PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

CINTIA ROSA DA SILVA

Signos peirceanos e registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2013

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

CINTIA ROSA DA SILVA

Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **Doutora em Educação Matemática**, sob a orientação do **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud**.*

Apoio FAPESP

Processo número: 2010/05883-0

SÃO PAULO

2013

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

“Um terreno em que a regra da maioria parece não ter guarida é o da Ciência. A ninguém ocorre que decisões sobre questões de natureza científica resultem de consultas desse tipo, e a autoridade de um só pode conduzir a uma reviravolta conceitual, desde que apoiada por evidências empíricas, ou por argumentações bem fundadas”.

Nilson José Machado

A meus pais, Enor e Sueli e a minha avó Maria, pelo apoio e motivação que, ao longo dessa jornada, depositaram em mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiro, agradeço a **Deus** por ter me concedido várias bênçãos nesta caminhada.

Ao professor Doutor **Saddo Ag Almouloud**, pela sua orientação, respeitar meu tempo de produção e confiar em mim.

Aos professores doutores **Fábio José Rauen**, **Fumikazu Saito**, **Lúcia Santaella** e **Nilson José Machado**, pelas sugestões e críticas no exame de qualificação, que enriqueceram esta pesquisa.

Ao professor Doutor **Fábio José Rauen,** por ter me incentivado a iniciar o doutorado.

À professora Doutora **Isabelle Bloch**, pelas sugestões e ensinamentos teóricos e pessoais, pela confiança e simpatia, por me receber e alojar carinhosamente em sua residência em Pau-Pyrenné durante o estágio doutoral. Por me apresentar a equipe E3D (Epistémologie et didactiques des disciplines) da IUFM d'Aquitaine – Antenne de Pau.

À **Equipe E3D** da IUFM d'Aquitaine, pela oportunidade de apresentar minha proposta de tese e pelas sugestões.

À professora Doutora **Candia Morgan**, pelos artigos, por me receber na Universidade de Londres e discutir a respeito de seu quadro analítico, bem como da Semiótica na Educação Matemática.

Ao pesquisador **Raymond Duval**, pelas conversas a respeito da teoria de Registro de Representação Semiótica, pelos materiais e por ter criado esta curiosa teoria, pois sem ela esta tese não existiria.

Aos professores do Programa de Pós-graduandos em Educação Matemática da PUC-SP, especialmente, as professoras **Maria José Ferreira da Silva** e **Cileda de Queiroz e Silva Coutinho**.

Aos amigos do Programa de Estudos e Pós-graduados em Educação Matemática, **Antônio Sérgio**, **Acylena**, **Camila**, **Edson**, **Eliane**, **Eliedete**, **Joelma**, **Katia**, **Victória**, **Gilson**, **Jacinto**, **José Fernando**, **Rita** e **Talita**.

À querida amiga **Talita**, pela amizade, apoio e discussões teóricas.

A meus amados e queridos pais, **Enor** e **Sueli**.

A minha avó **Maria**, pelo apoio e carinho.

A meu namorado **Emmanuel**, pelo grande incentivo, carinho, confiança e amor.

A meu irmão **Ricardo**, meus sobrinhos **Diogo**, **Bruno**, **Luma** e a todos os meus familiares por estarem sempre me apoiando e acreditarem em mim.

Às **Irmãs Filhas da Caridade**, pela amizade, carinho e incentivo.

A **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo**, pois sem a bolsa de estudos não teria realizado meu sonho.

Ao **CONSAD** e a **Pró-reitoria de Pós-graduação** pelos descontos sobre o valor das mensalidades do curso de doutorado.

Aos colegas de classe, pelas trocas de materiais, discussões teóricas e experiências.

A todos os funcionários do Programa de Pós-graduando em Educação Matemática da PUC-SP, em especial, **Francisco** e **Suzane**.

E, por fim, agradeço a todas as pessoas que de maneira direta ou indireta estiveram presentes nesta caminhada.

RESUMO

Esta pesquisa tratou de uma reflexão a respeito das teorias de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e da Semiótica de Charles Sanders Peirce. O trabalho responde à seguinte questão: quais signos peirceanos para analisar os registros de representação semiótica e qual é a semiótica para a matemática e seu ensino? Para buscar respostas a nosso questionamento, realizamos, por meio de uma pesquisa bibliográfica, uma análise das analogias que encontramos entre elas. As principais analogias, que nortearam o estudo, foram: a) a formação de representação semiótica pode ser um qualissigno, ícone ou rema; b) o tratamento pode ser um sinsigno, índice ou dicente; e c) a conversão pode ser um legissigno, símbolo ou argumento. Além disso, resumimos estas analogias em um quadro contendo os principais termos da teoria de Duval e Peirce, que resultaram em um modelo semiótico para analisar o ensino e a aprendizagem da matemática. Posto isto, aplicamos esse modelo no estudo dos objetos matemáticos, plano, reta, vetor e pontos da geometria analítica espacial. Como resultado da análise dos objetos, constatamos que a semiótica peirceana pode auxiliar na identificação de possíveis problemas e soluções que podemos encontrar nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria analítica. Notamos que os signos peirceanos que permitem essa identificação e solução são o legissigno e o símbolo. Além disso, percebemos que o argumento pode ser o signo que impulsiona os indivíduos a tomarem a decisão de resolver os problemas e realizar as tarefas. Sugerimos que a décima classe peirceana, legissigno simbólico argumento, possa ser a responsável pelo sucesso nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Inferimos também que o modelo das classes peirceanas para o ensino e a aprendizagem da matemática pode auxiliar na busca pelas inferências das ações realizadas nesses processos. Por analogia, admitimos que a conversão é a atividade de grande importância nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e que as teorias de Duval e Peirce são válidas para explicar a matemática e seu ensino, ainda que a teoria de Registro de Representação Semiótica trate dos objetos matemáticos e sua representação como um todo, e a teoria de Peirce considera suas partes, como um signo diferente. Assim, do ponto de vista didático, nossa análise foi importante no que tange o estudo dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, mais especificamente da geometria analítica, uma vez que podemos enxergar, antecipadamente, em qual signo desse objeto matemático os indivíduos terão dificuldades.

Palavras-chave: Registro de Representação Semiótica. Semiótica Peirceana.
Geometria Analítica.

ABSTRACT

This research dealt with a reflection on the theories of semiotic representation registers by Raymond Duval and Charles Sanders Peirce Semiotics. The study answers the following question: which Peircean signs are used to analyze the registers of semiotic representation and what is the semiotics for mathematics and its teaching? To seek answers to our question, we conducted, through a literature review, analysis of the analogies we found between them. The main analogies that guided the study were: a) the formation of semiotic representation can be a qualisign, an icon, or a rheme b) the treatment may be a sinsigno, an index, or a dicent sign and c) the conversion can be a legisign, a symbol, or an argument. In addition, we summarize these analogies in a table containing the main terms of Duval and Peirce theories, which resulted in a semiotic model to analyze the teaching and learning of mathematics. Having said that, we apply this model in the study of mathematical objects, plane, straight line, vector, and points of spatial analytic geometry. With the result of the analysis of the objects, we find that Peircean semiotics can help identify potential problems and solutions that we can find in the teaching and learning of analytic geometry. We note that the Peircean signs that allow such identification and solution are legisign and symbol. Also, we realize that the argument can be the sign that propels individuals make the decision to solve problems and accomplish tasks. We suggest that the tenth Piercean class, (symbolic legisign) argument, may be responsible for the success in the teaching and learning of mathematics. We also infer that the model of Peirce classes for the teaching and learning of mathematics can help in finding the inferences of the actions taken in those cases. By analogy, we assume that the conversion is an activity of great importance in teaching and learning of mathematics and the theories of Duval and Peirce are valid to explain the mathematics and its teaching, even though the theory of semiotic representation registers treats mathematical objects and their representations as a whole, and the theory of Peirce takes its parts as different signs. Therefore, from the didactic point of view, our analysis was important regarding the study of the teaching and learning of mathematics, more specifically of analytic geometry, as we can see, in advance, in which sign of this mathematical object individuals will have difficulties.

Keywords: Semiotic Representation Registers. Peircean Semiotics. Analytic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O americano Charles Sanders Peirce, filósofo, matemático, pragmático e cientista desenvolveu a teoria da semiótica.

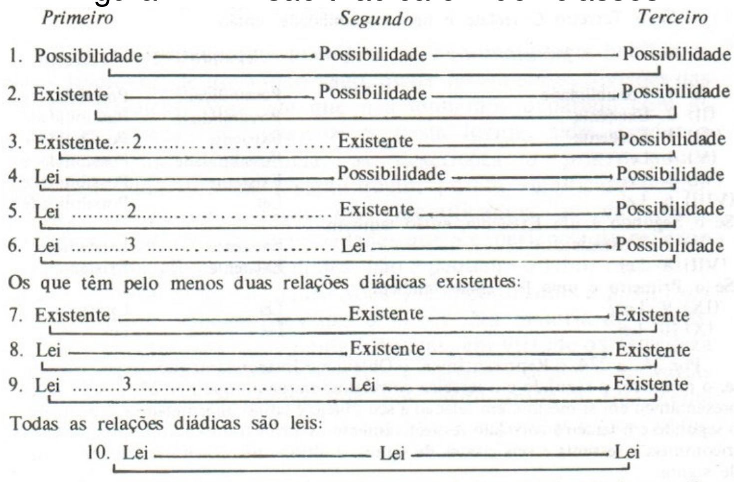
O termo semiótica decorre do grego semeîon (signo) e sema (sinal), do qual derivam expressões como: semiologia, semeiotica e outras. Para Prates (2009, p.01), os estudos semióticos abrangem "virtualmente todas as áreas do conhecimento envolvidas com as linguagens ou sistemas de significação".

A semiótica de Peirce procura descrever e classificar todos os signos admissíveis e propõe-se a analisar e descrever, fundamentalmente, a representação dos objetos, dos processos e dos fenômenos, por intermédio de classes organizadas e categorias. A teoria baseia-se na relação triádica do signo, no conceito de semiose, como um processo essencial do crescimento onipresente e dos processos dialéticos.

Peirce (2003, p. 46) argumenta que, "um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém". O representâmen provoca na mente de alguém um segundo signo, mais desenvolvido, equivalente a si próprio, que é denominado de interpretante. Ambos, representâmen e interpretante, provocam um terceiro elemento por igualdade de condições, intitulado de objeto, que consiste em uma relação triádica envolvendo signo, objeto e interpretante. O signo é sustentado por um representâmen que, por sua vez, pode funcionar como um signo, enviando algo a um interpretante. O signo, por meio do interpretante, remete-se por algum motivo a um objeto.

Peirce empregou dez tricotomias e 66 classes de signos para compreensão e classificação dos distintos tipos de signos. Embora tenha dez tricotomias e 66 classes de signo, apresentamos neste documento apenas as três tricotomias de maior relevância, empregadas para definir as dez classes de signos.

Figura 1 - Divisão triádica em dez classes.



Fonte: Peirce (2003, p. 50).

A primeira tricotomia é referente ao modo de apreensão, apresentação e à própria natureza do signo. O autor classifica os signos, de acordo com suas características, o signo primeiro em si mesmo, isto é, do representâmen. Dentro dessa possibilidade de relação do signo com ele mesmo, Peirce apresenta uma classificação de três espécies de signos: qualissigno, sinsigno e legissigno. A segunda tricotomia que trata da relação do signo com seu objeto é triádica, seguindo os moldes da relação signo com signo, que se divide em três espécies: ícone, índice e símbolo. Mas, a terceira tricotomia ressalta que a relação entre signo e interpretante é uma relação que representa uma verdadeira terceiridade, estabelecendo também uma tricotomia: rema, dicente e argumento.

Apresentada brevemente a Semiótica Peirceana, é de se questionar como é mostrada a semiótica no ensino de matemática?

Raymond Duval elaborou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, na qual estuda a existência dos registros de representação e a, fundamentada na existência e coordenação de representações próprias da matemática. Nessa teoria, discute-se a distinção entre objeto e representação, como estratégica na compreensão matemática.

O autor possui vários artigos e alguns livros escritos sobre a temática em questão. Entre sua vasta produção sobre o tema, destacamos o artigo “Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques?" [1], no qual discute, em quatro seções, os dados do problema semiótico; a exigência e prática matemática em relação aos signos: as possibilidades de transformação das representações; a passagem de um tipo de representação semiótica a outro: o problema-chave na aprendizagem; e, por fim, qual semiótica para a matemática e para a análise dos problemas que levantam sua aprendizagem.

Duval apresenta três definições de signo, conforme três autores: Augustin, Peirce e Piaget e conclui que essas definições são semelhantes para os três pensadores. Descontente disso critica as definições de signo propostas pelos autores e afirma que são inutilizáveis e incompletas, porque não diferenciam representante de representado. Além do mais, afirma que essas definições não tratam a respeito das estruturas, mas caracterizam os signos somente pelas funções. Duval (2006) explica que o que importa são as transformações possíveis e não as relações fundamentais explicitadas nas distintas teorias semióticas; e afirma que nenhuma teoria semiótica cobre a diversidade e a complexidade dos fenômenos semióticos.

Para o autor, o que importa são as transformações das representações e não só as representações. Isso porque a função primordial dos signos e das representações em matemática não é a comunicação nem tão pouco a evocação dos objetos ausentes, mas o tratamento da informação e as transformações de uma representação em outra, que produzem novas informações, ou seja, novos conhecimentos.

Duval argumenta que a semiótica-sofre limitações no campo particular dos signos que tratam da lógica e da interpretação adaptativa dos fenômenos observados por Peirce, da linguística por Saussure, e dos fenômenos de codificação e transmissão da informação por Jakobson, entre outros.

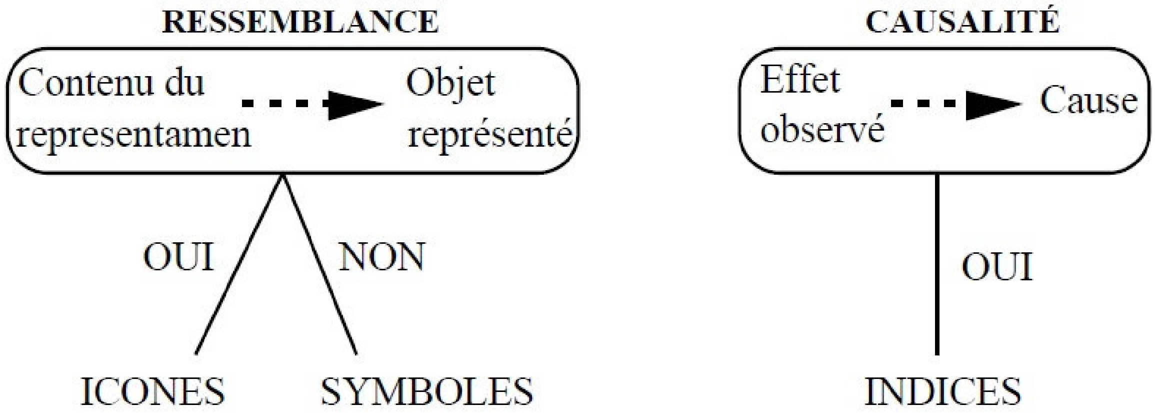
Embora discorde da ação das semióticas no ensino da matemática, Duval discute as teorias de Saussure e Peirce. Quanto à semiótica de Saussure, o autor afirma que a distinção entre significante e significado é válida somente para os signos linguísticos, ou seja, para a língua. Além disso, completa que essa distinção não é aplicável aos símbolos matemáticos nem aos signos puramente gráficos, ou seja, visuais.

---

[1] Qual semiótica para análise da atividade e das produções matemáticas?

Quanto à semiótica de Peirce, Duval (2006, p. 26) afirma que ela limita-se a justapor as duas relações heterogêneas, que são “semelhança” e “causalidade”, como apresentado na Figura :

Figura 2 - Partição Tricotômica dos signos conforme Peirce.



Fonte: Duval (2006, p. 26).

Enquanto Peirce afirma que a tricotomia da relação do signo com o objeto divide-se em ícone, índice e símbolo, diante da Figura 2, Duval partilha a tricotomia em dois elementos: “ressemblance” e “causalité”. Conforme Duval, a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** mostra, na “ressemblance” o conteúdo do representâmen que implica o objeto representado, que podem ser os ícones, mas não símbolos; e na “causalité”, o efeito observado que implica a causa, que podem ser os índices.

Além das considerações apresentadas, Duval explica por que não se utilizou da ideia de interpretante da Semiótica Peirceana por dois motivos: (1) em razão dos tipos de representações – (a) quando a representação depende de um sistema de numeração o interpretante não tem grau de liberdade, e (b) quando se trata das marcas unitárias, por sua vez, o interpretante dispõe de todos os graus de liberdade; e (2) em razão da situação do interpretante.

De modo geral, o autor crítica as abordagens semióticas selecionadas, ao afirmar que todas elas se apoiam nas atividades mais comuns e mais gerais, que são inferiores à complexidade e à variedade de representações semióticas mobilizáveis~~,~~ tanto na atividade~~,~~ como na produção matemática.

Apesar dessas críticas, a teoria de Duval se fundamenta numa interpretação das abordagens de Peirce e Saussure, que pode ser objeto de crítica.

Além disso, ao analisarmos semioticamente a teoria de Duval, encontramos indícios de que sua preocupação está voltada ao signo, e não ao objeto, nem ao interpretante, uma vez que o autor justifica que "is nevertheless unavoidable to recognise that doing mathematics at all levels involves making use of language and other sign systems" (DUVAL et al.,2005, p. 789).[2] Nesse sentido, ressaltamos que a diferença entre as semióticas não se restringe à ideia de signo, mas também às outras ideias. Por exemplo, a ideia de objeto, de acordo com Saussure e Peirce.

Para Saussure, os objetos são reais (físicos) em vez de objetos dinâmicos (físicos) e imediatos (não físicos) como Peirce define. Conforme Saussure (2001, p. 15),

> outras ciências trabalham com objetos dados previamente e que se podem considerar, em seguida, de vários pontos de vista; em nosso campo, nada de semelhante ocorre. Alguém pronuncia a palavra nu: um observador superficial será tentado a ver nela um objeto linguístico concreto; um exame mais atento, porém, nos levará a encontrar no caso, uma após outra, três ou quatro coisas perfeitamente diferentes, conforme a maneira pela qual consideramos a palavra: como som, como expressão duma ideia, como corresponde ao latim nūdum, etc. Bem longe de dizer que o objeto precede o ponto de vista, diríamos que é o ponto de vista que cria o objeto; aliás, nada nos diz de antemão que uma dessas maneiras de considerar o fato em questão seja anterior ou superior às outras.

Ao estudar a teoria de Duval, percebemos que o objeto é o conceito matemático. Apesar de estar evidente a ideia de objeto na teoria de Registro de Representação Semiótica, não está clara em qual semiótica o autor fundamentou-se para criar tal definição, já que se utiliza das teorias de Saussure e Peirce em seus argumentos de criação. Para Longo (1999, p. 24)[3],

---

[2] É, contudo, inevitável reconhecer que fazer matemática em todos os níveis envolve fazer uso de linguagem e de outros sistemas de signos (Tradução Nossa).

[3] Dizemos em matemática que se propõe um conceito, se escolhe um método, se constrói estruturas, se demostra, enquanto que se especifique onde e como, de uma forma certamente

> Nous dirons qu'en mathématiques on propose un concept, on choisit une méthode, on construit des structures, on démontre, tout en spécifiant où et comment, d'une manière certes non arbitraire: il n'existe pas, en mathématiques, des propositions "vraies et indémontrables" et, en même temps, elle ne s'épuise pas dans des calculs mécanisables, puisqu'à chaque fois il s'agit de démontrer, si nécessaire avec des méthodes infinitaires, si et dans quel cadre telle ou telle proposition est indémontrable, et si et dans quel cadre elle est vraie.

Além do mais, percebemos que não está evidente toda a teoria de Peirce na teoria de Duval e que o autor deixou claro que se apropriou da segunda tricotomia peirceana, signo em relação ao objeto, quando utiliza os termos ícone, índice e símbolo para responder à seguinte questão: "selon quels critères distinguer et classer la variété des signes et des représentations?"[4]

Os argumentos de Duval a respeito da Semiótica Peirceana motivaram-nos a propor nesta pesquisa uma análise da Teoria de Registro de Representação Semiótica por meio da Semiótica Peirceana.

A realização de uma nova análise semiótica da teoria de representação semiótica pode trazer um esclarecimento teórico, além de gerar novas discussões teóricas, para pesquisadores, professores e alunos de cursos de especialização e licenciaturas em matemática. Isso porque "Perhaps we should expect this to be the case, given the field's positioning at the intersection of disciplines of mathematics, education, linguistics, semiotics, psychology and sociology" (DUVAL et al., 2005, p. 789) [5].

Em tese, a teoria de registro de representação semiótica é essencial para o entendimento de "como os alunos aprendem matemática", de "como um indivíduo apreende os conceitos matemáticos". Além disso, essa teoria é responsável pelo aclaramento da apreensão noética da matemática, ou seja, da apreensão dos objetos matemáticos, dos conceitos e também pela representação desses objetos, isto é, pela semiose.

---

não arbitrária: não existe, em matemática, proposições ''verdadeiras e não demonstráveis' e ao mesmo tempo, ela não se apoia em cálculos mecânicos, pois cada vez trata-se de demonstrar, se necessário com métodos infinitesimais. Se e em que contexto tal ou tal proposição é indemonstrável, e se sim, em que contexto ela é verdadeira. (tradução nossa)

[4] Segundo quais critérios podemos distinguir e classificar a variedade de signos e de representações? (Tradução Nossa).

[5] Talvez devamos esperar que este seja o caso, dado o posicionamento do campo no cruzamento de disciplinas de matemática, educação, linguística, semiótica, psicologia e sociologia (Tradução Nossa).

Diante dessas balizas teóricas, pretendemos responder à seguinte questão: **quais signos peirceanos devem ser mobilizados para analisar os registros de representação semiótica e qual semiótica deve ser utilizada para a matemática e seu ensino?** Para dar conta disso, propomos analisar os registros de representação semiótica de geometria analítica, por meio da semiótica de Charles Sanders Peirce, de modo a exemplificar todos os passos realizados no decorrer da análise. Especificamente, pretendemos tratar dos conceitos de geometria analítica que se encontram nos currículos do ensino superior, como plano, reta, vetor e ponto no espaço.

Nesta pesquisa, de modo geral, analisaremos os signos peirceanos e os registros de representação e propomos um quadro semiótico para a matemática e seu ensino, resultando de uma metarrepresentação, ou melhor, da aplicação da terceiridade, em alto grau.

Nesta tese, especificamente, visamos a três objetivos:

a) Analisar a teoria de Registro de Representação Semiótica a partir da abordagem Semiótica Peirceana;
b) Analisar o que Duval utilizou da Semiótica Peirceana em sua teoria; e
c) Exemplificar as teorias Semiótica e Registro de Representação Semiótica, bem como o capítulo de análise por meio da Geometria Analítica no espaço, especificamente, plano, reta, vetor e ponto.

Nossa pesquisa é de tipo qualitativo e de cunho bibliográfico. Segundo Rauen (2006, p. 55), “a pesquisa bibliográfica ou de referência consiste na busca de informações no acervo bibliográfico ou referencial da humanidade”. Por sua vez, para Haguette (2005, p. 63), “os métodos qualitativos enfatizam as especificidades de um fenômeno em termos de suas origens e de sua razão de ser”.

A pesquisa bibliográfica é composta por três etapas, levantamento de dados, tratamento de dados e elaboração do texto científico. No levantamento de dados, identificamos, localizamos e compilamos as informações. No tratamento dos dados, realizamos leituras, elaboramos fichamento e analisamos as fontes de informações.

O primeiro passo deste estudo foi realizar uma revisão bibliográfica extensa sobre a Semiótica Peirceana, bem como sobre a teoria de registro de representação semiótica de Duval, além de criar processos que articulassem o conhecimento de Geometria Analítica Espacial com essas duas teorias.

Em seguida, identificamos as relações existentes entre a Teoria Semiótica de Peirce e a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval por meio de analogias.

Tendo em vista o contexto apresentado, para dar conta dos objetivos apresentados na introdução, esta pesquisa compõe-se de quatro capítulos. No primeiro capítulo, dedicado à fundamentação teórica, apresentamos considerações sobre o Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Semiótica de Peirce. No segundo capítulo, analisamos alguns trabalhos relacionados com a Semiótica de Peirce. No terceiro capítulo, discutimos a respeito das analogias entre as teorias de Registro de Representação Semiótica de Duval e Semiótica de Peirce. Finalmente, no quarto capítulo, propomos analisar as representações de alguns objetos da geometria analítica por meio das teorias de Registro de Representação Semiótica e Semiótica Peirceana, em um *corpus* de livros didáticos.

CAPÍTULO I

AS TEORIAS DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E SEMIÓTICA PEIRCEANA

Neste capítulo, refletimos sobre os pressupostos teóricos que fundamentam as teorias de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e Semiótica de Charles Sanders Peirce. O capítulo é dividido em duas seções. Na primeira, apresentamos a teoria de Registro de Representação Semiótica e na segunda, mostramos a Semiótica Peirceana.

1.1 Registro de Representação Semiótica

Para Duval (2011), as dificuldades locais, por exemplo, a introdução de um novo procedimento ou conhecimento, relacionadas com a aprendizagem da matemática aparecem logo após algumas semanas de aula, ou até mesmo em uma única aula. Durante um ano ou ciclo, ou currículo surgem as dificuldades globais, por exemplo, aquelas que estão integradas ao raciocínio, à visualização gráfica e à geométrica, bem como à resolução de problemas. Para o autor, essas dificuldades estão agregadas às seguintes situações: a ausência de transferência do que se julga adquirido nas novas situações e nas aplicações dos conhecimentos para a realidade, bem como no raciocínio e na visualização gráfica.

Diante disso, Duval aponta que as dificuldades globais apresentadas em questão confundem-se com as locais. Além do mais, afirma que precisamos nos questionar sobre o que é o conhecimento matemático e o que se pode ter de diferente em relação a outros tipos de conhecimento. Para ele, esses aspectos são de ordem cognitiva e epistemológica.

Segundo Duval (2011, p. 15), “a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos”. A seguinte questão posta por Duval: “Como podemos ter acesso aos objetos por nós mesmos?”, é fundamental tanto para a formação como à aprendizagem em matemática.

Nesse contexto, cabe apresentar outros questionamentos colocados em xeque por Duval: a) Como entender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática?, b) Qual é a natureza dessas dificuldades?, e c) Onde elas se encontram?

Para o autor, a fim de responder a estes questionamentos, não devemos nos limitar ao campo matemático nem à sua história.

> É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em decimais, neste ou naquele conceito geométrico etc. A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino. (DUVAL, 2003, p. 11-12)

Para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em matemática, o autor supracitado apresenta as seguintes questões:

> 1. Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
> 2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia...) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática? Duval (2003, p. 12).

Diante das reflexões realizadas por Duval (2003), a respeito dessas questões, podemos listar como resposta da primeira questão as seguintes conjecturas:

- Não devemos nos prender aos modelos de epistemologia oral porque são muito locais, ora porque não privilegiam os problemas que são específicos da aprendizagem da matemática; bem como aos clássicos modelos de psicologia cognitiva, que são centralizados nos tratamentos de informação. Isto porque a essência da teoria de Duval é a de “descrever as condições de compreensão da matemática para todos os alunos, a começar por aqueles que não estão destinados a fazer da matemática sua atividade profissional" (DUVAL, 2003, p. 28).

- Um modelo que centra, prioritariamente, nas condições cognitivas de compreensão, ou seja, nas condições particulares de acesso aos objetos matemáticos é relevante para esclarecer as categorias de obtenção dos conhecimentos matemáticos por estudantes. No entanto, a variedade dos registros de representações ou, especificamente, as representações semióticas, apresentam um papel essencial na compreensão, que promove a mobilização dos distintos registros.

Duval observa que estas conjecturas nos levam a considerar que os sistemas semióticos tinham o dever de estar associados aos modelos da arquitetura cognitiva dos indivíduos, como estruturas fundamentais do funcionamento do pensamento, assim como o meio em que a totalidade das organizações neurais autoriza a associação de vários dados sensoriais, o controle da atenção e o funcionamento de distintas memórias.

Diante dessas conjecturas, o autor apresenta quatro ideias fundamentais:

> 1. O desenvolvimento da capacidade mental de representação depende do desenvolvimento cultural de sistemas semióticos, porque esses sistemas não preenchem somente uma função de comunicação, mas também uma função de transformação de representação ("tratamento") e de objetivação consciente para o sujeito. Um dos "cacifes" da formação inicial é a apropriação e o domínio desses sistemas.
> 2. Nos indivíduos em período de desenvolvimento e de formação inicial, o progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos.
> 3. Certas variáveis cognitivas podem ser retomadas como variáveis didáticas.
> 4. Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos, visar a esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de tal noção particular é provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação (DUVAL, 2003, p. 29-30).

Para Duval (1995 *apud* DUVAL 2003, p. 30), o funcionamento cognitivo do pensamento surge, inerentemente, conectado ao funcionamento de uma *semiosis*.

Por sua vez, podemos eleger como resposta da segunda questão a seguinte conjectura: os sistemas cognitivos tratados por Duval (2003) dizem respeito particularmente à aprendizagem da matemática, porém não devemos depositar na aprendizagem das ciências fundamentadas na observação e na experimentação.

Conforme o autor:

> a atividade matemática deve ser estudada naquilo que ela tem de específico, quer dizer, naquilo que ela tem de diferente do trabalho de um botânico ou de um geólogo no terreno, ou daquele de um físico no seu laboratório. E a utilização de um modelo comum para a aquisição de todos os conhecimentos, matemáticos e não-matemáticos, arrisca ser tão pouco pertinente e pouco operatória para esclarecer os problemas de aprendizagem em matemática. (DUVAL, 2003, p. 23).

Diante destes questionamentos e conjecturas, observamos que a aprendizagem em matemática, diferente de outras ciências, ocorre por meio da diversidade de registros semióticos.

Levando em consideração os temas discutidos neste tópico, consideramos relevante explicitar a diferença entre representação e registro de representação nos termos de Duval.

Essa argumentação ressente-se da falta de uma explicação sobre as diferenças entre ciências formais e materiais. Matemática e lógica são ciências formais, cujos objetos externos não existem; as demais ciências são materiais, no sentido em que os construtos teóricos devem ser submetidos ao crivo das evidências empíricas. Sem essa distinção, somente o leitor que pressupõe essa distinção pode acompanhar esse raciocínio

1.1.1 Representação e Registro de Representação nos termos de Duval

Neste tópico, apresentamos os conceitos de representação e registro de representação expostos por Raymond Duval na teoria de Registro de Representação Semiótica.

1.1.1.1 A Representação

Duval apresenta a distinção epistemológica fundamental e o primeiro esquema de análise do conhecimento. Para isto, ele afiança que “o primeiro esquema de análise do conhecimento se desenvolveu com base na oposição epistemológica entre a representação de um objeto e o objeto representado" (DUVAL, 2011, p. 16). Além disso, segundo Duval, o conhecimento nasce, quando não empregamos as representações do objeto no lugar do objeto. Diante disso, o autor questiona: "quando acreditamos estar na presença de um objeto, trata-se do próprio objeto ou de uma representação?" (DUVAL, 2011, p. 17). Para responder a esta questão, o autor reflete: não foge desta questão a evidência perceptiva imediata ainda que ela seja continuamente vivida, como intuição ou apreensão direta das coisas.

De acordo com Duval, Platão já tratava da representação, quando considerou como exemplo o reflexo das árvores e do céu na água na République VI, 409d-510b, para enunciar a divisão epistemológica fundamental entre objeto e representação que constrói o conhecimento. Duval (2011, p. 17), cita que, "paradoxalmente, esse tipo de exemplo nos ensina mais sobre o que é uma representação que sobre o que constitui o próprio objeto. Ele permite retirar a característica de toda representação".

Assim, há sempre várias representações para um objeto. Diante disso, cabe mencionar que existem duas origens para a multiplicação das representações possíveis de cada objeto: a) multiplicação indefinida das representações de mesmo tipo, por exemplo, "as imagens produzidas por reflexão da luz sobre uma superfície variam com o ângulo de incidência, com a forma da superfície, etc.", e b) a diversidade de tipos de representações, por exemplo, "todas as representações são da mesma natureza" (DUVAL, 2011, p. 18).

As representações já eram referidas por Platão na República X, cuja denominação dada por ele era "imitações", assim como as reproduções intencionais de um modelo tais quais os quadros dos pintores.

Além dessas representações, há outras de diferentes tipos: a) aquelas obtidas com instrumentos científicos, como por exemplo, osciloscópio, luneta astronômica, microscópio e, etc.; e b) as que construímos em matemática, como as representações gráficas, equações, figuras geométricas e outras. Outrossim, podemos acrescentar à lista limitada de representações, os sonhos, as lembranças visuais de faces encontradas e outras que não são diretamente observáveis.

Para Duval (2011, p. 18),

> Essa multiplicação específica de tipos de representação leva a caracterizar também as representações em função de sua origem, isto é, em função do sistema que permite produzi-las e que determina as capacidades e os limites das representações produzidas.

Diante do exposto, afirma que é a variedade de representações de um objeto originada na diversidade dos sistemas semióticos ou físicos que autoriza a produção das representações.

Para Duval (2011, p. 18), “a multiplicação das representações possíveis de um mesmo objeto tem duas origens”, que são: a multiplicação indefinida das representações de mesmo tipo e a diversidade de tipos de representações. Para o autor, todas essas representações possuem natureza em comum. Mas, estas características fazem surgir uma diferença essencial entre a representação e o próprio objeto, ou seja, a variabilidade de uma e a invariância da outra.

Nesse contexto, conclui-se que as representações variam e os objetos não.

Por exemplo, ao trabalhar o conceito de plano no espaço, o objeto matemático plano no espaço, pode ser representado conforme os dados do Quadro 1.

Quadro 1- Definição da equação do plano no espaço

• $\mathscr{P}$ é um plano.

A é um ponto de $\mathscr{P}$ de coordenadas $(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

$\vec{n}$ é um vetor normal a $\mathscr{P}$ de coordenadas (a; b; c).

Seja M(x; y; z) um ponto qualquer do espaço,

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

Com $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Fonte: Hamaty et al. (1999, p. 249, tradução nossa).

A definição de plano no espaço, conforme apresentada no quadro 1, sempre será a mesma, porém as representações desta definição podem variar, como podemos ver no exemplo a seguir.

Quadro 2 - Exemplo de variação da representação do plano no espaço.

Seja então um plano determinado por três pontos não alinhados A, B e C, um ponto P desse plano. Consideramos a translação

P ↷ P' = P – A

Que leva A par O. A imagem do plano ABC é o plano OA´B´, e portanto, este plano é caracterizado pela igualdade:

$$\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OB'} + k'\overrightarrow{OC},$$

Onde k e $k' \in \mathbb{R}$ e B' e C' são as imagens respectivas dos pontos B e C por esta translação.

Desta igualdade, podemos deduzir que

$$\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$$

Que resume as equações paramétricas de um plano qualquer

$$\begin{cases} x = x_A + k(x_B - x_A) + k'(x_C - x_A), \\ y = y_A + k(y_B - y_A) + k'(y_C - y_A), \\ z = z_A + k(z_B - z_A) + k'(z_C - z_A), \end{cases}$$

Isto é, para todo ponto P(x, y, z) de um plano, existe reais k e k´ que verificam as três igualdades.

Eliminando os parâmetros k e k´ das equações, determinamos a equação cartesiana de um plano da seguinte forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

Na qual d$\neq$ 0 se o plano contém a origem do espaço cartesiano. Por exemplo, considerando o plano α, dadas as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + k + 0k', \\ y = 1 + 0k + k', \\ z = 3 + k + k'. \end{cases}$$

A eliminação dos parâmetros conduz à equação cartesiana x+y-z+1=0.

Fonte: Lebeau e Schneider (2009, p. 76-77).

As representações mudam simultaneamente, conforme os sistemas empregados e os pontos de vista levados em consideração para produzir uma representação distintamente do que ocorre com o objeto. Para Duval (2011, p. 18), “o objeto aparece como o invariante do conjunto de variações possíveis de suas representações”.

Segundo Duval, as transformações das representações em relação ao ponto de vista são, geralmente, confundidas com as transformações oportunas dos fenômenos. Estas transformações são muito distintas, visto que “as primeiras não estão associadas ao tempo, enquanto as segundas, ao contrário, são inseparáveis do tempo” (DUVAL, 2011, p. 19).

Por exemplo, as variações das representações da definição de plano no espaço apresentadas por Hamaty et al. (Quadro 1) e Lebeau e Schneider (Quadro 2) não estão associadas ao tempo, logo são transformações da representação em relação ao ponto de vista.

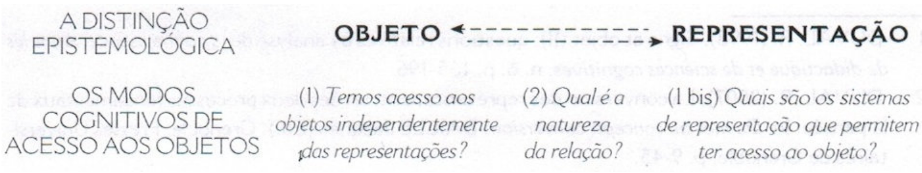
O autor trata do papel das representações ao discutir a respeito da questão cognitiva dos modos de acesso aos próprios objetos.

Os focos da análise do conhecimento são os modos que nos proporcionam acesso aos objetos, uma vez que não temos acesso direto aos mesmos. Para Duval (2011, p. 19),

> Isso não ocorre de modo direto e qualificado de “intuição”. A análise do conhecimento centra-se sobre os modos pelos quais temos acesso aos próprios objetos. Assim, rapidamente, somos levados a opor um modo de acesso direto, qualificado de <<intuição>>, e modos indiretos que repousam sobre os processos de formação e que mobilizam sistemas que constituem as diferentes atitudes dos sujeitos humanos.

Assim, é no quadro da distinção epistemológica fundamental, entre objeto e representação, que a análise do conhecimento foi sempre realizada. Para Duval, esta análise tem o dever de responder a três perguntas: a) temos acesso aos objetos independentemente das representações? b) qual é a natureza da relação? c) quais são os sistemas de representação que permitem ter acesso ao objeto? Nesse sentido, Duval apresenta (Figura 3) o primeiro esquema de análise do conhecimento:

Figura 3 - Primeiro esquema de análise do conhecimento de Duval.



Fonte: Duval (2011, p. 19).

Vale apresentar uma distinção entre percepção imediata (direta pela percepção) e mediata (através de mediadores, que podem ser outros seres humanos ou seus artefatos culturais). Duval (2011) cita que nosso acesso a todos os objetos presentes na realidade que nos circunda, ou seja, que estão no campo perceptivo multissensorial, ocorre de modo direto e imediato. O que faz compor a realidade, leva a percepção imediata ao ponto de partida de todo o conhecimento, mesmo na ilusão, quando a representação é considerada objeto. Para acessar os objetos que estão fora do campo perceptivo multissensorial, devemos recorrer às representações decorrentes da memória ou às descrições "que os outros podem fazer" (DUVAL, 2011, p. 20).

Duval afirma que continua aberta a questão do modo de acesso aos objetos que não derivam de uma percepção imediata possível.

Para Duval (2003, p. 31),

> Muitas vezes, as representações "mentais" não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas. Pois, em produção externa, pode-se tratar e controlar um número consideravelmente mais elevado de informações do que em produção interna, estando a vantagem de uma produção interna em sua maior rapidez e seus "atalhos".

Em se tratando da formação dos conceitos, percebemos que há dois aspectos: a) "o primeiro, é a maneira pela qual sua formação articula-se com as representações nascidas da percepção" e b) "o segundo, concerne à natureza da relação entre as representações e o objeto representado" (DUVAL, 2003, p. 20).

Duval trata do signo e da representação, e considera-os como uma linha divisória cognitiva. O autor afirma que a noção de signo inicia-se no interesse pela forma pela qual uma expressão verbal comunica alguma coisa a alguém, ou ainda, pela forma pela qual uma expressão verbal significa alguma coisa. Desse modo, basta olhar para o discurso, a prática mais comum da análise da expressão verbal, e entender como a noção de signo inicia-se na mesma prática.

A expressão verbal mostra duas faces completamente distintas no discurso, a face do locutor e a face de seu interlocutor. O interlocutor tem somente "as palavras que ele escutou pronunciar para compreender o que o locutor queria lhe dizer" (DUVAL, 2011, p. 21). Por sua vez, para o locutor, aquele que fala, a situação é bem distinta, uma vez que sua atenção está pouco ou nada centrada no que ele diz, mas, sim, naquilo que quer dizer. Nesse contexto, o locutor não diferencia as coisas que pretende dizer intencionalmente nem o sentido das palavras que ele utiliza, prestando pouca atenção na precisão daquilo que fala.

No entanto, Duval (2011, p. 21) afirma que

> existe uma distância importante entre as duas faces da expressão e não é a mesma face da expressão verbal que aparece primeiramente, conforme nos encontremos em posição de locutor ou de ouvinte. Assim, a primeira característica dos signos que resulta dessa dualidade das expressões verbais.

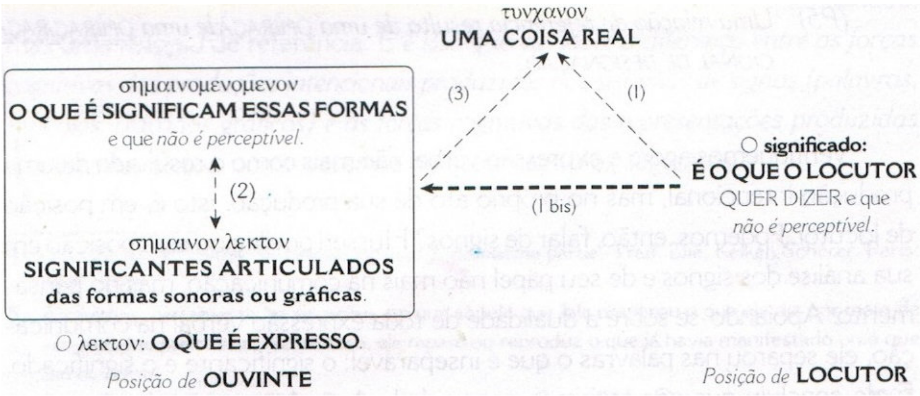
Nessas condições, o que comunica a dualidade de toda expressão verbal como produção intencional é a diferença entre significante e significado.

Para desenvolver as primeiras análises dos signos, conforme Duval (2011), os adeptos do estoicismo[6] tiveram de levar em consideração a expressão verbal, como consequência de uma produção intencional. Além disso, para o autor, os estóicos colocaram-se em posição de ouvintes ao denominarem λεκτον *λεκτον* (o que é dito), o que lhes deu permissão para realizar as diferenciações apresentadas na **Figura 4**.

Figura 4 - As duas faces da expressão verbal e a noção de signo de Duval.

---

[6] No discurso de Duval, observamos que ele não apresenta quais são os adeptos do estoicismo a que está se referindo.



Fonte: Duval (2011, p. 21).

Ao analisar a **Figura 4**, observamos que Duval afirma que primeiro devemos realizar uma diferenciação interna a respeito da própria expressão verbal, bem como para a qual os estoicos utilizam dois modos não conjugados do verbo significar.

Para Duval (2011, p. 22),

> O significante e o significado não podem ser separados, não mais que o verso e o reverso de uma moeda para retomar a comparação de Saussure. Não existe palavra sem significado. A segunda distinção é externa à própria expressão verbal. Ela permite retirar a segunda característica dos signos.

Nesse contexto, Duval conclui que a relação dos signos com as coisas que eles significam~~,~~ não é uma relação de causalidade, e sim de referência. Em geral, esta é sua particularidade fundamental, visto que admite ver o que os signos distinguem das representações. Em suma, a relação do signo com os próprios objetos que essas relações exprimem é exclusivamente uma situação de referência e nunca uma relação de causalidade.

Para Duval (2011, p. 22),

> A relação de referência se deve ao fato de que a expressão verbal é sempre uma produção intencional. Em outros termos, não é somente o sentido das palavras na língua que permite ao ouvinte ou ao leitor compreender a relação da expressão verbal com o objeto que ele descreve ou define, mas é o emprego intencional que o locutor faz desse objeto.

Este emprego intencional realiza-se por meio das operações de designação. Dessa forma, Duval (2011) explica que o emprego intencional está presente, quando falamos a respeito de um elemento de uma figura geométrica, "o centro de um círculo" ou "o meio de um segmento que é um diâmetro", ou ainda, “seja o ponto O”. Por certo, isto permite explanar o que compõe a natureza de uma relação de referência.

