podemos considerar que este último pólo evolui a partir de informações mais pertinentes obtidas no pólo do visto no ambiente computacional. As atividades realizadas no *Cabri 3D* possibilitaram aos alunos um contato com certas propriedades geométricas, com a formulação de conjecturas por meio de verificação experimental e empírica e com a mobilização de elementos perceptivos importantes na análise de uma situação no espaço, muitas vezes ocultos no ambiente convencional.

Tendo em vista os resultados, esperamos que suas discussões possam a vir a construir relevantes contribuições para a Educação Matemática e, em particular, para o ensino da Geometria Espacial. Acreditamos que este estudo possa fornecer dados para reflexões de professores e pesquisadores sobre o ensino da Geometria e as possibilidades de uso do *Cabri 3D*. O software pode em muito desempenhar um acentuado papel em diversos problemas da Geometria Espacial, principalmente, em problemas de posição. Os recursos do *Cabri 3D* auxiliam e facilitam o desenvolvimento de certos problemas, o que neste estudo, possibilitou aos alunos uma ação eficiente no estudo de algumas propriedades da Geometria Espacial, por meio de codificações e decodificações de objetos geométricos. Nesse entendimento, o software estimula o interesse e a curiosidade, mas é preciso estimular, também, o espírito de investigação e o desenvolvimento do pólo do sabido, no que se refere, ao uso de propriedades geométricas para resolver problemas.

BIBLIOGRAFIA

BRAVIANO, G.; RODRIGUES, M. H. W. L. **Geometria dinâmica: Uma nova Geometria.** RPM 49, 2002.

CARVALHO, P. C. P. **A Matemática do Ensino Médio.** In LIMA, E. L. et al. Coleção do professor de Matematica, volume 3. Rio de Janeiro SBM 1998, p. 161 -206.

CAVALCA, A. P. V. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação.** São Paulo: EDUC, 1998.

CHAACHOUA, A. **Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignements à ces problèmes.** Tese de Doutorado. Universidade Joseph Fourier (Grenoble 1), França, 1997.

COLMEZ, F.; PARZYSZ, B. **Le vu et le su dans l'evolution de dessins de pyramides du CE2 a la seconde.** Ed. Annie Bessot y Pierre Vérillon, Espaces graphiques et Graphismes D'Espaces, La Pensée Sauvage, Editions. 1993. p.35-55.

COBB, P et al. **Design experiments in educational research.** Educational Researcher, vol. 32, nº 1, p. 9 – 13, 2003.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática elementar.** São Paulo: Atual, v. 10, 1985.

MIRANDA, S. S. **O papel da Geometria Descritiva nos problemas de Geometria Espacial: um estudo das secções de um cubo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, 2006.

PARZYSZ, B. **“Knowing” vs “Seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures.** Educational Studies in Mathematics 19: 1988. p. 79 – 92.

PARZYSZ, B. **Representation of space and students' conceptions at high school level.** Educational Studies in Mathematics 22: 1991. p. 575 – 593.

POSSANI, R. A. R. **Apreensões de representações planas de objetos espaciais em um ambiente de geometria dinâmica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP, São Paulo, 2002.

SANGIACOMO, L. et al. **Geometria Plana com Cabri-géomètre: diferentes metodologias.** 2ª edição. São Paulo: Proem, 2002.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. **Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements.** In LESH, R.; KELLY, A. E. (Eds), Research design in mathematics and science education. Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 267 – 307, 2000.

VAZ, R. L. **O uso das isometrias do software cabri-géomètre como recurso no processo de prova.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2003.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: Unesp, 2002.

ANEXOS

ATIVIDADES DE FAMILIARIZAÇÃO AO *CABRI-GÉOMÈTRE II*

CABRI-GÉOMÈTRE

INTRODUÇÃO

O Cabri-géomètre permite criar figuras geométricas a partir de elementos de base (pontos, segmentos, retas, circunferência, etc.) utilizando propriedades usuais da geometria. Sendo um software de geometria dinâmica, possibilita movimentar objetos de base, deformando a figura e mantendo as propriedades que lhe foram atribuídas no momento da construção.

