

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC-SP

**FLÁVIO CABRAL DE SOUZA**

**NÚMEROS INTEIROS E SUAS OPERAÇÕES: UMA  
PROPOSTA DE ESTUDO PARA ALUNOS DO 6º ANO  
COM O AUXÍLIO DE TECNOLOGIA**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2015

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PUC-SP

**FLÁVIO CABRAL DE SOUZA**

**NÚMEROS INTEIROS E SUAS OPERAÇÕES: UMA  
PROPOSTA DE ESTUDO PARA ALUNOS DO 6º ANO  
COM O AUXÍLIO DE TECNOLOGIA**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação da **Prof. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar**.

SÃO PAULO  
2015

**BANCA EXAMINADORA**

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processo de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: \_\_\_\_\_ Local e data: \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus que me abençoou com saúde e força em todos os momentos.

À Professora Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, pela orientação, atenção, paciência, compreensão, cobrança e acima de tudo profissionalismo, fundamentais para a concretização desse trabalho.

Ao Professor Dr. André Lúcio Grande pela intervenção e sugestões que contribuíram para o enriquecimento dessa pesquisa.

A minha família pelo apoio, em especial a minha mãe que tanto se empenhou para que eu fizesse minha graduação e graças ao seu incentivo pude dar mais um “passo”.

A minha filha por ter compreendido minha ausência em decorrência desse compromisso.

Aos professores do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo pelos ensinamentos concedidos.

Ao governo do Estado de São Paulo pela bolsa concedida que proporcionou a continuidade dos estudos.

Agradeço a diretoria, professores e alunos da Escola Estadual Deputado Norberto Mayer Filho pela contribuição para a concretização dessa pesquisa.

SOUZA, Flávio Cabral de. **Números Inteiros e suas Operações: uma proposta de estudo para alunos do 6º Ano com o auxílio de tecnologia.** 2015, 125f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

### **RESUMO**

Este trabalho tem como objetivo verificar como os alunos do 6º ano do ensino fundamental, que não tiveram contato formal com os números inteiros e suas operações, mobilizam seus conhecimentos prévios para resolver situações que envolvam esse objeto matemático e se os mesmos poderiam se desenvolver de forma autônoma para a sua compreensão. Para atingir esse objetivo foi feita uma revisão da literatura a fim de verificar como os pesquisadores têm tratado os números inteiros, procurando identificar quais estratégias para a abordagem dos números inteiros e suas operações foram utilizadas. Na sequência de atividades construída para esse trabalho são apresentadas situações nas quais foram explorados recursos visuais, com o auxílio de tecnologia, situações-problema e questões objetivas. A sequência de atividades procurou enfatizar o objeto matemático a partir de situações concretas, possibilitando que o aluno abstraia e generalize o conhecimento construído. Durante o desenvolvimento das atividades foram identificadas, nos registros e nos diálogos dos alunos, situações que permitiram inferir as singularidades referentes à compreensão que os alunos podem obter sobre os números inteiros e suas operações. Assim, essa pesquisa permitiu identificar o alcance dos conhecimentos prévios dos alunos para compreender os números inteiros e suas operações, e também os obstáculos que os mesmos enfrentaram para o desenvolvimento desse conteúdo. Os resultados obtidos revelam informações que nos permitem repensar sobre como os números inteiros e suas operações podem ser abordados na prática docente.

**Palavras chave:** Números inteiros, Conhecimentos prévios e obstáculos, Tecnologia, applets.

SOUZA, Flávio Cabral de. **Números Inteiros e suas Operações: uma proposta de estudo para alunos do 6º ano com o uso de tecnologia**. 2015, 125f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

### **ABSTRACT**

The aim of this paper was to assess how students at sixth grade of elementary school in Brazil, who have never had any formal contact with integers numbers and operations, use their prior knowledge to solve situations involving this mathematical object and how they develop their knowledge autonomously. To achieve this goal, a review of the literature was made in order to check how researchers have treated the integers numbers and which strategies for the approach of integers numbers and their operations were used in the past. This review was crucial to develop activities that allowed the students to engage with problem solving and to bring out their prior knowledge. The series of activities developed for this project included visual resources with the aid of technology, problem situation and objective questions. During the development of the activities, it was possible to identify, through the records and conversations in the classroom, the singularities related to the understanding of integers numbers and their operations by the students. Therefore, this research has identified the scope of the students' prior knowledge in the understanding of integers numbers and their operations, and the obstacles they faced when addressing this content. The results of this project can help us to rethink how integers numbers and their operations can be addressed in the teaching practice.

**Keywords:** Integers Numbers, Prior Knowledge and obstacles, Technology, *applets*.

# Sumário

LISTA DE QUADROS .....	9
INTRODUÇÃO.....	11
CAPÍTULO I - PROBLEMÁTICA E JUSTIFICATIVA.....	15
CAPÍTULO II – REVISÃO DE LITERATURA.....	24
CAPÍTULO III – APORTES TEÓRICOS .....	30
CAPÍTULO IV – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	38
CAPÍTULO V – ANÁLISE DAS ATIVIDADES .....	44
ATIVIDADE 1. ETAPA I.....	44
ATIVIDADE 1 - ETAPAS DE II A IX.....	49
ATIVIDADE 2 - ETAPAS DE I A V.....	58
ATIVIDADE 2 – ETAPAS IV A VI.....	65
ETAPA VI - RETOMANDO AS ATIVIDADES APÓS A UTILIZAÇÃO DO <i>APPLET</i> .....	71
ATIVIDADE 3 - ETAPAS DE I A V.....	76
ETAPA VI - RETOMANDO AS ATIVIDADES APÓS A UTILIZAÇÃO DO <i>APPLET</i> .....	84
ATIVIDADE 4 - ETAPAS DE I A VI.....	85
ATIVIDADE 4 – ETAPAS III E IV .....	88
ATIVIDADE 4 – ETAPA V E VI.....	92
ATIVIDADE 5 - ETAPAS DE I A V.....	95
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	102
REFERÊNCIAS .....	106
APÊNDICES .....	108
APÊNDICE A - ATIVIDADES PROPOSTAS .....	110
APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE .....	125
APÊNDICE C - AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA .....	126
APÊNDICE D - PARECER COMITÊ DE ÉTICA.....	127

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Atividade 1 e etapa I – Dupla A .....	46
Quadro 2 - Atividade 1 e etapa I – Dupla B .....	48
Quadro 3 - Atividade 1 e etapas II, III e IV – Dupla A .....	50
Quadro 4 - Atividade 1 e etapas II, III e IV – Dupla B .....	52
Quadro 5 - Atividade 1 e etapas V, VI, VII e VIII – Dupla A.....	54
Quadro 6 - Atividade 1 e etapas V, VI, VII e VIII – Dupla B.....	55
Quadro 7 - Atividade 1 e etapa IX – Dupla A .....	57
Quadro 8 - Atividade 1 e etapa IX – Dupla B .....	57
Quadro 9 - Atividade 2 - Etapas I e II – Dupla A.....	59
Quadro 10 - Atividade 2 - Etapas I e II – Dupla B .....	61
Quadro 11- Atividade 2 - Etapa III – Dupla A .....	63
Quadro 12 - Atividade 2 - Etapa III – Dupla B .....	64
Quadro 13 - Atividade 2 - Etapa IV – Dupla A.....	65
Quadro 14- Atividade 2 - Etapa IV – Dupla B .....	67
Quadro 15- Atividade 2 - Etapa V – Dupla A .....	69
Quadro 16 - Atividade 2 - Etapa V – Dupla B .....	70
Quadro 17 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla A.....	72
Quadro 18 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla B .....	73
Quadro 19 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla A.....	74
Quadro 20 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla B .....	75
Quadro 21 - Atividade 3 - Etapas I e II – Dupla A.....	76
Quadro 22 - Atividade 3 - Etapas I e II – Dupla B .....	77
Quadro 23 - Atividade 3 - Etapa III – Dupla A .....	79
Quadro 24 - Atividade 3 - Etapa III – Dupla B .....	80
Quadro 25- Atividade 3 - Etapa IV – Dupla A.....	81
Quadro 26 - Atividade 3 - Etapa IV – Dupla B .....	83
Quadro 27 - Atividade 3 - Etapas I e II – Dupla B .....	84
Quadro 28- Atividade 3 - Etapas III e IV – Dupla B.....	85
Quadro 29 - Atividade 4 - Etapas I e II – Dupla A.....	86
Quadro 30 - Atividade 4 - Etapas I e II – Dupla B .....	87
Quadro 31- Atividade 4 - Etapas III e IV – Dupla A.....	89
Quadro 32 - Atividade 4 - Etapas III e IV – Dupla B.....	91
Quadro 33 - Atividade 4 - Etapas V e VI – Dupla A.....	92
Quadro 34- Atividade 4 - Etapas V e VI – Dupla B.....	94
Quadro 35 – Atividade 5 - Etapas I a III – Dupla A.....	96
Quadro 36 – Atividade 5 - Etapas I a III – Dupla B .....	97
Quadro 37– Atividade 5 - Etapa IV – Dupla A .....	98
Quadro 38 – Atividade 5 – Etapa IV– Dupla B.....	99
Quadro 39 – Atividade 5 - Etapa V – Dupla A.....	100
Quadro 40 – Atividade 5 - Etapa V – Dupla B.....	101



## INTRODUÇÃO

Minha trajetória docente iniciou-se aos dezoito anos de idade quando, ao ingressar em uma universidade privada, tive a oportunidade de lecionar para alunos da Rede Estadual de Ensino de São Paulo.

Diante das circunstâncias, graduando do primeiro semestre do curso de Licenciatura Plena em Matemática e professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, passei a dividir meu tempo entre as disciplinas de minha graduação e as aulas que deveria preparar para os meus alunos.

Durante dezenove anos de carreira lecionando na Rede Pública Estadual e quinze anos na rede particular, presenciei mudanças educacionais, políticas e político-educacionais. Fiz cursos de aperfeiçoamento, participei de inúmeras reuniões pedagógicas, planejei diversas aulas e vivenciei uma pluralidade de situações que contribuíram para minha formação profissional.

No decorrer desse período, atento às necessidades dos meus alunos, procurei me aperfeiçoar e utilizar estratégias que pudessem atenuar as dificuldades que permeiam o ensino e a aprendizagem da matemática. No entanto, situações pessoais que se tornaram prioridades em minha vida, como a paternidade, impossibilitou, por um período, que eu buscasse por mais conhecimentos que pudessem contribuir para um estudo aprofundado dos aspectos específicos relacionados à minha prática docente.

Ao iniciar o décimo oitavo ano da minha carreira docente, fui contemplado com o privilégio de iniciar o mestrado acadêmico na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e, logo no primeiro semestre, percebi o quanto tinha para aprender em relação à Educação Matemática.

O primeiro contato com as teorias que embasam e fundamentam a Educação Matemática explicitou a importância do rigor científico para o desenvolvimento de uma pesquisa e o estudo das mesmas teorias instigou a uma reflexão em torno de minha prática docente.

Por meio das disciplinas desenvolvidas durante o curso, aprendi a importância de utilizar e desenvolver estratégias que realmente promovam o ensino e a aprendizagem da matemática, criando condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento.

Logo que ingressei no curso, trouxe comigo algumas expectativas em relação ao projeto de pesquisa que gostaria de desenvolver. Após fazer um levantamento sobre os aspectos que estariam envolvidos nesse trabalho, optei por uma pesquisa sobre os números inteiros e suas operações.

Ao longo de minha trajetória, foram muitas as ocasiões em que pude perceber as dificuldades apresentadas por alunos e professores em relação ao ensino e aprendizagem desse objeto matemático.

Consciente da relevância desse tema para a compreensão de outros conteúdos matemáticos, decidi por investigar quais os conhecimentos prévios que os alunos trazem em relação aos números inteiros para analisar como os mesmos poderiam desenvolver o conteúdo de forma autônoma, verificando as possíveis dificuldades apresentadas em relação a compreensão e registro.

Fundamento essa pesquisa a partir da história, que revela o quanto a construção do conhecimento desse objeto matemático foi penosa e desafiadora para os matemáticos. Sendo assim, foi feito um estudo para verificar quais os principais obstáculos que tiveram que ser superados até uma possível aceitação, compreensão e utilização dos números inteiros.

Acredito que os aspectos históricos relacionados às dificuldades para lidar com os números inteiros possibilitem inferir, a partir da análise de atividades propostas aos alunos, quais os entraves que predominam, ainda hoje, para a construção do conhecimento sobre esse objeto matemático, oferecendo condições para que seja possível sugerir abordagens que venham a favorecer para uma melhor compreensão desse assunto.

Considerando a explícita influência que a tecnologia exerce atualmente no cotidiano dos jovens e principalmente sua importância para o desenvolvimento de novas abordagens para o ensino e aprendizagem, será utilizado um recurso tecnológico em algumas etapas das atividades propostas com o objetivo de conduzir o aluno a se envolver em uma investigação, a partir de resultados observados, para que ele possa fazer suas conjecturas e procurar validá-las.

Sendo assim, essa pesquisa está estruturada da seguinte forma:

- No capítulo um, são apresentadas a problemática, a justificativa e as questões de pesquisa que nortearão à realização deste trabalho.

- No capítulo dois, será feita uma revisão de literatura para analisar a relevância do objeto matemático e como ele vem sendo pesquisado.
- No capítulo três, é apresentado o aporte teórico norteador desse trabalho, o qual fundamenta a opção por uma pesquisa que tem como público-alvo os alunos do 6º ano do ensino fundamental e que ainda não tiveram contato formal com o objeto matemático.
- No capítulo quatro, estão a metodologia e os procedimentos realizados nessa trabalho.
- No capítulo cinco, apresentam o desenvolvimento da pesquisa e as análises das situações propostas.

As considerações finais fecham essa pesquisa, procurando trazer apontamentos que possam contribuir para a abordagem dos números inteiros e suas operações, além de indícios para futuras pesquisas.



## CAPÍTULO I - Problemática e Justificativa

Durante minha carreira docente, ministrando aulas de matemática para alunos da Rede Estadual de Ensino de São Paulo e em escolas da Rede Privada durante dezenove anos, estive atento às dificuldades dos alunos e, buscando estratégias que pudessem contribuir para o ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos, verifiquei que os números inteiros e suas operações apresentam-se como um desafio a ser superado por alunos e professores.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998, p. 97), *“o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades e a aprendizagem desse objeto matemático tem sido insatisfatória”*.

Uma das dificuldades, encontrada para a compreensão dos números inteiros e suas operações, reside na concretização dos números, em que as operações aparecem relacionadas a um modelo concreto. Para o aluno, a princípio, é inconcebível realizar a operação  $3-10$ , pois associado ao conhecimento que já foi construído, em que os números representam uma quantidade de algo definido de forma concreta, ele passa a entender tal situação como absurda, uma vez que “tirar” 10 unidades de 3 unidades é impossível de ser “concretizado”.

Contudo, percebemos que mesmo contradizendo suas concepções, muitos são os alunos que passam a operar com os números inteiros com uma habilidade considerável, pois acreditamos que tal habilidade reflete a aceitação de “regras impostas” que foram “ensinadas” para operar em situações específicas.

Pode-se entender que a compreensão referente ao objeto matemático não foi construída e tampouco compreendida, uma vez que nos depararmos com alunos, em séries posteriores, que apresentam muitas dúvidas em relação às operações com números inteiros. Inferimos que esse fato se deve à aplicação de uma regra, inquestionavelmente válida, porém, apenas apresentada pronta e acabada, para que o aluno a decore e aplique-a nas situações de aprendizagem propostas, sem se atentar à essência do seu significado e validade.

Conversando com colegas de trabalho durante reuniões pedagógicas, planejamentos e informalmente são comuns comentários do tipo: “esses alunos ainda não sabem a regra de sinais, eles confundem a regra que serve para a multiplicação e

divisão com a regra da adição e subtração”. O que também nos chama a atenção são os relatos dos professores ao observarem que a falta de compreensão desse objeto matemático, em alguns casos, gera incerteza até sobre os conhecimentos que os alunos já teriam construído, pois ao ter o contato formal com os números inteiros e suas operações, os mesmos passam a apresentar dúvidas em relação às operações que já desenvolviam com considerável destreza. Como uma subtração em que o minuendo é maior do que o subtraendo, ou seja, para uma situação do tipo  $10-7$  os alunos passam a dar como resposta  $-3$ . Vale ressaltar que também já presenciei episódios em que os alunos, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, cometem tais erros.

Desta forma Neto (2010) observa que é preciso que o professor utilize uma metodologia que tenha o objetivo de passar de um nível a outro por meio de uma didática que introduza os obstáculos e planeje formas de superá-los.

Ainda segundo o autor:

Nesse momento, o aluno toma consciência de algumas contradições e constrói regras mais estáveis. Na aprendizagem de números inteiros imagina-se a construção de vários esquemas de significados diferentes, de tal forma que surgem vários obstáculos e muitas dificuldades, que para serem superados é necessário se abstrair e generalizar de tal maneira que se passe dos aspectos periféricos para os aspectos centrais da ação. (NETO, 2010, p.26).

Salientamos ainda que a utilização de artifícios que relacionam as operações com números inteiros a modelos “comerciais”, em que os números positivos são identificados como créditos e os números negativos como débitos, procurando impor um “caráter concreto” ao objeto matemático, pode se tornar um entrave para a abordagem da multiplicação e da divisão, uma vez que tal modelo não “justifica” o fato da multiplicação de dois números negativos apresentar como resultado um número positivo.

Ao nos engajarmos em uma revisão de literatura com o intuito de verificar como os pesquisadores têm tratado esse objeto matemático, percebemos que a inquietação em relação ao seu ensino e aprendizagem levou ao desenvolvimento de pesquisas nas quais são propostas diversas estratégias para a abordagem dos números inteiros e suas operações, assim como análises de livros e levantamentos históricos para examinar os obstáculos inerentes a esse tema.

Lecionando para alunos do Ensino Médio Regular e Ensino Médio para Jovens e Adultos, percebemos explicitamente a falta de compreensão, mesmo daqueles que já tiveram contato formal com os números inteiros e suas operações. Um fato que também nos preocupa é que, diante de tantas dúvidas em relação às operações em que a compreensão dos números inteiros é fundamental, os alunos limitam-se apenas a retomar a memorização da regra de sinais sem questionar seu sentido ou sua validade.

Acreditamos que quando o aluno deixa de questionar, conjecturar, argumentar e refletir, limitando-se apenas a acatar o que é “ensinado”, como uma “imposição”, ele não só deixa de construir o conhecimento matemático como também deixa de exercer sua cidadania.

Preocupados com as observações e conclusões relatadas nas pesquisas que constam em nossa revisão de literatura, na qual são salientadas as dificuldades inerentes à compreensão dos números inteiros e suas operações, e também com o fato de que mesmo aqueles que já estudaram formalmente esse objeto matemático apresentam dificuldades para a mobilização e aplicação do mesmo em situações diversas, decidimos desenvolver uma pesquisa para procurar responder as seguintes questões:

- **É possível que alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II construam, de forma autônoma, alguma compreensão dos números inteiros e suas operações por meio de atividades propostas?**
- **Em que medida a utilização da tecnologia pode auxiliar para o entendimento dos números inteiros e suas operações por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II?**

Desse modo, temos o objetivo de verificar se alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental II, que não conhecem formalmente os números inteiros e suas operações, são capazes de uma compreensão sobre esse conteúdo por meio de atividades propostas com o auxílio da tecnologia.

Para atingir esse objetivo e responder nossas questões de pesquisa, elaboramos uma sequência de atividades que será aplicada para esses alunos, esperando que os mesmos possam desenvolvê-las mobilizando seus conhecimentos prévios. Vale ressaltar que a tecnologia, em nossa proposta, será utilizada para que o aluno possa verificar os

resultados de algumas operações, com o intuito de levá-lo a fazer novas conjecturas sobre o objeto matemático, procurando validar ou refutar suas conclusões.

É comum para os alunos ouvir reportagens sobre previsão do tempo com medidas de temperatura abaixo ou acima de zero, saldo de gols positivos ou negativos e até mesmo saldos bancários, referindo-se a débitos e créditos. No entanto, parece-nos que pouca atenção é dada para a representação desses valores que é feita por meio de números inteiros. Percebemos que, ao efetuar uma operação do tipo  $3-9$ , são recorrentes os casos em que os alunos deixam de utilizar o sinal de menos para representar corretamente o resultado, mesmo após terem “aprendido” as “regras de sinais”, que nesse caso são “recitadas” com “subtrair e conservar o sinal do maior número em módulo”. Verificamos também que para a operação  $-9+3$ , a resposta apresentada por alguns alunos é  $6$ , voltando a ignorar a relevância do sinal para registrar o resultado, mesmo tendo efetuado a operação corretamente.

Acreditamos que o conhecimento prévio que os alunos apresentam em relação aos números inteiros deva ser explorado de forma cuidadosa, valorizando o senso comum e possibilitando que o mesmo seja questionado internamente quando não for suficiente para responder a todas as questões.

Estratégias que contemplam a mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos mostram-se eficientes na abordagem de objetos matemáticos, pois dessa forma inicia-se uma investigação sobre o problema proposto, protagonizando a ação.

Sobre os conhecimentos prévios dos alunos, relacionado aos números inteiros, Borba e Nunes (2004) dizem:

Os alunos, quando iniciam a aprendizagem formal dos números inteiros relativos, já possuem conhecimentos em algumas dimensões desse conceito. Crianças bem antes da introdução formal ao conceito de números relativos já entendem o significado de inteiro como medida e já são capazes de resolver problemas diretos utilizando-se representações explícitas para números positivos e negativos e de corretamente operar nessas representações bem antes de aprenderem a fazer uso das representações formalizadas. (BORBA; NUNES, p.97-98).

Borba e Nunes (2004) reforçam explicitamente a importância que devemos dar aos conhecimentos prévios dos alunos, ao afirmarem que:

O ensino formal deve iniciar a partir dos conhecimentos já possuídos. A identificação de dificuldades alerta sobre a necessidade de se estar

atento, no ensino formal, a aspectos dentro de cada dimensão de um conceito. Saber o que os alunos já conhecem sobre o conceito de número inteiro relativo e quais significados, propriedades e representações simbólicas precisam ser melhor trabalhados, possibilita uma exploração mais ampla do conceito em sala de aula. (BORBA; NUNES, p.3).

Em relação a uma exploração ampla do conceito, acreditamos que atividades “prontas e acabadas” não proporcionam ao aluno a possibilidade de fazer suas próprias conjecturas, investigando os aspectos implícitos do novo objeto matemático para validá-las ou não. Sendo assim, é importante utilizar recursos diversos que possibilitem ao aluno protagonizar a construção do conhecimento.

Freire (1996) salienta que:

Todo o ensino de conteúdos demanda de quem se acha na posição de aprendiz que, a partir de certo momento, vá assumindo a autoria também do conhecimento do objeto. O professor autoritário, que recusa escutar os alunos, se fecha a esta aventura criadora. Nega a si mesmo a participação neste momento de boniteza singular: o da afirmação do educando como sujeito de conhecimento. É por isso que o ensino dos conteúdos, criticamente realizado, envolve a abertura total do professor ou da professora, à tentativa legítima do educando para tomar em suas mãos a responsabilidade de sujeito que conhece. Mais ainda, envolve a iniciativa do professor que deve estimular aquela tentativa no educando, ajudando-o para que a efetive. (FREIRE, 1996, p.47).

Uma proposta em que o aluno possa fazer conjecturas sobre o que é desenvolvido e observado faz dele um sujeito que conhece e, responsável por tal conhecimento, busca meios e argumentos para validá-los.

Ainda segundo Freire (1996), devemos:

[...] saber que ensinar não é transmitir o conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições; um ser crítico e inquiridor, em face da tarefa que tenho – a que ensinar e não a de transferir conhecimento. (FREIRE, 1996, p.21).