Diante do exposto, Duval (2011, p. 22) afirma que “uma relação de referência resulta de uma OPERAÇÃO DISCURSIVA INTENCIONAL DE DESIGNAÇÃO” (destaque do autor). Agora, verificamos a expressão verbal no próprio ato de sua produção, quer dizer, em sua posição de locutor, e não mais como resultado de uma produção intencional.

Após estas reflexões sobre a relação de referência, Duval questiona: podemos falar de signos? E o autor busca em Husserl uma justificativa para seu questionamento, ao dizer que

> Husserl privilegiou essa posição em sua análise dos signos e de seu papel não mais na comunicação, mas no pensamento. Apoiando-se sobre a dualidade de toda expressão verbal na comunicação, ele separou nas palavras o que é inseparável: o significante e o significado. E ele concluiu que não teríamos necessidade das palavras quando pensamos por nós mesmos, as palavras servem apenas como índices para o ouvinte sobre o que o locutor quer dizer (DUVAL, 2011, p. 22-23).

Fundamentado em Husserl, Duval esclarece que, certamente, para qualquer acontecimento, as palavras para o indivíduo que fala e no instante em que ele fala, são claras para aquilo que almeja falar; e o que ele almeja falar é análogo a um acesso direto ao objeto do qual ele mesmo fala. Isso quer dizer que há uma transparência dos signos para o indivíduo que se encontra na posição de locutor. Nessas condições, Duval (2011, p. 23) questiona: “Podemos concluir dessa transparência dos signos a não mobilização dos signos no ato do pensamento, não somente como Husserl o fez, mas como muitos continuam a fazê-lo, quando falam de <<representações mentais>>?” (Destaque do autor).

Em síntese, todas as observações relacionadas aos fenômenos de representação, aos signos e suas funções nos primeiros esquemas de análise do conhecimento, segundo Duval (2011), podem ser apresentadas nas quatro conclusões abaixo:

a) As representações são de modo epistemológico ambivalentes, uma vez que há dois aspectos radicalmente distintos: (1) nunca podemos confundir as representações com os objetos; (2) as representações são continuamente necessárias, para que tenhamos acesso aos objetos, em razão a sua diversidade. Isso porque as representações estão no lugar dos objetos ou porque elas os evocam, quando os mesmos não são prontamente acessíveis.

b) Os signos são representações, pois nunca podem ser confundidos com aqueles objetos que eles fazem referência.

> É por isso que os signos são definidos por sua característica comum com as representações, como podemos ver nesta definição que se tornou clássica: <<O signo é uma coisa (res) que, além da forma percebida pelos sentidos, faz vir a partir dele o pensamento de qualquer outra coisa...>> (DUVAL, 2011, p. 23)

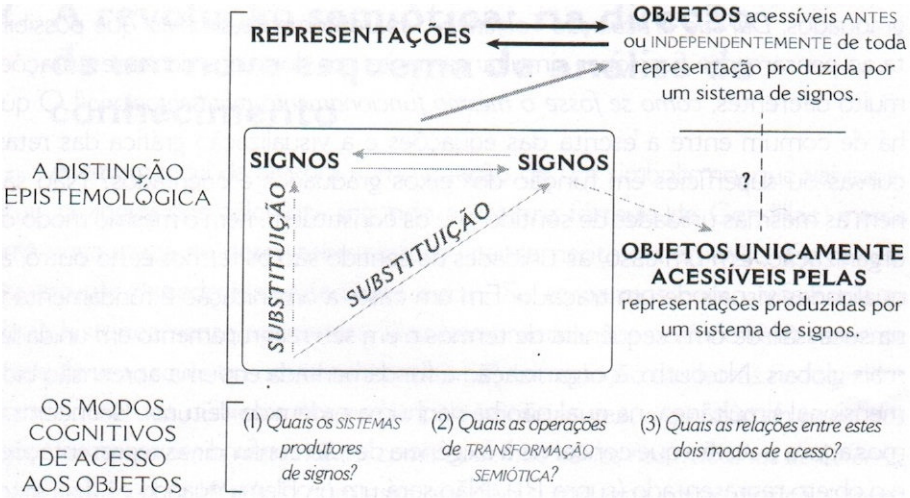
c) Os signos possuem uma relação de referência com os objetos, radicalmente diferente da relação das representações com os próprios objetos, que é uma relação de causalidade. Para Duval (2011), é essa diferenciação das relações que os signos e as representações possuem com o objeto, que fará a distinção entre as forças cognitivas das produções intencionais, produzidas nos sistemas de signos, e das forças cognitivas das representações, produzidas nos sistemas físicos. A saber, podemos exemplificar as produções intencionais produzidas nos sistemas de signos como: palavras, símbolos, traçados gráficos, por sua vez, podemos exemplificar as forças cognitivas das representações produzidas nos sistemas físicos por exemplo: cadeiras, fotos e entre outras.

d) No primeiro esquema de análise do conhecimento, Figura 3, os signos não possuem função alguma, uma vez que a totalidade dos modelos cognitivos, que foram retirados desse mesmo esquema, contempla as representações produzidas casualmente. Conforme Duval (2011, p. 24),

> Mesmo os processos de abstração e esquematização, que se inscrevem no conjunto das faculdades ou dos sistemas constituindo o sujeito conhecedor (o sentido, a memória, a imaginação, o entendimento, a razão), escapam em grande parte de uma produção intencional e controlada do sujeito.

Para Duval, a extensão semiótica das representações induziu uma revolução no enfoque teórico sobre os signos, bem como na identificação do papel dos signos no funcionamento cognitivo do pensamento. Nesse sentido, isso causou duas modificações intensas no primeiro esquema de análise do conhecimento: (1) no "papel central dado aos signos no funcionamento do pensamento matemático", e (2) na "necessidade de uma distinção epistemológica dos objetos em função de seus modos cognitivos de acesso" (2011, p. 26). Assim, esta revolução no enfoque dos signos levou a um novo esquema de análise do conhecimento, apresentado na Figura 5:

Figura 5 - O novo esquema de análise do conhecimento.



Fonte: Duval (2011, p. 26).

Diante do novo esquema de análise do conhecimento (Figura 5), Duval observa que a primeira linha superior conserva a oposição epistemológica apresentada no primeiro esquema de análise do conhecimento. Além disso, o autor observa também que, no primeiro esquema, os signos não eram intensamente diferentes das representações e que sua aplicação estava subordinada aos objetos designados ou representados. Em outros termos,

> sua função cognitiva se reduzia àquela de toda representação: colocar-se no lugar dos próprios objetos quando esses não são imediatamente acessíveis, isto é, permitir evocar os objetos em sua ausência. Distinguem-se das representações apenas por sua função de comunicação. (DUVAL, 2011, p. 26).

No novo esquema de análise, os signos surgem não como intermediários adicionais em uma sequência de produções contínuas de representações distintas que induziriam a percepção para a produção de conceitos, mas formando um circuito próprio autônomo. Assim,

> Esse lugar central dos signos tem a supressão da subordinação de seu emprego somente para a designação dos objetos. Pois, essa supressão abre a possibilidade das transformações semióticas que permitem explorar todas as combinações possíveis, e que não se limitam mais apenas ao que é empiricamente real ou concretamente verificável. (DUVAL, 2011, p. 27).

Nesse contexto, os signos completam uma função cognitiva de tratamento para constituir novos conhecimentos ou para fabricar novos dados. Para Duval (2011, p. 27), “os signos apresentam essa possibilidade de PODEREM SER SUBSTITUÍDOS POR OUTROS SIGNOS, independente dos objetos que eles podem evocar” (destaque do autor).

Por certo, para Duval, a pergunta “1bis” que foi apresentada no primeiro esquema de análise do conhecimento deve ser reformulada em duas outras questões: a) “quais os sistemas produtores de signos?” e b)” quais as operações de TRANSFORMAÇÃO SEMIÓTICA?” (Destaque do autor).. Conforme observa, isso deve ocorrer, porque a máquina da substituição interminável dos signos por outros, representada por duas flechas contrárias no retângulo da ilustração do novo esquema de análise do conhecimento, “não é o conhecimento dos objetos significados ou representados, mas o mecanismo mobilizado para produzir as representações semióticas dos objetos representados (as duas flechas partindo do nível inferior)” (DUVAL, 2011, p. 27). Além do mais, para o autor, estas duas questões são decisivas para a análise do funcionamento cognitivo exigido a todo encaminhamento do pensamento em matemática.

Duval afirma que esta primeira modificação significante remete a outra modificação que atinge a noção de objeto. Mas, nesse caso, é necessário diferenciar epistemologicamente pelo menos dois tipos de objetos, de acordo com o modo de acesso que temos a eles.

> De um lado, existem todos aqueles que são acessíveis pela percepção. Esse acesso pode ser direto e multissensorial para tudo o que concerne ao meio ambiente, mas ele pode ser igualmente indireto e monossensorial, com o recurso a instrumentos que mudam a escala de percepção como o telescópio, o microscópio etc (DUVAL, 2011, p. 27).

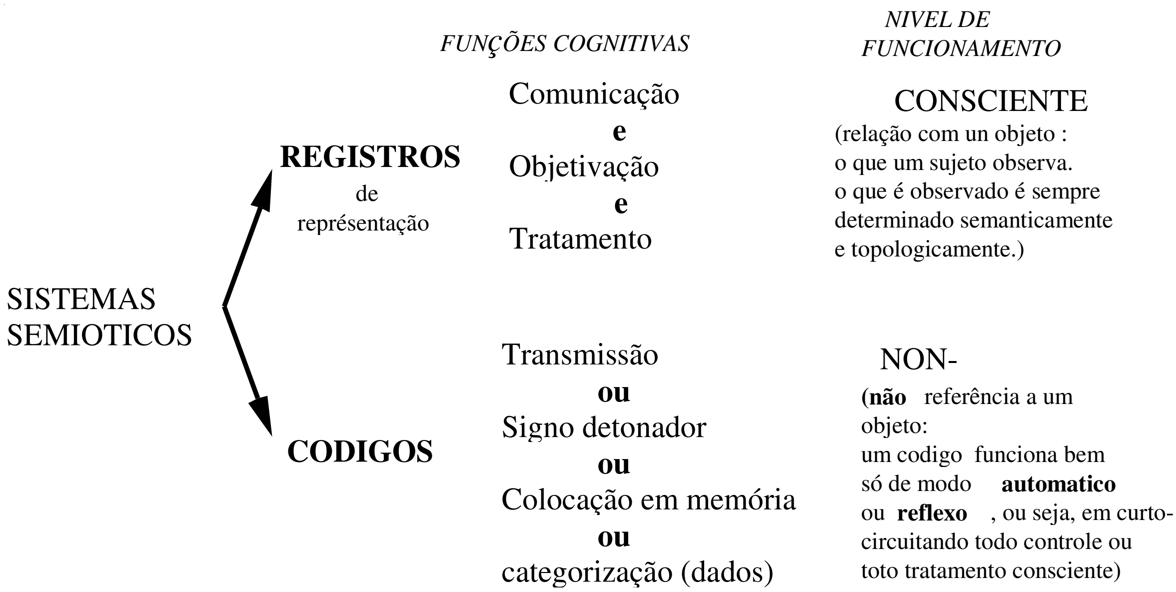
No entanto, nas situações de acessibilidade, a relação em meio às representações, que são produzidas e os próprios objetos, é a relação de efeito/causa. Dessa forma, a variedade de representações deriva da variedade particular dos sistemas receptores. Para Duval (2011, p. 28), “de outro lado, existem todos os objetos que não são acessíveis dessa maneira e para os quais devemos utilizar intencionalmente os sistemas de signos”. Contudo, é uma relação de referência, aquela que há em meio as representações produzidas e aos objetos que são representados, e não mais uma relação de causalidade.

No próximo tópico, apresentaremos a definição de registro de representação, conforme Raymond Duval.

1.1.1.2 O Registro de Representação

Antes de apresentar o conceito de registro, precisamos definir o que é um sistema semiótico. Nesse sentido, Duval (1999, [p. 1]) revela o que pertence ao sistema semiótico no seguinte esquema:

Figura 6 - Funções cognitivas e nível de funcionamento em sistemas semióticos.



Fonte: Duval (1999, p. 01).

Conforme o esquema de Duval (Figura 6), no sistema semiótico, pode haver registros de representação ou códigos. Além disso, cada elemento desse sistema possui diferentes funções cognitivas, assim como distintos níveis de funcionamentos. Nessas condições, são funções cognitivas dos registros de representação a comunicação, a objetivação e o tratamento; e são funções cognitivas dos códigos a transmissão, o signo detonador e a categorização (dados) ou o emprego em memória.

Em síntese, para Duval (2011, p. 72), os códigos são:

> sistemas que permitem transmitir uma informação discretizada ou que comutam a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão (auditivo/visual, ou de signos, cujo comprimento excede rapidamente nossas capacidades de apreensão imediata e de memorização. Mas, sobretudo eles não remetem a nada e, portanto, não representam nada. Sua produção é uma codificação termo a termo

> dos dados que podem ser o estado de um circuito, de sons, de respostas a questões etc. A codificação torna praticamente inútil toda referência aos dados codificados. O código, por excelência, é evidentemente o código booleano, aquele que nenhuma pessoa tem necessidade de aprender, mas com o qual funciona a máquina de Turing e, portanto, os computadores. Os sistemas de escrita são assim códigos, mas sua particularidade é a de se fundir seja com a produção fonética de uma língua (alfabeto), seja com as ideias que a língua permite produzir vocalmente (ideograma).

No esquema, ainda encontramos dois níveis de funcionamento, o consciente e o não consciente. O nível de funcionamento consciente é o que acontece por meio dos registros de representação e produz a "relação com um objeto: o que um sujeito observa. O que é observado é sempre determinado semanticamente e topologicamente" (conforme a Figura 6). Por outro lado, o nível de funcionamento não consciente é advindo por meio dos códigos e "não referência a um objeto: um código só funciona bem de modo automático, ou seja, curtocircuitando todo controle ou tratamento consciente" (conforme a Figura 6). Conforme Ferraz (2008, p. 22-23), "o conjunto das escritas algébricas, o conjunto de traços, o conjunto de símbolos é que formam sistemas semióticos". De acordo com Ferraz (2008), Duval classifica os sistemas semióticos em três linguagens: natural ou materna, simbólica e figural.

Nesse sentido, para Duval et al. (2005, p. 790),

> we often want to be able to distinguish between the various semiotic systems and thus make a distinction between the language that we speak and write using words and, for example, algebraic notation. Further distinction becomes necessary when considering the differences between mathematical and non-mathematical uses of the same semiotic system. The need to make these distinctions has led to proliferation of expressions such as 'natural language', 'verbal language', 'everyday language', etc., used in ways that are not precisely defined. [7]

Conforme Duval (1993), para reconhecermos um sistema semiótico como um registro de representação, ele deverá permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose, que são: formação de representação identificável, tratamento e conversão.

---

[7] Muitas vezes queremos ser capazes de distinguir entre os diferentes sistemas semióticos e, assim, fazermos uma distinção entre a língua que falamos e escrevemos usando palavras e, por exemplo, notação algébrica. Outra distinção torna-se necessária quando se consideram as diferenças entre usos matemáticos e não-matemáticos do mesmo sistema semiótico. A necessidade de fazer essas distinções levou a proliferação de expressões como "linguagem natural", "linguagem verbal", "linguagem cotidiana", etc, utilizadas de maneiras que não são definidas com precisão.

As ***formações de representações identificáveis*** são as funções das unidades e das regras de formação que são próprias ao registro semiótico em qualquer representação que é produzida. Estas formações devem respeitar as seguintes regras: as condições de identificação e de reconhecimento da representação, bem como a possibilidade de sua utilização pelos tratamentos. Estas são regras de conformidade que não implicam a competência para formar as representações, mas somente para reconhecê-las.

Para Duval (1993, p. 41),

> la formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné: énonciation d'une phrase (compréhensible dans une langue naturelle donnée), composition d'un texte, dessin d'une figure géométrique, élaboration d'un schéma, écriture d'une formule… Cette formation implique une *sélection* de traits et de données dans le contenu à représenter.[8]

Uma formação de representação identificável, pode ser exemplificada[9] do seguinte modo. Seja um sistema cartesiano ortogonal (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), com dois pontos diferentes, A e B, que determinam uma única reta, que chamaremos de "r", a qual pertencem. Nesse sentido, se os pontos A e B forem diferentes, então, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ não será nulo. Assim, um ponto W do espaço irá fazer parte da reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AW}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem paralelos, ou seja, forem linearmente dependentes. Este exemplo é a definição de reta no espaço, que apresenta as características, bem como as funções das unidades e das regras de formação que são próprias desse registro semiótico.

Os ***tratamentos de uma representação*** são transformações dessa representação no próprio registro~~,~~ no qual ele foi formado, ou seja, é uma transformação interna a um registro. Para Duval (1993, p. 41),

> la paraphrase et l'inférence sont des formes de traitement en langue naturelle. Le calcul est une forme de traitement propre aux écritures symboliques (calcul numérique, calcul algébrique, calcul propositionnel...). La reconfiguration est un type de traitement particulier

---

[8] A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível em uma língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula... Esta formação implica uma seleção de traços e de dados no conteúdo da representação (Tradução nossa).

[9] Exemplo desenvolvido com base na definição de reta do sexto capítulo do livro: Geometria Analítica Espacial, de Olímpio Rudinin Vissoto Leite, São Paulo: Loyola, 1991, p. 113.

> pour les figures géométriques: c'est l'une des nombreuses opérations qui donne au registre des figures son rôle heuristique. L'anamorphose est une forme de traitement qui s'applique à toute représentation figurale... [10]

Diante da definição de tratamento, podemos exemplificá-la por meio do mesmo exemplo apresentado na formação de representação identificável: seja um sistema cartesiano ortogonal (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), com dois pontos diferentes, A e B, que determinam uma única reta, que chamaremos de "r", a qual pertencem. Nesse sentido, se os pontos A e B forem diferentes, então, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ não será nulo. Assim, um ponto W do espaço irá fazer parte da reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AW}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem paralelos, ou seja, se forem linearmente dependentes. Nesta definição de reta no espaço, foram realizadas algumas transformações internas a esse registro em língua natural, como a letra "r" utilizada para representar a palavra reta e as modificações realizadas nas frases empregadas para definir a reta.

A ***conversão de uma representação*** é a transformação desta em uma representação de outro registro, conservando a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida.

Para Duval, somente mediante as duas condições que a aplicação da conversão, como instrumento pode ser feita:

> - Dar-se a representação a mais elementar possível, R_1, de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida R'_1 em um registro de chegada B;
> - Proceder a todas as variações possíveis de $R_{1...}$ R_n que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de R'_1 no registro de chegada B. (Fazer, assim, variar uma representação no registro de saída corresponde ao princípio de análise estrutural utilizado pelos linguistas desde Saussure.) As representações $R_{1...}$ R_n do registro A se separam, então, em duas classes: aquelas para as quais existe somente uma representação concomitante R'_i no registro de chegada B e aquelas que têm cada uma representação concomitante diferente no registro de chegada. (DUVAL, 2003, p. 25)

---

[10] A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio às escrituras simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: esta é uma das numerosas operações que dão ao registro das figuras seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica à toda representação figural...

Para o autor, o emprego da conversão, como um instrumento de análise tem a possibilidade de surpreender, uma vez que ela é um evento muito natural. Segundo Duval (2003, p. 25), "primeiramente, ela não passa de uma utilização do método experimental: as variações de R_1 no registro A correspondem à manipulação de uma ou de várias variáveis independentes, e as variações concomitantes no registro B correspondem a valores de uma variável dependente".

Duval (1993) afirma que a conversão não deve ser confundida com duas atividades que são, particularmente, próximas: a codificação e a interpretação. Para este autor,

> Ce qu'on appelle généralement "*interprétation*" requiert un changement de cadre théorique, ou un changement de contexte. Ce changement n'implique pas de changement de registre, mais il mobilise souvent des analogies. Le "*codage*" est la "transcription" d'une représentation dans un autre système sémiotique que celui où elle est donnée. (DUVAL, 1993, p. 43)[11]

Nesse contexto, Duval afirma que:

> l'activité de conversion d'une représentation puisse souvent paraître être étroitement liée à une interprétation ou à un codage, elle leur est irréductible, parce que d'une part elle ne se fonde sur aucune analogie comme dans le cas de l'interprétation et que, d'autre part, la conversion ne peut être obtenue par l'application de règles de codage. Il n'existe et il ne peut exister de règles de conversion comme il existe des règles de conformité et des règles de traitement (1993, p. 43).[12]

Duval (1993) cita que a conversão é uma atividade cognitiva distinta e independente da atividade de tratamento. Ele declara que podemos perceber esta distinção em uma situação muito simples de cálculo numérico, quando os alunos podem muito bem efetuar a adição de dois números com sua escrita decimal e com sua escrita fracionária, e nem pensar em convertê-las. Isto se for necessário escrever um número decimal em sua escrita fracionária ou, pelo

---

[11] O que geralmente chamamos "interpretação" requer uma mudança de quadro teórico ou uma mudança de contexto. Essa mudança não implica uma mudança de registro, mas ela mobiliza muitas vezes as analogias. A "codificação" é a "transcrição" de uma representação em outro sistema semiótico diferente do sistema semiótico onde ele é dado. (Tradução nossa).

[12] A atividade de conversão de uma representação pode frequentemente parecer estar estritamente ligada à uma interpretação ou a uma codificação; ela não se reduz a estes, porque, de lado, ela não se baseia sobre nenhuma analogia como no caso da interpretação e que, por outro lado, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação. Não existem e não podem existir regras de conversão como existem regras de conformidade e regras de tratamento. (Tradução nossa).

contrário, ou até mesmo falhar ao realizar esta conversão. Duval (1993) destaca que este exemplo ocorre com frequência e que os alunos chegam ao ensino médio sem saber calcular. Conforme ele, os alunos esquecem que a escrita decimal, a escrita fracionária e a escrita com expoente formam três registros distintos de representação dos números.

Para o autor, a palavra conversão não foi escolhida por acaso, a escolha engaja uma hipótese sobre a natureza dos processos cognitivos permitindo um indivíduo efetuar uma transformação e sobre seu local na semelhança do funcionamento do pensamento. Duval (2007, p. 10) salienta que

> le choix d'un mot ne renvoie pas seulement à la manière de qualifier une classe particulière de processus, mais aussi à la manière de la situer parmi les autres types de processus cognitifs qui permettent l'exercice de la pensée et le développement de la connaissance: processus périphérique ou processus central, condition ou conséquence, etc. Ici on ne va pas seulement du mot au concept, mais du mot à un modèle ou à une théorie. Ce sont les raisons du choix de ce mot <<conversion>>, pour qualifier le passage d'un type de représentation à un autre, ainsi que les questions et les perspectives de ce choix pour analyse du fonctionnement cognitive de la pensée [...].[13]

Nesse contexto, Duval (2007), afirma que a conversão das representações semióticas refere-se tanto a uma prática consciente criativa como aos processos não conscientes do pensamento.

Podemos exemplificar a conversão modificando o registro semiótico da reta apresentada em língua natural. Seja um sistema cartesiano ortogonal (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) com dois pontos diferentes A e B que determinam uma única reta à qual pertencem, que chamaremos de "r". Nesse sentido, se os pontos A e B forem diferentes, então, o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ não será nulo. Assim, um ponto W do espaço irá fazer parte da reta r se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AW}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem paralelos, ou seja, se forem linearmente dependentes. Nesse sentido, podemos afirmar que existe um número real k tal que: $\overrightarrow{AW} = k \times \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$

---

[13] A escolha de uma palavra não diz respeito somente para a maneira de qualificar uma classe particular de processos, mas também à maneira de os situar entre os outros tipos de processos cognitivos que permitem o exercício do pensamento e o desenvolvimento do conhecimento: processo periférico ou processo central, condição ou consequência, etc. Aqui não vamos somente da palavra ao conceito, mas da palavra para um modelo ou para uma teoria. Esta é a razão desta palavra <<conversão>>, para qualificar a passagem de um tipo de representação à um outro, assim que as questões e as perspectivas desta escolha para a análise do funcionamento cognitivo do pensamento [...].

$$\overrightarrow{AW} = k \times \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OA} + k \times \vec{v}$$

Diante disso, vimos que a conversão está na transformação do registro em língua natural para o registro algébrico da definição de reta no espaço.

Duval (2003) afirma que a individualidade da atividade matemática encontra-se na mobilização concomitante de, no mínimo, dois registros de representação ao mesmo tempo ou na viabilidade de mudar de registro de representação a todo instante. Nos termos de Duval, temos:

> Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro ao outro. Podemos então antecipar a hipótese, ou, em linguagem matemática, "conjecturar" o seguinte: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas (2003, p. 15).

De acordo com Duval (2011), a análise do funcionamento cognitivo do pensamento estabelecida pela matemática, apresenta a indigência de uma movimentação coordenada e ao mesmo tempo de vários registros para poder apreender.

Duval (2003, p. 16) afirma que

> a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo [...] É por isso que a conversão não chama a atenção, como se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à "verdadeira" atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Ainda conforme o autor,

> De acordo com essas ideias, o ato da conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois seria suficiente aplicar regras de correspondência para "traduzir". Assim, passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. Ou, ainda, passar de uma expressão em português*- como "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" – à escrota simbólica – no caso, "x >y" – seria igualmente uma codificação, como toda a escrita literal de relações entre os números (DUVAL, 2003, P. 17).

Ele vislumbra que

> há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. (DUVAL, 2003, p. 17)

Ainda reforça que

> os métodos a serem utilizados numa pesquisa são sempre relativos à natureza dos fenômenos a estudar. Ora, acabamos de ver os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações. É preciso, então, desenvolver um método que permita observar verdadeiramente esses fenômenos nas produções dos alunos. Aqui podemos somente esboçar grandes linhas em relação a esse método. Inicialmente, em toda análise de tarefa como em toda resolução de problemas, é necessário *distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão*, esta consistindo em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes. (DUVAL, 2003, p. 24)

Segundo Duval (2003, p. 25), “o mesmo ocorre para a atividade de conversão: ela pode ser mais complexa se houver a necessidade ou não de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional”.

Para Duval (2011, p.117), os registros monofuncionais são específicos da matemática e, por outro lado, os registros multifuncionais são aplicados fora do contexto matemático, nas funções de comunicação, de objetivação e “não primeiramente, ou mesmo raramente, para a linguagem matemática”. Isto é~~,~~ evidente para a linguagem matemática, entretanto, em matemática, é o oposto que se lança. “*Utilizamos a língua primeiramente para as funções de tratamento, mesmo nas situações de comunicação com os alunos!*” (Grifo do autor) (DUVAL, 2011, p. 117). Nesse caso, no ensino da matemática, há duas práticas radicais da linguagem. Embora Duval (2011) não apresente claramente as duas práticas radicais da linguagem, deduzimos que ele está se referindo aos registros multifuncionais e monofuncionais.

Diante disso, Duval (2011) apresenta o quadro dos distintos tipos de registros que são empregados em matemática.

Figura 7 - Classificação dos tipos de registros semióticos.

	Registros DISCURSIVOS Linearidade fundamentada na sucessão para a produção das expressões	Registros NÃO DISCURSIVOS Apreensão simultânea de uma organização bidimensional
Registros MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são não algoritmizáveis	As LINGUAS: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção oral/escrita	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas).
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: as transformações de expressões são **algoritmizáveis**	AS ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: escrita	Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas. GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos.** ESQUEMAS

Fonte: Duval (2011, p. 118).

Diante da classificação dos tipos de registros semióticos (Figura **7**8), observamos que Duval classifica-os em quatro tipos: registros multifuncionais, cujos tratamentos são não algoritmizáveis; registros monofuncionais, cujas transformações de expressões são algoritmizáveis; registros discursivos, cuja linearidade é fundamentada na sucessão para a produção das expressões e registros não discursivos, apreensão simultânea de uma organização bidimensional.

Nessas condições, os registros multifuncionais podem ser: as línguas, três operações hierarquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio) com duas modalidades de produção oral/escrita; e icônica, produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto, além da configuração geométrica, com três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas).

Os registros monofuncionais podem ser: as escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) com uma modalidade de produção: escrita; e junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas, bem como gráficos cartesianos, com operação de zoom, interpolação, mudança de eixos, além dos esquemas.

Os registros discursivos podem ser: as línguas, com três operações hierarquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio); duas modalidades de produção oral/escrita; as representações auxiliares transitórias para as operações livres ou externas; bem como as escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) com uma modalidade de produção: escrita.

Os registros discursivos podem ser: icônico, produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto, além de configuração geométrica, com três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas); junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas, bem como gráficos cartesianos, com operação de zoom, interpolação, mudança de eixos, além dos esquemas.

Ao tratar da conversão, bem como dos diferentes tipos de registros, consideramos relevante explorar a congruência e a não congruência da conversão.

1.1.1.2.1 Congruência e não congruência na conversão

Em qualquer operação de conversão, observamos que surge a característica cognitiva, específica da atividade de conversão, bem como nos dois tipos de fenômenos: congruência e não-congruência; além da heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. A possibilidade de não congruência e a heterogeneidade dos sentidos de conversão caracterizam a conversão de registros de representação. Segundo Duval (2003, p. 19),

> Para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Esquematicamente, duas situações podem ocorrer. Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência).

Diante disso, Duval apresenta um exemplo de congruência ou de não congruência de uma conversão, conforme podemos ver nos dados da Figura 8:

Figura 8 - Exemplo de variação de congruência ou de não congruência de uma conversão

	Correspondência Semântica das Unidades de Significado	A unidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja a ordenada é superior a abcissa $y > x$	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abcissa positiva $x > 0$	Não "Maior que zero" é uma perifrase (um só significado para várias palavras).	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal $x.y > 0$ O produto da abcissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Fonte: Duval (2003, p. 19).

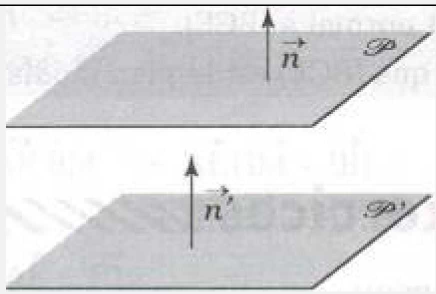
No exemplo apresentado por Duval, há três fatores que permitem determinar os graus de congruência ou de não congruência: correspondência semântica das unidades de significado, a unidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades. Além disso, observamos também que o autor aplicou esses fatores no conjunto dos pontos das ordenadas e abscissas. Para Duval (2003, p. 19), “a tomada em conta desses três fatores permite determinar os graus de congruência ou não congruência que são, geralmente, correlacionados às variações de sucesso ou fracasso nas operações de conversão”.

Ao tratar da heterogeneidade da conversão, Duval reflete que não ocorre continuamente o fato da conversão efetuar-se, quando se invertem os registros de saída e o de chegada. Para ele, o fenômeno pode acarretar resistências fortíssimas de acertos, logo que se inverte o sentido de conversão. Nesse contexto, Duval (2003, p. 20) alerta que, “geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”. Além disso, Duval (2007, p. 40), completa dizendo que é este que constitui o limiar e o mais difícil para atravessar o reconhecimento de um mesmo objeto por meio das representações totalmente diferentes uma vez que são produzidos nos sistemas heterogêneos.

Apresentamos outros exemplos de congruência, não congruência e de heterogeneidade nos dois sentidos da conversão.

Podemos exemplificar a congruência com o exemplo do Quadro 3:

Quadro 3 - Exemplo de Congruência e Não Congruência.

Dois planos são paralelos, se e somente se, um vetor normal a um dos planos é colinear a um vetor normal à outro plano.

$\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{\alpha n'}\ [\alpha \in \mathbf{R}^*]$

Fonte: Hamaty et al. (1999, p. 248).

Por que você usa esse exemplo? Seria por que o autor pretendia exemplificar meramente uma conversão? Ele de fato pretendia isso no texto original? Isso é um exemplo comum de desleixo na conversão?

Ao observarmos o Quadro 3, percebemos que o registro dos planos paralelos transparece na representação de saída, em linguagem verbal, logo este é um exemplo de congruência.

Além disso, observamos também que a expressão $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$ ‘$\Leftrightarrow$ $\vec{n} = \overrightarrow{\alpha n'}\ [\alpha \in \mathbf{R}^*]$, apesar de representar o paralelismo dos dois planos, precisa ser interpretada do ponto de vista vetorial para explicitar esta propriedade, logo, este é um exemplo de não congruência.

Por sua vez, quanto à heterogeneidade nos dois sentidos da conversão, observamos que a conversão pode vir a não se efetuar, quando se invertem os registros de saída, por exemplo, saindo de $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{\alpha n'}$ $[\alpha \in \mathbf{R}^*]$, para se chegar ao registro figural ou em linguagem verbal.

Diante do exposto, podemos entender os motivos que levaram Duval (2003, p. 22) a desenvolver a proposta de compreensão matemática: "dispor de ao menos dois registros de representação diferentes". Para ele, esta é a única maneira que se tem para não confundir o objeto representado com o conteúdo de uma representação.

Nessa perspectiva, para Duval (2003, p. 22),

> a oposição feita muitas vezes entre a compreensão que seria conceitual (ou puramente mental) e as representações semióticas que seriam externas aparece como uma oposição enganadora. Basta lembrar os dois tipos de fenômenos característicos da conversão para perceber esse fato. As variações de congruência, assim como a não equivalência dos sentidos de conversão, mostram que a conversão não resulta de uma compreensão conceitual, pois, se assim o fosse, as variações consideráveis de sucesso e de fracasso em tarefas elementares de conversão não estariam fortemente correlacionadas com as variações de não congruência ou com aquelas do sentido da conversão. Constata-se, além disso, que a não congruência pode levar os alunos a verdadeiros bloqueios que eles não superam verdadeiramente.

Na atividade matemática, é fundamental substituir uma expressão ou uma representação por outra que lhe é referencialmente semelhante. No geral, esta substituição estabelece determinadas condições, para que exista sentido no pensamento natural, que são: a continuidade semântica e a associatividade em meio às expressões que estão para serem substituídas.

Para Duval (1988), esta atividade de substituição compõe um entrave, visto que se transfere uma representação gráfica para uma expressão algébrica, uma figura a outra, que é completamente distinta ou uma frase para uma expressão simbólica Em determinadas situações, há uma equivalência fácil e direta de ser reconhecida, aquilo que Duval caracteriza como congruência semântica. Entretanto, o autor relata que, em geral, não existe qualquer relação de correspondência direta, deixando os conteúdos irreconhecíveis ou estranhos, situação esta que ele caracteriza como não congruência semântica.

Segundo Duval,

> As únicas variações de representação que são cognitivamente importantes no registro de partida são aquelas que provocam uma modificação da representação concomitante no registro de chegada, porque isso implica um novo objeto denotado. Esse método permite discriminar, entre todas as variações estruturais possíveis das representações em um dado registro, aquelas que são cognitivamente importantes. Naturalmente, as variáveis cognitivas que são assim postas em evidência são sempre relativas a um registro de representação. Ele permite igualmente evidenciar os fenômenos de congruência e de não congruência (DUVAL, 2003, p. 26).

Ainda para Duval,

> É enganosa a ideia de que todos os registros de representações de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros. Nessa perspectiva, a oposição muitas vezes feita entre a compreensão que seria conceitual ou puramente mental e as representações semióticas que seriam externas aparece como enganadora (DUVAL, 2003, p. 31).

Diante disso, Duval apresenta o modo fenomenológico de produção, conforme apresentado nos dados do Quadro 4:

Quadro 4 - Modo fenomenológico de produção.

Sistema de produção		MENTAL (interna)	MATERIAL (externa)	
			ORAL	VISUAL (suporte de papel ou tela de computador)
		produção para si próprio	produção para os outros	Produção para si próprio ou para os outros
	SEMIÓTICO (produção intencional)	discurso interior OBJETIVAÇÃO e funções de tratamento	interações verbais funções de COMUNICAÇÃO	escrita, desenho funções de TRATAMENTO de comunicação e de objetivação
	NATURAL (produção automática)	memória visual ou icônica função de objetivação		

Fonte: Duval (2003, p. 31).

Conforme o quadro apresentado, observamos que o sistema de produção está distribuído em: mental (interna) e material (externa), além disso, em semiótico (produção intencional) e natural (produção automática). A produção mental pode ser: produção para si próprio, discurso interior (objetivação e funções de tratamento), além de memória visual ou icônica com função de objetivação. A produção material pode ser oral ou visual (suporte de papel ou tela de computador). A produção material oral pode ser: produção para os outros e interações verbais (funções de comunicação). Por outro lado, a produção material visual pode ser: produção para si próprio ou para os outros ou escrita e desenho com funções de tratamento de comunicação e de objetivação.

Além do mais, o sistema de produção semiótica pode ser: um discurso interior com objetivação e funções de tratamento, interações verbais com funções de comunicação e escrita ou desenho com funções de tratamento de comunicação e de objetivação. Entretanto, o sistema de produção natural pode ser a memória visual ou icônica com função de objetivação.

Nesse contexto, Duval (2003, p. 31), afirma que “as representações semióticas não são internas e nem externas”. Para ele, é frequente as representações mentais serem representações semióticas interiorizadas. Em matemática, as representações mentais pertinentes ou úteis são continuamente representações semióticas interiorizadas em influência mútua com um tratamento de produção exterior de representações semióticas. Isso ocorre “pois, em produção externa, pode-se tratar e controlar um número consideravelmente mais elevado de informações do que em produção interna, estando a vantagem de uma produção interna em sua maior rapidez e seus ‘atalhos’” (DUVAL, 2003, p. 31).

Para além do escopo do sistema de produção, Duval destaca que, inicialmente, é da não congruência semântica que derivam às dificuldades matemáticas de reconhecimento e compreensão do processo de substituição por equivalência referencial.

Para Duval (2003, p. 21),

> numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. Falando de outra maneira, o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monoregistros. Existe como um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem.

Segundo Duval (1988, p. 7), a diferença entre sentido e referência está rigorosamente vinculada ao princípio de substituição, fundamental nos processos de dedução ou de cálculo, uma vez que “duas expressões, com a mesma referência, podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou em uma fórmula, sem que o valor da verdade mude".

Esta diferença entre sentido e referência~~,~~ é, de acordo com Duval, uma das mais produtivas em todas as esferas nas quais a relação às ideias e aos conceitos realiza-se por meio do controle de signos, de expressões ou de símbolos. Para Duval (1988, p. 7), "elle a conduit à bien séparer la signification, laquelle dépend du registre de description choisi, et la référence, laquelle dépend des objets exprimés ou représentés". [14]

Conforme a perspectiva da constituição objetiva do saber, Duval trabalha em relação à referência, à substituição, que consente o desenvolvimento da demonstração e do cálculo. Entretanto, conforme perspectiva da apropriação subjetiva do saber matemático, a substituição faz-se inicialmente em função do sentido associativo interno. Para Duval (1988, p. 8), "tout dépend alors de ce que nous appellerons la **congruence** ou la **non congruence sémantiques des expressions à substituer"** (grifo do autor)[15].

Existem duas relações independentes para serem levadas em consideração entre as duas expressões ou duas apresentações de uma mesma informação, que são: a) a relação de equivalência referencial e b) a relação de congruência semântica.

Por hipótese, duas expressões distintas podem ser referencialmente equivalentes e não serem semanticamente congruentes; e, de modo inverso, duas expressões podem ser semanticamente congruentes e não serem equivalentes de modo referencial.

Duval (1988) argumenta que, o matemático examina a equivalência referencial de modo prioritário, de tal sorte que, geralmente, está de acordo com uma condição indispensável, para que faça sentido seu pensamento natural, como: a continuidade associativa e semântica em meio às expressões que serão substituídas. Diferente do matemático, o indivíduo que não percebe o empenho intelectual exigido em matemática aplica, naturalmente, a congruência semântica como condição indispensável e, de quando em quando, satisfatória da

---

[14] Ela conduziu a bem separar a significação, que depende do registro de descrição escolhido, e a referência, a qual depende dos objetos expressados ou referenciados (Tradução nossa).

[15] Tudo depende então do que chamamos **congruência** ou **não congruência semântica das expressões a substituir** (Tradução nossa) grifo do auto).

equivalência referencial. Nos termos de Duval (1988, p. 8), “il trouvera et se satisfaira des substitutions sémantiquement congruentes; en revanche, il resistera aux substitutions non sémantiquement congruentes mais référentiellement equivalentes”[16].

Em tese, a substitutividade de expressões é uma característica essencial para todo registro semiótico que mostra uma informação ou ideia, bem como é intrínseca a toda mudança de registro semiótico.

Para Duval (1988), fundamentado na invariabilidade da referência, o comportamento em matemática sugere uma substitutividade não só inter-registro como intrarregistro. Estes modos de subtitutividade manifestam-se de forma análoga ao conteúdo matemático, visto que a atividade de substituição inter-registro manifesta-se de maneira independente do conteúdo matemático com maior frequência que a substituição intrarregistro.

O autor alerta que, muitos indivíduos, no processo de aprendizagem, levam em consideração a congruência semântica gerando um obstáculo, uma vez que é a equivalência referencial que deveria ser colocada em xeque no ensino da matemática. Diz ele,

> Un des obstacles rencontrés par beaucoup d’élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l’équivalence référentielle l’emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique (DUVAL, 1988, p. 9).[17]

Duval (1988) não garante que a equivalência referencial seja uma razão satisfatória para agrupar em uma única rede semântica e, com maior razão ainda, para afiançar o destaque instantâneo da substituição de uma expressão por outra não congruente. O autor insiste: muitos indivíduos que frequentam distintos níveis, bem como distintos domínios da aprendizagem matemática, encontram esta dificuldade, que a torna ainda mais importante, uma vez que não é clara e nem sistematicamente considerada no ensino.

---

[16] Ele encontrará e ficará satisfeito com as substituições que são semanticamente congruentes; por outro lado, ele irá resistir às substituições que não são de modo semântico congruentes, mas referencialmente equivalentes (Tradução de Méricles Thadeu Moretti).

[17] Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos na aprendizagem de matemática está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica (Tradução de Méricles Thadeu Moretti).

Para obter êxito em uma atividade matemática, a sua apresentação e o seu desenvolvimento não podem exigir qualquer transformação em meio às expressões de formulações ou de representações congruentes, visto que a aplicação da mesma atividade com uma variante que sugira manipulação de elementos não congruentes possibilita o fracasso. Segundo Duval (1988), este ponto de vista é exclusivamente significativo para a heurística de problemas de geometria, bem como no estimular do desenvolvimento do raciocínio neste campo.

Na matemática, o discurso é desenvolvido, sobretudo, por substituição e não por acumulação ou adjunção, distintamente do que ocorre com o discurso em linguagem natural.

Conforme Duval,

> C'est ce qui confère à tout développement mathématique un ordre linéaire plus strict que pour le développement d'un texte français ordinaire. A chaque pas du raisonnement, du calcul ou de la procédure de résolution, la nouvelle expression ne vient pas compléter ou enrichir les expressions antérieures et les données initiales, comme dans le texte d'une description, celui d'une histoire ou celui d'une discussion. Cette nouvelle expression vient, au contraire, se substituer à l'expression du pas précédent en vertu de définitions, d'axiomes, de théorèmes, de tables d'opérations... *qui sont autant de règles de substitution* pour le progrès de la pensée à partir dês données initiales: dans un développement qui opere par substitution rapprochement de deux expressions éloignées n'a pas de sens, alors que dans un texte, ou l'opère par accumulation d'informations, de précisions, le rapprochement de deux phrases éloignées peut permettre de saisir la cohérence du discours développé (DUVAL, 1986, p. 80-86 *apud* DUVAL 1988, p. 19-20) (Destaque do autor).[18]

A atividade de substituição é uma particularidade essencial do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, e é referente a ela que os fenômenos de congruência semântica e de não congruência semântica têm função importante, seja esta uma atividade inter ou intrarregistro.

---

[18] É o que confere a todo desenvolvimento matemático uma ordem linear mais estrita do que a do desenvolvimento de um texto, em comum, em uma língua comum. A cada passo do desenvolvimento do raciocínio, do cálculo ou de um procedimento de resolução, a nova expressão não vem completar ou enriquecer as expressões anteriores e os dados iniciais, como em um texto descritivo, em um texto de história ou de uma discussão. Esta nova expressão vem, ao contrário, substituir a expressão do passo anterior, em virtude das definições, dos axiomas, dos teoremas e das tabelas de operações e de **tantas regras de substituição,** para que o pensamento progrida com base nos dados iniciais: em um desenvolvimento em que se opera por substituição, a aproximação de duas expressões distantes não têm sentido. No entanto, em um texto que funciona por acumulação de informações, as precisões, a aproximação de duas frases distantes podem permitir que se encontre a coerência do discurso desenvolvido (Tradução de Méricles Thadeu Moretti) (negrito do autor).