HISTÓRICO

Desenvolvido no Laboratório Leibniz do Institut d'Informatique et de Mathématiques (Imag), da Universidade Joseph Fourier, em Grenoble na França em 1986. O Cabri é fruto do trabalho de uma equipe de matemáticos, especialistas em Educação Matemática e Informática.

O nome CABRI vem das iniciais de CAhier BRouillon Interactive que significa caderno de rascunho interativo para uma nova aprendizagem da geometria.

1ª versão em 1989 (Cabri I), no Brasil em 1992. Em 1994 aparece o Cabri II.

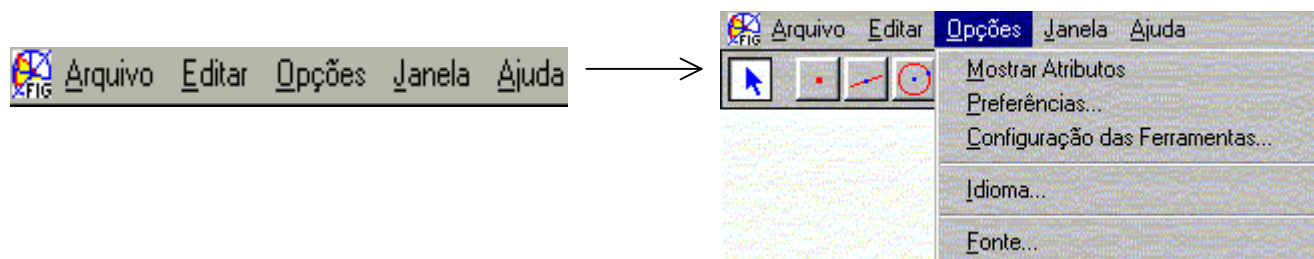
AMBIENTE CABRI

Todas as construções que são feitas com régua e compasso podem ser realizadas no Cabri.

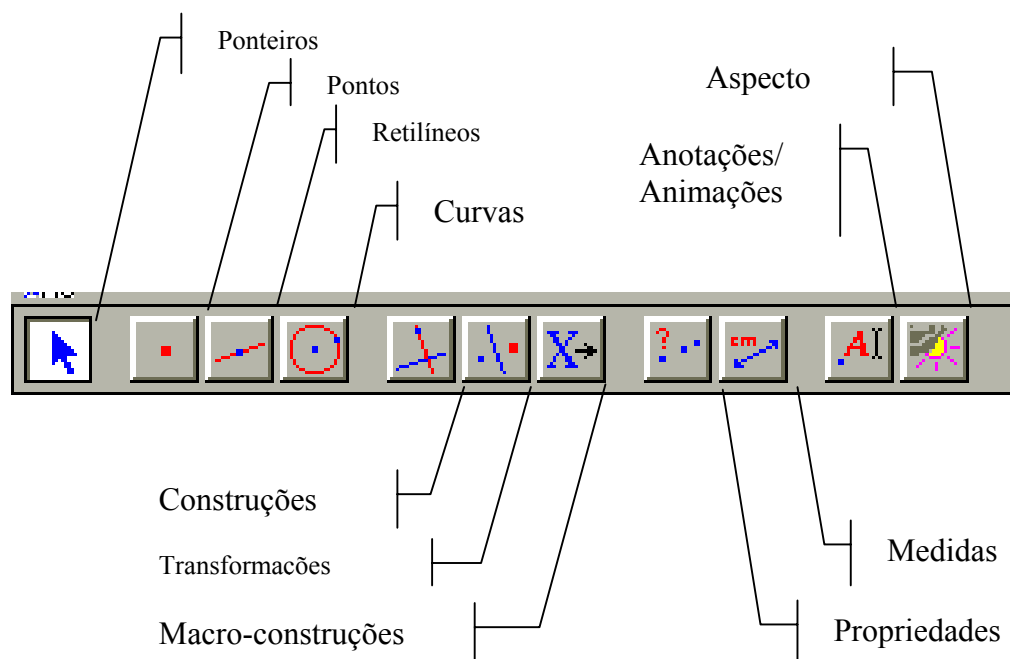
As construções possíveis são as do desenho geométrico, da geometria analítica, etc.