Com a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, PCN Matemática, 1997), a educação básica apresenta como um dos objetivos norteadores do Ensino Fundamental – Ciclo II que o educando seja capaz de:

[...] utilizar as diferentes linguagens - verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal - como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação; saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos; questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 1997, p.6).

Desta forma, a disciplina Matemática vem ao encontro do educando de forma a favorecer a construção da cidadania, valendo-se dos conhecimentos científico-tecnológicos dos quais os cidadãos, na era tecnológica, vêm se apropriando.

Em relação ao ensino da Matemática, os PCN (Brasil, 1997, p.19) colocam em evidência dois aspectos que devem ser levados em consideração, o primeiro diz respeito às observações do mundo real com representações (esquemas, gráficos, tabelas, figuras) e o segundo consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos.

Sendo assim, torna-se claro que para o exercício efetivo da cidadania é necessário que saibamos calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, dentre outros.

No que tange as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasil, (2006):

[...] é preciso colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.70).

A utilização de estratégias que privilegiam a memorização de regras costuma ser ineficiente para desenvolver a compreensão dos números inteiros e suas operações. Esse tipo de abordagem não trata o objeto matemático de modo que o aluno tenha a oportunidade de fazer uma reflexão de sua importância, aplicações e consequências. Acreditamos que é necessário se utilizar de estratégias que possibilitem ao educando a construção do conhecimento a partir do engajamento em investigações que ele julgue necessárias para resolver os problemas propostos.

É importante que a estratégia para a abordagem de um objeto matemático seja bem planejada, levando o aluno a sentir-se responsável pela construção de seu conhecimento. Ao professor cabe a tarefa de transitar pelas diversas tendências com o intuito de elaborar intervenções que possam colaborar para o ensino e para a aprendizagem dos objetos matemáticos.

Encontra-se explícito nas entrelinhas das Orientações Curriculares que é preciso proporcionar, aos educandos, uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, em todos os ciclos da educação. Dito isso, destacamos a necessidade de analisar qual a compreensão dos alunos em relação às situações que envolvem os números negativos e suas operações antes da formalização desse objeto matemático. Acreditamos que essa análise possa nos indicar aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem que devem ser explorados, procurando minimizar as dificuldades de compreensão que circundam esse objeto matemático.

Portanto, elaboramos uma sequência de atividades em que procuramos explorar recursos visuais, situações-problema e questões objetivas. Com o intuito de fazer emergir os conhecimentos prévios dos alunos, iniciamos nossa sequência de atividades procurando enfatizar a visualização do objeto matemático a partir de uma situação concreta. Posteriormente, apresentamos problemas que devem ser investigados, possibilitando ao aluno abstrair e generalizar o conhecimento construído.

No próximo capítulo apresentaremos uma revisão da literatura sobre o tema aqui pesquisado, que contribuiu para o conhecimento de como os números inteiros e suas operações se apresentam. Tal conhecimento favoreceu a construção das atividades propostas e as respectivas análises.





## CAPÍTULO II – Revisão de literatura

Quando pesquisamos sobre o ensino e a aprendizagem dos números inteiros e suas operações, percebemos que as dificuldades que professores e alunos enfrentam em relação a esse objeto matemático motivaram o desenvolvimento de pesquisas que procuram identificar possíveis obstáculos e propor intervenções com atividades que utilizam materiais concretos e tecnologia, com o intuito de possibilitar uma interação do aluno levando-o à compreensão do assunto.

Em sua pesquisa, Amorim (2012) faz um estudo documental com o objetivo de identificar e descrever o estado de conhecimento em relação aos números inteiros e, dessa forma, identifica tendências e convergências em relação aos eixos de análises que norteiam as pesquisas sobre esse objeto matemático.

Após fazer um panorama sobre as dissertações desenvolvidas entre 2001 e 2010, analisando doze pesquisas cujo objeto matemático é: números inteiros, Amorim (2012) evidencia a importância de abordagens que se utilizam de diversos recursos, entre eles o computador, para promover o ensino e a aprendizagem.

O trabalho com recursos diversificados, como computador, materiais manipulativos, jogos, entre outros, presentes nos trabalhos listados, parece-nos uma boa opção para tornar as aulas mais atrativas, dinâmicas e até mesmo proveitosas. Nessas situações, entendemos que o aluno deixa de ser mero aprendiz para fazer parte de um mundo onde ele também pode ensinar algo, a cada manipulação no computador, a cada jogada realizada, o que está em jogo é fruto de seu conhecimento ou de conhecimentos compartilhados com colegas de classe. Entendemos que situações assim proporcionam aos alunos novas experiências, novos modos de pensar e diferentes pontos de vista de um mesmo objeto. (AMORIM, 2012, p. 114).

Amorim (2012) afirma que:

Em relação aos alunos, entendemos que a aprendizagem deste conteúdo torna-se um desafio ainda maior. Inicialmente, o conteúdo é apresentado de forma concreta, por meio de situações do cotidiano. Já as operações de multiplicação e divisão são mostradas por meio de “regras de sinais”. O que antes era trabalhado pelas situações concretas, passa a ser tratado como “regras da Matemática”, cabendo ao aluno o desafio de compreendê-las e relacioná-las. (AMORIM, 2012, p.19).

Acreditamos que o fato do conteúdo ser apresentado de forma concreta para a abordagem da subtração e adição de números inteiros e de forma “imposta” para a multiplicação, não favorece a compreensão do objeto matemático em questão, pois o aluno abandona suas conjecturas e passa a operar de forma “mecânica”, sem fazer questionamento e aceitando seus “erros” com consequência de uma distração ou falta de memorização.

Na conclusão de sua pesquisa, Amorim (2012) relata que:

Ao propor situações com diferentes estratégias, os erros e acertos dos alunos ocorrem de modo dinâmico e efetivo, proporcionando a reflexão e a (re) criação de conceitos matemáticos que estão sendo estudados. Cabe ao professor sistematizar estes conhecimentos, visando à aprendizagem formal do conteúdo abordado e promover novas situações em que seja necessária a mobilização desse conhecimento, identificando, assim, se existiu ou não a ampliação ou aquisição do conteúdo abordado. (AMORIM, 2012, p.114).

A autora salienta a importância da utilização de estratégias diferenciadas, com o objetivo de proporcionar ao aluno a oportunidade de refletir sobre os próprios conhecimentos, percebendo a necessidade de ampliá-los para dar conta de novas situações. Contudo, é importante que, posteriormente, sejam propostas novas situações para verificar se realmente o objetivo foi alcançado.

Em nosso trabalho a tecnologia estará presente como uma estratégia que poderá possibilitar ao aluno conclusões ou refutações sobre os resultados de algumas atividades realizadas.

Em sua pesquisa, Coelho (2005) propõe a abordagem da multiplicação de números inteiros utilizando um material manipulável. Para isso, ela faz um levantamento em que analisa dissertações que utilizam modelos físicos, modelos de identificação de padrões e modelos com aplicação de princípios matemáticos para abordar a multiplicação entre números inteiros.

Ao analisar as propostas, cujos modelos são os de identificação de padrões e de aplicação de princípios matemáticos, a autora avalia que apesar das abordagens utilizadas não é verificada nenhuma conexão com o sentido operatório concreto. Assim, torna-se confusa a compreensão, para o aluno que até então foi submetido a um ensino fundamentado em situações concretas. No entanto, a abordagem que utiliza o modelo concreto é considerada mais rica por conter um suporte físico real.

Coelho (2005) afirma que:

A multiplicação de números negativos sempre intrigou professores e alunos avessos a pseudo-explicações do tipo “multiplicação de números com sinais diferentes dá menos” ou a “multiplicação de números com sinais iguais dá mais”. De fato, apesar da Regra dos Sinais para a multiplicação já ter sido demonstrada por vários matemáticos famosos, entre eles Euler, há ainda quem se sinta insatisfeito com o tacto de a mesma não ser facilmente deduzida de forma intuitiva, principalmente, no caso  $(-) \times (-) = (+)$ . (COELHO, 2005, p.1).

Coelho (2005) defende que, partindo do princípio de que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental formaram seus conceitos matemáticos baseados, em primeira instância, em situações concretas, uma abordagem dos números inteiros utilizando materiais manipuláveis possa favorecer a compreensão deste objeto matemático e, sendo assim, elabora atividades que devem ser desenvolvidas com a utilização do “Ábaco de Inteiros”.

Após a aplicação e análise das atividades desenvolvidas pelos alunos, Coelho (2005) avalia positivamente os resultados obtidos afirmando que:

Por tudo o que já referimos, não temos dúvidas em afirmar que esta abordagem tem a grande vantagem de contribuir para uma compreensão intuitiva do conceito de multiplicação também nos casos em que o multiplicador é negativo. Isto permite ao aluno integrar este conhecimento na estrutura interna que já possui associada ao conceito de multiplicação, evitando rupturas ou bloqueios que possam prejudicar futuramente. (COELHO, 2005, p. 119-120).

Vale ressaltar que nosso levantamento de literatura não tem por objetivo avaliar os resultados e conclusões obtidos nas pesquisas, no entanto, acreditamos que somente a diversificação de atividades possa efetivamente atender a heterogeneidade encontrada em uma sala de aula.

Com o intuito de escolher adequadamente abordagens para introduzir os números inteiros, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática, Brasil, (1998), devemos propor atividades que possibilitem que o aluno possa:

- Conferir significado às quantidades negativas;

- Reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir do zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- Reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero-origem);
- Perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível “adicionar 6 (seis) a um número e obter 1 (um) como resultado”, como também é possível “subtrair um número de 2 (dois) e obter 9 (nove)”;
- Interpretar sentenças do tipo  $x = -y$ , (o aluno costuma pensar que necessariamente  $x$  é positivo e  $y$  é negativo). (BRASIL, 1998, p.98).

Acreditamos que a exploração dos aspectos citados também possa contribuir para que os alunos infiram regras para a multiplicação e divisão de números inteiros. Situações que permitam que o aluno investigue o porquê de um resultado a partir da visualização do mesmo e possa levá-lo a fazer conjecturas e reflexões para validá-las.

Salientamos que em nossas atividades propomos situações que procuram contemplar os três primeiros itens dos cinco relacionados, são eles: conferir significados às quantidades negativas; reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir do zero; perceber a lógica dos números negativos que contraria a lógica dos números naturais.

Diversos são os recursos utilizados para o ensino e para a aprendizagem dos números inteiros e, entre eles, verificamos que a utilização da tecnologia é considerada como uma importante estratégia, proporcionando a interação e a motivação dos alunos por se tratar de uma linguagem que atualmente é indissociável de seu cotidiano.

Percebemos que a tecnologia é incorporada à educação, com o objetivo de possibilitar que novas estratégias sejam concebidas a partir de aspectos que os recursos tradicionais não permitem explorar de maneira abrangente. No entanto, não devemos esquecer a importância destes recursos que também possibilitam a adoção de estratégias eficientes.

Segundo Machado (2010):

As tecnologias devem ser utilizadas com responsabilidade nos ambientes educacionais. Além disso, o professor não deve se esquecer do livro didático, pois a interação entre ambos possibilitará uma nova organização escolar. A articulação entre o livro – tecnologia mais conhecida e consolidada – o computador, a calculadora, entre outras interfaces tecnológicas, sob a organização e planejamento do

professor, pode permitir uma estratégia ampla, voltada para especificidades de um grupo de pessoas que aprendem. Ou, em última análise, para uma pessoa que aprende. (MACHADO, 2010, p.38).

Portanto é necessário que o professor se utilize de diversos recursos com o objetivo de elaborar estratégias que contemplem diversos aspectos do objeto matemático estudado, procurando instigar o “espírito” investigativo do aluno de forma dinâmica e desafiadora, permitindo que ele protagonize a construção de seu conhecimento.

Ponte (1995) salienta que,

As novas tecnologias colocam desafios irrecusáveis à atividade educativa dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático e estender o alcance e a profundidade das aplicações desta ciência. Trata-se de poderosas ferramentas intelectuais, que permitem automatizar os processos de rotina e concentrar a nossa atenção no pensamento criativo. Mas estas tecnologias não ensinam por si só. Ao professor cabe um papel decisivo na organização das situações das aprendizagens. (PONTE, 1995, p.2).

O professor deve estar ciente de que o uso da tecnologia deve ser norteado por um objetivo didático definido, pois seu uso indiscriminado pode trazer como resultado interpretações errôneas dos objetos matemáticos e até mesmo gerar uma “dependência tecnológica”.

Segundo Brasil (1998),

Ao mesmo tempo em que é fundamental que a instituição integre a cultura tecnológica extraclasse dos alunos e professores ao seu cotidiano, é necessário desenvolver nos alunos habilidades para utilizarem os instrumentos de sua cultura. Hoje os meios de comunicação apresentam informação abundante e variada, de modo muito atrativo: os alunos entram em contato com diferentes assuntos – sobre religião, política, economia, cultura, esportes, sexo, drogas acontecimentos nacionais e internacionais -, abordados com graus de complexidade variados, expressando pontos de vista, valores e concepções diversos. Tanto é importante considerar esses conhecimentos adquiridos fora da escola, nas situações escolares, como é fundamental dar condições para que eles se relacionem com essa diversidade de informações. (BRASIL, 1998, p. 138-139).

Diversos são os aspectos relacionados ao uso da tecnologia na educação e a atratividade que esse universo tecnológico exerce sobre o aluno deve ser explorada de

forma positiva, propiciando a ele uma sensação de pertencimento e protagonismo na construção do conhecimento.

É importante salientar que é preciso propor atividades que utilizem a tecnologia como um recurso que estimule o aluno a investigar os objetos matemáticos de forma crítica, procurando validar suas conjecturas e abstrair o conhecimento construído para aplicá-lo em situações diversas.

A utilização da tecnologia em nossa pesquisa propõe a visualização imediata do resultado de algumas atividades. Dessa forma, acreditamos que ao verificar registros, com os respectivos sinais, os alunos possam se engajar em uma investigação conjecturando sobre o que é observado tirando suas conclusões e procurando validá-las para generalizar sua aplicação.

Machado e Bianchini (2013) salientam que,

A visualização é o processo pelo qual as representações mentais podem ser construídas, e o ato de gerá-las está relacionado com o sistema de representação, isto é, com artefatos externos concretos. Para que o indivíduo tenha sucesso na matemática, é desejável que ele possua uma rica representação mental dos conceitos. Uma representação é rica se ela tem vários aspectos articulados do conceito. Por outro lado, ela é pobre, se possui poucos elementos que permitem a flexibilidade na resolução de problemas. (MACHADO; BIANCHINI, 2013, p.92-93).

Portanto nossa proposta é possibilitar ao aluno o contato como o objeto matemático, números inteiros, de forma dinâmica, valorizando seus conhecimentos prévios e oferecendo-lhe condições de ser o protagonista na construção de um conhecimento a ser formalizado.

## CAPÍTULO III – Aportes teóricos

Para fundamentar nossa pesquisa, procurando responder nossas questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem dos números inteiros e suas operações, optamos por um estudo sobre alguns aspectos históricos desse objeto matemático, dando ênfase às dificuldades enfrentadas por matemáticos, procurando compreender os possíveis motivos inerentes a tais obstáculos para inferir relações com os entraves encontrados por professores e alunos nos dias atuais.

É sabido que os primeiros números a serem trabalhados pela humanidade davam a ideia de “soma”, “acréscimo”, os números inteiros positivos, cuja finalidade estava na contagem de coisas (objetos, animais, etc.), pertencendo ao conjunto dos números naturais.

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6\dots\}.$$

No entanto, ao contexto sócio-histórico não se agregava a concepção de negativos, cabendo, anos depois, a inserção dos inteiros negativos.

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\dots\}.$$

A concepção de negativo adentra no campo da ciência Matemática, sobretudo na resolução de equações algébricas, passando por inúmeras gerações e “contradições” até que sua eficácia fosse provada e aceita no meio científico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais Brasil (1998),

A análise da evolução histórica dos números negativos mostra que por muito tempo não houve necessidade de pensar em números negativos e por isso a concepção desses números representou para o homem um grande desafio. O uso pioneiro dos números negativos é atribuído aos chineses e aos hindus, que conceberam símbolos para as faltas e diferenças. A adoção do zero teve um papel-chave na construção dos inteiros, possibilitando operar com grandezas negativas, mudando o caráter de zero nada para zero origem, favorecendo, assim, a ideia de grandezas opostas ou simétricas. (BRASIL, 1998, p.97).

Os chineses, no início de nossa era, apresentavam enorme habilidade em efetuar cálculos, bem como resolviam equações, interpretando os números negativos como exímios “subtraendos”, mesmo sem a concepção do que hoje conhecemos como “regras de sinais”. “O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo;

enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta”. (Diofantos apud GLAESER, p. 47).

A história da utilização dos números inteiros pelos matemáticos sempre foi repleta de lacunas a serem preenchidas, isso porque a falta de compreensão ou a compreensão parcial desse objeto matemático, levava-os à rejeição dos mesmos considerando-os como números absurdos.

Observamos ao longo da história quebra de paradigmas que as primeiras civilizações tiveram que enfrentar para aceitar a concepção de número negativo, mesmo utilizando-a no cotidiano sócio-histórico e cultural. Acreditamos que algumas dessas dificuldades de compreensão e/ou aceitação estendem-se até os dias de hoje, visto a relutância que os alunos apresentam em relação à utilização dos números inteiros, sua representação e aplicabilidade.

Quando recorremos aos fatos históricos, relacionados a esse objeto matemático, percebemos que apesar dos entraves relacionados à aceitação dos números negativos, os matemáticos mostravam-se habilidosos para operá-los. As dúvidas apenas surgiam quando se referiam ao caráter isolado do número.

Segundo Piaget (1949),

Tais hesitações do grande d’Alembert são particularmente instrutivas quanto à natureza ativa e não estática do número negativo e do número inteiro em geral. De fato, está claro que, se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção, ou ainda menos, e percepções nulas não são suscetíveis de gradação. Espantoso é que essa contradição entre a interpretação sensualista do conhecimento e a realidade matemática, não tenha levado um espírito tão voltado para o concreto e pouco dado às considerações mecânicas como d’Alembert a entender que a natureza essencial do número não é nem estática nem perceptiva e, sim, muito dinâmica e ligada à própria ação, interiorizada em operações. (PIAGET, 1949, apud GRAESER, 1985, p.35-36).

Apesar do educando já conviver com os números negativos, para o imaginário infantil, do adolescente ou mesmo do adulto, o trabalho com as operações negativas ainda é um tanto abstrato. Se os próprios teóricos matemáticos encontraram dificuldades na aceitação de suas próprias “descobertas”, levando determinado período de tempo para as informações se acomodarem no intelecto humano, o mesmo se dá hoje com as crianças, jovens, adolescentes e adultos que adentram o universo escolar e também precisam de um período de tempo para a acomodação das informações.

Segundo Glaeser (1985, p. 32): “*Muitos professores não percebem que a aprendizagem das regras de sinais possa comportar dificuldades*”. Verificamos que o insucesso em relação a não aprendizagem dos números inteiros geralmente é atribuído ao aluno, e o professor, mesmo sem compreender as regras de sinais em sua essência, mas utilizando-as com relativa desenvoltura, trata os aspectos inerentes a esse objeto matemático de forma “elementar”, acreditando que sua aceitação e compreensão acontecerão de forma natural e com poucos questionamentos.

Há um relato segundo Glaeser (1985), sobre o jovem Henri Beyle (1783-1843), que ao solicitar explicações convincentes sobre as regras de sinais e não ser atendido pelos seus professores, desabafa,

Para mim, a hipocrisia era impossível em Matemática e, na minha simplicidade juvenil, eu pensava que isto era assim em todas as ciências nas quais ouvira dizer que ela se aplicava. Como fiquei, quando percebi que ninguém me podia explicar como é que menos por menos dá mais ( $- \times - = +$ )? [...] faziam pior do que não me explicar essa dificuldade; explicavam-na por razões evidentemente pouco claras para aqueles que as apresentavam. (GLAESER, 1985, p.44-45).

Fica explícito que a dificuldade para ensinar as operações com números inteiros vem de longa data, e as explicações que eram apresentadas para justificar o porquê o resultado de uma multiplicação entre dois números negativos resultava em um número positivo não eram elaboradas de forma didática, e os próprios professores não a compreendiam, apenas apresentando-as de forma dogmática.

Recordo que meu primeiro contato com as regras de sinais também aconteceu de forma dogmática. Na ocasião, só foi apresentada a forma como eu deveria operar diante de situações que envolviam números negativos, e exercícios de repetição fizeram com que eu desenvolvesse uma relativa habilidade em relação às operações com os números inteiros. No entanto, a falta de compreensão necessária para a interiorização desse conhecimento fez com que diversas vezes eu cometesse erros nas séries posteriores, em que esse objeto matemático era necessário.

Para evidenciarmos de forma contundente os empecilhos pertinentes à compreensão desse objeto matemático, em sua pesquisa, Glaeser (1985) indica seis obstáculos que os matemáticos “enfrentaram”, são eles:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas.
2. Dificuldades em dar um sentido a quantidades negativas isoladas.

3. Dificuldade em unificar a reta numérica.

Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.

4. Ambiguidade dos dois zeros.

5. Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido “concreto” atribuído aos seres numéricos.

6. Desejo de um modelo unificador. É a intenção de fazer funcionar um “bom” modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. [...] (GLAESER, 1985, p. 39-40).

Acreditamos que o obstáculo número cinco foi decisivo para o insucesso dos professores do jovem Henri Beyle ao tentarem explicar por qual razão “negativo multiplicado por negativo resulta em positivo”. A estagnação no estágio das operações concretas foi um obstáculo que agravou a dificuldade em compreender as operações com os números negativos, pois como seria possível “concretizar” algo menor que zero.

Vale destacar que a ambiguidade dos dois zeros se apresentou como um obstáculo de difícil superação, pois durante séculos, os matemáticos acreditaram no zero como absoluto e essa resistência resultou em dificuldades ainda maiores para aceitar e compreender o zero origem.

Apesar da desenvoltura de muitos matemáticos para manipular números negativos, empregados no Cálculo, e de frequentemente se depararem com respostas representadas pelos mesmos, suas compreensões e conclusões a respeito desse objeto matemático foram confusas durante longos anos. Passaram-se quinze décadas até que a aceitação, compreensão, utilização e representação dos números negativos e suas operações deixasse de apresentar dificuldades.

Segundo Costa (1981),

O número negativo é definitivamente aceito quando os geômetras compreendem que, em certas classes de grandezas como as distâncias sobre uma reta ilimitada ou as durações do tempo, há a considerar dois sentidos opostos. (COSTA, 1981, p. 222).

Costa (1981) salienta que,

Os sinais + e – qualificam assim os números positivos e negativos, e fazem parte integrante de sua notação. A rigor, esses sinais se deveriam distinguir dos sinais operatórios, escrevendo-se, por exemplo,  $+3 + +2 = +5$ ;  $-3 - +2 = -5$ . (COSTA, 1981, p. 234).

Para os matemáticos era inadmissível aceitar que um tema, relativamente simples, apresentasse tantos entraves quando lhes era solicitado uma demonstração de suas propriedades. Sendo assim, houve um momento na história em que evitar os números negativos era uma forma de “resolver” as questões relacionadas a eles.

Segundo Glaeser (1985, p. 51-52), Simon Stevin (1540 – 1620), que é um reputado matemático da época, chega a proclamar que não existem números absurdos, irracionais, irregulares, inexplicáveis ou surdos. No entanto, Stevin utiliza os denominados números absurdos como artifícios de cálculo e, ao se deparar com os mesmos, procura aperfeiçoar seu emprego ao dizer “acrescente -3 em vez de dizer diminua 3”. Ainda segundo Glaeser (1985, p. 53), “Estamos diante de uma primeira manifestação do sintoma de evitação. Trata-se de inventar um processo que, na prática, renuncie à utilização dos números negativos”.