Neste sentido, Duval (1988, p. 20) afirma que:

> Cela explique pourquoi la cohérence d'un texte mathématique soit d'un autre type que celle d'un texte non mathématique et qu'elle soit, par conséquent, si difficilement accessible à une majorité d'élèves (au moins jusqu'à 16-17 ans et au delà, dans les filières non-scientifiques). [19]

Duval (1988) argumenta que os elementos que autorizam a construção de uma representação que oferece lugar às operações fundamentais para o funcionamento do pensamento, a associação e a substituição, são os signos, os símbolos, bem como todos os elementos icônicos.

Nesse contexto, o autor apresenta dois modos de associação, que devem ser distinguidos: associação interna e associação externa. A primeira, constitui-se conforme as amarrações de pertinência e contextuais na mesma rede semântica. A segunda, constitui-se conforme as regras de combinações de signos em configurações ou em expressões. Estas regras são específicas do registro semiótico selecionado.

Duval (1988) alerta que os indivíduos não podem encontrar problemas de congruência sempre que a associação externa dos signos ou dos símbolos depende do jogo da associação interna. Entretanto, destaca que os problemas de congruência promovem um novo acesso ao tema: linguagem matemática.

Assim,

> Os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência. É isso que faz a riqueza criadora da diversidade de registros. Eles não são previsíveis, mas devem ser estudados caso a caso, para cada atividade ou cada problema que propomos. (DUVAL, 2011, p. 124).

Para o autor, a linguagem natural não pode estar simplesmente e globalmente oposta à linguagem lógico-matemática, bem como às representações gráficas ou figurais. Duval afirma que a congruência e a não congruência semântica formam a verdadeira fronteira que inibe diversos indivíduos na atividade de substituição, ora em uma representação por outra, ora em uma expressão por outra.

---

[19] Isto explica porque a coerência de um texto matemático ou de um outro tipo de texto não matemático seja tão dificilmente acessível para a maioria dos alunos (pelo menos até 16 ou 17 anos de idade, ou acima desta idade em nível de estudo básico em fileira não científica) (Tradução de Méricles Thadeu Moretti).

Na próxima seção, apresentaremos a teoria Semiótica de Charles Sanders Peirce, que utilizaremos para questionar a teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval.

1.2 Semiótica Peirceana[20]

O pensamento de Peirce, científico, filosófico, lógico e semiótico, é amplo, multifacetado, e os assuntos que aborda são interconectados e heteróclitos. Peirce empenhou-se nos mais diversificados campos do conhecimento científico, matemática, história, filosofia, química, literatura, astronomia, lógica e biologia.

A teoria de Peirce nasce dentro de sua arquitetura filosófica, disciplina central dessa arquitetura.

A semiótica concebida como lógica, em um sentido muito mais universal e amplo que o termo "lógica" da época de Peirce e que persiste até hoje, apoia e ilumina todas as suas investigações.

Peirce objetivou "delinear os princípios fundamentais que subjazem aos métodos que são utilizados nas ciências" (SANTAELLA, 2001, p. 31). Para isso, o melhor caminho é praticá-lo e foi por esse motivo que Peirce se dedicou a vários e distintos campos científicos.

Em 1865, o autor reconheceu que a análise da ciência é semiótica, mas, para que ela seja visível, substitui-se a ideia de evidência pela concepção de representação ou signo. A concepção de signo ocupou um lugar de destaque no pensamento de Peirce, uma vez que não existe interpretação sem signos, porque toda interpretação é signo. Para Santaella (2001, p. 31), "qualquer coisa que substitui uma outra coisa para algum intérprete é uma representação ou signo". Por sua vez, nas palavras de Peirce (CP 2.228), tem-se:

> A sign, or *representamen*, is something, which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more

---

[20] Esse tópico foi escrito com base no primeiro capítulo do livro Matrizes da Linguagem e Pensamento publicado em 2001, pela Editora Iluminuras, de Lucia Santaella Braga.

> developed sign. That sign which it creates I call the *interpretant* of the first sign. The sign stands for something, its *object*. [21]

Para além do escopo da ciência, Peirce percebeu que essa concepção de representação ou signo é fundamental para a arte, lei, mecânica, governo, religião, política, linguagem e entre outros campos. Em síntese, a concepção de representação ou signo é essencial às ações, emoções, pensamentos e percepções humanas.

Por exemplo: a palavra "reta" representa alguma coisa para o conceito na mente do indivíduo que a escuta; uma linha com uma única direção desenhada em uma folha de papel representa uma reta para uma pessoa que tem a concepção de reta; um vetor representa o sentido de uma reta para um indivíduo que tem conhecimentos de vetores, a equação paramétrica de uma reta $\begin{cases} x - x_A = k(x_B - x_A) \\ y - y_A = k(y_B - y_B) \\ z - z_A = k(z_B - z_A) \end{cases}$, representa uma reta para um indivíduo que possui conhecimentos de geometria analítica.

Diante do exposto, compreende-se o motivo que levou Peirce a identificar a lógica com a semiótica em todos os setores do pensamento e atividades humanas.

Na continuidade dos signos, que Peirce (1980) anuncia sua grande tese anticartesiana de que todo pensamento se dá em signos, ou seja, de que não existe pensamento sem signos, quando apresenta a condição:

> Se seguirmos o enfoque dos fatos externos, os únicos casos de pensamento que nos é dado encontrar são de pensamento em signos. Não há, de modo claro, qualquer outro pensamento que possa ser evidenciado pelos fatos externos. Mas já vimos que é só através dos fatos externos é que o pensamento pode ser em geral conhecido. Desta forma, o único pensamento possivelmente conhecível é o pensamento em signos. Todo pensamento, portanto, deve necessariamente estar nos signos (PEIRCE, 1980, p. 253).

Nesse contexto, todo o sistema lógico-semiótico desenvolvido por Peirce, que atingiu o auge em seu pragmaticismo[22], foi uma versão pós-

---

[21] Um signo, ou *representamen*, é algo que representa algo para alguém, em algum aspecto ou capacidade. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. A este signo criado chamo de interpretante do primeiro signo. O signo representa algo, seu *objeto* (tradução nossa).

[22] "Termo com que ele rebatizou sua filosofia para diferenciá-la das traduções mais populares do pragmatismo professada por seus seguidores" (SANTAELLA, 2001, p. 33).

cartesiana do método das ciências, aquele que o autor desenvolveu para fundamentar as teses anticartesianas defendidas na sua juventude.

Além de defender a tese de que não existe pensamento sem signos, Peirce defendeu a tese de que não existe raciocínio, pensamento ou linguagem genuinamente matemático e dedutivo. Por certo, o que constitui todo o pensamento é a existência de uma mistura de signos, que sempre está em jogo. Dessa forma, é indispensável estudar todos os tipos possíveis de signos, o modo como crescem e evoluem, bem como suas misturas, para compreender os raciocínios que são utilizados nos métodos científicos. Em virtude disso, nasceu a semiótica de Peirce, idealizada como lógica em um sentido amplo.

Para Peirce, antes de se adentrar no estudo de qualquer ciência, o pensamento filosófico deve iniciar por um sistema de lógica. Outrossim, o trabalho primordial que a lógica deve encarar é o de constituir uma tabela formal e universal de categorias pela análise de todas as experiências admissíveis.

Em 1867, o autor publicou um trabalho intitulado “Sobre uma nova lista de categorias”, para sustentar suas teses anticartesianas.

Ao tratar das categorias universais, Peirce demonstra sua insatisfação a respeito das categorias de Aristóteles, Kant e Hegel:

> As categorias universais, de seu lado, pertencem a todo fenômeno, talvez uma sendo mais proeminente que a outra num aspecto do fenômeno, mas todas pertencendo a qualquer fenômeno. Não estou muito satisfeito com esta descrição de duas ordens de categorias, mas acho bom que as duas existam. Não as reconheço em Aristóteles a não ser que categorias e atributos sejam as duas ordens. Mas temos em Kant, Quantidade, Pluralidade e Totalidade não presentes todas ao mesmo tempo; Inerência, Causação e Limitação não presentes todas ao mesmo tempo; Inerência, Causação e Reação não presentes todas ao mesmo tempo; Possibilidade, Necessidade e Atualidade não presentes todas ao mesmo tempo. Por outro lado, as quatro grandes categorias de Kant, Quantidade, Qualidade, Relação e Modalidade, formam o que chamaria as Categorias Universais de Kant. Na comprida lista de Hegel que fornece as divisões da *Enciclopédia* são as suas categorias particulares. Os três estágios do pensamento, embora Hegel não lhes aplique a palavra *Categoria,* seriam as suas Categorias Universais (PEIRCE, 1980, p. 17).

Peirce, descontente com as categorias de Aristóteles, Kant e Hegel, dedicou-se exclusivamente à elaboração de sua doutrina das categorias durante 2 anos, sem cessar. Ainda mais, concluiu que existem somente três elementos formais e universais, onipresentes em todo e qualquer fenômeno, que foram precipuamente titulados como: “qualidade, relação e representação”.

Por conseguinte, as categorias desenvolvidas por Peirce foram empregadas para distinguir três espécies de representações ou signos (ícone, índice e símbolo); uma tríade de ciências concebíveis (gramática formal, lógica e retórica formal); uma divisão geral dos símbolos (termos, proposições e argumentos); bem como três tipos de argumentos (dedução – símbolo, indução – índice e hipótese – semelhança). Com efeito, estas tríades formulam "o corpo fundamental do sistema lógico que ele iria defender pela vida afora" (SANTAELLA, 2001, p. 33).

O autor abandonou as categorias ao esquecimento por muitos anos, uma vez que considerava absurda a ideia de reduzir a multiplicidade dos fenômenos a três elementos. Mas, 18 anos mais tarde, Peirce as retomou com mais força do que nunca, ao escrever um artigo titulado de "Um, dois, três: categorias do pensamento e da natureza" (HOOPES, 1991, p. 180-185 *apud* SANTAELLA, 2001, p. 33). Nesse artigo, o autor apresentou a ideia de que as categorias estendiam-se a toda natureza e não apenas ao fenômeno mental.

Dessa forma, conclui-se que Peirce aparentemente abandonou suas categorias, uma vez que, de 1867 a 1885, "encontrou nas ciências da natureza e do pensamento confirmações independentes que corroboravam essas três ideias" (SANTAELLA, 2001, p. 33).

A tríade peirceana apareceu continuamente na lógica e nas ciências especiais, nessa ordem: psicologia, fisiologia e teoria das células, evolução biológica e cosmo físico.

Foi de sua descoberta da integração de quantificadores na lógica dos relativos que Peirce impulsionou a proposta das categorias, como elementos mentais e naturais. Além do mais, foi por meio da lógica dos relativos que descobriu que a possibilidade real é um efeito fundamental do pragmatismo. Com base nisso, o autor não só abdicou sua teoria das probabilidades motivadas em Mills, como também abraçou as categorias como estrutura de toda sua doutrina lógica.

Ademais, Peirce descobriu duas ações do universo, ação diádica, inteligente ou sígnica, que não só lhe acresceu confiança, como também precipitou os ajustamentos no interior de sua obra. As duas ações mencionadas compõem a base das ciências especiais, dentro do imenso sistema de classificação das ciências desenvolvido por Peirce, no qual se insere o arranjo de suas disciplinas filosóficas.

A classificação das ciências, para ter qualquer coerência, dependia de toda obra do autor. Além disso, tanto a classificação de ciências, com seu arranjo filosófico foram completamente fundamentados na lógica das três categorias.

Foi somente na passagem do século que Peirce demonstrou maior interesse pelas categorias, embora tivesse trabalhado nelas desde 1867. Esse interesse serviu como guia ao desenvolvimento de toda sua cartografia das ciências.

Em 1904, Peirce reconheceu que a distinção entre matemática, filosofia e ciências especiais está em função do modo de observação agregado para cada uma delas. Além disso, reconheceu também, que suas categorias não dependiam da psicologia, pois para atingi-las basta atentar-se cuidadosamente ao *phaneron*[23]*,* ainda mais, que qualquer indivíduo pode observá-los; desde que estejam em condições físicas e psíquicas normais.

Assim sendo, a classificação das ciências é apresentada, resumidamente, por Peirce (CP 1.180-189) da seguinte forma:

> 181. All science is either, A. Science of Discovery; B. Science of Review; or C. Practical Science. […]
>
> 183. Science of Discovery is either, I. Mathematics; II. Philosophy; or III. Idioscopy. […]
> 185. Mathematics may be divided into a. the Mathematics of Logic; b. the Mathematics of Discrete Series; c. the Mathematics of Continua and Pseudo-continua.
> I shall not carry this division further. Branch b has recourse to branch a, and branch c to branch b.
> 186. Philosophy is divided into a. Phenomenology; b. Normative Science; c. Metaphysics. […]
> 187. Idioscopy has two wings: a. the Physical Sciences; and β. the Psychical, or Human Sciences.
> Psychical science borrows principles continually from the physical sciences; the latter very little from the former.
> 188. The physical science are: a. Nomological, or General, Physics; b. Classificatory Physics; c. Descritive Physics. […]
> 189. The Psychical Sciences are: a. Nomological Psychics or Psychology; b. Classificatory Psychics, or Ethnology; c. Descritive Psychics, or History.[24]

---

[23] "Qualquer coisa que aparece de qualquer modo à mente" (SANTAELLA, 2001, p. 33).

[24]181. Toda a ciência é ou, A. Ciência da Descoberta; B. Ciência da revisão, ou C. Ciência Prática. [...]
183. Ciência da descoberta é tanto, I. Matemática; II. Filosofia; ou III. Idioscopy. [...]

Cada ramo apresentado mostra uma gama de ramificações e gradações.

As ciências mais abstratas fornecem princípios para aquelas menos abstratas, assim como a filosofia que retira vários de seus princípios da matemática, e as ciências especiais que recebem seus princípios da filosofia (SANTAELLA, 2001, p.34).

A totalidade das ciências depende de maneira explícita ou implícita da matemática, ciência independente, puramente hipotética e indiferente quanto às suas verdades expressarem acontecimentos idealizados ou observados.

A matemática, considerando o estado de coisas meramente hipotético, é a ciência das conclusões necessárias, fundamentada em verdades não assertivas que recorre somente às concepções da mente; e que independem da observação.

Ainda que a matemática seja a ciência mais abstrata, mais genérica que a filosofia, é essencial o papel exercido pela filosofia inserida no diagrama completo das ciências, uma vez que todas as grandes questões sobre a experiência humana são discutidas na filosofia.

Para Santaella (2001, p. 34), "o diagrama das disciplinas que compõem o edifício filosófico aparece do seguinte modo":

1.2 Filosofia
1.2.1 Fenomenologia
1.2.2 Ciências normativas
1.2.2.1 Estética
1.2.2.2 Ética
1.2.2.3 Lógica ou semiótica
1.1.2.2.3.1 Gramática pura ou especulativa
1.2.2.3.2 Lógica crítica
1.2.2.3.3 Metodêutica ou retórica especulativa
1.2.3Metafísica

---

185. Matemática pode ser dividida em a. de Matemática da Lógica; b. de Matemática da Série Discreta; c. de Matemática da Continua e Pseudo-continua.
Eu não procede essa divisão mais. Branch b recorre a um ramo e ramo de c para o ramo b.
186. Filosofia é dividida em a. Fenomenologia; b. Ciência normativa; c. Metafísica. [...]
187. Idioscopia tem duas asas: a. As ciências físicas e β. de Ciências Psíquicas, ou Humanos. Ciência psíquica pede continuamente princípios das ciências físicas, este último muito pouco da antiga (tradução nossa).
188. A ciência física é constituída de: a. Nomológica ou Geral, Física; b. Classificatório Física; c. Física descritiva. [...]
189. As Ciências Psíquicas são: a. Psychicsnomológica ou Psicologia; b. Psychics classificatório, ou Etnologia, c. Psychics descritiva ou História (tradução nossa).

Diante deste diagrama filosófico, apresentaremos na sequência~~,~~ a fenomenologia, as ciências normativas e a metafísica.

A fenomenologia

A filosofia restringe-se à verdade que pode ser deduzida da experiência comum, aberta para todo ser humano em qualquer momento (tempo e hora), visto que seu trabalho é encontrar o que é verdadeiro. Um dos trabalhos mais difíceis que a filosofia deve abarcar é o de descobrir as categorias universais da experiência. Esse trabalho tem como responsável uma quase ciência, nomeada de fenomenologia, cuja função é fornecer a base observacional para as demais disciplinas filosóficas, que Peirce (CP 1.186) assim o define: "Phenomenology ascertains and studies the kinds of elements universally present in phenomenon; meaning by the phenomenon, what everis present at any time to themind in anyway".[25]

A doutrina das categorias de Peirce, desenvolvida desde 1867, que se encontra na conjuntura da classificação das ciências, alcançada no início do século XX, tornou-se parte da fenomenologia, considerada pelo autor como "a primeira e mais elementar disciplina do seu edifício filosófico" (SANTAELLA, 2001, p. 34).

Antes de serem claramente entendidas, em 1902, o desenvolvimento das categorias sugere três ideias diferentes por meio dos quais elas devem ser aprendidas: 1) qualidades, 2) objetos e 3) mente.

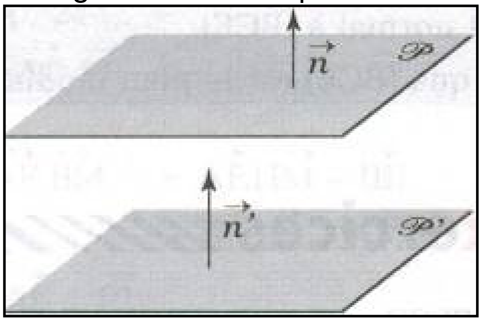
No que se refere à primeira ideia, qualidades ou primeiridade, as categorias aparecem como: 1.1) qualidade ou primeiridade; 1.2) reação ou secundidade e 1.3) mediação em terceiridade.

Nesse contexto, a primeira categoria é a possibilidade qualitativa positiva como ela é em si mesma, sem analogia com coisa alguma. Por exemplo, podemos considerar a possibilidade da qualidade do paralelismo de duas retas em si, sem relação com outra coisa, sem relação com qualquer coisa no mundo que seja paralelo, ou ainda, sem fazer relação ao paralelismo dos planos (Figura 9):

---

[25] Fenomenologia verifica e estuda os tipos de elementos universalmente presentes no fenômeno; significando o fenômeno, onde por fenômeno se entende tudo que está presente à mente de qualquer momento e de qualquer maneira (tradução nossa).

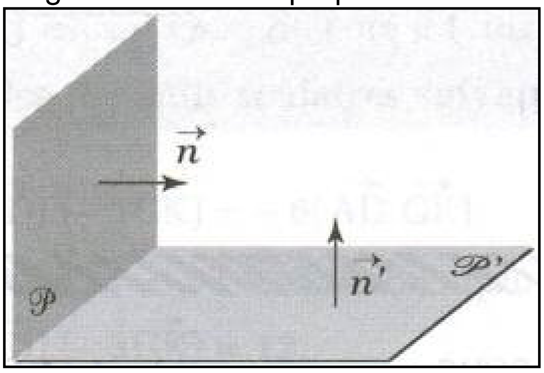
Figura 9 - Planos paralelos.



Fonte: Hamaty et al. (1999, p. 248).

A segunda categoria é a ação de um fato no instante em que ele ocorre, no seu puro acontecer, é o fato em si mesmo, sem levar em consideração qualquer causalidade ou lei que sugira uma determinação. É o caso, por exemplo, do ato de desenhar uma reta no espaço, ou o ato de converter a expressão $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'} = \mathbf{0}$ nos dois planos perpendiculares (Figura 10):

Figura 10 - Planos perpendiculares.

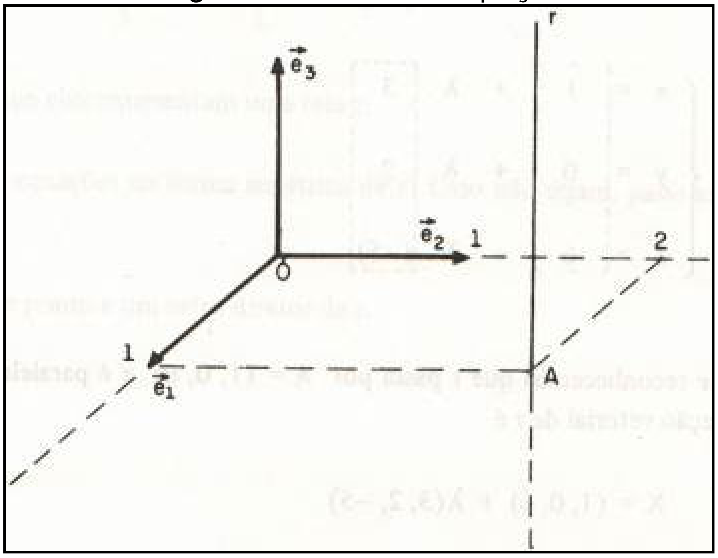


Fonte: Hamaty et al. (1999, p. 248).

Por sua vez, a terceira categoria é uma lei que conduzirá eventos no futuro, a saber, “qualquer princípio geral ordenador e regulador que rege a ocorrência de um evento real” (SANTAELLA, 2001, p. 34). Por exemplo, as propriedades que subjazem o ato de desenhar uma reta no espaço, como as coordenadas, a equação que define a reta, os pontos que são atribuídos à equação e o traçado da reta.

No que se refere à segunda ideia, objetos ou secundidade, que encaram o existente de maneira própria, apresenta as categorias da seguinte maneira: 2.1) quales; 2.2) relações e 2.3) representações. Assim sendo, a primeira categoria corresponde aos eventos de primeiridade, como no caso da Figura 11, temos a qualidade sui generis da reta desenhada no espaço.

Figura 11 - Reta no espaço.



Fonte: Boulos e Camargo (1987, p. 133).

Por sua vez, a segunda categoria, corresponde aos eventos de secundidade. Por exemplo, o atrito do lápis ou caneta ou giz com o papel ou quadro no ato de desenhar uma reta no espaço, nesse caso, há um esforço da pessoa que desenha contra o lápis ou caneta e, consequentemente, um esforço do lápis ou caneta contra o papel ou quadro, ou ainda, o esforço cognitivo que um indivíduo realiza ao tentar lembrar-se dos passos exigidos para desenhar uma reta no espaço. E a terceira, corresponde aos signos ou eventos de terceiridade. Por exemplo, pode-se considerar uma equação simétrica ou paramétrica da reta como signo de reta, um gráfico no espaço de uma reta, como signo de reta, a palavra reta como signo de reta.

No que se refere à terceira ideia, mente ou terceiridade, as categorias aparecem da seguinte maneira: 3.1) sentimento ou consciência imediata; 3.2) sensação de um fato e 3.3) concepção ou mente nela mesma. A primeira categoria trata dos signos de primeiridade. Por exemplo, a qualidade de sentimento, vaga e indefinida, que o paralelismo de duas retas produz em um estudante ou professor. A segunda categoria, trata dos signos de secundidade ou sensação de ação e reação, por exemplo, a surpresa de um aluno diante da resolução de um exercício de Geometria Analítica do qual se considerava incapaz de resolvê-lo. E, por fim, a terceira categoria trata da mediação ou signos de terceiridade, do sentido de aprendizado. Por exemplo, o aprendizado que o estudante ou professor adquire ao ler o capítulo sobre o estudo de reta em um livro de Geometria Analítica, onde o pensamento do autor, expresso em palavras (nível 2.3) labora como mediação (nível 3.3) entre seu pensamento (nível 2.3) e o pensamento do estudante ou professor.

As categorias mencionadas estão presentes em todo e qualquer fenômeno, seja ele de que tipo for: físico ou psíquico; e, por isso, são consideradas universais. Não só são conceitos aplicáveis a qualquer coisa, mas também são ideias extensas “que devem ser consideradas mais como tons ou finos esqueletos do pensamento do que como noções estéticas ou terminais” (SANTAELLA, 2001. p. 36). Além disso, são onipresentes, interdependentes e dinâmicas, de tal sorte que, mesmo universais e formais, não entram em atrito nem excluem a vasta diversidade de categorias, sejam elas materiais ou particulares, presentes em todas as coisas. Para Saito e Beltran (2004, p. 63), “os fenômenos prodigiosos e "miraculosos" relatados pelos antigos eram tomados como experimentos genuínos que se apresentavam para eles como possibilidade de conhecer a natureza por outros meios”.

A doutrina dos signos ou semiótica de Peirce está alicerçada nessas categorias. Por consequência, o conhecimento cuidadoso da fenomenologia é exequível, uma vez que sem ela não há como entender as inúmeras classificações e definições de signo. Por certo, o modo como a semiótica é extraída da fenomenologia, é de maior relevância.

A noção de signo é considerada a forma mais ingênua de terceiridade. A semiótica possui prontamente seu início incluso na própria fenomenologia, ou ainda, já é uma categoria semiótica, a terceira categoria fenomenológica, isso caso o universo do signo seja território verdadeiro da semiótica. Ainda mais, a semiótica traz a fenomenologia outra vez para seu interior assim que chega ao território da semiótica.

Na sequência, em um breve cenário, apresentamos as relações que as ciências normativas sustentam entre si.

As ciências normativas

Voltadas para a compreensão das normas, ideias e dos fins, que conduzem o pensamento, a conduta, assim como o sentimento humano, as ciências normativas (nessa ordem, estética, ética e lógica ou semiótica) analisam os fenômenos, do modo como aparecem, bem como no alcance que eles podem agir sobre nós e nós sobre eles. Além disso, as ciências normativas voltam-se ao ser humano, de modo geral, caso ele tenha de agir sob autocontrole e deliberadamente, respondendo às solicitações da experiência. Para Peirce (CP 1.186), "Normative science distinguishes what ought to be from what ought not to be, and makes many other divisions and arrangements subservient to its primary dualistic distinction".[26]

Toda ação humana controlada e deliberada é ação raciocinada; portanto, toda ação controlada e deliberada é conduzida por objetivos, que devem ser escolhidos. Ademais, se essa escolha resultam da razão, então, devem ser controladas e deliberadas, o que para ser almejado, em suma, demanda o reconhecimento de algo que é admirável em si mesmo.

A lógica, considerada o estudo do raciocínio correto, "é a ciência dos meios para se agir razoavelmente" (SANTAELLA, 2001, p. 37).

Para Peirce,

> But besides being logical in the sense of demanding a logical analysis, our inquiry also relates to two as a conception of logic. The term "logic" is unscientifically by me employed in two distinct senses. In its narrower sense, it is the science of the necessary conditions of the attainment of truth. In its broader sense, it is the science of the necessary laws of thought, or, still better (thought always taking place by means of signs), it is general semeiotic, treating not merely of truth, but also of the general conditions of signs (which Duns Scotus called grammaticaspeculativa*), also of the laws of evolution of thought, which since it coincides with the study of the necessary conditions of the transmission of meaning by signs from mind to mind, and from one state of mind to another, ought, for the sake of taking advantage of an old association of terms, be called rhetoricaspeculativa, but which I content myself with inaccurately calling objetive logic, because that conveys the correct idea that it is like Hegel's logic (CP 1.444).[27]

---

[26] Ciência normativa distingue o que deve ser do que não deve ser, e faz muitas outras divisões e arranjos subservientes a sua distinção dualista principal (tradução nossa).

[27]Mas além de ser lógica no sentido de exigir uma análise lógica, nossa investigação também está relacionada a dualidade como uma concepção da lógica. O termo "lógica" é de maneira não científica por mim empregado em dois sentidos distintos. Em sentido estrito, é a ciência das condições necessárias para a obtenção da verdade. Em seu sentido mais amplo, é a ciência das leis necessárias do pensamento, ou, ainda melhor (pensamento sempre ocorrendo por meio de

A lógica ou semiótica é subdividida em três campos, na seguinte ordem: gramática especulativa, lógica crítica e retórica especulativa (ou metodêutica). A gramática especulativa possui a tarefa de analisar a fisiologia de todos os tipos de signos, sejam suas naturezas, sejam seus significados, decidindo as condições a que devem se aceder para serem signos. A lógica crítica, por sua vez, possui a tarefa de pesquisar a força comprobatória de cada tipo de argumento, ou seja, pesquisar as condições de verdade contidas nos argumentos, nas inferências lógicas. Por fim, a retórica especulativa ou metodêutica é responsável pela análise da eficácia semiótica, das “condições gerais da relação dos símbolos e outros signos com seus interpretantes” (SANTAELLA, 2001, p. 41). Em outras palavras, a gramática especulativa versa sobre um estudo teórico que tem por finalidade analisar a ordem ou o procedimento ideal a qualquer investigação.

Por sua vez, a ética é responsável por conduzir e ajudar a lógica por meio do estudo das conclusões a que esses meios devem ser governados.

Enfim, a estética conduz à ética, quando define “qual é a natureza de um fim em si mesmo que seja admirável e desejável em quaisquer circunstâncias independentemente de qualquer outra consideração de qualquer espécie que seja” (SANTAELLA, 2001, p. 37). Dessa forma, são especificações da estética, a ética e a lógica. A ética indica os propósitos que devemos eleger nas diversas situações, já que a lógica indica os meios que estão disponíveis para perseguir essas conclusões.

Ainda que Peirce tenha utilizado nomes tradicionais, estética, ética e lógica, estava atribuindo-lhes novos significados sob a ótica do autocontrole. Uma vez que não existe autocontrole sem autocrítica, não existe

> autocritica sem uma comunidade de investigadores que funcione como necessária alteridade capaz de corrigir nossos inevitáveis equívocos,

---

signos), é a semiótica em geral, tratando não apenas da verdade, mas também das condições gerais dos signos (que Duns Scotus chama gramatica especulativa*), e também das leis da evolução do pensamento que, uma vez que coincide com o estudo das condições necessárias da transmissão de significado por meio de signos de mente para mente, e de um estado de espírito para outro, deveria, por uma questão de tomar partido de uma antiga associação de termos, ser chamado de retorica especulativa, mas a qual eu me contento em chamar imprecisamente de lógica objetiva, porque isso transmite a ideia correta de como é a lógica de Hegel (tradução nossa).

> através de mudanças de hábito e de raciocínio. Não apenas uma comunidade existente, pois tudo que existe está muito preso às circunstâncias, mas uma comunidade sem limites definidos e capaz de um crescimento indefinido de conhecimento, isto é, uma comunidade que funcione como ideal regulador para qualquer comunidade de investigadores efetivamente existente. (SANTAELLA, 2001, p. 37).

Por certo, é dessa dialética que surge a dependência da lógica na ética, da mesma forma que esta depende da estética.

Na sequência, apresentaremos a metafísica.

A metafísica

Em síntese, a fenomenologia estuda no nível de primeiridade, selecionando os elementos indecomponíveis, já que as ciências normativas estudam no nível de secundidade, "culminando numa investigação sobre como a mente deve responder aos impactos do fenômeno quando o ideal supremo da estética, o *summum bonum*, é deliberadamente buscado" (SANTAELLA, 2001, p. 42).

Por seu lado, a terceira grande divisão da filosofia é a metafísica, responsável por analisar os fenômenos em nível de terceiridade, bem como por fazer a mediação entre as duas primeiras divisões, fenomenologia e ciências normativas. Além disso, a metafísica investiga a respeito das linhas gerais da realidade que, conforme Peirce, incide em regularidade, que é uma lei ativa, que por sua vez, é razoabilidade eficiente. Além disso, Peirce (CP 1.186) afirma que a metafísica "seeks to give an account of the universe of mind and matter".[28]

Nesse contexto, apresentamos de modo geral, o panorama da arquitetura filosófica de Charles Sanders Peirce necessária para compreender suas categorias.

Na sequência, segue a definição do signo nos termos de Peirce.

Definição do Signo

Peirce elaborou dezenas de definições de signo. Segundo Santaella (2001, p. 42), a que parece mais completa é a que segue:

---

[28] A metafísica procura dar conta do universo da mente e da matéria (tradução nossa).

> Suffice it to say that a sign endeavours to represent, in part at least, an Object, which is therefore in a sense the cause, or determinant, of the sign even if the sign represents its object falsely. But to say that it represents its Objet implies that it affects a mind, and so affects it as, in some respect, to determine in that mind something that is mediately due to the Object. That determination of which the immediate cause, or determinant, is the Sign, and of which the mediate cause is the Object may be termed the *Interpretant*…(CP 6.347). [29]

Ao passo que os termos mencionados por Peirce podem causar equívocos, ressalta-se que signo, objeto, interpretante são termos técnicos, visto que o signo é constituído de uma relação triádica entre os três, e não pode funcionar como tal sem objeto e interpretante; assim como reta, representação gráfica de uma reta no espaço, equação vetorial da reta, equação reduzida da reta, e etc.; são termos técnicos de reta em matemática e não podem funcionar como tal sem conceito e alguém ou algo que os interprete.

Os termos apresentados sugerem as posições lógicas que cada elemento ocupa na semiose, assim sendo, primeiro é o fundamento do signo, segundo é o objeto e terceiro é o interpretante. Para Santaella (2001, p. 43), “semiose quer dizer ação do signo”.

A ação de determinar um interpretante é própria ao signo, ou seja, é a ação de ser interpretado num outro signo, já que o interpretante contém a natureza de um signo, ainda que seja de um signo rudimentar. Por exemplo, o sentimento de ver uma reta no espaço pela primeira vez, as primeiras percepções das características de uma reta, a ação mental de querer estudar reta e ação física de pegar um livro para estudar.

Diante dos termos apresentados, é importante observar que objeto não é sinônimo de “coisa”, embora o que chamemos de “coisa” possa ser nomeado como objeto do signo. Além disso, interpretante não é sinônimo de intérprete, mesmo que o intérprete satisfaça o nível de interpretante dinâmico. Ainda mais, interpretante não é sinônimo de interpretação, de tal sorte que a interpretação faz referência a todo o processo de geração dos interpretantes.

Em resumo, Santaella (2001, p. 43) apresenta:

---

[29] Basta dizer que um signo se encoraja para representar, pelo menos em parte, um objeto que é portanto, em certo sentido, a causa, ou determinante, do signo, mesmo se o signo representa seu objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afeta a mente e, portanto, afetá-la como, de alguma maneira, para determinar nesta mente algo que é mediatamente devido ao objeto. Que a determinação do que é a causa imediata, ou determinante, é o signo, e do qual a causa mediata é o objeto pode ser chamada de *Interpretante*... (tradução nossa).

> (1) o signo é uma estrutura complexa de três elementos íntima e inseparavelmente interconectados: (1.1) fundamento, (1.2) objeto e (1.3) interpretante. (1.1) o fundamento é uma propriedade ou caráter ou aspecto do signo que o habilita a funcionar como tal. (1.2) o objeto é algo diferente do signo, algo que está fora do signo, um ausente que se torna mediatamente presente a um possível intérprete graças à mediação do signo. (1.3) o interpretante é um signo adicional, resultado do efeito que o signo produz em uma mente interpretativa, não necessariamente humana, uma máquina, por exemplo, ou uma célula interpretam sinais. O interpretante não é qualquer signo, mas um signo que interpreta o fundamento. Através dessa interpretação o fundamento revela algo sobre o objeto ausente, objeto que está fora e existe independente do signo.

Nesse contexto, vejamos como toda abstração apresentada por Santaella pode ser concretizada por meio de um exemplo específico: uma linha com uma única direção desenhada em uma folha de papel é um signo de reta. Observamos que uma linha com uma única direção desenhada em uma folha de papel está habilitada a funcionar como signo de reta, porém, somente funciona assim caso seja interpretada. Isso porque sem um interpretante, uma linha com uma única direção desenhada numa folha de papel é um rabisco, um risco. Dessa forma, esse complexo mental só se torna uma reta, caso seja interpretado como uma reta por meio de hábitos escolares, científicos e convencionais.

“Sem isso, ele é apenas um signo virtual, possível e passível de se atualizar como signo tão logo ele encontre um intérprete” (SANTAELLA, 2001, p. 44).

Segundo Peirce (CP 2.230),

> 230. The word Sign will be used to denote an Object perceptible, or only imaginable, or even unimaginable in one sense - for the word "fast," which is a Sign, is not imaginable, since it is not this word itself that can be set down on paper or pronounced, but only an instance of it, and since it is the very same word when it is written as it is when it is pronounced, but is one word when it means "rapidly" and quite another when it means "immovable," and a third when it refers to abstinence. But in order that anything should be a Sign, it must "represent," as we say, something else, called its Object, although the condition that a Sign must be other than its Object is perhaps arbitrary, since, if we insist upon it we must at least make an exception in the case of a Sign that is a part of a Sign. Thus nothing prevents the actor who acts a character in an historical drama from carrying as a theatrical "property" the very relic that that article is supposed merely to represent, such as the crucifix that Bulwer's Richelieu holds up with such effect in his defiance.[…][30]

---

[30]230. A palavra Signo será usada para denotar um objeto perceptível, ou apenas imaginável, ou mesmo inimaginável em um certo sentido - para a palavra "rápido", que é um signo, não é imaginável, já que não é esta palavra em si que pode ser definida no papel ou pronunciada, mas apenas uma instância disso, e tanto é a mesma palavra, quando é escrita, quanto é quando é

Incide da extensão a que Peirce levou a noção de signo, a virtualidade de qualquer coisa existente funcionar como signo. Fenomenologicamente, em nível de secundidade, qualquer coisa que existe tem a capacidade de funcionar como signo assim que ela encontre um intérprete. Com efeito, isso ocorre de tal forma que tudo aquilo que existe é uma síntese de várias determinações, sendo multiplamente determinado. De fato, por exemplo, posso olhar para uma linha com uma única direção desenhada em uma folha de papel e não vê-la como uma reta, mas somente como um signo de que é obra de uma criança que está aprendendo a escrever ou de um desenhista que a desenhou para ser um objeto decorativo num porta retrato ou em um quadro.

Para Santaella (2001, p. 44), “todas essas variações aí compareceram não apenas para demonstrar o potencial infinito das coisas existentes para funcionar como signo, mas também para demonstrar que, em cada um dos casos, o fundamento do signo é diferente”.

Desse modo, de acordo com Santaella (2001), uma coisa pode ser distintos signos, uma vez que um (1) signo é alguma coisa, ou seja, qualquer coisa; e o aspecto de uma coisa, (1.1) seu fundamento, elegida por um intérprete tal qual uma espécie de hipótese, (1.3) seu interpretante, com o propósito de identificar algo além do signo ele mesmo, (1.2) seu objeto.

A seguir, apresentaremos os objetos do signo, conforme Charles Sanders Peirce.

Os objetos do signo

Faz-se necessário considerar que o signo possui dois objetos e três interpretantes, para melhor entender o que é, e como um signo funciona. Os objetos do signo são: objeto imediato e objeto dinâmico; por sua vez, os

---

pronuncia, mas é uma palavra quando significa "rapidamente" e outra bem diferente quando isso significa "imóvel", e uma terceira quando se refere a abstinência. Mas, para que todas as coisas devam ser um signo, ela deverá "representar", como dizemos, outra coisa, chamada de seu objeto, embora a condição de que um signo deve ser diferente de seu objeto é talvez arbitrária, uma vez que, se insistirmos em cima dela devemos pelo menos fazer uma exceção no caso de um signo que é uma parte de um signo. Assim, nada impede que o ator que atua como um personagem de um drama histórico de carregar como uma "propriedade" teatral a relíquia que este artigo é suposto a meramente a representar, como o crucifixo que Richelieu Bulwer segura com tal efeito em seu desafio [...] (tradução nossa).

interpretantes são: interpretante imediato, interpretante dinâmico e interpretante final. Além disso, cabe ilustrar que o interpretante dinâmico se subdivide em: emocional, energético e lógico; e que o interpretante lógico subdivide-se em: conjecturas, definições e regra interpretativa.

Para Peirce (CP 2.231),

> 231. The Sign can only represent the Object and tell about it. It cannot furnish acquaintance with or recognition of that Object; for that is what is meant in this volume by the Object of a Sign; namely, that with which it presupposes an acquaintance in order to convey some further information concerning it. No doubt there will be readers who will say they cannot comprehend this. They think a Sign need not relate to anything otherwise known, and can make neither head nor tail of the statement that every Sign must relate to such an Object. But if there be anything that conveys information and yet has absolutely no relation nor reference to anything with which the person to whom it conveys the information has, when he comprehends that information, the slightest acquaintance, direct or indirect - and a very strange sort of information that would be - the vehicle of that sort of information is not, in this volume, called a Sign.[31]

Posto isto, é preciso levar em consideração que o signo não advém no vazio, para se entender o que é o objeto do signo. Isso, porque o signo está "enraizado num vastíssimo mundo de relações com outros signos, com tudo aquilo que muito amplamente chamamos de realidade" (SANTAELLA, 2001, p. 45). Reforçando a ideia de Santaella, concordamos com Peirce (CP 2.231) quando afirma que:

> The Objects – for a Sign may have any number of them – may each be a single known existing thing or thing believed formerly to have existed or expected to exist, or a collection of such things, or a known quality or relation or fact, which single Object may be a collection, or whole of parts, or it may have some other mode of being, such as some act permitted whose being does not prevent its negation from being equally permitted, or something of a general nature desired, required, or invariably found under certain general circumstances.[32]

---

[31] O signo só pode representar o objeto e dizer sobre ele. Ele não pode fornecer conhecimento ou reconhecimento desse objeto, porque isto é o que se entende neste volume por Objeto de um signo, ou seja, aquele com o qual se pressupõe um conhecimento, a fim de transmitir algumas informações a respeito dele. Sem dúvida, haverá leitores que vão dizer que não podem compreender isso. Eles acham que um signo não precisa se relacionar com nada conhecido e não tem pé nem cabeça a afirmação de que todos os signos devem estar relacionados com tal objeto. Mas se houver qualquer coisa que transmite informações e ainda não tem absolutamente nenhuma relação, nem referência a qualquer coisa com a qual a pessoa a quem a informação é transmitida tem, quando ela compreende esta informação, a menor familiaridade, direta ou indireta - e uma espécie muito estranha de informação esta seria - o veículo desse tipo de informação não é, neste volume, chamada de Signo (tradução nossa).

[32] Os objetos – pois o signo pode ter qualquer número deles - podem ser uma coisa única e conhecida, coisa existente, ou acreditar que tenha existido anteriormente ou espera-se que

O signo está presente no universo físico e interagindo com outros existentes, seja de modo direto ou indireto. Existe sempre um certo tipo de materialidade em que o signo incorpora, seja simplesmente imaginado, sonhado, hipoteticamente criado no pensamento abstrato, alucinado. Segundo Santaella (2001, p. 45),

> Isso significa que todo signo é, ao mesmo tempo, signo e coisa. Além disso, não existe uma separação rígida entre o mundo dos signos, de um lado, e o mundo das coisas, de outro, mas muito mais intersecções, sobreposições e trocas infinitamente variáveis, de modo que aquilo que, num determinado momento, não passa de uma "coisa", no outro será signo e vice-versa.

Para compreender melhor estas considerações, vejamos a divisão dos tipos de objetos do signo: objeto interno ao signo, que é o objeto imediato; e objeto externo ao signo, que é o objeto dinâmico.

Santaella (2001) afirma que o objeto dinâmico é aquele que determina o signo e ao qual o signo se aplica-se, ainda que seja o objeto que permaneça fora do signo, sendo, por consequência, menos diretamente apreendido do que o objeto imediato. Ainda mais, a "realidade" que contorna o signo, ou seja, a totalidade do contexto dinâmico particular constitui-se em seu objeto dinâmico. Além do mais, essa "realidade" discute aquilo com que o intérprete do signo deve ter experienciado ou tem experiência de modo colateral ao signo para que o mesmo possa ser interpretado, ou seja, com aquilo que o intérprete deve estar familiarizado ou familiarizar-se-á.

Os contextos que cercam o signo são continuamente muito vastos, que conforme Santaella (2001), são de se perderem de vista.

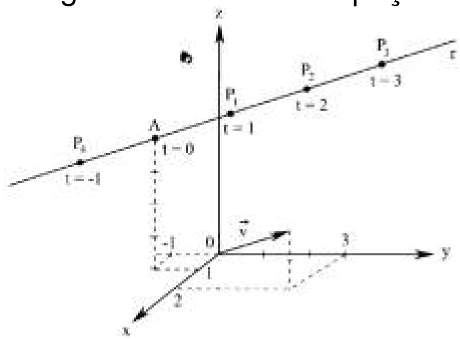
O objeto imediato do signo é indicado ou representado no próprio signo, e esta é a forma como o objeto dinâmico se apresenta. A saber, o signo não poderia estar relacionado ao objeto dinâmico sem esta atividade do objeto imediato. Nessas condições, o objeto dinâmico determina o signo, e o objeto imediato, por sua vez, "funciona como um indicador do recorte que o intérprete faz ou deve fazer no contexto" (SANTAELLA, 2001, p. 45). Além disso, o objeto dinâmico é sempre imensamente mais extenso que o signo.