MENUS

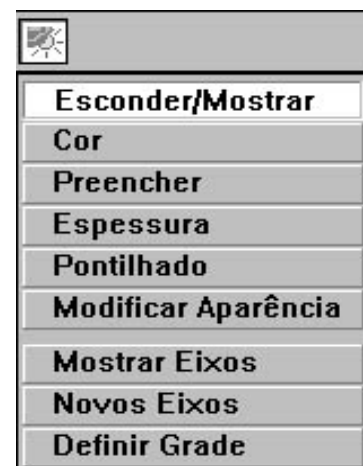
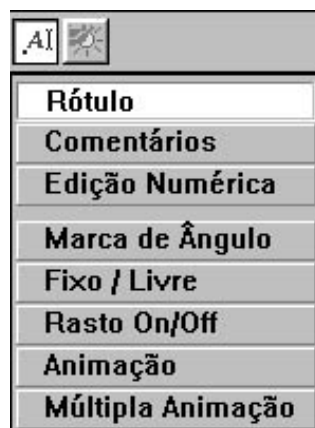
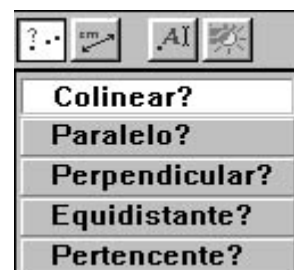
a) barra de menu textual



b) barra de menu iconizada



FERRAMENTAS CABRI



Atividade 1

Abra o arquivo circunferências.fig.

Quais elementos das figuras podem ser movimentados?

Anime estes objetos e observe o comportamento das figuras.

Obs: você pode movimentar “manualmente” (com o auxílio do mouse, selecionando e arrastando) ou com a opção “Animação” do menu.

Agora é a sua vez! Construa figuras que se comportem da mesma maneira que as figuras dadas.

Circunferência 1, Circunferência 2 e Circunferência 3.

Atividade 2

Construa um segmento e divida em duas partes iguais.

Atividade 3

- 1) Crie dois pontos A e B.

Desafio

Construa uma circunferência passando por A e B.

- 2) Crie um ponto M sobre a circunferência.

Com a opção “Arco”, crie o arco AMB.

Trace os segmentos MA e MB.

Marque e meça o ângulo AMB.

Movimente o ponto M sobre a circunferência.

O que você pode constatar?

Atividade 4

Construa um triângulo retângulo. Esconda os traços da construção.

Você pode movimentar os três vértices do triângulo? Por quê?

Verifique se seu triângulo continua retângulo, mesmo quando movimentamos os vértices.

Atividade 5

- a) Abra o arquivo BOCA.fig.
- b) Que tipo de quadrilátero é esse?
- c) Construa as bissetrizes internas do quadrilátero.
- d) Os pontos de intersecção das bissetrizes determinam um outro quadrilátero, investigue as propriedades deste quadrilátero e classifique-o.

Atividade 6

- a) Abra o arquivo triângulo.fig.
- b) Mexa os pontos para verificar que tipos de triângulos são?

- c) Com a opção “Rasto”, selecione e movimente o ponto A.
- d) Usando qualquer método, construa seu próprio triângulo isósceles.

Atividade 7

- a) Construa um paralelogramo.
- b) Faça a validação, isto é, verifique se o quadrilátero construído preserva as propriedades de um paralelogramo quando movimentamos seus vértices.

Atividade 8

Construa um quadrado.

Atividade 9

- a) Abra o arquivo CXPRETA.fig.
- b) Movimente a figura.
- c) Investigue as propriedades dessa figura.
- d) Construa outra figura com as mesmas características.