Quando nos referimos às dificuldades encontradas para lidar com números inteiros, enfatizamos esse fato, pois parece-nos que atualmente pouca atenção é dada aos possíveis impedimentos inerentes ao ensino e a aprendizagem desse objeto matemático. No entanto, percebemos o quanto foi complexo o desenvolvimento de uma compreensão abrangente em relação ao mesmo e acreditamos que devemos analisar como os alunos utilizam seus possíveis conhecimentos prévios para resolver questões relacionadas aos números inteiros, com o objetivo de identificar quais dificuldades prevalecem.

Em relação aos obstáculos que tiveram que ser transpostos pelos matemáticos, destacamos o caráter epistemológico dos mesmos. Essa denominação é dada quando são verificadas dificuldades históricas relacionadas ao desenvolvimento do próprio conhecimento. Segundo Almouloud (2007),

Os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontraram, na história, para a compreensão e utilização desses conceitos. (ALMOULOU, 2007, p.139).

De acordo com Almouloud (2007),

As pesquisas em didática, história e epistemologia da matemática identificam um conjunto de fatores e de concepções que deram origem a obstáculos epistemológicos, sendo a maioria desses fatores e concepções, ainda hoje, observados em nossos alunos. ((ALMOULOU, 2007, p.139).

Ainda segundo Almouloud (2007, p.140): “A associação de zero com “nada” desloca esse obstáculo epistemológico para um aspecto psicológico e é a causa de numerosos erros”.

Em relação aos números inteiros, verificamos que os obstáculos de origem epistemológica se opuseram à compreensão desse objeto matemático, pois ao adentrarmos a história de seu desenvolvimento constatamos que as dificuldades inerentes a esse conteúdo resultaram em episódios contraditórios protagonizados por matemáticos, em que os mesmos resistiram em abandonar os conhecimentos que já haviam interiorizado e considerados como “absolutos”. Portanto, seria imprudente acreditarmos que esse tema não ofereça dificuldades consideráveis para sua compreensão e aplicação por nossos alunos.

Chamamos a atenção para o fato de que a “mera” representação dos números inteiros oferece uma dificuldade absolutamente considerável ao aluno, uma vez que todo o conhecimento que ele desenvolveu utiliza-se do sinal de menos apenas para denominar uma operação. É evidente que para a maioria dos alunos um contato informal com os números inteiros já foi efetivado, no entanto, devemos considerar que entre escutar uma informação que mencione um número negativo e interagir com o mesmo, compreendendo seu significado e aplicação, existe uma distância que não pode ser ignorada.

Sendo assim, acreditamos que para abordar os números inteiros e suas operações é de suma importância que se leve em consideração a história sobre a construção desse conhecimento, com o objetivo de compreender os aspectos relacionados ao seu desenvolvimento para elaborar intervenções que minimizem as dificuldades que o educador e o educando venham a apresentar no seu ensino e aprendizagem.





## CAPÍTULO IV – Procedimentos Metodológicos

O trabalho de pesquisa aconteceu por meio de análises qualitativas que relacionam a fundamentação teórica apresentada com os dados coletados pelos resultados das atividades desenvolvidas com os alunos.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 291), a abordagem qualitativa não constitui uma técnica, mas sim um método de investigação que procura descrever e analisar experiências complexas. Os autores enfatizam, ainda, que como parte do processo de coleta dos dados, devemos escutar corretamente, formular questões pertinentes e observar os detalhes.

De acordo com os mesmos autores, a investigação qualitativa possui cinco características, as quais explicitaremos aqui por fazer parte da metodologia empregada nessa pesquisa:

- (i) a fonte de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal. Os investigadores qualitativos devem assumir que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ele ocorre;
- (ii) a investigação qualitativa é descritiva. Os investigadores qualitativos não reduzem as narrativas e outros dados a símbolos numéricos, tentam analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando a forma em que foram registrados ou transcritos. Os autores destacam que:

A abordagem de investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permite estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo (BOGDAN; BICKLEN, 1994, p. 49).

- (iii) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
- (iv) os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva. As abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. Os investigadores planejam utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes, não presumem quais são antes de fazer a investigação;
- (v) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Há uma grande preocupação com o registro de como as pessoas interpretam os significados. Os investigadores qualitativos em educação continuamente questionam os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber aquilo

que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem. O processo de condução de uma investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre investigadores e sujeitos (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

Diante dos pressupostos apresentados, a coleta de dados realizada no desenvolvimento da pesquisa foi feita pelo investigador na escola de origem do público-alvo, que são alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Deputado Norberto Mayer Filho.

Considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) que preveem o estudo desse objeto matemático para os alunos do 7º ano do ensino fundamental, utilizando-se sempre de diferentes contextos e estratégias para investigar operações com números inteiros, esse público foi escolhido com o objetivo de investigar quais conhecimentos prévios os alunos do 6º ano possuem em relação aos números inteiros e em que medida tais conhecimentos poderiam proporcionar uma compreensão desse objeto matemático e suas operações, utilizando-se de situações que proporcionassem ao educando a possibilidade de protagonizar de forma “autônoma” o desenvolvimento desse conhecimento.

Para a escolha da escola foi considerada a infraestrutura da mesma, que conta com computadores que estão em plenas condições de serem utilizados pelos sujeitos da pesquisa, bem como o interesse dos gestores em oferecer aos alunos a oportunidade de participarem de atividades diferenciadas que contribuam para a formação dos mesmos.

O recurso tecnológico utilizado foi construído e adaptado, utilizando o *software* GeoGebra, pelo grupo de pesquisa TecMEM<sup>1</sup>. Seu acesso foi por meio de um navegador de internet, disponível nos computadores da escola, nos quais os arquivos foram salvos para serem utilizados pelos alunos em algumas atividades.

A escolha dos alunos foi auxiliada pelo professor de matemática dos sextos anos que indicou oito alunos, de uma mesma turma, convidados a participar em duplas das atividades aplicadas durante o horário em que estudam.

Para a realização das atividades houve a colaboração dos outros professores da turma, que gentilmente permitiram que eu retirasse os alunos em questão sem lhes causar nenhum prejuízo em relação aos conteúdos ministrados nesse período.

---

<sup>1</sup> <http://www.pucsp.br/tecmem/>

Para a aplicação da sequência de atividades foram realizados cinco encontros, sendo destinado a cada um deles um tempo de cem minutos, equivalente a duas aulas.

No primeiro encontro realizado no dia 26 de novembro de 2014, os alunos foram conduzidos até a sala de informática e, chegando lá, primeiramente foi comunicado que eles realizariam atividades e, em alguns momentos, seriam desenvolvidas com o auxílio de recursos (*applets*<sup>2</sup>), disponíveis nos computadores.

Esclarecemos que as duplas receberiam atividades impressas e que na primeira atividade não seria utilizado o computador e sim a partir da segunda atividade que ocorreria no próximo encontro.

Para a realização da primeira atividade, optei por entregar cada uma das quatro folhas que a compunha, separadamente. Dessa forma, procurei evitar que os alunos ao se depararem com uma quantidade de situações, que julgassem excessivas, desenvolvessem as questões sem o comprometimento necessário para que pudessemos obter registros significativos para uma análise posterior.

Após entregar a primeira folha para cada uma das quatro duplas e pedir que iniciassem seu desenvolvimento, percebi que uma das duplas não havia compreendido o que estava sendo solicitado. Nesse momento, realizei a leitura do enunciado e esclareci que cada um dos itens, do **a** ao **j**, trazia um número que deveria ser marcado no desenho que representava um termômetro. Dessa forma, foi possível que a dupla iniciasse a atividade.

Durante a realização dessa atividade, percebi que os alunos se engajaram e discutiram sobre a posição que cada um dos valores deveria ocupar no termômetro. Observei que duas duplas realizaram essa etapa rapidamente, porém, com o intuito de esclarecer que não deveria haver pressa para responder as questões, solicitei que aguardassem por mais um tempo que logo eu iria distribuir a próxima folha. Ao perceber que apenas uma dupla não havia concluído a primeira questão, distribuí a segunda folha para as outras duplas e acompanhei seu desenvolvimento, atento aos diálogos que surgiam em torno das questões, registrando-os para uma análise posterior.

Durante a realização dessa atividade, por diversas vezes os alunos solicitaram ajuda para responder as questões, porém, esclareci que o objetivo era verificar como

---

<sup>2</sup> *Applet*: Pequenos programas interativos feitos com recurso da linguagem Java e possíveis de serem abertos em um navegador para serem executados.

eles iriam resolver situações inéditas utilizando apenas os conhecimentos prévios que possuem.

Ressaltamos que uma das duplas se destacou na realização das atividades e mesmo com a orientação sobre não se apressar para responder as questões, finalizou a atividade rapidamente.

Ao final da primeira atividade, agradei a participação dos alunos, conversei sobre a importância daquilo que haviam realizado e que contava com a presença dos mesmos no próximo encontro para darmos continuidade.

O segundo encontro foi realizado no dia 02 de dezembro de 2014 e, nessa ocasião, contei com a presença de apenas três duplas, pois um dos membros de uma dupla havia faltado.

Ansiosos para começar a desenvolver as atividades em que a utilização do *applet* seria necessária, os alunos foram logo perguntando qual arquivo deveriam acessar. Esclareci que a atividade seria iniciada sem o auxílio da tecnologia e quando fosse necessário eu os comunicaria.

Distribui apenas a primeira das três folhas que compunham a atividade sobre “adição de números inteiros” e, de imediato, as três duplas iniciaram seu desenvolvimento.

Nessa parte, as perguntas dos alunos, solicitando ajuda para responder as questões, diminuíram, e foram poucas as vezes que as duplas solicitaram minha presença para esclarecer alguma dúvida. Salientei que ao serem solicitadas explicações sobre as questões, eu orientava a dupla a fazer uma nova leitura e procurar investigar qual seria a melhor forma de respondê-las.

Ao iniciar a atividade em que a utilização do *applet* era necessária, expliquei aos alunos como deveriam manipular os seletores para obter os números envolvidos nas operações que iriam desenvolver. Após uma única explicação todas as duplas compreenderam e passaram a utilizar o *applet* para auxiliar na resolução das questões.

Ressaltamos que ao se deparar com o último item da etapa V, uma das duplas questionou dizendo que não era possível utilizar o *applet*. Nesse momento, os orientei explicando que nessa questão eles teriam que responder por conta própria.

Após completar essa atividade, comuniquei aos alunos que receberiam novamente as etapas de **I** a **III** para repensarem as questões e responderem novamente. Uma das duplas se mostrou contrária à realização da atividade, porém, atendeu o meu pedido. O objetivo dessa retomada foi verificar se, após a utilização do *applet*, os alunos fariam novas conjecturas, chegando a outros resultados.

A atividade sobre “subtração de números inteiros” foi realizada no dia 03 de dezembro de 2014, e para a aplicação da mesma também optei por distribuir cada uma das três folhas separadamente. Nesse encontro, contei com a presença das três duplas e as etapas foram realizadas sem que os alunos solicitassem ajuda para responder as questões.

Ao finalizar essa atividade, voltei a solicitar que os alunos refizessem as etapas de **I** a **III** para que, posteriormente, fossem verificadas as possíveis conjecturas após a utilização do *applet*.

No dia 04 de dezembro de 2014, foi realizado o quarto encontro e, novamente, contei com a presença das três duplas. Para a realização da atividade sobre “multiplicação de números inteiros” todas as folhas foram entregues juntas, pois após a realização das atividades anteriores, optamos por permitir que os alunos utilizassem os *applets* no momento em que julgassem necessário. Observei que para as primeiras etapas, mesmo com o *applet* à disposição, os alunos interpretaram as questões e responderam sem utilizar o mesmo. No entanto, no momento em que foi solicitada uma adição de números inteiros os alunos perguntaram se poderiam abrir o *applet* para adição. Respondi que eles poderiam recorrer a qualquer um dos *applets* para auxiliar na resolução das questões.

No dia 05 de dezembro de 2015 realizamos o quinto encontro e, nesta ocasião, contei com a presença das três duplas. A atividade referente à “divisão de números inteiros” foi distribuída de uma só vez e os alunos realizaram as etapas sem fazer questionamentos.

No capítulo seguinte, apresentaremos as análises das atividades desenvolvidas por duas das duplas participantes.



## CAPÍTULO V – Análise das Atividades

Esse capítulo apresenta as atividades propostas e as respectivas análises.

As cinco atividades estão subdivididas em etapas e foram desenvolvidas em duplas, em cinco encontros, como apresentado no capítulo anterior.

**Atividade 1: Etapas de I a IX.** Reconhecendo situações que envolvem números inteiros.

**Atividade 2: Etapas de I a VI.** Adição de números inteiros.

Salientamos que após o desenvolvimento total da **atividade 2**, os alunos retomariam as etapas de **I a III** para que fosse possível analisar se a utilização do *applet* foi significativa, a ponto de favorecer a compreensão dos números inteiros que pode ser identificada por meio de novas conjecturas e novos registros.

**Atividade 3: Etapas de I a IV.** Subtração de números inteiros.

Salientamos que após o desenvolvimento total da **atividade 3**, os alunos também retomariam as etapas de **I a III** para que fosse possível analisar se a utilização do *applet* foi significativa, a ponto de favorecer a compreensão dos números inteiros que pode ser identificada por meio de novas conjecturas e novos registros.

**Atividade 4: Etapas de I a VI.** Multiplicação de números inteiros.

**Atividade 5: Etapas de I a V.** Divisão de números inteiros.

Ressaltamos que para o desenvolvimento das **atividades 4 e 5**, os alunos responderiam as questões propostas nas primeiras etapas e, após utilizarem os *applets*, retomariam de imediato o que haviam realizado, efetuando as alterações que julgassem necessárias.

A seguir, apresentaremos as atividades e respectivas análises.

**Atividade 1. Etapa I.** Reconhecendo situações que envolvem números inteiros.

Considerando o fato de que os alunos não possuem um conhecimento formal sobre os números inteiros, essa atividade propõe o resgate dos possíveis conhecimentos prévios como ponto de partida para identificar se os mesmos conseguem reconhecer, atribuir significado e representar esse objeto matemático.

Acreditamos que o engajamento do aluno na realização dessas atividades resultará em registros que poderão possibilitar uma análise que contribua para o dimensionamento do alcance dos seus conhecimentos prévios, bem como das dificuldades em compreender as singularidades e importância dos números inteiros e seu registro formal.

Nessa atividade, optamos por uma abordagem dos números inteiros utilizando medidas de temperatura. Em nossa revisão de literatura verificamos que os livros didáticos, assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais e as pesquisas analisadas, recorrem à medida de temperatura para introduzir esse objeto matemático, pois julgam que esse contexto é acessível aos alunos.

Preocupados com a possibilidade de que o aluno interprete as expressões, “abaixo de zero” e “acima de zero”, de forma a concluir que a utilização dos números negativos se limita apenas a “subir” ou “descer” em relação ao zero, apresentamos um termômetro na posição vertical e outro na posição horizontal. Vale lembrar que para enfatizar a importância da presença do sinal na representação dos números negativos, utilizamos redundantemente a expressão “-n graus abaixo de zero ou n graus acima de zero”.

Com o objetivo de que o aluno se familiarize com o objeto matemático, compreendendo sua importância e aplicabilidade, utilizamos também outros contextos como jogos, partidas de futebol e deslocamento de um elevador, para o desenvolvimento de suas singularidades.

Importante salientar que as operações de adição e subtração aparecem de forma implícita em algumas situações com a finalidade de introduzi-las explicitamente em atividades posteriores.

O objetivo dessa atividade é possibilitar ao aluno o reconhecimento e a aplicação dos números inteiros, visualizando sua disposição acima e abaixo de zero, bem como à direita e à esquerda do zero.

Esperamos que os alunos mobilizem seus conhecimentos prévios e anotem os valores das temperaturas nos termômetros da forma que julgarem correta.

Essa primeira atividade favorece para que os alunos possam utilizar seus conhecimentos prévios, levando-os a perceber que são os protagonistas no momento da aprendizagem, e as informações que possuem são de suma importância para o desenvolvimento de um conhecimento formal.

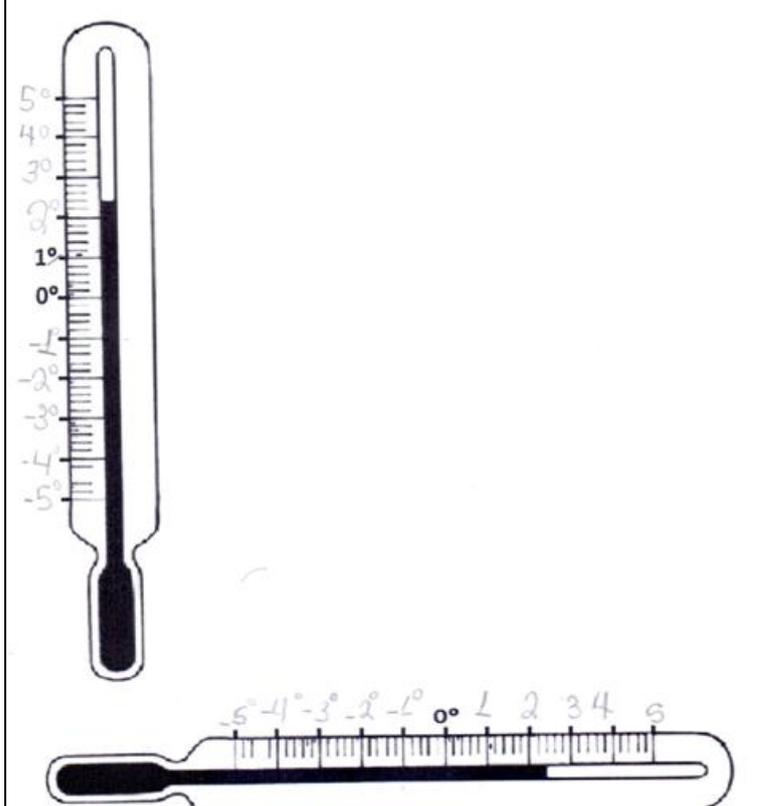
Inferimos também que a visualização da disposição dos valores das temperaturas anotadas, bem como as situações propostas na sequência, possa contribuir para que os alunos comparem os números inteiros, em situações posteriores, e compreendam tal disposição para abstrair e aplicar, mesmo sem a necessidade de visualizar.

### Protocolo da dupla A

Quadro 1- Atividade 1 e etapa I – Dupla A

D) Marque os seguintes valores de temperaturas nos termômetros que se encontram, na posição vertical e na posição horizontal.

a) 4 graus acima de zero.	f) 2 graus acima de zero.
b) -1 grau abaixo de zero.	g) -3 graus abaixo de zero.
c) 5 graus acima de zero.	h) -2 graus acima de zero.
d) -5 graus abaixo de zero.	i) -5 graus abaixo de zero.
e) 3 graus acima de zero.	j) -4 graus abaixo de zero.



The image shows two thermometers. The top one is vertical, with a scale from -5 to 5 degrees. The bottom one is horizontal, with a scale from -5 to 5 degrees. Handwritten labels are present above the horizontal scale: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

### Análise

Nessa primeira etapa da atividade, desenvolvida pela **dupla A**, verificamos nos registros que os alunos anotaram os valores das temperaturas corretamente. Durante a aplicação dessa atividade, presenciei um momento em que os alunos discutiam se os números aumentavam ou diminuam, quando anotados abaixo de zero ou acima de zero. O que me chamou a atenção nesse diálogo é que, ao escutar o colega afirmar que abaixo

de zero os números estavam diminuindo, o outro aluno questionou-o dizendo, “*mas está ficando mais frio, o frio está aumentando*”. Nesse momento, o colega respondeu, “*mas se fica mais frio a temperatura fica menor*”.

Percebemos que, apesar da recomendação para a utilização de um contexto referente à medida de temperatura ser julgado como um ponto de partida eficiente para a abordagem dos números inteiros, não encontramos nenhuma observação que nos indicasse a possibilidade de um argumento como o mencionado pelo aluno.

Acreditamos que uma atenção especial deva ser dada a esse episódio, já que os alunos possuem apenas um conhecimento informal sobre os números inteiros. Sendo assim, o argumento utilizado não deixa de ser pertinente, considerando que a dupla faz suas conjecturas mobilizando seus conhecimentos prévios. Afirmar que está aumentando o frio está correto do ponto de vista do contexto apresentado, porém, para o objetivo a que se destina, tal afirmação não vai ao encontro do que era esperado.

Percebemos claramente o quanto devemos ser criteriosos e atentos quando nos propomos a “concretizar” um objeto matemático com o intuito de favorecer a compreensão dos educandos, pois suas interpretações podem variar de forma imprevisível, comprometendo seu entendimento.

No entanto, notamos que o contexto “medida de temperatura” mostrou-se eficiente, e verificamos que o mesmo faz parte dos conhecimentos informais dos alunos, possibilitando que eles se engajem em uma investigação, discutindo e compreendendo o objeto matemático.

## Protocolo da dupla B

Quadro 2 - Atividade 1 e etapa I – Dupla B

I) Marque os seguintes valores de temperaturas nos termômetros que se encontram, na posição vertical e na posição horizontal.

a) 4 graus acima de zero.	f) 2 graus acima de zero.
b) -1 grau abaixo de zero.	g) -3 graus abaixo de zero.
c) 5 graus acima de zero.	h) -2 graus acima de zero.
d) -5 graus abaixo de zero.	i) -5 graus abaixo de zero.
e) 3 graus acima de zero.	j) -4 graus abaixo de zero.

The image shows two thermometers. The vertical thermometer has a scale from -5 to 5 degrees. The horizontal thermometer has a scale from -5 to 5 degrees. Both thermometers have handwritten markings on their scales.

### Análise

Como podemos observar no protocolo da **dupla B**, pouca atenção foi dada à importância do registro dos valores das temperaturas com seu respectivo sinal. Apesar de haver anotado “corretamente” os valores nos termômetros, a dupla não atentou à necessidade de registrá-los com o sinal que os acompanha, deixando de apresentar indício fundamental para que se possa inferir que houve uma compreensão satisfatória do objeto matemático.

Durante a realização dessa atividade, anotei entre os diálogos que, ao se referirem às temperaturas abaixo de zero, a dupla debatia dizendo “*abaixo de zero é frio, então é*

*zero, um, dois até chegar o frio de cinco, a temperatura vai diminuindo*”. Apesar de não ter registrado as temperaturas abaixo de zero com o respectivo sinal, percebemos que, de acordo com o diálogo da dupla, houve uma aceitação e compreensão do número negativo. Notamos também que para a realização dessa etapa o contexto foi devidamente considerado.

No decorrer da aplicação dessa atividade verificamos que nenhuma das duplas apresentou um comportamento que pudesse indicar uma rejeição aos números negativos. Todos aceitaram com naturalidade a presença desse objeto matemático no contexto em que foi inserido.

Percebemos que as informações que os alunos possuem em relação a medidas de temperatura, saldos de gols, saldos bancários, entre outros, possam ter contribuído para a superação, parcial, do obstáculo referente à “estagnação no estágio das operações concretas”, conforme Glaeser (1985) afirma. Inferimos que a superação desse obstáculo tenha contribuído para que os alunos não apresentassem rejeição aos números inteiros, pois para eles conceber algo menor do que zero é normal.

Ressaltamos ainda que conforme mencionado em nosso aporte teórico, segundo Glaeser (1985, p. 51-52), Simon Stevin (1540 – 1620) chega a proclamar que não existem números absurdos, irracionais, irregulares, inexplicáveis ou surdos. Esse fato nos leva a refletir sobre a importância da aceitação dos números inteiros por nossos alunos.