---

exista, ou uma coleção de tais coisas, ou uma qualidade conhecida ou relação ou fato, que Objetos simples podem ser uma coleção, ou conjunto de peças, ou podem ter algum outro modo de ser, tal como algum ato permitido cujo ser não impede que sua negação seja igualmente permitida, ou algo de natureza geral desejada, necessária, ou invariavelmente encontrado em certas circunstâncias gerais (tradução nossa).

Para Santaella (2001), o que estabelece os limites do objeto dinâmico é o objeto interno ao signo, ou seja, o objeto imediato, ou ainda, o modo como um signo particular sugere, indica ou representa o objeto que está fora de si. Podemos citar como exemplo, o gráfico da reta no espaço.

Figura 12 - Reta no espaço.



Fonte: WINTERLE, Paulo. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo: Makron Books, 2000.

O gráfico em questão dirige-se a um contexto de referência explícito: um gráfico no espaço e, nele, há presença de uma reta. O contexto do mesmo, eixos coordenados, vetores, linhas imaginárias, pontos, porque e por quem o gráfico foi projetado, mas a situação em que o gráfico foi construído, como e por que foi construído, o que está subentendido no gráfico, tudo isso é o objeto dinâmico do gráfico. Um indivíduo que constrói um gráfico desse tipo, leva em consideração que o leitor conheça todo o contexto pressuposto, em outras palavras, conheça o objeto dinâmico do gráfico. O objeto interno ao signo, quer dizer, o objeto imediato, está limitado, exclusivamente, ao contexto que está representado no gráfico. A construção gráfica, bem como o sistema de coordenadas que fazem parte do gráfico, não constituem o objeto, pois, compõem-se no fundamento desse signo. Ainda mais, os efeitos que o gráfico produz no leitor não fazem referência aos objetos, mas sim ao processo interpretativo. Dessa forma, o objeto imediato é a maneira por meio do qual um objeto fora do signo, objeto dinâmico, é sugerido, denotado, referido ou indicado pelo signo.

Na sequência, apresentaremos os interpretantes do signo, conforme Charles Sanders Peirce.

Os interpretantes do signo

O interpretante, em uma definição geral, é um processo evolutivo, e não um simples evento. Peirce distinguiu três níveis principais de interpretação, contínua e evolutiva, de um signo: interpretante imediato, interpretante dinâmico e interpretante final.

O ***interpretante imediato*** é aquilo cujo signo é suscetível de produzir um efeito em uma mente interpretadora. O fato de ser suscetível "significa um potencial ainda não atualizado do signo, isto é, antes que o signo tenha encontrado um intérprete" (SANTAELLA, 2001, p. 47). Dessa forma, uma propriedade objetiva do signo para significar é o interpretante imediato. Além do mais, esta propriedade objetiva do signo incide de um caráter que é próprio dele mesmo, de seu fundamento. Por exemplo, o gráfico de uma reta no espaço tridimensional diante de uma pessoa que não tem conhecimento a seu respeito, não deixaria de possuir seu interpretante imediato, visto que sua natureza é interna ao signo. Nessas condições, o gráfico de uma reta no espaço tridimensional está apto a ser interpretado como tal. Em síntese, o interpretante imediato é a possibilidade de interpretação do gráfico em questão.

Em contraste com o interpretante imediato, o ***interpretante dinâmico*** é o "efeito que o signo efetivamente produz na mente de seus intérpretes. É o interpretante singular, particular, efetivado em cada intérprete" (SANTAELLA, 2001, p. 47). Esse interpretante pode assumir três níveis diferentes: emocional, energético e lógico. O nível emocional é o efeito que se realiza tal qual uma qualidade de sentimento. O energético, por sua vez, é o efeito da ordem de um esforço psicológico ou físico, haja vista, uma ação mental ou física. Enfim, o nível lógico, é aquele que funciona tal qual uma regra de interpretação e que assume, também, três níveis distintos: conjecturas, definições e regra interpretativa.

Observamos que o interpretante dinâmico está fora do signo e "é o efeito produzido em uma mente interpretadora, não necessariamente humana" (SANTAELLA, 2001, p. 47), por exemplo, o que a representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional causa em um indivíduo que a observa, ou numa mente interpretadora qualquer.

Além do exposto, observamos também que o interpretante dinâmico de um signo é sempre plural, múltiplo, uma vez que o mesmo não se esgota num único interpretante. Isso ocorre em razão do poder do signo de produzir vários efeitos numa mesma mente que o interpreta e que podem crescer conforme o tempo. Além disso, o interpretante dinâmico é consecutivamente múltiplo visto que em cada mente interpretadora o signo produzirá um efeito diferente. Por exemplo, um indivíduo que observa uma reta no espaço tridimensional pela segunda vez pode interpretá-la de uma forma diferente de quando a observou pela primeira vez.

Para exemplificar os níveis de interpretante dinâmico, continua-se com o exemplo do gráfico de uma reta no espaço. O gráfico apresentado pode produzir em um intérprete desavisado apenas qualidades de sentimento, ou seja, puro encantamento com os eixos x, y e z, bem como com a reta; representando dessa forma, seu interpretante emocional. Entretanto, o gráfico poderá produzir curiosidade em relação a sua origem, ou construção, conduzindo o intérprete a uma busca de compreensão não só dos eixos x, y e z, mas também da reta e do gráfico como um todo, seu interpretante energético. Considerando esse esforço, guiado por princípios guias, quer dizer, por um raciocínio lógico, o intérprete pode concluir que o gráfico requer uma competência, ou uma inteligência, visto que ele não conhece seu interpretante lógico.

Por fim, o ***interpretante final*** é o efeito que o signo causaria em qualquer mente, caso o signo pudesse produzir o conjunto de todos os interpretantes dinâmicos de maneira exaustiva e final. Por certo, nós, intérpretes particulares, capazes de produzir somente interpretantes dinâmicos e singulares, que são provisórios e falhos, não temos condições de esgotar as possibilidades interpretativas do signo em sua totalidade. Isso porque o interpretante final está sempre em desenvolvimento, num *looping*, ou seja, num processo de evolução infinita. Para Santaella (2001, p. 49), "é em razão disso que estamos sempre no meio do caminho da interpretação de todo e qualquer signo". Em síntese, o interpretante final é a verdade que tendemos descobrir, quer dizer, que queremos atingir.

Em resumo, Peirce (1980, p.111) exemplifica os três tipos de interpretantes da seguinte maneira:

> acordo de manhã antes de minha esposa e logo após ela pergunta: "Como é que está o dia?" É um signo cujo objeto expresso é o tempo naquela ocasião, mas cujo Objeto-Dinâmico é a sensação que eu presumivelmente tive ao espiar pela cortina da janela. O Interpretante Imediato é tudo aquilo que a Pergunta expressa de maneira imediata (...). O Interpretante Dinâmico é o efeito atual provocado em mim, seu intérprete. Mas a significância, ou seja, o Interpretante Derradeiro ou Final, é o objetivo da pessoa que faz a pergunta, o possível efeito que a minha resposta terá nos planos que minha esposa tem para o resto do dia.

Após a apresentação dos três tipos de interpretantes, bem como seus exemplos, a seguir, mostramos as classificações dos signos.

As classificações dos signos

Considerando a definição de signo geral e abstrata como referência nos três elementos que o signo se compõe, fundamento, objeto e interpretante, surge com clareza à lógica que administra as classificações dos signos.

Nos três componentes do signo, estão fundamentadas todas as tríades classificatórias. O fundamento é o primeiro dos três componentes, que é definido, como "aspectos ou propriedades que habilitam o signo a funcionar como signo" (SANTAELLA, 2001, p. 50). Esses aspectos do fundamento são formais, quer dizer, gerais, uma vez que os aspectos materiais são imensamente múltiplos e variáveis.

Há três classes gerais de fundamentos em que reaparecem as três categorias, que são: a) qualidade; b) existente; e c) lei. Essas classes de fundamento conduzem a primeira e ampla divisão dos signos. Podemos ilustrar as classes em questão da seguinte maneira: a) as formas contidas em uma representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional; b) a representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional que tenho diante de meus olhos, aqui e agora; e c) as equações paramétrica, vetorial, geral, simétrica e reduzida da reta que definem a representação gráfica da reta no espaço tridimensional.

Para Peirce (CP 2.243),

> Signs are divisible by three trichotomies; first, according as the sign in itself is a mere quality, is an actual existent, or is a general law; secondly, according as the relation of the sign to its object consists in the sign's having some character in itself, or in some existential relation to that object, or in its relation to an interpretant; thirdly, according as its

> Interpretant represents it as a sign of possibility or as a sign of fact or a sign of reason.[33]

Desse modo, na relação do signo com ele mesmo, ou seja, levando em consideração o caráter de seu fundamento, o signo pode ser: um qualissigno, um sinsigno e um legissigno.

A saber, Um ***qualissigno*** é uma simples qualidade de um determinado signo, por exemplo, o sentimento que abarca um indivíduo, quando está diante de uma representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional, de uma equação paramétrica da mesma reta; para Peirce (CP 2.244), "A Qualisignis a quality whichis a Sign. It can not actually act as a sign until it is embodied; but the embodimenthas nothing todo with its character as a sign" [34].

Um sinsigno é um existente, algo concreto que é um signo, por exemplo, um gráfico de uma reta no espaço, ou a representação gráfica de duas retas ortogonais, ou a representação gráfica de duas retas paralelas aos planos coordenados, ou a representação gráfica de uma reta ortogonal a duas retas que vejo, aqui e agora, ou ainda uma equação da reta escrita numa folha de papel; para Peirce (CP 2.245) "is a nactual existente thingor event which is a sign"[35].

Um legissigno é alguma coisa que possui o caráter de uma lei que governa acontecimentos particulares, quer dizer, é alguma coisa de natureza geral, por exemplo, uma equação geral, uma equação paramétrica, uma equação reduzida, uma equação simétrica, uma equação vetorial da reta que representa um gráfico de uma reta no espaço tridimensional. Para Peirce (CP 2.246),

> A Legisign is a law that is a Sign. This law is usually established by men. Every conventional sign is a legisign [but not conversely]. It is not a single object, but a general type which, it has been agreed, shall be significant. Every legisign signifies through an instance of its application, which may be termed a Replica of it. Thus, the word "the" will usually occur from fifteen to twenty-five times on a page. It is in all these

---

Signos são divisíveis por três tricotomias; primeiro, conforme o signo em si é uma mera qualidade, é um existente real, ou é uma lei geral; em segundo lugar, conforme a relação do signo ao seu objeto consiste em o signo ter algum caráter em si, ou em alguma relação existencial a esse objeto, ou em sua relação com um interpretante, em terceiro lugar, conforme seu Interpretante o representa como um signo de possibilidade ou como um signo de fato ou um signo da razão (tradução nossa).

[34] Um Qualissigno é uma qualidade que é um signo. Não pode realmente atuar como um signo até que seja incorporado, mas a personificação não tem nada a ver com seu caráter como um signo (tradução nossa).

[35] É uma coisa real, existente, ou evento que é um signo (tradução nossa).

> occurrences one and the same word, the same legisign. Each single instance of it is a Replica. The Replica is a Sinsign. Thus, every Legisign requires Sinsigns. But these are not ordinary Sinsigns, such as are peculiar occurrences that are regarded as significant. Nor would the Replica be significant if it were not for the law which renders it so.[36]

Ainda mais, na relação do signo com seu objeto dinâmico, quer dizer, com aquela coisa que seu objeto imediato sugere, retomam-se as categorias atreladas ao fundamento, uma vez que somente a) qualidades podem sugerir; b) existentes podem indicar e c) leis podem representar. É da tríade apresentada que se origina a segunda e ampla divisão dos signos.

Peirce (CP 2.247) affirm que "According to the second trichotomy, a Sign may be termed an Icon, an Index, or a Symbol". [37] Além disso, Peirce define: a) ícone como um signo que faz referência a um objeto, cujo significado é dado simplesmente em função dos caracteres próprios e que possui, assim como um objeto que existe realmente ou não; b) índice é um signo que faz referência a um objeto que significa em função de ser afetado pelo mesmo e c) símbolo é um signo que faz referência a um objeto que significa em função de uma lei, ou seja, é uma associação de ideias gerais.

Para exemplificar esta divisão dos signos, consideramos a) alegria sendo sugerida por um indivíduo que aprendeu a esboçar um gráfico tridimensional de uma reta; a formação de representação identificável da teoria de Registro de Representação Semiótica; b) o tratamento que um indivíduo aplica ao esboçar um gráfico de uma reta no espaço tridimensional indica que este indivíduo sabe tratar o assunto ou representação e c) a conversão da representação gráfica de uma reta no espaço em uma equação paramétrica, vetorial, geral, reduzida, simétrica da reta realizada por um indivíduo é uma lei, ou seja, é um caminho para se atingir o aprendizado de reta no espaço em Geometria Analítica.

---

[36]Um Legissigno é uma lei que é um Signo. Esta lei é geralmente estabelecida pelos homens. Todos os signos convencionais são um legissigno [mas não ao contrário]. Não é um único objeto, mas um tipo geral que, foi acordado, deve ser significativo. Cada legissigno significa por intermédio de uma instância de sua aplicação, que pode ser chamado de uma réplica do mesmo. Assim, a palavra "a" ocorrerá geralmente 15-25 vezes em uma página. É em todas estas ocorrências uma e mesma palavra, o mesmo legissigno. Cada instância única é uma réplica. A réplica é um Sinssigno. Assim, cada Legissigno requer Sinssignos. Mas estes não são Sinssignos comuns, como são ocorrências peculiares que são consideradas significativas; nem a Replica seria significativa se não fosse pela lei que a torna assim (Tradução nossa).

[37] De acordo com a segunda tricotomia, um signo pode ser chamado de ícone, índice ou símbolo (Tradução nossa).

Segundo Santaella (2001, p. 50 - 51),

> Se (1.1) o fundamento do signo for (1.1.1) um quali-signo, na relação com (1.2) o objeto, ele será um (1.2.1) ícone, um tipo de signo que é capaz de representar seu objeto meramente em função de qualidades que ele, signo, possui independentemente da existência ou não do objeto (por exemplo, a qualidade da cor azul nos olhos de uma criança que sugere, se parece ou lembra o azul de uma violeta). Tendo como (1.1) fundamento (1.1.2) um sin-signo, na relação com (1.2) o objeto o signo será (1.2.2) um índice, isto é, um signo que está existencialmente conectado com um objeto que é maior do que ele (a fotografia de uma jovem como índice, isto é, parte de sua existência presente ou passada). Quando tem seu (1.1) fundamento em (1.1.3) um legi-signo, na relação com (1.2) o objeto, o signo será um (1.2.3) símbolo, que é um signo que funciona como tal porque é habitual ou convencionalmente usado e entendido como representando seu objeto (a palavra "estrela" representando um objeto do tipo estrela, por exemplo).

Por fim, trata-se da relação do signo com os interpretantes, que podem ser gerados, compostos pela tríade: a) rema; b) dicente e c) argumento. A saber, ***rema*** é uma conjectura ou hipótese, por exemplo, vejo uma representação gráfica de longe e sugiro que seja de uma reta no espaço tridimensional; ***dicente*** é uma proposição equivalente à comprovação de conexão física e existência, por exemplo, um aluno representa uma equação geral de uma determinada reta no instante que o professor explica as definições de equação geral da reta e argumento é uma série lógica de premissas e conclusão.

As tríades apresentadas são as de maior relevância, pois formam nove tipos de signo, que combinados levaram Peirce a desenvolver dez classes de signos. Embora tenha criado as tríades levadas em consideração neste trabalho, Peirce esquematizou sete novas tríades quando considerou os demais elementos do signo, como o objeto imediato, o interpretante imediato entre outros, que resultaram em um total de dez tríades. As combinações dessas tríades resultaram em 66 classes de signos.

Ainda que seja importante levar em consideração as 66 classes de signo, neste trabalho constam somente as dez classes de maior relevância.

No próximo capítulo, serão expostas as ideias principais de alguns trabalhos relacionados com os questionamentos que estamos propondo nesta tese.

CAPÍTULO II

TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo, apresentamos trabalhos relacionados com a Semiótica Peirceana e a Educação Matemática.

Considerando que este trabalho vem desenvolvendo reflexões acerca da teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval por meio da Semiótica Peirceana é de suma importância apresentar trabalhos que discutem essas teorias em didática da matemática, pois reforçam nossa ideia.

Dessa forma, apresentamos o artigo de Isabelle Bloch e Patrick Gibel publicado na revista *Recherches en Didactique des Mathématiques*[38], volume 31 de 2011, intitulado "*Un Modèle d'Analyse des raisonnements dans les Situations Didactiques: étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la nation de limite*"[39]. No artigo, os autores apresentam um modelo multidimensional que permite uma visualização dos raciocínios produzidos por alunos de 17-18 anos em um curso científico geral na introdução do conceito de limite por meio do Floco de Von Koch, em determinadas situações adidáticas, que foi fundamentado nas teorias de Situação Didática de Brousseau e Semiótica peircenana.

Bloch e Gibel (2011, p. 224), ao tratarem do modelo multidimensional, afirmam: "Le modèle nous a permis d'analyser les raisonnements comme étant des réactivations et des confrontations de connaissances, le tout se traduisant en situation par des énoncés et des représentations"[40].

---

[38] Pesquisa em Didática da Matemática. (Tradução Nossa)

[39] Um modelo de análise dos raciocínios em situações didáticas: estudo dos níveis de provas em uma situação de ensino da noção de limite (tradução nossa).

[40] O modelo nos permitiu analisar os raciocínios, como sendo reativações e confrontações de conhecimentos, o todo traduzindo-se em situação por enunciados e representações (tradução nossa).

Para desenvolver o modelo, os autores afirmam que a teoria das situações didáticas fornece o primeiro quadro do estudo que estão propondo e que a análise das funções de raciocínio nos níveis de *milieux*[41] permite uma categorização que precisa ir mais longe. Para isso, Bloch e Gibel asseguram que este quadro precisa ser completado por ferramentas de análises locais, bem como por uma análise das funções dos raciocínios e dos signos que o apoiam, especificamente pela Semiótica Peirceana, uma vez que essa teoria proporciona ir mais além do que aquela dos Registros de Representação. Isso porque a Semiótica Peirceana estuda a natureza dos signos de maneira muito variada e facilmente adaptada à matemática.

Posto isto, observamos que esta proposta reforça a reflexão que esta tese vem desenvolvendo.

Para os autores, os fenômenos matemáticos e os signos que eles induzem, incluindo a educação, pertencem todos à ordem da secundidade ou terceiridade: os interpretantes matemáticos de uma situação conduzem para enunciar as regras, as propriedades. Além disso, deixam explícito o que utilizaram da Semiótica Peirceana:

> Dans notre usage de la sémiotique peircienne, nous garderons les trois désignations icône, indice, symbole/argument: une interprétation iconique est de l'ordre de l'intuition, éventuellement sur un schéma, une figure (la suite des figures est d'aire finie...); un signe indiciel est de l'ordre d'une proposition (la formule $(4/3)^n$ indique que cela grandit indéfiniment); un symbole/argument n'importe quel 10^p). (BLOCH; GIBEL, 2011, p. 197)[42]

Diante do que foi exposto, observamos que segundo nossa interpretação da semiótica de Peirce, não podemos apreender os fenômenos matemáticos sem passar pela primeiridade. Isso porque sempre existirá um primeiro, uma primeira experiência, uma qualidade, além disso, porque as categorias peirceanas são onipresentes, o terceiro tem dentro dele o segundo e

---

[41] Segundo Almouloud (2007, p. 31), "usaremos o termo *milieu* ou *milieux* em francês no lugar de sua tradução em português "meio" por entendermos que esta não dá conta da ideia que está em jogo". De acordo com o mesmo autor, "na teoria das situações, o *milieu* é um sistema antagonista ao sujeito" (p. 35).

[42] Em nosso uso da Semiótica Peirceana, vamos manter as três designações ícone, índice, símbolo/argumento: uma interpretação icônica é da ordem da intuição, eventualmente sobre um esquema, uma figura (a sequência das figuras é de área finita...); um signo indicial é da ordem de uma proposição (a fórmula $(4/3)^n$ indica que ele cresce indefinidamente); um símbolo/argumentos qualquer 10^p) (tradução nossa).

o primeiro e o segundo tem o primeiro dentro dele. Para Santaella (2003, p. 47) “onde quer que haja um fenômeno, há uma qualidade, isto é, sua primeiridade. Mas a qualidade é apenas uma parte do fenômeno, visto que, para existir, a qualidade tem de estar encarnada numa matéria”.

Além disso, um ícone não pode ser apresentado na ordem da intuição e um símbolo também não pode ser apresentado na posição de argumento, pois pertencem a tricotomias diferentes. De acordo com nossa interpretação semiótica, o ícone, a intuição ou índice, bem como o símbolo pertencem à segunda tricotomia de Peirce, que trata da relação do signo com o objeto, porém o argumento pertence a terceira tricotomia, que trata da relação do signo com o interpretante. Para Peirce (2003, 52),

> O ícone constitui um tipo de signo em que o significado e o significante apresentam uma semelhança de fato. O desenho de um animal seria um exemplo de ícone; o desenho significa o animal, simplesmente porque se parece com ele. Um índice é um signo que não se assemelha ao objeto significado, mas indica-o casualmente, é um sintoma dele porque experimenta-se uma contiguidade entre os dois. Um furo de bala, por exemplo, é o índice de um tiro, como a fumaça é índice de fogo. O símbolo, ao contrário, opera segundo uma contiguidade instituída, ou seja, depende da adoção de uma regra de uso. As bandeiras constituem símbolos das nações; entre as bandeiras e as nações não há qualquer relação causal necessária, trata-se apenas de convenção. A quase totalidade da linguagem usual, falada e escrita, é de natureza simbólica.

Observamos que a ideia de ícone dos autores não nos parece estar de acordo com a definição dada por Peirce, em que estamos nos apoiando, entretanto a ideia de índice, sim.

Uma vez que Bloch e Gibel tratam de ícone, índice e símbolo; observamos que estão se referindo à segunda tricotomia peirceana, a relação do signo com o objeto. No entanto, quando os autores colocam em evidência “símbolo/argumento” estão fazendo referência à terceira tricotomia peirceana, a relação do signo com o interpretante.

Para Peirce (1972, p. 102-103), “Argumento é um Signo que, para seu Interpretante, é Signo de lei [...] é um Signo que se entende representar seu Objeto em seu caráter de Signo”. Dessa forma, observamos que símbolo e argumento são elementos distintos que pertencem a tricotomias distintas. Em síntese, o símbolo é uma lei em relação ao objeto e o argumento é uma lei em relação ao interpretante.

Segundo nossa interpretação semiótica, na segunda tricotomia de Peirce temos os conceitos de ícone, índice e símbolo; por sua vez na terceira tricotomia temos os conceitos de rema, dicente e argumento. Dessa maneira, observamos que os autores posicionam-se na segunda tricotomia peirceana e colocam em xeque a terceira tricotomia da maneira que nos parece, ao unirem os conceitos de símbolo e argumento, bem como substituem a palavra símbolo por argumento quando apresentam o modelo multidimensional.

> En prenant en compte les trois axes (fonctions des raisonnements ; niveaux d'utilisation des signes comme icône, indice, argument ; répertoire de représentation) dans chaque niveau de milieu M_{-2}, M_{-1}, M_0, nous parvenons au tableau suivant. (BLOCH; GIBEL; 2011, p. 206) [43] [44]

Nesse contexto, parece que Bloch e Gibel aplicam a segunda e a terceira tricotomia peirceana nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, desconsiderando a primeira tricotomia, aquela que trata da relação do signo com ele mesmo.

Para além do escopo das tricotomias, observamos que Bloch e Gibel aplicam a tricotomia da relação do signo com o objeto na segunda linha do modelo multidimensional e apresentam a questão de palavra e conceito de argumento distintas de nossa interpretação peirceana, quando tratam argumento como símbolo. Entretanto, por dedução, observamos que os autores buscam explicar o processo de ensino e aprendizagem da matemática por meio dos conceitos peirceanos, símbolo, argumento, pertencentes a décima classe de signo. Veja o modelo apresentado nos dados do Quadro 5:

---

[43] A tabela mencionada na citação é o quadro 5.

[44] Tendo em conta os três eixos (funções de raciocínio, níveis de uso dos signos como ícone, índice, argumento; repertório de representação) em cada nível do milieu M_{-2}, M_{-1}, M_0, chegamos à seguinte tabela (tradução nossa).

Quadro 5 - Modelo multidimensional de Bloch e Gibel.

	Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
Fonctions des raisonne-ments	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisa-tion des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
Niveau d'actualisa-tion du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

Fonte: Bloch e Gibel (2011).

Ao observarmos o modelo multidimensional de Bloch e Gibel (2011), concordamos com os autores quando afirmam que a utilização do ícone e do índice dependerá do contexto na segunda linha e segunda coluna do quadro. Ainda mais, concordamos com os autores a respeito do nível de atualização do repertório, a última linha do modelo multidimensional, uma vez que ela pode ser comparada a décima classe de signos de Peirce: legissigno simbólico argumento. Em síntese, as ideias dessa classe são: lei, arbitrariedade e certeza absoluta, nessa ordem.

Além do mencionado trabalho, é importante apresentarmos outro trabalho de Bloch, cujo título é "La sémiotique de C. S. Peirce et la didactique des mathématiques. Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage"[45].

Neste trabalho, Bloch tem por objetivo mostrar os benefícios da semiótica de Peirce para analisar as semioses no ensino da matemática.

Para Bloch (2005, p. 03),

> De fait, la recherche sur les signes en jeu dans l'enseignement des mathématiques est un thème récurrent ; mais les théories qui ont

---

[45] A semiótica de C. S. Peirce e a didática da matemática: para uma análise dos processos de produção e de interpretação dos signos matemáticos nas situações de aprendizagem.

> cherché à étudier cette composante ont eu quelques difficultés à intégrer cette étude dans les autres dimensions analysées, ou à spécifier l'étude des signes du côté des processus didactiques et non des mathématiques elles-mêmes. [46]

Observamos que Bloch assinala a dificuldade na aplicação da semiótica nos processos didáticos do ensino da matemática, mesma dificuldade que estamos enfrentando na elaboração desta tese. Entretanto, no que se trata da teoria de Duval, conforme Bloch (2005, p. 05), "Les travaux de Duval tentent de palier à cet obstacle, en se focalisant moins sur les symboles manipulés que sur la constitution de classes de ces symboles dans des catégories – les registres – relevant des théories mathématiques"[47]. Concordamos com esta reflexão de Bloch quanto aos trabalhos de Duval.

Quanto à análise dos fenômenos de interpretação no ensino da matemática, Bloch (2005) defende a tese de que é necessária para construir as situações e analisar seu funcionamento, permitindo levar em conta a natureza provisória dos interpretantes e os possíveis mal entendidos semióticos.

Concordamos com Bloch (2005), quando afirma que os fenômenos de interpretação no ensino da matemática são de suma importância para a aprendizagem, inclusive a sua análise. Nesse sentido, observamos a importância da terceira tricotomia peirceana, a relação do signo com o interpretante.

Bloch (2005, p. 16), diz que

> En effet, dans une situation cherchant à instaurer des apprentissages, les signes sont déterminants dans la construction des interprétations possibles et la démarche reconnaissant la nécessité des énoncés mathématiques. Le processus d'interprétation apparaît alors comme indissociable du rapport entre la situation et le jeu des élèves ; ce processus doit être maîtrisé pour que le contrat didactique puisse évoluer vers un rapport favorable à un réel investissement des élèves dans le savoir, et à une interprétation des signes mathématiques comme étant des opérateurs incluant une règle.[48]

---

[46] De fato, a pesquisa sobre os signos em jogo no ensino da matemática é um tema recorrente, mas as teorias que procuraram estudar este vertente tiveram algumas dificuldades em integrar esse estudo nas outras dimensões analisadas, ou a especificar o estudo dos signos em relação aos processos didáticos e não à matemática (Tradução nossa).

[47] Os trabalhos de Duval tentam compensar este obstáculo, focalizando-se menos sobre os símbolos manipulados que sobre a constituição das classes desses símbolos nas categorias - os registros – relativas às teorias matemáticas (Tradução nossa).

[48] Com efeito, em uma situação buscando instaurar aprendizagens, os signos são determinantes na construção das interpretações possíveis e a estratégia que reconhece a necessidade dos enunciados matemáticos. O processo de interpretação aparece então como indissociável da relação entre a situação e o jogo dos alunos; este processo deve ser controlado de modo que o

Diante do exposto, concordamos com Bloch (2005) quando afirma que “os signos são determinantes na construção das interpretações possíveis e a aproximação que reconhece a necessidade dos enunciados matemáticos”, visto que, dependendo do ponto de vista, cada parte, ou item, de uma expressão algébrica, por exemplo, é um signo, que forma o enunciado matemático que necessita da construção das possíveis interpretações. Nesse sentido, podemos observar que a semiótica de Peirce trata das partes, de cada pedaço que forma o todo, enquanto Duval trata somente do todo.

Além do trabalho de Isabelle Bloch e Patrick Gibel, é de suma importância refletir a acerca do artigo “A semiótica como campo de análise para as representações de conceitos matemáticos” de Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, Rosana Maria Mendes, Maria Margarete R. Farias da Universidade Estadual Paulista, e Anna Regina Lanner de Moura e Mariana da Rocha Correa Silva da Universidade de Campinas. O artigo trata das possíveis relações que há entre a Educação Matemática e a Semiótica de Peirce. Para dar conta disso, as autoras apresentam duas pesquisas, uma desenvolvida por Miskulin, Moura & Silva (2003) e outra por Mendes (2006).

A pesquisa de Miskulin, Moura & Silva (2003) pretendeu mostrar, por meio da Semiótica, os aspectos teórico-metodológicos, as principais características e as potencialidades pedagógicas do ambiente TelEduc e de outros ambientes educacionais, utilizados na disciplina “Fundamentos Teórico-Metodológicos sobre Ambientes Computacionais na Educação Matemática”, do curso de Pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade de Campinas. As análises dos ambientes foram realizadas por meio de sínteses pelos alunos da disciplina, nas quais explicavam os motivos que o induziram a eleger determinado ambiente computacional para a representação dos conceitos, seguindo uma visão semiótica. As categorias de análise das produções dos alunos foram duas, a função semiótica da representação e a função instrumental da representação. Dessa forma, os autores observaram que os alunos avaliaram os ambientes computacionais de acordo com a

---

contrato didático possa evoluir para uma relação favorável à uma real investimento dos alunos no saber, e para uma interpretação dos signos matemáticos como sendo operadores incluindo uma regra (Tradução nossa).

representatividade dos conceitos, levando em consideração uma coleção de características definidas partindo do uso efetivado de cada um deles.

Em síntese, Miskulin, Moura & Silva (2003), com base nos comentários dos alunos, afirmam que, sob a visão semiótica, a compreensão de um ambiente computacional denota conceber o pensamento no rumo do entendimento de suas possibilidades pedagógicas no procedimento de representação de um conceito ou pensamento. Por fim, a pesquisa aponta as potencialidades didático-pedagógicas do ambiente TelEduc e de outros ambientes computacionais que foram utilizados na disciplina já mencionada. Essas potencialidades puderam ser investigadas, em uma visão semiótica, que possibilitou a apreensão dos múltiplos conceitos matemáticos tácitos nas várias representatividades elaboradas pelos alunos, nos diferentes ambientes computacionais que foram trabalhados na disciplina, tal como observado nos comentários dos alunos apresentados no artigo de Miskulin, Moura & Silva (2003).

Por sua vez, a pesquisa de Mendes (2006), apresenta uma análise semiótica da aplicação do jogo *Simcity* com duas duplas, dupla 1 (Thi e Re) formada por uma menina e um menino e dupla 2 (A e S) formada por dois adolescentes.

O *Simcity* é um jogo dividido em três modos: a) Deus; b) Prefeito e c) Sims. No primeiro modo, Deus, o jogador cria o terreno para sua cidade e depois disso, entra no segundo modo, Prefeito, gerencia a cidade, relaciona a mesma com outras cidades da região, bem como com o estado. No terceiro modo, Sims, o jogador pode importar até cinco cidadãos do jogo *The Sims* e abrigá-los em diferentes lugares da cidade.

A forma de jogar está sujeita à interação e/ou interpretação que cada jogador atribui ao jogo em um determinado instante. Além disso, o jogador pode utilizar múltiplas representações para comunicar sua interpretação, como: desenhos, imagens, palavras e gestos.

Segundo Miskulin et al. (2007, p. 12),

> entendemos que o ato de jogar pode ser considerado um processo semiótico por envolver interpretações de signos (processo de semiose), sejam eles imagens, objetos, ícones, palavras, sons. Trata-se de um pensamento que envolve a cooperação dos três elementos: o signo, seu objeto e seu interpretante. Esse processo de semiose ocorre o

> tempo todo durante o jogo. O jogador dá significado ao jogo ao interpretá-lo de acordo com a sua estrutura, com seus objetivos, com a estratégia usada. Cada vez que o jogador encontra uma nova situação-problema, tem que passar por um processo de tomada de decisão, elaboração de estratégias de jogo, podendo gerar um ciclo em que uma nova situação poderá acontecer, um novo problema e tudo isso em um processo dinâmico.

Para reforçar esta ideia apresentada, Miskulin et al. (2007), descrevem que em uma entrevista coletiva realizada com as duas duplas, foi solicitado que refletissem acerca das estratégias que foram aplicadas durante o jogo. Nessa entrevista, *A*, um dos integrantes da dupla 2, mencionou que trocaria o tamanho do terreno no jogo. Essa situação, conforme as autoras, é um exemplo de semiose, uma vez que o tamanho do terreno é um signo, e esse signo poderá causar na mente do intérprete um outro signo, sua interpretação particular.

A interpretação do integrante *A* da, dupla 2*,* influenciou os outros sujeitos (S, Thi e Re) fazendo eles pensarem a respeito do assunto. Além disso, essa situação fez com que os demais integrantes reelaborassem suas estratégias. Dessa forma, segundo Miskulin et al. (2007, p. 14),

> uma interpretação de um signo do jogo suscita uma outra interpretação. A ideia do sujeito *A* gerou uma nova interpretação para a mesma situação, para o mesmo signo (tamanho do terreno), pois Re acabou concluindo que o tamanho do terreno escolhido não foi adequado.

Diante das pesquisas de Miskulin, Moura & Silva (2003), bem como de Mendes (2006), as autoras supõem que o estudo simultâneo da Semiótica mediado pelas sínteses conceituais da mesma teoria, incrementou e estimulou para o desempenho da tecnologia computacional na educação. Além disso, para suas dimensões da interação e compartilhamento de conceitos no processo de ensino e aprendizagem. Para as autoras, foi nessa interação, que a interdependência da instrumentalidade e da função semiótica da representação, dos múltiplos conceitos trabalhados, oportunizou aos alunos um contexto colaborativo. Além do mais, completam, foi nesse contexto, que a expressão dos conceitos teóricos trabalhados de distintos pontos de vista e a seleção de ambientes computacionais que mais se adaptavam aos objetivos a serem alcançados, estabeleceram extensões significativas no processo de exploração, disseminação e construção do conhecimento.

Ademais, as autoras afirmam que o processo de semiose aconteceu a todo instante durante o manuseio de software na sala de aula de Matemática, do ambiente computacional TelEduc, bem como na utilização do jogo *Simcity*. Desse modo, Miskulin et al. (2007, p. 16), concluem que o artigo em questão apresentou a “importância da Semiótica como campo de análise na área da Educação Matemática”.

Diante da pesquisa de Miskulin et al. (2207), percebemos a importância da Semiótica no contexto da Educação Matemática, entretanto, destacamos que a análise realizada por elas ainda é incipiente. Isso porque o tema em questão poderia ser analisado conforme as tricotomias, classes de signo e categorias da experiência.

Além dos trabalhos de Bloch e Gibel (2011), Miskulin et al. (2007), destacamos o estudo de Dionizio e Bandt (2012), intitulado “O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática”, publicado no IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul (IX ANPED SUL), em 2012. Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de esclarecer o caminho percorrido pela semiótica para situar os registros de representação em relação às outras teorias, apresentando a seguinte problemática “Como situar os registros de representação em relação às outras ‘teorias’ semióticas?”.

Em seu artigo, Dionizio e Bandt (2012) apresentaram a origem e o desenvolvimento da semiótica e discutiram o significado e a origem do termo semiótica, além do estudo da semiótica do século IV a. C. ao século XX. Ao buscarem respostas para a questão de pesquisa, explanaram sobre o lugar dos registros de representação semiótica de Raymond Duval nos estudos semióticos. Nesse estudo, as autoras (2012) apontaram que Duval apresentou, em 2009 e 2011, suas considerações em relação aos outros trabalhos de semiótica e que ele afirmou que todos os trabalhos que foram elaborados após os estudos de semiótica de Peirce e Saussure, foram iniciados das contribuições desses autores, além de Frege. Ainda nesse estudo, elas discutiram a respeito da semiótica de Peirce, da semiologia na perspectiva de Saussure e a respeito dos estudos de Raymond Duval.

Ao discutirem sobre a semiótica de Peirce, colocaram em xeque afirmações pertinentes, como a afirmação que foi por intermédio da “observação direta dos fenômenos, nos modos como eles se apresentam à mente, que as categorias universais, como elementos formais do pensamento, puderam ser divisadas" (SANTAELLA, 2002, p. 34 *apud* DIONIZIO; BANDT 2012, p. 07). Além dessa afirmação, apresentaram outra que também consideramos pertinente,

> Peirce também deixa claro que o signo não é o objeto, sua função é representar o objeto, produzindo na mente do intérprete alguma coisa, que seria outro signo, que também se relaciona com o objeto, mas com a diferença de ser mediada pelo signo.

E complementam

> É considerada por Duval (2001) como novidade do modelo de análise de Peirce, a complexa classificação de todos os tipos de representação em função de um processo triádico de interpretação, levando a distinguir vários níveis de signos. Porém Duval (2011) afirma que Peirce ignora a propriedade específica dos signos, repousando numa abordagem pragmática do que é conhecimento. (DIONIZIO; BANDT, 2012, p. ~~0~~7).

Nesse contexto, consideramos relevante a afirmação apresentada pelas autoras, uma vez que estas afirmações vêm de encontro com a proposta que esta tese vem desenvolvendo, visto que se tratam das teorias de Duval e Peirce que estamos colocando em xeque.

Ao tratarem a respeito da semiologia de Saussure as autoras apontam que "Raymond Duval (2011) considera que a grande contribuição de Saussure está na consideração de que os signos são constituídos por suas relações de oposição aos outros no interior de um sistema" (DIONIZIO e BANDT, 2012, p. 9). Além disso, as autoras afirmam que "com isso afirma-se que é apenas no interior de um sistema semiótico que alguma coisa pode funcionar como signo e torna possível entender as distinções..." (p.9). Distinções estas que as autoras apresentaram na seguinte fala de Duval "signo e sua ocorrência, um signo e o objeto ao qual ele se refere, o significante e o significado" (DUVAL, 2011, p. 31 *apud* DIONIZIO e BANDT 2012, p. 09). Além dessas considerações, as autoras afirmam que "como limite do modelo de Saussure, Duval (2011) aponta o fato de sua análise eliminar a diversidade de enunciados que a língua permite produzir" (DIONIZIO e BANDT 2012, p. 09).

Ao tratar dos estudos de Raymond Duval, Dionizio e Bandt (2012, p. 10) destacaram que "para o autor, a compreensão do papel da *semiosis* no funcionamento do pensamento e na forma como se desenvolve o conhecimento, está relacionada com a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados". Além disso, as autoras (2012) apontam que "o fato de que a *semiosis* não pode ser separada de uma diversidade de tipos de signos, foi primeiramente reconhecido por Peirce". Na sequência, Dionizio e Bandt (2012, p. 10) evidenciam que Peirce diferenciou três tipos de signos, que são, os ícones, os símbolos, e os índices, e afirmam que foi essa classificação que contribuiu para fundar a semiótica. Entretanto, citando Duval (DUVAL, 2009, p. 35), apontam que essa distinção dos signos desenvolvida por Peirce deixou de considerar "as relações possíveis entre sistemas semióticos e a possibilidade de converter uma representação formada dentro de um sistema em uma representação de outro sistema".

Após estas reflexões, as autoras discutiram sobre outros aspectos da Teoria de Registro de Representação Semiótica conforme Raymond Duval, abordando as três atividades cognitivas fundamentais, que permitem chamar um sistema semiótico de Registro de Representação Semiótica, como a formação de representação identificável, o tratamento e a conversão. Além disso, refletiram sobre a congruência e não congruência na atividade da conversão.

Na sequência, Dionizio e Bandt (2012), trataram da abordagem da teoria dos registros de representação semiótica para análise dos procedimentos dos alunos nas atividades de trigonometria e concluíram esta reflexão afirmando:

> É pensando na particularidade do acesso ao conhecimento matemático, que a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval foi elencada para ajudar a buscar resposta ao seguinte problema de pesquisa: Qual a natureza das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Trigonometria? (p. 15)

As autoras concluem o estudo afirmando que a teoria de Registro de Representação Semiótica, de acordo com Duval (2004, 2009, 2011), esta teoria é diferente das outras porque ela leva em consideração

> a importância da mobilização de diferentes registros de representação, para a compreensão de um objeto de conhecimento matemático. Esse aspecto é importante na matemática, por seus objetos não estarem diretamente acessíveis à percepção. (DIONIZIO e BANDT, 2012, p. 15)

Além do mais, as autoras apontam que a particularidade da teoria de Duval está no fato de serem considerados como representações semióticas os seguintes casos “uma situação que apresente uma ideia mais abrangente, como as frases em linguagem natural ou as equações e não simplesmente um traço ou um símbolo isolado, como as letras, as palavras ou os algarismos” (DUVAL, 2011 apud DIONIZIO e BANDT, 2012, p. 15).

Viel e Dias escreveram um artigo sobre semiótica e abordaram algumas informações a respeito da teoria de registro de representação semiótica, que foi publicado no Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática de 2006, que consideramos relevante mencionar nesta tese. O artigo das autoras é intitulado “Semiótica: a noção do termo semiótica e o registro de representação semiótica na percepção de professores da Rede Pública de Ensino”, cujo objetivo foi responder as seguintes questões: a) o que significa representação semiótica na área que lecionam? b) os professores têm acesso as pesquisas sobre a aplicação dessa ciência em seu campo de atuação? c) existe uma relação entre a formação inicial e continuada do professor e o reconhecimento dessa nova ciência?

Nesse artigo, Viel e Dias realizaram um estudo bibliográfico a respeito da semiótica de Peirce, Saussure, Piaget e Vigotski e da teoria de Duval. Para responder aos questionamentos, Viel e Dias, fizeram uma pesquisa de campo com os professores que lecionam no ensino fundamental e médio de uma escola da Rede Pública de Ensino em diferentes áreas de conhecimento. Com a pesquisa de campo, as autoras perceberam que:

> os professores têm noção sobre o termo semiótica e como relatado por alguns professores durante a aplicação do questionário “já ouvi falar sobre o termo, mas não sei o que é”. Apenas três professores (um da área de Matemática e dois da área de Biologia), disseram conhecer o termo, o seu significado e o especificaram como sendo o estudo dos sinais. Os demais professores pesquisados não conhecem seu significado, não souberam especificá-lo e não sentem seguros quanto a considerarem Semiótica como sendo uma ciência. (VIEL e DIAS, 2006, p. 09)

Além disso, as Viel e Dias (2006, p. 10), perceberam que:

> pelos resultados obtidos que os professores têm interesse em se aprofundar em seus estudos e a unidade escolar em que lecionam seria o primeiro passo para que os trabalhos de pesquisa fossem divulgados e estudos em cursos de capacitação e desenvolvimento do docente na formação continuada.

No contexto, notamos que o artigo de Viel e Dias, trata da semiótica e da teoria de registro de representação semiótica de maneira distinta da proposta desta tese.

Além dos estudos mencionados, que relacionam a teoria de Duval com a semiótica de Peirce, encontramos o artigo intitulado “Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações” de Silva e Almeida, que foi apresentado na VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática em Londrina, (Paraná), no ano de 2009.

No artigo, Silva e Almeida (2009) apresentam resultados que obtiveram numa pesquisa de Mestrado com base nas teorias de Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, da Semiótica de Peirce e de Registro de Representação Semiótica de Duval. Além do mais, os resultados obtidos provém de uma atividade de Modelagem Matemática que se utiliza de diversos registros de representações semiótica. Esta atividade foi fundamentada na atividade de Modelagem apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação de Borges e Silva (2007)[49], que parte da situação problema que trata do volume de combustível usado em máquinas agrícolas, no noroeste do Rio Grande do Sul, que é armazenado em tanques cilíndricos na posição horizontal, usado de acordo com a necessidade de consumo. Para Borges e Silva (2007), os agricultores fazem medições com régua na parte superior do cilindro para saber o nível de combustível existente.

