

**DANILO DOS SANTOS CHRISTO**

**INTRODUÇÃO DA NOÇÃO DE VARIÁVEL EM  
EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POR MEIO DA RESOLUÇÃO  
DE PROBLEMAS: UMA ABORDAGEM DINÂMICA**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC/SP  
São Paulo  
2006**

**DANILO DOS SANTOS CHRISTO**

**INTRODUÇÃO DA NOÇÃO DE VARIÁVEL EM  
EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POR MEIO DA RESOLUÇÃO  
DE PROBLEMAS: UMA ABORDAGEM DINÂMICA**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Anna Franchi*

**PUC/SP**  
**São Paulo**  
**2006**

**Banca Examinadora**

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Dione Lucchesi de Carvalho  
UNICAMP/SP

---

Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva  
PUC/SP

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Anna Franchi  
PUC/SP

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

## DEDICATÓRIA

Ao meu querido e amado pai (*in memoriam*), meu verdadeiro mestre.

## **AGRADECIMENTOS**

À professora doutora Anna Franchi, pela paciência, dedicação e competência para a realização deste trabalho.

Aos professores doutores Dione e Benedito, pelas importantes contribuições para a finalização deste trabalho.

À professora mestra Ana Maria Velloso Nobre, pelo carinho e pelo incentivo durante este trabalho.

Às minhas queridas e amadas mamãe e Tia Leninha, por sempre me apoiarem e acreditarem em mim.

À minha amada esposa Denise, pela paciência, carinho e compreensão em todos os momentos.

À minha querida e amada sobrinha Camila, pela ajuda sempre que necessária.

A todos os meus familiares que me incentivaram e torceram por mim.

Aos meus professores e professoras da PUC-SP, que contribuíram para o meu crescimento acadêmico.

Aos meus amigos e amigas do mestrado, pelas importantes observações e contribuições no decorrer deste trabalho.

## RESUMO

Dificuldades dos alunos na escrita e interpretação da linguagem algébrica e, em particular, na compreensão do significado de variável, têm sido discutidas por pesquisadores como Kieran, Küchemann, Arcavi, entre outros. Nesta pesquisa, avaliamos uma proposta de ensino na qual busca-se descrever as relações estabelecidas entre os elementos de situações de proporcionalidade com as expressões aritméticas generalizáveis. A análise dessas regularidades favorece o ensino da linguagem algébrica, em uma abordagem dinâmica em que se enfatiza a noção de dependência entre as variáveis envolvidas na situação. A proposta foi desenvolvida em uma sexta série do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de São Paulo. A análise dos resultados obtidos permite-nos constatar a eficiência da proposta de ensino para a consecução dos objetivos visados nesta investigação e fornece subsídios para a formação de professores

**Palavras-Chave:** expressão algébrica, variável, resolução de problemas, proporcionalidade, leis quantitativas.

## **ABSTRACT**

Students' difficulties in writing and interpreting algebraic language, particularly in comprehending the meaning of variable have been discussed by such researchers as Kieran, Küchemann, Arcavi and others.

In this research, we evaluate a teaching proposal in which it is aimed at explaining established relations between elements of circumstances of proportionality and generalizable arithmetic expressions. This analysis of regularity eases the algebraic language teaching through a dynamic approach in which the notion of dependence among the circumstantial variables is emphasized. This proposal was applied to a sixth grade group of a public primary school in São Paulo city. The analysis of the obtained results allows us to verify the teaching proposal's efficiency for attaining the objectives of this research and provides tools for training teachers.

**Key-words:** algebraic expression, variable, problem solving, proportionality, quantitative laws.

## SUMÁRIO

Apresentação .....	10
Capítulo I - Problemática .....	11
Capítulo II - Fundamentação Teórica .....	23
II.1 - A noção de variável .....	27
Capítulo III - Metodologia .....	38
III. 1 - Procura da escola.....	41
III. 2 - Descrição da escola .....	42
III. 3 - Inserção no campo .....	42
III. 4 - Atividades Propostas.....	45
III.4.1 - Atividade 01 .....	45
III.4.2 - Atividade 02: Loteria de Expressões Aritméticas .....	47
III.4.3 - Atividade 03: .....	49
III.4.4 - Atividade 04: .....	50
III.4.5 - Atividade 05 .....	51
III.4.6 - Atividade 06 .....	52
III.4.7 - Atividade 07 .....	53
III.4.8 - Atividade 08 .....	54
III.4.9 - Atividade 09: “Jogo do Adivinha”.....	55
III.4.10 - Atividade 10: “Bingo de expressões algébricas” .....	56
Capítulo IV - Descrição e análise do desenvolvimento das atividades.....	57
IV. 1 Desenvolvimento da atividade 01: .....	59
IV. 2 Desenvolvimento da atividade 02: .....	61
IV. 3 Análise das atividades 1 e 2.....	63
IV. 4 Desenvolvimento da atividade 03 .....	66
IV. 5 Análise da atividade 3 .....	73
IV. 6 Desenvolvimento da atividade 04 .....	76
IV. 7 Desenvolvimento da atividade 05 .....	78
IV. 8 Análise das atividades 4 e 5.....	81
IV. 9 Desenvolvimento da atividade 06 .....	84
IV. 10 Desenvolvimento da atividade 07 .....	86
IV. 11 Análise das atividades 6 e 7.....	88
IV. 12 Desenvolvimento da atividade 08 .....	92
IV. 13 Desenvolvimento da atividade 09 .....	94
IV. 14 Desenvolvimento da atividade 10 .....	95
IV. 15 Análise das atividades 08,09 e 10.....	97
Capítulo V – Considerações Finais .....	103
VI - Bibliografia: .....	106
ANEXO I – Atividades Desenvolvidas .....	111

## APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa estuda os aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da introdução da noção de variável em uma perspectiva na qual a generalização de situações problemas envolvendo procedimentos de resolução familiares aos alunos, ocupa um papel central. A construção de igualdades numéricas generalizáveis assume um papel importante na mediação entre as situações problemas e a interpretação dessas situações na linguagem algébrica formal. Essas generalizações visam expressar relações estabelecidas no processo de resolução de situações problemas de proporcionalidade de modo a integrá-las. Em particular, busca-se ampliar o significado o sinal de “igual”, utilizado em aritmética, para indicar respostas obtidas na resolução de problemas e em algoritmos, e não para comparar expressões. As atividades desenvolvidas tiveram como *lócus* da investigação uma classe de 6ª série do ensino fundamental de uma escola pública, na zona leste da cidade de São Paulo.

No capítulo I, é discutida a problemática, apresentando o objetivo e relevância do estudo.

No capítulo II, são abordadas as fundamentações teóricas.

No capítulo III, é apresentada a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa, com uma descrição da escola e algumas informações sobre os alunos. Esse capítulo contém também uma descrição de cada uma das atividades propostas com seus objetivos.

O capítulo IV é dedicado à análise dos fenômenos ocorridos durante o desenvolvimento das atividades. Essa análise baseia-se nas produções dos alunos e nas observações em classe.

No quinto e último capítulo, são feitas considerações finais sobre o trabalho e é apresentada uma síntese das constatações fundamentais obtidas na análise. Trata-se de uma pesquisa que apresenta mais uma proposta de ensino e que não pretende ser única e sequer acabada.

## Capítulo I - Problemática

Nosso trabalho insere-se entre as pesquisas desenvolvidas no grupo de pesquisa G2 – Álgebra e Análise: especificidades, inter-relações e relações com outros domínios da Matemática, nos diversos níveis de ensino. No referente ao sub-grupo voltado ao ensino fundamental, destacamos dois núcleos básicos: estruturas multiplicativas e transição da aritmética para álgebra. Pesquisas realizadas sobre esses núcleos têm priorizado a sala de aula, revelando aspectos fundamentais, relativos ao desenvolvimento e funcionamento dos processos de aquisição de conhecimentos.

Em particular, têm revelado dificuldades de aprendizagem, assim como oferecido dados e sugestões para combatê-las. Nossa pesquisa incide sobre um tema que, de certo modo, conjuga os dois focos de estudo. Destacamos, abaixo, alguns desses estudos, os mais diretamente relacionados à questão da nossa pesquisa.

- Barreto, I. M. (2001) analisa os raciocínios utilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo raciocínio multiplicativo, ou seja, situações interpretáveis por meio de relações quaternárias, as quais podem ser tomadas como termos de uma relação de proporcionalidade. Quanto aos desempenhos dos alunos obteve-se: diversidade de procedimentos de resolução, concentrados prioritariamente na estratégia escalar; um grande número de procedimentos não canônicos, como a adição repetida; “multiplicação com termo desconhecido”; multiplicações sucessivas, entre outros.
- Freitas, A. (2002) e Notari, A. (2002) procedem à análise, respectivamente, de aspectos conceituais e de dificuldades relacionados aos processos de resolução de equações do 1º grau, com coeficientes inteiros e aos processos de simplificação de frações aritméticas e algébricas. Avultaram grandes dificuldades nesses processos, em aspectos muitas vezes triviais,

bem como a ausência completa de inter-relação entre proposições e expressões algébricas e aritméticas.

- Nakamura O. (2003) explora a concepção dos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental sobre variável, em uma abordagem funcional, identificando e analisando os fenômenos didáticos ocorridos no processo de generalização de seqüências de padrões geométricos em expressões algébricas equivalentes. Por trazerem elementos importantes para nossa investigação, exporemos esses elementos no capítulo sobre fundamentação teórica.

Meu engajamento nesse grupo de pesquisa, decorreu de meu interesse por questões relativas ao ensino de álgebra, as quais foram definindo-se no decorrer de minhas atividades individuais e coletivas no Programa.

Dificuldades no ensino e aprendizagem de álgebra, na educação básica, têm sido discutidas por diferentes pesquisadores como Küchemann (1978,1981), Booth (1984), Arcavi (1987), entre outros.

Booth e Cook(1988), Macgregor (1996) e Kieran (1981) situam a fonte das dificuldades, em álgebra, na incompreensão de conceitos e princípios da aritmética ou em concepções errôneas decorrentes de uma falsa generalização dos procedimentos aritméticos. Entre estas, na compreensão insuficiente das relações existentes entre as operações, das propriedades operatórias dos números, nas “diferentes interpelações” do sinal de igualdade, nas dificuldades de concentração na atividade e não apenas na resposta.

Com relação ao sinal de igualdade, Kieran (1992) defende que:

*“...um dos requisitos para gerar e interpretar adequadamente representações estruturais tais como equações é uma concepção do caráter simétrico e transitivo da igualdade – às vezes referido como a ‘equivalência esquerda-direita’ do sinal de igual. A noção entre os estudantes de Álgebra iniciantes de que o sinal de igual seja mais um ‘sinal faça alguma coisa’ (Behr, Erlwanger & Nichols, 1976) do que um símbolo de equivalência entre os lados esquerdo e direito de uma equação é indicado na relutância inicial que eles*

*têm em aceitar afirmações como  $3 + 4 = 6 + 1$  ou  $3 = 3$ . Eles pensam que o lado direito deveria indicar a resposta, isto é,  $4 + 3 = 7$ .”*

Sobre esse tema, Kieran (1981) realizou uma experiência de ensino com seis estudantes de 12 e 13 anos, com o objetivo de *“ampliar o entendimento dos estudantes novatos sobre o sinal de igual e para ajudá-los a construir um sentido para equações algébricas do tipo  $ax \pm b = cx \pm d$ .”*

De acordo com a autora, ficou evidente que os alunos interpretaram o sinal de igual *“em termos de uma resposta”*, ou seja, para eles, ao invés desse sinal representar uma relação de equivalência, ele antecipava um resultado.

Freitas (2002), baseando-se nas idéias de Kieran, afirma:

*“Segunda ela (Kieran), muitas abordagens didáticas supõem que a criança, ao perceber que  $3 + 6$  e  $4 + 5$  são diferentes maneiras de se dizer o número 9, pode desenvolver a idéia de equivalência, comparando essas expressões na forma  $3 + 6 = 4 + 5$ . Porém, alguns estudos mostraram uma resposta típica de alunos diante dessa questão: ‘depois do sinal de igual deve vir o resultado e não outro problema.’ (Kieran 1981)” (p.10).*

Voltando à experiência de Kieran(1981), após a fase inicial, que consistia em solicitar, aos estudantes, para construírem igualdades aritméticas, tais como,  $2 \times 6 = 4 \times 3$  e  $2 \times 6 = 10 + 2$ , a autora pediu-lhes que construíssem igualdades com duas operações de cada lado, e com múltiplas operações, como, por exemplo,  $7 \times 2 + 3 - 2 = 5 \times 2 - 1 + 6$ .

Kieran(1992) descreve que:

*“Apesar da insistência inicial de um sujeito em inserir a ‘resposta’ entre ambos os lados (i.e.,  $5 \times 3 = 15 = 10 + 5$ ), os sujeitos pareciam em geral estar bem à vontade com afirmações de igualdade contendo operações múltiplas de ambos os lados. Eles as justificavam em termos de ambos os lados serem iguais porque tinham o mesmo valor. As comparações que os sujeitos finalmente foram capazes de fazer entre os lados esquerdo e*

*direito do sinal de igual sugerem que o símbolo da igualdade estava sendo visto nesse estágio mais como um símbolo relacional do que como um 'sinal para fazer alguma coisa'. O lado direito, nesse momento, não tinha que conter a resposta, mas sim, poderia ser alguma expressão que tivesse o mesmo valor que o lado esquerdo. ”*

Ainda sobre o mesmo aspecto, Lemoyne (1993) relata:

*“Matz (1980) propôs uma tipologia de erros que abrange exercícios variados dos programas de ensino de álgebra (fatoração, simplificação, resolução de equações, resolução de problemas algébricos. (...) Para o autor os erros testemunham tentativas racionais mas infrutíferas de adaptação dos conhecimentos anteriores à novas situações.” (p. 336)*

Nesse enfoque, considera dois tipos principais de erros: os correspondentes à ausência de mudanças conceituais e os ligados às técnicas de extrapolação. Nossa pesquisa refere-se mais diretamente à primeira categoria, ou melhor, às mudanças conceituais envolvidas na passagem da aritmética para a álgebra, ou seja, à compreensão da noção de variável e da equivalência entre expressões algébricas indicadas pelo sinal de igual.

A compreensão desses erros remete, ainda segundo Matz (1980), *“a um exame das relações entre saberes aritméticos e algébricos, relações estudadas sob o ângulo da passagem aritmética-álgebra. Essa passagem efetua-se pela construção da noção de valor simbólico e pela extensão da relação de igualdade. Este enunciado constitui atualmente um enunciado essencial nas pesquisas sobre a álgebra (Booth, 1984; Küchemann, 1981; Kieran, 1981, 1989), enunciado sempre válido por uma referência histórica ao desenvolvimento do simbolismo algébrico”*. Lemoyne (1993 - p. 336)

Pesquisas desenvolvidas desde a década de 80 têm ressaltado dificuldades na compreensão da noção de variável e do conceito de equivalência de equações (sinal de igual), propondo etapas de desenvolvimento.

Küchemann (1976, apud Kieran 1992, p.396) escreve que alunos de 13 a 15 anos entendem as variáveis *“como objetos concretos ou como rótulos de objetos concretos, poucos deles sendo capazes de interpretar letras como variáveis”*.

As considerações acima ampliam aquelas em que a letra é vista apenas como generalização da aritmética. Expressões aritméticas constituem-se em mediações importantes na construção de expressões algébricas quando apresentam regularidades que possibilitam generalizações. Entretanto, em muitos casos, nessas generalizações ocorrem um enfoque estático em que as expressões algébricas são vistas como elementos constituintes de uma linguagem formal.

Nos Estados Unidos, em 1988, citando Brown e seus colaboradores, Kieran(1992), mostra-nos que esses concluíram que:

*“Estudantes secundários (norte-americanos, 7º e 11º graus), parecem ter algum conhecimento dos conceitos e regras básicas da álgebra ... Todavia os resultados mostram que, com freqüência, não são capazes de aplicar estes conhecimentos em situações problemas, nem parecem entender as estruturas que estão sob estes conceitos e as técnicas matemáticas...”*

e Kieran (1988) conclui:

*“...os estudantes memorizam as regras e procedimentos e até acreditam que esta atividade representa a essência da matemática.”*

Referindo-se aos diferentes empregos da idéia de variável, Usiskin (1995), analisa cinco equações, todas com a mesma forma (o produto de dois números é igual a um terceiro), porém cada uma com um caráter diferente. Inspirando-me nessa análise, acrescento-as abaixo, com pequenas modificações apropriadas:

1.  $A = b \cdot h$  (fórmula, onde A ou b ou h são desconhecidos).
2.  $40 = 50x$  (equação ou sentença aberta onde x é uma incógnita)

3.  $\operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$  (identidade, onde  $x$  é um argumento de uma função)
4.  $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$  (propriedade fundamental da potenciação: multiplicação de potências de mesma base)
5.  $y = kx$  (equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta, na qual  $x$  é um argumento da função,  $y$  o valor e  $k$  uma constante)

Se analisarmos a questão da variabilidade, do qual resulta o termo variável, em cada um dos exemplos acima, poderemos dizer que somente o exemplo (5) possui essa característica.

Em que medida esses diferentes usos da variável são introduzidos e explicitados no ensino? Em que medida há clareza quanto às especificidades da exeqüibilidade dessas concepções em diferentes situações?

Além disso, segundo Usiskin, muitos alunos pensam que variáveis são letras representando números, contudo, isso nem sempre é verdade. Na Geometria, por exemplo, os pontos são representados por letras maiúsculas e na lógica  $p$  e  $q$  representam proposições. Ou, ainda, tendem a acreditar que uma variável é representada por uma letra, sendo que, muitas vezes, ela pode estar representada por um outro símbolo como traços baixos, quadrados ou triângulos, por exemplo.

Para Arcavi (1987), o entendimento de um conceito matemático é influenciado pelo contexto no qual está sendo trabalhado, ao invés de aplicações em situações que apresentam apenas regras formais. Os estudantes estudam as regras formais, mas só conseguem interpretá-las em situações contextualizadas.

Dificuldades de compreensão da noção de variável conjugam-se, portanto, àquelas de resolução de problemas. A atividade de resolução de problemas tem-se configurado como um espaço adequado para a integração de conhecimentos, em termos de sua estrutura conceitual, da inter-relação entre conhecimentos e técnicas bem como para o estabelecimento de conexões entre outras áreas de conhecimento.

Com base nessas colocações, Arcavi (1987) defende que “o conceito de variável é ‘variável’ e ‘ardiloso’: ele é difícil de descrever, e em boa parte, mais difícil de aprender”. E, para auxiliar no ensino do conceito de variável, fornecemos três sugestões:

- Com relação à transição da aritmética para a álgebra: quando a linguagem algébrica é introduzida, deve servir aos estudantes como uma linguagem conveniente para expressar idéias que já foram apropriadas por eles.
- O aspecto dinâmico do conceito de variável deve ser enfatizado sempre que isso for possível e apropriado, principalmente em situações contextualizadas que envolvam variáveis independentes e dependentes.
- Os estudantes devem trabalhar com muitos problemas, capturando a “essência” matemática de uma variedade de situações, nas quais a álgebra (especialmente com a função de um objeto para a generalização matemática) pode ser útil.

Concluindo, Arcavi (1987) defende que:

*“A notação matemática é uma ferramenta maravilhosa e poderosa. Ela também é sutil e difícil de aprender...”*

Concordando com as sugestões de Arcavi, selecionamos para nossa investigação as situações problemas multiplicativos, ou sejam, aquelas que estabelecem, entre seus dados, relações proporcionais.