### **Atividade 1 - Etapas de II a IX**

O objetivo nessas etapas foi propor às duplas situações onde deveriam utilizar seus conhecimentos prévios para operar com os números inteiros, almejando assim, introduzir as operações de adição e de subtração de forma implícita.

Com a intenção de motivar os alunos a continuarem engajados em analisar as questões propostas, procurando respondê-las da melhor forma possível, continuamos a utilizar o contexto relativo à medida de temperatura, uma vez que os mesmos demonstraram uma considerável compreensão dos números inteiros quando abordados dessa forma.

Pretendemos verificar qual o comportamento do aluno diante de situações em que, apesar de explicitamente a questão se referir a um aumento, fato que, a princípio, induz

a uma adição, na qual o resultado apresentado seria maior do que as parcelas envolvidas, o resultado correto é um valor inferior a uma das parcelas ou inferior a ambas as parcelas.

Objetivamos analisar, também, como os alunos mobilizam os conhecimentos prévios para responder questões em que o enunciado se refere a uma diminuição, termo que sugere uma subtração de valores, porém, para responder corretamente à questão é necessário efetuar uma adição.

### Protocolo da dupla A

Quadro 3 - Atividade 1 e etapas II, III e IV – Dupla A

**II)** Considere um freezer onde os sorvetes são mantidos a uma temperatura de  $-5$  graus abaixo de zero. Represente o valor da nova temperatura se ela:

a) Diminuir 2 graus?  $= -7^{\circ}$

b) Diminuir 5 graus?  $= -10^{\circ}$

c) Aumentar 4 graus?  $= -1^{\circ}$

d) Aumentar 5 graus?  $= 0^{\circ}$

e) Aumentar 7 graus?  $= 2^{\circ}$

**III)** Em uma reportagem sobre a previsão do tempo foi anunciado que a temperatura mínima na cidade A será de **dez graus abaixo de zero**, e a temperatura mínima na cidade B será de **oito graus acima de zero**.

a) Represente as temperaturas de cada uma das cidades utilizando algarismos (números).  
 $A - 10^{\circ}$   $B 8^{\circ}$

b) Indique a cidade onde a temperatura é maior.  
 $B$

c) Quantos graus de diferença há entre a maior e a menor temperatura?  
 $18^{\circ}$

**IV)** A temperatura de uma cidade, que era de 20 graus, variou em  $-3$  graus. Responda:

a) A temperatura aumentou ou diminuiu?  $=$  diminuiu

b) Qual a temperatura após essa variação?  $= -3^{\circ}$  ou  $17^{\circ}$

## **Análise**

No desenvolvimento da etapa **II** dessa atividade, verificamos que a **dupla A** resolveu e registrou os resultados corretamente, no entanto, percebemos que para o **item d** o registro apresentado é menos zero (-0) e, para o item **e** é mais dois (+2). Fica explícito que essa dupla está demonstrando uma preocupação especial e essencial em relação ao sinal que deve acompanhar o resultado em que chegaram e essa atenção é fundamental para que a compreensão desse objeto matemático possa ser desenvolvida. Vale ressaltar que, durante a realização dessa etapa, ao verificar o registro “-0”, perguntei ao aluno o porquê e ele me respondeu “*porque um número menos zero é ele mesmo*”. Percebemos que o aluno novamente mobiliza seu conhecimento prévio para justificar sua resposta.

A etapa **III** dessa atividade foi realizada com êxito. A dupla respondeu o item **a** registrando os valores com seus respectivos sinais. No item **b**, comparou as duas temperaturas respondendo corretamente qual a maior e, por fim, calculou a diferença entre as duas temperaturas sem apresentar dificuldades.

A etapa **IV** dessa atividade também foi realizada com sucesso pela dupla, porém, no item **d** notamos que houve uma dificuldade em relação à interpretação do termo variação. Ao ler que a temperatura de uma cidade variou em -3 graus, os alunos ficaram na dúvida e registraram que tal variação também poderia representar o valor da nova temperatura na cidade, sendo assim, apresentaram dois registros.

Percebemos que um contexto que possibilite aos alunos mobilizarem seus conhecimentos prévios, conforme Borba e Nunes (2004) constataram, é eficiente para que se façam conjecturas levando a uma compreensão de um novo objeto matemático.

## Protocolo da dupla B

Quadro 4 - Atividade 1 e etapas II, III e IV – Dupla B

**II)** Considere um freezer onde os sorvetes são mantidos a uma temperatura de -5 graus abaixo de zero. Represente o valor da nova temperatura se ela:

a) Diminuir 2 graus?  $2^{\circ}$

b) Diminuir 5 graus?  $0^{\circ}$

c) Aumentar 4 graus?  $9^{\circ}$

d) Aumentar 5 graus?  $10^{\circ}$

e) Aumentar 7 graus?  $1^{\circ}$

**III)** Em uma reportagem sobre a previsão do tempo foi anunciado que a temperatura mínima na cidade A será de **dez graus abaixo de zero**, e a temperatura mínima na cidade B será de **oito graus acima de zero**.

a) Represente as temperaturas de cada uma das cidades utilizando algarismos (números).  
A  $10^{\circ}$ , B  $8^{\circ}$

b) Indique a cidade onde a temperatura é maior.  
B)  $8^{\circ}$

c) Quantos graus de diferença há entre a maior e a menor temperatura?  
 $2^{\circ}$  de diferença

**IV)** A temperatura de uma cidade, que era de 20 graus, variou em -3 graus. Responda:

a) A temperatura aumentou ou diminuiu?  
diminuiu

b) Qual a temperatura após essa variação?  
 $17^{\circ}$

### Análise

A **dupla B**, no desenvolvimento da etapa **II** dessa atividade, demonstrou no **item a** dificuldade em interpretar a questão proposta, indicando que a própria variação seria o valor da temperatura do freezer. Nos **itens b, c, d e e**, a dupla utilizou seus conhecimentos sobre operações com números naturais sem destinar a devida atenção ao sinal que acompanha o valor da temperatura inicial do freezer. Percebemos que, nesse momento, os alunos trataram a situação proposta com simplicidade, como tive a oportunidade de constatar em um diálogo entre os mesmos: “é só somar ou subtrair os

*números*”. Notamos que apesar de não ser observada uma rejeição aos números inteiros, nessa etapa, os alunos parecem ter resistido a uma reflexão necessária em torno de situações em que foi abordado esse objeto matemático.

Na etapa **III**, diferente da anterior, os alunos consideraram o contexto e responderam parcialmente o **item a**, deixando de colocar o sinal referente à temperatura abaixo de zero. O item **b** foi respondido corretamente, indicando que os alunos fizeram a comparação pertinente à situação, considerando e compreendendo o contexto. Ressaltamos que, a princípio, a resposta registrada estava incorreta, porém, ao analisar melhor a questão os alunos corrigiram o resultado, como podemos observar no protocolo.

No item **c**, percebemos que novamente os alunos se “apegaram” apenas aos conhecimentos relacionados aos números naturais e calcularam a diferença entre as duas temperaturas sem considerar os sinais.

Ao analisarmos a etapa **IV**, percebemos que os alunos responderam corretamente à questão do item **a** e, durante a resolução dessa questão, um orientou ao outro dizendo “*variar -3 é diminuir*”, no entanto, acreditamos que para responder o item **b**, novamente a dupla recorreu apenas aos conhecimentos sobre operações com números naturais, limitando-se a efetuar o cálculo sugerido pelo sinal que acompanha o valor da variação de temperatura.

Nesse momento, observamos uma explícita “diferença” em relação à compreensão dos números inteiros apresentada pelas duplas. Inferimos que um fator relevante para justificar essa heterogeneidade refere-se à atenção que a dupla **A** vem demonstrando em relação ao sinal que acompanha os números.

## Protocolo da dupla A

Quadro 5 - Atividade 1 e etapas V, VI, VII e VIII – Dupla A

V) Agora considere uma cidade onde a temperatura, que era de  $-10^\circ$  graus, variou em  $-3$  graus. Responda:

a) A temperatura aumentou ou diminuiu? *diminuiu*

b) Qual é a temperatura após essa variação?  
 *$-13^\circ$*

VI) Considere que em um jogo, após participar da primeira rodada, você chegou na posição I, conforme a figura.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

a) Em qual posição você vai chegar se conseguir  $+3$  pontos na **segunda** rodada?  
*L*  
*5*

b) Em qual posição você vai chegar se conseguir  $-4$  pontos na **terceira** rodada?  
*H*  
*2*

c) Em qual posição você vai chegar se conseguir  $-5$  pontos na **quarta** rodada?  
*C*  
*-4*

VII) Ao participar de um jogo, composto por três partidas, em que a pontuação vai se acumulando, Paulo ganhou três pontos na primeira partida e perdeu sete pontos na segunda partida. Como ficou a pontuação de Paulo para iniciar a terceira partida?  
*C*  
*-4*

VIII) Considere que em um jogo de futebol seu time tomou três gols no primeiro tempo, mas acabou fazendo dois gols no segundo tempo. Qual é o saldo de gols do seu time no final desse jogo?  
*-1*

### Análise

No desenvolvimento da etapa **V** dessa atividade, a **dupla A** demonstrou compreensão em relação à questão proposta e percebi que o fato de considerarem o contexto contribuiu para o sucesso na realização da mesma. No diálogo dessa dupla prevalece a interpretação da situação para decidir que operação será realizada. Após concluir os itens **a** e **b**, em uma das conversas da dupla, um dizia ao outro “*você tem que ver que se a temperatura é de menos treze graus e vai variar em menos três, então vai ficar mais frio, então tem que somar*”. Percebemos que nesse momento o aluno espontaneamente “recitou” a “regra de sinais” utilizada para a soma de dois números negativos.

Para realizar a etapa **VI**, já demonstrando uma significativa compreensão dos números inteiros, a dupla utilizou-se da figura deslizando o dedo sobre a reta e fazendo

a contagem da direita para a esquerda quando os pontos obtidos eram negativos e da esquerda para a direita quando os pontos obtidos eram positivos.

Ao realizar a etapa **VII** e **VIII**, a **dupla A** demonstrou que realmente compreendeu as situações em que está implícita a adição entre números inteiros, respondendo corretamente ambas as questões.

Notamos que a utilização de um contexto em que o aluno possa interagir com o objeto matemático favorece a compreensão do mesmo. Ressaltamos que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p.97), a necessidade da utilização dos números inteiros surge em um contexto em que chineses e hindus utilizaram símbolos para as faltas e diferenças.

### Protocolo da dupla B

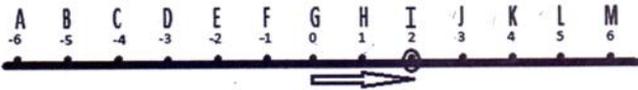
Quadro 6 - Atividade 1 e etapas V, VI, VII e VIII – Dupla B

V) Agora considere uma cidade onde a temperatura, que era de -10 graus, variou em -3 graus. Responda:

a) A temperatura aumentou ou diminuiu?  
aumentou

b) Qual é a temperatura após essa variação?  
-13

VI) Considere que em um jogo, após participar da primeira rodada, você chegou na posição I, conforme a figura.



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

a) Em qual posição você vai chegar se conseguir +3 pontos na **segunda** rodada?  
L

b) Em qual posição você vai chegar se conseguir -4 pontos na **terceira** rodada?  
E

c) Em qual posição você vai chegar se conseguir -5 pontos na **quarta** rodada?  
D

VII) Ao participar de um jogo, composto por três partidas, em que a pontuação vai se acumulando, Paulo ganhou três pontos na primeira partida e perdeu sete pontos na segunda partida. Como ficou a pontuação de Paulo para iniciar a terceira partida?  
2

VIII) Considere que em um jogo de futebol seu time tomou três gols no primeiro tempo, mas acabou fazendo dois gols no segundo tempo. Qual é o saldo de gols do seu time no final desse jogo?  
2 ou 3

## **Análise**

Na etapa **V** dessa atividade, percebemos que a **dupla B** apresentou dificuldade em relação à adição de dois números negativos. Para responder à questão proposta, os alunos interpretaram a informação “variação de temperatura” como um aumento e realizaram a operação sem considerar o sinal dos valores das temperaturas. Porém, salientamos que apesar do resultado registrado, em um diálogo, um aluno justificou sua resposta ao colega dizendo “*menos dez já está frio e vai ficar mais frio*”. Percebemos que a compreensão apresentada pela dupla se justifica a partir do resultado registrado para o item **b**, em que “o frio de menos dez foi aumentado em menos três, resultando em um frio de menos treze, registrado como 13”. Verificamos que existe alguma compreensão dos números inteiros no contexto utilizado, no entanto, a falta de conhecimento em relação ao registro correto compromete a resposta apresentada. No entanto, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática, (1998, p. 98), os alunos atribuíram significado às quantidades negativas.

Na etapa **VI**, os alunos responderam ao item **a** corretamente, utilizando a reta para visualizar em qual posição estariam após cada rodada. Porém, verificamos que para responder os demais itens, de acordo com o sinal dos pontos obtidos, houve dificuldade em compreender que deveriam sempre partir de uma nova posição para acrescentar a pontuação conquistada na rodada.

Verificamos que na etapa **VII**, os alunos não compreenderam o enunciado e registraram uma resposta que não representa um resultado que possa ser obtido a partir dos valores em questão. Percebemos que a visualização da reta numérica é fundamental para que a dupla desenvolva um raciocínio pertinente à situação e, portanto, a elaboração de questões em que seja solicitada a construção da reta seria conveniente para a compreensão.

O registro apresentado na etapa **VIII** indica que a diversificação do contexto, conforme relatado em nossa revisão de literatura, é fundamental para que os alunos possam mobilizar seus conhecimentos prévios em relação às questões propostas. Verificamos que apesar de não ter registrado a resposta corretamente, os alunos apresentaram duas possibilidades em que percebemos que a primeira se refere simplesmente aos gols marcados e a segunda à diferença entre os gols a favor e os gols contra. Constatamos que conforme verificado nas etapas anteriores, são recorrentes as situações em que a dupla não se atenta à necessidade da utilização do sinal de menos

para indicar um resultado inferior a zero, mesmo quando esse aparece de forma explícita no enunciado, como na atividade 1. No entanto, na etapa IV, a dupla considerou devidamente o sinal, deslocando-o corretamente sobre a reta numérica conforme a pontuação obtida. Esse fato nos leva a reafirmar a importância do contexto para proporcionar uma compreensão sobre o objeto matemático.

### Protocolo da dupla A

Quadro 7 - Atividade 1 e etapa IX – Dupla A

IX) Também podemos representar, semelhante ao termômetro, os números em uma reta orientada, conforme a figura abaixo. À direita do número 0 estão os números positivos e à esquerda do zero os números negativos.

Utilize a figura acima e complete com o sinal de > (maior) ou < (menor).

- 4...< 6
- 5...>-5
- -6...<-1
- 10...>-30
- -50...< 13
- -18...>-26

### Análise

A **dupla A** realizou essa atividade de forma precisa, não demonstrando dificuldades para abstrair e generalizar o conhecimento para aplicá-lo quando a visualização dos valores não era possível. Percebemos que o desenvolvimento das etapas anteriores possibilitou uma compreensão satisfatória do objeto matemático, favorecendo a construção de um conhecimento que permitiu que a comparação entre os números inteiros fosse realizada com sucesso.

### Protocolo da dupla B

Quadro 8 - Atividade 1 e etapa IX – Dupla B

IX) Também podemos representar, semelhante ao termômetro, os números em uma reta orientada, conforme a figura abaixo. À direita do número 0 estão os números positivos e à esquerda do zero os números negativos.

Utilize a figura acima e complete com o sinal de > (maior) ou < (menor).

- 4...> 6
- 5...<-5
- -6...>-1
- 10...>-30
- -50...< 13
- -18...>-26

## **Análise**

Nessa atividade, verificamos que a **dupla B** inverteu todos os sinais, no entanto, durante a realização dessa etapa, quando se referia ao primeiro item, eles diziam “*o seis é maior do que o quatro*”. Percebemos que apesar da anotação equivocada, a dupla visualizou e interpretou corretamente a disposição dos números inteiros em ordem crescente. Vale ressaltar que a dupla utilizou a mesma interpretação para abstrair e comparar o número 10 com o número -30, dizendo “*o trinta é negativo então ele é menor*”. Porém, verificamos que para os dois últimos itens, a dupla retomou a atitude de desconsiderar os sinais e não comparou corretamente os valores.

### **Atividade 2 - Etapas de I a V - Adição de números inteiros.**

O objetivo dessa atividade é conduzir o aluno a fazer uma reflexão sobre a adição de números inteiros, verificando a necessidade de sua aplicação em situações diversas e percebendo que somar pode não significar, necessariamente, aumentar um valor.

Iniciamos essa atividade propondo nas etapas **I, II e III** questões com o objetivo de resgatar os conhecimentos prévios dos alunos para interpretar situações e refletir sobre as possibilidades de registros sobre números inteiros. Também temos o objetivo de verificar se os alunos utilizam o termo “dívida” para se referir a um valor negativo.

Na etapa **II** dessa atividade procuramos desenvolver uma sequência semelhante à anterior com o intuito de verificar se realmente a dupla demonstra uma compreensão em relação à adição de números inteiros, identificando assim qual o alcance de seus conhecimentos prévios para lidar com esse objeto matemático.

Os problemas propostos procuram dar ênfase ao termo adicionar, utilizando-se de situações em que os resultados decrescem, tendendo a zero e, por fim, resultando em um valor negativo. Esperamos que os alunos possam refletir sobre o problema e registrem suas operações, percebendo a importância e a necessidade dos números inteiros para responder as questões propostas.

Acreditamos que as duplas irão refletir sobre a possibilidade de somar dois ou mais números negativos ou somar números positivos com números negativos, discutindo e apresentando os resultados. Sendo assim, esperamos que os registros possam fornecer elementos que nos permitam compreender qual o alcance dos conhecimentos prévios dos alunos no desenvolvimento da compreensão dos números inteiros e suas operações.

## Protocolo da dupla A

### Quadro 9 - Atividade 2 - Etapas I e II – Dupla A

**Atividade 2.** Adição de números inteiros.

I) Num determinado dia o saldo bancário de Marcos era de -2000 reais e o de Luiz era de -500 reais.

a) Qual deles estava com uma situação melhor junto ao banco? Por quê?  
O Luiz, porque ele devia menos

b) Qual o saldo no banco dos dois juntos?  
- 2500

c) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 2000 reais no banco?  
Vai ficar 0 e sem dever nada

d) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 5000 reais no banco?  
Vai ficar com R\$ 3000

e) Como vai ficar o saldo de Luiz se ele fizer uma retirada de 600 reais do banco?  
- 1100

II) Considere que em um jogo composto por **duas etapas**, cada jogador recebe uma pontuação inicial de 10 pontos e, a cada etapa, são acrescidos os pontos obtidos aos pontos iniciais para calcular a nova pontuação.

a) Qual a nova pontuação de um jogador que **tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa 7 pontos? 17 pontos

b) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -7 pontos? 3 pontos

c) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -10 pontos? 0 pontos

d) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos?  
- 2 pontos

e) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos e em seguida obtém na segunda etapa -4 pontos?  
- 6 pontos

## **Análise**

Na etapa **I** dessa atividade, a **dupla A** demonstrou uma compreensão para definir quem estava com uma situação melhor junto ao banco no item **a**. Percebemos que a resposta dada pela dupla remete à análise da atividade anterior, em que a mesma demonstrou ter compreendido a disposição dos números em ordem crescente. Ressaltamos também que a dupla, explicitamente, utilizou o termo “deve” para justificar sua resposta.

No item **b** a dupla respondeu corretamente a questão e o registro apresentado é acompanhado pelo sinal de menos, indicando que o saldo permaneceu negativo. Com o mesmo sucesso, a dupla também respondeu corretamente os itens **c**, **d** e **e**, demonstrando ótima compreensão do enunciado e operando de forma adequada com os números inteiros. Verificamos que no item **c** a dupla voltou a utilizar o termo “deve” para justificar a sua resposta, porém, no item **b**, apenas anotou o resultado com seu respectivo sinal.

No desenvolvimento da etapa **II** dessa atividade, a **dupla A** demonstrou que realmente compreendeu a adição de números inteiros respondendo todas as questões e registrando corretamente o resultado. Vale lembrar que em nossa revisão de literatura a adição com os números inteiros é identificada com a operação em que os alunos apresentam menos dificuldade. O comportamento dessa dupla nos revela que realmente adicionar números inteiros é um desafio ao alcance daqueles que ainda não tiveram um contato formal com esse objeto matemático. Salientamos que a dupla começou a perceber, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática (1998, p. 98), a lógica dos números negativos, na qual é possível adicionar dois números e obter como resultado um valor menor do que as parcelas adicionadas.

Vale ressaltar que ao perceber o ótimo desempenho da dupla no desenvolvimento dessa atividade, perguntei se já haviam feito operações parecidas, de imediato os alunos responderam “não, mas é fácil”.

Apesar de estarmos analisando as primeiras atividades e as mesmas tratarem da operação com números inteiros, relativamente mais simples, a fala dos alunos volta a nos indicar que obstáculos relacionados à rejeição desse objeto matemático podem estar superados.

## Protocolo da dupla B

Quadro 10 - Atividade 2 - Etapas I e II – Dupla B

<p><b>Atividade 2.</b> Adição de números inteiros.</p> <p>I) Num determinado dia o saldo bancário de Marcos era de <u>-2000</u> reais e o de Luiz era de <u>-500</u> reais.</p> <p>a) Qual deles estava com uma situação melhor junto ao banco? Por quê? - Marcos, por ele tem -2000 reais negativos.</p> <p>b) Qual o saldo no banco dos dois juntos? - 2500.</p> <p>c) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 2000 reais no banco? 4.000</p> <p>d) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 5000 reais no banco? 7.000</p> <p>e) Como vai ficar o saldo de Luiz se ele fizer uma retirada de 600 reais do banco? mais da</p> <p>II) Considere que em um jogo composto por <b>duas etapas</b>, cada jogador recebe uma pontuação inicial de 10 pontos e, a cada etapa, são acrescidos os pontos obtidos aos pontos iniciais para calcular a nova pontuação.</p> <p>a) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa 7 pontos? 17.</p> <p>b) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -7 pontos? 3.</p> <p>c) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -10 pontos? 0.</p> <p>d) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos? -2.</p> <p>e) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos e em seguida obtém na segunda etapa -4 pontos? -16.</p>
---

## **Análise**

Nessa atividade, na etapa **I**, a **dupla B** respondeu o item **a** comparando os valores em questão sem considerar o sinal que os acompanhava. Acreditamos que o conhecimento prévio dos alunos, em relação a um saldo bancário, não foi suficiente para que interpretassem corretamente a questão.

Para o item **b**, a dupla registrou uma resposta correta, demonstrando que os conhecimentos que possuem foram suficientes para interpretar a questão. Percebemos que apesar do contexto ser acessível aos alunos, é preciso estar atento às dificuldades que podem surgir quando a questão exigir um conhecimento mais abrangente do mesmo.

Lembramos que são recorrentes as situações em que a dupla não tem dado a devida atenção ao sinal que deve acompanhar os valores negativos, e por esse motivo tem operado com os números inteiros da mesma forma que opera com os números naturais.

Nos itens **c** e **d** a dupla voltou a ignorar os sinais que acompanhavam os valores dos saldos e efetuou as operações considerando-os como números naturais.

No item **e**, ao responder “não dá”, a dupla demonstrou uma aparente “rejeição” aos números negativos, que, de acordo com a história referente às dificuldades encontradas por matemáticos para a aceitação e compreensão dos números inteiros, é um obstáculo recorrente quando abordado esse objeto matemático. Percebemos que a dupla alterna momentos em que aceita os números inteiros, com momentos em que parece rejeitar. Ressaltamos, ainda, que a dupla não se atenta para o sinal dos números e efetua as operações sem considerá-lo. Parece-nos que, diferente da **dupla A**, os alunos não compreenderam a lógica dos números inteiros que contraria a lógica dos números naturais.