Silva e Almeida (2009), apresentam brevemente as teorias: semiótica de Peirce, abordando sua definição, as três tricotomias de maior relevância bem como as categorias fenomenológicas, primeiridade, secundidade e terceiridade; e registro de representação semiótica de Duval, abordando a formação de representação identificável, o tratamento, a conversão e a conceitualização.

Ao tratar da Modelagem Matemática e dos Registros de Representação Semiótica, Silva e Almeida (2009), apresentaram os modos de inferência, abdução, indução e dedução, elaborados por Peirce e utilizados por Kehle e Lester (2003) no desenvolvimento de Modelagem Matemática. Além disso, as autoras apresentam um quadro com a classificação das inferências

---

[49] O mencionado trabalho de Borges e Silva (2007) foi citado por Silva e Almeida no artigo: Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações.

tratadas por Kehle e Cunningham (2000), relacionando os modos de inferência com as distintas etapas envolvidas numa atividade de Modelagem Matemática.

As análises da atividade de Modelagem Matemática apresentada pelas autoras Silva e Almeida (2009) constituem reflexões importantes para o desenvolvimento desta tese, uma vez que abordam as teorias de Peirce e Duval de forma significativa.

Diante da análise das autoras, observamos que foram utilizadas diversas representações semióticas, como: escritas em língua natural, algébrica, gráfica, geométrica, além de mencionarem que Borges e Silva (2007) apropriaram-se da representação tabular. Além disso, observamos que Silva e Almeida (2009) analisaram as representações semiótica por meio da inferência, da semiótica de Peirce e dos registros de representação semiótica.

Por exemplo, ao analisarem a seguinte definição do problema apresentado por Borges e Silva (2007) num registro em língua natural, "O problema proposto é determinar o volume de combustível remanescente a partir da informação da altura h e das dimensões internas do tanque (raio R e comprimento L)", Silva e Almeida (2009, p. 11), apresentam as seguintes afirmações:

> A partir do Palpite estabelecido partiu-se para o reconhecimento do problema a ser estudado. Essa etapa corresponde ao modo de inferência de abdução Pista, pois os alunos evidenciaram a existência de algum fenômeno a ser estudado e, na categorização de Peirce, encontram-se na Secundidade. Isso ocorre, porque na definição de um problema algumas reações estão associadas.

As autoras mencionam também que "como a representação da Definição do problema corresponde à existência de algo para ser estudado, na significação, é um sin-signo e na objetivação é um índice" (2009, p. 11). Além dessas afirmações, Silva e Almeida (2009, p. 11) acrescentam que:

> Até este momento da atividade, os registros de representação ainda não deixam transparecer uma caracterização do objeto matemático. Todavia, para a definição do problema, podemos ponderar que os alunos realizaram de forma satisfatória o tratamento no registro em língua natural.

Ao realizarem a conversão da representação semiótica em língua natural para a representação geométrica, seção transversal do tanque cilíndrico de combustível, Silva e Almeida (2009, p. 12), salientam que "como o registro gráfico foi construído seguindo uma lei, na significação, é um legi-signo e na objetivação é um símbolo. [...] para a definição desse registro, os alunos encontram-se na categoria fenomenológica da terceiridade".

Ao apresentarem o registro algébrico, registro de representação semiótica utilizado para iniciar a dedução do modelo matemático de Borges e Silva (2007), Silva e Almeida (2009, p. 13), afirmam que "na significação, como o signo foi definido a partir de uma lei, temos um legi-signo e na objetivação, temos um símbolo". Além disso, ao analisarem o registro de representação semiótica utilizado para a dedução do modelo matemático de Borges e Silva (2007), revelam que

> Esse registro, na significação, é um legi-signo e na objetivação é um símbolo. Neste caso, houve uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico, em que o registro de partida corresponde a um legi-signo e o registro de chegada também é um legi-signo. Tais registros, na relação com o objeto matemático 'área do cilindro' referem-se a símbolos. Como os alunos realizaram de forma satisfatória essa conversão, as relações de significação e de objetivação, considerando Santaella (2007), foram estabelecidas pelo signo na etapa da dedução do modelo matemático (2009, p. 13).

Nesse contexto, ao analisar os registros de representação utilizados para a obtenção do modelo matemático de Borges e Silva (2007), Silva e Almeida (2009, p. 14), afirmam que "Segundo a classificação dos signos estabelecida por Peirce (2005), os registros apresentados [...] são legi-signo simbólicos".

Ao analisarem o registro de representação utilizado para determinar o modelo matemático que descreve a função do volume inferior, de Borges e Silva (2007), as autoras destacam que "esse registro, na significação é um legi-signo e, na objetivação, é um símbolo" (SILVA e ALMEIDA, 2009, p. 15).

Na sequência, ao analisarem o registro de representação utilizado para determinar o volume inferior do tanque, na atividade de Borges e Silva (2007), Silva e Almeida (2009, p. 15) revelam que

> esses registros, na significação são legi-signos e, na objetivação, são símbolos. Houve duas conversões do registro gráfico [...] para o registro em língua natural e do registro em língua natural para o registro algébrico [...]. Nas duas conversões o registro de partida é um legi-signo e o registro de chegada também é um legi-signo. Tais registros, na objetivação referem-se a símbolos. Nesse caso, as relações de significação e de objetivação foram efetivadas pelos signos na etapa da dedução do modelo matemático.

Ao apresentarem o registro gráfico elaborado por Borges e Silva (2007), Silva e Almeida (2009, p. 16) afirmam que “para a construção desse gráfico, foi seguida uma lei que rege sua construção, com isso [...] na significação, temos um legi-signo e na objetivação temos um símbolo”.

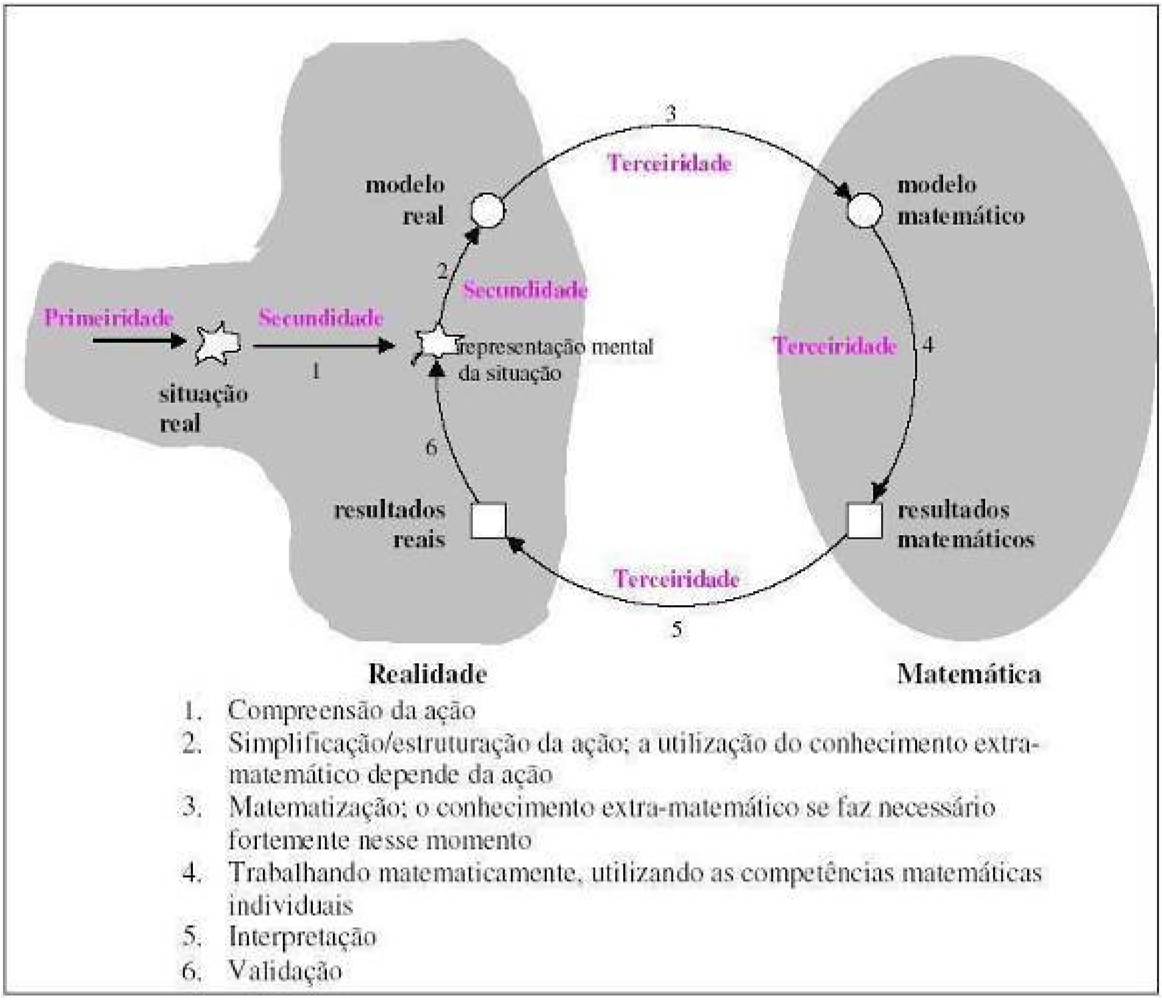
Elas mencionam que Borges e Silva (2007) elaboraram uma tabela e destacam que “para a obtenção da tabela, foi seguida uma lei que rege sua construção. Com isso [...] na significação, temos um legi-signo e na objetivação temos um símbolo” (2009, p. 17).

Elas revelam que:

> Com relação à categorização dos signos estabelecida por Peirce [...] e as etapas da Modelagem, essa atividade se inicia com um sin-signo indicial, abordando na sequência somente legi-signos simbólicos até à etapa de desenvolvimento de uma atividade de MM que corresponde aos resultados reais. A partir de uma existência estabeleceram-se leis que regem a situação, estabelecendo relações entre as etapas de desenvolvimento desta atividade de MM com as categorias fenomenológicas Primeiridade, Secundidade e Terceiridade (2009, p. 18).

As autoras estruturaram e categorizaram os signos estabelecidos por Peirce bem como as etapas de uma atividade de Modelagem Matemática por meio de um esquema, que consideramos importante apresentar.

Figura 13 - Categorização dos signos estabelecida por Peirce no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.



Fonte: Silva e Almeida (2009, p. 18).

Concordamos com a categorização dos signos na modelagem matemática de Silva e Almeida (2009), uma vez que os signos matemáticos são estritamente de terceiridade, porém possibilitam enxergar a primeiridade e a secundidade por meio de uma metarrepresentação. Por outro lado, as situações reais passam pela primeiridade e secundidade antes de atingirem a terceiridade.

No contexto, Silva e Almeida concluem, por exemplo, que dois alunos, sujeitos da pesquisa, apresentaram diversas representações semióticas na atividade de Modelagem Matemática e que ocorreu a compreensão do objeto matemático ‘volume do cilindro’.

Além do mais, as autoras concluem que:

> Na atividade analisada, a Primeiridade aparece no momento em que os alunos têm o primeiro contato com a atividade, no momento em que encontram a situação problema que será investigada. Nesse primeiro contato com a situação-problema, o estudante tem um primeiro contato com o objeto matemático, mesmo não fazendo nenhuma relação deste

> com qualquer outra representação do objeto matemático a ser estudado, ou mesmo não conhecendo qual será o objeto que será estudado. (SILVA e ALMEIDA, 2009, p. 20)

Silva e Almeida (2009, p. 20) concluem também que:

> A Secundidade está relacionada com a busca de informações que a dupla faz para iniciar o estudo da situação, está relacionada com a apresentação do modelo real, com a existência de algo para ser estudado. Para Santaella (2008b), "Existir é sentir a ação de fatos externos resistindo à nossa vontade" (p. 47) o que na atividade de Modelagem corresponde a evidenciar o que das informações pode ser utilizado para o estabelecimento de um problema.

As autoras concluíram também que:

> A Terceiridade está relacionada com as etapas de obtenção e dedução do modelo matemático, na obtenção dos resultados matemáticos e sua validação em confronto com a situação real. Durante essas etapas da Modelagem, trabalha-se matematicamente, por meio de leis e regularidades que regem a situação em estudo. Neste caso, o estudante está no caminho da terceiridade quando seu olhar sobre uma representação do objeto matemático está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, na qual ele poderá interpretar cada representação do objeto matemático de acordo com uma suposta lei ou conceito matemático. (SILVA e ALMEIDA, 2009, p. 20-21)

Nas considerações finais, as autoras supracitadas revelam que, na atividade de Modelagem Matemática que elas analisaram, podem relacionar a categorização dos signos desenvolvida por Peirce com as etapas de atividade de Modelagem Matemática, uma vez que,

> por meio de uma situação (algo que se apresenta à mente), um primeiro, é possível estabelecer a existência de um problema a ser estudado (aquilo que a situação indica, se refere ou representa), um segundo, para, então, deduzir o modelo matemático e interpretá-lo na linguagem matemática (o efeito que poderá provocar em um possível intérprete, o modelador), um terceiro.(SILVA e ALMEIDA, 2009, p. 21)

Além disso, Silva e Almeida (2009)~~,~~ destacam que a categorização dos signos desenvolvida por Peirce também pode ser relacionada com os modos de inferência abdução, dedução e indução.

No contexto, consideramos o artigo de Silva e Almeida (2009) relevante para o desenvolvimento desta tese, porque ela aplica a semiótica peirceana nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, em especial na modelagem matemática que é uma das tendências da Educação Matemática.

Diante dos trabalhos apresentados, observamos que esta tese se difere na analogia das teorias de Registro de Representação Semiótica e Semiótica de Peirce na aplicação da terceiridade em alto grau, além da aplicação desta analogia na geometria analítica espacial. Assim, o desenvolvimento da analogia e sua aplicação marcam a originalidade da pesquisa. Desse modo, os trabalhos relacionados nos ajudam a enxergar a relevância dos próximos capítulos. O trabalho de Isabelle Bloch e Gil Patrick, por exemplo, reforça nossa reflexão quanto à realização da analogia entre as teorias, uma vez que reflete a respeito da estrutura do signo peirceano e da teoria de Duval.

No próximo capítulo, apresentaremos uma analogia da Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval com a Semiótica de Charles Sanders Peirce, cuja aplicação desta analogia contribui para a ideia de fundamentação desta tese.

CAPÍTULO III

ANÁLISE PEIRCEANA DA TEORIA DE REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Neste capítulo, analisamos a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval por meio da teoria semiótica de Charles Sanders Peirce.

Embora de Duval mencione o termo 'objeto matemático' em sua teoria, não encontramos sua definição explícita. Dessa forma, podemos sugerir que por objetos matemáticos ele se refira aos conceitos trabalhados em matemática, uma vez que o autor defende a seguinte tese:

> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.* Ora, na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.). *O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas.* Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (Destaque do autor) (DUVAL, 2003, p. 21).

Diante das palavras de Duval, sugerimos que o objeto descrito por ele na Teoria de Registros de Representação Semiótica é análogo ao objeto dinâmico descrito por Peirce na teoria semiótica. Para Santaella (2003, p. 59), "o objeto imediato (dentro do signo, no próprio signo) diz respeito ao modo como o objeto dinâmico (aquilo que o signo substitui) está representado no signo". Desse modo, constatamos que o objeto imediato, conceito encontrado na semiótica peirceana, também está presente na teoria de Duval, pois está internamente nas representações semióticas, na formação de representação identificável, no tratamento e na conversão, uma vez que o objeto dinâmico é semelhante ao objeto apresentado por Duval e as representações semióticas são semelhantes aos signos. Em Peirce, o objeto depende do ponto de vista e do contexto que estamos trabalhando, ou seja, o objeto em semiótica possui um dinamismo, ele não é fixo, por sua vez, na teoria de registro de representação semiótica o objeto é somente o conceito matemático, ou seja, possui um único significado.

Por exemplo, o conceito de coordenadas de um ponto no espaço apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 - Coordenada de um ponto no espaço.

(O, I, J, K) é um referencial de $\mathscr{E}$.

- Para todo M de $\mathscr{E}$, existe um trio de números reais (x; y; z) tal que:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$$

- (x; y; z) é chamada de trio de coordenadas $\begin{cases} do\ ponto\ M, no\ referencial\ (O, I, J) \\ do\ vetor\ \overrightarrow{OM}, na\ base\ (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \end{cases}$

Fonte: Hamaty et al. (1999, p. 241, tradução nossa).

Diante do conceito de coordenada de ponto no espaço, segundo a teoria de Registro de Representação Semiótica, observamos que esta é uma representação semiótica, uma maneira de atingir o objeto, o conceito. Além disso, podemos afirmar que esta representação é um signo, de acordo com a teoria peirceana, e que o conceito que queremos atingir é o objeto dinâmico. Nesse contexto, podemos afirmar também que o objeto imediato é este que está na representação semiótica, as palavras e os símbolos que estamos enxergando no papel.

Ao tratar da distinção epistemológica fundamental e do primeiro esquema de análise do conhecimento presente em sua teoria, Duval (2011, p. 16) diz que "o primeiro esquema de análise do conhecimento se desenvolveu com base na oposição epistemológica entre a representação de um objeto e o objeto representado". Diante desta afirmação, podemos sugerir que os termos, representação de um objeto e objeto representado~~,~~ são, respectivamente, objeto imediato e objeto dinâmico, visto que a essência da representação do objeto está presente no objeto representado. Sugerimos também que~~,~~ a representação do objeto pode ser a representação semiótica e o objeto representado é o objeto matemático. Por exemplo, levando em consideração o **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, temos a representação do objeto "coordenada de ponto no espaço", que pode ser considerada como objeto representado, a representação semiótica do objeto.

Além do mais, em semiótica peirceana, o objeto é diferente do signo e na teoria de Duval o objeto é diferente da representação semiótica. Isso resulta em mais uma semelhança entre as duas teorias. Considerando o **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, temos que o objeto, o conceito de coordenadas de ponto no espaço, é diferente do signo, do que foi apresentado no papel, ou seja, o conceito de coordenadas de ponto no espaço é diferente da representação semiótica que foi apresentada.

Todavia, Peirce trata dos objetos do signo e, em contraste com ele, Duval trata das representações semióticas do objeto.

Por conclusão própria, as representações semióticas são signos, visto que para Duval (2011, p. 23), "os signos são as representações porque eles não devem jamais ser confundidos com os objetos aos quais eles se referem".

Entretanto, o autor declara que "os signos são radicalmente diferentes das representações em sua relação com os próprios objetos que não é uma relação de causalidade, mas~~,~~ uma relação de referência" (DUVAL, 2011, p. 23). Não concordamos com esta declaração, porque se as representações definidas por ele são signos, logo as relações dos signos com os objetos devem ser iguais.

Na teoria de Registro de Representação Semiótica, Duval afirma que os estudantes de matemática apreendem os objetos matemáticos somente por meio dos registros de representação semiótica, e na teoria semiótica vimos que os indivíduos pensam apenas por meio de signos, resultando em outra semelhança entre as teorias. Entretanto, destacamos que mesmo fazendo esta analogia, consideramos a teoria de Duval limitada em relação a teoria de Peirce. Isso porque o signo peirceano pode explicar todos os processos de apreensão em geral, ao passo que a teoria de Duval explica somente a apreensão dos objetos matemáticos. Nesse sentido, nas palavras de Duval, temos:

> As produções dos alunos em matemática são produções semióticas. Elas se fazem pelo menos em dois registros, em que um deles é a

> linguagem na modalidade oral e/ou escrita. Sua análise e sua interpretação devem, portanto, seguir a mesma regra metodológica que aquela que comanda a análise das produções matemáticas: não podemos no concentrar em um único registro e privilegiá-lo como mais representativo que os outros, pois a compreensão se situa no nível da coordenação de pelo menos dois registros.
>
> Os registros permitem identificar todas as variáveis relativas aos processos cognitivos que comandam a compreensão em matemática. A tomada de consciência dessas variáveis é essencial para organizar sequências didáticas de atividades ou para fazer os alunos entrarem no funcionamento de uma resolução matemática de problemas e na maneira matemática de formular um problema com base em dados observados na realidade. (2011, p. 149-150)

Entretanto, conforme as palavras de Peirce em Buchler (1955, p. 99), temos:

> A sign, or representamen, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the interpretant of the first sign. The sign stands for something, its object. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representamen. "Idea" is here to be understood in a sort of Platonic sense, very familiar in everyday talk; I mean in that sense in which we say that one man catches another man's idea, in which we say that when a man recalls what he was thinking of at some previous time, he recalls the same idea, and in which when a man continues to think anything, say for a tenth of a second, in so far as the thought continues to agree with itself during that time, that is to have a like content, it is the same idea, and is not at each instant of the interval a new idea.[50]

Além do mais, observamos que o interpretante, termo apresentado por Peirce, é semelhante à posição em que se encontra o aluno, na dualidade apresentada por Duval, objeto e registro de representação.

Para Peirce, em Buchler (1955, p. 280-281),

---

[50] Um signo, ou *representamen*, é algo que representa algo para alguém, em algum aspecto ou capacidade. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. A este signo criado chamo de interpretante do primeiro signo. O signo representa algo, seu objeto. Representa o objeto, não em todos os aspectos, mas em referência a um tipo de ideia, que eu, às vezes, chamo de base do representamen. "Ideia" está aqui para ser entendida em uma espécie de sentido platônico, muito familiar na conversa cotidiana, quero dizer no sentido em que dizemos que um homem pega ideia de outro homem, em que dizemos que quando um homem relembra o que ele estava pensando em algum momento anterior, relembra a mesma ideia, a medida que um homem continua a pensar nada, digamos, por um décimo de segundo, na medida em que o pensamento continua a concordar com ele próprio, durante esse tempo, isto é, têm um teor semelhante, é a mesma ideia, e não é a cada instante do intervalo uma ideia nova (tradução nossa).

.

> In the next step of thought, those first logical interpretants stimulate us to various voluntary performances in the inner world. We imagine ourselves in various situations and animated by various motives; and we proceed to trace out the alternative lines of conduct which the conjectures would leave open to us. We are, moreover, led, by the same inward activity, to remark different ways in which our conjectures could be slightly modified. The logical interpretant must, therefore, be in a relatively future tense.
>
> To this may be added the consideration that it is not all signs that have logical interpretants, but only intellectual concepts and the like; and these are all either general or intimately connected with generals, as it seems to me. This shows that the species of future tense of the logical interpretant is that of the conditional mood, the "would-be".[51]

No contexto, concluímos que se a tríade peirceana for objeto, signo/representâmem e interpretante, logo, por conclusão própria, a "tríade" da teoria de Duval será objeto matemático, representação semiótica e indivíduo em processo de aprendizagem.

Em registro de representação semiótica, Semiose são as várias representações semióticas (maneira de apreender os conceitos), nos termos de Duval (1993, p. 39-41), temos: "Si on appelle **sémiosis** l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et **noésis** l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la *noésis* est inséparable de la *sémiosis*".[52]

Por outro lado, para Peirce,

> But by "semiosis" I mean, on the contrary, an action, or influence, which is, or involves, a cooperation of three subjects, such as a sign, its object, and its interpretant, this tri-relative influence not being in any way resolvable into actions between pairs. (CP 5.484) [53]

---

[51] Na próxima etapa do pensamento, os interpretantes lógicos primeiro estimulam-nos a várias performances voluntárias no mundo interior. Nós nos imaginamos em várias situações e animados por vários motivos, e passamos a traçar as linhas alternativas de conduta que as conjecturas deixariam abertas para nós. Nós somos, além disso, levados, pela mesma atividade interna, a observar diferentes maneiras em que as nossas conjecturas podem ser ligeiramente modificadas. O interpretante lógico deve, portanto, estar relativamente em um tempo futuro. Para isso pode ser adicionada a consideração de que não são todos os signos que têm interpretantes lógicos, mas apenas conceitos intelectuais e similares, e estes são todos, geral ou intimamente ligado com os gerais, como parecem para mim. Isso mostra que a espécie de tempo futuro do interpretante lógico é do modo condicional, o "pretenso" (Tradução nossa).

[52] Se chamamos semiose a apreensão, ou a produção de uma representação semiótica, e noése a apreensão conceitual de um objeto, precisamos afirmar que a noése é inseparável da semiose (Tradução nossa).

[53] Mas "semiose" quer dizer, pelo contrário, uma ação, ou influência, que é ou envolve uma cooperação de três sujeitos, como um signo, seu objeto e seu interpretante, essa influência trirrelativa não é de nenhuma maneira solúvel por ações entre pares (Tradução nossa).

No contexto, semiose em Peirce são as ligações entre os signos (o processo do pensamento). Sendo assim, vimos que há uma relação entre a Semiose que se encontra na teoria de Duval com aquela da semiótica peirceana.

Conforme vimos no capítulo de semiótica peirceana, é seguida uma lógica triádica na qual não se atinge a segunda tricotomia sem passar pela primeira e não se atinge a terceira tricotomia sem passar pela segunda e assim sucessivamente. Nessas condições, as categorias da experiência também seguem a mesma lógica. Assim, vimos que, as categorias da experiência estão presentes na teoria de Duval quando, ao tratar da formação e da aprendizagem em matemática, o autor apresenta o seguinte questionamento: "como podemos ter acesso aos objetos por nós mesmos?". Esta questão evidencia o conflito entre o "eu" e o "existente", caracterizando os conceitos atribuídos por Peirce à categoria de secundidade. Esta característica não está presente somente nesse questionamento, como em outras falas de Duval, por exemplo na seguinte afirmação: "a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados, ou como podemos ter acesso a eles por nós mesmos" (DUVAL, 2011, p. 15).

No contexto, podemos afirmar que, se Duval fez uso da segunda categoria da experiência, logo ele fez uso da primeira categoria da experiência da semiótica peirceana.

Para Duval (2011, p. 32),

> O projeto de Peirce era descrever o papel das representações e dos signos, em todas as formas da atividade cognitiva, desde a da simples adaptação ao que se produz no ambiente próximo, até aquelas de exploração científica. A primeira questão que se colocava em tal projeto era a da classificação da diversidade de representação (supra, P1, P2). Pois, não serve para nada falar do papel das representações e dos signos nas diferentes formas da atividade cognitiva se não estamos em condições de distinguir o que de fato é a diversidade. A segunda questão era aquela, não de sua produção, mas de sua interpretação. Pois, muitas das representações se produzem ou são apresentadas perceptivelmente antes mesmo de toda atividade do sujeito. O conhecimento não consiste então em um processo de construção, mas de interpretação. Foi nessa perspectiva que ele retomou a definição clássica de signo, mas a ela juntando um novo elemento, o de sua interpretação...

Nesse contexto, concluímos que apesar de Duval criticar a semiótica peirceana e criar uma semiótica para explicar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, encontramos vestígios peirceanos em sua teoria, além daqueles que ele diz utilizar. Nessa perspectiva, questionamos: será que a semiótica peirceana daria conta de explicar alguns aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática? Será que Duval fundamentou sua teoria em Peirce e não explicitou no Registro de Representação Semiótica?

Conforme as semelhanças apresentadas, podemos inferir que a teoria semiótica de Peirce é capaz de explicar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, como veremos nas analogias entre as Teorias de Registro de Representação e Semiótica de Peirce que apresentamos a seguir.

O Registro de Representação nos Termos de Peirce

Ao buscar respostas para nossas indagações, "será que a semiótica peirceana daria conta de explicar alguns aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática?" e "será que Duval fundamentou sua teoria em Peirce e não explicitou na teoria de Registro de Representação Semiótica?", analisaremos a teoria de Rayond Duval por meio da Semiótica de Peirce, especificamente, pelas três tricotomias de maior relevância (relação do signo consigo mesmo, relação do signo com o objeto e relação do signo com o interpretante) e das categorias universais (primeiridade, secundidade e terceiridade).

Assim, na sequência, apresentaremos uma análise da teoria de registro de representação semiótica, especificamente, as três ideias fundamentais ligadas à semiose, por meio das três tricotomias peirceanas de maior relevância. Para Peirce (2000, p. 211),

> TRICHOTOMIC is the art of making three-fold divisions. Such division depends on the conceptions of 1st, 2nd, 3rd. First is the beginning, that which is fresh, original, spontaneous, free. Second is that which is determined, terminated, ended, correlative, object, necessitated, reacting. Third is the medium, becoming, developing, bringing about.[54]

[54] Tricotômica é a arte de dividir em três partes. Essa divisão depende das concepções de 1º, 2º, 3º. O primeiro é o princípio, o que é fresco, original, espontâneo, livre. O segundo é o que é determinado, terminado, finalizado, correlativo, objeto, necessário, reagindo. O terceiro é o meio, tornando-se, desenvolvendo, trazendo (Tradução nossa).

No contexto, com a finalidade de buscar respostas para os questionamentos em questão, usamos apresentamos uma analogia da primeira tricotomia peirceana com a teoria de registro de representação semiótica.

Primeira Tricotomia – signo em relação a si mesmo

Nesse tópico, apresentaremos uma analogia dos elementos responsáveis pela ideia de registro de representação semiótica, a) formação de representação identificável; b) tratamento e c) conversão, com a primeira tricotomia peirceana, que possui as classificações de signo, i. qualissigno, ii. sinsigno e iii. legissigno.

Peirce, em carta endereçada a Lady Welby em 12 de outubro de 1904, refere que:

> As it is in itself, a sign is either of the nature of an appearance, when I call it a qualisign; or secondly, it is an individual object or event, when I call it a sinsign (the syllable sin being the first sillable [sic] of semel, simul, singular, etc); or thirdly, it is of the nature of a general type, when I call it a legisign. (PEIRCE, 1977, p. 32).[55]

No contexto, apresentamos a análise por meio de uma analogia da formação de representação identificável.

a) Formação de Representação Identificável – pode ser um qualissigno quando um indivíduo reconhece a qualidade de uma determinada representação.

Diante do exposto, ao tratarmos a formação de representação identificável como signo, observamos que a análise a seguir é a relação da formação de representação identificável nela mesma: Qualissigno – o sentimento que brota num indivíduo, quando está diante de uma representação.

i. Sinsigno – pode ser a existência de uma representação.
ii. Legissigno – pode ser uma representação que tem o caráter de uma lei que administra acontecimentos particulares.

De modo geral, esta análise apresenta como atingir a formação de representação identificável.

Na sequência, apresentamos a análise do tratamento por meio da primeira tricotomia peirceana.

---

[55] Como é em si mesmo, um signo ou é da natureza de uma aparição, quando eu chamo-o de qualissigno, ou por outro, é um objeto individual ou evento, quando eu o chamo de sinsigno (a sílaba procede mal sendo a primeira silaba [sic] da *semel*, *simul*, singular, etc.), ou em terceiro lugar, é da natureza de um tipo geral, quando eu o chamo de legissigno (Tradução nossa).

b) Tratamento – pode ser um sinsigno, quando existe a transformação de uma representação nela mesma.

No contexto, ao considerarmos o tratamento como signo, observamos que a análise a seguir é a relação do tratamento nele mesmo:

i. Qualissigno – pode ser uma simples qualidade de transformação de uma representação nela mesma, bem como o sentimento que envolve um indivíduo, quando está diante de uma transformação interna a uma representação.

ii. Sinsigno – pode ser quando existe a possibilidade de transformação de uma representação nela mesma.

iii. Legissigno – pode ser a ação de transformação de uma representação nela mesma.

A seguir, apresentamos a análise da conversão por meio da primeira tricotomia peirceana.

c) Conversão – pode ser um legissigno, quando aplica a lei que governa a transformação de uma representação em outra.

Considerando a conversão como signo, a análise a seguir trata da relação da conversão nela mesma:

i.Qualissigno – pode ser a qualidade de transformar uma representação em outra, é o sentimento que envolve um indivíduo, quando está diante da transformação de uma representação em outra.

ii.Sinsigno – está presente, quando existe a possibilidade de transformar uma representação em outra.

iii.Legissigno – pode ser uma lei que governa os processos de ensino e de aprendizagem.

Na sequência, apresentaremos, a fim de buscar repostas aos questionamentos tecidos, uma análise da teoria de registro de representação semiótica por meio da segunda tricotomia peirceana.

Segunda Tricotomia – signo em relação ao objeto

Neste tópico, apresentaremos uma analogia dos elementos responsáveis pela ideia de registro de representação semiótica em função da segunda tricotomia peirceana, que possui as classificações de signo, i. ícone, ii.

índice e iii. símbolo. Esta análise será apresentada nesta ordem: a) formação de representação identificável; b) tratamento e c) conversão.

a) Formação de Representação Identificável – pode ser um ícone quando faz referência ao objeto matemático, cujo significado é dado meramente em relação aos caracteres próprios e que possui.

Nesse contexto, considerando a formação de representação identificável como signo e o objeto matemático como objeto, observamos que a análise a seguir é a relação da formação de representação identificável com o objeto.

i. Ícone – quando apresenta as unidades e as regras de formação que são próprias do registro semiótico em que a representação é produzida.

ii. Índice – quando apresenta as condições de identificação e reconhecimento da representação e a possibilidade de utilização pelos tratamentos.

iii. Símbolo – são regras de conformidade.

Na sequência, temos a análise do tratamento em relação ao objeto.

b) Tratamento – pode ser um índice, quando se refere a um objeto matemático em função de ser afetado pelo mesmo.

Nesta análise, consideramos o tratamento, como signo e o objeto matemático, como objeto.

i. Ícone – quando se refere a um objeto matemático, cujo significado é atribuído basicamente em função dos caracteres próprios que existem em cada transformação interna ao registro.

ii. Índice – quando se refere a um objeto matemático cuja transformação interna ao registro está em função de ser afetada pelo mesmo.

iii. Símbolo – quando se refere a um objeto matemático e a transformação interna ao registro é uma associação de ideias, é uma lei.

A seguir, temos a análise da conversão em relação ao objeto.

c) Conversão – pode ser um símbolo, quando faz referência a um objeto matemático, e as transformações de um registro em outro estão em função de uma associação de ideias gerais, de uma lei.

No contexto, considerando a conversão como signo, e o objeto matemático como objeto:

i. Ícone – quando se refere a um objeto matemático, cujo significado é atribuído basicamente em função dos caracteres próprios que existem em cada transformação de um registro a outro.

ii. Índice – quando se refere a um objeto matemático, cuja transformação de um registro a outro está em função de ser afetada pelo mesmo.

iii. Símbolo – quando se refere a um objeto matemático e a transformação de um registro a outro é uma associação de ideias, é a fonte de conhecimento no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Na sequência, com o propósito de buscar respostas para nossos questionamentos, apresentaremos uma análise da Teoria de Registro de Representação semiótica por meio da terceira tricotomia peirceana.

<u>Terceira Tricotomia – signo em relação ao interpretante</u>

Neste tópico, apresentaremos uma análise, por meio das analogias dos elementos responsáveis pela ideia de registro de representação semiótica pela terceira tricotomia peirceana, que possui as classificações de signo, i. rema, ii. dicente e iii. argumento. Esta análise será apresentada nesta ordem: a) formação de representação identificável; b) tratamento e c) conversão.

No contexto, considerando a formação de representação identificável como signo e o indivíduo em processo de aprendizagem como interpretante, observamos que a análise a seguir é a relação da Formação de Representação Identificável com o interpretante.

a) Formação de Representação identificável – pode ser um rema, quando sugerimos que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias de determinados objetos matemáticos.

i. Rema – quando conjecturamos que as funções de unidades e das regras de formação são particulares de determinados objetos matemáticos.

ii. Dicente – quando as funções de unidades e das regras de formação da representação são reconhecidas pelos indivíduos no instante em que eles estão visualizando a mesma representação.

iii. Argumento – quando inferimos que reconhecemos todas as características, bem como as funções das unidades e regras de formação da representação.

Na sequência, considerando o tratamento como signo e o indivíduo em processo de aprendizagem como interpretante, observamos que a análise a seguir é a relação do tratamento com o interpretante.

b) Tratamento – pode ser um dicente quando a transformação interna ao registro é realizada no instante que nasce a ideia de transformação.

i. Rema – quando conjecturamos ou hipoteticamente pensamos ou dizemos que é necessário realizar transformações internas ao registro.

ii. Dicente – quando realizamos transformações internas ao registro no instante que pensamos na mesma transformação.

iii. Argumento – quando inferimos que devemos parar de realizar as transformações internas ao registro.

A seguir, considerando a conversão como signo e o indivíduo em processo de aprendizagem como interpretante, observamos que a análise a seguir é a relação da conversão com o interpretante.

c) Conversão – pode ser um argumento quando inferimos e concluímos que devemos transformar um registro de partida em um registro de chegada.

i. Rema – quando sugerimos que devemos mudar de registro.

ii. Dicente – quando transformamos um registro em um outro no instante que pensamos em mudar de registro.

iii. Argumento – quando inferimos que o número de transformações externas ao registro é suficiente para apreender o objeto matemático.

Diante do exposto, observamos que, pelo menos, as três tricotomias peirceanas de maior relevância foram satisfatórias para analisar os elementos responsáveis pela ideia de registro de representação semiótica da Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval, uma vez que não realizamos uma análise com as outras sete tricotomias. Nessa perspectiva, retomando nosso questionamento, "será que a semiótica peirceana daria conta de explicar alguns aspectos dos processos de ensino e aprendizagem da matemática?" Teoricamente, podemos respondê-lo, afirmando que, a análise realizada com as três tricotomias peirceanas, a princípio, aponta que a semiótica pode explicar alguns aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, pelo menos, aqueles conceitos da semiose de Duval correspondentes às três tricotomias de Peirce.

No contexto, seguindo nossa análise da teoria de Registro de Representação Semiótica, especificamente das três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose, formação de representação identificável, tratamento e conversão, apresentaremos uma análise por meio das categorias da experiência de Charles Sanders Peirce: primeiridade, secundidade e terceiridade.

Diante dos conceitos de Peirce, vimos que a formação de representação identificável de Duval é análoga à categoria de primeiridade.

Ao apresentar as atividades cognitivas de representação inerente à semiose, Duval (1995, p. 36), refere que:

> La première est évidemment la **formation** de représentations dans un registre sémiotique particulier, soit pour <<exprimer>> une représentation mentale, soit pour <<évoquer>> un objet réel. Cette formation implique toujours une sélection dans l'ensemble des caractères et des déterminations qui constituent ce que l'on <<veut>> représenter.[56]

Peirce (1977, p. 24) apresenta, em uma carta endereçada a Lady Welby em 12 de outubro de 1904, a seguinte definição de primeiridade: "Firstness is the mode of being of that which is such as it is, positively and without reference to anything else"[57].

Nesse sentido, observamos que existem pontos em comum entre as definições de formação de representação identificável e primeiridade. Ambos os conceitos respeitam a individualidade do objeto, apresentam-no ele tal como ele é, uma vez que a formação de representação identificável exprime uma representação mental, evoca um objeto real tal como ele é; e a primeiridade, é o modo de ser, tal como ela é, de maneira positiva e sem referência a qualquer outra coisa.

Além disso, de acordo com nossa análise da teoria de Peirce, vimos que o tratamento de Duval é análogo à secundidade. Duval (1995, p. 36), afirma

---

[56] A primeira é evidentemente a formação de representação em um registro semiótico particular, seja para "exprimir" uma representação mental, seja para "evocar" um objeto real. Esta formação implica sempre uma seleção no conjunto dos caracteres e das determinações que constituem o que "queremos" representar (Tradução nossa).

[57] Primeiridade é o modo de ser do que é tal como é, de forma positiva e sem referência a qualquer outra coisa (Tradução nossa).

que: “Nous parlerons dans ce cas de <<traitement>> lorsque la transformation produit une autre représentation dans le même registre”[58].

Peirce (1977, p. 24-25) apresenta, na mesma carta endereçada à Lady Welby, a seguinte definição de secundidade:

> Secondness is the mode of being of that which is such as it is, with respect to a second but regardless of any third. […] The type of an idea of Secondness is the experience of effort, prescinded from the idea of a purpose. It may be said that there is no such experience, that a purpose is always in view as long as the effort is cognized. [59]

Diante destas definições, observamos que há similaridade entre os termos tratamento e secundidade, já que para realizar transformações internas a um registro é preciso fazer um esforço, nesse caso mental. Este esforço é dual e conscientizado, visto que ele age sobre a mente de um indivíduo e um registro de representação, cujo propósito é atingir a solução de um problema ou o resultado de uma equação, por exemplo. Nesse sentido, o tratamento é tal como ele é, em relação a um segundo, que é um indivíduo que pensa, mas independente de um terceiro, que é a conversão.

Observamos também que sempre vai existir um processo dual, de secundidade nos processos de ensino e de aprendizagem, pois sempre haverá o indivíduo que pensa e o objeto a ser pensado. Confirmando nossas observações, encontramos no trabalho de Silva e Almeida (2009) a análise de uma atividade de Modelagem Matemática, mostrando o tratamento da teoria de Registro de Representação Semiótica, no nível de secundidade da teoria de Peirce. Nas palavras das próprias autoras (2009, p. 11), temos:

> Para definir o problema, foi feito um tratamento no interior do registro em língua natural apresentado [...].
> A partir do Palpite estabelecido partiu-se para o reconhecimento do problema a ser estudado. Essa etapa corresponde ao modo de inferência de abdução Pista, pois os alunos evidenciaram a existência de algum fenômeno a ser estudado e, na categorização de Peirce, encontram-se na Secundidade.

---

[58] Neste caso, nós falaremos de <<tratamento>> quando a transformação produz uma outra representação no mesmo registro (Tradução nossa).

[59] Secundidade é o modo de ser do que é tal como é, em relação a um segundo, mas independentemente de qualquer terceiro [...] O tipo de uma ideia de Secundidade é a experiência de esforço, prescindido da ideia de um propósito. Pode-se dizer que não há tal experiência, que um objetivo é sempre em vista, desde que o esforço seja reconhecido (Tradução nossa).

Além dessas observações, conforme os conceitos de Peirce, observamos que a conversão, termo apresentado por Duval, está de acordo com a categoria de terceiridade.

Duval (1995, p. 36), define conversão da seguinte forma: “Et nous parlerons alors de <<conversion>> lorsque la représentation produit une représentation d’un autre registre que la représentation initiale” [60].

Por sua vez, Peirce (1977, p. 24) apresenta na carta endereçada a Lady Welby em 12 de outubro de 1904, a seguinte definição de terceiridade: “Thirdness is the mode of being of that which is such as it is, in bringing a second and third into relation to each other” [61].

Diante dos termos, conversão e terceiridade, observamos que existe analogia entre eles, uma vez que não há como converter uma representação em uma outra sem interação entre um indivíduo pensante e um objeto matemático. Além disso, sugerimos que há outra analogia entre os termos, quando consideramos a conversão das representações, como uma lei para a apreensão dos objetos matemáticos. Confirmando nossas observações, encontramos a análise de uma atividade de Modelagem Matemática no trabalho de Silva e Almeida (2009), mostrando a conversão da teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval, no nível de terceiridade da teoria de Peirce, como podemos observar nas palavras das próprias autoras:

> Para a dedução e obtenção do modelo matemático, a dupla de alunos fez uma conversão do registro em língua natural da situação-problema [...] para o registro gráfico [...].
> [...] como o registro gráfico foi construído seguindo uma lei, na significação, é um legi-signo e na objetivação é um símbolo. Considerando a idéia de Santaella (2007) que a “terceiridade diz respeito à generalidade” (p. 7), para a definição desse registro, os alunos encontram-se na categoria fenomenológica da Terceiridade (p.12).

Ao tratar da metodologia que a Teoria de Registro de Representação Semiótica foi desenvolvida, Duval (2011, p. 151), afirma que:

> ela foi desenvolvida utilizando a conversão como ferramenta de análise de variações de representações sistematicamente efetuadas em um

---

[60] E nós falaremos então de “conversão” quando a representação produz uma representação de um outro registro que a representação inicial (Tradução nossa).

[61] Terceiridade é o modo de ser daquilo que é tal como é, colocando um segundo e um terceiro em relação um ao outro (Tradução nossa).

> registro. Ela constitui um dispositivo de observação que permitiu identificar os fenômenos persistentes de incompreensão que não tinham sido ainda observados, porque eles não são diretamente observáveis na espontaneidade das trocas em aula ou pelas únicas interpretações matemáticas de produções dos alunos. Ela permitiu desenvolver novas atividades cujo objetivo era a tomada de consciência de operações semiocognitiva próprias à matemática. E os resultados obtidos levaram a novas questões e a novas explorações. Segundo a feliz afirmação de Marlene Alves Dias, "a teoria dos registros é a sua própria metodologia". Ela não é uma hipótese ou uma explicação.

No contexto, observamos que a conversão é a atividade cognitiva de maior relevância nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática.