Do ponto de vista matemático, o conceito de proporcionalidade é um pré-requisito para o entendimento de outros conceitos. Essa forma de raciocinar em matemática, por meio de um pensamento proporcional, é fundamental na comparação de duas razões, sendo bem aplicada às situações de variação entre duas dimensões ou de comparações múltiplas:

*“O raciocínio proporcional desempenha um papel tão importante no desenvolvimento matemático do estudante que foi descrito como um conceito limítrofe, a pedra fundamental dos níveis mais*

*altos da matemática e o arremate dos conceitos elementares”.*  
Lamon (1994,p.90, apud Barreto p.11) <sup>1</sup>

*“O desenvolvimento da estrutura multiplicativa apóia-se em situações de proporcionalidade e é decisivo para uma pessoa conceituar ou trazer à luz o mundo no qual ele ou ela vive.”* Kieran (1994, p.387, apud Barreto, p.11).

Por sua vez, essa estrutura *“compreende conceitos que não se desenvolvem isoladamente, mas em mútua correlação.* (Verгдаud, 1988;1991;1994, apud Barreto - 2001, p.11)

Problemas escolares tratando de compra e venda referem-se, geralmente, à situações em que a variação do preço total de uma mercadoria é proporcional à variação da quantidade. Nessas circunstâncias, as relações entre os dados dos problemas têm propriedades que caracterizam a “proporcionalidade”.

Para ilustrar esses aspectos, apresentamos, com Barreto (2001), uma breve discussão de um problema multiplicativo envolvendo 4 litros de combustível ao preço de R\$ 10,00.

$$\begin{array}{r} 4 \text{ _____ } 10 \\ 8 \text{ _____ } y \end{array}$$

A solução pode ser encontrada mediante a multiplicação de 8 litros por 2,5, ou seja, pelo coeficiente de proporcionalidade, o qual permite calcular o preço para qualquer quantidade de litros.

O preço de 8 litros também pode ser determinado multiplicando-se por 2 o preço de 4 litros. Para calcular o preço de 2 litros, basta multiplicar o preço de 4 litros por  $\frac{1}{2}$ . O preço de 10 litros também pode ser determinado somando-se o preço de 8 litros com o preço de 2 litros.

---

<sup>1</sup> LAMON, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming in G. Harel e J. Confrey (eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics*. 94-123.

Tendo em vista a relação constante que existe entre as duas variáveis: “quantidade de litros” e “custo em (R\$)”, em que a cada “x” do domínio corresponde um e somente um “y” do contradomínio, podemos afirmar: o conceito de função está implicitamente envolvido no problema: genericamente, temos uma função definida no conjunto dos números reais positivos  $f(x) = kx$  onde  $k=2,5$ .

Tendo em vista essa complexidade dos procedimentos multiplicativos, procedemos à análise dos desempenhos dos alunos, “considerando as propriedades da função acima definida como análogas às da função linear<sup>2</sup>, abaixo explicitadas:” (Barreto – 2001, p.22)

$$I) f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

$$II) f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

As considerações acima permitem-nos diferenciar os procedimentos dos alunos conforme utilizem, por meio de cálculos convencionais ou não, uma ou outra das relações matemáticas envolvidas em uma situação de “proporcionalidade”. Tomando como referência a classificação proposta por Vergnaud, distinguimos dois procedimentos<sup>3</sup>:

- a) “Os procedimentos que utilizam o coeficiente de proporcionalidade: consideram as relações entre duas grandezas, ou seja, utilizam o coeficiente constante que permite passar dos números associados a uma grandeza, para os números associados na outra grandeza. Estes procedimentos são, usualmente, chamados de procedimentos funcionais, na medida em que trazem, subjacente, uma relação funcional.” (Barreto – 2001, p.24) Exemplo:

O preço de 06 CDs é R\$ 78,00, para achar o preço de 18 CDs multiplica-se o preço de um CD pelo coeficiente de proporcionalidade 13/CD.

---

<sup>2</sup> Referindo-se a relação de representação entre dois conjuntos, M.Bunge (1974) considera a pertinência de utilizar, no processo de construção do conhecimento, representações analógicas mais frouxas (algun-algun, todo-algun) que a bijeção e o isomorfismo, constantemente exemplificados na matemática. A percepção de analogias é considerada como o primeiro passo para a generalização e a classificação.

<sup>3</sup> Para Vergnaud, grande parte desses procedimentos são “intuitivos” e largamente implícitos. As propriedades da linearidade são vistas, por ele, como “teoremas em ação” e requerem uma descrição precisa em termos de conceitos e teoremas matemáticos.

$$\begin{array}{ccc}
 & \times 13 & \\
 \overbrace{6 \text{ ----- } 78} & & \\
 18 \text{ ----- } x & & \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & & \\
 & \times 13 & 
 \end{array}$$

b) “Os procedimentos que utilizam as propriedades de linearidade evidenciam-se por meio de relações estabelecidas entre os termos da mesma grandeza, privilegiando relações multiplicativas.” (Barreto – 2001, p.24)

$$\begin{array}{ccc}
 3 \text{ ----- } \square & & \\
 \times 3 \left( \begin{array}{ccc} 6 \text{ ----- } 78 \\ 18 \text{ ----- } \square \end{array} \right) & & \left( \begin{array}{ccc} 6 \text{ ----- } 78 \\ 18 \text{ ----- } \square \end{array} \right) \times 3 \\
 30 \text{ ----- } \square & & 
 \end{array}$$

No exemplo acima, referindo-se aos dados da segunda linha:

18 CDs correspondem a três vezes mais que 6 CDs, portanto, custam três vezes mais, ou seja:  $3 \times 78$ .

Da mesma maneira, 3 CDs correspondem a metade (de 6 CDs) e a mesma variação ocorre na variável “custo”; eles custam a metade de R\$ 78,00; ou seja:

$$\frac{1}{2} \times 78 \quad \text{ou} \quad 78 \div 2.$$

Observe-se que os termos 3 e  $\frac{1}{2}$ , respectivamente, correspondem aos produtos efetuados entre os números referentes à mesma grandeza. Chamaremos esses termos de escalares e essa relação será chamada de relação escalar.

Apoiando-se nos raciocínios do tipo: “...vezes mais...” ou “...vezes menos...”, relações multiplicativas oriundas da combinação de relações aditivas e multiplicativas utilizando a propriedade  $f(ax) = af(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

Não nos deteremos mais nesse tópico, uma vez que propusemos apenas duas atividades tentando ressaltar diferentes procedimentos, os quais ofereceram poucos elementos para a análise.

Essas informações são de extrema importância para a nossa pesquisa, pois, apesar de não ser a única fonte na qual nos basearemos, mostra a complexidade da idéia de variável. No momento que estivermos tratando das atividades desenvolvidas e, também, quando de suas análises, não poderemos nos esquecer das informações aqui contidas, pois acreditamos que muitas dificuldades apresentadas delas são decorrentes.

Nossa pesquisa visa dar a conhecer a linguagem algébrica a uma população de alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, por meio de resolução de problemas verbais, com ênfase na representação simbólica das variáveis dependentes e independentes envolvidas.

Para tanto, as atividades apresentaram situações multiplicativas e triviais de compras, como, gastos, pagamentos, variação e comparação de preços de alguns *compact discs (cd's)* encontrados na maioria das lojas da capital, tais como, preço de um ou mais *cd's* ou variação de preços conforme o intérprete ou a banda de música.

De modo mais específico, nossa pesquisa tem como objetivos:

1. Analisar os fenômenos didáticos que ocorrem no ensino da linguagem algébrica (para alunos iniciantes em álgebra) por meio de uma abordagem funcional em que se enfatiza a relação de dependência entre as variáveis envolvidas.
2. Favorecer a utilização de processos de resolução de problemas, os quais permitam aos alunos relacionar os conhecimentos envolvidos e a inter-relação entre estas técnicas.

Concluindo, elaboramos nossas atividades de modo a oferecer aos alunos situações-problema que permitam-lhes compreendê-las e relacioná-las. E, nesse processo, esperamos que os alunos desenvolvam ou manifestem algumas das habilidades abaixo:

- Relacionem a noção de variável a uma variedade de contextos.
- Relacionem um dado problema a um grande número de idéias Matemáticas.
- Percebam a equivalência entre expressões algébricas, expressando-as e interpretando-as em linguagem matemática.
- Desenvolvam habilidades na resolução de problemas.

Como professor do ensino médio, observo que meus alunos apresentam muitas das dificuldades descritas nesse trabalho, ou seja, as elencadas pelos diversos pesquisadores aqui mencionados. Intriga-me descobrir ou identificar a ou as razões que levam os estudantes do ensino médio a apresentarem dificuldades bem parecidas com as elencadas nesse capítulo. Tendo a acreditar que o modo como esses temas são apresentados aos alunos deva passar por um estudo que vise modificá-lo ou ampliá-lo, pois do contrário, continuaremos a encontrar alunos que nunca compreenderão a importância, o significado e a facilidade que a representação algébrica representa para a maioria dos ramos da Matemática.

Ao introduzir a noção de variável em um enfoque mais geral que o de incógnita, e conforme as recomendações de Arcavi(1987), citadas anteriormente, pretendemos levantar pontos iniciais para uma reflexão que vise compreender as razões pelas quais os alunos, de diferentes séries do ensino fundamental ao médio, apresentam dificuldades com relação ao tema de nossa pesquisa.

## Capítulo II - Fundamentação Teórica

Muitos estudos, entre eles, de Küchemann (1981), Booth (1984) e Sleeman (1996) têm mostrado as dificuldades dos estudantes nos vários níveis escolares com respeito ao “trato” de conceitos fundamentais como o de variável. As análises dessas dificuldades “trouxeram luz” para algumas noções ou interpretações que os estudantes desenvolvem com respeito ao uso de letras, notações e convenções escritas associadas a certos conceitos como os de igualdade (Kieran 1981) e à natureza de “respostas” matemáticas (Collis,1974) que, de fato, interferem no processo mesmo de construção do conhecimento algébrico.

Freqüentemente, estudantes apresentam dificuldades no uso de letras em Álgebra, devido aos vários significados que elas podem assumir.

Essas dificuldades foram confirmadas por Küchemann (1978,1981), em seu estudo de larga escala sobre as interpretações de termos literais, por estudantes de 13 a 15 anos, como parte do projeto do CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science).

Nesse estudo, há uma classificação desenvolvida originalmente por Collis (1975) e que Küchemann categorizou conforme a interpretação das letras, de acordo com o nível mínimo requerido para um desempenho bem sucedido, a saber:

- (a) Letra como valor: a letra recebe um valor numérico desde o princípio.
- (b) Letra não considerada: é ignorada ou sua existência é reconhecida sem que se dê, à letra, o seu significado.
- (c) Letra considerada como um objeto concreto: é vista como abreviação para um objeto concreto ou como um objeto concreto em si mesma.
- (d) Letra considerada como uma incógnita específica: ela é vista como um número específico, mas desconhecido;

- (e) Letra como um número generalizado: a letra é vista como representante ou, pelo menos, como sendo capaz de assumir vários valores ao invés de apenas um.
- (f) Letra como variável: vista como representando do um domínio de valores não específicos e como possibilidade de perceber uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores.

Nesse estudo, ele fez as seguintes descobertas:

- a interpretação escolhida pelos estudantes dependia, em parte, da natureza e da complexidade da questão;
- um pequeno número de estudantes era capaz de considerar as letras como números generalizados;
- um número ainda menor de estudantes foi capaz de interpretar letras como variáveis, no sentido de classificação de Küchemann;
- um número maior foi capaz de interpretar letras como incógnitas específicas ao invés de como números generalizados.
- a maioria dos estudantes tratava as letras como objetos concretos ou as ignorava.

As descobertas de Küchemann vão ao encontro do modelo processual-estrutural de Sfard(1991). Confirmou que muitos dos estudantes testados não interpretavam expressões literais como procedimentos numéricos de entrada-saída.

Kieran, Boileau e Garaçon (1989), como parte de um programa de pesquisa sobre o uso de computador na aprendizagem de Álgebra, conduziram investigações que utilizavam esses procedimentos para ressaltarem uma interpretação funcional das relações em situações problemas. Os estudantes deveriam entrar no computador com um tipo de programa de linguagem natural, uma operação por linha, para calcular os valores das variáveis no programa.

Investigando as bases intuitivas para o simbolismo e estrutura em Álgebra, Booth (1984) usou uma questão escrita que incluía alguns itens da avaliação do CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science). Após a aplicação da atividade e de entrevistas com alguns alunos, concluiu que a competência para escrever um método verbalmente não significa, necessariamente, a habilidade de reconhecer a simbolização correta daquele método, confirmando os estudos de Küchemann .

As dificuldades diagnosticadas por Küchemann indicam que um grande número de alunos não atingiram as categorias consideradas como de nível satisfatório para um bom desempenho em Álgebra.

Estudos mais recentes, como os de Lins & Gimenes(1997), têm apresentado críticas às pesquisas de Küchemann, considerando que seu método de estudo apóia-se na crença de que *“seguir a trajetória do uso de letras permite, de algum modo, seguir a trajetória do desenvolvimento do pensamento algébrico.”*

*“A crítica mais contundente a estudos que seguem essa tradição, (...), é que ignoram o fato (...) de que a álgebra, incluindo aí qualquer tipo de ‘cálculo com letras’, é assunto praticamente exclusivo do domínio da escola, e que é provável, que estudos assim estejam investigando, na verdade, um efeito bastante particular: as crianças que já passaram por processo de ensino-aprendizagem ligado a um tema deveriam naturalmente ter mais sucesso em situações que envolvam esse tema. No entanto, a possibilidade de que os resultados indiquem não haver progresso em relação ao nível de escolarização impossibilita afirmar essa crítica de forma mais forte apenas com base numa consideração acerca do que se ensina na escola.” (p.95)*

Essa crítica vem ao encontro de enfoques que procuram ensinar o conceito de variável em uma abordagem dinâmica, buscando possibilidades de apresentar o conhecimento da linguagem algébrica no ensino fundamental, que não se limitem a uma concepção de letra em uma expressão algébrica como uma “incógnita.”, segundo a classificação de Küchemann.

De acordo com Bell(1989) e Vergnaud(1989), somente um equilíbrio entre diferentes componentes e as várias situações que tornam a linguagem algébrica significativa podem capacitar os estudantes para a compreensão profunda da pertinência da álgebra, de suas estruturas, do significado de conceitos algébricos fundamentais como os de variável, e do uso do raciocínio algébrico (sabendo aplicá-lo em contextos nos quais as manipulações algébricas são frutíferas).

A pesquisa de Nakamura (2003) busca atingir esse equilíbrio. Consiste da avaliação de uma proposta de ensino em uma perspectiva na qual a generalização é vista como uma das raízes da Álgebra e como “caminho” para o pensamento algébrico. A pesquisa trata da avaliação de uma proposta de ensino desenvolvida na oitava série do ensino fundamental e fundamentada nas pesquisas realizadas por J. Mason e A. Sfard. Nessa proposta, busca-se favorecer a generalização de seqüências de padrões geométricos em expressões algébricas equivalentes, em que se articulam processos relativos à percepção de diferentes padrões de formação da seqüência, à construção de expressões aritméticas e de expressões algébricas inter-relacionadas entre si e a esses padrões.

Assim, se favorece a percepção, pelo aluno, dos diferentes papéis das constantes e das variáveis na expressão analítica de uma função, bem como a relação entre os valores das variáveis independentes ( posição de uma figura geométrica na seqüência) e dependentes (as áreas nas diferentes posições)

As principais conclusões apontam para uma diversidade de procedimentos que conduzem à generalização algébrica dos padrões geométricos e às diferentes possibilidades de validação, pelos próprios alunos, de seus procedimentos de resolução. Os resultados revelam os significados atribuídos pelos alunos às expressões aritméticas e algébricas elaboradas nesse processo, bem como suas possíveis interações.

Entre as conclusões salientamos algumas que tomamos como fundamento para nossa proposta de atividades.

Observamos uma inter-relação entre a eficácia dos padrões figurativos da seqüência e das expressões aritméticas para a obtenção das expressões algébricas correspondentes.

O conjunto do desenvolvimento do trabalho evidencia a necessidade da mediação das expressões aritméticas entre as representações figurativas e algébricas que descrevem os padrões. A descrição de padrões por expressões aritméticas permite indicar, explícita ou implicitamente, as relações entre as variáveis do processo, favorecendo a generalização de padrões geométricos conduzindo os alunos à construção de expressões algébricas significativas.

O enfoque assumido favoreceu a utilização, pelo aluno, de diferentes procedimentos de validação das expressões aritméticas e algébricas construídas em estreita conexão.

## II.1 - A noção de variável

Sobre a noção de variável, Usiskin (1995) cita dois matemáticos que muito influenciaram o ensino da álgebra em nível superior, Saunders Mac Lane e Garret Birkhoff (1967), que em sua obra **Álgebra**, tentam definir as álgebras utilizadas nas escolas média e universitária:

*“A álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem os números. Revela-se então que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...] e que as regras inclusive se aplicam a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como adição e multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam certas regras básicas. (p.1)”*

Segundo R. Courant e H. Robbins (2000), com freqüência, encontramos elementos (entes) matemáticos que temos a liberdade de escolher, arbitrariamente, a partir de todo um conjunto S de elementos.

Sua definição de variável é a seguinte:

*“Denominamos então tal ente de uma variável dentro do campo de variação ou domínio S. Costuma-se utilizar letras da última parte do alfabeto para variáveis. Assim, se S representa o conjunto de todos os inteiros, a variável X com o domínio S representa um inteiro arbitrário. Dizemos, ‘ a variável X percorre o conjunto S’, significando que temos liberdade para identificar o símbolo X com qualquer elemento do conjunto S. A utilização de variáveis é conveniente quando queremos fazer afirmações envolvendo elementos escolhidos ao acaso em todo um conjunto.” (p.332)*

Em sua obra, Bento de Jesus Caraça (2000), no capítulo sobre o conceito de função, discorre sobre a importância do surgimento desse importante instrumento, ressaltando que foi a sua real necessidade que o criou:

*“É natural, portanto, esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a lei quantitativa, surja também o conceito matemático próprio para seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o fato. Assim acontece de facto.” (p. 118)*

A “lei quantitativa”, a que se refere Caraça, é uma lei de correspondência entre dois conjuntos:

*“Se, por consequência, queremos estudar leis quantitativas, temos que criar, um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.” (p.119)*

Caraça defende que, de posse da idéia fundamental desse instrumento a criar, cabe agora aperfeiçoá-lo. Para tanto, a primeira coisa a se fazer é “arranjar uma representação simbólica” para esses conjuntos e isso só é possível com a introdução do conceito de variável:

*“Seja E um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito e convencionemos representar qualquer de seus elementos por um símbolo, por ex.: x. A este símbolo,*

*representativo de qualquer dos elementos do conjunto E, chamamos variável.” (p.p.119 e 120)*

Segue um exemplo dado por esse autor:

*“Quando dizemos, por exemplo: Seja E o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é suscetível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um de seus membros, mas não se reduz a ela. ” (p.120)*

Segundo o autor, a variável é ou não é cada um dos elementos do conjunto, síntese do ser ou não ser, ou seja:

*“Uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua substância, o seu domínio...” (p. 120)*

A respeito dessas colocações, Arcavi (1987) defende que a compreensão do conceito de variável é a base para o aluno apreender a passagem da aritmética à álgebra, necessária a uma matemática mais avançada. Veremos, logo mais, em Bento de J. Caraça outros aspectos que relevam a importância da noção de variável.

Porém, de acordo com Arcavi, a maioria dos currículos matemáticos trata o conceito de variável como um termo primitivo, dificultando sua compreensão para a maioria dos alunos. Quando os professores manipulam a's, b's, x's e y's, na lousa, por exemplo, fazem-no de maneira “automática”, sem ter em mente as múltiplas conotações, significados e usos destes termos.

Arcavi defende, o conceito de variável é rico e possui uma multiplicidade de significados, não podendo ser abordado de maneira simplista. A real compreensão desse conceito, por parte dos professores, deve promover uma nova abordagem e uma nova maneira de ensiná-lo.