Verificamos que na etapa **II** dessa atividade, devido à falta de compreensão e aparente “rejeição” aos números inteiros, a **dupla B** voltou a responder as questões sem considerar o contexto e o sinal que acompanhava os valores. Percebemos que nos itens **a** e **e**, os alunos somaram os pontos obtidos, deixando de conduzir em conta, no item **e**, o sinal da pontuação obtida.

Para o item **b** a resposta apresentada também é fruto da rejeição dos números inteiros, pois ao perceber que a pontuação obtida apresentava o sinal negativo, a dupla registrou a pontuação inicial como resposta.

Para responder o item **c**, a dupla voltou a rejeitar os números negativos e diante de uma pontuação negativa, os alunos debateram e concluíram “*como na primeira ele foi bem e na segunda ele foi mal, é só fazer 17-10 é igual a 7*”. Apesar de equivocada a compreensão da dupla, isso nos revela que, dependendo do contexto, a rejeição aos números negativos é evidente, por mais acessíveis que possam parecer as situações, inúmeras podem ser as interpretações dadas. Portanto, é preciso estar atento às individualidades para poder intervir de forma específica em cada caso.

### Protocolo da dupla A

Quadro 11- Atividade 2 - Etapa III – Dupla A

**III) Responda:**

a) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -4? Registre a operação e o resultado.

b) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -9? Registre a operação e o resultado.

c) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -10? Registre a operação e o resultado.

### Análise

Na etapa **III** dessa atividade, mais uma vez a **dupla A** demonstrou compreensão satisfatória em relação à adição de números inteiros. Verificamos que nessa etapa encontramos nos registros não só os resultados como também a forma como os alunos estruturaram as operações efetuadas para responder as questões.

Para todos os itens dessa etapa, a dupla apresentou os dois resultados que julgou possível, organizando as operações que precisou efetuar com os números inteiros, dando o mesmo tratamento utilizado para os números naturais. No entanto, no registro da organização das operações em que aparecem os sinais de negativo e de positivo, o que aparentemente poderia gerar uma confusão, houve duas interpretações bem definidas.

No item **a**, a dupla adicionou ao número nove, indicado por +9, o número menos quatro, indicado por -4, e concluiu corretamente que o resultado seria 5. Em seguida, a dupla organizou a operação da mesma forma e, preocupada com a presença do número negativo, efetuou outra operação em que a soma dos dois valores apresenta como resultado o número -13.

Percebemos que ao apresentar -13 como resposta, os alunos explicitam a importância do contexto para a compreensão do objeto matemático, afinal, quando foi solicitada a mesma compreensão utilizando os saldos bancários, não houve dúvidas para responder as questões.

A resposta apresentada para o item **c** indica, ainda mais, que a dupla apresenta uma compreensão satisfatória para realizar a adição de números inteiros, porém, a mesma dúvida, que inferimos estar relacionada ao contexto em que a operação é apresentada, persiste, levando os alunos a somar os números e registrar uma resposta equivocada.

### Protocolo da dupla B

Quadro 12 - Atividade 2 - Etapa III – Dupla B

III) Responda:

a) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -4? Registre a operação e o resultado.

b) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -9? Registre a operação e o resultado.

c) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -10? Registre a operação e o resultado.

### Análise

A **dupla B**, na etapa **III** dessa atividade, não demonstrou compreensão da questão proposta, a princípio ignorou o sinal do número -4 e realizou a soma do mesmo com 9 e obteve 13 como resultado. Inferimos que a falta de compreensão nessa questão não está relacionada somente aos números inteiros e sim à interpretação da pergunta proposta, pois percebemos que após efetuar a adição,  $9+4$ , os alunos subtraíram do resultado o próprio -4, obtendo como resultado 10, o que demonstra um equívoco no cálculo.

Percebemos que a dupla realizou as mesmas operações para responder os itens **b** e **c**, demonstrando que realmente não compreendeu o enunciado da questão. Verificamos que o contexto em que o objeto matemático é apresentado tem significativa influência para a compreensão dos alunos, pois, apesar dos erros cometidos nas etapas anteriores, eles demonstraram uma compreensão parcial das questões propostas.

### Atividade 2 – Etapas IV a VI

Passamos agora para a etapa **IV** dessa atividade, em que acreditamos que a visualização dos registros e dos resultados, obtidos a partir da utilização do *applet*, permitirá que os alunos façam conjecturas sobre o que é observado, tirando suas conclusões e fazendo novas anotações para as etapas anteriores, se julgarem necessário.

Vale ressaltar que os alunos serão orientados sobre a utilização do *applet*, para que possam realizar as atividades propostas.

### Protocolo da dupla A

Quadro 13 - Atividade 2 - Etapa IV – Dupla A

**IV)** Utilize o objeto de aprendizagem para realizar as adições de números inteiros e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Adição\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

Movimente os seletores vermelho e azul para explorar outras possibilidades.

$7 + (-10) = -3$

**Figura 1- Adição de Números Inteiros**

a)  $5+(2) = \dots\dots\dots$  *7*  
 O resultado é positivo ou negativo? *Positivo*

b) $-3+(-7) = \dots -10 \dots$	O resultado é positivo ou negativo? <i>negativo</i>
c) $-6+(-3) = \dots -9 \dots$	O resultado é positivo ou negativo? <i>negativo</i>
d) $5+(-1) = \dots 4 \dots$	O resultado é positivo ou negativo? <i>negativo</i>
e) $-7+(2) = \dots -5 \dots$	O resultado é positivo ou negativo? <i>negativo</i>
f) $-7+(10) = \dots 3 \dots$	O resultado é positivo ou negativo? <i>positivo</i>
g) $-6+(+6) = \dots 0 \dots$	O resultado pode ser positivo ou negativo? <i>positivo</i>

### Análise

No desenvolvimento dessa etapa, os alunos demonstraram entusiasmo, pois passaram a utilizar a tecnologia, que atualmente se faz tão presente em suas vidas, para auxiliar na resolução das questões. Após uma breve explicação, em que apenas esclareci a possibilidade de movimentar os seletores para obter os valores referentes às operações em questão, os alunos passaram a manipular os *applets* sem apresentar dificuldades e responderam todas as perguntas.

Para manipular os *applets*, os alunos revezaram-se, possibilitando que ambos pudessem realizar as operações, visualizando os registros para uma possível compreensão de suas singularidades.

Salientamos que, conforme Machado e Banchini (2013, p. 92-93) escreveram, a visualização permite construir representações mentais e esse ato está relacionado com artefatos externos.

Verificamos que os alunos não apresentaram dúvida em relação à utilização dos *applets* e logo perceberam que a partir do movimento dos seletores, eles obteriam os valores, positivos ou negativos, a serem utilizados na operação em questão.

Salientamos que, ao serem comunicados que as atividades seriam desenvolvidas com o auxílio do computador, os alunos demonstraram-se entusiasmados e ansiosos. Segundo PCN (1998, p.138-139), é importante que a escola integre a tecnologia ao seu cotidiano, usufruindo da atratividade da mesma e desenvolvendo nos alunos habilidades para utilizá-las.

No desenvolvimento dessa etapa, a **dupla A** denominou o *applet* como uma “calculadora para número negativo” e o utilizou para responder as questões. Verifiquei que durante a realização dessa atividade, após utilizar o *applet* para responder os itens **a** e **b**, a dupla decidiu “*vamos primeiro fazer e depois conferir*”, sendo assim, responderam os demais itens e logo passaram a verificar se as respostas estavam certas.

Ressaltamos que os alunos responderam que o zero é um número positivo e, ao visualizar o resultado no *applet*, um colega afirmou para o outro “se não tem sinal de menos é positivo”.

### Protocolo da dupla B

Quadro 14- Atividade 2 - Etapa IV – Dupla B

IV) Utilize o objeto de aprendizagem para realizar as adições de números inteiros e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Adição\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

Movimente os seletores vermelho e azul para explorar outras possibilidades.

$7 + (-10) = -3$

**Figura 1- Adição de Números Inteiros**

a)  $5+(2) = \dots 7 \dots$

O resultado é positivo ou negativo? Positivo

b)  $-3+(-7) = -10$ .....  
 O resultado é positivo ou negativo? **NEGATIVO**

c)  $-6+(-3) = -9$ .....  
 O resultado é positivo ou negativo? **NEGATIVO**

d)  $5+(-1) = 4$ .....  
 O resultado é positivo ou negativo? **POSITIVO**

e)  $-7+(2) = -5$ .....  
 O resultado é positivo ou negativo? **NEGATIVO**

f)  $-7+(10) = 3$ .....  
 O resultado é positivo ou negativo? **POSITIVO**

g)  $-6+(+6)$   
 O resultado pode ser positivo ou negativo? **POSITIVO**

### Análise

Durante o desenvolvimento dessa etapa, a **dupla B** se mostrou entusiasmada com o fato de começar a utilizar o “computador” para responder as questões propostas. Percebemos que, com o auxílio da tecnologia, a dupla passou a fazer os registros dos resultados com os respectivos sinais e respondeu todas as questões corretamente. Inferimos que a visualização dos registros tenha influenciado para que a dupla passasse a perceber a importância da anotação do respectivo sinal para se referir a valores menores do que zero.

Durante a manipulação dos *applets* para visualização dos registros, presenciei um momento em que a dupla se questionava referindo-se às etapas anteriores, e em uma das conversas um dizia ao outro “*acho que respondemos um monte de coisa errada*”.

Para definir a resposta da última questão, os alunos fizeram a mesma associação da **dupla A** e concluíram que se o zero não apresenta sinal ele é considerado um valor positivo.

## Protocolo da dupla A

Quadro 15- Atividade 2 - Etapa V – Dupla A

V) Responda as questões:

a) O que ocorre, com o resultado, quando somamos dois números positivos?  
Da um número positivo

b) O que ocorre, com o resultado, quando somamos dois números negativos?  
Da um número negativo

c) Observe os resultados das operações,  $-7+(2)$  e  $-7+(10)$ . Por que um resultado é negativo e o outro é positivo?  
Porque  $-7+2$  o dois não consegue cobrir o valor  $7$ , o  $-7+10$ , o dez cobre o sete e ainda tem 3 a mais.

d) Qual é o resultado de cada uma das operações a seguir?

- $-20+(-50) = -70$ .....
- $-20+(+50) = 30$ .....
- $-30+(+20) = -10$ .....
- $+60+(-10) = 50$ .....
- $-60+(-10) = -70$ .....

### Análise

Para a realização dessa atividade, percebi que os alunos, já familiarizados com o *applet*, optaram por manipular os seletores utilizando, aleatoriamente, números positivos e negativos para visualizar as respostas.

A **dupla A** respondeu os itens **a** e **b** corretamente e percebemos, no desenvolvimento dos itens posteriores, que houve uma compreensão em relação à adição de números inteiros ao verificarmos o item **c**.

Ao analisarmos o registro da resposta apresentada no item **c**, fica evidente que os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios para argumentar e validar suas conclusões. No registro realizado nesse item, em que podemos verificar, com certo esforço, que os alunos responderam “porque  $-7+2$  o dois não consegue cobrir o valor  $7$ , o  $-7+10$ , o dez cobre o sete e ainda tem 3 a mais”. Ao responder esse item, a dupla demonstrou uma compreensão dos números inteiros e suas operações, redigindo um argumento para validar sua conclusão. Percebemos, no argumento, que os alunos foram capazes de estabelecer uma “regra” a partir dos conhecimentos prévios que possuem e interpretaram a situação utilizando uma analogia em que é verificado se o número positivo é capaz ou não de “cobrir” o número negativo.

No item **d** desse protocolo, percebemos que os alunos foram capazes de abstrair o conhecimento referente à adição de números inteiros para responder as questões corretamente, com exceção do último cálculo em que faltou o sinal. Vale ressaltar que o *applet* foi configurado de modo que os valores máximos que poderiam ser selecionados eram 10 ou -10, sendo assim, a dupla precisou apresentar uma compreensão em relação à adição de números inteiros para registrar corretamente suas respostas. No entanto, verificamos que para a operação  $-60+(-10)$  a resposta dada não está correta, mas a julgar pelos registros anteriores, acreditamos que ocorreu apenas uma falta de atenção.

### Protocolo da dupla B

Quadro 16 - Atividade 2 - Etapa V – Dupla B

V) Responda as questões:

a) O que ocorre, com o resultado, quando somamos dois números positivos?  
ELE CONTINUA POSITIVO

b) O que ocorre, com o resultado, quando somamos dois números negativos?  
ELE CONTINUA NEGATIVO

c) Observe os resultados das operações,  $-7+(2)$  e  $-7+(10)$ . Por que um resultado é negativo e o outro é positivo?  
por causa do sinal

d) Qual é o resultado de cada uma das operações a seguir?

- $-20+(-50) = -70$
- $-20+(+50) = 30$
- $-30+(+20) = -10$
- $+60+(-10) = 50$
- $-60+(-10) = -70$

### Análise

A **dupla B**, ao realizar essa etapa da atividade, recorreu aos registros anteriores, nos quais eles perceberam que as operações efetuadas eram referentes à adição de números positivos e números negativos, respondendo as duas primeiras perguntas corretamente.

A resposta apresentada pela dupla para o item **c**, apesar de ser direta e não nos revelar em que medida houve a compreensão da situação proposta, a princípio nos indica que, possivelmente, uma atenção possa ter sido dada ao sinal que acompanha os números em questão. Esse fato é absolutamente significativo, pois para compreender os números inteiros e suas operações é preciso que, primeiramente, seja percebida a necessidade da utilização do sinal de “menos”, não só para indicar uma operação, como

também para “caracterizar” um número. Vale ressaltar que em questões anteriores a dupla também deixou de registrar os resultados com o respectivo sinal.

No item **d**, mesmo sem a possibilidade de visualizar as respostas com o auxílio do *applet*, por conta da configuração do mesmo, a dupla demonstrou que, apesar de não ter apresentado uma resposta “completa” para o item **c**, compreendeu a adição dos números inteiros, abstraindo e generalizando para responder as questões corretamente. Percebemos que, para esse item, a dupla registrou todas as respostas com o respectivo sinal, indicando que, para esse tipo de situação, parece estar mais evidente a necessidade do mesmo.

#### **Etapa VI - Retomando as atividades após a utilização do *applet***

O objetivo dessa atividade é verificar se a utilização do *applet*, que proporcionou uma visualização dos registros e dos resultados das operações com os números inteiros, influenciou nas respostas registradas pelos alunos nas questões propostas.

Esperamos que, após a utilização do *applet*, os alunos tenham compreendido a importância do registro correto e façam novas conjecturas para as questões que já haviam respondido. Acreditamos que os novos registros possam nos fornecer elementos para inferirmos em que medida a utilização desse recurso pode favorecer a compreensão dos números inteiros e suas operações.

## Protocolo da dupla A

Quadro 17 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla A

**Atividade 2.** Adição de números inteiros.

I) Num determinado dia o saldo bancário de Marcos era de -2000 reais e o de Luiz era de -500 reais.

a) Qual deles estava com uma situação melhor junto ao banco? Por quê?  
Luiz

b) Qual o saldo no banco dos dois juntos?  
- 2500

c) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 2000 reais no banco?  
R\$ 0

d) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 5000 reais no banco?  
R\$ 3000

e) Como vai ficar o saldo de Luiz se ele fizer uma retirada de 600 reais do banco?  
R\$ 1100

II) Considere que em um jogo composto por **duas etapas**, cada jogador recebe uma pontuação inicial de 10 pontos e, a cada etapa, são acrescidos os pontos obtidos aos pontos iniciais para calcular a nova pontuação.

a) Qual a nova pontuação de um jogador que **tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa 7 pontos? 17

b) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -7 pontos? 3 pontos

c) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -10 pontos? 0 pontos

d) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos? -2 pontos

e) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos e em seguida obtém na segunda etapa -4 pontos?  
-6 pontos

### Análise

Ao ser comunicado que as duplas iriam receber algumas etapas da atividade que havia sido realizada para responderem novamente, a **dupla A** mostrou-se incomodada. No entanto, atendeu ao solicitado e respondeu tudo rapidamente. Acreditamos que o fato de

estarem convictos de que haviam respondido tudo corretamente causou essa indignação, porém, era necessário verificar se a utilização do *applet* não teria gerado dúvidas em relação ao conhecimento construído. Observamos que a pressa em finalizar essa atividade levou a um equívoco no item e da etapa **I**, em que a dupla deixou de anotar o sinal do resultado encontrado.

### Protocolo da dupla B

Quadro 18 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla B

<p><b>Atividade 2.</b> Adição de números inteiros.</p> <p><b>I)</b> Num determinado dia o saldo bancário de Marcos era de -2000 reais e o de Luiz era de -500 reais.</p> <p>a) Qual deles estava com uma situação melhor junto ao banco? Por quê?  <i>Luiz</i></p> <p>b) Qual o saldo no banco dos dois juntos?  <i>2500</i></p> <p>c) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 2000 reais no banco? ✓  <i>R\$ 0</i></p> <p>d) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 5000 reais no banco?  <i>mais de</i></p> <p>e) Como vai ficar o saldo de Luiz se ele fizer uma retirada de 600 reais do banco?  <i>Ele vai ter que poder ser mais um pouco</i></p> <p><b>II)</b> Considere que em um jogo composto por <b>duas etapas</b>, cada jogador recebe uma pontuação inicial de 10 pontos e, a cada etapa, são acrescidos os pontos obtidos aos pontos iniciais para calcular a nova pontuação.</p> <p>a) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa 7 pontos?  <i>17</i></p> <p>b) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -7 pontos?  <i>3</i></p> <p>c) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -10 pontos?  <i>0</i></p> <p>d) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos?  <i>2</i></p> <p>e) Qual a nova pontuação de um jogador que <b>não tem</b> uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos e em seguida obtém na segunda etapa -4 pontos?  <i>-8</i></p>
---

### Análise

Ao retomar as etapas **I** e **II** dessa atividade, percebemos que a **dupla B** passou a fazer novas conjecturas e apresentar outros registros. Para o item **a** da etapa **I**, a resposta

apresentada está correta, demonstrando que a dupla foi capaz de compreender a questão e comparar os valores corretamente. No item **b**, a dupla efetuou a adição entre os dois números negativos, porém, não registrou a resposta colocando o devido sinal.

Para o item **c**, a resposta apresentada também foi diferente do registro apresentado anteriormente. Os alunos passaram a considerar o sinal que acompanhavam os valores e fizeram conjecturas que conduziram à resposta correta.

Ao analisar o item **c** e **d**, percebemos que após a utilização do *applet*, os alunos passaram a apresentar uma considerável compreensão da adição de números inteiros. No entanto, notamos que ainda existiam obstáculos que impediam que fosse feita uma progressão.

No primeiro contato com o item **c** foi efetuada a soma do depósito com o saldo que Marcos tinha no banco, sem considerar que o mesmo era negativo, e para o item **d** foi respondido que não era possível fazer uma retirada, pois já existia uma dívida junto ao banco, como foi possível identificar no diálogo entre os alunos “ele já deve então não pode tirar mais”. Porém, ao retomar as etapas, o item **c** em que foi feito um depósito maior do que o saldo, passou a ser impossível para os alunos e o item **d** passou a ser possível. No entanto, o sinal que identifica que o saldo é negativo, voltou a ser ignorado.

Ao nos depararmos diversas vezes com registros em que os alunos insistem em alternar momentos em que consideram o sinal dos números ou não, percebemos que tal comportamento remete a obstáculos de origem epistemológica, em que os indivíduos relutam em perceber que os conhecimentos válidos em situações anteriores, já não atendem às singularidades dos novos desafios.

### Protocolo da dupla A

Quadro 19 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla A

III) Responda:	
a) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -4? Registre a operação e o resultado.	5 $\begin{array}{r} + 9 \\ - 4 \\ \hline 5 \end{array}$
b) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -9? Registre a operação e o resultado.	$\begin{array}{r} + 9 \\ - 9 \\ \hline 0 \end{array}$
c) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -10? Registre a operação e o resultado.	$\begin{array}{r} + 9 \\ - 10 \\ \hline -1 \end{array}$

## Análise

Percebemos que a **dupla A**, ao retomar a etapa **III**, compreendeu totalmente a questão em que anteriormente havia registrado duas possíveis respostas. Verificamos que após a utilização do *applet* para auxiliar na resolução dos problemas propostos, os alunos puderam fazer novas conjecturas e definir uma única resposta, por sinal correta, para cada um dos três itens.

Acreditamos que a visualização dos registros, apresentados com a utilização do *applet*, foi de suma importância para que os alunos respondessem corretamente as questões, porém, percebemos que os registros elaborados para resolver cada situação não são apresentados com a utilização de parênteses e dispostos na posição horizontal, conforme aparecem no *applet*.

Esse fato nos faz perceber a necessidade de atentar para a importância que devemos dar para os conhecimentos prévios dos alunos, pois o registro das operações na posição horizontal, comumente utilizado, não foi assimilado, nem reproduzido pelos alunos. Acreditamos que uma intervenção em que seja solicitado, explicitamente, que eles organizem as operações, conforme visualizaram, possa favorecer a compreensão desses registros.

## Protocolo da dupla B

Quadro 20 - Atividade 2 - Etapa VI – Dupla B

III) Responda:

a) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -4? Registre a operação e o resultado.

b) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -9? Registre a operação e o resultado.

c) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -10? Registre a operação e o resultado.

$\begin{array}{r} 9 \\ + (-4) \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \\ - 4 \\ \hline 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 9 \end{array}$
$\begin{array}{r} 9 \\ + (-9) \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ - 9 \\ \hline 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 9 \end{array}$
$\begin{array}{r} 9 \\ + (-10) \\ \hline -1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19 \\ - 9 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 10 \end{array}$

## Análise

No protocolo apresentado pela **dupla B**, percebemos que o desenvolvimento das etapas em que foi utilizado o *applet* não auxiliou para que os alunos tivessem uma compreensão das questões propostas na etapa **IV**. Verificamos que a dupla continuou com a mesma interpretação dada às questões anteriormente.

Ressaltamos que essa dupla também organizou as operações na posição vertical e, da mesma forma que ocorreu em outras situações, deixou de considerar corretamente o sinal de menos que acompanha os números, interpretando o mesmo como um sinal para a segunda operação que deveria realizar.

Nesse registro também percebemos um obstáculo de caráter epistemológico, pois mesmo realizando em outras questões operações em que o sinal de menos foi interpretado de forma correta, o conhecimento interiorizado sobre o significado desse símbolo insiste em prevalecer.

### Atividade 3 - Etapas de I a V - Subtração de números inteiros.

O objetivo dessa atividade é conduzir o aluno a fazer uma reflexão sobre a subtração de números inteiros, verificando a necessidade de sua aplicação em situações diversas e percebendo que subtrair pode não significar, necessariamente, diminuir um valor.

#### Protocolo da dupla A

Quadro 21 - Atividade 3 - Etapas I e II – Dupla A

**Atividade 3. Subtração de números inteiros.**

**I) Considere que Paulo está no 4º andar de um prédio que tem dois andares abaixo do térreo. Responda as questões abaixo registrando as operações que precisou efetuar.**

a) Se Paulo pegar o elevador e descer três andares, em qual andar o elevador vai parar?

no 1º andar

b) Se Paulo pegar o elevador e descer cinco andares, em qual andar o elevador vai parar?

01º abaixo do térreo

**II) Marcos estava com o saldo, no banco, no valor total de -13 000 reais. O gerente do banco ao analisar o extrato de Marcos, percebeu que um valor de -3000 reais foi lançado por engano na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente a situação e determine como ficou o saldo de Marcos.**

-10.000 por teravam -3000

## Análise

No protocolo da **dupla A**, verificamos que os itens **a** e **b**, da etapa **I**, foram respondidos corretamente, no entanto, para o item **b** não foi utilizado o sinal de menos para se referir ao andar em que o elevador iria parar.