Em contraste com Marlene Alves Dias, não concordamos que a teoria dos registros seja sua própria metodologia, pois ela é uma metodologia de ensino e não uma metodologia para as teorias, ou seja, não é um método para todas as ciências tal qual a teoria semiótica de Peirce. Além do mais, se assim fosse considerada, ela seria uma analogia da teoria semiótica de Peirce, que é um método para toda e qualquer ciência.

Duval discute três conceitos ligados à conversão, que são: congruência, não congruência e heterogeneidade nos dois sentidos. Assim, podemos sugerir que estes termos estão relacionados com a segunda categoria da experiência de Peirce, uma vez que para se chegar à terceiridade, o indivíduo passa por um conflito no ato de apreensão do objeto e da representação que estão em jogo.

Além disso, a congruência e a não congruência no instante da conversão, ou seja, a primeira é quando a representação de partida é mais ou menos transparente à representação de chegada e o contrário disso, a segunda, é quando a conversão de partida não transparece à representação de chegada. No entanto, ambos os termos podem ser um signo, ou objeto, ou interpretante dependendo do ponto de vista que estamos levando em consideração. Por exemplo, a congruência e a não congruência são um signo quando representa o objeto matemático para um indivíduo. Por sua vez, elas podem ser um objeto quando ela é uma ferramenta de apreensão do conteúdo matemático e um interpretante quando apresentam a ideia do que vem a ser o objeto matemático.

A heterogeneidade nos dois sentidos da conversão, ou seja, quando a conversão nem sempre se efetua ao inverterem os registros de partida e o de chegada, também pode ser um signo, ou objeto, ou interpretante dependendo do ponto de vista que estamos considerando. Por exemplo, a heterogeneidade nos dois sentidos da conversão é um signo quando representa o objeto matemático para um indivíduo. Entretanto, ela pode ser um objeto quando é uma ferramenta de apreensão do conteúdo matemático e um interpretante quando apresenta a ideia do que vem a ser o objeto matemático.

O sistema semiótico de Raymond Duval, ou seja, a coleção de traços, a coleção de símbolos, a coleção de escritas algébricas, também pode ser um signo, ou um objeto, ou interpretante dependendo do ponto de vista considerado. Por exemplo, ele pode ser um signo quando apresenta a representação semiótica do objeto matemático para um indivíduo. No entanto, o sistema semiótico pode ser um objeto quando é uma ferramenta de acesso à representação semiótica e um interpretante quando apresenta a ideia do que vem a ser a representação semiótica do objeto matemático em questão.

Assim, observamos que a congruência, a não congruência, a heterogeneidade nos dois sentidos da conversão e o sistema semiótico estão de acordo com os mesmos termos peirceanos, signo, objeto e interpretante.

Diante do que foi apresentado~~,~~ e tentando responder a questão “por que Duval nomeia a sua teoria de registro de representação semiótica?”, podemos sugerir que a teoria leva este nome pelo fato de seus termos estarem de acordo, ou terem relação, com termos da semiótica, conforme apresentado no decorrer do capítulo de análise das teorias em questão.

Duval apresenta o termo noése em sua teoria, o qual não encontramos em Peirce de modo explícito, com a mesma nomenclatura, tal qual encontramos o termo semiose. Entretanto, conforme o conceito de noése apresentado por Duval (1993, p. 39) “Si on appelle *sémiosis* l’appréhension, ou la production, d’une représentation sémiotique, et *noésis* l’appréhension conceptuelle d’un objet, il faut affirmer que la *nosésis* est inséparable de la *sémiosis*”[62]; percebemos que este termo é análogo ao signo da teoria semiótica de Charles Sanders Peirce. Isso porque, se signo é

> A sign is a third mediating between the mind addressed and the object represented. If the thirdness is undegenerate, the relation of the sign to

[62] Se a gente chamar semiose a apreensão, ou a produção, de uma representação semiótica, e noese a apreensão conceitual de um objeto, precisamos afirmar que a noese é inseparável da semiose (Tradução nossa).

> the thing signified is one which only subsist by virtue of the relation of the sign to the mind addressed; that is to say, the sign is related to its object by virtue of a mental association. Conventional modes of expression, and other modes dependent on the force of association, enter largely into every art. They make up the bulk of language. If the thirdness is degenerate in the first degree, the sign mediates between the object and the mind by virtue of dynamical connections with the object on the one hand and with the mind on the other. (PEIRCE, 2000, p. 212).[63]

Então, a noése apresentada por Duval, apreensão conceitual de um objeto, é análoga ao signo de Peirce, uma vez que a apreensão precisa de um terceiro mediador, o aluno. A relação da apreensão, do aluno, com o objeto só existem em virtude da relação do signo, de Peirce, com uma mente abordada, ou seja, o signo está se relacionando com o objeto em virtude de uma associação mental. Além do mais, a noése está de acordo com a terceira categoria da experiência de Peirce, com a terceiridade, visto que o signo medeia o objeto e o aluno, em virtude das ligações dinâmicas de um lado e da mente de outro.

Ao discutir a noése, Duval (1993) evidencia três conceitos, economia de tratamento, complementaridade de registros e conceitualização, buscando resposta à seguinte questão: qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano?

Diante disso, vimos à necessidade de apresentarmos uma analogia dos conceitos, economia de tratamento, complementaridade de registros e conceitualização, por meio das três tricotomias peirceanas de maior relevância, o signo em relação a si mesmo, o signo em relação ao objeto e o signo em relação ao interpretante, bem como por meio das categorias da experiência, primeiridade, secundidade e terceiridade.

Assim, a seguir, apresentaremos uma análise da teoria de registro de representação semiótica, especificamente as três ideias fundamentais ligadas à noese por meio da primeira tricotomia peirceana.

Primeira Tricotomia – signo em relação a si mesmo

---

[63] Um signo é um terceiro mediando entre a mente endereçada e o objeto representado. Se a terceiridade não é degenerada, a relação do signo com a coisa significada é aquela que só subsiste em virtude da relação do signo com a mente endereçada, isto é, o signo está relacionado ao seu objeto em virtude de associações mentais. Modos convencionais de expressão, e outros modos de dependentes da força de associação, em grande parte, entram em todas as artes. Eles compõem a maior parte da linguagem. Se a terceiridade é degenerada em primeiro grau, o signo faz a mediação entre o objeto e a mente em virtude de ligações dinâmicas com o objeto de um lado e com a mente do outro. (tradução nossa)

Nesse tópico, apresentaremos uma analogia dos elementos da apreensão conceitual de um objeto, da noése, com os elementos da primeira tricotomia peirceana, que possui as classificações de signo, i. qualissigno; ii. sinsigno; e iii. legissigno. Esta analogia será apresentada nessa ordem: a) economia de tratamento; b) complementaridade de registro; e c) conceitualização.

a) Economia de tratamento – pode ser um qualissigno quando um indivíduo reconhece a qualidade de uma determinada economia de tratamento, ou seja, quando um indivíduo reconhece a qualidade diante de uma expressão matemática ingênua ou próxima de sua língua natural.

Diante do exposto, ao considerarmos a economia de tratamento como signo, observamos que a análise a seguir é a relação da economia de tratamento nela mesma:

i. Qualissigno - o sentimento que brota num indivíduo quando está diante de uma representação ingênua ou próxima da língua natural.

ii. Sinsigno – pode ser a existência de uma representação ingênua ou próxima da língua natural.

iii. Legissigno – pode ser uma representação que possui o caráter de uma lei que administra acontecimentos particulares da economia de tratamento, ou seja, representação ingênua ou próxima da língua natural.

A analogia apresentada, de modo geral, mostra como atingir a economia de tratamento. Na sequência, apresentamos a analogia da complementaridade de registro por meio da primeira tricotomia peirceana.

b) Complementaridade de Registro – pode ser um sinsigno quando existe o complemento de uma representação.

Considerando a complementaridade de registro como signo, observamos que a análise a seguir é a relação da complementaridade de registro nela mesma:

i. Qualissigno – pode ser uma simples qualidade de complemento de uma representação nele mesmo, bem como o sentimento que envolve um indivíduo quando está diante do complemento de uma representação.

ii. Sinsigno – pode ser quando existe a complementaridade de um registro de representação.

iii. Legissigno – pode ser o efeito que a complementariedade de registro causa, de modo geral, num indivíduo.

Na sequência, apresentamos a analogia da conceitualização por meio da primeira tricotomia peirceana.

c) Conceitualização – pode ser um legissigno quando governa a apreensão de um objeto por um indivíduo em pelo menos duas representações.

Diante do exposto, ao tratarmos a conceitualizaçao como signo, observamos que a análise a seguir é a relação da conceitualização nela mesma:

i. Qualissigno – pode ser a qualidade de apreensão de um objeto por meio de, pelo menos, duas representações, é o sentimento que abarca um indivíduo quando apreende um objeto por meio de, pelo menos, duas representações.

ii. Sinsigno – pode estar presente quando existe a possibilidade de apreensão de um objeto por meio de, pelo menos, duas representações.

iii. Legissigno – pode ser uma lei que governa a apreensão dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem.

Na sequência, apresentaremos uma análise dos termos da apreensão conceitual de um objeto por meio da segunda tricotomia peirceana.

<u>Segunda Tricotomia – signo em relação ao objeto</u>

Nesse tópico, apresentaremos uma analogia dos elementos da apreensão conceitual de um objeto, da noése, por meio da segunda tricotomia peirceana, que possui as classificações de signo, i. ícone; ii. índice; e iii. símbolo. Esta análise será apresentada nessa ordem: a) economia de tratamento; b) complementaridade de registro; e c) conceitualização.

a) Economia de Tratamento – pode ser um ícone quando faz referência ao objeto matemático de maneira ingênua ou próxima da língua natural, cujo significado é dado meramente em relação à sua característica ingênua e própria da língua natural.

Nesse contexto, considerando a economia de tratamento como signo e a apreensão do objeto como objeto, observamos que a análise a seguir é a relação da economia de tratamento com o objeto.

i. Ícone – quando faz referência a um objeto de maneira ingênua ou próxima da língua natural.

ii. Índice – quando apresenta uma representação que faz referência a um objeto de modo ingênuo ou por meio da língua natural.

iii. Símbolo – pode ser as representações ingênuas ou próximas da língua natural, uma vez que elas são como regras para a representação em economia de tratamento.

Na sequência, temos a analogia da complementaridade de registro em relação ao objeto.

b) Complementaridade de registro – pode ser um índice quando os complementos das representações fazem referência a um mesmo objeto matemático.

Considerando a complementaridade de registro como signo e a apreensão conceitual do objeto como objeto, observamos que a análise a seguir é a relação da complementaridade de registro com o objeto.

i. Ícone – quando o complemento de uma representação se refere a um objeto matemático, cujo significado é dado simplesmente em função dos caracteres próprios e que existe em cada complemento.

ii. Índice – quando o complemento de uma representação se refere a um objeto matemático que significa em função de ser afetado pelo mesmo.

iii. Símbolo – quando o complemento faz referência a um objeto matemático e o acesso à ele é unicamente por meio do complemento. Isto é, quando a apreensão de um objeto matemático é dada somente por meio dos complementos de registro, como uma lei de acesso aos objetos.

A seguir, temos a análise da conceitualização em relação ao objeto.

c) Conceitualização – pode ser um símbolo quando a apreensão de um objeto matemático faz referência a pelo menos duas representações, ou seja, quando a apreensão de um objeto matemático é dado por pelo menos duas representações semióticas, tal qual uma lei.

Considerando a conceitualização como signo e a apreensão conceitual do objeto como objeto, observamos que a análise a seguir é a relação da conceitualização com o objeto.

i. Ícone – quando pelo menos duas representações fazem referência a um objeto matemático, cujo significado é atribuído basicamente em função dos caracteres próprios e que existe em cada representação.

ii. Índice – quando pelo menos duas representações fazem referência a um objeto matemático e estão em função de ser afetadas pelo mesmo.

iii. Símbolo – quando a apreensão de um objeto matemático ocorre ao fazer referência à ao menos duas representações.

Na sequência, apresentaremos uma analogia dos termos da apreensão conceitual de um objeto por meio da terceira tricotomia peirceana.

Terceira Tricotomia – signo em relação ao interpretante

Nesse tópico, apresentaremos uma analogia dos elementos da apreensão conceitual de um objeto, da noése, por meio da terceira tricotomia peirceana, que possui as classificações de signo, i. rema; ii. dicente; e iii. argumento. Esta análise será apresentada nessa ordem: a) economia de tratamento; b) complementaridade de registro; e c) conceitualização.

a) Economia de tratamento – pode ser um rema quando sugerimos que determinadas representações ingênuas ou próximas da língua natural são próprias de determinados objetos matemáticos.

Nesse contexto, considerando a economia de tratamento como signo e o indivíduo que no processo de apreensão do objeto como interpretante, observamos que a análise a seguir é a relação da economia de tratamento com o interpretante.

i. Rema – quando conjecturamos que as representações ingênuas ou próximas da língua natural são particulares de determinados objetos matemáticos.

ii. Dicente – quando as representações ingênuas ou próximas da língua natural são reconhecidas pelos indivíduos no instante que eles estão visualizando a mesma representação.

iii. Argumento – quando inferimos que reconhecemos as representações ingênuas ou próximas da língua natural de determinados objetos matemáticos.

Na sequência, temos a analogia da complementaridade de registro em relação ao interpretante.

b) Complementaridade de registro – pode ser um dicente quando o complemento de um registro é dado no instante que o indivíduo percebe a necessidade de mais um registro.

Considerando a complementaridade de registro como signo e o indivíduo que no processo de apreensão do objeto como interpretante, observamos que a análise a seguir é a relação da complementaridade de registro com o interpretante.

i. Rema – quando conjecturamos ou hipoteticamente pensamos ou dizemos que é necessário ter um complemento de um dado registro.

ii. Dicente – quando desenvolvemos o complemento de um registro no instante que pensamos na falta de entendimento que ele causa.

iii. Argumento – quando inferimos que devemos ter mais um complemento de um registro para compreendermos determinado objeto matemático.

Na sequência, temos a analogia da conceitualização em relação ao interpretante.

c) Conceitualização – pode ser um argumento quando inferimos e concluímos que apreendemos determinados objetos matemáticos com ao menos dois registros de representação.

Considerando a conceitualização como signo e o indivíduo que no processo de apreensão do objeto como interpretante, observamos que a análise a seguir é a relação da conceitualização com o interpretante.

i. Rema – quando sugerimos que compreendemos determinados objetos com três registros de representação.

ii. Dicente – quando temos dois registros e percebemos que vamos compreender um objeto matemático no instante que pensamos num terceiro registro.

iii. Argumento – quando inferimos que apreendemos o objeto matemático com pelo menos dois registros de representação.

Diante deste cenário, observamos que pelo menos as três tricotomias peirceanas de maior relevância foram satisfatórias para analisar os elementos da apreensão conceitual de um objeto, da noése, da teoria de registro de representação semiótica de Duval, uma vez que não realizamos uma análise e nem analogia com as outras sete tricotomias. Nesse sentido, retomando nosso questionamento, “será que a semiótica peirceana daria conta de explicar alguns aspectos dos processos de ensino e aprendizagem da matemática?”, podemos afirmar que, a análise realizada com as três tricotomias peirceanas apotam que a semiótica pode explicar alguns aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, pelo menos aqueles conceitos da noése de Duval que correspondem às três tricotomias de Peirce.

Continuando nossa análise teórica, cabe realizar analogias da noése, isto é, economia de tratamento, complementaridade de registros e conceitualização, com as categorias da experiência de Charles Sanders Peirce: primeiridade, secundidade e terceiridade.

Nesse sentido, sugerimos que a economia de tratamento é semelhante a categoria de primeiridade, uma vez que é da qualidade de sentimento, vaga, que um indivíduo, em fase de aprendizagem, apreende uma representação economicamente tratada.

Ao apresentar a economia de tratamento, Duval (1993, p. 49) afirma que:

> l'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante. Il semble que cette réponse ait été explicitement exposée pour la première fois par Condillac dans le Langage des Calculs à propos de l'écriture des nombres et des notations algébriques. Elle montre, en termes de coût en mémoire, les limites très vite atteintes dans le registre de la langue naturelle pour les traitements de type calcul. Une telle réponse peut évidemment être étendue à d'autres traitements: les relations entre des objets peuvent être représentés de façon plus rapide, et plus simple à comprendre, par des formules littérales que par des phrases, comme c'est le cas par exemple pour les énoncés du livre V des Eléments sur les proportions (Euclide). [64]

Diante da afirmação de Duval, percebemos que a nossa conjectura se realiza quando a qualidade da representação, ou a qualidade da apreensão do objeto acontece de forma rápida.

Além do mais, vimos que a complementariedade de registro é análoga a categoria de secundidade, uma vez que é da existência do complemento de um registro que haverá aprendizado de determinado objeto matemático.

---

[64] A existência de vários registros permite mudar o registro, essa mudança de registro tem por objetivo permitir fazer tratamentos de uma forma mais econômica e mais potente. Parece que esta resposta foi explicitamente apresentada pela primeira vez por Condillac na "Linguagem dos a em cálculos" a propósito da escrita de números e notação algébricas. Ela mostra, em termos de custo de memória, os limites muito rapidamente alcançados no registro de linguagem natural para o tratamento do tipo de cálculo. Uma tal resposta pode obviamente ser ampliada a outros tratamentos: as relações entre objetos podem ser representadas de forma mais rápida e mais fácil de entender, por fórmulas literais que por frases, como é o caso das declarações no livro V dos Elementos Proporções (Euclides) (tradução própria).

Ao apresentar a complementariedade de registro, Duval (1993, p. 49-50) argumenta:

> cette réponse qui est davantage centrée sur les possibilités propres à chaque système sémiotique a été avancée plus récemment (Bresson, 1987). On peut la formuler ainsi: la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente. Cette sélection se fait en fonction des possibilités et des contraintes sémiotiques du registre choisi. Un langage n'offre pas les mêmes possibilités de représenation qu'une figure ou qu'un diagramme. Cela veut dire que toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés. [65]

Diante das palavras de Duval, observamos que nossa hipótese se confirma, em especial a questão do existente, quando ele diz "On peut la formuler ainsi: la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente" [66].

Por fim, observamos que a conceitualização está de acordo com a categoria de terceiridade, uma vez que a apreensão do objeto acontece por meio de ao menos duas representações, tal qual uma lei de apreensão.

Ao apresentar a conceitualização, Duval (1993, p.51) afirma que "la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion" [67]. Nesse sentido, observamos que a nossa conjectura se confirma nas palavras de Duval.

---

[65] Esta resposta que é mais centrada sobre as possibilidades próprias a cada sistema semiótico fui discutido recentemente (BRESSON, 1987). Pode-se formulá-la assim: a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção dos elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representamos. Esta seleção é feita em função das possibilidades e das exigências semióticas do registro escolhido. A língua não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto significa que toda representação é cognitivamente parcial em relação aquilo que ela representa e que de um registro para outro não são os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que são representados (Tradução nossa).

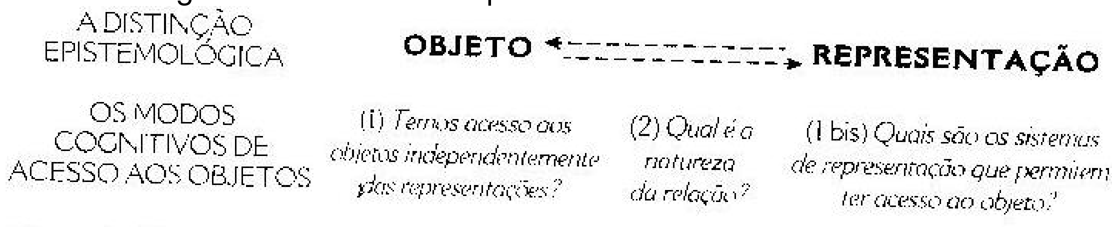
[66] Podemos a formular assim: a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que a gente representa (Tradução nossa).

[67] A compreensão (integrativa) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (Tradução nossa).

Nesse contexto, notamos que temos informações suficientes para responder os questionamentos que apresentamos no início deste tópico, “será que a semiótica peirceana daria conta de explicar aspectos dos processos de ensino e aprendizagem da matemática?” e “será que Duval fundamentou sua teoria em Peirce e não explicitou na teoria de Registro de Representação Semiótica?”. Respondendo a primeira questão, e fundamentado no resultado de nossa analogia teórica e na análise das categorias da experiência de Peirce, podemos afirmar que a semiótica peirceana pode explicar o processo de ensino e aprendizagem da matemática, pelo menos as três tricotomias de maior relevância e as categorias da experiência. Por sua vez, quanto a segunda questão, nada podemos afirmar, pois não temos informações suficientes para afirmar algo a respeito.

Para além do escopo dos últimos temas analisados, observamos que o primeiro esquema de análise do conhecimento de Raymond Duval apresenta a distinção epistemológica de objeto e representação, conforme a Figura 14 a seguir:

Figura 14 - Primeiro esquema de análise do conhecimento.

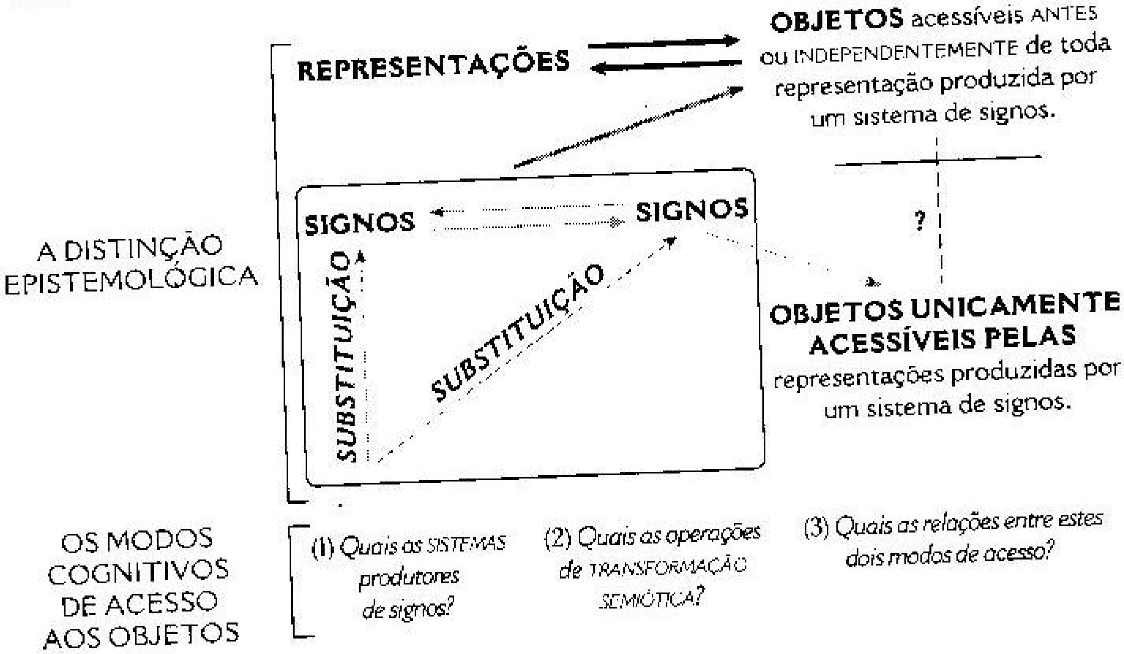


Fonte: Duval (2011, p. 19).

No esquema, ao tratar dos modos cognitivos de acesso aos objetos, Duval apresenta três questões: “temos acesso aos objetos independentemente das representações?”, “qual é a natureza da relação?”; e “quais são os sistemas de representação que permitem ter acesso ao objeto?”. Nesse sentido, observamos que o esquema está de acordo com a semiótica peirceana, especificamente com a tríade, signo, objeto e interpretante, uma vez que o objeto do esquema é tal qual o objeto dinâmico de Peirce e a representação é semelhante ao signo. Por sua vez, o interpretante são os modos cognitivos de acesso aos objetos, pois é o professor quem decidirá os modos cognitivos de acesso aos objetos. Entretanto, podemos afirmar que, a semiótica de Peirce está implícita no primeiro esquema de análise do conhecimento desenvolvida por Raymond Duval.

Além deste esquema, Duval (2011) apresenta o novo esquema de análise do conhecimento, conforme a Figura 15 a seguir:

Figura 15 - O novo esquema de análise do conhecimento.



Fonte: DUVAL, 2011, p. 26.

Observamos que no novo esquema de análise do conhecimento (Figura 15), na distinção epistemológica, representação e objeto, Duval (2011) apresenta uma dualidade de signos ao dizer que os objetos são “acessíveis antes ou independentemente de toda representação produzida por um sistema de signos”. Além disso, Duval (2011) acrescenta que, partindo da dualidade de signos resulta nos “objetos unicamente acessíveis pelas representações produzidas por um sistema de signos”.

No novo esquema, ao tratar dos modos cognitivos de acesso aos objetos, Duval apresenta três questões: “quais os sistemas produtores de signos?”, “quais as operações de transformação semiótica?”, e “quais as relações entre estes dois modos de acesso?”. Nesse sentido, observamos que as questões apresentadas pelo autor no primeiro esquema de análise do conhecimento, “temos acesso aos objetos independentemente das representações?”, “qual é a natureza da relação?”; e “quais são os sistemas de representação que permitem ter acesso ao objeto?”, são análogas às questões do novo esquema de análise do conhecimento. Isso porque, o termo sistemas produtores é semelhante a acesso aos objetos, signo é análogo à representação, a natureza da relação é semelhante às operações de transformação semiótica e as relações entre estes dois modos de acesso é análoga aos sistemas de representação que permitem acesso ao objeto.

Diante destas observações, podemos sugerir que o novo esquema de análise do conhecimento desenvolvido por Duval apresenta os termos semióticos, signo e objeto, de forma explícita, porém continua implícito o interpretante.

Neste último esquema, observamos que a dualidade de signos são as semioses de Charles Sanders Peirce, além disso, que esta depende do interpretante.

Diante deste cenário, observamos que o signo está presente em todos os conceitos apresentados por Duval. Entretanto, observamos também, que o signo peirceano possui um dinamismo, ele muda de posição de acordo com o contexto, e vimos que isso justifica a presença do signo em todos os termos da teoria de registro de representação semiótica.

Nesse contexto, ao analisar a teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval por meio da Semiótica de Charles Sanders Peirce, vimos à possibilidade de desenvolvemos um modelo signico que explique os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Conforme apresentamos no segundo capítulo, Bloch e Gibel concordam com a aplicação do signo de Peirce nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática. Para Bloch e Gibel (2011, p. 195),

> la sémiotique générale de C. S. Peirce est conçue pour l'étude de signes de nature très variée, et donc particulièrement adaptée aux mathématiques. De plus Peirce ne dissocie pas pensée et signe, et propose une interprétation dynamique du lien entre un signe et un objet, interprétation qui peut permettre de penser les changements de statut des symboles et des énoncés, en particulier dans un processus d'enseignement/apprentissage des mathématiques. Cette prise en compte de l'aspect dynamique permet également d'aller plus loin que l'étude de la simple mise en œuvre des registres de représentation: cet aspect est associe à la dimension opérationnelle des ostensifs

> mathématiques, c'est-à-dire à la possibilité qu'ils offrent de fabriquer de nouveaux signes par des règles plus ou moins algorithmiques.[68]

Assim, observamos que o discurso dos autores corrobora com a implementação do modelo sígnico que nos propomos desenvolver.

Para facilitar o desenvolvimento do modelo sígnico, resumimos a análise da teoria de Duval por meio da semiótica de Peirce no Quadro 7 a seguir:

Quadro 7 - Resumo da análise da teoria de Duval.

Registro de Representação Semiótica		**Semiótica**			**Modelo Signico em Peice**	**Classes do modelo signico**	**Categoria da Experiência de Peirce**	**Divisão das relações triádicas**	
Semiose	Noése	Signo-signo	Signo-objeto	Signo-interpretante	objeto, representação e aluno				
Formação de representação identificável	Economia de tratamento	Qualisisgno	Ícone	Rema	Qualissigno icônico remático	Primeira: Quali-signo	Primeiridade	Relação triádica de comparação	Possibilidade
Tratamento	Complementaridade de registro	Sinsigno	Índice	Discente	Sinsigno indicial discente	Quarta: sin-signo Discente	Secundidade	Relação triádica de desempenho	Existente
Conversão	Conceitualização	Legissigno	Símbolo	Argumento	Legissigno simbólico argumento	Décima: Argumento	Terceiridade	Relação triádica de pensamento	Lei

Fonte: Produção nossa.

No Quadro 7 apresentado relacionamos as teorias de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval com a Semiótica de Peirce, mostrando a correspondência de conceitos que há entre elas, especificamente nas cinco primeiras colunas da esquerda para a direita. Isto com base na análise Semiótica que foi apresentada ao longo deste capítulo.

Além disso, nos baseamos nos resultados das três colunas que competem à Semiótica e apresentamos o modelo sígnico em Peirce. Nesse

---

[68] A semiótica geral de C. S. Peirce é projetada para o estudo dos sinais de natureza variada e, portanto, particularmente adequado para a matemática. Além disso, Peirce não dissocia o pensamento e signo e propõe uma interpretação dinâmica da ligação entre um signo e um objeto, interpretação que pode permitir alterações do status de símbolos e de enunciados, em particular em um processo de ensino/ aprendizagem da matemática. Essa tomada em conta do aspecto dinâmico permite ir mais longe do que mera estudo dos registros de representação: este aspecto está associado com a dimensão operacional do ostensivos matemáticos, ou seja, a possibilidade que eles oferecem para fabricar novos signos a partir de regras mais ou menos algorítmicas. (tradução nossa)

sentido, com base neste modelo, descobrimos a divisão triádica após analisar a classificação dos signos apresentada por Peirce em seu livro “Semiotic and Significs: the correspondence” (1977, p. 161).

Figura 16 - Classificação dos signos apresentada por Peirce.

	Divisions 1. 2. 3.	Name (or Abbreviation of the name) of the Sign	Example
1.	a a a	Qualisign	A feeling of ‘redness’
2.	b a a	Iconic Sinsign	An individual diagram
3.	b b a	Rhematic Indexical Sinsign	A spontaneous cry
4.	b b b	Dicent Sinsign	A weathervane
5.	c a a	Iconic Legisign	A diagram abstracting its individuality
6.	c b a	Rhematic Indexical Legi-sign	A demonstrative pro-noun
7.	c b b	Dicent Indexical Legisign	A street cry
8.	c c a	Rhematic Symbol	A common noun
9.	c c b	Dicent Symbol	A proposition
10.	c c c	Argument	A syllogism.

Fonte: Peirce (1977, p. 161).

Feito isto, observamos em Peirce (2003), que a teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval está relacionada com somente três classificações do signo, a primeira, a quarta e a décima.

> Primeira: Um Qualissigno (e. g. uma sensação de “vermelho”) é uma qualidade qualquer, na medida em que for um signo. Dado que uma qualidade é tudo aquilo que positivamente é em si mesma, uma qualidade só pode denotar um objeto por meio de algum ingrediente ou similaridade comum, de tal forma que um Qualissigno é necessariamente um Ícone. Além do mais, dado que uma qualidade é uma mera possibilidade lógica, ela só pode ser interpretada como um signo de essência, isto é, como um Rema.
> Quarta: Um Sinsigno Dicente (e. g., um cata-vento) é todo objeto da experiência direta na medida em que é um signo e, como tal, propicia informação a respeito de seu Objeto, isto só ele pode fazer por ser realmente afetado por seu Objeto, de tal forma que é necessariamente um Índice. A única informação que pode propiciar é sobre um fato concreto. Um Signo desta espécie deve envolver um Sinsigno Icônico para corporificar a informação e um Sinsigno Indicial Remático para indicar o Objeto ao qual se refere a informação. Mas o modo de combinação, ou Sintaxe, destes dois também deve ser significante.
> Décima: Um Argumento é um signo cujo interpretante representa seu objeto como sendo um signo ulterior através de uma lei, a saber, a lei segundo a qual a passagem dessas premissas para essas conclusões tende a ser verdadeira. Manifestamente, então, seu objeto deve ser geral, ou seja, o Argumento deve ser um Símbolo. Como Símbolo, ele

> deve, além do mais, ser um Legissigno. Sua Réplica é um Sinsigno Dicente. (PEIRCE, 2003, p. 55)

Após estas considerações, mostramos a grosseira divisão triádica de Peirce (2003, p. 49), que segundo ele foi feita a título provisório e é imperfeitamente apreendida:

> Relação triádica de comparação são as que fazem parte da natureza das possibilidades lógicas. Relações triádicas de desempenho são as que fazem parte da natureza dos fatos reais. Relações triádicas de pensamento são as que fazem parte da natureza das leis.

Diante do exposto, podemos deduzir que os processos de ensino e aprendizagem de matemática podem ser fundamentados nas três classes de signos de Peirce, na primeira, na quarta e na décima.

Nesse sentido, podemos generalizar os conceitos de Duval da seguinte maneira:

1. A formação de representação semiótica e a economia de tratamento podem formar uma possibilidade de registro.
2. O tratamento e a complementariedade de registro podem formar a existência de um registro.
3. A conversão e a conceitualização podem formar a lei de aprendizado da matemática, a lei da diversidade de registro.

Diante do exposto, observamos que a teoria de Duval se apropria de três classes da teoria semiótica de Peirce, primeira, quarta e décima, que resultam da combinação das tricotomias, signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto e signo em relação ao interpretante. Assim, com base nessas considerações, desenvolvemos o seguinte modelo de análise semiótica peirceana para os processos de ensino e aprendizagem da matemática:

Quadro 8 - As classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Classes	**Termos semióticos envolvidos**	**Modelo semiótico para o ensino e a aprendizagem da matemática**
Primeira	Qualissigno icônico remático	Em Peirce: qualidade, similaridade e possibilidade. No ensino e na aprendizagem da matemática: reconhecimento das características do objeto matemático por meio da intuição.

Quarta	Sinsigno indicial dicente	Em Peirce: particularidade, causalidade, certeza. No ensino e na aprendizagem da matemática: realização de mudanças nas representações do objeto matemático por meio da identificação.
Décima	Legissigno simbólico argumento	Em Peirce: lei, arbitrariedade e certeza necessária. No ensino e na aprendizagem da matemática: resultado das mudanças realizadas nas representações do objeto matemático por meio do raciocínio dedutivo.

Fonte: Produção nossa.

Diante do Quadro 8, observamos que ele tem três colunas e três linhas. A primeira coluna corresponde às classes peirceanas, primeira, quarta e décima. A segunda coluna corresponde aos termos semióticos apresentados na primeira, quarta e décima classe. A terceira coluna corresponde ao modelo semiótico para o ensino e aprendizagem da matemática desenvolvido pela pesquisadora.

Este modelo foi desenvolvido com base nas teorias, Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e Semiótica de Charles Sanders Peirce. A elaboração do conceito para o ensino e para aprendizagem da matemática, que está na primeira linha e terceira coluna do Quadro 8, foi fundamentada nos conceitos de formação de representação identificável e na primeira classe de signo peirceano. Por sua vez, a elaboração do conceito apresentado na segunda linha e terceira coluna do Quadro 8 foi baseada no tratamento e Duval e na quarta classe peirceana. Por fim, a elaboração do conceito apresentado na terceira linha e terceira coluna do Quadro 8 foi fundamentada nos conceitos de conversão e décima classe peirceana.

CAPÍTULO IV

GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL: ESTUDO DE UM CORPUS DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo apresentaremos uma análise de alguns signos presentes na geometria analítica espacial, especificamente: o plano, o vetor e o ponto por meio das teorias de registro de representação semiótica de Raymond Duval e Semiótica de Charles Sanders Peirce, bem como pelo quadro que desenvolvemos das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da matemática. Particularmente, esta análise será realizada por meio da analogia das teorias de Duval e Peirce que corresponde à semiose, uma vez que trataremos dos objetos matemáticos.

Escolhemos trabalhar com os objetos da geometria analítica espacial porque nela encontramos diversos registros de representação semiótica, por exemplo: algébrica, gráfica, geométrica e linguagem natural. Além disso, porque a geometria analítica prepara os alunos para o estudo da álgebra linear.

Na sequência, apresentaremos trabalhos relacionados com a Geometria Analítica, os signos da geometria analítica espacial e as tarefas que consideramos ter difícil conversão.

4.1 Geometria Analítica

É inegável reconhecer a Geometria Analítica como primeira configuração de unificação do pensamento matemático que constitui uma preparação para a Álgebra Linear, que é considerada essencial na interligação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

A Geometria Analítica é de suma importância para os cursos de exatas, pois é considerada disciplina obrigatória nos cursos de Física, Química, Matemática, Arquitetura, Engenharias e Computação.

Nesse contexto, cabe salientar trabalhos realizados por pesquisadores que se preocupam com estas áreas do conhecimento, como o trabalho de Karrer (2006) desenvolvido em curso de Computação. Esta pesquisadora desenvolveu uma tese pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP, intitulada "Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica".

A pesquisa de Karrer teve por objetivo elaborar, aplicar e avaliar uma abordagem de ensino do objeto matemático "transformações lineares planas", incorporando conversão de registros (teoria desenvolvida por Raymond Duval) e o auxílio do *software* Cabri-Géomètre, focalizando as conversões envolvendo principalmente o registro gráfico.

O objeto matemático trabalhado pela pesquisadora compõe a ementa da disciplina de Álgebra Linear. A escolha deste está atrelada a três fatores; primeiro porque o objeto forma o alicerce inicial de estudos das transformações lineares; segundo porque trabalhar com plano proporciona a visualização resultante do trabalho com o registro gráfico no Cabri-Géomètre; e terceiro porque "o entendimento do mecanismo dos registros inerentes às transformações geométricas no plano é primordial para a extensão do estudo das transformações no espaço" (KARRER, 2006, p. 8).

Para dar conta dos objetivos de pesquisa, Karrer realizou análises de livros didáticos de Álgebra Linear referenciados nos cursos de Computação de universidades brasileiras, buscando verificar quais registros de representação semiótica são apresentados nos conteúdos de transformações lineares. Essa análise revelou que os livros examinados privilegiam os registros simbólico-algébrico e numérico, escasseando a exploração dos registros gráficos.

Além de analisar livros de Álgebra Linear, a pesquisadora estudou também as obras referenciadas na disciplina de Computação Gráfica, que pertence aos cursos de Ciência da Computação e Engenharia da Computação de universidade do país, sob o aspecto dos registros presentes e das conversões realizadas no conteúdo de transformações lineares. Essa análise mostrou que é essencial o domínio dos registros gráficos e matriciais aos alunos, além de conversões que iniciam de representações gráficas, aquelas que são pouco exploradas nos livros de Álgebra Linear.

Karrer (2006), não restringiu sua pesquisa apenas à análise de livros didáticos, ela realizou também uma pesquisa com alunos da área de Computação. O objetivo dessa pesquisa foi observar o desempenho dos estudantes que foram introduzidos ao conceito de transformação linear, ao cursarem Álgebra Linear, disciplina que antecede a Computação Gráfica.

Para realizar essa pesquisa, Karrer aplicou um questionário aos estudantes, contendo cinco questões sobre transformações lineares no plano, que procurou explorar a mobilização dos diversos registros e suas conversões. Posto isto, por meio deste questionário, a pesquisadora constatou que os alunos não possuíam uma apreensão satisfatória das várias representações e não dominavam a mobilização entre os vários registros apresentados.

Diante desse contexto, é exequível mencionar a importância do estudo de Geometria Analítica, visto que essa disciplina proporciona significativas contribuições para a Álgebra Linear e consequentemente para Computação Gráfica, segundo discurso encontrado no trabalho de Karrer.

Apresentada a importância da Geometria Analítica e os problemas que existem no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, é de se interrogar: quais problemas estão envolvidos diretamente no processo de ensino-aprendizagem de Geometria Analítica?

Buscando responder esta questão, toma-se nota do trabalho de Marcos Munhoz, intitulado “A impregnação do sentido cotidiano de termos Geométricos no Ensino/Aprendizagem da Geometria Analítica” que também foi desenvolvido no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP.

Em sua pesquisa, Munhoz (1999), discute os efeitos da utilização dos termos geométricos, dentre estes palavras com mais de um significado, na compreensão de conceitos e problemas da Geometria Analítica. Para dar início a essas discussões, o autor desenvolveu e aplicou um pré-teste para identificar e reconhecer os problemas de interpretação entre os estudantes de Geometria Analítica.

A aplicação do pré-teste revelou

> problemas conceituais relacionados a tópicos básicos da geometria. Estes problemas se manifestaram tanto no que se refere ao registro linguístico, através da dificuldade em formar frases com termos matemáticos, como no registro figural, pela inabilidade em reconhecer as representações de objetos geométricos. Este quadro leva os alunos a raciocínios ambíguos como classificar um objeto de acordo com critérios relativos, desconsiderando, por vezes suas principais propriedades (MUNHOZ, 1999, p. 22-23).

O trabalho de Munhoz tem por objetivo “investigar se alguns termos geométricos, mais utilizados em Geometria Analítica, têm seu significado impregnado por seu sentido cotidiano” (1999, p. 6). Para dar conta disso, o pesquisador apresentou um estudo pormenorizado dos termos geométricos homonímicos e polissêmicos capazes de conturbar a compreensão da Geometria Analítica.

O estudo de Munhoz conclui que “a impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos usados na Geometria Analítica é um fator que pode estar contribuindo para algumas das dificuldades dos estudantes nessa matéria” (1999, p. 102). Além disso, o autor evidenciou com sua pesquisa, outros fatores relacionados aos problemas de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, como o fato de muitos estudantes não compreenderem satisfatoriamente a representação de um objeto matemático. Isso o pesquisador constatou quando os estudantes reconheciam espontaneamente as arestas, os vértices e as diagonais de um sólido geométrico, apenas na presença da figura concreta, mostrando-se inseguros quando se deparavam com a simples representação no papel.

Visto que os problemas de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica estão relacionados ao mau uso dos termos geométricos em situações do cotidiano, e a não compreensão dos alunos das representações dos objetos matemáticos, pode-se pensar numa pesquisa que explore as várias representações semióticas de Geometria Analítica na busca de retratar a semiótica peirceana na teoria de registro de representação semiótica, procurando contribuir com melhorias à teoria de Duval e, consequentemente, ao ensino de Geometria Analítica. Diante disso, foi que propomos estudar os objetos plano, reta, vetor e ponto de Geometria Analítica no espaço.

Nos próximos tópicos apresentaremos a análise e categorização dos objetos, plano, vetor e ponto no espaço por meio da analogia das teorias de Duval e Peirce, bem como por meio do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, que foram apresentados no capítulo anterior. Após a análise, pretendemos verificar quais signos peirceanos são apropriados para analisar os registros de representação semiótica e qual semiótica é apropriada para explicar a matemática e seu ensino.

4.2 Signos da Geometria Analítica

Neste tópico apresentamos os signos plano, vetor e ponto da geometria analítica plana e espacial. Para Longo (1999, p. 32),

> l'hypothèse afirme que le seul calcul des signes dépourvus de signification peut permettre de reconstruire a posteriori tout raisonnement mathématique, et d'en dégager le fondement logico-formel; ses défenseurs reconnaissent cependant la pluralité des formes de déduction (la fameuse "créativité mathématique") qui, après seulement, c'est-à-dire a posteriori, doivent pouvoir se réinscrire au seul niveau formel. [69]

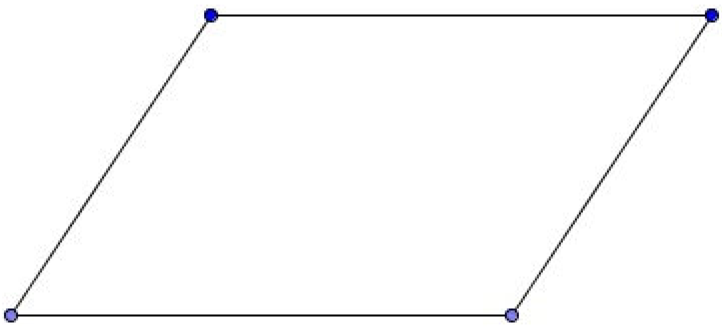
O objetivo deste tópico é mostrar a aplicação da análise teórica apresentada no capítulo anterior e como funcionam os signos plano, vetor e ponto da geometria analítica nos processos de ensino e de aprendizagem. Assim, iniciamos nossa apresentação discutindo a respeito do conflito, ou obstáculo, que pode gerar no estudo do plano, como a diferença entre um paralelogramo e um plano.

Observamos a figura 17:

---

[69] A hipótese afirma que apenas o cálculo dos signos desprovidos de significação pode permitir reconstruir a posteriori de todo o raciocínio matemático, e de identificar o fundamento lógico-formal, seus defensores reconhecem, entretanto, a pluralidade das formas de dedução (a formosa "criatividade matemática") que, depois somente, quer dizer, a posteriori, deve poder ser capaz de reinscrever-se no nível formal.