Em suas pesquisas, Arcavi (1987) trabalhou com pessoas de diversos ramos do conhecimento: matemáticos, educadores matemáticos, cientistas da

computação, lingüistas e lógicos. Constatou que, para cada grupo, o conceito de variável possui diversos significados, condizentes com seu grupo e comprovando a diversidade desse conceito.

Em uma lista de possíveis significados já encontrados por ele, destacam-se, entre outros: símbolo, *placeholder* (sem tradução literal, mas querendo dizer que “mantém a posição”), nome, espaço vazio, vazio e referência. O termo “desconhecido” não aparece nessa lista pois, para o autor, variável é algo que realmente muda ou que admite múltiplos valores. A conotação de “desconhecido” é de algo que possui um valor fixo porém ainda ignorado.

De acordo com o autor, há uma noção central a respeito do conceito de variável, o qual não pode ser expresso ou “*capturado*” através de uma única palavra. Na literatura sobre esse assunto, há diversas definições do termo “variável”, entre eles, “entidade”, “quadrado”. Uma das primeiras conceituações remonta a 1710 e tenta defini-la explicando “como ela trabalha”; outras tentam explicá-la através de situações pictóricas e concretas. Na literatura mais moderna, a noção de variável apresenta-se como dependente da noção de domínio e o autor chega a questionar: “*Você pode entender um sem entender o outro?*”

Outra definição entende variáveis como ferramentas formais a serviço da generalização. Nesse sentido, o autor cita Alfred North Whitehead (1911): “*uma boa notação ajuda nossa mente a se concentrar ainda mais em problemas avançados, incrementando nosso poder de raciocínio e evitando trabalho desnecessário*”. Porém, Arcavi (1987) adverte que essa definição é muito abrangente, pois nem sempre uma generalização “*captura*” o que queremos. Exemplifica:  $a + 3 = 3 + a$ . Nessa situação, Arcavi (1987) chama a atenção para os vários termos que podem designar a letra  $a$  nesse caso; a saber, entre outros: variável, termo desconhecido, incógnita, etc.

Para Arcavi (1987), o simples fato de encontramos uma definição apropriada para a noção de variável não garante sua total compreensão, principalmente pela maioria dos estudantes. Para esse autor, os matemáticos puros têm na representação simbólica uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de seus objetivos, mas seu significado não é totalmente apropriado por estudantes.

Para corroborá-lo, Arcavi (1987) cita Whitehead (1911): “o hábito de usar um mesmo símbolo em diferentes situações, com diferentes significados, é muito conveniente, na prática, aos olhos dos matemáticos”. Porém, não se pode afirmar o mesmo com relação “aos olhos” dos estudantes.

Isso significa que o entendimento de um conceito matemático é influenciado pelo contexto no qual está sendo trabalhado, ao invés de aplicações em situações que apresentam apenas regras formais. Os estudantes estudam as regras formais, mas só conseguem interpretá-las em situações contextualizadas e anteriormente já apropriadas por eles.

O processo de aprendizagem via resolução de problemas constitui-se de uma interação intrincada entre concepções operacionais e estruturais das mesmas noções:

*“Álgebra é uma estrutura hierárquica na qual o que é concebido operacionalmente em um nível deve ser percebido estruturalmente em um nível mais alto” (Sfard, Linchesvki, 1994<sup>a</sup>, p. 202 apud Nakamura, 2002, p.17).*

*“Quando um novo conceito é introduzido espera-se, da maioria dos estudantes, uma habilidade para tratá-lo como um processo, até que a habilidade de tratá-lo como um objeto tenha sido adquirida” (Sfard, 1992, p. 70 apud Nakamura, 2002, p.18)*

Uma aprendizagem significativa em Álgebra, por alunos principiantes, constitui-se, inicialmente, na aquisição de uma concepção operacional dos conceitos matemáticos para, a seguir, fazer uma transição para a concepção estrutural. A transição do operacional para estrutural, segundo Sfard, se dá em três estágios: interiorização, condensação e reificação.

*“Esses estágios constituem um esquema que deve ser compreendido como uma hierarquia, onde um estágio não pode ser alcançado antes dos passos anteriores serem concluídos” (Sfard, 1991, p. 21 apud Nakamura, 2002, p.18).*

Os estágios, no processo de formação do conceito, podem ser resumidos como segue:

*“No estágio de interiorização um aluno toma conhecimento do processo que eventualmente dará origem a um novo conceito. Esse estágio é caracterizado como um processo que incide sobre objetos já familiares. No caso de função, é quando a idéia de variável é aprendida e a habilidade para usar uma fórmula para encontrar valores dependentes é adquirida*

*Condensação tem a ver com o estágio em que esse processo se torna uma entidade autônoma; é um período de “compressão” das seqüências longas de operações em unidades mais manuseáveis. Neste estágio uma pessoa se torna cada vez mais capaz de pensar sobre um processo dado como um todo, sem ver-se obrigada a entrar nos detalhes. É como transformar a parte repetitiva de um programa de computador em um procedimento automático. Como no caso dos procedimentos de um programa de computador, um nome deve ser dado a este todo condensado. Este é o ponto no qual um novo conceito nasceu “oficialmente”. A fase da condensação dura enquanto uma nova entidade permanecer bem conectada a um determinado processo.*

*Somente quando uma pessoa se torna capaz de conceber essa entidade como um novo objeto com características próprias, dizemos que o conceito foi reificado. Portanto, reificação refere-se à habilidade para ver esta nova entidade como um objeto integrado que foi adquirido” (Sfard, 1991, p. 19,20, apud Nakamura, 2002, pp.18 e 19)*

*“Assim, enquanto a interiorização e a condensação são graduais, sofrendo mudanças mais quantitativas do que qualitativas, a reificação é um salto instantâneo de qualidade: um processo que se solidifica em objeto, em uma estrutura estática” (Sfard, 1991, p. 20, apud Nakamura, 2002, p.19).*

Relevamos acima, e como citamos no capítulo anterior, um aspecto importante para a elaboração das atividades. Este aspecto conjuga-se ao da importância da resolução de problemas que enfocam o dinamismo do conceito de variável.

Tendo em vista que optamos por trabalhar com problemas verbais, no nosso caso, com situações relacionadas ao dia-a-dia dos alunos, as considerações a seguir tiveram muita importância no desenvolvimento das atividades a serem aplicadas.

Começando com Brousseau (1996):

*“O matemático não comunica seus resultados tal como os obteve, mas os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível; realiza uma ‘didática prática’ que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um contexto temporal.” (p.48)*

Ou seja, o professor deve propor aos seus alunos *“situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados”* (p.48), transformando suas respostas e seus conhecimentos em saber em que, mesmo ignorando por que o produziram, os alunos saibam utilizá-lo em outras ocasiões. Para tanto, os alunos devem, com a ajuda do professor, re-despersonalizar e re-descontextualizar o saber produzido para, então, reconhecer no que fizeram, algo que tenha caráter universal, um conhecimento cultural reutilizável.

Brousseau (1996) defende que o professor deve *“fazer viver o conhecimento, fazê-lo ser produzido por parte dos alunos como resposta razoável a uma situação familiar e, ainda, transformar essa ‘resposta razoável’ em um ‘fato cognitivo extraordinário’, identificado, reconhecido a partir do exterior.”* (pp.48 e 49)

Segundo o pesquisador, para tal objetivo, o professor deve propor situações apropriadas que permitam fazer funcionar um conhecimento “desdidatificados”, ou seja, situações de aprendizagem que obtenham dos alunos uma “resposta inicial” dada com a ajuda de seus conhecimentos anteriores. As situações formuladas, que levam a essa resposta inicial, não podem conter o conhecimento a ser ensinado, pois, se assim for, as situações não serão de aprendizagem.

Porém, para essas situações realmente se mostrarem eficazes e modificarem o sistema de conhecimentos dos alunos, devem permitir interação prolongada e ser visivelmente gerais ou simbólicas.

Segundo Brousseau (1996):

*“O trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que ele elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor. Há uma grande diferença entre adaptar-se a um problema formulado pelo meio e adaptar-se ao desejo do professor. A significação do conhecimento é completamente diferente. Uma situação de aprendizagem é uma situação onde o que se faz tem um caráter de necessidade em relação a obrigações que não arbitrarias.”* (p. 49)

Continuando nossa ênfase na importância de situações de aprendizagem e corroborando as idéias de Brousseau, analisamos, a seguir, aspectos importantes que educadores matemáticos têm dado à Resolução de Problemas.

Conforme publicação de Onuchic & Allevato(2004), sabe-se que, desde a década de 70, investigações sistemáticas sobre Educação Matemática apontam para a importância da Resolução de Problemas e suas implicações curriculares.

A Resolução de Problemas aparece nas discussões sobre Educação Matemática no Brasil e no Mundo, mostrando a necessidade de se adequar o ensino de matemática às novas tendências.

Em 1980, nos Estados Unidos, o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics* – Conselho Nacional de Professores de Matemática) fez uma série de recomendações para o progresso da Matemática escolar no documento *An agenda for Action*. Uma das suas primeiras recomendações diz que *“resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 80.”* Com base nessas recomendações, muitos recursos, para se trabalhar em sala de aula tendo como base a Resolução de Problemas, foram desenvolvidos: coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades orientações para avaliar desempenhos.

Porém, segundo Onuchic(1999) e Schoroeder & Lester (1989), devido à falta de concordância e às diversas concepções entre pessoas e grupos quanto à

Resolução de Problemas ser o foco da Matemática escolar, “o trabalho nessa década não chegou a bom termo.”

No fim da década de 80, o NCTM, buscando uma nova reforma, publicou:

- *Curriculum and Evaluation Standards for Scholl Mathemthics* (1989);
- *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991);
- *Assesment Standards for School Mathematics* (1995).

Esses *Standarts* apresentam objetivos e princípios sobre práticas curriculares e pretendem estimular políticas educacionais, pais, professores, enfim, a comunidade escolar, na tentativa de melhorar os programas de Matemática em todos os níveis educacionais.

Em 1989, uma publicação da NCTM – *Curriculum and Evaluation Standards* – afirmava que a Resolução de Problemas deveria ser o objetivo principal de todo o ensino de Matemática.

Em 1990, o NSF (*National Science Foundation*) financiou uma coleção que alinhava-se aos currículos desses *Standarts*. Uma das características encontradas nesses currículos, entre outras, era o “uso de contextos na Resolução de Problemas como um meio de desenvolver os conteúdos matemáticos e fazer conexões com outras áreas.”

No Brasil, os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) foram criados baseando-se nesses *Standarts* e indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida das atividades Matemáticas, entre outros.

Segundo Onuchic & Allevato(2004), no livro *Elementary and Middle School Mathematics*, mais precisamente no terceiro capítulo – *Developing Understanding in Mathematics* – o autor John A. Van de Walle (2001) apresenta sua visão construtivista de aprendizagem: “o Construtivismo está firmemente arraigado na escola cognitiva de psicologia e nas teorias piagetianas, nas quais se acredita que as crianças não absorvem idéias enquanto seus professores as apresentam, pois as crianças são as criadoras de seu próprio conhecimento. De

*fato, todas as crianças e, também, todas as pessoas, a todo tempo, constroem ou dão sentido às coisas que percebem ou pensam.”*

De acordo com esse autor, para construir idéias, é preciso ferramentas, materiais e esforço, assim como no mundo físico. Segundo Onuchic & Allevato(2004), Van de Walle (2001) diz que *“todo conhecimento, matemático ou outro, consiste de representações de idéias internas ou mentais que nossa mente constrói.”*

Nessa mesma linha, Onuchic & Allevato(2004) defendem:

*“Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as idéias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas idéias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muito diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Aí está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalho. Quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente , maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão relacional.”*  
(p.220)

Segundo as autoras:

*“Nesse contexto se insere a metodologia de ‘Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas... Nela, conforme recomendado nos PCN, o problema é um ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, deve-se fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.”*

Porém, o que vem a ser um problema?

Para Onuchic & Allevato(2004), um problema *“é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer. Para ele (Van de Walle-2001), um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os*

*estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à resolução correta.”*

Para Van de Walle (2001)

*“... ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deva transcorrer.” (Van de Walle, 2001, apud, Onuchic & Allevato, 2004, p.221)*

Os Standards 2000 afirmam que a Resolução de Problemas não pode ser apenas um objetivo de aprendizagem Matemática, mas deve ser, também, um meio importante para se fazer Matemática.

Van de Walle(2001) diz que o trabalho de ensinar começa onde estão os alunos, ao invés da formulação usual de que o ensino começa onde estão os professores.

Onuchic & Allevato(2004) defendem que

*“O ensino-aprendizagem de um tópico matemático deve sempre começar com uma situação-problema que expressa aspectos chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis à situação-problema dada. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos)...*

*”O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em Resolução de Problemas, e o trabalho de ensino de Matemática deve acontecer num ambiente de investigação orientada em Resolução de Problemas.”*

### Capítulo III - Metodologia

Nossa investigação foi feita por meio de uma abordagem qualitativa, para a qual baseamo-nos em algumas idéias de Chizzotti (1991) e de Lüdke & André (1986).

Começando com Chizzotti:

*“A abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do objeto. O conhecimento não se reduz a um rol de dados isolados, conectados por uma teoria explicativa; o sujeito-observador é parte integrante do processo de conhecimento e interpreta os fenômenos, atribuindo-lhes um significado. O objeto não é um dado inerte e neutro; está possuído de significados e relações que sujeitos concretos criam em suas ações.”* (p. 79)

Ainda, segundo esse autor:

*“A pesquisa é uma criação que mobiliza a acuidade inventiva do pesquisador, sua habilidade artesanal e sua perspicácia para elaborar a metodologia adequada ao campo de pesquisa, aos problemas que ele enfrenta com as pessoas que participam da investigação.”* (p. 85)

Tendo em vista que a nossa pesquisa é de intervenção, optamos por buscar nossos objetivos em sala de aula devido à densidade das respostas que os alunos apresentam nesse ambiente. As três características citadas acima fazem parte da elaboração de nossa metodologia, assim como outras citadas por Lüdke e André (1986) que vêm agregar mais informações para a elaboração desse capítulo.

Segundo as colocações de Bogdan e Biklen (1982, apud Lüdke e André - 1986) podemos dizer que uma pesquisa qualitativa possui as cinco características abaixo:

1. *“A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento”* (2004, p.11).
2. *“Os dados coletados são predominantemente descritivos”* (2004,p.12).
3. *“A preocupação com o processo é muito maior do que com produto”* (2004,p.12).
4. *“O ‘significado’ que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador”* (2004, p.12).
5. *“A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo”* (2004,p.13).

Uma vez que nossa pesquisa configura-se como pesquisa-ensino, todas essas características são totalmente relevantes no momento do desenvolvimento das nossas atividades e em suas análises.

Nossa pesquisa refere-se ao desenvolvimento e avaliação de uma proposta de ensino da linguagem algébrica, por meio de resolução de problemas verbais, com ênfase na representação simbólica das variáveis independentes e dependentes envolvidas. Nossa participação foi como pesquisador e professor. As avaliações ocorreram durante todo o processo, principalmente no momento do desenvolvimento das atividades, pois a nossa preocupação não foi apenas com o produto final, em termos de acertos e erros das respostas dos alunos, mas com todo o processo.

Promovemos situações diversificadas, no domínio de experiência dos alunos, para que houvesse uma melhor interação, a fim de ocorrer a evolução do conhecimento, por meio de uma aprendizagem significativa.

Como material de pesquisa, utilizamos a produção escrita e falada dos alunos e as observações registradas no desenvolvimento das atividades, constantes no diário de campo.

Optamos em desenvolver a investigação por meio desta abordagem, por possibilitar um conhecimento mais profundo da totalidade do ambiente onde foi

realizado o trabalho, apropriando-se, assim, de formas de compreensão de um conjunto de atitudes e reações dos indivíduos no meio em que estão inseridos.

### **III. 1 - Procura da escola**

No início da pesquisa, definimos que algumas de nossas atividades deveriam ser aplicadas com o auxílio do computador, mais precisamente em um software de planilha eletrônica. Portanto, procuramos escolas que possuísem laboratório de informática.

A primeira escola estadual com que entramos em contato, fica na zona sul da cidade de São Paulo, porém, devido à incompatibilidade de horários, não pudemos realizar nossa pesquisa.

A segunda escola estadual que entramos em contato fica na região central da cidade de São Paulo. Nessa escola, o laboratório de informática possui dez computadores, porém, apesar da escola zelar por eles, não havia um profissional qualificado para a sua manutenção e todos os computadores apresentaram defeitos, impedindo sua utilização. Apesar da expectativa de conserto dos mesmos, com o passar do tempo, constatamos que isso demoraria a acontecer. Portanto, tivemos que procurar outra escola.

Enquanto as duas primeiras escolas procuradas foram estaduais, a terceira, localizada na zona leste da cidade de São Paulo, é municipal.

Recebido pela professora de Matemática, ela encaminhou-me para a coordenadora pedagógica, que prontificou-se a analisar nossa proposta de pesquisa e a nos dar uma resposta o mais rápido possível. Tendo em vista que a resposta demorava a confirmar-se, mesmo com telefonemas quase diários, voltei à escola e fui informado que a coordenadora pedagógica havia sido transferida.

Nesse mesmo dia, após quase um mês dos contatos iniciais, a professora de matemática encaminhou-me para a nova coordenadora pedagógica, a qual, após analisar nossa proposta, aprovou sua realização.

### **III. 2 - Descrição da escola**

A escola possível é uma escola municipal situada entre dois bairros: Jardim Itália e Vila Libanesa (subdistrito Vila Prudente). Essa escola atende 854 alunos do Ensino Fundamental, funcionando em dois períodos: manhã e tarde. As classes da 6ª série funcionam no segundo período com cinco turmas.

A escola também possui laboratório de informática, porém, por motivos operacionais da escola, não obtivemos autorização para utilizá-los. Isso fez com que decidíssemos trabalhar com calculadoras, pois o prazo para aplicação das atividades já estava quase se esgotando.

O currículo de matemática segue a programação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.

### **III.3 - Inserção no campo**

Estive em contato com a escola durante aproximadamente três meses, sendo que, no segundo mês, visitava a escola duas a três vezes por semana para conhecer os alunos que participariam da pesquisa, assim como para que me conhecessem.

O público alvo foi uma classe de alunos de 6ª do ensino fundamental. O critério de escolha da turma foi a compatibilidade entre o horário das aulas de matemática e a minha disponibilidade.

A característica da prática escolar, na maioria das vezes, conformava-se às normas culturalmente enraizadas. A professora explicava um conteúdo, dava exemplos e, em seguida, os alunos resolviam problemas individualmente. O tempo para a resolução era limitado e determinado pelo tempo “médio” gasto por todos os alunos.

Porém, em algumas aulas, constatamos que essa característica era parcialmente “quebrada”. Quando isso ocorria, os alunos procuravam, em jornais ou revistas, elementos discutidos na aula e que faziam parte de suas “colagens” em papel sulfite ou cartolina. Em seguida, essas colagens eram socializadas por todos e afixadas em um mural na própria sala de aula.

O desenvolvimento das atividades foi feito em 12 sessões de 50 minutos cada, conforme o esquema abaixo:

### Apresentação das Atividades

ATIVIDADE	TEMPO DE APLICAÇÃO	OBSERVAÇÕES
01	01 aula (50')	Habilidade de comparar expressões numéricas. Os alunos trabalharam individualmente.
02	02 aulas (100')	
03	02 aulas (100')	Primeiro contato com a noção de variável. Troca de informações entre grupos.
04	01 aula (50')	Introdução da relação de dependência entre as variáveis envolvidas. Todos os alunos usaram calculadoras.
05	01 aula (50')	
06	01 aula (50')	Relação de dependência entre as variáveis envolvidas. Relações envolvidas nas propriedades da proporcionalidade. Todos os alunos usaram calculadoras. Troca de informações entre grupos.
07	01 aula (50')	
08	01 aula (50')	Identificar variáveis e constantes em uma relação de dependência. Todos os alunos usaram calculadoras.
09	01 aula (50')	
10	01 aula (50')	Troca de informações entre grupos.