Esse registro nos faz refletir em torno da importância do contexto que se deseja utilizar para abordar esse objeto matemático, pois a resposta apresentada pelos alunos está absolutamente correta, e para isso não foi necessário utilizar a representação do número negativo em que o mesmo é acompanhado do sinal de menos.

Na etapa **II** dessa atividade, percebemos que os alunos responderam corretamente a questão e procuraram justificar a resposta apresentada, esclarecendo que “tiraram -3000”. Nessa situação, implicitamente, os alunos responderam a uma questão que formalmente é representada por:  $-a - (-b)$ , em que é recomendado que, primeiramente, se elimine os parênteses utilizando a “regra de sinais”. Inferimos que uma abordagem em que o aluno consiga “identificar” que de  $-a$  foi subtraído **uma vez** o  $-b$  possibilite uma compreensão em torno da regra de sinais utilizada na multiplicação. Ressaltamos que segundo Glaeser (1985), o jovem Henri Beyle (1783-1843) mostrava-se indignado ao perceber que ninguém conseguia oferecer uma explicação sobre o porquê o negativo multiplicado por negativo resultava em positivo.

## Protocolo da dupla B

Quadro 22 - Atividade 3 - Etapas I e II – Dupla B

<p><b>Atividade 3.</b> Subtração de números inteiros.</p> <p><b>I)</b> Considere que Paulo está no 4º andar de um prédio que tem dois andares abaixo do térreo. Responda as questões abaixo registrando as operações que precisou efetuar.</p> <p>a) Se Paulo pegar o elevador e descer três andares, em qual andar o elevador vai parar?</p> <p>2 andares</p> <p>b) Se Paulo pegar o elevador e descer cinco andares, em qual andar o elevador vai parar?</p> <p>-1º andar</p> <p><b>II)</b> Marcos estava com o saldo, no banco, no valor total de -13 000 reais. O gerente do banco ao analisar o extrato de Marcos, percebeu que um valor de -3000 reais foi lançado por engano na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente a situação e determine como ficou o saldo de Marcos.</p> <p>-13 000</p>
---

## **Análise**

No protocolo da **dupla B**, percebemos que o contexto utilizado na etapa **I** não favoreceu a compreensão dos alunos, pois, aparentemente, de acordo com seus conhecimentos prévios, não seria possível descer cinco andares estando apenas no quarto. Apesar de parecer acessível aos alunos, esse contexto deixa de considerar que, se eles habitarem casas térreas, não é comum que os mesmos tenham acesso ao subsolo de um edifício, a não ser que exista a necessidade de se dirigir ao estacionamento. Sendo assim, tal contexto não seria favorável para abordar esse objeto matemático.

Na etapa **II** dessa atividade, presenciei um momento em que a dupla discutia o problema e dizia “*se o gerente errou, então ficou menos treze mesmo*”. A interpretação apresentada pela dupla não considerou o fato do gerente ter corrigido o erro que foi verificado, sendo assim, a conclusão resultou no registro apresentado.

## Protocolo da dupla A

Quadro 23 - Atividade 3 - Etapa III – Dupla A

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante, não foi muito bem, e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-2
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	-18

a) Qual o número total de pontos desse jogador após todas as fases?  
-18 pontos

b) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase? -15 pontos

c) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase e da 7ª fase? -12 pontos

d) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3)$ ?  
$$\begin{array}{r} -18 \\ - \quad 3 \\ \hline -15 \end{array}$$

e) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3) - (-3)$ ?  
$$\begin{array}{r} 18 \\ -3 \\ -3 \\ \hline 12 \end{array}$$

### Análise

No protocolo da **dupla A**, percebemos que os alunos responderam as questões corretamente, demonstrando que houve uma boa compreensão em relação à subtração de números inteiros. Verificamos que a organização dos cálculos a serem efetuados aparece na posição vertical, como podemos notar no item **d**, porém, apesar do registro informal, a compreensão do problema proposto prevalece.

Vale ressaltar que no item **c** o aluno se equivocou no cálculo e no item **e** deixou de anotar o sinal de menos na resposta apresentada.

## Protocolo da dupla B

Quadro 24 - Atividade 3 - Etapa III – Dupla B

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante, não foi muito bem, e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-2
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	-18

a) Qual o número total de pontos desse jogador após todas as fases?  
-18

b) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase?  
-15

c) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase e da 7ª fase?  
-12

d) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3)$ ?  
-15

e) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3) - (-3)$ ?  
-24

### Análise

Ao analisar o protocolo da **dupla B**, percebemos que os alunos responderam as questões corretamente, com exceção do item **e**. Notamos que a apresentação de uma situação disposta em uma tabela favoreceu a compreensão dos alunos, e essa dupla, que havia apresentado dificuldade para responder as questões anteriores, cujo conteúdo refere-se à adição de números inteiros, teve sucesso na subtração.

## Protocolo da dupla A

### Quadro 25- Atividade 3 - Etapa IV – Dupla A

IV) Calcule o valor de cada operação, com o auxílio do objeto de aprendizagem, e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo "Subtração\_inteiros" e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

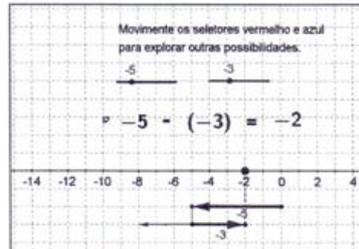


Figura 2- Subtração de Números Inteiros

- a)  $6-(+2) = \dots 4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *positivo*
- b)  $6-(+9) = \dots -3 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- c) Observe as operações,  $6-(+2)$  e  $6-(+9)$ . Por que um resultado é positivo e o outro negativo? *porque 6 é menor que 9*
- d)  $-5-(+1) = \dots -6 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- e)  $-5+(+5) = \dots 0 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- f)  $-6-(-2) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- g)  $-6-(-9) = \dots 3 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *positivo*
- h)  $-7-(-3) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- i)  $-7-(-5) = \dots -2 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- j)  $-7-(-8) = \dots 1 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *positivo*
- k) Observe as operações  $-7-(-5)$  e  $-7-(-8)$ . Por que um resultado é negativo e o outro é positivo? *porque 7 é maior que 5 e 8 - ser +*
- l)  $-10-(-3) = \dots -7 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*
- m)  $-10-(-3)-(-3) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*

## Análise

No desenvolvimento dessa etapa da atividade, os alunos manipularam os seletores e responderam os itens sem apresentar dificuldades. No entanto, chamamos a atenção para os itens c e k, em que os alunos apresentaram argumentos para validar resultados.

No item c, apesar da questão ser apresentada na posição horizontal e utilizando parênteses para explicitar a operação, bem como os valores envolvidos na mesma, os alunos demonstraram ter compreendido que o resultado ficou negativo.

No item **k** verificamos um argumento que já havia sido utilizado em uma questão, “porque o 8 cobre o 7 sobra um positivo”. Percebemos que a dupla interpretou a questão de forma particular e estendeu sua conclusão para validar suas respostas.

A construção de um argumento próprio para validar suas conclusões é fundamental para que os alunos desenvolvam um conhecimento, pois quando houver a formalização, eles poderão perceber suas próprias conjecturas redigidas em outros termos.

## Protocolo da dupla B

### Quadro 26 - Atividade 3 - Etapa IV – Dupla B

IV) Calcule o valor de cada operação, com o auxílio do objeto de aprendizagem, e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Subtração\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

Movimente os seletores vermelho e azul para explorar outras possibilidades.

$-5 - (-3) = -2$

**Figura 2- Subtração de Números Inteiros**

a)  $6-(+2) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? ..NEGATIVO.....

b)  $6-(+9) = \dots -3 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? NEGATIVO.....

c) Observe as operações,  $6-(+2)$  e  $6-(+9)$ . Por que um resultado é positivo e o outro negativo? *por causa do ponto*

d)  $-5-(+1) = \dots -6 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? ..NEGATIVO.....

e)  $-5+(+5) = \dots 0 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? NEGATIVO.....

f)  $-6-(-2) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? NEGATIVO.....

g)  $-6-(-9) = \dots 3 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? POSITIVO.....

h)  $-7-(-3) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? NEGATIVO.....

i)  $-7-(-5) = \dots -2 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? NEGATIVO.....

j)  $-7-(-8) = \dots 1 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? POSITIVO.....

k) Observe as operações  $-7-(-5)$  e  $-7-(-8)$ . Por que um resultado é negativo e o outro é positivo? *por causa do ponto*

l)  $-10-(-3) = \dots -7 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? ..NEGATIVO.....

m)  $-10-(-3)-(-3) = \dots -4 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? NEGATIVO.....

### Análise

No protocolo da **dupla B**, verificamos que a utilização do *applet* auxiliou para que os alunos respondessem as questões corretamente. No entanto, para os itens **c** e **k**, o registro apresentado pela dupla não nos permitiu analisar que conhecimento ou interpretação poderiam ter sido feitas para que apresentassem tal resposta “por causa do ponto”. Inferimos que a dupla, talvez, se refira ao “ponto final”, mas não compreendemos a relação que fizeram para chegar a essa conclusão.

Vale ressaltar a compreensão que a dupla apresentou em relação ao item **l**, em que subtraiu corretamente do -10, duas vezes o - 3. Lembramos que para realizar essa

atividade foi necessário que a dupla atentasse para o sinal que acompanha o resultado, que foi obtido em duas etapas, como pude presenciar quando discutiam, “*se é menos dez, primeiro tira menos três, fica menos sete e depois tira menos três de novo*”. A dupla discutiu e resolveu essa questão com o auxílio do *applet*, onde realizou a primeira operação,  $-10 - (-3)$  e, após obter  $-6$ , realizou a segunda.

## Etapa VI - Retomando as atividades após a utilização do *applet*

### Protocolo da dupla A

Ressaltamos que para a **dupla A** não foi solicitado que realizassem novamente essas etapas da atividade, pois os registros apresentados anteriormente foram satisfatórios para analisar a compreensão que os alunos desenvolveram em relação à subtração de números inteiros.

### Protocolo da dupla B

Quadro 27 - Atividade 3 - Etapas I e II – Dupla B

<p><b>Atividade 3.</b> Subtração de números inteiros.</p> <p><b>I)</b> Considere que Paulo está no 4º andar de um prédio que tem dois andares abaixo do térreo. Responda as questões abaixo registrando as operações que precisou efetuar.</p> <p>a) Se Paulo pegar o elevador e descer três andares, em qual andar o elevador vai parar?</p> <p style="text-align: center;">2 andar</p> <p>b) Se Paulo pegar o elevador e descer cinco andares, em qual andar o elevador vai parar?</p> <p style="text-align: center;">Térreo</p> <p><b>II)</b> Marcos estava com o saldo, no banco, no valor total de <math>-13\ 000</math> reais. O gerente do banco ao analisar o extrato de Marcos, percebeu que um valor de <math>-3000</math> reais foi lançado por engano na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente a situação e determine como ficou o saldo de Marcos.</p> <p style="text-align: center;"><math>-13.000</math></p>
--

### Análise

Ao retomar essa atividade, percebemos que o contexto do deslocamento de um elevador não é acessível para que a dupla compreenda a questão e mobilize seus conhecimentos prévios para resolvê-la. Para a dupla, não seria possível que um elevador conseguisse chegar abaixo do térreo.

Na etapa II, verificamos que os alunos não interpretaram a questão corretamente, sendo assim, apenas anotaram novamente o saldo inicial como resposta para a questão.

### Protocolo da dupla B

Quadro 28- Atividade 3 - Etapas III e IV – Dupla B

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante, não foi muito bem, e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-2
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	-18

a) Qual o número total de pontos desse jogador após todas as fases?

-18

b) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase?

-15

c) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase e da 7ª fase?

-12

d) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3)$ ?

-15

e) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3) - (-3)$ ?

-12

IV) Calcule o valor de cada operação, com o auxílio do objeto de aprendizagem, e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo "Subtração\_inteiros" e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

### Análise

Nesse protocolo percebemos que a dupla voltou a resolver as questões corretamente, e dessa vez, para o item e, a resposta apresentada teve uma alteração. Verificamos que após realizar as atividades com o auxílio do *applet*, a dupla fez novas conjecturas e compreendeu a questão respondendo corretamente.

**Atividade 4 - Etapas de I a VI.** Multiplicação de números inteiros.

Nas etapas **I** e **II** dessa atividade são abordados os números inteiros utilizando contextos sobre jogos e temperaturas. A multiplicação, nessas duas etapas, é solicitada de forma explícita, pois o objetivo da atividade é verificar de que forma os alunos operam com os números inteiros.

Esperamos que essa primeira abordagem possibilite que o aluno conjecture sobre a multiplicação de números inteiros, tirando suas conclusões e procurando validá-las nesse contexto para posteriormente generalizar.

### Protocolo da dupla A

Quadro 29 - Atividade 4 - Etapas I e II – Dupla A

**Atividade 4. Multiplicação de números inteiros.**

D) Considere que você está na posição **G** indicada na figura a seguir. Cada ponto representa quantos pontos obtidos no jogo.

a) Em que posição você vai ficar se conseguir duas vezes -3 pontos?  
 $-3$

b) Voltando para a posição **G**, em que posição você vai ficar se conseguir duas vezes +2 pontos?  
 $2$

II) Marcos ouviu na previsão do tempo que na cidade A, a temperatura mínima registrada foi de  $-2^{\circ}\text{C}$  e na cidade B a temperatura foi três vezes menor do que na cidade A. Qual foi a temperatura na cidade B?  
 $-6^{\circ}\text{C}$

### Análise

Nessa etapa **I**, verificamos que a **dupla A** não interpretou corretamente os itens **a** e **b**, e contabilizou a pontuação apenas uma vez. No entanto, descolou-se no sentido correto, demonstrando que foi construída uma compreensão em relação ao significado do sinal que acompanhava o número.

Na etapa **II**, percebemos que a dupla apresentou uma compreensão em relação a multiplicação de números inteiros, pois respondeu corretamente a questão. Inferimos que o fato da dupla acreditar que já possui uma compreensão “total” dos números inteiros e suas operações contribuiu para o equívoco verificado na etapa **I**.

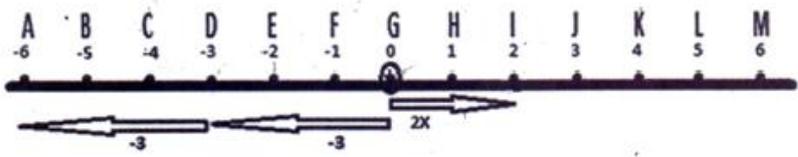
Vale lembrar que a **dupla A** realizou todas as atividades anteriores, demonstrando uma compreensão satisfatória em relação ao objeto matemático.

### Protocolo da dupla B

Quadro 30 - Atividade 4 - Etapas I e II – Dupla B

**Atividade 4.** Multiplicação de números inteiros.

I) Considere que você está na posição **G** indicada na figura a seguir. Cada ponto representa quantos pontos obtidos no jogo.



a) Em que posição você vai ficar se conseguir duas vezes -3 pontos?

~~6~~

b) Voltando para a posição **G**, em que posição você vai ficar se conseguir duas vezes +2 pontos?

4

II) Marcos ouviu na previsão do tempo que na cidade A, a temperatura mínima registrada foi de  $-2^{\circ}\text{C}$  e na cidade B a temperatura foi três vezes menor do que na cidade A. Qual foi a temperatura na cidade B?

$0^{\circ}\text{C}$

### Análise

No protocolo da **dupla B**, verificamos que a etapa **I** foi realizada com êxito e os alunos observaram o sinal que acompanhava os números. É importante salientar que nas questões das atividades **1** e **2**, a dupla alternou momentos em que atentava ou não à presença do sinal que acompanhava os números, porém, a partir do desenvolvimento da atividade sobre subtração de números inteiros, a dupla passou a registrar corretamente suas respostas.

No entanto, percebemos no registro apresentado pela dupla, na etapa **II**, que a interpretação de questões em que é necessária uma reflexão sem o auxílio de uma tabela ou reta orientada representa um obstáculo para os alunos. Também notamos que nessa etapa os alunos voltaram a não admitir valores inferiores a zero. Esse fato caracteriza um obstáculo epistemológico, que reaparece sempre que se verifica uma dificuldade em compreender uma situação proposta em que um novo objeto matemático deva ser utilizado.

#### **Atividade 4 – Etapas III e IV**

Na etapa **III e IV**, o objetivo é introduzir a regra de sinal  $(-) \times (-) = +$ , utilizando como artifício um contexto no qual subtrair  $n$  vezes um valor negativo equivale a adicionar  $n$  vezes esse valor positivo. Para isso, partimos da adição de números inteiros, utilizando uma tabela que indica a pontuação e introduzimos a multiplicação entre números negativos a partir da subtração de  $n$  vezes um mesmo número negativo.

Esperamos que os alunos possam se engajar em uma investigação, conjecturando sobre a situação proposta e registrando suas conclusões diante de multiplicações que envolvem dois números negativos.

## Protocolo da dupla A

Quadro 31- Atividade 4 - Etapas III e IV – Dupla A

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante não foi muito bem e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-4
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	-20

a) Qual o total de pontos desse jogador? - 20

b) Se do total de pontos subtrairmos **uma vez** o -3, como fica a pontuação desse jogador? -2

c) Subtrair **uma vez** o -3, é o mesmo que somar uma vez o +3? Não porque o sinal do jogador é negativo. 
$$\begin{array}{r} -3 \\ -1 \\ \hline -2 \end{array}$$

d) Se do total de pontos subtrairmos **duas vezes** o -3, como fica a pontuação desse jogador? 
$$\begin{array}{r} -3 \\ -3 \\ \hline -6 \end{array}$$

e) Se aq total de pontos somarmos 6, como fica a pontuação desse jogador? ~~26~~ - 24

f) Subtrair **duas vezes** o -3 é o mesmo que somar +6? Sim Não

IV) Paulo estava com um saldo, no banco, no valor total de -10 000 reais. O gerente do banco analisou o extrato de Paulo e percebeu que o valor de -2000 reais, aparecia **duas vezes**, por engano, na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente essa situação e determine como ficou o saldo de Paulo.

6000 reais

### Análise

No protocolo da **dupla A** verificamos que o item **a** foi respondido corretamente, o que vem a reafirmar a compreensão que os alunos desenvolveram em relação à soma de números inteiros. No entanto, no item **b**, a dupla apresentou uma resposta, cuja origem é um registro em que é feita a operação  $-3-1$ , na posição vertical, e como resultado temos -2.

Para o item **c**, a dupla respondeu que existe uma diferença entre subtrair -3 e adicionar 3. Para justificar essa resposta, os alunos registraram o argumento “não

porque o menos vai dar abaixo de zero”. Verificamos que tal argumento é respaldado pelo fato do aluno comparar apenas os dois números e perceber que o que apresenta o sinal de menos é o menor. No item **d**, a dupla volta a apresentar um registro semelhante ao primeiro, demonstrando que aparentemente não compreendeu a questão.

Percebemos que no item **e** a dupla responde, efetuando a soma entre os valores sem considerar o sinal de cada um deles e, em seguida, descarta esse registro e apresenta a resposta correta.

Para o item **f**, a exemplo do item **c**, a dupla não reconhece a igualdade entre as duas ações.

Acreditamos que para os itens **c** e **f**, se fosse solicitada a adição da pontuação com +6 e com +3, a dupla poderia ter interpretado melhor a questão.

Considerando a dificuldade demonstrada pela **dupla A** para responder a etapa **III**, esperávamos que a compreensão da multiplicação de números inteiros estivesse comprometida. No entanto, analisando o registro da etapa **IV**, percebemos que a dupla respondeu a questão com coerência, porém, deixou de anotar o sinal, sendo assim, voltamos a salientar o quanto é importante o contexto para os alunos, pois apesar de não ter compreendido a questão proposta na etapa **III**, a dupla não apresentou dificuldade para compreender uma situação semelhante.

Já havíamos percebido em questões anteriores o quanto o contexto favorece a compreensão para essa dupla em específico, no entanto, tal comportamento não se estende à outra dupla que analisamos.

## Protocolo da dupla B

Quadro 32 - Atividade 4 - Etapas III e IV – Dupla B

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante não foi muito bem e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-4
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	-20

a) Qual o total de pontos desse jogador?  
-20

b) Se do total de pontos subtrairmos **uma vez** o -3, como fica a pontuação desse jogador? -17

c) Subtrair **uma vez** o -3, é o mesmo que somar uma vez o +3?  
não

d) Se do total de pontos subtrairmos **duas vezes** o -3, como fica a pontuação desse jogador?  
-17

e) Se ao total de pontos somarmos 6, como fica a pontuação desse jogador?  
-16

f) Subtrair **duas vezes** o -3 é o mesmo que somar +6?  
não

IV) Paulo estava com um saldo, no banco, no valor total de -10 000 reais. O gerente do banco analisou o extrato de Paulo e percebeu que o valor de -2000 reais, aparecia **duas vezes**, por engano, na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente essa situação e determine como ficou o saldo de Paulo.  
-10.000 reais

### Análise

No protocolo da **dupla B**, verificamos que os itens **a** e **b** foram respondidos corretamente, portanto, a adição e a subtração de números inteiros, em que está

implícita a operação  $-20 - (-3)$  foi realizada com sucesso. Assim, para o item **c**, a resposta apresentada foi objetiva, e inferimos que a dificuldade mencionada para a **dupla A** se estendeu à **dupla B**.

No item **d** dessa etapa, a dupla não atentou ao termo “duas vezes” e subtraiu apenas uma vez o número  $-3$ , obtendo o mesmo resultado do item **b**. Para responder o item **e** a dupla efetuou a adição sem considerar o respectivo sinal, porém, registrou a resposta com o sinal negativo, demonstrando uma alternância em atentar-se ou não ao mesmo.

No item **f**, percebe-se que a dupla não relaciona a subtração de um número negativo à adição de um número positivo, respondendo a questão considerando a “diferença explícita” entre os termos “subtrair” e “somar”.

#### Atividade 4 – Etapa V e VI

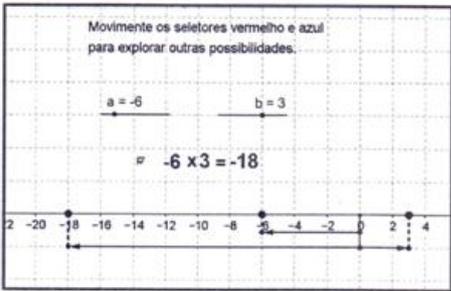
Na etapa **V** dessa atividade, esperamos que a visualização dos registros e dos resultados obtidos a partir da utilização do *applet* permita que o aluno faça conjecturas sobre o que é observado, tirando suas conclusões e fazendo novas anotações para as etapas anteriores, se julgar necessário. Acreditamos também que os alunos poderão abstrair o conhecimento relativo à multiplicação de dois números inteiros e generalizar sua aplicação para responder as questões da etapa **VI**, cuja configuração do *applet* não permite visualizar.

#### Protocolo da dupla A

Quadro 33 - Atividade 4 - Etapas V e VI – Dupla A

V) Calcule o valor de cada operação com o auxílio do objeto de aprendizagem.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Multiplicação\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.



Movimente os seletores vermelho e azul para explorar outras possibilidades.