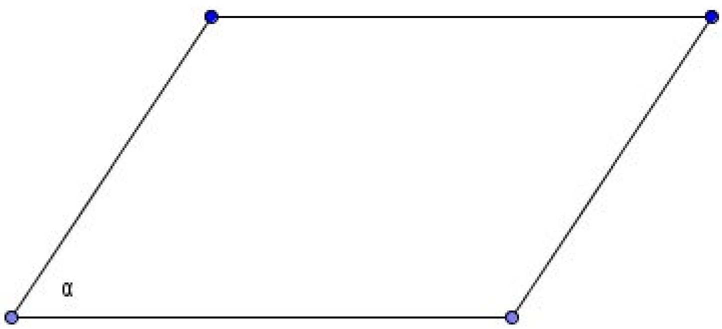
Figura 17 - Paralelogramo.



Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

Ao apresentar esta figura para uma classe universitária, certamente os estudantes que conhecem as figuras planas nomearão de paralelogramo. Este reconhecimento dos estudantes pode ser um qualissigno no instante que ele se lembra das qualidades de um paralelogramo. Além disso, este reconhecimento pode pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que para tal atividade podemos intuir.

Figura 18 - Plano.



Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

Quando o professor escreve α num dos quatro cantos da figura, provavelmente os alunos que desconhecem o plano afirmarão que esta figura continua sendo um paralelogramo, porém os alunos que conhecem as qualidades do signo ‘plano’ assim o nomearão. Este reconhecimento dos alunos pode pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, porque o reconhecimento pode ocorrer por meio da intuição. Contudo, os alunos que afirmam que a figura ainda é um paralelogramo também estarão corretos, porque as qualidades dos signos se confundem quando o professor modifica o pequeno detalhe, a escrita do α. A esta confusão, ou melhor, a esta pequena modificação na figura podemos chamar de sinsigno. Além do mais, podemos dizer que a identificação da escrita do α pode pertencer à quarta classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática. O momento que os estudantes afirmam que a figura mudou de quadro, ou ainda, quando eles afirmam que a

Figura **17** é um paralelogramo e que a Figura 18 é um plano, a classe semiótica predominante é o legissigno. Além do mais, a classe do nosso modelo das classes de signos peirceanas que pode estar presente nesta situação é a décima, porque a afirmação dos estudantes pode estar atrelada ao raciocínio dedutivo.

Entretanto, na relação do signo com o objeto, a figura do paralelogramo e do plano podem ser ícones quando os estudantes reconhecem as unidades e as regras que compõem o paralelogramo e o plano.

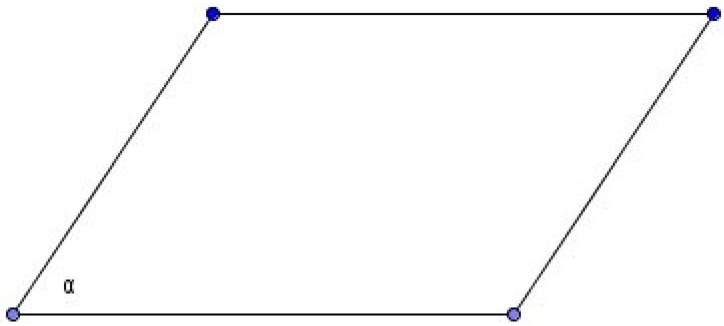
As figuras do paralelogramo e do plano podem ser índices quando os estudantes percebem que as figuras são representações dos conceitos de paralelogramo e plano. No entanto, as figuras podem ser símbolo quando os estudantes abstraem as diferenças existentes entre um paralelogramo e um plano.

Por sua vez, na relação do signo com o interpretante, o paralelogramo e o plano podem ser um rema quando os estudantes reconhecem as unidades e as regras de formações próprias dos objetos matemáticos paralelogramo e plano.

O plano pode ser um dicente quando os estudantes reconhecem o plano no instante que o professor escreve α na figura que representa o paralelogramo. Por fim, o plano pode ser um argumento quando os estudantes reconhecem que para construí-lo é preciso iniciar sua construção por meio da figura de um paralelogramo.

Em outra situação, quando o professor apresenta e afirma que a figura seguinte é um plano da geometria analítica espacial, os estudantes, que não conhecem o espaço vetorial, visualizarão que a Figura 19 é uma figura plana. Sendo assim, esta situação gera um conflito, ou obstáculo técnico[70], na apreensão do plano da geometria analítica espacial.

Figura 19 - Plano da geometria analítica espacial.



Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

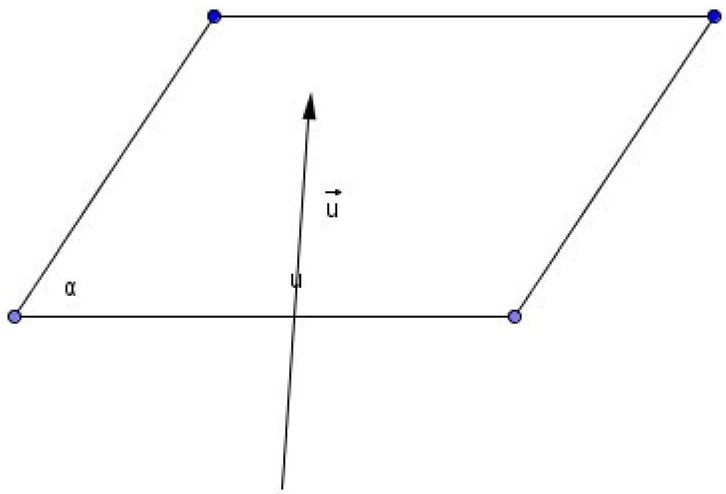
Observamos que a diferença visível entre a figura do plano da geometria analítica plana e da figura do plano da geometria analítica espacial é a palavra "espacial". Nesse caso, a figura do plano espacial é um signo de difícil visualização pelos estudantes. O plano espacial pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade deste signo. Este reconhecimento das qualidades pode pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, porque ele pode ser gerado pela intuição. Todavia, o plano da geometria analítica plana e o plano espacial que apresentamos não são passíveis de tratamento e nem de conversão, logo não são sinsignos e nem legissignos, além de não pertencerem a quarta e a décima classe do nosso modelo das classes peirceanas. Isso porque não há como realizar transformações internas nas figuras do plano da geometria analítica

[70] Os obstáculos técnicos que se apresentam, também, como causa de erros ou da incapacidade de compreender certos problemas surgem quando a complexidade da tarefa está acima da capacidade de atenção do aluno. (Almouloud 2007, p. 145).

plana e plano espacial. Além disso, porque não aconteceu conversão figural e nem podemos afirmar que a “conversão” da palavra “plana” para “espacial” que apresentamos nas figuras como uma transformação de uma representação de partida para uma representação de chegada, pois não há uma lei que governa esta transformação.

Quando o professor apresenta a Figura 20 aos estudantes e afirma que o vetor está no plano não há conflito aparente. Todavia, quando o professor afirma que o vetor $\vec{u}$ é uma classe de equipolência ou conjunto de segmentos orientados de reta que possui a mesma direção, a mesma intensidade ou norma ou módulo e o mesmo sentido, ele pode gerar um conflito, ou melhor, um obstáculo ontogênico[71], para os estudantes. Isso porque os estudantes que desconhecem a definição de vetor visualizam somente uma seta nomeada de $\vec{u}$.

Figura 20 - Plano e vetor no plano.



Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

Observamos que a visão dos estudantes não está incorreta porque o signo vetor é de difícil visualização, pois na **Observamos que** a diferença visível entre a figura do plano da geometria analítica plana e da figura do plano da geometria analítica espacial é a palavra “espacial”. Nesse caso, a figura do plano

[71] Os obstáculos de origem ontogênica aparecem pelas limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em certo momento de seu desenvolvimento. A teoria de Piaget indica a impossibilidade de desenvolver um cálculo formal quando o indivíduo se encontra no estágio das operações concretas. A exigência do uso correto da linguagem e dos símbolos matemáticos pode, também, criar esse tipo de obstáculo. (BROUSSEAU, 1993, p. 177 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 145).

espacial é um signo de difícil visualização pelos estudantes. O plano espacial pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade deste signo. Este reconhecimento das qualidades pode pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, porque ele pode ser gerado pela intuição. Todavia, o plano da geometria analítica plana e o plano espacial que apresentamos não são passíveis de tratamento e nem de conversão, logo não são sinsignos e nem legissignos, além de não pertencerem a quarta e a décima classe do nosso modelo das classes peirceanas. Isso porque não há como realizar transformações internas nas figuras do plano da geometria analítica plana e plano espacial. Além disso, porque não aconteceu conversão figural e nem podemos afirmar que a "conversão" da palavra "plana" para "espacial" que apresentamos nas figuras como uma transformação de uma representação de partida para uma representação de chegada, pois não há uma lei que governa esta transformação.

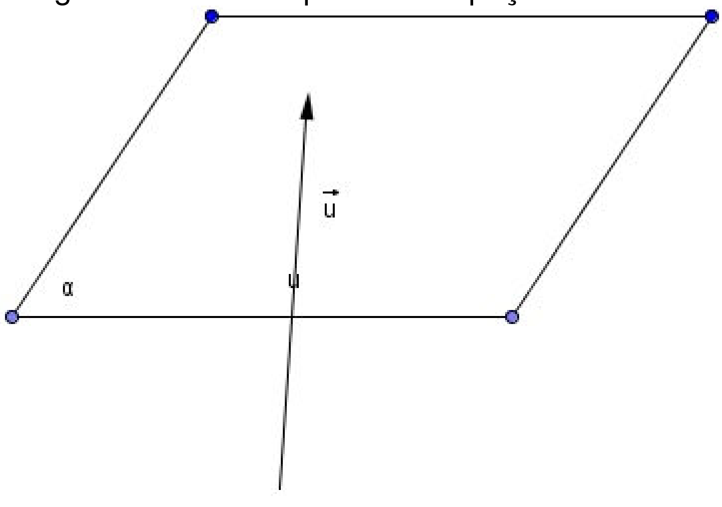
Quando o professor apresenta a Figura 20 aos estudantes e afirma que o vetor está no plano não há conflito aparente. Todavia, quando o professor afirma que o vetor $\vec{u}$ é uma classe de equipolência ou conjunto de segmentos orientados de reta que possui a mesma direção, a mesma intensidade ou norma ou módulo e o mesmo sentido, ele pode gerar um conflito, ou melhor, um obstáculo ontogênico, para os estudantes. Isso porque os estudantes que desconhecem a definição de vetor visualizam somente uma seta nomeada de $\vec{u}$.

Figura **20** o que enxergamos é um paralelogramo, um α, um vetor e um $\vec{u}$. Assim, observamos que o vetor pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem as qualidades que estão inseridas na representação do mesmo. Este reconhecimento das qualidades pode pertencer a primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que ele pode ser intuído. O vetor pode ser um sinsigno dependendo da representação, por exemplo: a nomenclatura $\vec{u}$ é uma representação de vetor e não é passível de tratamento, ela pode ser um ícone e não um sinsigno, porém o segmento orientado, ou melhor, o vetor, é passível de tratamento sempre que é modificada a direção, a intensidade e/ou o sentido. Nesse caso, a seta que representa o vetor pode ser um sinsigno e pertencer à quarta classe do nosso modelo das classes peirceanas, porque as mudanças no vetor podem ser realizadas pela identificação das mesmas. A transformação da seta que representa o vetor em $\vec{u}$ ou a transformação de $\vec{u}$ na seta que representa o vetor pode ser um legissigno e pertencer à décima classe do nosso modelo, porque para a realização de tal transformação os estudantes devem conhecer a lei que governa esta transformação, ou melhor, devem saber o que é um vetor e como ele é representado, além de saber nomeá-lo por meio da nomenclatura específica, uma letra minúscula sob uma seta direcionada para a direita.

Além dessas considerações, observamos que o segmento orientado está contido no plano e que esta conjectura é de fácil visualização para os estudantes.

Na Figura 21 observamos que não ocorrem modificações visuais entre a representação do vetor e do plano e a representação do vetor e do plano no espaço. Dessa forma, notamos que esta falta de modificação visual da representação espacial do vetor e do plano gera um conflito, ou obstáculo técnico, para os estudantes.

Figura 21 - Vetor e plano no espaço.

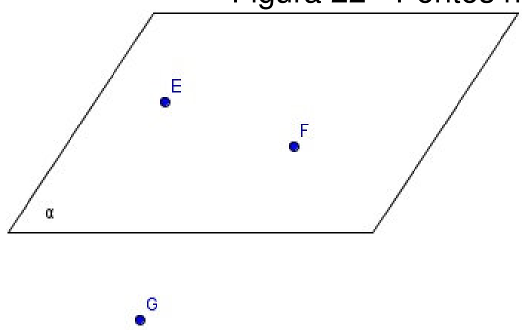


Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

Notamos que a representação espacial do vetor no plano, ou seja, que a representação do vetor no espaço é de difícil visualização para os estudantes, porque observando a Figura 21 não podemos afirmar se o vetor está contido no plano, ou se ele está paralelamente ao plano, ou se ele é ortogonal ao plano. Além do mais, o vetor no espaço é distinto do vetor na representação plana, ainda que se enxerguem semelhanças entre as representações. Dessa forma, o vetor no espaço pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade desta representação. Este reconhecimento dos alunos pode pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, porque ele pode ser gerado pela intuição. Nesse sentido, tanto o vetor no espaço quanto o vetor representado no plano são passíveis de configurações ópticas, logo estes vetores podem ser sinsignos e pertencer à quarta classe do nosso modelo das classes peirceanas, porque estas configurações podem ser obtidas por meio da identificação. Por sua vez, o vetor no espaço pode ser um legissigno quando ocorre a transformação do vetor representado no plano para o vetor representado no espaço, por exemplo. Esta transformação, que realizada por meio do raciocínio dedutivo, pode pertencer à décima classe do nosso modelo. Entretanto, é importante ressaltar que o vetor no espaço pode ser um legissigno somente quando os estudantes reconhecem a lei que governa a transformação de uma representação para outra, a diferença entre as características da representação plana e as características da representação espacial bem como a característica da transformação de uma para outra, por exemplo.

Na **Erro! Autoreferência de indicador não válida.** temos pontos apresentados no plano e de maneira aparente não encontramos conflitos ou obstáculos nesta representação.

Figura 22 - Pontos no plano.

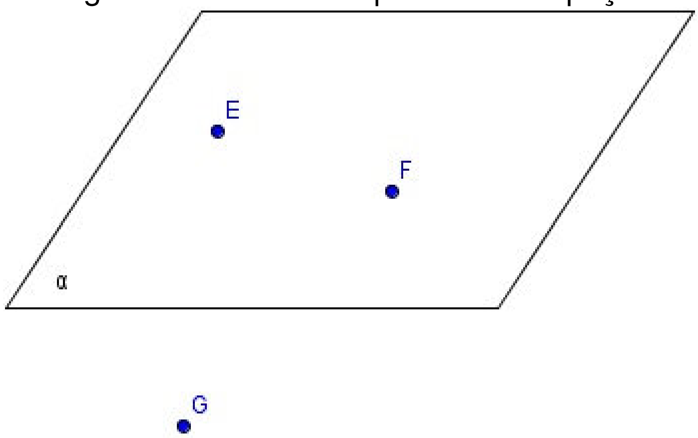


Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

Observamos que os pontos E e F estão contidos no plano e que o ponto G não está contido no plano. Assim, notamos que os pontos no plano podem ser qualissignos quando os estudantes reconhecem as qualidades dos mesmos, além de poder pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática. Além disso, observamos também que os pontos no plano não são passíveis de tratamento uma vez que não é possível realizar transformações neles próprios. Assim, podemos sugerir que os pontos no plano não são sinsignos e nem pertencem à quarta classe do nosso modelo, porque não há identificação de mudanças. No entanto, percebemos também que os pontos no plano não podem ser legissignos, porque não é possível transformar estes pontos em outra representação, e nem pertencer à décima classe do nosso modelo, uma vez que não haverá mudanças realizadas por meio do raciocínio dedutivo.

Na **Erro! Autoreferência de indicador não válida.** temos a representação espacial de pontos no plano. Nesta representação os estudantes podem encontrar conflitos, ou melhor, obstáculos técnicos, no processo de apreensão da mesma.

Figura 23 - Pontos no plano e no espaço.



Fonte: Construção nossa realizada com o auxílio do Software Geogebra, versão 3.2.41.0.

Observamos a representação espacial de pontos no plano e sugerimos que os estudantes que desconhecem a definição de ponto no espaço, afirmarão, provavelmente, que os pontos E e F estão contidos no plano. Nesse caso, em nosso ponto de vista, esta afirmação não está errada uma vez que é isso mesmo que estamos enxergando na representação. Além disso, os estudantes podem afirmar também que o ponto G não está contido no plano. Entretanto, notamos que estas observações configuram-se como conflitos, ou melhor, obstáculos técnicos~~,~~ que prejudicam o processo de ensino e aprendizagem da representação espacial de pontos no plano. Assim, sugerimos que a representação espacial de pontos no plano é um signo que possui difícil interpretação, no qual seu interpretante deve conhecer as semioses do objeto dinâmico para sua apreensão.

Nesse contexto, observamos que a representação espacial de pontos no plano pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem as qualidades da representação espacial de pontos no plano, além de poder pertencer à primeira classe do modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da Matemática, devido o reconhecimento que pode ser intuído. Notamos também que os pontos no espaço não são passíveis de tratamento e nem de conversão. Logo, a representação espacial de pontos no plano não pode ser um sinsigno e nem um legissigno e~~,~~ consequentemente, não podem pertencer à quarta e nem à décima classe do nosso modelo das classes peirceanas, porque não haverá identificação de mudanças e nem mudanças realizadas pelo raciocínio dedutivo.

De maneira geral, sugerimos que os qualissignos são responsáveis pela caracterização das representações, que os sinsignos são responsáveis pelas mudanças na própria representação e que os legissignos são os responsáveis pela mudança de uma representação à outra. Além disso, sugerimos que estas conjecturas servem para os demais signos: ícone, índice, símbolo, rema, dicente e argumento.

Nesse contexto, observamos que o modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da matemática nos auxilia a encontrar as inferências das ações realizadas nesses processos. As inferências são as operações mentais que os indivíduos realizam para chegarem a uma conclusão, que são extraídas de novas proposições daquelas já conhecidas, chamas de premissas.

Sugerimos também, que o paralelogramo, os planos no plano e no espaço, o vetor e os pontos no plano e no espaço são signos icônicos no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, sugerimos que os ícones contribuem para o ensino da matemática de maneira sutil, uma vez que os ícones dificultam a visualização das figuras planas e espaciais. Para resolver o problema da visualização sugerimos o estudo destas figuras num software de geometria dinâmica, pois no dinamismo o estático se torna símbolo, especificamente a representação espacial do plano, do vetor e do ponto.

Na sequência, apresentamos os signos da geometria analítica que encontramos num livro didáticos francês, especificamente em num livros do BAC (baccalauréat). Segundo o Guia do Estudante e do Pesquisador Brasileiro na França de 2012,

> O primeiro diploma nacional de um estudante francês é o baccalauréat (ou simplesmente Bac), obtido após o término dos 12 anos de estudo iniciais (primaire + collège + lycée). O Bac pode ser comparado ao ENEM brasileiro (Exame Nacional do Ensino Médio, com o mesmo conteúdo para todos).

A escolha do livro aconteceu no estágio que a pesquisadora desta tese realizou com a professora doutora Isabelle Bloch na IUFM d´Aquitainne em Pau Pyrennes em abril do ano 2013. A pesquisadora escolheu o livro didático "Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques" devido à diversidade de registros e a qualidade da escrita dos termos da geometria analítica. Os fatores que influenciam a escolha do livro são significativos para a elaboração do trabalho quando nos lembramos da pesquisa de Karrer (2006), que ao analisar livros didáticos de transformação linear, concluiu que os livros pesquisados privilegiavam os registros simbólico-algébrico e numérico, e de forma escassa a exploração dos registros gráficos.

4.3 Signos da Geometria Analítica que Encontramos em Livros Didáticos

Neste tópico apresentamos a análise de alguns corpus da geometria analítica espacial que encontramos no didático Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques, como definições, fórmulas e atividades que consideramos signos de difícil apreensão no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, iniciamos nossa análise com a definição de produto escalar no espaço vetorial.

Diante das definições dos livros que tomamos como base de estudo, quando temos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os pontos A, B, C, os vetores podendo ser escritos na forma $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, chamamos de produto escalar dos vetores

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ o número real $\vec{u}\cdot\ \vec{v}$ definido pelas duas sentenças: 1) $\vec{u}\ \cdot\ \vec{v} = 0$, se um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo; e 2) $\vec{u}\ \cdot\ \vec{v} = \ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \widehat{BAC}$, se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não forem nulos.

Esta definição é um qualissigno em relação ao objeto produto escalar no espaço vetorial porque apresenta as qualidades e as funções das unidades e das regras de formação próprias deste objeto. Além disso, o produto escalar é um qualissigno quando os estudantes reconhecem as qualidades do mesmo, ou seja, a sua definição.

A representação $\vec{u}\cdot\ \vec{v}$ é um ícone do objeto produto escalar, enquanto as sentenças 1 e 2 são índices do produto escalar. Todavia, a operação $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$ é uma lei, uma associação de ideias gerais, ou seja, um símbolo. Nesse caso, podemos afirmar que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são sígnos que pertencem ao produto escalar.

Fundamentados na terceira tricotomia peirceana, salientamos que a representação $\vec{u}\cdot\ \vec{v}$ é um rema quando sugerimos que suas funções de unidades e regras de formação são próprias do produto escalar. Entretanto, observamos que a representação $\vec{u}\cdot\ \vec{v}$ não é um discente e nem um argumento, uma vez que não podemos realizar um tratamento e nem uma conversão nesta representação.

O produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{u}$, ou seja, $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ é chamado quadrado escalar de $\vec{u}$, e pode ser representado por $\vec{u}^2$, ou seja, $\vec{u}^2 = \ x^2 + y^2 + z^2$. O quadrado escalar é igual a norma de $\vec{u}$ elevado ao quadrado, ou seja, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, que extraindo a raíz quadrada de ambos os membros da igualdade, $\sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\|\vec{u}\|^2}$, temos como resultado $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ ou $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$. Este resultado é a definição da norma de $\vec{u}$, ou seja, uma proposição que afirma que a norma de $\vec{u}$ será sempre igual à raiz quadrada de $\vec{u}\cdot\vec{u}$ ou a raiz quadrada de $\vec{u}^2$.

Observamos que o escalar de $\vec{u}$ por ele mesmo, $\vec{u}\cdot\vec{u}$, é um qualissigno quando suas qualidades são reconhecidas, é um sinsigno quando $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$ e é um legissigno quando ocorre a transformação de $\vec{u}\cdot\vec{u}$ para $\vec{u}^2$, ou reconhecimento de que $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$. Nesse caso, a representação $\vec{u}^2$ é um ícone da representação $\vec{u}\cdot\vec{u}$. Contudo, a representação $\vec{u}\cdot\vec{u}$ é um índice de $\vec{u}^2$. Podemos chamar de símbolo a lei que governa a realização do produto $\vec{u}$ escalar $\vec{u}$ igual a $\vec{u}^2$, a multiplicação escalar dos vetores.

Nesse contexto, destacamos que o escalar $\vec{u} \cdot \vec{u}$ é um rema quando sugerimos que as funções de unidades e regras de formação são próprias do objeto produto escalar. Ainda mais, não só ressaltamos que o escalar $\vec{u} \cdot \vec{u}$ é um dicente quando as transformações internas desse registro são realizadas no instante que nasce a ideia de transformação, como também destacamos que o escalar $\vec{u} \cdot \vec{u}$ é um argumento quando inferimos e concluímos que devemos transformá-lo em $\vec{u}^2$.

Além dessas considerações, observamos que a expressão $x^2 + y^2 + z^2$ é um qualissigno quando um estudante reconhece a qualidade da expressão, ou seja, as características, bem como a formação de representação identificável da mesma. Entretanto, esta expressão não é um sinsigno, pois não existe uma maneira de realizar transformações internas a ela, ou seja, não podemos realizar um tratamento. Porém, a expressão $x^2 + y^2 + z^2$ pode ser transformada, ou representada, como $\vec{u} \cdot \vec{u}$, possibilitando assim a transformação de uma representação em outra, ou seja, possibilitando a realização de uma conversão, resultando num legissigno.

Observamos também que a expressão $x^2 + y^2 + z^2$ é um índice de $\vec{u} \cdot \vec{u}$, e que o inverso $\vec{u} \cdot \vec{u}$ é um ícone de $x^2 + y^2 + z^2$. Logo, o inverso destas representações pertence à mesma classe de signo, especificamente a classe signo em relação ao objeto, porém cada representação é um signo diferente, numa direção é índice e na outra é ícone. Por outro lado, a lei que governa a passagem de $\vec{u} \cdot \vec{u}$ para $x^2 + y^2 + z^2$ é um símbolo, ou seja, a igualdade entre os escalares de $\vec{u}$ e a expressão.

Além dessas observações, podemos destacar que a expressão $x^2 + y^2 + z^2$ é um rema quando sugerimos que suas funções de unidades e regras de formação são próprias do objeto produto escalar. Entretanto, esta expressão não é um dicente uma vez que não há transformação interna ao registro. Mas esta mesma expressão é um argumento quando inferimos e concluímos que devemos transformar a expressão $x^2 + y^2 + z^2$ no registro $\vec{u} \cdot \vec{u}$, ou vice e versa.

Quando o produto escalar de dois vetores distintos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, for igual à zero, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, significa que eles são ortogonais, $\vec{u} \perp \vec{v}$, ou seja, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. Neste caso, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$ são qualissignos quando a qualidade de ortogonalidade é reconhecida. Além disso, a representações $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$

não são sinsignos, pois não são passíveis de tratamento. Entretanto, ressaltamos que a transformação da representação $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ para a representação $\vec{u}\perp\vec{v}$, e vice-versa, é um legissigno, uma vez que há uma lei que governa esta transformação, a lei de ortogonalidade.

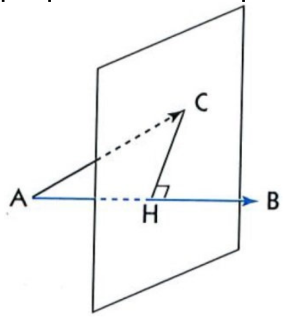
Nesse contexto, destacamos que na relação do signo com o objeto, a representação do produto escalar de dois vetores distintos, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, é um índice da representação $\vec{u}\perp\vec{v}$, enquanto que esta é um ícone da representação anterior. Em outras palavras, a representação $\vec{u}\perp\vec{v}$ é um ícone da representação $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, porque faz referência ao objeto matemático "ortogonalidade". Além disso, destacamos também que a representação $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$ é um símbolo, uma vez que faz referência ao objeto matemático "ortogonalidade" e a transformação do registro $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ para $\vec{u}\perp\vec{v}$ ou vice e versa, estão em função de uma associação de ideias gerais, de uma lei, ou melhor, da implicação "se e somente se".

Seguindo nossa análise, ressaltamos que na relação do signo com o interpretante a representação do produto escalar de dois vetores distintos, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, ou $\vec{u}\perp\vec{v}$, é um rema quando sugerimos que as funções de unidades e regras de formação são próprias do objeto ortogonalidade. Destacamos também que a representação $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$ é um argumento quando inferimos e concluímos que devemos transformar o registro $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ para o registro $\vec{u}\perp\vec{v}$ ou vice e versa.

Na definição e propriedade de produto escalar no espaço temos a expressão $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AH}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ [72], que pode ser assim demonstrada:

[72] Nesta tese, utilizando ponto central para representar produto escalar e × para representar multiplicação.

Figura 24 - Definição e propriedades de produto escalar.



Fonte: Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1[re] sciences mathématiques (1998, p. 136).

Ao observarmos a representação figural,

Figura **24**, temos que: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ e que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$. Logo, destacamos que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$, ou seja, que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$. Se $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$ são ortogonais, então $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ e, consequentemente, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Ao calcular o cosseno do registro gráfico temos que $\cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$ e consequentemente que $AH = AC \times \cos \widehat{BAC}$. Com base nessas conjecturas, temos finalmente que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Com base na demonstração da expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, observamos que o qualissigno está presente quando é reconhecida a qualidade da referida expressão e das demais expressões que encontramos no processo de demonstração. Além disso, destacamos que o sinsigno se faz presente em todo o processo de demonstração, especificamente quando realizamos transformações na expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ e no mesmo registro. Observamos também que o legissigno está presente na demonstração da expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times$

$AC \times \cos\widehat{BAC}$, pois há uma lei que governa a transformação das expressões na representação gráfica que se faz presente,

Figura **24**. Nesse caso, a lei pode ser o reconhecimento do produto escalar na representação gráfica.

Nesse contexto, ressaltamos que, ao considerar a relação do signo com o objeto, o ícone está presente na demonstração da expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, uma vez que esta expressão e todas as outras contidas na demonstração fazem referência ao objeto matemático produto escalar, cujo significado é dado simplesmente em relação aos caracteres próprios e que as expressões possuem. Além disso, o índice está presente em toda a demonstração, especificamente quando as transformações realizadas no próprio registro da mesma fazem referência ao objeto matemático produto escalar em função de ser afetado pelo mesmo. No entanto, as transformações, ou traduções, da representação gráfica no processo de demonstração são símbolos, uma vez que fazem referência ao objeto matemático ‘produto escalar’, e~~,~~ as transformações de um registro a outro~~,~~ estão em função de uma associação de ideias gerais, ou seja, de uma lei. Além disso, observamos também que a representação gráfica é considerada uma representação confusa de produto escalar, uma vez que é preciso conhecer a definição do objeto matemático para compreendê-la.

Com base na relação do signo com o interpretante, observamos que o rema está presente na demonstração da expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ quando sugerimos que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias do objeto matemático produto escalar. Ainda mais, observamos que o dicente está presente na demonstração da expressão quando as transformações internas ao registro são realizadas no instante que surge a ideia de transformação. Por fim, o argumento está presente na demonstração quando inferimos e concluímos que devemos transformar a representação gráfica em expressões de produto escalar.

Na definição e nas propriedades de produto escalar temos a expressão $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ que tem norma de um vetor independente da representação escolhida. Para demonstrar esta expressão resolvemos o produto $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| + \|v\|^2$ e realizamos alguns tratamentos: $2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ cujo resultado das transformações é $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}\times(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$. Além disso, resolvemos também o produto $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$ e realizamos as seguintes transformações nos dois registros algébricos: $-2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ e $2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = -\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$, obtendo como resultado $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = -\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2)$. Assim, observamos que o resultado de ambos os produtos são semelhantes, apesar de apresentarem sinais distintos.

Com base na demonstração da expressão $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$, observamos que o qualissigno está presente quando a qualidade da referida expressão é reconhecida, além do reconhecimento da qualidade das demais expressões que encontramos no processo de demonstração, como as transformações dos produtos, por exemplo. Além disso, que o sinsigno se faz presente em todo o processo de demonstração, especificamente quando realizamos as transformações na expressão $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ por meio dos produtos $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| + \|v\|^2$ e $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$, no mesmo registro. Em contraste disso, inferimos que o legissigno não está presente na demonstração da expressão $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$, pois não há uma lei que governa a transformação destas expressões em outro registro de representação.

Nesse sentido, ao considerar a relação do signo com o objeto, o ícone está presente na demonstração da expressão $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$, pois esta expressão e todas as suas transformações fazem referência ao objeto matemático produto escalar, cujo significado é atribuído simplesmente em relação aos caracteres próprios que as expressões possuem. Além do mais, o índice também está presente em toda a demonstração, especificamente quando, as transformações realizadas no próprio registro, fazem referência ao objeto matemático produto escalar em função de ser afetado pelo mesmo. Assim, com base na semiótica de Peirce destacamos que há símbolo nas expressões da demonstração desta expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$, porém não há símbolo quando nos referimos à análise da teoria de Registro de Representação semiótica que realizamos, uma vez que não há transformações de um registro a outro e nem estar em função de uma associação de ideias gerais, de uma lei. Em outras palavras, as expressões presentes na demonstração de $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ são constituídas de símbolos peirceanos mesmo não existindo conversão de distintos registros.

Diante da propriedade das expressões do produto escalar e da norma em uma base ortonormal que encontramos nos livros didáticos franceses, especificamente no livro Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques, temos que: se $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ se encontram numa base ortonormal $(\vec{\imath},\ \ \vec{\jmath},\ \ \vec{k})$, nos deparemos com o produto escalar $\vec{u} \cdot\ \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ e com a norma $\|\vec{u}\| =\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Além disso, podemos calcular a norma de $\vec{u}'$ e obter o seguinte resultado: $\left\|\overrightarrow{u'}\right\| = \sqrt{x'^2 +\ y'^2 +\ z'^2}$. A base ortonormal, mencionada no livro francês, é aquela que quando calculado a norma seu tamanho é igual a 1. Observamos que, a falta da definição de base ortonormal, dificulta o entendimento das propriedades das expressões de produto escalar e da norma ortonormal apresentado no referido livro. Porém, isso se justifica ao passo que na França os estudantes estudam Geometria Analítica desde o Ensino Fundamental II, tornando trivial o esclarecimento deste conceito, ou seja, está subentendido que os estudantes conhecem o conceito de base ortonormal.

Observamos também que a representações $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ e $(\vec{\imath},\ \ \vec{\jmath},\ \ \vec{k})$ podem gerar um conflito, ou obstáculo, na mente do estudante, ou melhor, podem gerar um obstáculo ontogênico no processo de ensino e aprendizagem, pois ele pode não interpretar que essas notações não influenciam o processo de resolução das expressões e nem visualizar que elas podem ser escritas assim: $\vec{u}\,(x, \quad y, \quad z)$, $\vec{u}'\,(x', \quad y', \quad z')$ e $\begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$. Além disso, os estudantes podem não visualizar que estas notações são representações gerais de pontos no espaço.

O mencionado conflito acontece quando os estudantes não reconhecem a qualidade da representação de ponto no espaço, ao passo que há um problema de reconhecimento do qualissigno que antecede o sinsigno, ou seja, a transformação de ponto no espaço no mesmo tipo de representação.

Assim, de acordo com o que apresentamos e com o livro Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques, podemos demonstrar que $\vec{u}$ e $\vec{u}'$são iguais da seguinte maneira: se $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ e $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$, podemos desenvolver $\vec{u} \cdot \overrightarrow{u'} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k})$ e obter como resultado $xx' + yy' + zz'$. Todavia, podemos deduzir o valor de_$\vec{u} = \overrightarrow{u'}$ da seguinte maneira:

$$:\vec{u} \cdot \overrightarrow{u'} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

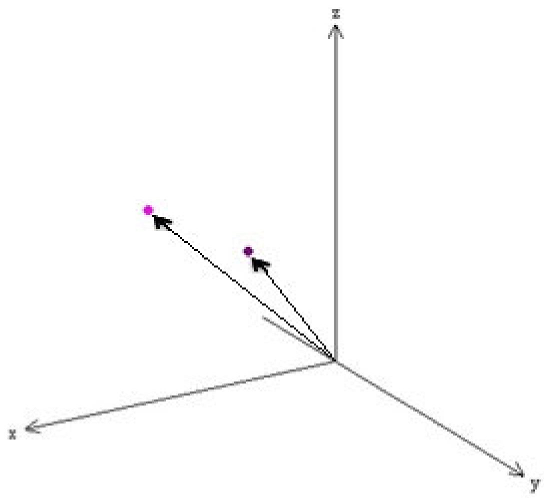
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Nesse contexto, analisando esta situação por meio da semiótica peirceana, especificamente pela primeira tricotomia, podemos inferir que, quando um indivíduo reconhece as qualidades de ponto no espaço, ortonormalidade, de produto escalar e de módulo de um vetor na sentença: se $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ se encontram numa base ortonormal $(\vec{\imath}, \quad \vec{\jmath}, \quad \vec{k})$, nos deparemos com o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ além de nos depararmos com a norma $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, estamos diante de um qualissigno. Além do mais, nesta sentença não há sinsigno, uma vez que não há transformações internas nas “expressões”. Entretanto, observamos que nesta sentença há legissignos, pois existe conversão de representações. Por exemplo, vamos obter como resultado o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ e a norma $\|\vec{u}\| =$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ se os vetores $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ estiverem numa base ortonormal $(\vec{\imath}, \quad \vec{\jmath}, \quad \vec{k})$.

Continuando nossa análise, em relação à segunda tricotomia peirceana, observamos que os vetores $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ são ícones de ponto no espaço, a expressão $\vec{u}\cdot\vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ é ícone de produto escalar, a expressão $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é ícone de norma, uma vez que fazem referência à seus objetos, como ponto no espaço, produto escalar bem como de norma, e seus significados são atribuídos meramente à seus caracteres próprios. Além disso, observamos também que as transformações realizadas em $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ são índices, uma vez que fazem referência ao objeto ponto no espaço em função de ser afetado pelo mesmo objeto, ou melhor, em função de receber informações do referido objeto. Destacamos também que, se transformarmos $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ numa representação gráfica, teríamos um símbolo quando fazemos referência ao objeto matemático ponto no espaço e as transformações de um registro a outro estarão em função de uma associação de ideias gerais, ou seja, da lei de representar os comandos x, y e z, bem como x', y' e z' no espaço, particularmente nos eixos x, y e z. Por exemplo, se representarmos graficamente os vetores $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, temos como resultado a Figura 25.

Figura 25 - Representação gráfica de pontos no espaço.



Fonte: Produção nossa. Construção realizada com o auxílio do software Winplot versão 1.55 [73].

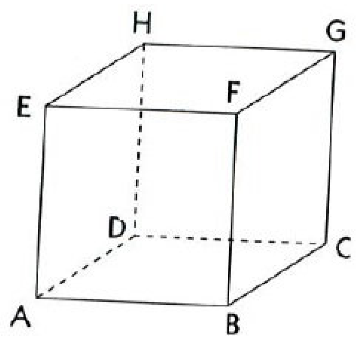
No caso dos vetores $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ e da Figura 25, a lei é seguir os comandos de $\vec{u}$ e $\vec{u}'$. Em $\vec{u}$ a lei é marcar 3 unidades de medida nos eixos x, y e z. Por sua vez, em $\vec{u}'$ a lei é marcar 2 unidades de medida nos eixos x e y, além de marcar -1 unidade de medida no eixo y.

Além dessas observações, ressaltamos que, na análise da relação do signo com o interpretante, a sentença: se $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ se encontram numa base ortonormal $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, nos deparemos com o produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{u}' = xx' + yy' + zz'$ e com a norma $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, é um rema uma vez que sugerimos que estas funções de unidades e regras de formação são próprias do produto escalar e da norma. Observamos também que não há dicente na sentença que colocamos em xeque, pois não nasce à ideia de transformação interna ao registro, em outras palavras, não nasce à ideia de transformação interna quando a sentença é apresentada. Salientamos também que a transformação de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ e $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ numa representação gráfica, como o gráfico da Figura 25, por exemplo, seria um argumento quando inferimos e concluímos que devemos transformar um registro de partida num registro de chegada.

[73] O software Winplot versão 1.55 foi escolhido para construir figuras nesta tese, porque é livre e atende nossas necessidades.

Seguindo nossa análise, colocamos em xeque outra situação-problema que encontramos no livro Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques o seguinte exercício: “Seja ABCDEFGH um cubo de aresta a. Calculamos os produtos escalares: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$” (p. 137). E como complemento da linguagem verbal do problema, temos o cubo representado na **Figura 26**.

Figura 26 - Cubo



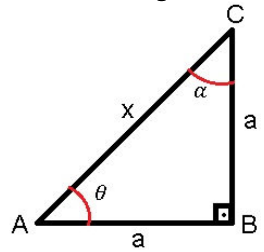
Fonte: Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques (p. 137).

Nesse contexto, a apresentação do problema é um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade das representações no próprio problema.

Na sequência, apresentamos o resultado dos produtos escalares do exercício apresentado.

Para calcular o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ e melhor visualizar o problema, extraímos da Figura 26 o triângulo retângulo representado na Figura 27.

Figura 27 - Triângulo retângulo



Fonte: Produção nossa.

Semioticamente, observamos que o caso apresentado é um sinsigno, uma vez que há uma transformação de um mesmo registro, nesse caso registro figural.

Intuitivamente, como a medida dos ângulos internos de um triângulo devem somar 180°, e como os lados AB e BC têm mesma medida, concluímos que $\theta = 45°$ e $\alpha = 45°$. Esta situação é um legissigno uma vez que se aplica uma lei que governa a transformação de 180° para $\theta = 45°$ e $\alpha = 45°$. Nesse caso, a lei pode ser o conhecimento de que os ângulos internos de um triângulo somam 180°.

Como desconhecemos a medida do segmento AC, ou seja, a diagonal de uma das faces do cubo utilizamos o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, para calculá-la, conforme o procedimento que apresentamos a seguir.

$$x^2 = a^2 + a^2$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2a^2}$$
$$x = a\sqrt{2}$$

Logo, por meio do cálculo apresentado, encontramos que o modulo do vetor $\overrightarrow{AC}$ é $a\sqrt{2}$.

Analisando este procedimento, observamos que ele é um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade em descobrir o modulo de $\overrightarrow{AC}$. Além disso, o mencionado procedimento é um sinsigno quando os estudantes realizam as transformações durante a aplicação do teorema de Pitágoras. Ainda mais, é um legissigno quando os estudantes aplicam a lei que governa a transformação do registro triângulo retângulo para a representação do teorema de Pitágoras, quando os lados do triângulo retângulo, extraídos da Figura 26, são identificados e representados no teorema de Pitágoras.

Seguindo nossa análise, ressaltamos que a aplicação do teorema de Pitágoras para descobrir o modulo do vetor $\overrightarrow{AC}$ é um ícone do triângulo retângulo, pois o significado da aplicação do mesmo é dado meramente em função de seus caracteres próprios. Além do mais, a aplicação do teorema é um índice quando faz referência ao triângulo retângulo em função de ser afetado pelo próprio triângulo. Por outro lado, este procedimento da descoberta do modulo de $\overrightarrow{AC}$ é um símbolo quando se refere ao triângulo retângulo, e consequentemente ao vetor que representa a diagonal de uma das faces do cubo, e as transformações de um registro a outro está em função de uma lei, ou melhor, de uma regularidade entre o módulo, o triângulo retângulo e o cubo.

O procedimento realizado para descobrir a medida do vetor $\overrightarrow{AC}$ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que específicas funções de unidades e regras de formação são particulares do cubo. Além disso, o mesmo procedimento pode ser um dicente quando a transformação interna ao registro figural, do cubo para o triângulo retângulo, bem como ao registro matemático do teorema de Pitágoras, são realizadas no instante que surge a ideia de transformação. Ainda mais, o referido procedimento pode ser um argumento quando os estudantes fazem inferências e concluem que é necessário transformar o registro figural, ou melhor, extrair o triângulo retângulo do cubo, além de aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo para encontrar a medida do vetor $\overrightarrow{AC}$.

Nesse contexto, destacamos que ao encontramos a medida do vetor $\overrightarrow{AC}$, temos as informações necessárias para calcular o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, que apresentamos na sequência.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cosB\hat{A}C$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a \times a\sqrt{2} \times cos\frac{\pi}{4}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2.\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$$

Conforme cálculo apresentado, o produto escalar de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é igual a a^2. Diante disso, observamos que o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade da sua representação. Observamos também que o referido produto escalar é um sinsigno, uma vez que há transformações internas ao registro no processo de resolução de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Além disso, ressaltamos que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é um legissigno quando é aplicada a lei que governa a transformação da representação algébrica para a representação figural, nesse caso, quando existe a possibilidade de resolver o produto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ no registro algébrico e identificar seu resultado na figura.

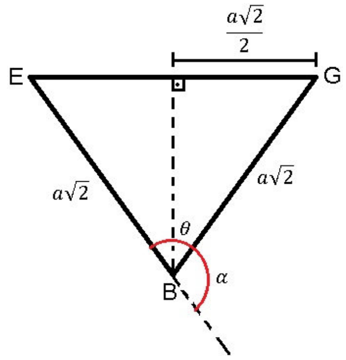
Nesse contexto, destacamos que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é um ícone, pois faz referência ao objeto matemático produto escalar e sua resposta a^2 é ícone também, porque faz referência a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; e em ambos os casos seus significados são atribuídos simplesmente em relação aos caracteres próprios que possuem. Além disso, salientamos que a resolução do referido produto escalar é um índice, pois faz referência ao objeto matemático produto escalar em função de ser afetado por ele mesmo. Observamos também que a resolução de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é um símbolo uma vez que faz referência ao objeto matemático produto escalar e a transformação da representação figural cubo para a expressão algébrica e vice-versa são geridos por uma lei, ou melhor, estão em função de uma associação de ideias gerais.