Atividade 10

1. Traçar um segmento AB.
2. Construir a mediatriz de AB.
3. Obter a intersecção M da mediatriz com o segmento AB.
4. Considerar um ponto P sobre a mediatriz.
5. Marcar o ângulo PMA e, a seguir, medi-lo.
6. Medir os segmentos AM e MB.
7. Traçar e medir os segmentos PA e PB.
8. Movimentar o ponto P sobre a reta. Quais as propriedades características?
9. Movimentar os pontos A e B. As propriedades se mantêm constantes?

Atividade 11

1. Traçar um triângulo ABC.
2. Obter o ponto M, médio do segmento AB, e determinar o segmento MC. Esse segmento recebe o nome de mediana do triângulo em relação ao vértice C.
3. Determinar a mediana NB relativa ao vértice B.
4. Obter o ponto G de intersecção das medianas. Esse ponto recebe o nome de baricentro do triângulo ABC.
5. Obter a terceira mediana AP relativa ao vértice A.
6. Movimentar os pontos A, B e C. Quais os invariantes das medianas?
7. Medir os segmentos AG e GP.
8. Qual a relação existente entre essas medidas?

Atividade 12

1. Construir um triângulo ABC.
2. Construir, por A, a reta perpendicular a BC e, por B, a reta perpendicular a AC.
3. Encontrar a intersecção dessas retas e nomear de O.
4. Por C, traçar a perpendicular a AB.
5. Movimentar os vértices A, B ou C. Quais as características do ponto O? Esse ponto recebe o nome de ortocentro.
6. Movimentar novamente e observar a posição do ortocentro em relação ao triângulo. O que se pode concluir?

Atividade 13

1. Determinar três pontos não alinhados.
2. Traçar a reta definida pelos pontos A e B e a reta definida por A e C.
3. Construir a bissetriz do ângulo BAC, clicando nos pontos B, A e C, nessa ordem.
4. Determinar um ponto D qualquer sobre a bissetriz.
5. Marcar e medir os ângulos BDA e DAC.
6. Movimentar os pontos A, B e C, observando esses ângulos.
7. Pelo ponto D, traçar a reta perpendicular à reta AB. Obter o ponto R de intersecção dessas duas retas.
8. Pelo ponto D, traçar a reta perpendicular à reta AC. Obter o ponto S de intersecção dessas duas retas.
9. Determinar as medidas DR e DS e observá-las ao movimentar o ponto D.

Atividade 14

1. Construir um triângulo ABC.
2. Construir as bissetrizes dos ângulos ABC e BCA.
3. Obter a intersecção I das duas bissetrizes.
4. Construir a bissetriz do outro ângulo e observar que elas se interceptam no mesmo ponto. Esse ponto recebe o nome de incentro.
5. Esconder as três bissetrizes deixando apenas o ponto I.
6. Pelo ponto I, traçar uma reta perpendicular ao lado AB do triângulo e que intercepta AB no ponto T.
7. Construir uma circunferência de centro I e raio IT.
8. Movimentar A, B ou C.
9. Qual característica da circunferência construída?

Atividade 15

1. Construir um triângulo ABC.
2. Construir a mediatriz do lado AB.
3. Construir a mediatriz do lado BC.
4. Obter a intersecção H das duas mediatrizes.
5. Construir a mediatriz do lado AC. Movimentar um dos pontos A, B ou C para observar que as mediatrizes dos lados dos triângulos passam sempre pelo ponto H. Esse ponto recebe o nome de circuncentro.
6. Construir uma circunferência de centro H e raio HA.
7. Movimentar A, B ou C.
8. Quais características da circunferência construída?

Atividade 16

1. Traçar três segmentos quaisquer.
2. Construir um triângulo que tenha lados congruentes aos segmentos traçados, utilizando o compasso.
3. Movimentar os segmentos iniciais.
4. É sempre possível obter um triângulo com lados congruentes a três segmentos dados?
5. O que se pode concluir?

Atividade 17

Sabendo-se que um triângulo é equilátero quando seus três lados têm a mesma medida, construir um triângulo equilátero.