$a = -6$        $b = 3$

$\# -6 \times 3 = -18$

2 -20 -18 -16 -14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4

a)  $2 \times 5 = 10$   
 O resultado é positivo ou negativo? *positivo*

b)  $2 \times (-5) = -10$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*

c)  $-6 \times (2) = -12$   
 O resultado é positivo ou negativo? *negativo*

d)  $-2 \times (-4) = 8$   
 O resultado é positivo ou negativo? *positivo*

e)  $-4 \times (-5) = 20$   
 O resultado é positivo ou negativo? *positivo*

VI) Responda as questões:

a) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **positivo** por outro número **positivo**? *da um resultado positivo*

b) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **negativo** por um número **positivo**? *do negativo*

c) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **negativo** por outro número **negativo**? *do positivo*

d) Calcule o resultado de cada uma das operações a seguir.

- $8 \times 5 = 40$
- $5 \times (-12) = -60$
- $-3 \times (20) = -60$
- $-5 \times (-12) = 60$

### Análise

No protocolo da **dupla A**, verificamos que na etapa **V** todos os itens foram respondidos corretamente, com os resultados devidamente registrados. Lembramos que conforme a análise dos itens anteriores, essa dupla tem apresentado uma compreensão satisfatória em relação aos números inteiros e suas operações.

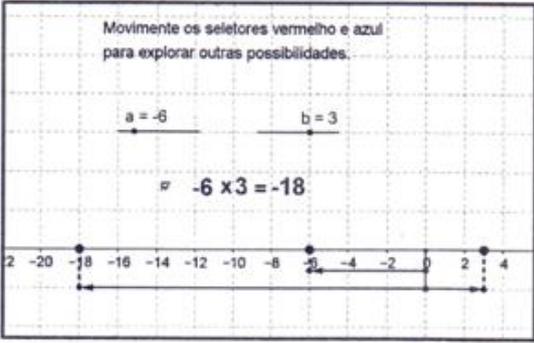
Na etapa **VI**, os alunos também responderam os itens **a**, **b** e **c**, corretamente, reafirmando a compreensão dos registros que haviam visualizado na etapa anterior. Ressaltamos que no item **d** houve a necessidade dos alunos refletirem sobre os registros observados com o auxílio do *applet* para generalizar e responder as questões cuja configuração não permitia visualizar, porém, também verificamos que em duas das operações os alunos deixaram de registrar o sinal de negativo na resposta apresentada.

## Protocolo da dupla B

Quadro 34- Atividade 4 - Etapas V e VI – Dupla B

V) Calcule o valor de cada operação com o auxílio do objeto de aprendizagem.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Multiplicação\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.



**Figura 3- Multiplicação de Números Inteiros**

- a)  $2 \times 5 = \dots 10 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? **POSITIVO**.....
- b)  $2 \times (-5) = \dots -10 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? **NEGATIVO**.....
- c)  $-6 \times (2) = \dots -12 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? **NEGATIVO**.....
- d)  $-2 \times (-4) = \dots 8 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? **POSITIVO**.....
- e)  $-4 \times (-5) = \dots 20 \dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? **POSITIVO**.....

VI) Responda as questões:

- a) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **positivo** por outro número **positivo**? **FICA POSITIVO**
- b) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **negativo** por um número **positivo**? **FICA NEGATIVO**
- c) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **negativo** por outro número **negativo**? **POSITIVO**
- d) Calcule o resultado de cada uma das operações a seguir.
- $8 \times 5 = \dots 40 \dots$
  - $5 \times (-12) = \dots -60 \dots$
  - $-3 \times (20) = \dots -60 \dots$
  - $-5 \times (-12) = \dots 60 \dots$

## **Análise**

Nesse protocolo percebemos que a **dupla B**, na etapa **V**, também respondeu todos os itens corretamente e, demonstrando que tem se atentado ao sinal que acompanha o número, registrou corretamente as respostas.

Na etapa **VI** dessa atividade, os alunos responderam aos itens **a**, **b** e **c** corretamente, reafirmando o que puderam visualizar com o auxílio do *applet*. No entanto, no item **d**, a dupla registrou, nas três últimas questões, respostas que nos conduziram a refletir sobre a interpretação que tiveram. Ao se deparar com a questão em que aparece  $5 \times (-12)$ , a dupla realizou a multiplicação de cinco por doze, obtendo como resultado 60, e subtraiu o 12. Percebemos no raciocínio apresentado pelos alunos como é importante a compreensão do registro formal utilizado para indicar uma operação entre números inteiros, pois mesmo após inferir que a dupla havia atentado para o sinal que acompanhava os números, nos deparamos com essa situação que revela que outras dúvidas podem surgir.

### **Atividade 5 - Etapas de I a V. Divisão de números inteiros.**

Na etapa **I** dessa atividade, a divisão aparece de forma explícita, utilizando um jogo como contexto para a situação apresentada. Esperamos que os alunos compreendam que ao dividirmos um número negativo por um número positivo o resultado obtido é um número negativo. Sendo assim, a pontuação negativa, obtida pela dupla, é dividida em duas partes iguais, ficando ambos os integrantes com uma pontuação negativa.

Na etapa **III** dessa atividade, apresentamos um contexto em que um saldo negativo, ao ser dividido entre sócios em partes iguais, apresenta um resultado negativo referente ao valor que cada um deve assumir. Acreditamos que a situação apresentada possa contribuir para que o aluno reflita sobre a divisão entre dois números negativos, em que o resultado apresentado é um número positivo.

## Protocolo da dupla A

Quadro 35 – Atividade 5 - Etapas I a III – Dupla A

**Atividade 5. Divisão de números inteiros.**

**I)** Após participar de um jogo, composto por três etapas, a dupla formada por Paulo e Carlos teve um resultado final igual a -10 pontos. Sabendo que essa pontuação foi dividida entre os dois, em partes iguais, com quantos pontos cada um ficou?

-5 Cada um ficou

**II)** Após verificar, junto ao banco, o saldo de uma empresa era -15000 reais. Sabendo que esse saldo, de -15000 reais, será dividido entre os três sócios da empresa, em partes iguais, represente a situação e determine o valor que corresponde a cada um deles.

-5000 reais

**III)** Em um julgamento o juiz decidiu que o saldo de -8000 reais de uma empresa será dividido, em partes iguais, e pago pelos sócios. Sabendo que cada sócio teve que assumir -4000 reais do valor total, quantos sócios tem essa empresa?

2 sócios

### Análise

Nesse protocolo verificamos que a dupla respondeu corretamente as etapas **I** e **II**, e registrou as respostas considerando os sinais que acompanhavam os valores. Para a etapa **III**, percebemos que a dupla interpretou corretamente o problema, compreendendo que o fato dos valores envolvidos na divisão serem negativos não resultaria em um resultado negativo por se tratar do número de sócios, como é especificado no registro dos alunos.

## Protocolo da dupla B

Quadro 36 – Atividade 5 - Etapas I a III – Dupla B

**Atividade 5.** Divisão de números inteiros.

I) Após participar de um jogo, composto por três etapas, a dupla formada por Paulo e Carlos teve um resultado final igual a -10 pontos. Sabendo que essa pontuação foi dividida entre os dois, em partes iguais, com quantos pontos cada um ficou?

- 5 pontos

II) Após verificar, junto ao banco, o saldo de uma empresa era -15000 reais. Sabendo que esse saldo, de -15000 reais, será dividido entre os três sócios da empresa, em partes iguais, represente a situação e determine o valor que corresponde a cada um deles.

$\frac{-15000}{3} = -5000$

III) Em um julgamento o juiz decidiu que o saldo de -8000 reais de uma empresa será dividido, em partes iguais, e pago pelos sócios. Sabendo que cada sócio teve que assumir -4000 reais do valor total, quantos sócios tem essa empresa?

2 sócios

### Análise

No protocolo da **dupla B**, verificamos que a etapa **I** foi respondida corretamente e o registro do resultado foi realizado, considerando devidamente o sinal. No entanto, na etapa **II**, a dupla não registrou o resultado com seu devido sinal, sinalizando que a mesma não o considerou para realizar a operação de divisão e definir que cada sócio ficaria com o saldo negativo no valor de -15000 reais.

Na etapa **III** dessa atividade, a dupla registrou a resposta corretamente e, de acordo com os registros verificados posteriormente, em que os alunos demonstraram ter generalizado o que observaram no *applet*, inferimos que a dupla atentou ao sinal dos números envolvidos, bem como interpretou o problema e concluiu que a resposta seria positiva por se tratar de um número de pessoas.

Não acreditamos que a dupla possa ter conjecturado sobre a regra de sinais de forma “autônoma”, refletindo sobre o problema proposto, porém, verificamos que a situação é acessível aos alunos e inferimos que com uma intervenção planejada pelo professor,

essa possa ser uma abordagem que aproxime o aluno do objeto matemático quando trabalhada a operação de divisão.

Na etapa **IV** dessa atividade, esperamos que a visualização dos registros e dos resultados, obtidos a partir da utilização do *applet*., permita que o aluno faça conjecturas sobre o que é observado, tirando suas conclusões e fazendo novas anotações para as etapas anteriores, se julgar necessário.

### Protocolo da dupla A

Quadro 37– Atividade 5 - Etapa IV – Dupla A

**IV) Calcule o valor de cada operação com o auxílio do objeto de aprendizagem.**

**Instrução:** Abrir o arquivo “Divisão\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

Movimente os seletores vermelho e azul para explorar outras possibilidades.

$b = -3$                        $a = 5$

$\frac{-3}{5} = -0.6$

a)  $6:(2) = \dots 3 \dots$   
O resultado é positivo ou negativo? ..... *positivo* .....

b)  $8:(-4) = \dots -2 \dots$   
O resultado é positivo ou negativo? ..... *negativo* .....

c)  $-6:(2) = \dots -3 \dots$   
O resultado é positivo ou negativo? ..... *negativo* .....

d)  $-10:(-2) = \dots 5 \dots$   
O resultado é positivo ou negativo? ..... *positivo* .....

e)  $-6:(-3) = \dots 2 \dots$   
O resultado é positivo ou negativo? ..... *positivo* .....

### Análise

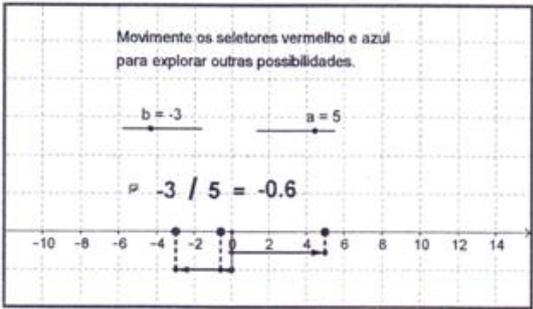
Na etapa **IV** dessa atividade, verificamos que a **dupla A** respondeu corretamente todas as questões, e percebemos também que os respectivos sinais de cada um dos números foram devidamente anotados. Inferimos que a dupla percebeu a “regra” utilizada para a divisão de números inteiros e, assim, não apresentará dificuldades para generalizá-la.

## Protocolo da dupla B

Quadro 38 – Atividade 5 – Etapa IV– Dupla B

IV) Calcule o valor de cada operação com o auxílio do objeto de aprendizagem.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Divisão\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.



Movimente os seletores vermelho e azul para explorar outras possibilidades.

$b = -3$        $a = 5$

$-3 / 5 = -0.6$

a)  $6:(2) = \dots\dots\dots 8$   
O resultado é positivo ou negativo? ..POSITIVO.....

b)  $8:(-4) = \dots\dots\dots -2$   
O resultado é positivo ou negativo? ..NEGATIVO.....

c)  $-6:(2) = \dots\dots\dots -3$   
O resultado é positivo ou negativo? ..NEGATIVO.....

d)  $-10:(-2) = \dots\dots\dots -5$   
O resultado é positivo ou negativo? ..NEGATIVO.....

e)  $-6:(-3) = \dots\dots\dots 2$   
O resultado é positivo ou negativo? ..POSITIVO.....

### Análise

Na etapa **IV** dessa atividade, verificamos que a dupla respondeu apenas o item **d** de forma equivocada, e percebemos também que os respectivos sinais de cada um dos números foram devidamente anotados. Inferimos que a dupla passou a atentar para a importância do registro “diferenciado” quando se tratar de um número inteiro negativo. Verificamos também que a atenção ao registro já havia sido evidenciada em outras etapas, porém, a dupla voltou a não se atentar ao sinal posteriormente.

Na etapa **V** dessa atividade, procuramos de forma implícita enfatizar a regra de sinais para a divisão de números inteiros. Esperamos que os alunos respondam as questões propostas recorrendo ao *applet*, se julgarem necessário, e, ao aplicar o conhecimento construído, possam generalizar os resultados.

## Protocolo da dupla A

Quadro 39 – Atividade 5 - Etapa V – Dupla A

V) Responda as questões:

a) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **positivo** por outro número **positivo**? *da numero positivos*

b) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **positivo** por um número **negativo**? *da negativos*

c) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **negativo** por um número **positivo**? *da negativos*

d) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **negativo** por outro número **negativo**? *da positivos*

e) Qual é o resultado de cada uma das operações a seguir?

- $40:5 = 8$
- $50:(-10) = 5,00$
- $-30:(6) = -5$
- $-20:(-4) = 4$
- $-14:(-2) = 7$

### Análise

Nesse protocolo verificamos que a **dupla A** responde os itens **a**, **b**, **c** e **d** corretamente e essas respostas poderão ser utilizadas para “definir” uma “regra de sinais”.

No item **e**, verificamos que a dupla abstraiu e generalizou o que foi observado no *applet*, respondendo as questões que extrapolaram sua configuração sem dificuldades. No entanto, notamos que a dupla cometeu um equívoco na divisão de  $-20$  por  $-4$ .

## Protocolo da dupla B

### Quadro 40 – Atividade 5 - Etapa V – Dupla B

V) Responda as questões:

a) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **positivo** por outro número **positivo**? *POSITIVO*

b) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **positivo** por um número **negativo**? *NEGATIVO*

c) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **negativo** por um número **positivo**? *NEGATIVO*

d) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **negativo** por outro número **negativo**? *POSITIVO*

e) Qual é o resultado de cada uma das operações a seguir?

- $40:5 = 8$
- $50:(-10) = 0$
- $-30:(6) = 0$
- $-20:(-4) = 0$
- $-14:(-2) = 5$

### Análise

Nessa etapa verificamos que a **dupla B** respondeu os itens **a**, **b**, **c** e **d** corretamente, demonstrando uma atenção em relação ao sinal que acompanhava os números. No entanto, para o item **e**, os alunos voltaram a aplicar a mesma compreensão que tiveram em relação à multiplicação. Percebemos que, para a última questão desse item, a dupla efetuou a divisão  $-14:(-2)$ , obtendo sete e, em seguida, subtraiu 2 do resultado, concluindo que o resultado é igual a 5. Observamos também que para questões anteriores foi dado o mesmo tratamento, porém, ao efetuar a operação  $-20:(-4)$ , a dupla obteve como resultado 5, e recaindo em um obstáculo epistemológico voltou a não admitir a subtração do tipo  $a-b$ , com  $b > a$ , apresentando como resposta zero. Notamos que esse raciocínio se estendeu para as outras duas questões e, novamente, chamamos a atenção não somente para o registro apresentado pelo aluno, como também para o registro utilizado para abordar as operações com números inteiros. Ressaltamos que é imprescindível que o aluno tenha total compreensão do significado do registro formal para que possa operar corretamente.

Finalizamos as análises das atividades e, no próximo capítulo, apresentaremos nossas considerações finais.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento dessa pesquisa foi motivado pelas dificuldades verificadas no ensino e aprendizagem dos números inteiros e suas operações. Em nossa revisão de literatura, percebemos que a inquietação sobre a compreensão desse objeto matemático mobilizou estudiosos que desenvolveram diversas pesquisas, entre as quais, destacamos aquelas em que são propostas estratégias para abordar esse tema.

Ciente disso, elaboramos uma sequência de atividades com o intuito de identificar a compreensão que os alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental II, que não tiveram contato formal com esse objeto matemático, são capazes de uma compreensão sobre o mesmo, por meio de atividades propostas e com o auxílio de tecnologia.

Na sequência de atividades foram explorados recursos visuais, situações-problema e questões objetivas. Com o intuito de fazer emergir os conhecimentos prévios dos alunos, a sequência de atividades procurou enfatizar a o objeto matemático a partir de situações concretas, levando o aluno a abstrair e generalizar o conhecimento construído.

Durante a realização das atividades, identificamos nos registros e nos diálogos dos alunos situações que nos permitiram inferir sobre as singularidades referentes à compreensão que os mesmos podem desenvolver sobre os números inteiros e suas operações.

Em relação à primeira atividade, observamos que os alunos se mostraram receptivos com a presença dos números inteiros no contexto utilizado. As dificuldades que matemáticos de antigamente enfrentaram, em relação à rejeição e evitação desse objeto matemático, não se manifestaram. Nessa atividade também identificamos que, apesar da aceitação dos números inteiros, alguns alunos não se atentaram para a importância do registro do sinal de menos para se referir a valores inferiores à zero.

Verificamos que essa atitude resultou em momentos alternados de compreensão das questões propostas. Acreditamos que uma ênfase para a importância do registro formal seja fundamental para que a compreensão das operações com números inteiros não seja comprometida.

Costa (1981) argumenta sobre os sinais + e -, que qualificam os números positivos e negativos, e observa que, a rigor, esses sinais deveriam se distinguir dos sinais operatórios.

No entanto, no desdobramento das atividades propostas percebemos que, paulatinamente e de forma “autônoma”, os alunos passaram a considerar a necessidade de um registro diferenciado para os números inteiros, passando a desenvolver uma compreensão satisfatória para as questões propostas.

Durante o desenvolvimento das atividades e no respectivo contexto utilizado, chamou-nos a atenção o diálogo de uma das duplas. Ao escutar o colega afirmar que abaixo de zero os números estavam diminuindo, o outro aluno diz “mas está ficando mais frio, o frio está aumentando”. Percebemos que a afirmação sobre o “frio ficar maior” é correta e, portanto, deve-se ter uma atenção redobrada para que esse tipo de interpretação não resulte em futuros obstáculos para a compreensão da adição de números inteiros. Inferimos que tal interpretação possa se estender também para o contexto relacionado a saldos bancários, ao associar um saldo negativo ao termo dívida.

Ressaltamos que uma das duplas desenvolveu as cinco atividades demonstrando ótima compreensão dos números inteiros em contextos diversos. A partir da interpretação dos contextos, a dupla mobilizava seus conhecimentos prévios fazendo prevalecer suas conjecturas sem apegar-se às operações que poderiam estar implicitamente sugeridas pelos termos “diminuir” ou “aumentar”.

Nas etapas da atividade 2, o objetivo foi conduzir o aluno a fazer uma reflexão sobre as operações iniciais de números inteiros e a necessidade de sua aplicação em situações diversas, percebendo que somar pode não significar, necessariamente, aumentar um valor.

Na realização das atividades dessas etapas, evidenciamos que o contexto utilizado foi de suma importância.

Percebemos que os alunos, ao iniciarem as atividades em que deveriam utilizar os *applets*, ficaram entusiasmados e os manipularam com destreza. Após a realização das atividades com o auxílio dos *applets*, as duplas fizeram novas conjecturas e registraram, para algumas questões, respostas diferentes e corretas. Esse fato nos permitiu inferir que a introdução do recurso tecnológico para auxiliar na reflexão dos alunos sobre os números inteiros foi positiva, pois, entre outros aspectos, a familiaridade que os alunos possuem com esse aparato favorece a aproximação e a interação com o objeto matemático.

Notamos que a visualização dos registros das operações, disposta na posição horizontal e utilizando-se de parênteses, é pouco familiar para os alunos e resulta em interpretações equivocadas. Inferimos que é necessária uma atenção especial ao registro das operações com os números inteiros para favorecer a compreensão do aluno.

Por fim, constatamos que mesmo a dupla que apresentou uma dificuldade evidente para responder questões relacionadas com os números inteiros e suas operações, demonstrou que, mobilizando seus conhecimentos prévios, é capaz de apresentar uma compreensão satisfatória. Ressaltamos que nas primeiras atividades em que foram respondidas questões, em sua maioria, sobre adição de números inteiros, a dupla cometeu erros decorrentes, entre outros fatores, da falta de atenção para o registro dos números com seu respectivo sinal. No entanto, para as outras atividades em que foram desenvolvidas as operações de subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, os alunos demonstraram uma evolução significativa na compreensão desse objeto matemático.

Sendo assim, em resposta às nossas questões de pesquisa, constatamos que a partir da mobilização dos conhecimentos prévios, os alunos são capazes de desenvolver uma compreensão relevante dos números inteiros e suas operações. Verificamos também que, com o auxílio da tecnologia, foi possível proporcionar ao aluno uma interação com o objeto matemático, possibilitando uma reflexão para que fossem feitas novas conjecturas sobre as questões propostas.

Após a análise dos registros dos alunos, salientamos alguns obstáculos que não foram identificados em nossa revisão de literatura. Percebemos que a utilização do contexto referente à medida de temperatura, apesar de eficiente, pode proporcionar uma “dupla interpretação” em questões para identificar se os números estão aumentando ou diminuindo, portanto é preciso estar atento a essa singularidade. Notamos que existe uma dificuldade para que os alunos percebam a necessidade do registro dos números inteiros com o respectivo sinal e esse fato compromete sua compreensão. Observamos também que o registro das operações apresentado na posição horizontal, acompanhado de parênteses, confronta-se com o conhecimento prévio dos alunos, que desenvolvem as operações utilizando um registro vertical.

Inferimos que situações que enfatizem a necessidade do registro com seu respectivo sinal possam minimizar a falta de “atenção” que foi verificada nas atividades. Acreditamos também que é imprescindível ao aluno compreender o significado do

registro das operações na posição horizontal. A princípio, intuímos que a dificuldade era apenas em relação à compreensão desse objeto matemático, porém, verificamos que os aspectos inerentes à apresentação das operações também são obstáculos a serem superados pelos alunos.

Portanto, apontamos para a necessidade de desenvolver abordagens que possibilitem que os alunos aprimorem a forma como registram as operações com números inteiros, compreendendo a necessidade do registro formal.

Reconhecemos que, apesar do alcance limitado dessa pesquisa, seu desenvolvimento nos proporcionou a oportunidade de uma reflexão sobre a prática docente em torno dos registros dos alunos.

Após a aplicação de cada uma das atividades foi possível perceber a importância de atentar-se a todos os possíveis aspectos inerentes a cada situação. Procurar entender como o aluno compreende cada questão proposta é fundamental para que possamos intervir de forma responsável e eficiente. Sendo assim, com a formalidade que esse trabalho permite, pretendo praticar uma docência mais vigilante. Dessa forma, espero desenvolver novas atividades com o intuito de atenuar os obstáculos aqui verificados.

## REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Ed. UFPR, p.167-185, 2007.
- AMORIM, Sandra Regina Correa. **Números inteiros: Panorama de pesquisas realizadas de 2001 a 2010**. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.
- BOGDAN, R. e BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; NUNES, Terezinha. Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo. **Educ. Mat. Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 1, p.73-100, abr. 2004.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, p. 148, 1998.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, p. 142, 1997.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias /Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, p. 135, 2006.
- COELHO, Márcia Paula Fraga. **A multiplicação de números inteiros relativos no "Ábaco dos inteiros": uma investigação com alunos 7.º ano de escolaridade**. 2005. 127f. Dissertação (Mestrado) – Lisboa: Universidade do Minho, 2005
- COSTA, Manoel Amoroso. **As Ideias Fundamentais da Matemática e outros Ensaio**. São Paulo: Editora Convívio, Editora da universidade de São Paulo, EDUSP, (1981)
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- GLAESER, Georges. **Epistemologia dos números relativos**, Boletim, GEPEM, 1985, 17:29 – 124 (tradução: Lauro Tinoco da publicação original, 1981).
- MACHADO, Maurício de Souza. **Estratégias pedagógicas com o uso de Tecnologias de informação e comunicação: uma abordagem para a construção do conhecimento em operações aritméticas básicas e nas chamadas "regras de sinais"**. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
- MACHADO, Silvia Dias Alcântara; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua “forma” de pensar a Matemática. **Educ. Mat. Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p.590-605, dez. 2013. Quadrimestral.
- NETO, Francisco Tavares da Rocha. **Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no ensino fundamental**. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2010.