Todo o desenvolvimento das atividades baseou-se nas questões propostas para resolução de problemas. Esse desenvolvimento compreendeu: a compreensão do problema, análise dos dados, escolha de estratégias de resolução, busca de outras soluções e comparação dos resultados obtidos.

Apesar de alguns contatos anteriores, “senti” que os alunos estavam ansiosos e curiosos para participarem das atividades e, ao mesmo tempo, temerosos de suas respostas, como demonstrou Na: *“Professor, e se a gente fizer errado?”*, pois associavam o “acerto” dos resultados ao “sucesso” da minha pesquisa. Isso refletia o comprometimento em me ajudar, algo que os preocupava muito. Tanto para Na, como para todos, disse para se acalmarem, pois o que importava, para mim, era mais a resposta dada, não importando se estava “certa” ou “errada”.

Durante o desenvolvimento, os alunos continuavam preocupando-se em “acertar” as atividades, pois criamos uma certa afetividade e respeito e esse acertar era mais para me ajudar.

Um dos fatores que mais me chamava a atenção, mesmo eu o tendo proibido, era o fato de executarem algumas de suas contas na própria carteira e, quando eu me aproximava para verificar o porquê, rapidamente apagavam-nas com os próprios dedos, com medo que eu as visse. Acredito que temiam estar operando erroneamente e não queriam que eu percebesse ou visse esses erros, independentemente de existirem ou não.

De todos os participantes, um grupo de meninas se destacava e se sentiam menos inibidas, pois participavam ativamente das atividades e dos questionamentos verbais. Esse grupo será facilmente identificado na descrição dos desenvolvimentos das atividades.

Como material de análise consideraremos a produção dos alunos e o diário de campo contendo as falas dos alunos, as minhas falas e as nossas observações gerais que registramos.

### III.4 - Atividades Propostas<sup>4</sup>

#### III.4.1 - Atividade 01

**Objetivo:** esta atividade tem por objetivo desenvolver habilidades de interpretar dados em uma tabela de dupla entrada, de resolver problemas e de realizar comparações entre esses dados. Comparar expressões numéricas por meio de relações expressas pelos sinais < (menor), > (maior) ou = (igual).

**Enunciado** Preencha a última coluna da tabela abaixo, calculando os respectivos sub-totais multiplicando a Quantidade comprada pelo Preço unitário.

Ordem de compra				
Número de Ordem	Produto	Quantidade	Preço unitário	Sub-total
01	Charlie Brown Jr.	5	R\$ 18,00	
02	Titãs	6	R\$ 13,00	
03	Paralamas do Sucesso	4	R\$ 14,00	
04	Kelly Key	8	R\$ 7,00	
05	Ivete Sangalo	6	R\$ 15,00	
06	O Rappa	2	R\$ 18,00	
07	Luciano Huck	3	R\$ 18,00	
08	Detonautas	1	R\$ 13,00	
09	Bon Jovi	6	R\$ 9,00	
10	Simple Plan	7	R\$ 17,00	
11	Foo Figthers	10	R\$ 7,80	
12	Marjorie Stiano	2	R\$ 6,50	
13	Sandy e Júnior	10	R\$ 3,60	

Agora, vamos comparar as expressões abaixo, utilizando os dados da tabela que você preencheu. Para realizar essas comparações, preencha o espaço indicado com os símbolos: = (igual), < (menor que) e > (maior que)

- a)  $5 \times R\$ 18,00$  \_\_\_\_  $6 \times R\$ 15,00$
- b)  $10 \times R\$ 7,80$  \_\_\_\_  $1 \times R\$ 13,00$
- c)  $4 \times R\$ 14,00$  \_\_\_\_  $8 \times R\$ 7,00$
- d)  $6 \times R\$ 13,00$  \_\_\_\_  $10 \times R\$ 7,80$

<sup>4</sup> As atividades propostas nessa pesquisa basearam-se em experiências anteriores, vivenciadas no percurso profissional da orientadora.

e)  $6 \times \text{R\$ } 9,00$  \_\_\_\_  $6 \times \text{R\$ } 13,00$

f)  $2 \times \text{R\$ } 18,00$  \_\_\_\_  $3 \times \text{R\$ } 18,00$

g)  $2 \times \text{R\$ } 18,00 + 3 \times \text{R\$ } 18,00$  \_\_\_\_  $5 \times \text{R\$ } 18,00$

h)  $10 \times \text{R\$ } 3,60 + 2 \times \text{R\$ } 6,50$  \_\_\_\_  $6 \times \text{R\$ } 15,00$

i)  $7 \times \text{R\$ } 17,00 + 1 \times \text{R\$ } 13,00$  \_\_\_\_  $10 \times \text{R\$ } 7,80$

j)  $2 \times \text{R\$ } 18,00 + 3 \times \text{R\$ } 18,00$  \_\_\_\_  $5 \times \text{R\$ } 18,00$

### III.4.2 - Atividade 02: Loteria de Expressões Aritméticas

**Objetivo:** desenvolver habilidades de interpretação de dados em uma tabela (“volante de loteria esportiva”), de resolução de problemas e de realização de comparações entre esses dados. Comparar expressões numéricas por meio de relações expressas pelos sinais  $<$  (menor),  $>$  (maior) ou  $=$  (igual).

Na primeira parte dessa atividade, o professor tem um envelope contendo os números que são os “resultados” das expressões. Conforme vai-se retirando do envelope, o resultado é escrito na lousa.

Por exemplo, analisando as expressões abaixo:

(1)	Expressão A	(2)	Expressão B	(3)
	$(21 - 12) + 10$		$21 - (12 + 10)$	

Se o número retirado do envelope for 19, o aluno tem que marcar a coluna (1). Se o número retirado do envelope for  $-1$ , o aluno tem que marcar a coluna (3). A tabela também tem situações nas quais as duas expressões são equivalentes. Nesse caso, a coluna a ser preenchida é a coluna do meio, ou seja, a coluna (2).

(1)	Expressão A	(2)	Expressão B	(3)
	$(2 \times 10) / 5$		$2 \times (10 / 5)$	

Em seguida, o aluno traduz as marcações da tabela em expressões como:

$$(2 \times 10) / 5 = 2 \times (10 / 5) \text{ ou}$$

$$(21 - 12) + 10 > 21 - (12 + 10)$$

**Enunciado:** Retira-se de um envelope os resultados das expressões e, em seguida, anotasse-os na lousa. Os resultados retirados não seguem a ordem das expressões, ou seja, são retirados sem uma ordem definida. Portanto, conforme os resultados são sorteados, procure identificar qual a expressão que dá esse

resultado. Em seguida, preencha as colunas (1) ou (2) ou (3) com um X, baseando-se nos resultados obtidos.

(1)	Expressão A	(2)	Expressão B	(3)
	$(2 \times 10) / 5$		$2 \times (10 / 5)$	
	$(21 - 12) + 10$		$21 - (12 + 10)$	
	$(21 - 2) + 4$		$21 - (2 + 4)$	
	$(30 - 5) \times 2$		$30 - (5 \times 2)$	
	$(60 / 10) \times 2$		$30 - (5 \times 2)$	
	$(21 + 2) + 4$		$21 + (2 + 4)$	

Agora, reescreva cada uma das linhas da tabela utilizando os símbolos < (menor que), > (maior que) ou = (igual).

### III.4.3 - Atividade 03<sup>5</sup>:

**Objetivo:** permitir aos alunos um primeiro contato com a noção de variável.

Espera-se que os estudantes percebam a necessidade da utilização de um símbolo não numérico para representar uma quantidade desconhecida. Caso contrário, serão colocadas questões que favoreçam essa percepção.

Esse fato deve contribuir para que percebam a importância da representação simbólica para valores desconhecidos.

Em seguida, os próprios alunos criam situações para serem discutidas por todos.

Durante a atividade, o professor faz uma síntese na lousa, anotando todas as possíveis soluções que cada grupo for encontrando. Será considerada a variação do montante recebido pelo grupo e por aluno do grupo.

A classe deve dividir-se em grupos com quatro componentes. Cada grupo receberá uma determinada quantia de dinheiro, impressas em cédulas de papel comum, para ser repartida igualmente entre os elementos do grupo. Cada um dos grupos deverá passar uma mensagem para que os outros grupos descubram as quantias que possuem.

As mensagens podem utilizar operações de multiplicação, através de diferentes registros (modos) de representação. Exemplo:  $\square \times 25,00 = 125,00$ .

Nessas mensagens, o valor desconhecido, os valores dados e a variação da quantia recebida serão ressaltados. Esses valores vão revelar as possibilidades de expressão das igualdades e dependências envolvidas.

---

<sup>5</sup> Atividade desenvolvida na terceira fase do projeto da tese de doutorado da orientadora: **Compreensão das Situações Multiplicativas Elementares**. São Paulo: PUC-SP, 1995.

### III.4.4 - Atividade 04:

**Objetivo:** levar o aluno a conhecer a relação de dependência entre as variáveis envolvidas.

Os alunos trabalham com situações de compra e venda e, por meio de estimativas e cálculos, têm a oportunidade de trabalhar com expressões numéricas equivalentes. Essa atividade nos permite analisar como os alunos constroem suas próprias equivalências.

Exemplos: 5 x O Rappa+ 2 x Charlie Brown Jr.

2 x Titãs + 4 x Simple Plan

Em seguida, promove-se uma discussão buscando esclarecer o que as notações estão representando.

#### Enunciado:

Produto	Preço unitário
O Rappa	R\$ 18,00
Ivete Sangalo	R\$ 15,00
Titãs	R\$ 13,00
Simple Plan	R\$ 25,00
Charlie Brown Jr.	R\$ 18,00

Você vai a uma loja comprar dois CDs. Os preços de cada Cd estão anotados na tabela acima. Para tanto, você deve gastar R\$ 126,00. Quantos e quais Cds você pode comprar com esse dinheiro? Depois de efetuar os cálculos, anote as possibilidades de compra que você descobriu.

### III.4.5 - Atividade 05

**Objetivo:** ensinar a relação de dependência entre as variáveis envolvidas.

Será apresentada uma tabela cujo objetivo é levá-los a alterar aleatoriamente a quantidade comprada. Porém, o preço total da compra não poderá ultrapassar um valor pré-fixado. Um dos objetivos é que os alunos encontrem mais de um modo de fazê-lo. Ou seja, eles terão que variar os valores das compras e perceber que, em mais de uma situação o valor determinado para o gasto é ultrapassado ou não.

Caso o aluno atente a esse detalhe, perceberá como a variação das quantidades compradas afeta o valor final da compra, ou seja, o valor final depende das quantidades compradas.

**Enunciado:**

Tabela de Preços de Cds	
Cantor(a)	Preço Unitário
Ivete Sangalo	R\$ 8,00
Kelly Key	R\$ 15,00
Sandy e Júnior	R\$ 5,00
Marjorie Estiano	R\$ 8,00

Imagine que é seu aniversário e que você ganhou de presente de todos os seus familiares R\$ 178,00. Encontre dois modos de gastar até essa quantia comprando quaisquer Cds da tabela acima. Para ajudar-se a não ultrapassar, use a calculadora e pense em várias possibilidades de compras até encontrar duas que satisfaçam esta condição.

### III.4.6 - Atividade 06

**Objetivo:** criar condições para que os alunos percebam a relação de dependência que existe entre a variação da quantidade de CDs comprados e a do preço total da compra, analisando a proporcionalidade entre ambas.

Ou seja, cada vez que for efetuada uma compra, se a quantidade de CDs comprados for multiplicada por uma razão, o preço total varia também, nessa mesma razão. As questões respondidas deverão confirmar essa conclusão.

**Enunciado:** Preencha a coluna Quantidade e Total conforme é pedido:

Quantidade	Produto	Total
1	Cd do Titãs	R\$ 12,00
	Cds do Titãs	
	Cds do Titãs	
	Cds do Titãs	
	Cds do Titãs	

1) Se você comprar 2 cds dos Titãs, qual será o total da sua compra? \_\_\_\_ .

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_ .

2) Multiplique por 3. Qual será o total da sua compra?

---

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_.

3) Multiplique por 4. Qual será o total da sua compra?

---

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_.

4) Multiplique por 8. Qual será o total da sua compra?

---

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_.

**III.4.7 - Atividade 07**

**Objetivo:** criar condições para que os alunos desenvolvam habilidades de resolução de problemas de proporcionalidade por meio de procedimentos escalares e funcionais. Introduzir também, as notações  $3 \times x = 3x$  e  $3 \bullet x = 3x$ .

**Enunciado:** Na tabela abaixo, na coluna da esquerda, temos os números de *Cds* comprados por algumas mães e, na coluna da direita, os totais de cada compra. Porém, não sabemos qual o preço unitário desses *Cds*. Com base nessas informações da tabela, encontre o valor de  $x$  utilizando o menor número possível de operações. Use a calculadora para ajudá-lo.

Quantidade de CDs comprados	Total da Compra
02	R\$ 18,00
04	R\$ 36,00
X	R\$ 126,00

### III.4.8 - Atividade 08

**Objetivo:** essa atividade visa permitir ao aluno identificar variáveis e constantes e estabelecer uma relação de dependência entre  $x$  que será um número qualquer solicitado e  $y$  que será o resultado dependente das operações realizadas sobre  $x$ , ou seja, o número pensado é determinado em função do número encaminhado (dependência). O aluno também representará a linguagem natural constante em uma sentença em linguagem algébrica.

Uma sentença qualquer é convenientemente escolhida e, em seguida, escrita na lousa, por exemplo: *“O dobro de um número mais cinco.”* ou *“O triplo de um número menos dois”, etc.*

Cada aluno deve escolher um número, executar as operações descritas na sentença e anotar o resultado em um papel. No verso do papel deve escrever a sentença matemática que usou para chegar àquele resultado.

O professor pergunta a um aluno qual é o resultado e ele deve responder de forma que todos ouçam. Os demais tentarão encontrar o número que está no verso da folha, quando alguém disser o número correto, será convidado a vir à lousa e escrever de que forma encontrou o resultado.

### III.4.9 - Atividade 09: “Jogo do Adivinha”

**Objetivo:** essa atividade visa estimular as habilidades dos alunos por meio de uma seqüência de “comandos” divertidos e prazerosos, pois permite saber o número pensado por outro aluno bastando para isso seguir algumas “regras” pré-determinadas. O aluno articulará a linguagem natural à linguagem algébrica.

O professor escolhe um aluno qualquer. Em seguida, pede-se que ele execute os seguintes “comandos”:

- Pense em número natural qualquer.
- Ache seu dobro.
- Adicione 3 ao resultado.
- Triplique o que você obteve.
- Subtraia nove do resultado.
- Divida tudo por 6.
- Pronto: eis o número que você pensou.

Depois de executar essas “adivinhações” com outros alunos e passar, por escrito, esses “comandos”, o professor pedirá, a todos, que respondam aos comandos em linguagem simbólica, ou seja, para um número representado por  $n$  ou por  $x$  ou por outro símbolo determinado pelos próprios alunos.

### III.4.10 - Atividade 10: “Bingo de expressões algébricas”

**Objetivo:** permitir ao aluno perceber que uma letra qualquer, nesse caso  $x$ , serve para substituir um número qualquer na hora de representá-lo isoladamente ou em uma expressão, ou seja, mostrar a importância, a necessidade e a facilidade da representação simbólica em expressões algébricas. O outro objetivo é o de permitir ao aluno trabalhar com a linguagem natural e a linguagem algébrica, simultaneamente, como possíveis respostas.

Cartelas semelhantes às de bingo, porém com sentenças ou expressões algébricas no lugar dos números, como de costume, são distribuídas a todos os alunos que estão separados em grupos de 3 a 4 alunos.

Em seguida, a letra  $x$  representará o valor determinado pelo professor. Esta escolha determina os valores numéricos das expressões constantes nas cartelas.

O professor sorteia um número, por exemplo, 6. Se o valor de  $x$  for 3, então o aluno deve marcar: “o dobro de  $x$ ” e “ $2x$ ”.

As cartelas serão semelhantes ao que segue, porém com algumas modificações para que, durante o sorteio, haja apenas um ou dois ganhadores:

O dobro de $x$	3 vezes $x$	$2x + 2$	$2x$
$X + 6$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 4$

## **Capítulo IV - Descrição e análise do desenvolvimento das atividades.**

A organização deste capítulo, em agrupamentos de itens em que se intercalam aspectos relativos à descrição e à análise do desenvolvimento das atividades, deve-se principalmente à constatação de objetivos comuns ou afins buscados nessas atividades. Em uma análise mais geral, entretanto, pode-se considerar que os objetivos centrais da proposta de ensino permeiam todo seu desenvolvimento.

No primeiro agrupamento estão as primeiras atividades (atividades 01 e 02) que buscam promover a extensão do significado do sinal de igualdade, constituído em problemas aritméticos, para um significado expressando relações de equivalência de expressões algébricas.

As noções de variável e de constante são introduzidas nas atividades seguintes em diferentes contextos sendo iniciadas na atividade 03 (analisada em um item próprio pela peculiaridade dos dados que apresenta) e, em seguida, nas atividades 04 e 05. Entre esses contextos, salientamos situações-problema de proporcionalidade trabalhadas e analisadas nos itens que correspondem às atividades 06 e 07. Neste caso, os alunos devem buscar regularidades na resolução de problemas de proporcionalidade empregando para sua resolução procedimentos escalares e funcionais. Finalmente no último agrupamento de itens, referindo-se às atividades 08, 09 e 10, uma relação de dependência entre duas variáveis é claramente enfatizada, ou seja, alguma relação funcional é estabelecida por meio de uma lei dada por uma expressão em linguagem natural especializada.

O quadro abaixo especifica esses itens:

IV.1. Desenvolvimento da atividade 01	p.59
IV.2. Desenvolvimento da atividade 02	p.61
IV.3. Análise das atividades 01 a 02	p.63
IV.4. Desenvolvimento da atividade 03	p.66
IV.5. Análise da atividade 03	p.73
IV.6. Desenvolvimento da atividade 04	p.76
IV.7. Desenvolvimento da atividade 05	p.78
IV.8. Análise das atividades 04 e 05	p.81
IV.9. Desenvolvimento da atividade 06	p.84
IV.10. Desenvolvimento da atividade 07	p.86
IV.11. Análise das atividades 06 e 07	p.88
IV.12. Desenvolvimento da atividade 08	p.92
IV.13. Desenvolvimento da atividade 09	p.94
IV.14. Desenvolvimento da atividade 10	p.95
IV.15. Análise das atividades 8, 9 e 10	p.97

#### IV.1 Desenvolvimento da atividade 01:

Logo que receberam a folha, ao verem que na tabela apareciam cantoras e cantores da atualidade, começou um burburinho na sala. Notei como era importante, para eles, reconhecerem, nessa situação, algo presente em seu dia-a-dia. Começaram a opinar sobre essas cantoras e cantores, comparando-os e alguns cantando algumas músicas, sem que com isso se configurasse bagunça ou confusão. Toda essa situação inesperada acarretou um passo importante na criação de um elo positivo entre eu e eles.

Nessa atividade, orientei os alunos para, inicialmente, preencherem a última coluna da tabela, Para tanto, deveriam multiplicando a Quantidade da 3ª coluna pelo Preço Unitário, da 4ª coluna. . Ao começarem seus cálculos, a grande maioria dos alunos, se não todos, “preferiu” fazer suas contas nas “carteiras”. Perguntei por que não faziam as contas nos espaços em branco da folha e Pa antecipou-se e disse: *“É que estamos mais acostumados. É melhor assim.”* Em seguida, ouviu-se um coro *“É professor. É verdade”*. Apesar de respeitar a opinião e a vontade deles, “acreditando” em suas respostas, a impressão que tive foi a de que, na verdade, não queriam se expor, pelo menos não nesse primeiro momento.