ANEXO 2:

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PAPEL E LÁPIS

Exercício 1a

Alunos	Justificativas
Thiago	É uma pirâmide porque é constituído por uma base triangular e três faces em triângulo.
Hellen	Uma pirâmide, pois mostra dois lados dela e um lado que não está à mostra (visível).
Tatiane	Representa uma pirâmide.
Cristina	Representa a junção de dois triângulos qualquer formando uma reta que liga o ponto b e d.
Rodrigo	Um quadrilátero composto por três triângulos, porque seus lados externos são quatro.
Bruna	Um triângulo, porque a figura me lembra uma pirâmide, um triângulo, a colocação das retas me proporciona isto.

Exercício 1b

Alunos	Justificativas
Thiago	Não, porque não estão entre o mesmo conjunto de arestas.
Hellen	Não, porque os pontos representam cada um dos lados da pirâmide.
Tatiane	Sim, porque estão dentro de um plano pertencente a um ponto.
Cristina	Sim, porque o ponto C fez uma reta do ponto C ao segmento $\overline{AD}$, formando uma reta com dois pontos (J, K). E o ponto D fez uma reta no segmento $\overline{AB}$ formando o ponto I.
Rodrigo	Não sei, a dúvida é se o plano é ABCD ou se é dividido em dois triângulos ABC e ADC, pois se for esse o caso “I” não estará no mesmo plano que K e J. Obs: De acordo com o exercício 3, pode-se observar que cada triângulo representa um plano, portanto I não está no mesmo que J e K.
Bruna	Não, porque os pontos K e J estão em uma outra divisão diferente de I. Estão no plano A, C, D.

Exercício 2

Alunos	Justificativas
Thiago	Sim, porque não são paralelas.
Hellen	Não, porque elas estão distantes onde não ocorre uma intersecção entre ela.
Tatiane	Não, porque estão em bases diferentes.
Cristina	Sim, porque a reta F passa pela reta r formando o ponto G.
Rodrigo	Sim, as retas são infinitas e não são paralelas, portanto haverá intersecção.
Bruna	Não, porque elas tem origem diferente, a reta r passa na parte debaixo pelos pontos C e G, e a reta s passa pela parte de cima por E e F.

Exercício 3

Alunos	Justificativas
Thiago	Primeiro respondeu sim, depois mudou para não, porque estão limitadas aos seus planos. Coloque a resposta dada pelo aluno. Depois, você comenta e diz que mudou....
Hellen	Não, porque aparenta que somente estão nos planos e não passando por elas.
Tatiane	Não sei, porque eu não prestei atenção.
Cristina	Sim, porque existe uma reta que liga os pontos A e D, assim passando as retas r e s.
Rodrigo	Sim, pois não são paralelas.
Bruna	Não, pois elas fazem parte de planos diferentes.

Exercício 4

Alunos	Justificativas
Thiago	Respondeu II e depois mudou para não sei, não consigo identificar os cortes.
Hellen	II, porque é o que aparenta ser por causa de sua forma triangular ao qual se parece no cubo.
Tatiane	II, porque tem a mesma medida cortada.
Cristina	II, porque os pontos que estão ligados (DGC) formam a mesma figura.
Rodrigo	Nenhuma das três, o cubo foi cortado em partes iguais.
Bruna	Respondeu II e mudou para nenhuma das três, porque para mim a menor das partes em que o cubo foi cortado é a parte que eu pintei, na reta CG; e nenhuma das figuras se encaixa ali.

Exercício 5

Alunos	Justificativas
Thiago	Não, porque não pertencem ao mesmo conjunto de arestas.
Hellen	Não, porque os pontos A e C são do plano α e o ponto B é do β .
Tatiane	Não, porque estão em planos diferentes, o ponto A, C está no plano α e o ponto B no plano β .
Cristina	Não sei, porque nenhum deles se interligam a um só ponto, só formam intersecções.
Rodrigo	Respondeu sim primeiro e depois mudou para não, há uma ligação central entre eles, porém o ponto A e C pertencem ao plano α e o ponto B pertence ao plano β , apesar de haver uma dúvida em relação a esta ligação entre eles.
Bruna	Não, porque existe uma divisão entre os pontos A e C.