PONTE, João Pedro da. Novas tecnologias na aula de matemática. **Educação e Matemática**, 34, 2-7, 1995.

## APÊNDICES



## APÊNDICE A - ATIVIDADES PROPOSTAS

Colégio: ..... Data ...../...../.....

Nome: ..... Série .....

Nome: ..... Série .....

I) Marque os seguintes valores de temperaturas nos termômetros que se encontram, na posição vertical e na posição horizontal.

a) 4 graus acima de zero.

f) 2 graus acima de zero.

b) -1 grau abaixo de zero.

g) -3 graus abaixo de zero.

c) 5 graus acima de zero.

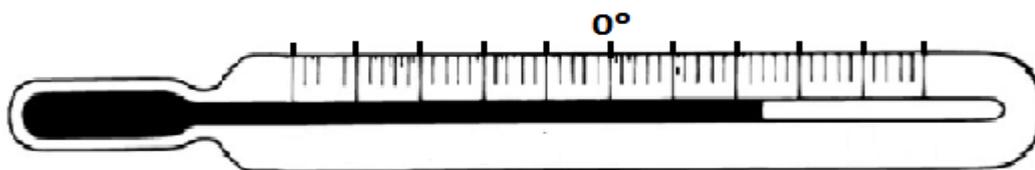
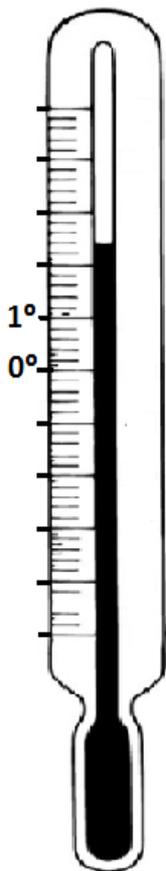
h) -2 graus acima de zero.

d) -5 graus abaixo de zero.

i) -5 graus abaixo de zero.

e) 3 graus acima de zero.

j) -4 graus abaixo de zero.



**II)** Considere um freezer onde os sorvetes são mantidos a uma temperatura de -5 graus abaixo de zero. Represente o valor da nova temperatura se ela:

a) Diminuir 2 graus?

b) Diminuir 5 graus?

c) Aumentar 4 graus?

d) Aumentar 5 graus?

e) Aumentar 7 graus?

**III)** Em uma reportagem sobre a previsão do tempo foi anunciado que a temperatura mínima na cidade A será de **dez graus abaixo de zero**, e a temperatura mínima na cidade B será **de oito graus acima de zero**.

a) Represente as temperaturas de cada uma das cidades utilizando algarismos (números).

b) Indique a cidade onde a temperatura é maior.

c) Quantos graus de diferença há entre a maior e a menor temperatura?

**IV)** A temperatura de uma cidade, que era de 20 graus, variou em -3 graus. Responda:

a) A temperatura aumentou ou diminuiu?

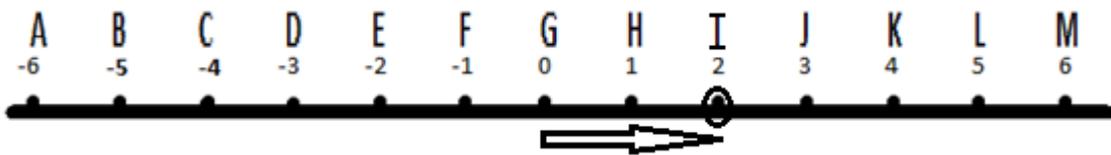
b) Qual a temperatura após essa variação?

V) Agora considere uma cidade onde a temperatura, que era de -10 graus, variou em -3 graus. Responda:

a) A temperatura aumentou ou diminuiu?

b) Qual é a temperatura após essa variação?

VI) Considere que em um jogo, após participar da primeira rodada, você chegou na posição I, conforme a figura.



a) Em qual posição você vai chegar se conseguir +3 pontos na **segunda** rodada?

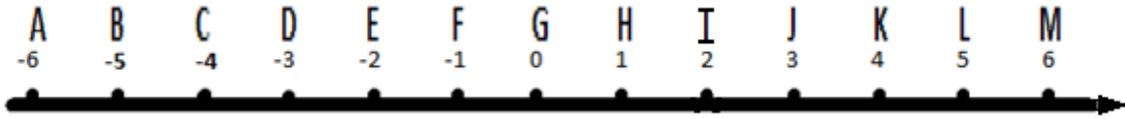
b) Em qual posição você vai chegar se conseguir -4 pontos na **terceira** rodada?

c) Em qual posição você vai chegar se conseguir -5 pontos na **quarta** rodada?

VII) Ao participar de um jogo, composto por três partidas, em que a pontuação vai se acumulando, Paulo ganhou três pontos na primeira partida e perdeu sete pontos na segunda partida. Como ficou a pontuação de Paulo para iniciar a terceira partida?

VIII) Considere que em um jogo de futebol seu time tomou três gols no primeiro tempo, mas acabou fazendo dois gols no segundo tempo. Qual é o saldo de gols do seu time no final desse jogo?

**IX)** Também podemos representar, semelhante ao termômetro, os números em uma reta orientada, conforme a figura abaixo. À direita do número 0 estão os números positivos e à esquerda do zero os números negativos.



Utilize a figura acima e complete com o sinal de  $>$  (maior) ou  $<$  (menor).

- 4..... 6
- 5.....-5
- -6..... -1
- 10..... -30
- -50..... 13
- -18..... -26

Colégio: ..... Data ...../...../.....

Nome: ..... Série .....

Nome: ..... Série .....

**Atividade 2.** Adição de números inteiros.

**I)** Num determinado dia o saldo bancário de Marcos era de -2000 reais e o de Luiz era de -500 reais.

a) Qual deles estava com uma situação melhor junto ao banco? Por quê?

b) Qual o saldo no banco dos dois juntos?

c) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 2000 reais no banco?

d) Como vai ficar o saldo de Marcos se ele fizer um depósito de 5000 reais no banco?

e) Como vai ficar o saldo de Luiz se ele fizer uma retirada de 600 reais do banco?

**II)** Considere que em um jogo composto por **duas etapas**, cada jogador recebe uma pontuação inicial de 10 pontos e, a cada etapa, são acrescidos os pontos obtidos aos pontos iniciais para calcular a nova pontuação.

a) Qual a nova pontuação de um jogador que **tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa 7 pontos?

b) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -7 pontos?

c) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -10 pontos?

d) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos?

e) Qual a nova pontuação de um jogador que **não tem** uma boa atuação e obtém na primeira etapa -12 pontos e em seguida obtém na segunda etapa -4 pontos?

### III) Responda:

a) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -4? Registre a operação e o resultado.

b) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -9? Registre a operação e o resultado.

c) Qual é o resultado se somarmos ao número 9, o número -10? Registre a operação e o resultado.

IV) Utilize o objeto de aprendizagem para realizar as adições de números inteiros e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Adição\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

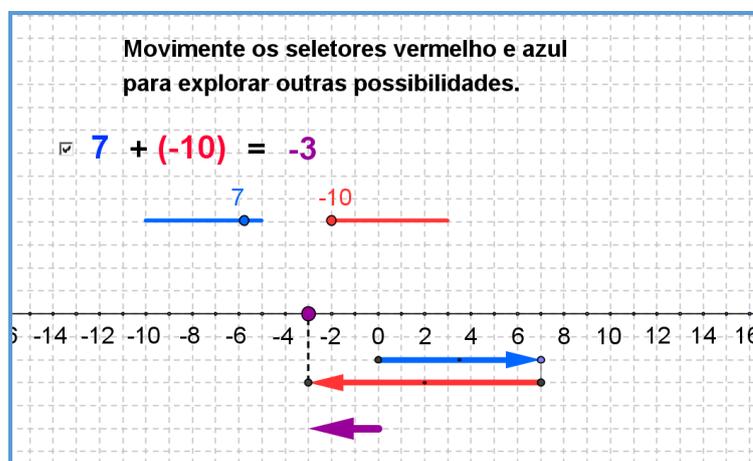


Figura 1- Adição de Números Inteiros

- a)  $5+(2) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- b)  $-3+(-7) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- c)  $-6+(-3) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- d)  $5+(-1) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- e)  $-7+(2) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- f)  $-7+(10) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- g)  $-6+(+6)$   
 O resultado pode ser positivo ou negativo? .....

V) Responda as questões:

- a) O que ocorre, com o resultado, quando somamos dois números positivos?
- b) O que ocorre, com o resultado, quando somamos dois números negativos?
- c) Observe os resultados das operações,  $-7+(2)$  e  $-7+(10)$ . Por que um resultado é negativo e o outro é positivo?
- d) Qual é o resultado de cada uma das operações a seguir?
- $-20+(-50) = \dots\dots\dots$
  - $-20+(+50) = \dots\dots\dots$
  - $-30+(+20) = \dots\dots\dots$
  - $+60+(-10) = \dots\dots\dots$
  - $-60+(-10) = \dots\dots\dots$

Colégio: ..... Data ...../...../.....

Nome: ..... Série .....

Nome: ..... Série .....

**Atividade 3.** Subtração de números inteiros.

**I)** Considere que Paulo a está no 4º andar de um prédio que tem dois andares abaixo do térreo. Responda as questões abaixo registrando as operações que precisou efetuar.

a) Se Paulo pegar o elevador e descer três andares, em qual andar o elevador vai parar?

b) Se Paulo pegar o elevador e descer cinco andares, em qual andar o elevador vai parar?

**II)** Marcos estava com o saldo, no banco, no valor total de -13 000 reais. O gerente do banco ao analisar o extrato de Marcos, percebeu que um valor de -3000 reais foi lançado por engano na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente a situação e determine como ficou o saldo de Marcos.

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante, não foi muito bem, e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-2
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	

- a) Qual o número total de pontos desse jogador após todas as fases?
- b) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase?
- c) Qual seria o número de pontos desse jogador se do total que ele conseguiu, subtraíssemos os pontos da 6ª fase e da 7ª fase?
- d) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3)$ ?
- e) Qual é o resultado da operação  $-18 - (-3) - (-3)$ ?

IV) Calcule o valor de cada operação, com o auxílio do objeto de aprendizagem, e responda as questões.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Subtração\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

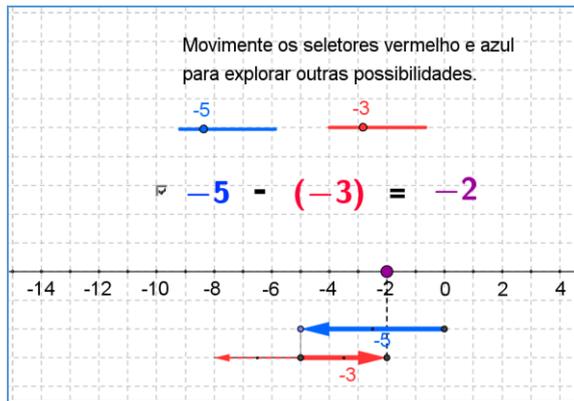


Figura 2- Subtração de Números Inteiros

- a)  $6-(+2) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- b)  $6-(+9) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- c) Observe as operações,  $6-(+2)$  e  $6-(+9)$ . Por que um resultado é positivo e o outro negativo?
- d)  $-5-(+1) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- e)  $-5+(+5) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- f)  $-6-(-2) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- g)  $-6-(-9) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- h)  $-7-(-3) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- i)  $-7-(-5) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- j)  $-7-(-8) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- k) Observe as operações  $-7-(-5)$  e  $-7-(-8)$ . Por que um resultado é negativo e o outro é positivo?
- l)  $-10-(-3) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....
- m)  $-10-(-3)-(-3) = \dots\dots\dots$   
 O resultado é positivo ou negativo? .....

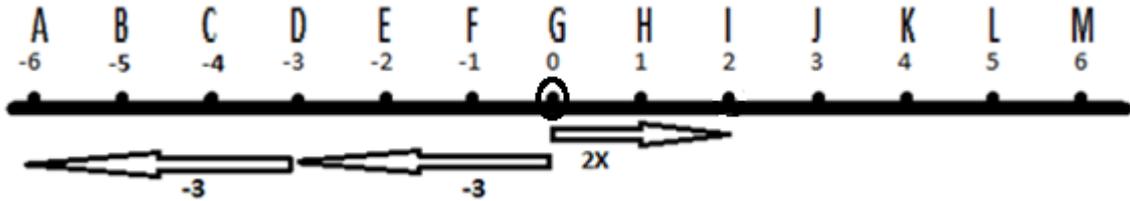
Colégio: ..... Data ...../...../.....

Nome: ..... Série .....

Nome: ..... Série .....

**Atividade 4.** Multiplicação de números inteiros.

I) Considere que você está na posição **G** indicada na figura a seguir. Cada ponto representa quantos pontos obtidos no jogo.



a) Em que posição você vai ficar se conseguir duas vezes -3 pontos?

b) Voltando para a posição **G**, em que posição você vai ficar se conseguir duas vezes +2 pontos?

II) Marcos ouviu na previsão do tempo que na cidade A, a temperatura mínima registrada foi de  $-2^{\circ}\text{C}$  e na cidade B a temperatura foi três vezes menor do que na cidade A. Qual foi a temperatura na cidade B?

III) Considere que em um jogo composto por sete fases, um jogador iniciante não foi muito bem e obteve os resultados registrados na tabela abaixo.

1ª Fase	-3
2ª Fase	-4
3ª Fase	-1
4ª Fase	-2
5ª Fase	-4
6ª Fase	-3
7ª Fase	-3
TOTAL	

- a) Qual o total de pontos desse jogador?
- b) Se do total de pontos subtrairmos **uma vez** o -3, como fica a pontuação desse jogador?
- c) Subtrair **uma vez** o -3, é o mesmo que somar uma vez o +3?
- d) Se do total de pontos subtrairmos **duas vezes** o -3, como fica a pontuação desse jogador?
- e) Se ao total de pontos somarmos 6, como fica a pontuação desse jogador?
- f) Subtrair **duas vezes** o -3 é o mesmo que somar +6?

**IV)** Paulo estava com um saldo, no banco, no valor total de -10 000 reais. O gerente do banco analisou o extrato de Paulo e percebeu que o valor de -2000 reais, aparecia **duas vezes**, por engano, na conta. Sabendo que o gerente corrigiu o erro que foi lançado por engano no extrato, represente essa situação e determine como ficou o saldo de Paulo.

**V)** Calcule o valor de cada operação com o auxílio do objeto de aprendizagem.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Multiplicação\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

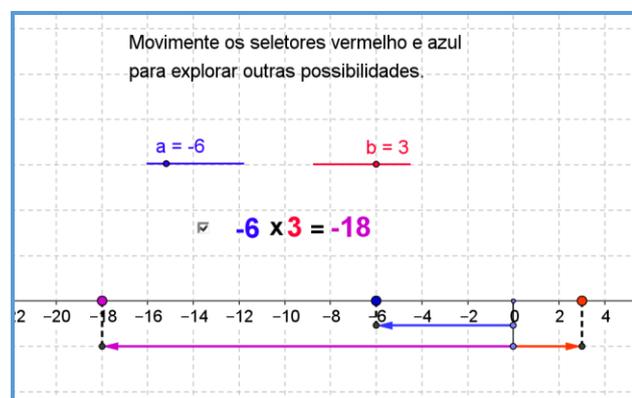


Figura 3- Multiplicação de Números Inteiros

a)  $2 \times 5 = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo?  $\dots\dots\dots$

b)  $2 \times (-5) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo?  $\dots\dots\dots$

c)  $-6 \times (2) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo?  $\dots\dots\dots$

d)  $-2 \times (-4) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo?  $\dots\dots\dots$

e)  $-4 \times (-5) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo?  $\dots\dots\dots$

**VI) Responda as questões:**

a) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **positivo** por outro número **positivo**?

b) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **negativo** por um número **positivo**?

c) O que ocorre, com o resultado, quando multiplicamos um número **negativo** por outro número **negativo**?

d) Calcule o resultado de cada uma das operações a seguir.

- $8 \times 5 = \dots\dots\dots$

- $5 \times (-12) = \dots\dots\dots$

- $-3 \times (20) = \dots\dots\dots$

- $-5 \times (-12) = \dots\dots\dots$

Colégio: ..... Data ...../...../.....

Nome: ..... Série .....

Nome: ..... Série .....

**Atividade 5.** Divisão de números inteiros.

I) Após participar de um jogo, composto por três etapas, a dupla formada por Paulo e Carlos teve um resultado final igual a -10 pontos. Sabendo que essa pontuação foi dividida entre os dois, em partes iguais, com quantos pontos cada um ficou?

II) Após verificar, junto ao banco, o saldo de uma empresa era -15000 reais. Sabendo que esse saldo, de -15000 reais, será dividido entre os três sócios da empresa, em partes iguais, represente a situação e determine o valor que corresponde a cada um deles.

III) Em um julgamento o juiz decidiu que o saldo de -8000 reais de uma empresa será dividido, em partes iguais, e pago pelos sócios. Sabendo que cada sócio teve que assumir -4000 reais do valor total, quantos sócios tem essa empresa?

IV) Calcule o valor de cada operação com o auxílio do objeto de aprendizagem.

**Instrução:** Abrir o arquivo “Divisão\_inteiros” e movimentar os seletores para explorar as possibilidades, visualizando os resultados e refletindo sobre os mesmos.

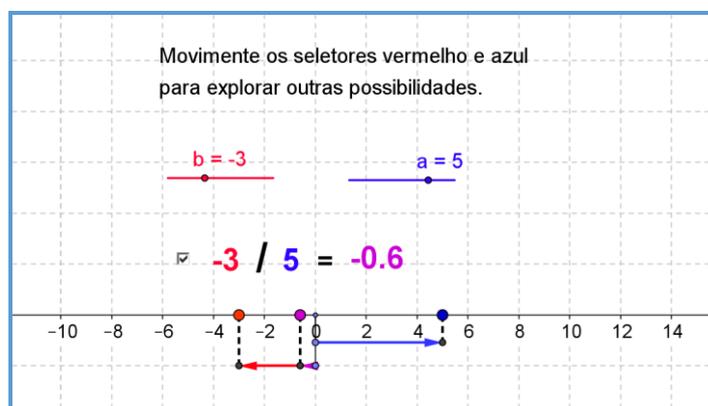


Figura 4- Divisão de Números Inteiros

a)  $6:(2) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo? .....

b)  $8:(-4) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo? .....

c)  $-6:(2) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo? .....

d)  $-10:(-2) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo? .....

e)  $-6:(-3) = \dots\dots\dots$

O resultado é positivo ou negativo? .....

**V) Responda as questões:**

a) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **positivo** por outro número **positivo**?

b) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **positivo** por um número **negativo**?

c) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **negativo** por um número **positivo**?

d) O que ocorre, com o resultado, quando dividimos um número **negativo** por outro número **negativo**?

e) Qual é o resultado de cada uma das operações a seguir?

- $40:5 =$

- $50:(-10) =$

- $-30:(6) =$

- $-20:(-4) =$

- $-14:(-2) =$

## APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE

### Autorização

Eu, \_\_\_\_\_, autorizo meu filho(a) \_\_\_\_\_, aluno(a) matriculado na 6ª série B (7º ano) do Ensino Fundamental II da Escola Estadual Dep. Norberto Mayer filho, a participar dos encontros, que se realizarão a partir de 01/12/2015 na sala de informática, sobre a orientação do Professor Flávio Cabral de Souza, mestrando matriculado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Data \_\_\_\_/\_\_\_\_/2015.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do responsável

## APÊNDICE C - Autorização da Escola

**PONTÍFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO  
PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Eu, Flávio Cabral de Souza, RG: 23.448.012-0, solicito autorização para a realização de uma pesquisa de caráter qualitativo, com os alunos do 7º ano do ensino fundamental da Escola Estadual Deputado Norberto Mayer Filho.

Esse público foi escolhido considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais que preveem o estudo desse objeto matemático para os alunos do 7º ano do ensino fundamental, utilizando-se sempre de diferentes contextos e estratégias para investigar operações com números negativos.

Para a escolha da escola, foi considerada a infraestrutura da mesma, que conta com computadores que estão em plenas condições de serem utilizados pelos sujeitos da pesquisa. Foi considerada também a necessidade da unidade escolar implementar projetos que possam despertar nos alunos o interesse pela aprendizagem em matemática.

A escolha dos alunos será auxiliada pelo professor de matemática dos 7º anos que deverá indicar 10 alunos, escolhidos entre as três turmas, convidados a participar das atividades que serão aplicadas no horário em que estudam.

Essa pesquisa tem o objetivo de analisar a influência da visualização utilizando recursos tecnológicos para no desenvolvimento desse objeto matemático e suas operações. A participação é voluntária e se dará por meio da realização de atividades devidamente elaboradas garantindo que não há riscos decorrentes da participação dos alunos na pesquisa.

### **Consentimento Pós-Infomação**

Declaro que li as informações acima, sobre a pesquisa, e consinto a realização da mesma, nessa unidade escolar, mediante a autorização dos responsáveis por cada um dos participantes.

Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

São Paulo, 02 de abril de 2014



Assinatura do pesquisador responsável



Regina C. L. Rossato  
RG. 13.545.615  
Diretor de Escola

Assinatura da direção da escola



## PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

### APÊNDICE D - Parecer Comitê de Ética

#### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** NÚMEROS INTEIROS E SUAS OPERAÇÕES: UMA PROPOSTA DE ESTUDO PARA ALUNOS DO 6º ANO COM O AUXÍLIO DE TECNOLOGIA. **Pesquisador:** Flávio Cabral de Souza

**Área Temática:**

**Versão:**

**CAAE:** 39268214.0.0000.5482

**Instituição Proponente:** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

#### DADOS DO PARECER

**Número do**

**Parecer:** 931.514

**Data da Relatoria:**

30/11/2014

#### **Apresentação do Projeto:**

Trata-se de protocolo de pesquisa de Flavio Cabral de Souza sob orientação da professora Dra. Celina Abar, para elaboração da dissertação de mestrado no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática (PEPGEM), vinculado à Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FCET) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

#### **Objetivo da Pesquisa:**

O objetivo da pesquisa é analisar o pensamento matemático envolvido em situações de aprendizagem dos números inteiros com a utilização de tecnologia.

#### **Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Riscos: poucos



Continuação do Parecer: 931.514

Benefícios: Contribuir para dinamização de estratégias e atividades para a aprendizagem de números inteiros e suas operações.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

A pesquisa é feita por meio de uma sequência envolvendo uso de tecnologia e construída pela metodologia qualitativa. É uma típica pesquisa a nível de um Mestrado.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

O termo de consentimento livre e esclarecido está de acordo com as normas. A autorização do responsável pela Escola atende as normas e está assinada pela diretora da escola.

**Recomendações:**

Enviar o aceite do responsável pela escola sobre a pesquisa pretendida e o termo de consentimento livre e esclarecido baseado nas normas éticas a ser assinado pelos responsáveis pelos alunos que participarão da pesquisa.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Conforme os dados acima, sugerimos a aprovação do projeto pelo Comitê de Ética da PUCSP.

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

**Considerações Finais a critério do CEP:**

SAO PAULO, 12 de Janeiro de 2015

---

**Assinado por:**  
**Edgard de Assis Carvalho**  
**(Coordenador)**

<b>Endereço:</b> Rua Ministro Godói, 969 - sala 63 C		
<b>Bairro:</b> Perdizes	<b>CEP:</b> 05.015-001	
<b>UF:</b> SP	<b>Município:</b> SAO PAULO	
<b>Telefone:</b> (11)3670-8466	<b>Fax:</b> (11)3670-8466	<b>E-mail:</b> cometica@pucsp.br