Por aproximadamente quinze minutos, concentraram-se e esforçaram-se em seus cálculos. Em seguida, pedi para responderem a segunda parte.

Um dos alunos, Nat, tem problema de surdez. Não chega a ser 100% surdo, mas, apesar de eu ter dado as instruções em voz alta, enquanto ando pela sala, noto que tem dificuldade em seus cálculos. Quando me aproximo e tento ajudá-lo, ele aceita. Porém, não pude ter certeza se fui eficiente. Ele não respondia, apenas concordava com a cabeça, quando lhe fazia alguma pergunta. Uma outra “olhada” em suas respostas, me diz que não.

Duas alunas começaram a se destacar: Jé e Na. Ambas, após certo tempo, apresentaram uma auto-confiança maior, pois começaram a perceber que, após preencherem a última coluna, para comparar as expressões seguintes, não precisavam calcular novamente, como ficou demonstrado em suas falas:

Jé: *“Ué professor, são as mesmas contas da tabela? Eu preciso fazer de novo?”*

Antes que eu respondesse, Na complementou: *“Acho que não ...se eu já fiz uma vez, é só responder.”*

Os demais olharam para mim, esperando a minha confirmação. Então, respondi: *“Acredito que se vocês perceberam isso, é mais fácil seguir a sugestão da Na.”*

Fui até onde Na estava, curioso, e notei que ela escrevera alguns resultados nas expressões. Perguntei-lhe por que fizera isso e respondeu: *“É só para não esquecer....”* Como assim, *“Não esquecer?! Ele não está na tabela?”*, perguntei. Ela respondeu: *“É que enquanto eu olho o outro resultado, do outro lado, na hora de colocar o sinal, já sei quanto vale o primeiro.”*

Outro aluno com mais dificuldade nos cálculos, além de Nat, era Re. Porém, notei que ele evitava assumir e não parecia à vontade para me perguntar. Quando comentei que já estava na hora de entregar, ele preencheu rapidamente as lacunas, como se não quisesse simplesmente entregar em branco.

Ao final dessa atividade, perguntei o que tinham achado. Todos falaram ao mesmo tempo. Porém, pude notar que gostaram. Dan disse que *“não foi tão difícil assim...só faltaram alguns conjuntos mais legais.”* Conjuntos de música, é claro.

Como muitos conversavam entre si, comentando as suas respostas, perguntei se tinham alguma dúvida ou comentários. Como a resposta foi não, parti para a segunda atividade.

#### IV.2 Desenvolvimento da atividade 02:

Inicialmente, distribuí a segunda atividade para os alunos. Notei que alguns estavam bastante entusiasmados. Imediatamente, pedi para virarem a folha, a fim de esconder o que estava impresso, pois não queria que resolvessem as expressões antes de a atividade realmente começar. Expliquei que sortearia os resultados das expressões, que apareciam na tabela dessa atividade, e eles teriam que marcar com um X a 1ª ou a 2ª ou a 3ª coluna. Dei o seguinte exemplo na lousa:

*“Vamos supor que na tabela aparecesse a seguinte linha:*

	$(4 \times 5) - 3$		$4 \times (5 - 3)$	
--	--------------------	--	--------------------	--

*“Agora eu vou sortear um número. Se, por exemplo, esse número for igual a 17, você deverá marcar a primeira coluna.*

*“Se, por exemplo, esse número for igual a 8, você deverá marcar a segunda coluna. E se, por acaso, o resultado dessas duas expressões fossem iguais e o número sorteado fosse esse resultado, você marcaria a coluna do meio.*

*“Alguma dúvida?”*

Como ninguém se manifestou, peguei um saquinho preto com os seguintes números escritos em pedaços de papel dobrados: -01, 04, 12, 15, 19, 20, 23, 27 e 50.

O primeiro número sorteado foi o 15. Quando o sorteei, notei que os alunos tiveram dificuldades em marcar a tabela. Mais uma vez, muitos faziam as contas nas carteiras, ignorando os meus apelos para que não o fizessem.

Antes que eu ditasse o próximo número, Gle manifestou-se:

*“Professor, está confuso, não sei o que tem que fazer.”*

Percebi que essa dúvida não era só dela. Antes de ditar o próximo número, voltei ao exemplo da lousa e expliquei novamente. Já perguntou se não poderia

primeiro “*resolver as expressões*”, antes de eu ditar o número. Como não era esse o propósito da atividade, tive que negar o seu pedido e dizer que era muito importante trabalharmos assim. Ela ficou “decepcionada”, porém aceitou.

Os outros números sorteados, nessa ordem, foram: -01, 27, 50, 04, e 12.

Nitidamente, os alunos mostraram-se inseguros nessa atividade, apesar de não comentarem nada. Notei que isso os chateava. Antes de ir para a segunda parte, perguntei o que estava acontecendo. Sinceros ou não, não admitiram nada. Fiquei frustrado, pois queria poder ajudar. Mesmo sem eu dar motivo, Na pediu-me para que eu não apagasse os números ditados, da lousa. Muitos olhavam fixamente a lousa e, em seguida, para a sua folha, apagando e alterando suas escolhas.

Quando começamos a segunda parte dessa atividade, observei que todos a fizeram sem nenhum problema, apesar de ainda desconhecer suas respostas.

Antes de começar a recolher essa atividade, indaguei sobre o que tinham achado e se tinham dúvidas.

Os comentários mais pertinentes foram dados por:

Pat: “*A outra atividade era mais fácil e mais legal.*” Perguntei o porquê. Limitou-se a dizer que tinha entendido melhor. Apesar dessa atividade realmente exigir um pouco mais dos alunos, em relação à primeira.

Outra observação interessante foi dita por Ca e endossada por todos: “*O senhor devia ter colocado o valor (resultado) ao invés das expressões.*” Mais uma vez, quis saber o porquê. A resposta foi que era mais fácil. E, mais uma vez, insisti em que o propósito de nossa atividade era outro e entenderam numa boa.

### IV.3 Análise das atividades 1 e 2

Analisaremos, em ambas as atividades, o desempenho dos alunos na resolução dos problemas dados e na comparação das expressões; em seguida, discutiremos, conjuntamente, possíveis significados, atribuídos pelos alunos, à relação de igualdade e aos usos do sinal de igual.

Estas atividades tiveram como objetivo desenvolver habilidades de interpretar dados em uma tabela de dupla entrada, resolver problemas e realizar comparações entre esses dados, comparar expressões numéricas por meio de relações expressas pelos sinais  $<$  (menor),  $>$  (maior) ou  $=$  (igual).

Despertaram grande interesse na resolução dos problemas, em um movimento, a partir do cotidiano do aluno, para representações simbólicas. Além disso, favoreceu a instauração de um clima favorável e de um relacionamento fecundo entre pesquisador e alunos, que sentiram-se à vontade para manifestar suas opiniões, dúvidas, acertos e erros.

Os alunos concentraram-se em seus cálculos, determinando, sem dificuldade, os sub-totais pedidos na última coluna da tabela, ou seja, o preço de um número determinado de CDs comprados.

Na segunda parte da atividade, depois de um certo tempo dado para a exploração livre das questões propostas, os alunos passaram a comparar as expressões, utilizando os sub-totais já encontrados.

Analisando as fichas das atividades dos alunos, observamos poucos erros relacionados às operações e às comparações. Podemos afirmar que a maioria dos cálculos e das comparações foi realizada e preenchida corretamente.

De modo mais preciso, constatamos que 5 entre os 10 itens foram comparados corretamente por 12 ou mais alunos, 3 itens por 10 ou mais alunos, sendo que apenas os itens (d) e (f) apresentaram um maior índice de erro.

Os cálculos anteriores realizados com os dados da tabela favoreceram as comparações das expressões. Esta afirmação apóia-se nas hipóteses formuladas por Arcavi(1987) de que, quando a linguagem algébrica é introduzida, deve servir

aos estudantes como conveniente para expressar idéias que já foram apropriadas por eles.

Quanto à atividade 2, na primeira parte, a comparação entre as expressões foi feita por meio de um jogo, em que o aluno identificava a equivalência das expressões assinalando a coluna central de uma tabela semelhante ao volante do jogo de loteria esportiva, conforme descrição das atividades no Capítulo III.

Na segunda parte da atividade, as expressões de cada linha dessa tabela deveriam ser rescritas e comparadas.

Diferentemente da primeira atividade, em que as duas fases - preenchimento da tabela e, em seguida, comparação das expressões - ocorreram sem nenhuma dificuldade, a primeira fase da atividade 2 mostrou-se confusa para alguns alunos, pois esses preencheram, em alguns casos, mais de uma coluna na mesma linha ou, simplesmente, não marcaram nenhuma coluna.

Contudo, nessa primeira fase, as dificuldades ocorreram mais devido à uma não compreensão da proposta do que por um motivo relacionado, especificamente, à comparação das expressões propostas.

Pudemos chegar a esta conclusão pela observação das dificuldades manifestadas pelos alunos durante a realização do jogo, assim como pela comparação do desempenho dos alunos no preenchimento das colunas da tabela e na comparação das expressões transcritas na segunda etapa da atividade, na qual os alunos erraram apenas uma das comparações.

Quanto à questão de como os alunos interpretam e utilizam o sinal de igual, buscamos indícios para verificar em que medida eles concebem esse sinal como expressando uma relação simétrica entre duas expressões numéricas, ou como um sinal que antecipa um resultado a ser calculado, portanto com um caráter não simétrico. Conforme constatações feitas percorrendo as carteiras e observando os alunos no momento em que efetuavam as atividades, pudemos constatar que não sentiram constrangimento em representar a equivalência das expressões numéricas envolvidas nos problemas anteriormente resolvidos, escrevendo o sinal “é igual a” entre essas expressões, ou seja, não anotando o resultado do cálculo

efetuado, depois do sinal de igual colocado entre a primeira e a segunda expressão, vendo-o como exigência de uma resposta.

Apenas uma aluna anotou e manifestou esse comportamento, porém, como afirmou, *“era só para não esquecer.”* Entretanto, na análise das demais atividades, essa aluna manteve seu modo de registrar os cálculos, utilizando do sinal de igual como indicador de uma ação em que a igualdade assume um caráter não simétrico.

No conjunto das observações, pudemos concluir que os alunos apresentaram a habilidade de trabalhar com expressões sem reduzi-las pelo cálculo, o que Collins (1974,1975) chamou de *“Aceitação da Falta de Fechamento”* e que, de acordo com Kieran(1981), apresentaram indícios de terem desenvolvido a idéia de equivalência:

*“Segunda ela (Kieran), muitas abordagens didáticas supõem que a criança, ao perceber que  $3 + 6$  e  $4 + 5$  são diferentes maneiras de se dizer o número 9, pode desenvolver a idéia de equivalência, comparando essas expressões na forma  $3 + 6 = 4 + 5$ ” (p.10).*

Pelo desempenho dos alunos nas atividades 1 e 2, pudemos constatar que eles têm necessidade de recorrer ao cálculo para compararem expressões. Na atividade 1, isso era esperado, pois o cálculo foi efetuado na primeira parte.

Na atividade 2, temos evidências claras de que uma das dificuldades foi a falta de previsão para uma etapa inicial de cálculo das expressões. A nosso ver, a habilidade de comparar expressões pela aplicação de propriedades formais ou pela estimativa do valor numérico deve ser desenvolvida, propondo-se, ao aluno, atividades planejadas com esse objetivo, o que não ocorreu no caso desta pesquisa .

#### IV.4 Desenvolvimento da atividade 03

Para essa atividade, imprimi algumas cédulas de R\$ 1,00, R\$ 2,00, R\$ 5,00 R\$ 10,00 e R\$ 20,00, valores previamente escolhidos para facilitar a distribuição por grupo. Essas cédulas foram separadas para quatro grupos de alunos, da seguinte forma:

- Primeiro grupo com o valor total R\$ 168,00, distribuídos em quatro saquinhos contendo R\$ 42,00 cada um. O primeiro e o segundo saquinhos tinham 21 cédulas de R\$ 2,00 cada um; o terceiro tinha 1 cédula de R\$ 2,00 e 2 cédulas de R\$ 20,00; enquanto o quarto tinha 2 cédulas de R\$ 1,00 e 2 cédulas de R\$ 20,00.
- Segundo grupo: valor total R\$ 100,00, com quatro saquinhos contendo R\$ 25,00 cada um, com 1 cédula de R\$ 5,00 e 1 cédula de R\$ 20,00.
- Terceiro grupo: valor total de R\$ 196,00, com outros quatro saquinhos contendo R\$ 49,00 cada um. O primeiro e o segundo continham 2 cédulas de R\$ 2,00, 1 cédula de R\$ 5,00 e 2 cédulas de R\$ 20,00; o terceiro tinha 2 cédulas de R\$ 2,00, 5 cédulas de R\$ 5,00 e 1 uma cédula de R\$ 20,00; enquanto que, no quarto, havia 2 cédulas de R\$ 2,00 e 2 cédulas de R\$ 20,
- Quarto grupo: valor total R\$ 128,00, com quatro saquinhos contendo R\$ 32,00 cada um. O primeiro tinha 1 cédula de R\$ 2,00, 1 cédula de R\$ 10,00 e 1 cédula de R\$ 20,00; o segundo, 1 cédula de R\$ 2,00 e 6 cédulas de R\$ 5,00; o terceiro, 1 cédula de R\$ 2,00 e cédulas de R\$ 10,00; o quarto, 16 cédulas de R\$ 2,00.

Nessa atividade, os alunos foram divididos em grupos com quatro integrantes cada, que receberam as cédulas como descrito acima. Todos se animaram a participar e Jé me perguntou se, no final, poderiam ficar com o dinheiro. Como a minha resposta foi afirmativa, percebi que esse pequeno ato motivou-os ainda mais. Antes de distribuir as quantias, informei-os que cada grupo não deveria saber o quanto os outros tinham recebido. Ao final, os grupos assim se constituíram:

GRUPO I - Na, Jé, Ca e Pa.

GRUPO II – L, Lu, Di e Pl.

GRUPO III – Re, Dan, Ga e Gle.

GRUPO IV - Pat, Val, Sa e Ra.

Após o entusiasmo inicial, perguntei ao grupo I quanto tinham recebido:

Todas disseram: “R\$ 168,00” . Anotei na lousa.

Em seguida, perguntei, uma a uma, quanto cada uma tinha:

Na: “*Eu tenho notas de R\$ 2,00.*” Na lousa, anotei: Na: 2,00

Jé: “*Eu tenho notas de R\$ 2,00.*” Anotei na lousa: Jé: 2,00

Ca: “*Eu tenho notas de R\$ 2,00 e de R\$ 20,00.*” Na lousa, anotei: Ca: 2,00 + 20,00.

Pa: “*Eu tenho notas de R\$ 1,00 e de R\$ 20,00.*” Na lousa, anotei: Pa: 1,00 + 20,00

Em seguida, continuei: “*Bom, agora, com essas informações, quanto será que cada uma do grupo I tem?*”

Os demais grupos fecharam-se entre si e começaram a pensar no problema. Comecei a andar entre os grupos e a observá-los. Percebi que copiaram da lousa, e, mais uma vez, usavam a carteira como rascunho e não a folha que eu havia entregue. Solicitei que não fizessem isso. Eles pararam, porém, mesmo assim, não usavam a folha. Após alguns minutos, Re disse: “*A Na tem 10 notas.*” Fui até a lousa e anotei ao lado do que já estava escrito: Na: 2,00 x 10. Continuei “*E o que mais?*” Por alguns instantes, não obtive nenhuma resposta. Como essa parte “empacou”, decidi passar para o próximo grupo, pois, na minha opinião, a distribuição de valores era mais fácil. Perguntei ao grupo II: “*quanto tinham recebido?*”

Todas disseram: “R\$ 100,00” . Anotei na lousa.

Em seguida, perguntei, um a um, quanto cada uma tinha:

L: *“Eu tenho notas de R\$ 5,00 e R\$ 20,00.”* Na lousa, anotei: L: 5,00 + 20,00.

Lu: *“Eu tenho notas de R\$ 5,00 e R\$ 20,00.”* Na lousa, anotei: Lu: 5,00 + 20,00.

Di: *“Eu tenho notas de R\$ 5,00 e R\$ 20,00.”* Anotei na lousa: Juan: 5,00 + 20,00.

PI: *“Eu tenho notas de R\$ 20,00 e de R\$ 5,00.”* Na lousa, anotei: PI: 20,00 + 5,00.

Em seguida, continuei: *“Bom. E, agora? Dá para saber quanto cada um tem?”*

Imediatamente, o grupo I pediu para esperar. Passados poucos minutos, os grupos I e IV disseram ter a resposta: *“Cada um tem R\$ 25,00.”*

*“Como vocês descobriram?”*, perguntei.

Ra: *“É só dividir por quatro!”*

Importante notar que, em nenhum momento, mencionei que os integrantes de um mesmo grupo possuíam o mesmo valor cada um.

Parabenizei-os pelo achado. Voltei para a situação anterior, a do grupo I. O grupo II ergueu a mão e PI disse: *“Cada uma tem R\$ 42,00”*.

Perguntei: *“Por que vocês acham isso?”*

Lu: *“Porque é só pegar o valor total por quatro.”*

Professor: *“Muito bem. E quantas notas cada uma tem?”*

PI: *“A Ca tem uma de dois e duas de vinte e a Pa tem duas de vinte e duas de um.”*

Professor: *“Está correto grupo I?”* Estava.

Professor: “E as demais?”

Toda a classe começou a se manifestar, “vinte e duas de dois!”. Estavam certos.

Quando fui continuar a atividade com os grupos III e IV, o imprevisível, que é “normal” em se tratando de educação e de mentes criativas, aconteceu: não pude notar se foi intencional ou não, mas os integrantes de cada grupo misturaram as cédulas que cada um possuía; a partir daí, uma quantia que não era aquela que eu havia separado e estipulado. Quando comecei a anotar na lousa o que cada um tinha, a quantia separada por integrante ficou completamente diferente do que eu tinha preparado:

Grupo III:

Re: R\$ 20,00

Dan: R\$ 2,00 + R\$ 5,00 + R\$ 20,00

Ga: R\$ 2,00 + R\$ 5,00

Gle: R\$ 2,00 + R\$ 5,00

Grupo IV:

Pat: R\$ 20,00

Val: R\$ 1,00

Sa: R\$ 2,00 e R\$ 10,00

Ra: R\$ 5,00

Nessa situação, nenhum dos demais grupos conseguiu determinar exatamente quantas cédulas cada um tinha. Todos ficaram analisando, porém não deram nenhuma solução, apenas especularam.

Aproveitando essa situação, procurei explorar a necessidade de representá-la simbolicamente. Tentei mostrar que, numa situação dessas, a ausência de um ente que nos ajude a representar, justamente, esse “valor desconhecido”,

prejudica não só o entendimento da situação, mas também o encontro de uma solução ou de uma “saída”.

Como os grupos III e IV apresentaram uma situação diferente das anteriormente discutidas, quis aproveitar e desenvolvê-la.

Primeiro, perguntei: *“E agora? Quanto será que cada um tem?”*

Todos permaneceram em silêncio. Principalmente porque não adiantava dividir por quatro, provoqueei: *“Adianta simplesmente dividirmos por quatro?”* Fez-se um coro: *“Não!”*

Indaguei se seria possível melhorar a representação dessa situação.