Exercício 6a

Alunos	Justificativas
Thiago	Sim, porque se encontra dentro das arestas.
Hellen	Sim, simplesmente por estar dentro (ou intersecção) do plano α .
Tatiane	Sim, porque estão dentro do plano.
Cristina	Sim, porque para ele ser formado ele passa pelo ponto α .
Rodrigo	Sim, o ponto A está no interior do quadrilátero, ou seja, no plano α .
Bruna	Sim, porque ele se localiza dentro das retas que determinam o plano α .

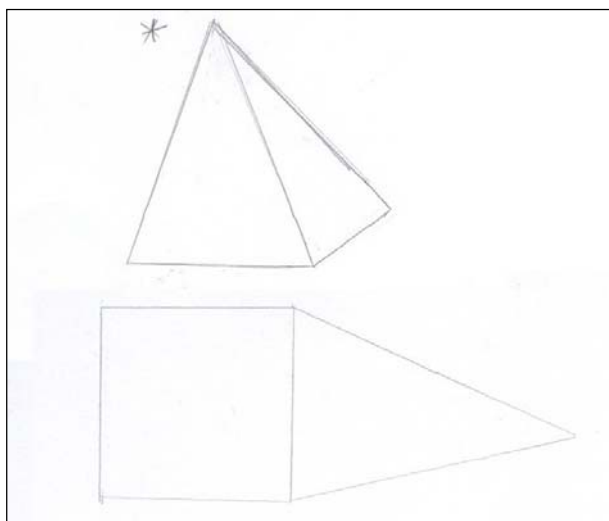
Exercício 6b

Alunos	Justificativas
Thiago	Não, não se encontra dentro das arestas.
Hellen	Não, porque ele está paralelo ao plano e não está em intersecção.
Tatiane	Não, porque está fora do plano α .
Cristina	Sim, porque para o ponto B ser formado ele passa pela reta que é formada pelo ponto α , sendo a reta A.
Rodrigo	Não, o ponto B está no exterior do quadrilátero.
Bruna	Não, porque ele se localiza fora do plano que está determinado como plano α .

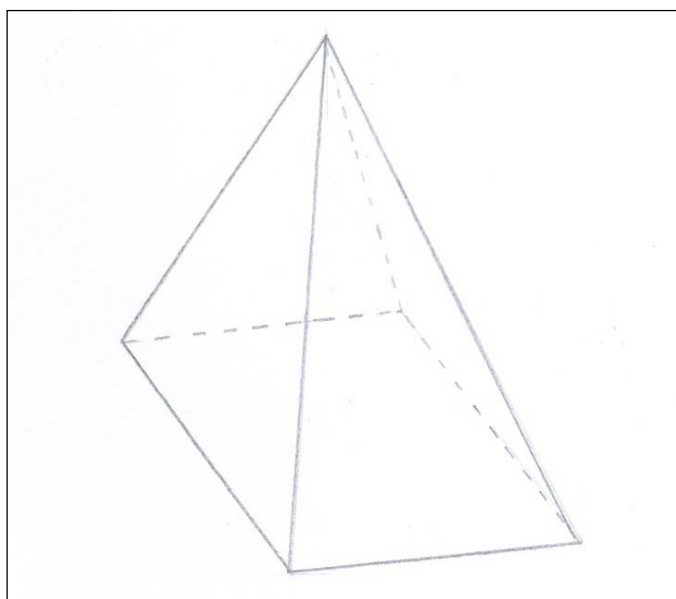
Exercício 6c

Alunos	Justificativas
Thiago	Não, não se encontra dentro das arestas.
Hellen	Não, porque ele está ao lado do plano.
Tatiane	Não, porque está fora do plano α .
Cristina	Sim, sim pelo mesmo motivo que o ponto B, o C passa pela reta formando A e pela reta B.
Rodrigo	Não, o ponto C está no exterior do quadrilátero.
Bruna	Não, porque ele está ao lado de fora da figura que representa o plano α .