Ra: *“Acho que sim professor!”*

Professor: *“Como?”*

Os alunos mostraram-se em dúvida, inseguros, ou não estavam entendendo nada do que eu tinha proposto. Para tentar melhorar a situação, fui até a lousa e escrevi:

Re: R\$ 20,00 x \_\_\_\_

Dan: R\$ 2,00 x \_\_\_\_ + R\$ 5,00 x \_\_\_\_ + R\$ 20,00 x \_\_\_\_

Ga: R\$ 2,00 x \_\_\_\_ + R\$ 5,00 x \_\_\_\_

Gle: R\$ 2,00 x \_\_\_\_ + R\$ 5,00 x \_\_\_\_

Escrevi “x\_\_\_\_” na tentativa de mostrar que isso representava a multiplicação do valor por um número de cédulas.

Então, perguntei : *“O que isso daqui quer dizer? (apontando para x\_\_\_\_)”*

Na: *“Um número!!”*

Professor: *“Qual número?”*

Na: *“Não sei”*

Professor: *“Nós sabemos qual é esse número?”*

Todos: *“Não!”*

Professor: *“Então, como posso representar esse número?”*

L: *“Como assim?”*

Professor: *“Um modo de eu ‘representar’ que aqui vai um número.”*

Jé: *“Posso usar um símbolo?”*

Professor: *“Pode, por que não?”*

Na: *“Posso colocar o símbolo que eu quiser?”*

Mais uma vez, para aproveitar o entusiasmo deles e matar a minha curiosidade, disse: *“Qualquer símbolo que vocês quiserem!”*

Após essa discussão, fui observar o que tinham escrito. Apareceram símbolos dos mais variados: triângulos, quadrados, Sol, Lua e coração. Nesse momento, preferi deixá-los usar a criatividade e não quis impor nenhum símbolo mais convencional. Sentiram-se à vontade para fazer a “sua matemática”.

Antes de encerrar a atividade, quis saber o que esses símbolos representavam para eles e perguntei: *“Podemos nomear esses símbolos?”*. Ouvi um *“Sim!”*

Professor: *“Então como podemos chamá-los? O que esses símbolos representam?”*

Jé: *“Incógnita.”*

Professor: *“O que mais?”*

Pl: *“Termo desconhecido.”*

Professor: *“O que mais? Esses símbolos representam números? Esses números variam?”*

E, para minha surpresa: Na: “*Variável.*”

Confesso que fiquei meio desconfiado, porém, no momento, minha atitude foi a de parabenizá-los. Talvez já tivessem ouvido esses termos e estavam associando-os àquele momento.

Essa atividade, apesar de não ter sido totalmente explorada, mostrou-se muito interessante tanto para mim quanto para os alunos. Foi prazerosa, devido à forma como foi trabalhada. Acredito também, que a forma como quiseram representar os símbolos foi uma espécie de “desabafo” pois, nesse primeiro momento, pude perceber que a maioria dos alunos entendera a importância da representação simbólica.

#### IV. 5 Análise da atividade 3

O objetivo principal dessa atividade foi permitir aos alunos um primeiro contato com a noção de variável. Analisaremos como os alunos perceberam a necessidade e a importância de se trabalhar com um símbolo não numérico para representar uma quantidade desconhecida, que variava para cada grupo de quatro alunos e dentro do próprio grupo.

Como professor pesquisador, conduzi as atividades de modo a estimular as manifestações espontâneas dos alunos e, de modo particular, a utilização de representações simbólicas, lingüísticas e não lingüísticas, inventadas pelos grupos de alunos, inclusive dialogando com eles a respeito.

Para essa análise, serão consideradas as observações relevantes que constam no diário de campo, assim como as informações das fichas das atividades dos alunos.

Primeiramente, notamos o quanto foi importante, para um melhor desempenho da classe, a socialização das observações individuais, das idéias eficientes e não eficientes dos alunos, em diferentes momentos da aplicação, . A contribuição dessa socialização foi altamente relevante para que os alunos compreendessem e percebessem a necessidade da representação simbólica, como ficou demonstrado por suas falas.

Então, perguntei [professor pesquisador] : *“O que isso daqui quer dizer? (apontando para  $x$ \_\_\_\_)”*

Na: *“Um número!!”*

Professor: *“Qual número?”*

Na: *“Não sei”*

Professor: *“Sabemos qual é esse número?”*

Todos: *“Não!”*

Professor: *“Então, como posso representar esse número?”(...)*

Professor: *“Um modo de eu ‘representar’ que aqui vai um número.”*

Jé: *“Eu posso usar um símbolo?”*

Professor: *“Pode, por que não?”*

Na: *“Eu posso por o símbolo que eu quiser?”*

*“Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as idéias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas idéias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muito diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Aí está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalho. Quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão relacional.” (Onuchic & Allevato, 2004, p.220)*

Ao prever uma atividade de comunicação entre os grupos, visamos criar uma situação favorável para uma elaboração de seus conhecimentos como resposta às exigências da situação-problema e não como uma exigência do professor.

Fugindo de nossa proposta inicial, os próprios alunos ampliaram as possibilidades de produção de representações simbólicas para indicar os elementos “desconhecidos”.

Os grupos III e IV propiciaram essas condições: uma vez alterados os dados da situação-problema, os alunos responsáveis por determiná-los encontraram dificuldades.

Essa necessidade real só foi possível pois como defendido por Brousseau(1996), a atividade propunha uma situação favorável à emergência de *“boas questões e boas respostas”* contribuindo para a construção de uma linguagem simbólica significativa.

Assumimos, também, a produção que os alunos tiveram nessa atividade foi propiciada pelas suas características, ou seja, os alunos participaram de *“um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer.”* (Van de Walle, 2001, apud, Onuchic & Allevato, 2004, p.221)

Nessa primeira fase, o desempenho dos alunos forneceu indícios de que esses conseguiram relacionar as idéias de variável contidas no problema.

Na segunda fase dessa atividade, em que os alunos sentiram necessidade de nomear esse símbolo, eles o chamaram de *“incógnita, termo desconhecido e variável”*.

Com relação às letras que apareceram, Arcavi (1987) atenta para os vários termos que podem designá-las nesse caso, tais como: variável, termo desconhecido, incógnita, etc.

É provável que os alunos nomearam esse símbolo com esses termos por já terem ouvido algo a respeito. Não se pode negar, entretanto, que os empregaram em uma situação apropriada, ou seja, em que o símbolo é visto como um número específico, mas desconhecido ou como um número indeterminado, ou seja, o símbolo é visto como representando, ou pelo menos sendo capaz de assumir, vários valores, ao invés de apenas um para indicar valores desconhecidos.

Nessa parte da atividade, estimulamos a utilização de símbolos propostos pelos próprios alunos:

Na: *“Eu posso por o símbolo que eu quiser?”*

Ao permitirmos isso, notamos que estrelas, sol, lua, corações, quadrados, triângulos e até algumas letras apareceram.

E, apesar de o símbolo ter sido nomeado, também, por *“variável”*, os alunos chamaram-no assim por interferência do diálogo do professor com a classe.

*“o conceito de variável é ‘variável’ e ‘ardiloso’: ele é difícil de descrever, e em boa parte, mais difícil de aprender”(Arcavi, 1987).*

#### IV. 6 Desenvolvimento da atividade 04

Expliquei como a atividade devia ser realizada e, em seguida, distribuí R\$ 126,00 em cédulas impressas.

Após os alunos discutirem entre eles, anotei na lousa algumas das possibilidades encontradas:

4 CDs Simple Plan + 2 CDs dos Titãs

6 CDs Ivete Sangalo + 2 CDs do Rappa

Professor: *“Olhando e analisando essas expressões, o que podemos concluir?”*

Na: *“Que eu preciso comprar os CDs que custam R\$ 126,00”.*

Professor: *“E como vocês fizeram para descobrir quais são esses CDs?”*

Na: *“Primeiro, escolhemos o mais caro, para ver quantos dava para comprar. E também porque  $4 \times 25,00$  é 100”*

Jé: *“Depois foi só escolher dois de 13,00.”*

Professor: *“Posso representar essas duas possibilidades da seguinte maneira?”* Na lousa, o professor escreve:

$$4 \cdot 25 + 2 \cdot 13 = 126,00$$

$$6 \cdot 15 + 2 \cdot 18 = 126,00$$

Professor: *“Analisando essas duas expressões, podemos tirar algumas conclusões?”*

A maioria concorda, mas ninguém diz porquê. Devido ao silêncio, o professor antecipa-se e explica a equivalência dessas expressões.

O professor discute e explica aos alunos a equivalência entre as expressões representada pelo sinal de igual.

Aparentemente, a fisionomia dos alunos demonstra um “certo” alívio ao compreenderem sobre o quê o professor havia discursado.

Professor: *“Tudo bem. Só tem essas possibilidades de compra?”*

Ca antecipa-se e menciona outras possibilidades.

O professor nota que a maioria dos alunos não encontrou muitas possibilidades. Apesar de admitirem compreender a equivalência das expressões, os alunos sentiram dificuldade em encontrar duas possibilidades.

#### IV. 7 Desenvolvimento da atividade 05

Os alunos acharam essa atividade muito semelhante à atividade 04. Com relação aos seus cálculos, mais uma vez as contas eram feitas na carteira ou em uma folha de rascunho.

Os alunos receberam R\$ 178,00 em cédulas impressas que foram distribuídos como “presente”.

Aluno: *“Professor é igual à atividade 04?”*

Professor: *“Não. Agora você não precisa gastar exatamente R\$ 178,00. Pode gastar menos ou até mesmo R\$ 178,00. Só não pode gastar mais.”*

Ao andar pela sala, observei que muitos alunos gastam exatamente R\$ 178,00.

Professor: *“Por que vocês querem gastar R\$ 178,00?”*

Alunos: *“Porque é o que eu posso gastar. E é quase igual à outra”*

Os alunos fazem muitas contas na carteira, porém só anotam as que satisfazem a condição da atividade.

Durante a atividade, perguntei: *“Posso comprar qualquer quantidade de qualquer CD?”*

Maioria: *“Não”*

Professor: *“Por quê?”*

Alunos: *“Porque senão vai ultrapassar os R\$ 178,00.”*

Professor: *“Vamos escrever algumas possibilidades que vocês encontraram?”*

Os alunos só encontraram uma possibilidade, exceto Ca, Jé e Pa.

Professor: *“Quem mais fez só uma possibilidade?”* PI levantou a mão.

Professor: *“Por que, PI?”*

PI: *“Porque não deu tempo e eu quis fazer que nem a outra.”*

Professor: *“Por quê?”*

PI: *“Porque é mais legal achar assim.”*

Professor: *“Bom, então vamos anotar algumas possibilidades.”*

Ca:

4 Ivete Sangalo + 2 Kelly Key + 7 Marjorie Stiano + 12 Sandy =

= 32 + 30 + 56 + 60 = 178

Professor: *“Alguém achou outra possibilidade que não deu R\$ 178,00?”*

Na:

6 Kelly Key + 11 Marjorie Stiano = 60 + 88 = 148,00

Professor: *“O que acontece com o valor final quando escolhermos outros CDs?”*

Maioria: *“Fica diferente.”*

Professor: *“Então, o que acontece com o valor final da compra quando compramos quantidades diferentes de CDs?”*

Alunos: *“Ele muda.”*

Professor: *“Como assim? Poderia ter comprado menos CDs?”*

Alunos: *“Sim, mas pagaria menos.”*

Professor: *“O que depende da quantidade de CDs comprados?”*

Alunos: *“O valor total.”*

Professor: *“O valor total só vai variar quando...”*

Alunos: *“Variar os CDs comprados.”*

Professor: *“Muito bem! Alguém tem alguma dúvida?”*

Alunos: *“Não.”*

Professor: *“A nossa tabela apresenta valores fixos?”*

Ninguém respondeu.

Professor: *“...Valores que quando você fez as suas contas não mudaram.”*

Alunos: *“Sim.”*

Professor: *“Quais?”*

Alunos: *“O preço.”*

Professor: *“O valor da compra variava quando você fazia suas continhas na calculadora?”*

Alunos: *“Sim.”*

Professor: *“Quando variava?”*

Alunos: *“Quando eu escolhia um CD e fazia vezes quanto eu queria comprar.”*

Professor: *“Para finalizar. O valor total dependia da quantidade que você escolhia?”*

Alunos: *“Sim.”*

Professor: *“Alguém tem dúvida?”*

Alunos: *“Não.”*

#### IV. 8 Análise das atividades 4 e 5

Estas atividades tiveram como objetivo introduzir a relação de dependência entre as variáveis do problema.

Na primeira parte das duas atividades, os alunos podiam escolher amplamente os CDs que queriam “comprar”, limitados, contudo, pela relação de dependência entre o número de CDs e o valor total da compra. Na atividade 4, os alunos tinham que gastar um valor constante de R\$ 126,00, enquanto que, na atividade 5, tinham seus gastos limitados até R\$ 178,00, ou seja, esse valor não representava um valor obrigatório de gasto e sim uma possibilidade.

Nas duas atividades, em cada uma das expressões aritméticas, os alunos primeiro selecionaram os valores dados representando os preços unitários dos CDs para depois fixá-los e, em seguida, verificar quantos podiam comprar.

Na: *“Primeiro, escolhemos o mais caro para ver quantos dava para comprar. E também porque  $4 \times 25,00$  é 100”*

Jé: *“Depois, foi só escolher dois de 13,00.”*

Nessa parte, tanto na atividade 4 como na 5, os alunos atentaram para a dependência existente entre o número de CDs e o preço total da compra:

Durante a atividade, perguntei: *“Posso comprar qualquer quantidade de qualquer CD?”*

Maioria: *“Não”*

Professor: *“Por quê?”*

Alunos: *“Porque senão vai ultrapassar os R\$ 178,00.”*

(...)

Professor: *“Então, o que acontece com o valor final da compra quando compramos quantidades diferentes de CDs?”*

Alunos: *“Ele muda.”*

(...)

Professor: *“O que depende da quantidade de CDs comprados?”*

Alunos: *“O valor total.”*

Ou seja, os alunos perceberam a existência de uma *“lei quantitativa”* de correspondência ligando essas duas variáveis.

Segundo Caraça(2000):

*“...y igualado a uma expressão analítica em x, contém uma lei matemática ligando as duas variáveis; essa lei matemática define a correspondência que existe entre x e y (...)”* (p.123).

Considere-se, ainda, as expressões equivalentes formuladas pelos alunos ao igualá-las a R\$ 126,00:

4 CDs Simple Plan + 2 CDs dos Titãs

6 CDs Ivete Sangalo + 2 CDs do Rappa

Professor: *“Olhando e analisando essas expressões o que podemos concluir?”*

Na: *“Que eu preciso comprar os CDs que custam R\$ 126,00”*.(...)

Professor: *“Posso representar essas duas possibilidades da seguinte maneira?”* Na lousa, o professor escreve:

$$4 \cdot 25 + 2 \cdot 13 = 126,00$$

$$6 \cdot 15 + 2 \cdot 18 = 126,00$$

Analisando essas duas expressões, o professor discute com a classe a sua equivalência. Observa-se ainda que, uma vez escolhidos os CDs, os alunos fixavam o preço de cada um e variavam o seu número de modo a obter o valor constante. De modo implícito, reconheciam os diferentes papéis das constantes e variáveis. Esses papéis eram identificados em situações relativamente

complexas, pois envolviam três constantes e duas variáveis em uma combinação adequada de adições e multiplicações.

Ao resolver problemas (como o acima), o aluno manipula relações complexas envolvidas nos procedimentos multiplicativos, a partir de que poderá desenvolver uma concepção dinâmica e operacional da noção de expressões equivalentes, as quais tem *“existência quando solicitada em uma seqüência de ações”* (Kieran, 1992).

Os significados que os alunos atribuíram às suas soluções advieram das situações-problema que trabalharam pois, notadamente, basearam-se em suas experiências anteriores para encontrá-las.

Outro aspecto importante dessas atividades consiste no fato de que, diferentemente dos problemas rotineiros de expressões aritméticas que apresentam uma solução única, os alunos, devido à natureza de suas soluções, tiveram a oportunidade de descobrir mais de uma solução, ou seja, houve uma quebra da rotina escolar.

#### IV. 9 Desenvolvimento da atividade 06

Inicialmente, os alunos demonstraram dúvidas sobre a resolução da atividade. Expliquei como realizar a tarefa, fazendo, com eles, a primeira linha.

Após essa explicação, a maioria compreendeu e começaram, com o auxílio da calculadora, demonstrando certa facilidade em resolvê-la.

Circulei pelos alunos e notei que a maioria resolvia sem muitos problemas. Até aquele momento, essa foi a atividade realizada em menos tempo.

Ao recolher as atividades, perguntei aos alunos Dan, Gle e PI:

*“Por que vocês preencheram a tabela e a primeira linha e não completaram as demais perguntas?”*

Gle: *“Porque eu não entendi direito o que era para fazer.”*

Expliquei novamente.

Gle: *“É que eu achei que estava muito simples no início.”*

Professor: *“Por quê?”*

Gle: *“Porque era só repetir os números e eu não sabia o que tinha que escrever.”*

Professor, para todos: *“E essa ‘repetição’ quer dizer o quê?”*

Ca: *“Quando a gente faz o preço de um cd vezes 2, o preço total fica vezes 2 também.”*

Professor: *“Isso só acontece quando multiplicamos por 2?”*

Alunos: *“Não, por 3, 4, 8...”*

Professor: *“E se multiplicássemos o preço do cd por 10, por 12, por 20?”*

Alunos: *“O valor total também ia ficar vezes 10, 12, por 20.”*

Professor: *“Então, considerando tudo isso que vocês me disseram e que perceberam, não acham que podemos tirar algumas conclusões?”*

A maioria concorda com a cabeça, porém não diz nada.

Professor: *“Quais?”*

Jé: *“Isso que está escrito na folha. Multiplicando-se...”*

Professor: *“Como assim?”*

Jé: *“O número que multiplica a quantidade de cd é o mesmo que multiplica o preço.”*

Professor: *“O que mais? Algum valor depende de outro nessa situação?”*

Alunos: *“Que nem na outra... o preço de todos depende de quantos cds eu quero.”*

Professor: *“Alguém tem alguma dúvida?”* Os alunos negam com cabeça ou dizem não.

#### IV. 10 Desenvolvimento da atividade 07

Após entregar a atividade, procurei mostrar aos alunos que existe uma proporcionalidade entre a quantidade de Cds comprados e o valor total, na tentativa de ajudá-los a desenvolver este raciocínio.

Para tanto, usei mais dois exemplos que não estão na tabela: 06 e 54, 08 e 72.

Durante a atividade, os alunos sentem certo desconforto pois não estão habituados à realizar o menor número de operações possíveis para procurar o valor de  $x$ . Muitos se questionam antes mesmo de realizar suas contas. Relutam, antes de anotar qualquer coisa. Evitam escrever na folha e até mesmo na “carteira” antes de colocarem a “mão na massa”.

Logo no início da atividade, os alunos demonstram claramente que, para achar o valor de  $x$ , preferem encontrar o valor do preço unitário do Cd ao invés de explorar a proporcionalidade.

Para achar o valor de  $x$ , os alunos dividem 18 por 2.

Antes das discussões, nenhum aluno procurou achar o valor de  $x$  observando a linearidade ou a proporcionalidade entre a quantidade de Cds comprados e o valor total da compra.

Com o valor do preço unitário do Cd, os alunos encontraram facilmente o valor de  $x$ . Alguns consideraram o preço unitário R\$ 18,00. Professor perguntou por que R\$ 18,00? Resposta: *“Por que é a primeira linha da tabela.”*

Nenhum aluno explorou a linearidade da proporcionalidade. Verifiquei com eles a existência dessa propriedade, considerando-se os dados constantes da tabela, na qual, multiplicando-se 18 por 7, encontramos 126. Portanto, o valor de  $x$  é 14, ou seja,  $2 \times 7$ .

Todos mostram-se surpresos.

Di: *“Professor, nunca eu ia conseguir fazer isso. Do meu jeito é mais fácil.”*  
Mais colegas o apóiam e apontam para o menor número possível de operações.

A partir da constatação, na tabela, dos escalares que relacionam as grandezas da mesma natureza, introduzi as notações do tipo  $2 \times x = 2x$  ou  $2 \bullet x = 2x$

A maioria dos alunos diz entender essas notações e repete: “ $2x$  é igual a duas vezes  $x$ .” Com outros exemplos, inclusive  $9 \times x = 9x$  ou  $9 \bullet x = 9x$ , ocorre o mesmo.

Perguntei o que a letra  $x$  representa.

Val: “A quantidade de cds comprados.”

Professor: “A quantidade de cds comprados ou o preço unitário?”

Alunos: “Quantidade de cds comprados.”

Professor: “O que aconteceria com o valor de  $x$  se o valor total da compra fosse outro?”

Alunos: “O  $x$  teria outro valor.”

Procurei discutir com os alunos sobre valores independentes e dependentes. A maioria pareceu entender essas independências e dependências envolvidas, como depreendi de suas “falas”.

#### IV. 11 Análise das atividades 6 e 7

A primeira fase da atividade 6 consistiu em preencher as colunas da tabela indicando o número de CDs comprados e o preço total. Deveriam, ainda, responder as questões propostas logo abaixo da tabela. Essas tarefas foram executadas alternadamente.

Como observado no Capítulo I, do ponto de vista matemático, o conceito de proporcionalidade é um pré-requisito para o entendimento de outros conceitos.

Kieran (1994) reconhece que “o desenvolvimento das estruturas multiplicativas é decisivo para uma pessoa conceituar ou trazer à luz o mundo no qual ele ou ela vive”.(p.387)

Estas considerações ressaltam a importância de propor atividades como as acima mencionadas, tendo por objetivo desenvolver habilidades para resolver situações de proporcionalidade por meio do procedimento escalar:  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Analisando as fichas das atividades no que se refere à primeira fase, percebemos que apenas duas alunas não indicaram os números de CDs comprados de acordo com as questões da segunda parte da tarefa e cometeram um erro no cálculo do valor total. Três alunos que preencheram corretamente a tabela, não terminaram de preencher suas fichas.

Professor: *Por que vocês preencheram a tabela e a primeira linha e não completaram as demais perguntas?”*

Gle: *“Porque eu não entendi direito o que era para fazer.”*

Expliquei novamente.

Gle: *“É que eu achei que estava muito simples, no início.”*

Professor: *“Por quê?”*

Gle: *“Porque era só repetir os números e eu não sabia o que tinha que escrever.”*

Como a tarefa foi considerada simples, porém não usual, os alunos sentiram mais dificuldades na fase da atividade que não envolvia cálculos.

As observações acima nos fazem supor que os alunos sentiam-se mais seguros no momento de efetuarem os cálculos. A partir do momento em que se depararam com perguntas que não exigiam respostas encontradas através de operações e, até perceberem o grau de dificuldade da atividade, suas atitudes foram outras.

Partindo-se para a análise da segunda parte, com base no diário de campo, encontramos alguns elementos indicando que os alunos perceberam a existência de uma relação de dependência entre o número de CDs comprados e o preço total da compra:

Professor, para todos: *“E essa ‘repetição’ quer dizer o quê?”*

Ca: *“Quando a gente faz o preço de um cd vezes 2, o preço total fica vezes 2 também.”*

Os alunos perceberam a relação escalar que corresponde aos produtos efetuados entre os números referentes à mesma grandeza:

Professor: *“Isso só acontece quando multiplicamos por 2?”*

Alunos: *“Não, por 3, 4, 8...”*

Professor: *“E se multiplicássemos o preço do cd por 10, por 12, por 20?”*

Alunos: *“O valor total também ia ficar vezes 10, 12, por 20.”*

É importante, numa situação de proporcionalidade, buscar diferentes modos de resolver o problema, tanto em procedimento escalar como funcional, favorecendo o estabelecimento de múltiplas relações entre seus elementos e, conseqüentemente, o desenvolvimento de um pensamento flexível.

No que concerne à generalização, Fiorenti, Miorin e Miguel(1993) escrevem:

*“A novidade introduzida por Viète foi não apenas representar simbolicamente, de maneira distinta, quantidades conhecidas (coeficientes de equações) e desconhecidas (incógnitas das*

*equações), mas, sobretudo, atribuir papéis diferenciados aos símbolos representativos dessas quantidades.” (p. 81)*

Os alunos generalizaram a “propriedade escalar” da proporcionalidade, embora não o fizessem para  $n$  valores.

Fiorenti, Miorin e Miguel(1993) defendem que:

*“Nas séries iniciais do 1º grau, o objetivo fundamental a que se deve visar é o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização.” (p. 89)*

A atividade 7 teve como objetivo principal favorecer o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas utilizando o procedimento escalar.

Assim como observado no diário de campo, quatorze alunos, que encontraram e acertaram o valor de  $x$ , preferiram, primeiro, descobrir o preço unitário de cada CD, para, em seguida, dividir o total de R\$ 126,00 por esse valor. Outros três, apesar de errarem o valor de  $x$ , também preocuparam-se, primeiramente, em encontrar o valor unitário do CD.

É razoável supor que alguns fatores os influenciaram nessa atitude:

- experiências anteriores pois, provavelmente em seus cotidianos, deparam-se com situações em que a quantidade comprada, de qualquer produto, depende do valor disponível para compra e do seu preço unitário;
- a exigência de utilizarem o menor número de operações possíveis. (Da forma como acharam a resolução, utilizaram apenas duas);
- o uso da calculadora como facilitadora pois, apenas com algumas operações, os alunos obtiveram rapidamente os valores necessários para resolverem o exercício;

- por último e, mais importante, mesmo o professor expondo, no início da atividade, a relação escalar, nenhum aluno a explorou, pois foram influenciados pela atividade anterior que fornecia o preço unitário e, a partir dele, o cálculo dos demais valores.

De acordo com as observações acima e da fala de um aluno (*“Professor, nunca eu ia conseguir fazer isso. Do meu jeito é mais fácil.”*), vemos indícios de que a relação escalar entre os números referentes à mesma grandeza não representa um possível “caminho” de resolução desse problema.

É importante lembrar que, no início da confecção dessa atividade, tínhamos como proposta inicial trabalhá-la em um software de planilha eletrônica, no qual os alunos alterariam os valores comprados e perceberiam a consequência dessa alteração, imediatamente, no valor total da compra. Porém, como observado no Capítulo III, por motivos de força maior, não pudemos utilizar, em nossa pesquisa, o computador.

#### IV. 12 – Desenvolvimento da atividade 08

Para iniciar essa atividade, escrevi uma sentença na lousa: *“Um número qualquer mais dois.”*

Em seguida, exemplifiquei essa atividade do ponto de vista do aluno.

A primeira sentença escrita na lousa, essa para os alunos, foi: *“O dobro de um número mais cinco.”*

Após aguardar que os alunos realizassem suas operações, perguntei para Ca: *“Qual o resultado que você encontrou para o seu número?”* Ca respondeu 13.

Em seguida, pedi para os demais tentarem descobrir qual número ela pensou. Na acertou. O número pensado foi 4, então, Na escreveu na lousa:  $2 \times 4 = 8 + 5 = 13$ .

Professor: *“Na, escreva duas vezes quatro igual a...agora, anote o resultado. Perfeito, oito. Agora, escreva oito mais cinco igual a...isso, treze. Então você concorda que duas vezes quatro é diferente de oito mais cinco?”*

Na: *“Sim.”*

Professor apontando para a primeira expressão: *“Então, por que você escreveu que são iguais?”*

Na: *“Ih...professor, desculpe. É que eu fiz primeiro a multiplicação, coloquei o resultado e somei cinco.”*

Procurei mostrar aos demais porque Na tinha errado a igualdade inicial e percebi que a haviam entendido.

Escrevi outra sentença na lousa, ao lado da primeira: *“O triplo de um número menos dois.”* Perguntei para Pat qual o seu resultado e essa respondeu: 7.

Pedi para os demais tentarem descobrir qual número ela pensou. Já acertou. O número pensado foi 3, Na escreveu na lousa:  $3 \times 3 - 2 = 7$ .

Escrevi na lousa, ao lado da segunda, outra sentença: “ *A metade de um número mais dois.*” Perguntei para Lu qual o resultado; respondeu: 6. Pedi para os meninos tentarem descobrir qual número ele pensou, pois não estavam participando ativamente. Di acertou. O número pensado foi 8, Di escreveu na lousa:  $8/2 + 2$ .

Em seguida, solicitei que analisassem as três sentenças uma ao lado da outra, pedindo que buscassem perceber quais valores são constantes e quais os variáveis..

Muitos alunos afirmaram que os valores variáveis são os “números pensados”, mas nenhum afirmou nada sobre os valores constantes. Expliquei quais e porque alguns números eram constantes.

Aos alunos, pedi que representassem esse “número pensado” com símbolos, o “nomeassem” e anotassem em suas folhas. Mais uma vez, ao anotarem, pude perceber que o termo incógnita foi o mais utilizado.

#### IV. 13 Desenvolvimento da atividade 09

Para exemplificar essa atividade, pedi a ajuda de Sa. Fomos executando os comandos até que, no final, disse-lhe que o número que ela havia pensado era o nº 07. Estava certo.

Apliquei novamente os comandos, com a ajuda de Re. O número pensado, dessa vez, foi 3. Com Val, o número pensado foi 8. Com Jé e Ca foram, respectivamente, os números 6 e 4.

Ao final desses testes, chamei a atenção para o fato de cada um ter pensado em um número diferente, ou seja, esse número variou de aluno para aluno.

Em seguida, passei os comandos na lousa, com os quais procurei mostrar a necessidade e a importância de representar esse “número pensado” por um símbolo. Solicitei que respondessem a esses comandos com linguagem simbólica.

Jé: *“Posso usar qualquer símbolo?”*

Respondi que sim e logo constatei que os mais diversos símbolos foram utilizados, além do próprio x, a saber, estrela, Sol, etc.

#### IV. 14 Desenvolvimento da atividade 10

Os alunos mostraram-se muito receptivos após ouvirem a explicação dessa atividade.

Dentre as cartelas distribuídas, duas eram premiadas.

Alguns alunos (Pa, Jé e Na) repararam que havia mais de uma representação para a mesma situação, mesmo antes dos números começarem a ser “cantados.”

O valor para x, nessa atividade, foi 4.

Os números sorteados (nessa ordem) foram: 07, 11, 12, 10, 08, 24, 20 e 06.

Os alunos Gle e Lu não entenderam direito. Nesse momento, interrompi a atividade e a expliquei novamente.

Enquanto ditava, reparei que alguns alunos colocaram o resultado da expressão ao lado dela, outros não.

Os alunos mostraram-se ansiosos em ganhar, pois percorriam todas as expressões calculando, uma a uma, rapidamente, ou até fazendo algumas observações na cartela. As contas, mais uma vez, foram feitas na carteira.

Na: *“É fácil ganhar. Um mesmo número serve duas vezes.”*

Di comentou com seus colegas: *“A minha dá para marcar mais de uma vez.”*

Ao término da atividade, Gle e Di foram as premiadas, ganhando bombons sonho-de-valsas.

Questionei o porquê da necessidade de, na cartela, escreverem nas expressões a letra x.

Ra: *“Para poder colocar o número quatro no lugar.”*

Professor: *“Quer dizer que, onde aparece a letra x na cartela, ela está, na verdade, ...”*

Alunos: *“no lugar do número quatro.”*

Professor: *“A letra x está ‘representando’ esse número?”* Os alunos concordaram.

Professor: *“Poderia ser colocado qualquer número, sem ser o quatro, caso esse outro tivesse sido sorteado?”* Os alunos concordaram.

Professor: *“Seria possível trabalharmos com expressões desse tipo se não fosse possível usarmos um símbolo para representarmos um número qualquer?”*

Os alunos discordaram logo de imediato, aparentando terem percebido a importância de se representar um número qualquer simbolicamente.

Nos agradecimentos finais, eu disse que toda essa pesquisa não teria sido possível sem a colaboração da escola, da professora e, principalmente, dos alunos que, durante as dez sessões, mostraram-se comprometidos e com muita boa-vontade em participar.

Os alunos despediram-se, mostrando-se emocionados e felizes por terem participado, desejando-me boa sorte.

#### IV. 15 Análise das atividades 08,09 e 10

Nessas atividades, os problemas são propostos em uma abordagem funcional, ou seja, em que a noção de função é trabalhada implicitamente e em um modo operacional.

Pesquisas anteriores, nessa direção, propõem tarefas que utilizam programas de computadores, os quais executam situações dinâmicas de entrada e saída.

Kieran (1992) relata que, conjuntamente com Boileau e Garançon (1980), em um estudo sobre o uso de computadores na aprendizagem de Álgebra, conduziram um experimento em que o ambiente era a resolução de problemas que ressaltava uma interpretação funcional das relações nas situações problemas.

Nesse experimento, *“os estudantes deveriam entrar no computador com um tipo de programa de linguagem natural, uma operação por linha, para calcular os valores das variáveis no programa”*.(Kieran, 1992)

Em nossa pesquisa, a atividade 08 simula um computador: um aluno ocupa o lugar de entrada e outro, o de saída; a regra de transformação é dada pelo professor por meio de uma seqüência de ordens verbais, indicativas das operações a serem realizadas. Os números de entrada simbolizam as variáveis independentes e os números de saída, as variáveis dependentes. Na atividade 10 mudam-se os papéis, o aluno simula o programa e o professor fornece a entrada e a saída.

Essa simulação favoreceu o estabelecimento da relação de dependências entre as variáveis, pois muitos alunos afirmaram que os valores da variável dependente são os “números pensados”. e os da independente, os números encontrados.

Mais evidentes são os diálogos apresentados nas atividades 09 e 10.

Na atividade 09:

Jé: *“Posso usar qualquer símbolo?”*

E, mais adiante, na atividade 10:

Na: *“É fácil ganhar. Um mesmo número serve duas vezes.”*

(...)

Professor: *“Quer dizer que onde aparece a letra x na cartela, ela está, na verdade ...”*

Alunos: *“no lugar do número quatro.”*

Professor: *“A letra x está ‘representando’ esse número?”*

Os alunos concordaram.

Professor: *“Poderia ser colocado qualquer número, sem ser o quatro, caso esse outro tivesse sido sorteado?”*

Os alunos, mais uma vez, concordaram.

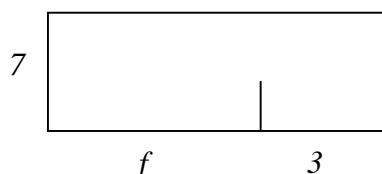
Professor: *“Seria possível trabalharmos com expressões desse tipo se não fosse possível usarmos um símbolo para representarmos um número qualquer?”*  
Os alunos concluíram que não.

Os diálogos transcritos evidenciam que a forma como as atividades foram propostas propiciou o surgimento de conceitos matemáticos: *“...os conceitos matemáticos surgem, uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico...”* (Caraça,2000,p.118)

Quanto a construção e interpretação de expressões literais, outro dos objetivos visados nestas atividades, consideramos, para a nossa análise, pesquisas que revelam dificuldades específicas apresentadas pelos alunos em construir ou em interpretar uma expressão algébrica, quer dizer, em identificar as regras de sua formação.

Booth(1984) constatou que a capacidade de traduzir verbalmente um método de cálculo não resulta, necessariamente, na capacidade de reconhecer uma formulação algébrica incorreta.

Para chegar a essa conclusão, Booth adaptou uma questão escrita com alguns itens de avaliação do CSMS<sup>6</sup>, tal como achar a área do retângulo mostrado na figura a seguir:



Em sua pesquisa, Booth entrevistou os estudantes que cometeram os mesmos erros dos participantes da avaliação do CSMS:  $7f3$  ou  $f21$  ou  $f + 21$ . Sua intenção foi investigar se os alunos estavam cômnicos do procedimento subjacente, achar a área do retângulo, e, se sim, se suas dificuldades estavam relacionadas com a compreensão do simbolismo algébrico.

Diferentes pesquisadores, por exemplo Booth(1984)e Kieran(1992), têm constatado dificuldades dos alunos em utilizar as convenções sintáticas como, por exemplo,  $2a = 2 \cdot a = 2 \times a$  ou  $1x = x$ .

Freitas (2002), conforme pesquisa apresentada no Capítulo I, investigou os procedimentos adotados pelos alunos nas resoluções de equações do 1º grau na forma  $ax = b$  ou  $ax + b = cx + d$ .

Destacamos, abaixo, alguns erros de maior incidência constados pelo autor:

- Nas equações escritas na forma  $ax = b$ , os alunos demonstraram a ausência da compreensão de problemas aritméticos e da notação de  $ax$  como  $a$  multiplicado por  $x$ .
- Indicações da incompreensão por parte dos alunos da notação  $1x = x$ .

Em alguns casos, transformaram  $(2x)$  em  $(2 + x)$ , como evidenciado na resolução abaixo:

---

<sup>6</sup>(*Concepts in Secondary Mathematics and Science – Conceitos em Matemática e Ciência Secundárias*)

$$“3 + 4x = 2x (...)$$

$$3 + 2x = 0$$

$$3 + 2 = -x$$

$$5 = -x” (p.68)$$

Em outra resolução, da equação  $-20 = 4x$ , o aluno transpõe o 4 para o 1º membro, alterando seu sinal para negativo:

$$“- 20 = 4x$$

$$-20 -4 = x$$

$$24 = x” (p.68)$$

Em relação ao segundo erro que destacamos, em suas entrevistas, o autor solicita a uma aluna que escreva uma equação do 1º grau qualquer e, em seguida, discute-a com ela:

*“E: escreva uma equação do 1º grau, qualquer uma.*

*Mo: (escreve)  $1x + 3.$ ” (p.61)*

Segundo o autor, a aluna não identificou o número 1 como neutro multiplicativo, ou seja:  $1.x = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

As constatações acima evidenciam dificuldades dos alunos, relacionadas à compreensão do simbolismo algébrico e à utilização de convenções sintáticas.

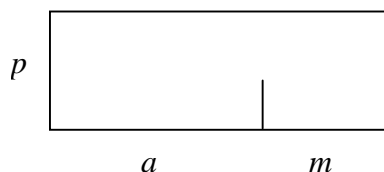
Devemos considerar, ainda, erros decorrentes do desconhecimento da regra dos parênteses.

Kieran(1979) constatou que as crianças geralmente não usam parênteses, porque acham que a seqüência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados. Além disso, muitos alunos acham que o valor de uma expressão permanece inalterado, mesmo quando se muda a ordem dos

cálculos. Para ilustrar este caso, Booth(1984) reutiliza a situação apresentada acima:

*“Neil, de quinze anos de idade:*

*O que você pode escrever como área deste retângulo ?:*



*Neil: p vezes... a mais m [ escreve  $p \times a + m$ ]*

*E: Muito bem, por que você disse  $p \times a + m$ ?*

*N: Porque estou multiplicando este lado [p] por aquele lado [a e m], e não dá para fazer aquele lado [a e m], e assim tenho de somar [a] com aquele [m], para multiplicar os dois lados juntos.*

*E: Muito bem, então que parte você faria primeiro?*

*N: ... Eu somaria aqueles dois [a e m] e então multiplicaria por p.*

*E: E foi isso que você escreveu?*

*N: Foi*

*E: Suponha que lhe diga que acho [ $p \times a + m$ ] significa p vezes a. E depois mais m.*

*N: Ah, não, não pode ser isso. Se você fizer p vezes a só obterá uma parte dela [área]. Você teria de fazer a mais m para obter toda a base, e então multiplicar por p. Você tem de somar a com m primeiro.” (p.22)*

Incorreções na escrita de expressões algébricas, que necessitam de parênteses (por exemplo,  $p \times a + m$  em vez de  $p \times (a + m)$ ), podem acarretar outros erros quando a expressão é simplificada (por exemplo,  $p \times a + m$  poderá então ser reescrita, erradamente nesse contexto, como  $pa + m$ ). Esse erro é fruto de desconhecimento das regras de formação de expressões algébricas que provavelmente remetem a erros análogos na representação aritmética.