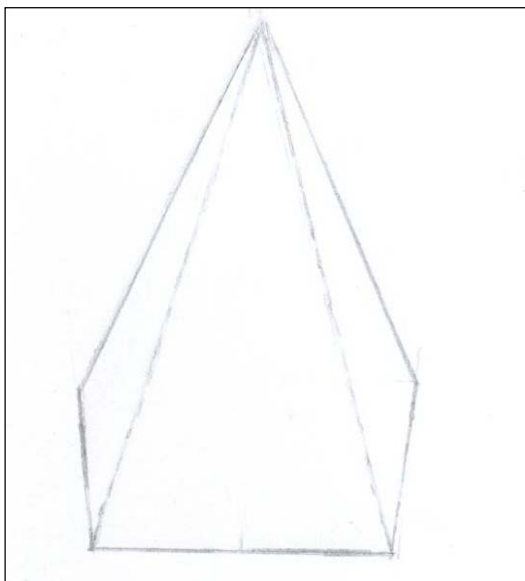
Bruna



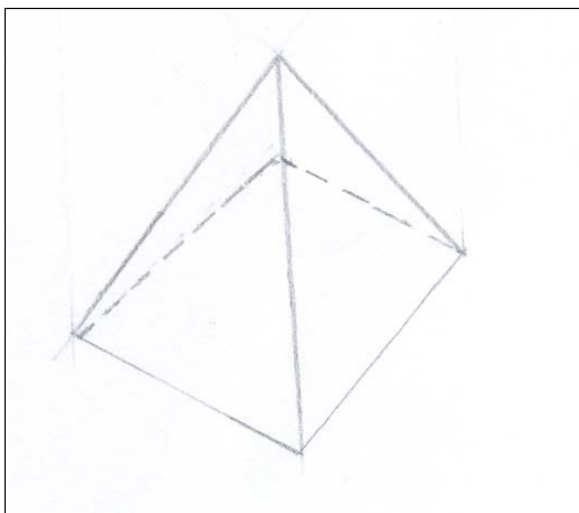
Hellen



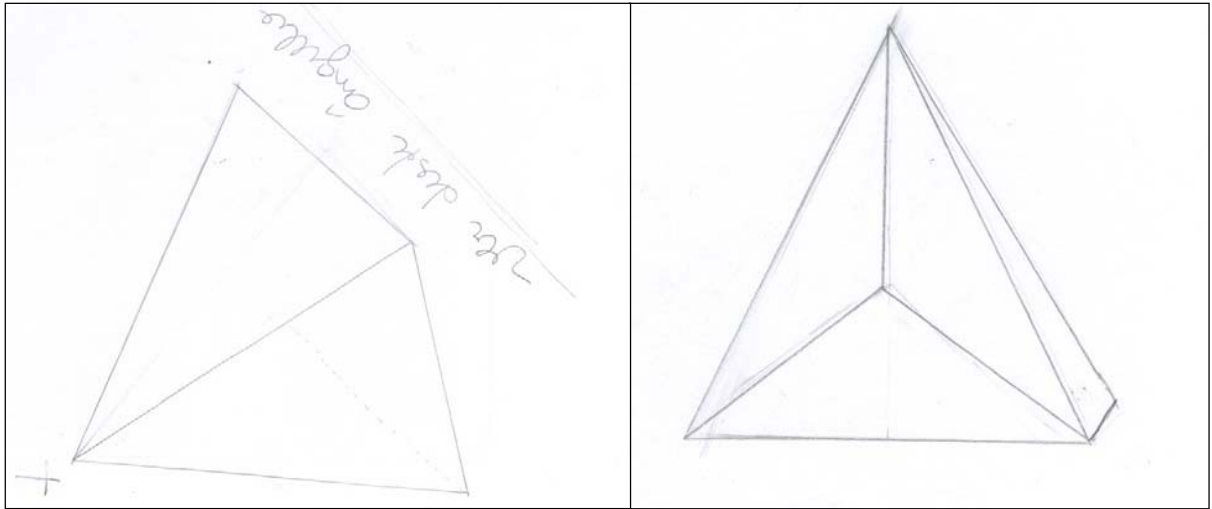
Rodrigo



Thiago



Cristina



Tatiane