Um exemplo nessa direção e que constamos em nossa pesquisa, é o caso do erro apresentado por Na: “ $2 \times 4 = 8 + 5 = 13$ ”.

A aluna não respeitou a propriedade transitiva da igualdade. Porém, a interlocução abaixo evidencia que a aluna compreendeu seu erro:

Professor: *“Na, escreva duas vezes quatro igual a...agora, anote o resultado. Perfeito, oito. Agora, escreva oito mais cinco igual a...isso, treze. Então você concorda que duas vezes quatro é diferente de oito mais cinco?”*

Na: *“Sim.”*

Professor, apontando para a primeira expressão: *“Então, por que você escreveu que são iguais?”*

Na: *“Ihh...professor, desculpe. É que eu fiz primeiro a multiplicação, coloquei o resultado e somei cinco.”*

Os exemplos apresentados apontam para a importância de proceder a uma articulação da linguagem natural com a algébrica, e de procurar diagnosticar se essas dificuldades decorrem da incompreensão do significado de operações, das propriedades, de relações ou de dificuldade de aplicação de regras sintáticas.

## Capítulo V – Considerações Finais

Nossa pesquisa insere-se em uma perspectiva na qual a generalização de situações problemas envolvendo procedimentos de resolução familiares aos alunos, ocupa um papel central. A construção de igualdades numéricas generalizáveis assume um papel importante na mediação entre as situações problemas e a interpretação dessas situações na linguagem algébrica formal, conforme destacamos no Capítulo II. Essas generalizações visavam expressar relações estabelecidas no processo de resolução de situações problemas de proporcionalidade de modo a integrá-las. Em particular, buscamos ampliar o significado o sinal de “igual”, utilizado em aritmética, para indicar respostas obtidas na resolução de problemas e em algoritmos, e não para comparar expressões.

Optamos por desenvolver esta investigação em escola pública, sem interferir nas condições reais do cotidiano da escola, e enfrentando as possíveis dificuldades decorrentes desta escolha. O *lócus* de investigação foi determinado pela compatibilidade dos horários do pesquisador e da grade horária da escola.

Durante as observações efetuadas antes do desenvolvimento da nossa pesquisa, notamos que a classe apresentava uma postura dispersa. Porém, ao iniciarmos o desenvolvimento, constatamos que a receptividade dos alunos contrapunha-se às observações anteriores. As evidências sugerem que essa reação ocorreu devido à familiaridade e interesse dos alunos pelo contexto em que as atividades se inseriram e pela forma lúdica e prazerosa com que foram desenvolvidas. Outro fator, que contribuiu para o bom desempenho da classe, foi o uso de calculadoras, pelo fato de facilitar as operações necessárias e, também, pelo prazer demonstrado pelos alunos ao ganhá-las.

Em algumas atividades, os alunos trabalharam em grupos de quatro participantes. Como professor pesquisador, minha intervenção deu-se sempre que necessário, indagando e pesquisando suas manifestações. Para captá-las, procurei envolvê-los em um processo de busca de soluções, cada um considerando o problema como seu (Brousseau, 1986).

Sob essa ótica, podemos afirmar que, além de terem constituído um desafio para os alunos, as atividades propostas caracterizavam-se como problemas abertos, em que novos conhecimentos foram oferecidos, atendendo à necessidade de uma descrição e comunicação de informações.

As conclusões desta pesquisa foram sendo explicitadas à medida que procedemos a análise dos fenômenos didáticos ocorridos no desenvolvimento das atividades (capítulo anterior).

Em uma breve síntese, pontuamos as constatações fundamentais:

Os alunos não apresentaram dificuldades em comparar expressões aritméticas com o emprego do sinal de igualdade nas atividades voltadas para esse objetivo.

Descrevendo, quantitativamente, regularidades presentes na resolução das situações propostas, constatamos:

- Construíram livremente expressões equivalentes e, pela familiaridade das situações e pelas considerações sobre o envolvimento dos alunos na tarefa, presume-se que *“expressaram idéias anteriormente apropriadas por eles”* Arcavi (1987).
- Perceberam, nas situações que lhe foram apresentadas, a existência de uma lei quantitativa de correspondência, identificando e determinando os valores das variáveis dependentes e independentes.
- Construíram e interpretaram expressões algébricas simples das formas  $ax$ ,  $ax + b$ , com  $x$  assumindo valores decimais em  $\mathbb{R}_+$ .

Pelo exposto, podemos afirmar que as recomendações da exploração nas atividades de introdução da linguagem algébrica, por meio de atividades enfocando o aspecto dinâmico da independência e dependência envolvidas, revelaram-se eficientes para a consecução dos objetivos propostos.

O aspecto dinâmico do conceito de variável foi apropriadamente enfatizado em situações contextualizadas, que envolviam variáveis independentes e dependentes na forma de correspondência de dois conjuntos.

As limitações de nossa pesquisa ocorreram principalmente pelo curto espaço de tempo para seu desenvolvimento, pois não podíamos atrapalhar o cronograma escolar. Um tempo mais prolongado teria permitido o ensino simultâneo da expressão algébrica das variáveis dependentes e independentes e da discussão do papel das constantes, além de sua notação. Pensamos, entretanto, que abrimos um caminho não só para essa discussão, como também para a construção e interpretação de expressões algébricas envolvendo regras sintáticas de maior complexidade.

A segunda limitação relacionou-se à impossibilidade do uso de computadores.

Como continuidade da proposta, seria oportuno uma reavaliação dos procedimentos de ensino desta investigação, trazendo novas contribuições que, ao mesmo tempo, se constituíssem em um fator de mobilização do corpo docente e técnico da escola, para a inclusão, no planejamento de ensino, de propostas centradas na resolução de problemas.

## VI - Bibliografia:

ARCAVI, A, - **On the Meaning of Variable (1987)** – texto extraído do site:<http://mathforum.org> visitado pela última vez em 05/06/2006.

BARRETO, I.M.A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional**. São Paulo: PUC-SP, 2001. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Anna Franchi.

BOOTH, L. R., **Álgebra: Children's Strategies and Errors**. Windsor, Inglaterra: NFER-Nelson, 1984.

\_\_\_\_\_. **Child Methods in Secondary Mathematics**. *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981): 29-40.

BOOTH, L., R. COOK. J, **Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra**. In COXFORD, A.F., SHULTE A.P.(orgs.), *As Idéias da Álgebra* São Paulo: Atual Editora, 1995.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais – 1º e 2º ciclos**. Brasília, MEC, 1997.

BROUSSEAU, G., **Fondaments et Méthodes de la Didactique**. In *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 1986, pp. 33-115.

\_\_\_\_\_. **Os Diferentes Papéis do Professor**. In PARRA C.,SAIZ I. (orgs.) *Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, cap. 04, pp. 48-72, 1996.

BUNGE, M., **Analogia, Simulação, Representação**. In *Teoria e Realidade*, São Paulo: Editora Perspectiva, pp. 185-203, 1974

CARAÇA, B.J., **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva Publicações, 2000.

CHIZZOTTI, A., **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. SP: Cortez Editora, 1991.

COLLINS, K.F., **A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: A Piagetian Viewpoint**. Melbourne: Australian Council for Educational Research, 1975.

COURANT R., ROBBINS H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

FIorentini, D., Miorin, M.A., Miguel, A., **Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar**. Campinas: Revista Pro-Posições - Volume 4 Nº1 [10] – março de 1993, pp. 78-91.

FRANCHI, Anna. **Compreensão das Situações Multiplicativas Elementares**. São Paulo: PUC-SP, 1995. Tese de Doutorado. Orientador: Dr. Joel Martins.

FREITAS, A.A., **Equação do 1º Grau: Métodos de Resolução e Análise de Erros no Ensino Médio** - São Paulo: PUC-SP, 2002. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Anna Franchi.

KIERAN, C., **Children's Operational Thinking within the Context of Bracketing and the Order of Operations**. In Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, editado por D. Tall, pp. 128-132. Warnick, Inglaterra: University of Warnick, 1979.

\_\_\_\_\_. **Concepts Associated with Equality Symbol**. Educational Studies in Mathematics, 1981.

\_\_\_\_\_. **The early learning of algebra: A structural perspective**. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Hillsdale, NJ.: Ed. NCTM, 1989

\_\_\_\_\_. **The learning and teaching of School Algebra** - In Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning – NY; U.S.A Ed. NCTM – MacMillan Publishing Co. 1992.

\_\_\_\_\_. **Múltiple Views of Multiplicative**. In G. Harel e J. Confrey. *The development of multiplicative in the learning of mathematics*, pp. 387-397, 1994.

KÜCHEMANN, D. **Algebra**. Children's understanding of mathematics: 11-16. London, England.: Ed. John Murray, 1981.

LEMOYNE G., CONNE F., BRUN J. **Du Traitement des Formes a Celui des Contenus d'Ecritures Litterales: Une Perspective d'Enseignement Introductif de L'Algebre**. In *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Vol 13, n° 3, pp. 333-384, 1993.

LINS R.C., GIMENEZ J. – **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Editora Papirus, 1997.

LÜDKE M., ANDRÉ M.E.D. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo, SP: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986.

MACGREGOR, M. **Aspectos Curriculares em las Matérias Aritméticas y Álgebra**. UNO – *Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, n° 09, pp.65-70, Barcelona, 1996.

NAKAMURA, O.Y.A. **Generalização de padrões geométricos: caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental** São Paulo: PUC-SP, 2003. Dissertação de Mestrado. Orientador: Anna Franchi.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *An agenda for Action*. Reston: NCTM, 1980.

\_\_\_\_\_. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM, 1989.

\_\_\_\_\_. *Setting a Research Agenda*. Reston: NCTM, 1989.

\_\_\_\_\_. *Professional Standards*. Reston: NCTM, 1991.

\_\_\_\_\_. *Assesment Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM, 1995.

\_\_\_\_\_. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM, 2000.

NOTARI, A.M., **Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas: Um Diagnóstico Comparativo dos Procedimentos** - São Paulo: PUC-SP, 2002. Dissertação de Mestrado. Orientadora: Anna Franchi.

ONUCHIC, L., R., **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In BICUDO, M.A.V. (org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, cap. 12, pp. 199-220, 1999.

ONUCHIC, L., R.; ALLEVATO, N.S.G., **Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In BICUDO, M.A.V., BORBA M.C.,(orgs .) *Educação Matemática – Pesquisa em Movimento*. São Paulo: Editora Cortez, pp. 213-231, 2004.

SFARD,A., **On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin**. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), pp. 1-36, 1991.

SCHOROEDER, T.L. & LESTER Jr, F.K.,**Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**. In TRAFTON, P.R. & SHULTE, A. P. (eds.) *New directions for Elementary School Mathematics* . Reston: NCTM, pp. 31-42, 1989.

SFARD, A.**The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives**. *Journal of Mathematical Behavior*, 14 NJ; U.S.A.: Ablex Publ. Co, 1995

USISKIN, Z., **Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis**. In COXFORD, A.F., SHULTE A.P.(orgs.), *As Idéias da Álgebra* São Paulo: Atual Editora, 1995.

VERGNAUD, V., **Multiplicative Structures**. In M. Behr and J. Hiebert – *Number concepts and operations in the grades* – pp. 141 – 160. Reston National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

VERGNAUD, V., **La théori des champs conceptuels**. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3), pp. 133-169, 1991.

VERGNAUD, V., **Multiplicative Conceptual Field What and Why?** In G. Harel e J. Confrey. *The development of multiplicative reasoning. In the learning of mathematics*, pp. 41-61, 1994.

## **ANEXO I**

### **Atividades Desenvolvidas**

**Atividade 01**

**Enunciado** Preencha a última coluna da tabela abaixo, calculando os respectivos sub-totais multiplicando a Quantidade comprada pelo Preço unitário.

Ordem de compra				
Número de Ordem	Produto	Quantidade	Preço unitário	Sub-total
01	Charlie Brown Jr.	5	R\$ 18,00	
02	Titãs	6	R\$ 13,00	
03	Paralamas do Sucesso	4	R\$ 14,00	
04	Kelly Key	8	R\$ 7,00	
05	Ivete Sangalo	6	R\$ 15,00	
06	O Rappa	2	R\$ 18,00	
07	Luciano Huck	3	R\$ 18,00	
08	Detonautas	1	R\$ 13,00	
09	Bon Jovi	6	R\$ 9,00	
10	Simple Plan	7	R\$ 17,00	
11	Foo Figthers	10	R\$ 7,80	
12	Marjorie Stiano	2	R\$ 6,50	
13	Sandy e Júnior	10	R\$ 3,60	

Agora, vamos comparar as expressões abaixo, utilizando os dados da tabela que você preencheu. Para realizar essas comparações, preencha o espaço indicado com os símbolos: = (igual), < (menor que) e > (maior que)

- $5 \times R\$ 18,00$  \_\_\_\_  $6 \times R\$ 15,00$
- $10 \times R\$ 7,80$  \_\_\_\_  $1 \times R\$ 13,00$
- $4 \times R\$ 14,00$  \_\_\_\_  $8 \times R\$ 7,00$
- $6 \times R\$ 13,00$  \_\_\_\_  $10 \times R\$ 7,80$
- $6 \times R\$ 9,00$  \_\_\_\_  $6 \times R\$ 13,00$
- $2 \times R\$ 18,00$  \_\_\_\_  $3 \times R\$ 18,00$
- $2 \times R\$ 18,00 + 3 \times R\$ 18,00$  \_\_\_\_  $5 \times R\$ 18,00$
- $10 \times R\$ 3,60 + 2 \times R\$ 6,50$  \_\_\_\_  $6 \times R\$ 15,00$
- $7 \times R\$ 17,00 + 1 \times R\$ 13,00$  \_\_\_\_  $10 \times R\$ 7,80$
- $2 \times R\$ 18,00 + 3 \times R\$ 18,00$  \_\_\_\_  $5 \times R\$ 18,00$

**Atividade 02:** Loteria de Expressões Aritméticas

**Enunciado:** Retira-se de um envelope os resultados das expressões e, em seguida, anote-os na lousa. Os resultados retirados não seguem a ordem das expressões, ou seja, são retirados sem uma ordem definida. Portanto, conforme os resultados são sorteados, procure identificar qual a expressão que dá esse resultado. Em seguida, preencha as colunas (1) ou (2) ou (3) com um X, baseando-se nos resultados obtidos.

(1)	Expressão A	(2)	Expressão B	(3)
	$(2 \times 10) / 5$		$2 \times (10 / 5)$	
	$(21 - 12) + 10$		$21 - (12 + 10)$	
	$(21 - 2) + 4$		$21 - (2 + 4)$	
	$(30 - 5) \times 2$		$30 - (5 \times 2)$	
	$(60 / 10) \times 2$		$30 - (5 \times 2)$	
	$(21 + 2) + 4$		$21 + (2 + 4)$	

Agora, reescreva cada uma das linhas da tabela utilizando os símbolos < (menor que), > (maior que) ou = (igual).

**Atividade 03:**

**Atividade 04:****Enunciado:**

Produto	Preço unitário
O Rappa	R\$ 18,00
Ivete Sangalo	R\$ 15,00
Titãs	R\$ 13,00
Simple Plan	R\$ 25,00
Charlie Brown Jr.	R\$ 18,00

Você vai a uma loja comprar dois CDs. Os preços de cada Cd estão anotados na tabela acima. Para tanto, você deve gastar R\$ 126,00. Quantos e quais Cds você pode comprar com esse dinheiro? Depois de efetuar os cálculos, anote as possibilidades de compra que você descobriu.

**Atividade 05****Enunciado:**

Tabela de Preços de Cds	
Cantor(a)	Preço Unitário
Ivete Sangalo	R\$ 8,00
Kelly Key	R\$ 15,00
Sandy e Júnior	R\$ 5,00
Marjorie Estiano	R\$ 8,00

Imagine que é seu aniversário e que você ganhou de presente de todos os seus familiares R\$ 178,00. Encontre dois modos de gastar essa quantia comprando quaisquer Cds da tabela acima. Para ajudar-se a não ultrapassar, use a calculadora e pense em várias possibilidades de compras até encontrar duas que satisfaçam esta condição.

**Atividade 06**

**Enunciado:** Preencha a coluna Quantidade e Total conforme é pedido:

Quantidade	Produto	Total
1	Cd do Titãs	R\$ 12,00
	Cds do Titãs	
	Cds do Titãs	
	Cds do Titãs	
	Cds do Titãs	

1) Se você comprar 2 cds dos Titãs, qual será o total da sua compra? \_\_\_\_ .

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_ .

2) Multiplique por 3. Qual será o total da sua compra?

---

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_.

3) Multiplique por 4. Qual será o total da sua compra?

---

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_.

4) Multiplique por 8. Qual será o total da sua compra?

---

Portanto, multiplicando-se o número de objetos por \_\_\_\_ o preço total fica multiplicado por \_\_\_\_.

**Atividade 07**

**Enunciado:** Na tabela abaixo, na coluna da esquerda, temos os números de *Cds* comprados por algumas mães e, na coluna da direita, os totais de cada compra. Porém, não sabemos qual o preço unitário desses *Cds*. Com base nessas informações da tabela, encontre o valor de  $x$  utilizando o menor número possível de operações. Use a calculadora para ajudá-lo.

Quantidade de CDs comprados	Total da Compra
02	R\$ 18,00
04	R\$ 36,00
X	R\$ 126,00

**Atividade 08**

Sentenças:

*“O dobro de um número mais cinco.”*

*“O triplo de um número menos dois”*

*“A metade de um número mais dois.”*

**Atividade 09:** “Jogo do Adivinha”**Enunciado:** Execute os seguintes “comandos”:

- Pense em número natural qualquer.
- Ache seu dobro.
- Adicione 3 ao resultado.
- Triplique o que você obteve.
- Subtraia nove do resultado.
- Divida tudo por 6.
- Pronto: eis o número que você pensou.

**Atividade 10: “Bingo de expressões algébricas”**

O dobro de $x$	3 vezes $x$	$2x + 2$	$2x$
$X + 6$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 4$

O dobro de $x$	3 vezes $x$	$2x + 2$	$2x$
$X + 6$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x - 2$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 4$

O dobro de $x$	3 vezes $x$	$2x + 2$	$2x$
$X + 6$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 4$

O dobro de $x$	3 vezes $x$	$2x + 28$	$2x$
$X + 61$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 20$

O dobro de $x$	3 vezes $x$	$2x + 2$	$2x$
$X + 6$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 4$

O dobro de $x$	7 vezes $x$	$2x + 10$	$2x$
$X + 21$	O triplo de $x$	$X + 9$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + 1$	$4x - 4$

O dobro de $x$	10 vezes $x$	$2x + 32$	$2x$
$X + 51$	O triplo de $x$	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x - 2$

O dobro de x	3 vezes x	$2x + 2$	$2x$
$X + 6$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 4$

O dobro de x	10 vezes x	$2x + 32$	$2x$
$X + 51$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$6x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x - 2$

O dobro de x	8 vezes x	$2x + 11$	$2x$
$X + 71$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 5$

O dobro de x	8 vezes x	$2x + 11$	$2x$
$X + 31$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x - 16$

O dobro de x	8 vezes x	$2x + 28$	$2x$
$X + 61$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x + 20$

O dobro de x	3 vezes x	$2x + 31$	$2x$
$X + 71$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x - 16$

O dobro de x	4 vezes x	$2x + 2$	$2x$
$X + 1$	O triplo de x	$X + 3$	$2x + x$
$3x$	$3x - 1$	$x + x$	$4x - 4$