Seguindo nossa análise, notamos que a resolução do produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que as funções de unidades e regras de formação do processo de resolver tal atividade são específicas do objeto produto escalar. Notamos também que a resolução do mencionado produto escalar pode ser um dicente quando os estudantes realizam as transformações internas ao registro no instante que surge a ideia de transformação. Entretanto, observamos que o argumento não está claro no processo resolutivo de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, porém o argumento está presente quando os estudantes fazem inferências e concluem que devem passar da diagonal do cubo $\overrightarrow{AC}$ a sua medida $a\sqrt{2}$ e representar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ na representação cúbica para melhor visualizar a atividade.

Para calcular o produto $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ e melhor visualizar o problema, extraímos do cubo da Figura 26 o triângulo equilátero apresentado na

Figura **28**.

Figura 28 - Triângulo equilátero



Fonte: Produção nossa.

Para calcular $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$, optamos por utilizar as relações trigonométricas no triangulo retângulo. Para isso, precisamos encontrar o ângulo suplementar do triângulo equilátero. Assim, dividimos o triângulo em dois triângulos retângulo, cujas medidas estão descritas na própria

Figura 28. Aplicando a fórmula do cosseno encontramos a resposta a seguir:

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

Logo, o ângulo $\theta = 60°$ e seu suplementar $\alpha = 180° - 60° = 120°$, ou seja, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$.

Semioticamente, observamos que a extração do triângulo equilátero do cubo apresentado na atividade do livro pode ser um sinsigno porque há uma transformação de um mesmo registro, nesse caso registro figural. Além disso, notamos que as transformações realizadas no processo de resolução do ângulo por meio do $\cos\theta$ pode ser um sinsigno, pois existe a transformação de uma representação nela mesma. Notamos também que a lei que conduz a transformação, ou a extração do triângulo equilátero da representação do cubo pode ser um legissigno.

Nesse contexto, destacamos que a aplicação da fórmula do cosseno para descobrir o ângulo θ é um ícone do ângulo α, uma vez que θ faz referência ao seu suplementar α e seu significado é atribuído simplesmente em função dos seus caracteres particulares e que possui. Além disso, as transformações realizadas no processo de resolução do $\cos\theta$ é um índice, pois faz referência ao objeto matemático triângulo equilátero, especificamente aos dados de seus lados, em função de ser afetado pelo próprio triângulo. Observamos também que o cálculo do $\cos\theta$ é um símbolo quando faz referência ao ângulo θ presente no interior do triângulo equilátero e as transformações de um registro para outro está em função de uma lei, ou melhor, está em função da junção de ideias gerais.

Por outro lado, o cálculo do $\cos\theta$ é um rema quando os estudantes sugerem que específicas funções de unidades e regras de formação são próprias do θ presente no interior do triângulo equilátero e de seu suplementar α no exterior do mesmo. Além disso, o cálculo do $\cos\theta$ pode ser um dicente quando suas transformações internas são realizadas no instante que surge a ideia de transformação. Entretanto, o referido cálculo é um argumento quando os estudantes inferem e concluem que devem apresentar o ângulo do interior do triângulo equilátero por $\theta = 60°$ e seu suplementar por $\alpha = 120°$.

Com a medida do ângulo α, podemos calcular o produto escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$, conforme apresentamos na sequência.

$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG} = EB \times BG \times \cos E\hat{B}G$$

$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG} = a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG} = -\frac{2a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG} = -a^2$$

Conforme cálculo apresentado, vimos que o produto escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ é igual a $-a^2$.

Por meio da semiótica de Peirce, observamos que o produto escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade da representação do cálculo deste mesmo produto. Notamos também que o escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ pode ser um sinsigno uma vez que existem transformações internas no processo de resolução do mesmo. Por sua vez, o referido produto escalar pode ser um legissigno, pois há uma lei que dirige a transformação da sua representação algébrica para a representação figural, representação no cubo, e vice e versa.

Nesse sentido, notamos que o cálculo de $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ pode ser um ícone quando faz referência aos vetores presentes na representação do cubo, cujo significado é atribuído simplesmente em função dos caracteres próprios que possui. Entretanto, o referido cálculo do escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ pode ser um índice quando faz referência aos vetores do cubo em função de ser afetado pelos próprios vetores. Além disso, o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ pode ser um símbolo uma vez que faz referência aos vetores do cubo e suas transformações de representações, da representação algébrica para a representação figural, o cubo, e vice e versa. Estas transformações estão em função de uma lei, ou seja, então em função de uma junção de ideias gerais.

Em relação à terceira tricotomia peirceana, o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BG}$ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que específicas funções de unidades e regras de formação são próprias deste escalar. Além do mais, este mesmo cálculo pode ser um dicente quando suas transformações internas são realizadas pelos estudantes no instante que nasce a ideia de transformação. Por sua vez, o cálculo do referido produto escalar pode ser um argumento quando os estudantes inferem e concluem que devem transformar a representação figural, os vetores presentes no cubo, em representação algébrica e vice e versa.

Observamos os vetores do produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ no cubo da Figura 26 e concluímos que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$, além disso que C é a projeção ortogonal de G sobre a reta DC. Nesse contexto, podemos escrever o produto $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = DC \times DC = a^2$.

Diante disso, o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade de sua representação. Além disso, este produto escalar pode ser um sinsigno quando realizamos as transformações internas no registro dos vetores. Entretanto, este produto escalar pode ser um legissigno quando aplicamos a lei que governa a transformação $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$ e de $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = DC \times DC = a^2$ quando notamos que C é a projeção ortogonal de G sobre a reta DC no cubo.

Por sua vez, em relação a segunda tricotomia peirceana, o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ é um ícone quando faz referência ao cubo, uma vez que seu significado é atribuído simplesmente em relação às características próprias que possui. Além disso, este mesmo cálculo é um índice quando se refere ao cubo em função de ser afetado pelo mesmo. Entretanto, o mencionado cálculo de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ é um símbolo quando faz referência ao cubo e as transformações de um registro a outro está em função de uma lei, ou melhor, está em função de uma associação de ideias gerais. Por exemplo, quando calculamos $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$ e de $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = DC \times DC = a^2$ e percebemos que C é a projeção ortogonal de G sobre a reta DC no cubo.

Em relação à terceira tricotomia peirceana, o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são específicas do próprio produto ou do cubo. Além disso, o referido cálculo pode ser um dicente quando a transformação interna ao registro é realizada no instante que surge a ideia de transformação. Por fim, o cálculo do produto escalar pode ser um argumento quando os estudantes inferem e concluem que se deve transformar o registro de partida $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ em $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$ e de $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$ para $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = DC \times DC = a^2$, além disso, quando os estudantes percebem que C é a projeção ortogonal de G sobre a reta DC no cubo.

Notamos o produto escalar $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$ (Figura 26) e concluímos que $\overrightarrow{EA}\,.\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CG}\,.\overrightarrow{CH}$, além do mais que G é a projeção ortogonal de H sobre a reta CG. Assim, podemos escrever $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CG}\,.\overrightarrow{CH} = -CG^2 = -a^2$.

Nesse contexto, observamos que o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$ pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade desta representação. Além disso, percebemos que este mesmo cálculo pode ser um sinsigno quando existe a transformação desta representação nela mesma, ou melhor, quando existem suas transformações internas, $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CG}\,.\overrightarrow{CH} =$

$-CG^2 = -a^2$. Por sua vez, o referido cálculo pode ser um legissigno quando é aplicada a lei que dirige a transformação da representação de vetores para a representação do cubo ou vice e versa.

Entretanto, o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$ pode ser um ícone quando faz referência ao cubo, cujo significado é dado simplesmente em relação aos seus próprios caracteres. Além disso, observamos que o referido cálculo pode ser um índice quando se refere ao cubo em função de ser afetado pelo próprio cubo. Observamos também que produto escalar $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$ pode ser um símbolo quando faz referência ao cubo e as transformações do produto escalar para o cubo e vice e versa estão em função de uma associação de ideias gerais, ou melhor, de uma lei.

O cálculo do produto escalar $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH}$ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias do referido produto. Além do mais, este cálculo pode ser um dicente quando a transformação interna ao registro, $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CG}\,.\overrightarrow{CH} = -CG^2 = -a^2$, é realizada no instante que brota a ideia de transformação nos estudantes. Entretanto, o referido produto escalar pode ser um argumento quando os estudantes inferem e concluem que se deve transformar o escalar no registro do cubo e vice e versa.

Ao observar a Figura 26, percebemos que o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ é igual ao produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ e que esses vetores são ortogonais. Logo, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0$.

Diante disso, observamos que os produtos escalares $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ podem ser qualissignos quando os estudantes reconhecem a qualidade dessas representações. Além do mais, estes produtos escalares podem ser sinsignos quando existe transformações internas aos seus registros. No entanto, estes produtos podem ser legissignos quando é aplicada a lei que governa a transformação desta representação na representação do cubo ou vice e versa.

Por sua vez, os produtos escalares $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ podem ser ícones quando fazem referência ao cubo do problema, cuja definição é dada simplesmente em relação aos seus próprios caracteres. Além disso, observamos que estes produtos escalares podem ser índices quando se referem ao cubo do problema em função de serem afetados pelo mesmo cubo. Entretanto, estes produtos podem ser símbolos quando fazem referência ao cubo do problema e as transformação de um registro a outro estão em função de uma lei, ou melhor, de uma associação de ideias gerais. Por exemplo, a afirmação de que o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ é igual ao produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ e que esses vetores são ortogonais.

Nesse contexto, observamos que os produtos escalares $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ são remas quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias do objeto matemático produto escalar. Além do mais, estes mesmos produtos são discentes quando há transformação interna ao registro, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0$. Entretanto, os produtos escalares $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ são argumentos quando os estudantes inferem e concluem que se deve transformar este registro de partida na representação do cubo apresentada no problema.

Observamos a Figura 26 e constatamos que o vetor $\overrightarrow{AG}$ do produto escalar $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ pode ser escrito assim: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$. Dessa forma, podemos substituir $\overrightarrow{AG}$ por $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$ e obter o seguinte produto: $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}).\overrightarrow{BD}$. Além disso, aplicando a distributiva temos $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD}$. Como os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ bem como $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{BD}$ são ortogonais, logo o resultado da expressão $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD}$ é zero, ou melhor, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$.

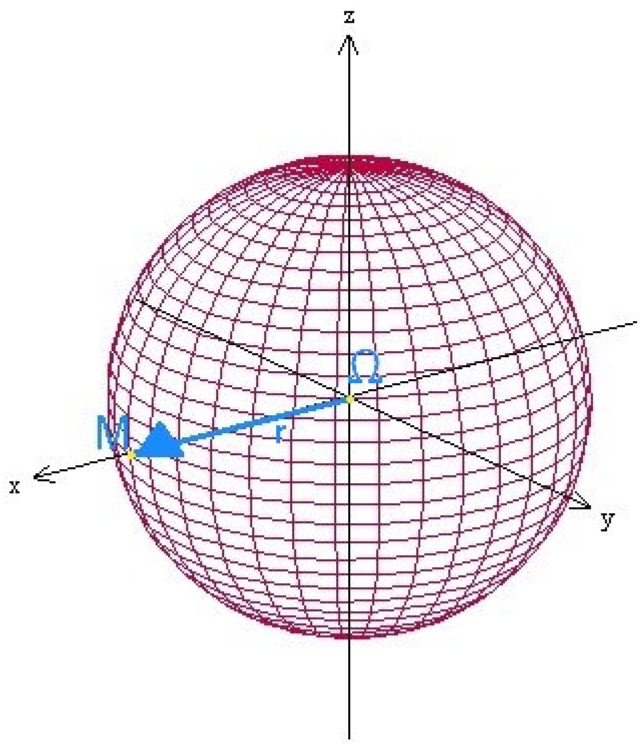
Diante disso, notamos que o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade de sua representação. Além disso, este mesmo cálculo pode ser um sinsigno quando existe as transformações internas ao registro, ou seja, quando $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$. Por sua vez, observamos que o produto escalar $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ pode ser um legissigno quando é aplicada a lei que dirige a transformação desta representação para a representação do cubo apresentada no problema ou vice e versa.

Percebemos também, que o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ pode ser um ícone quando faz referência ao cubo apresentado no problema, cujo significado é dado simplesmente em relação aos seus caracteres. Além do mais, observamos que este cálculo pode ser um índice quando faz referência ao cubo do problema em função de ser afetado pelo próprio cubo. No entanto, o referido cálculo pode ser um símbolo uma vez que faz referência ao cubo do problema e as transformações de um registro a outro está em função de uma lei.

Notamos que o cálculo do produto escalar $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que específicas funções de unidades e regras de formação são próprias deste produto. Ainda mais, este cálculo pode ser um dicente quando suas transformações internas, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}\right).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$, são realizadas no instante que surge a ideia de transformação. Por fim, o mencionado cálculo pode ser um argumento quando os estudantes inferem e concluem que devem transformar o registro $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ num outro registro apresentado no cubo do problema ou vice e versa.

Na sequência, apresentamos mais uma atividade do livro Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques que consideramos de grande relevância para a continuidade e realização de nossa análise semiótica. A atividade trata da equação cartesiana de uma esfera, porém trata de vetores da geometria analítica espacial. Segundo a atividade (p. 138), o espaço é fornecido do ponto de referência ortonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Além disso, é fornecido três informações que contém três tarefas, vejamos a primeira: 1º) Seja $(\mathscr{Q})$ a esfera de centro $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e raio r. Demonstrar que o ponto $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pertence à $(\mathscr{Q})$ se e somente se: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (x-c)^2 = r^2$. Para responder esta tarefa, consideramos relevante a construção da esfera apresentada na Figura 29.

Figura 29 - Esfera mencionada no problema.



Fonte: Produção nossa. Construção realizada com o auxílio do software Winplot versão 1.55.

Assim, respondendo a primeira questão, demonstrando que o ponto $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pertence à ($\mathscr{L}$), temos:

$$\left\|\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}^2\right\| = r$$

$$\sqrt{\overrightarrow{\Omega M}^2} = r$$

$$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\right)^2 = r^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Diante do exposto, observamos que a resolução desta atividade da esfera pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade da atividade. Além disso, esta mesma resolução pode ser um sinsigno quando existem as transformações internas ao registro, ou seja, quando há possibilidade de realizar transformações internas ao registro dado na atividade. Por sua vez, a resolução da mencionada atividade pode ser um legissigno quando é aplicada a lei que governa a transformação do problema apresentado na atividade para o desenho da esfera apresentada na Figura 29.

Nesse contexto, percebemos que a resolução da atividade da esfera pode ser um ícone uma vez que faz referência aos objetos matemáticos: esfera e geometria analítica espacial. Ainda mais, esta resolução pode ser um índice, pois faz referência aos objetos matemáticos em função de ser afetada pelos mesmos. No entanto, a resolução da atividade pode ser um símbolo, porque faz referência aos objetos matemáticos e as transformações de um registro a outro, registro algébrico e registro figural, estão em função de uma lei.

Continuando nossa análise, percebemos que a mencionada resolução da atividade pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias dos objetos matemáticos, esfera e geometria analítica espacial. Além do mais, notamos que esta mesma resolução pode ser um dicente quando as transformações internas ao registro, $\|r\vec{M}^2\| = r$, $\sqrt{r\vec{M}^2} = r$, $\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\right)^2 = r^2$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, são realizadas no instante que surge a ideia de transformação. Por fim, a referida resolução pode ser um argumento quando os estudantes inferem e concluem que é preciso transformar o registro dado na atividade na Figura 29.

A segunda tarefa da atividade, diz que: Seja (Σ) a semelhança dos pontos $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tais que: $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ (1), onde α, β, γ, δ são números reais. a) Verificar que (1) pode ser escrito: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ e b) Em dedução, segundo o sinal de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$, a natureza e os elementos característicos de (Σ).

Respondendo a tarefa descrita no item ‘a’ temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$
$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + z^2 - 2\gamma z + \delta = 0$$
$$(x-\alpha)^2 - \alpha^2 + (y-\beta)^2 - \beta^2 + (z-\gamma)^2 - \gamma^2 + \delta = 0$$
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$$

Diante do exposto, observamos que a resolução do item ‘a’ pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem sua qualidade. Além disso, esta resolução pode ser um sinsigno, pois há transformações internas em seu registro. No entanto, a mencionada resolução não pode ser um legissigno, uma vez que não existe uma lei que governa a transformação da representação apresentada em outra representação.

Por sua vez, a resolução do item ‘a’ pode ser um ícone, porque faz referência ao objeto matemático esfera, cujo significado é dado simplesmente em relação aos seus caracteres. Ainda mais, a referida resolução pode ser um índice, uma vez que faz referência ao objeto matemático esfera em função de ser afetado por este mesmo objeto. Entretanto, a resolução de ‘a’ não pode ser um símbolo, pois ainda que faça referência ao objeto matemático esfera não é possível realizar transformações de um registro a outro. Dessa forma, a resolução de ‘a’ não está em função de uma associação de ideias gerais.

Nesse contexto, observamos que a resolução de ‘a’ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias do objeto matemático esfera. Além disso, esta resolução pode ser um dicente quando suas transformações internas são realizadas no instante que nasce a ideia de transformação. Todavia, a resolução de ‘a’ não pode ser um argumento, visto que não há como os estudantes fazerem inferências e conclusões a respeito da transformação do registro de partida para um outro registro, pois não há transformações de um registro de partida para outro de chegada.

Na sequência, vamos apresentar a resolução do item ‘b’, em dedução, segundo o sinal de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$, a natureza e os elementos característicos de (Σ). Assim, a natureza e os elementos de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ podem ser de três maneiras:

i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta < 0$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta = 0$

iii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$

Se o sinal de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ for menor que zero (<0), o (Σ) terá conjunto vazio, ou melhor, $(\Sigma) = \emptyset$. Por sua vez, se o sinal de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ for igual a zero, o (Σ) apresentará somente o centro da esfera (Ω), ou seja, $(\Sigma) = \{\Omega\}$. Entretanto, se o sinal de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ for maior que zero (>0), o (Σ) apresentará uma esfera de centro Ω e de raio $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$.

Diante disso, observamos que a resolução do item ‘b’ pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade da representação dos sinais de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$, característicos de (Σ). Além do mais, esta resoluçãopode ser um sinsigno uma vez que há transformações internas ao registro. Entretanto, a resolução do item ‘b’ somente será considerada um legissigno se houver uma lei que governa a transformação a representação apresentada para a representação da esfera, Figura 29.

Nesse contexto, a resolução do item ‘b’ pode ser um ícone quando faz referência à esfera, Figura 29, cujo significado é atribuído simplesmente em relação aos seus caracteres. Ainda mais, a mencionada resolução pode ser um índice quando se refere à esfera em função de ser afetada pela mesma. Por sua vez, a referida resolução pode ser um símbolo quando se refere à esfera e as transformações de um registro a outro está em função de uma lei.

A resolução do item ‘b’ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias dos sinais de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$. Além disso, a referida resolução pode ser um dicente quando suas transformações internas são realizadas no instante que surge a ideia de transformação. Por fim, esta resolução será um argumento quando os estudantes inferem e concluem que devem transformar representar a resolução na esfera ou em outro registro.

Na sequência, apresentamos a terceira atividade do livro Mathématiques da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re sciences mathématiques: Aplicação: a) Determinar uma equação da esfera de diâmetro [AB], onde $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) Determinar, em cada caso seguinte, a natureza e os elementos característicos juntos (Σ) dos pontos $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tais que:

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5 = 0$;
- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$;
- $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 12 = 0$.

Resolvendo o item ‘a’ da terceira questão, partimos do cálculo para encontrar os pontos que marcam o centro da esfera, que representamos por C.

$$\overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2} = \overrightarrow{OC}$$

$$2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$$

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \overrightarrow{OC}$$

$$C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Na sequência, calculamos a medida do raio.

$$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB}^2\right)$$

$$\sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = 4r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\overrightarrow{AB}^2}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$$

Além deste cálculo do raio, apresentamos outra maneira de calculá-lo, que apresentamos na sequência.

Para isto, calculamos o valor da medida do diâmetro da esfera, $AB = \sqrt{(1-3)^2 + (5+1)^2 + (3)^2} = 7$ e dividimos por 2. Logo, o raio da esfera mede $\frac{7}{2}$.

Feito isto, calculamos a equação da esfera.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 3z + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 3z + 4 + 4 + \frac{9}{4} - \frac{49}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 3z + 8 - \frac{40}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 3z + 8 - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 3z - 2 = 0$$

Analisando semioticamente a resolução do item ‘a’ da terceira questão, observamos que ela pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem as qualidades do diâmetro, do centro e da equação da esfera. Observamos também que esta resolução pode ser um sinsigno porque existem transformações internas nos registros da mesma. No entanto, a referida resolução será um legissigno somente quando for aplicada a lei que governa a transformação do registro apresentada para outra representação.

Por sua vez, a resolução do item ‘a’ pode ser um ícone porque faz referência à esfera e seu significado é dado simplesmente em relação aos seus próprios caracteres. Ainda mais, esta resolução é um índice, pois se refere à esfera em função de ser afetada pela mesma. Entretanto, mesmo fazendo referência à esfera a mencionada resolução não pode ser um símbolo, pois não há transformações de um registro a outro, fazendo que não exista uma associação de ideias gerais.

A resolução do item ‘a’ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias do diâmetro, do centro e da equação da esfera. Além disso, esta resolução pode ser um dicente quando a transformação interna ao registro é realizada no instante que nasce a ideia de transformação. Por fim, a resolução do item ‘a’ será um argumento somente quando os estudantes inferirem e concluírem que se deve transformar esta representação num outro registro.

Na sequência, apresentamos a resolução do item ‘b’ da terceira atividade.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 5 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + z^2 - 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5 + 5$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 10$$

Portanto, (Σ) é a esfera de $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e de raio $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 + 2z + 6 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + (z+1)^2 - 1 + 6 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = -6 + 6$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 0$$

Nesse caso, (Σ) é a esfera de $\Omega\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, que é o centro da esfera.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 12 = 0$$
$$x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 2z + 12 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + y^2 + (z+1)^2 - 1 + 12 = 0$$
$$(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = -12 + 10$$
$$(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = -2$$

Logo, $(\Sigma) = \emptyset$, porque não há reais, x, y e z, que satisfaz esta equação.

Analisando semióticamente a resolução do item ‘b’ da terceira atividade, percebemos que ela pode ser um qualissigno quando os estudantes reconhecem a qualidade de sua representação. Por outro lado, observamos que esta resolução pode ser um sinsigno, porque há transformações internas nos registros apresentados. Entretanto, observamos também que a resolução de ‘b’ não pode ser um legissigno, pois não existe mudança de representações.

Nesse contexto, notamos que a resolução do item ‘b’ pode ser um ícone, pois faz referência à esfera, cujo significado é dado simplesmente em relação aos caracteres próprios que a esfera possui, como a equação da esfera por exemplo. Ainda mais, esta resolução pode ser um índice, porque faz referência a esfera em função de ser afetada pela mesma. No entanto, a referida resolução de ‘b’ não pode ser um símbolo, ainda que tenha símbolos matemáticos e em seu processo resolutivo tenha um regimento de lei, uma vez que não há transformações de um registro a outro.

Além dessas análises, observamos que a resolução de ‘b’ pode ser um rema quando os estudantes sugerem que determinadas funções de unidades e regras de formação são próprias da esfera e da natureza e dos elementos característicos de (Σ) e dos pontos $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Além disso, percebemos que esta resolução pode ser um dicente quando as transformações internas ao registro são realizadas no instante que nasce a ideia de transformação. Por outro lado, notamos que a referida resolução de 'b' somente será um argumento se os estudantes inferirem e concluírem que devem transformar os registros apresentados em outros registros.

Diante da análise dos objetos matemáticos, plano, vetor e ponto no espaço, por meio da analogia entre as teorias de Registro de Representação Semiótica e Semiótica peirceana, observamos que a segunda teoria pode apontar, antecipadamente, os possíveis problemas que podemos enfrentar no processo de ensino e aprendizagem da geometria analítica. Além disso, a Semiótica pode apontar soluções para os supostos problemas.

Nesse sentido, notamos que os signos peirceanos, responsáveis por apontar os supostos problemas e soluções, são o legissigno e o símbolo. Notamos também, que o argumento pode ser o signo que impulsiona os indivíduos a tomarem a decisão de resolver os supostos problemas e realizar as tarefas. Assim, observamos que a décima classe peirceana, legissigno simbólico argumento, pode ser a responsável pelo sucesso no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Encontramos estes resultados ao procurar respostas para as leis de cada legissino, símbolo e argumento dos objetos matemáticos analisados.

Nesse contexto, concordamos com Isabelle Bloch e Patrick Gibel (2011), quando apresentam os signos símbolo e argumento como os responsáveis por explicar o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Contudo, acrescentamos ao resultado dos autores, o legissigno.

No processo de comparação, observamos que a conversão, da teoria de Raymond Duval, é análoga aos signos: legissigno, símbolo e argumento, tornando assim, a atividade de grande importância no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Admitamos por analogia, que as teorias de Registro de Representação Semiótica e a Semiótica de Peirce são válidas para explicar a matemática e seu ensino. Todavia, notamos que a teoria de Duval trata dos objetos matemáticos e sua representação como um todo, enquanto que a teoria de Peirce considera suas partes, onde cada detalhe é um signo diferente.

Como vimos na pesquisa de Munhoz (1999), a impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos usados na Geometria Analítica é um fator que pode estar contribuindo para algumas das dificuldades dos estudantes nessa matéria.

Portanto, do ponto de vista didático, a análise que realizamos é importante no que tange o estudo dos processos de ensino e aprendizagem da geometria analítica, uma vez que podemos enxergar, antecipadamente, em qual signo deste objeto matemático haverá dificuldades nestes processos.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Nestas considerações finais, apresentaremos nossas reflexões a respeito dos aspectos que consideramos importantes nesta tese. Aspectos estes que acreditamos responderem à nossa questão de pesquisa, além de mostrar o desenvolvimento de um modelo semiótico fundamentado em Peirce para descrever e explicar alguns fatores relacionados com os processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

Nesta pesquisa, procedemos a uma releitura da teoria dos registros de representação semiótica de Duval a partir da abordagem semiótica de Peirce que nos permitiu propor uma descrição e uma explicação aplicável à matemática e ao seu ensino, fundamentada na noção de terceiridade em alto grau.

Discorreremos aqui, a respeito da fundamentação teórica e metodológica, os principais resultados, a questão de pesquisa, nossa hipótese e outras perspectivas de investigação.

Fundamentação teórica e metodológica

A teoria de Registro de Representação Semiótica foi desenvolvida por Raymond Duval, que afirma que os indivíduos aprendem matemática somente se passarem pela formação de representação identificável, tratamento e conversão. A formação de representação identificável são as unidades e regras que formam um objeto matemático. Os tratamentos são as transformações internas ao registro. Por sua vez, a conversão é a transformação de um registro a outro.

Esta teoria contribui para o ensino da matemática, e muitos pesquisadores vêm aplicando e encontrando resultados significativos. Por exemplo, a autora desta tese desenvolveu um *software* e um aplicativo, para o ensino da função de primeiro grau, baseado na teoria de Duval em sua dissertação, no programa de pós-graduação em Ciências da Linguagem, na Universidade do Sul de Santa Catarina em 2009. A mencionada teoria sustentou a elaboração e aplicação do *software* e do aplicativo, uma vez que houve um incremento de 1,4 nas notas dos alunos na aplicação do pós-teste, que foi significativo estatisticamente.

Contudo, a teoria de Registro de Representação trata dos objetos matemáticos e de suas representações como um todo, não considerando suas partes. Por exemplo, Duval considera, como representação de produto escalar o conjunto de itens: $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Por sua vez, a Semiótica de Charles Sanders Peirce é uma teoria geral dos signos. Esta teoria é triádica e procura descrever e classificar todos os signos admissíveis. O signo peirceano é uma tríade composta de: signo ou representámen, objeto e interpretante.

Peirce criou dez tricotomias e 66 classes de signos. Todavia, aplicamos, nesta pesquisa, somente as tricotomias de maior relevância, o signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto e signo em relação ao interpretante. Estas três tricotomias são consideradas de maior relevância, porque serviram de base para a elaboração das demais.

A tríade signo em relação ao signo é composta pelos qualissignos, sinsignos e legissignos. A relação entre o signo e o objeto é composta pelo ícone, índice e símbolo. Todavia, a tríade da relação do signo com o interpretante é composta pelo rema, dicente e argumento.

Teoricamente, a Semiótica de Peirce possui um dinamismo capaz de explicar toda e qualquer ciência. Nesse sentido, conjecturamos que ela é capaz de explicar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, tratando de cada parte que compõe o objeto matemático e de sua representação. Por exemplo, com a semiótica peirceana, podemos tratar da representação do produto escalar pelas suas partes: "u", "$\vec{u}$","$\cdot$", "v", "$\vec{v}$".

Em tese, se a Semiótica foi capaz de explicar os objetos matemáticos e sua representação, logo será capaz de explicar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, além da teoria de Registro de Representação. Isso ocorre porque a teoria de Peirce é fenomenológica, pois estuda todos os fenômenos.

Em síntese, a Semiótica contribui para a teoria de Registro de Representação Semiótica, ao passo que a primeira teoria está contida em todos os fenômenos matemáticos, bem como no ensino e na aprendizagem.

Nesta pesquisa, a Semiótica contribuiu, em sua potencialidade, para enxergarmos que existem vestígios peirceanos na teoria de Duval. Além disso, nosso estudo da teoria de Peirce evidenciou que a teoria de Duval não esclarece todos os detalhes presentes nos objetos matemáticos e em sua representação; nem explica todas as minúcias envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem. Nesse caso, observamos que nossa tese justifica-se nos trabalhos de Isabelle Bloch e Patrick Gibel (2011), quando os autores buscam, na Teoria de Situação Didática de Brousseau, caminhos para explicar os processos de ensino e aprendizagem da matemática, que não encontraram na teoria de Duval.

O método de pesquisa utilizado foi o da pesquisa bibliográfica com procedimentos de análise qualitativa. A pesquisa foi composta por três etapas: a) levantamento de dados; b) tratamento de dados e c) elaboração do texto científico. No levantamento de dados, identificamos, localizamos e compilamos as informações. Todavia, no tratamento dos dados realizamos leituras, elaboramos fichamentos e analisamos as fontes de informações.

Principais resultados e questão de pesquisa

Na tentativa de responder a nossa questão de pesquisa: quais signos peirceanos para analisar os registros de representação semiótica e qual é a semiótica para a matemática e seu ensino? Constatamos, por analogia, que as categorias peirceanas de maior relevância: signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto e signo em relação ao interpretante são válidas para analisar a teoria de Raymond Duval. Esta validação ocorre porque conseguimos encontrar algumas respostas para o ensino e aprendizagem da matemática que não encontramos na teoria de Registro de Representação semiótica. Dessa forma, por conclusão própria, os signos peirceanos que estão presentes nas mencionadas categorias servem para analisar a teoria que colocamos em xeque.

Além do mais, por meio da análise dos objetos matemáticos, plano, vetor e ponto no espaço, bem como da comparação entre as teorias, observamos que a Semiótica de Charles Sanders Peirce pode apontar os possíveis problemas, e soluções, que podemos encarar nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, ao tratar de determinados objetos.

Conforme apresentamos no quarto capítulo, observamos que os signos peirceanos, responsáveis por apontar os supostos problemas e soluções são o legissigno e o símbolo. Além disso, admitimos que o argumento pode ser o signo que estimula os indivíduos a tomarem a decisão de resolver os supostos problemas, bem como de realizar as tarefas.

Portanto, admitimos também que a décima classe da Semiótica de Peirce, legissigno simbólico argumento, pode ser a responsável pelo sucesso do ensino de ensino e da aprendizagem da matemática. Assim, acrescentamos ao resultado do trabalho de Bloch e Gibel (2011), o legissigno, uma vez que eles apontam o símbolo e o argumento, como os responsáveis por explicarem o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Além disso, aplicamos a primeira, a segunda e a terceira tricotomias peirceanas no modelo multidimensional dos autores mencionados e acrescentamo-las ao mesmo modelo, conforme o **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, especificamente nas colunas: primeira, quarta, sexta e oitava:

Quadro 9- Modelo multidimensional com as tricotomias peirceanas.

Tricotomias		**Milieu M-2**		**Milieu M-1**		**Milieu M0**	
Signo-signo	**Função dos raciocínios**	R1.1 SEM	Qualissigno	R1.2 SINT/SEM	Sinsigno	R1.3 SINT	Legissigno
Signo-objeto	**Nível de utilização dos símbolos**	R2.1 SEM	Ícone	R2.2 SINT/SEM	Índice	R2.3SINT	Símbolo
Signo-interpretante	**Nível de atualização do repertório**	R3.1 SINT/SEM	Rema	R3.2 SINT/SEM	Dicente	R3.3 SINT	Argumento

Fonte: Produção nossa.

Por analogia, aceitamos que a conversão, termo apresentado por Duval, é semelhante aos signos: legissigno, símbolo e argumento. Dessa forma, consideramos a conversão uma atividade de grande importância ao ensino e à aprendizagem da matemática.

Diante das análises realizadas nesta tese, admitimos por analogia, que as teorias de Raymond Duval e de Charles Sanders Peirce sejam válidas para explicar a matemática e seu ensino. Contudo, observamos mais uma vez, que a teoria de Registro de Representação Semiótica trata dos objetos matemáticos e sua representação como um todo, ao passo que a Semiótica peirceana considera suas partes, onde cada uma delas é um signo diferente.

Munhoz (1999) evidenciou em sua pesquisa, que a impregnação do sentido cotidiano dos termos geométricos usados na Geometria Analítica é um fator que pode estar contribuindo para algumas das dificuldades dos estudantes nessa matéria. Entretanto, do ponto de vista didático, aceitamos que o resultado de nossa pesquisa foi importante para o estudo dos processos de ensino e aprendizagem da geometria analítica, porque ela aponta, antecipadamente, em qual signo desse objeto matemático existirão dificuldades nos processos.

Além do mais, no processo de comparação, aceitamos que:

a) o objeto descrito por Duval, na teoria de registros de representação semiótica, pode ser o objeto dinâmico descrito por Peirce na teoria Semiótica;

b) o objeto imediato, conceito encontrado na semiótica peirceana, também está presente na teoria de Duval, pois está internamente nas representações semióticas, na formação de representação identificável, no tratamento e na conversão, uma vez que o objeto dinâmico é o objeto apresentado por Duval e as representações semióticas são os signos;

c) na semiótica peirceana, o objeto é diferente do signo, enquanto na teoria de Duval o objeto é diferente da representação semiótica;

d) na teoria de Registro de Representação Semiótica, Duval afirma que os estudantes de matemática apreendem os objetos matemáticos somente por meio dos registros de representação semióticas, contudo na teoria semiótica vimos que os indivíduos operam apenas por meio de signos;

e) o interpretante, termo apresentado por Peirce, é semelhante à posição em que se encontra o aluno, na dualidade apresentada por Duval, objeto e registro de representação;

f) se a tríade peirceana é objeto, signo/representâmen e interpretante, logo a "tríade" da teoria de Duval é objeto matemático, representação semiótica e indivíduo em processo de aprendizagem;

g) há uma relação entre a Semiose que se encontra na teoria de Duval com aquela que se encontra na semiótica peirceana;

h) as categorias da experiência estão presentes na teoria de Duval;

i) mesmo Duval ter criticado a semiótica peirceana e criar uma semiótica para explicar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, encontramos vestígios peirceanos em sua teoria, além daqueles explicitados em seus trabalhos;

j) existem semelhanças entre a formação de representação identificável e a primeiridade;

k) o tratamento de Duval é análogo à secundidade;

l) a conversão, termo apresentado por Duval, é análogo a terceiridade;

m) a congruência e a não congruência no instante da conversão, podem ser um signo, ou objeto, ou interpretante dependendo do ponto de vista que estamos levando em consideração;

n) a heterogeneidade nos dois sentidos da conversão também pode ser um signo, ou objeto, ou interpretante dependendo do ponto de vista que estamos considerando;

o) o sistema semiótico de Raymond Duval, ou seja, a coleção de traços, a coleção de símbolos, a coleção de escritas algébricas, também pode ser um signo, ou um objeto, ou interpretante dependendo do ponto de vista considerado;

p) a noese apresentada por Duval, apreensão conceitual de um objeto, é análoga ao signo de Peice, uma vez que para se ter apreensão é preciso de um terceiro mediador, o aluno, por exemplo;

q) a economia de tratamento é análoga a categoria de primeiridade, uma vez que é da qualidade de sentimento, vaga, que um indivíduo, em fase de aprendizagem, apreende uma representação economicamente tratada;

r) a complementariedade de registro é análoga a categoria de secundidade, uma vez que é da existência do complemento de um registro que haverá aprendizado de determinado objeto matemático;

s) a conceitualização é análoga a categoria de terceiridade, uma vez que a apreensão do objeto acontece por meio de ao menos duas representações, tal qual uma lei de apreensão;

t) o novo esquema de análise do conhecimento desenvolvido por Duval apresenta os termos semióticos, signo e objeto, de forma explícita, porém deixa implícito o interpretante;

u) o signo está presente em todos os conceitos apresentados por Duval;

v) as primeira, quarta e décima classes de Peirce são suficientes para explicar o processo de ensino e aprendizagem da matemática;

w) o modelo das classes peirceanas para o ensino e aprendizagem da matemática, que desenvolvemos, auxilia na busca pelas inferências das ações realizadas nesses processos.

Apoiados em nossas análises e resultados, acreditamos ter respondido nossa questão de pesquisa, contribuindo assim para a área de Educação Matemática.

Perspectivas futuras

Percebemos que nossos resultados implicam a realização de novas análises e analogias das teorias de Registro de Representação Semiótica e Semiótica de Peirce.

Em termos de perspectivas futuras, nossa pesquisa deixa em aberto algumas questões. Uma delas é a continuação da nossa análise do modelo multidimensional de Isabelle Bloch e Patrick Gibel (2011).

Esta sugestão é feita diante dos resultados que a pesquisadora obteve durante seu estágio com a professora Isabelle Bloch, que sugeriu a aplicação do **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

A outra questão é rever e aprimorar o modelo das classes peirceanas para o ensino e à aprendizagem da matemática, desenvolvido e aplicado nesta tese. Sugerimos analisar os benefícios das inferências para a matemática e seu ensino, além do estudo apurado da lógica crítica.

Outro estudo seria verificar e esclarecer, minuciosamente, como e o que acontece na passagem de uma tricotomia a outra.

Deste modo, concluímos este estudo esperando que tenham sido revelados novos caminhos para esclarecer as dificuldades encontradas no ensino da matemática e a necessidade de trabalhos que procurem refletir a respeito das teorias voltadas à didática da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

AKELE, C.; BAYE, O. H. A.; BENDIMAN, K. M.; CONDE, K.; DJIGUIBA, O.; DON, A. P.; NEULAT, J. L.; TRAORÉ, S. **Mathématiques**. Collection Inter Africaine de Mathématiques, 1re Sciences Mathématiques. EDICEF, 1998.

BORGES, P. A. P.; SILVA, D. K. **Modelagem Matemática, escola e transformação da realidade**. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto, 2007.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

BUCHLER, J. Philosophical writings of Peirce. New York: Dover Publications, 1955.

BLOCH, I.; GIBEL, P. **Um Modele d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques etude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite.** Recherches em Didactiquedes Mathématiques, La PenséeSauvage, v. 31, n. 2, p. 191-228, 2011.

BLOCH, I. **La sémiotique de C. S. Peice et la dicactique des mathématiques**: vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'aprentissage. Turiu: SFIDA, 2005.

DIONIZIO, F. A. Q.; BANDT, C. F. **O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática.** IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul (IX ANPED SUL), 2012.

DUVAL. R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, IREM de Starsbourg, n. 5, 37-65, 1993.

_______.**Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?** Relime, Número Especial, p. 45-81. Mexico: Clame; Cinvestav-IPN, 2006.

______. **Sémiósis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuals. Suisse: Peter Lang, 1995.

______.**L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique**: cours sur les apprentissages intellectuals donné à la PUC-SP. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 1999.

______.**Los problemas fundamentales en el Aprendizje de las Matematicas y las Formas superiores en el Desarollo cognitivo**. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle: Colombia, 2004, 121 p.

______.**Du mot au concept**: objeto. Presses universitaires de Grenoble: Grenoble, 2009.

_______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em matemática**: registros de representações semiótica. São Paulo: Papirus, 2003.

______. La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. In: **Du mot au concept**: conversion. Grenoble: PUG - Presses universitaires de Grenoble, 2007.

______. **Ecarts sémantiques et cohérence mathématique** : introduction aux problèmes de congruence. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, v. 1. I. R. E. M, 1988.

DUVAL, R.; FERRARI, P. L.; HØINES, M. J.; MORGAN, C. **Language and Mathematics**. Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 4. Spain, 2005.

ERNEST, P. **A Semiotic perspective of mathematical activity:** the case of number. Educational Studies in Mathematics, Springer, p. 67-101, 2006.

FERRAZ. A. **Esboço do gráfico de função**: um estudo semiótico. 2008. 164 f. Tese (Departamento de Educação)-Universidade Federal de Pernambuco, CE. Educação, UFP, Recife, 2008.

Guia do estudante e do pesquisador brasileiro na França, 2012. Gouvernement du Brésil. Disponível em: http://www.cienciasemfronteiras.gov.br/documents/214072/0bfb9a74-8c1c-418a-926f-7168f97c323f. Acesso em: maio de 2013.

HAGUETTE, T. M. F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. Petrópolis: Vozes, 2005.

HAMATY, Elméhdi; et al. **Mathématiques**: terminale scientifique. Collection Inter Africaine de Mathématiques. EDICEF:Vanves Cedex, 1999.

HOOPES, J. **Peirce on signs**. Writings on semiotics by Charles Sanders Peirce. The University of Noth Carolina Press, 1991.

KARRER, M. **Articulação entre álgebra linear e geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica , 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. **Semiotics and mathematical modeling**. International Journal of Applied Semiotics, Madison, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

KEHLE, P.; LESTER JR., F. K. **A semiotic look at modeling behavior**. In: LESH, D.; DOERR, H. Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Hillsdale: Erlbaum, 2003. p. 97-122.

LEBEAU, Catherine; SCHNEIDER, **Maggy: vers une modelisation algebrique des points, droites et plans**. Les Editions de l'Université de Liège: Boulevard Frère-Orban, 2009.

LEITE, O. R. V. **Geometria analitica espacial**. São Paulo: Loyola, 1991.

LONGO, G. **L'infini mathématique et les preuves**. CNRS et Dépt. De Math. Et Info. École Normale Supérieure: Paris, 1999.

MENDES, Rosana Maria. **As potencialidades pedagógicas do jogo computacional Simcity 4**. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação), 2006, 201 p., Universidade São Francisco, USF, Itatiba.

MISKULIN, R. G. S; MENDES, R. M; FARIAS, M. M; MOURA, A. R. L; SILVA, M. R. **A semiótica como campo de análise para as representações de conceitos matemáticos**. Caderno de Semiótica Aplicada, v. 5., n. 2, p. 1-18, dezembro de 2007.

MISKULIN, R. G. S; MOURA, A. R. L; SILVA, M.R. C. **Um estudo sobre a Dimensão Semiótica da Tecnologia na Educação e na Educação Matemática**. In: II SIPEM, 2003, Santos. Anais do II SIPEM, 2003. v. 01.

MUNHOZ, M. **A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino/aprendizagem da geometria analítica**, 1999. 140 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática)-Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

PEIRCE, C. S.**Collected Papers of Charles Sanders Peirce.** Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press, 1965, v. 1-2.

_______.**Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press, 1965, v. 3-4.

_______.**Collected Papers of Charles Sanders Peirce.** Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press, 1965, v. 5-6.

_______. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2003.

_______. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 1972.

_______. **Semiotic and significs:** the correspondence. Edited by Charles S. Hardwick with the assistance of James Cook. Bloomington; London: Indiana University Press, 1977.

_______. **Writings of Charles S. Peirce**: a chronological edition. V. 6, 1886-1890. Peirce Edition Project. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 2000.

PEIRCE, C. S.; FREGE, G. **Escritos coligidos**. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

PRATES, E. **Semiótica**. Disponível em: <http://www.portaldomarketing.com.br/Artigos/Semiotica.htm>. Acesso em: 1 nov. 2009.

RAUEN, F. J. **Roteiros de pesquisa**. Rio do Sul: Nova Era, 2006.

SANTAELLA, L. **Matrizes da linguagem e pensamento**: sonora, visual, verbal, aplicações na hipermídia. São Paulo: Iluminuras, 2001.

_______.**O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2003.

_______.**O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

SAITO, F. & M. H. R. Beltran. "**A ideia de experiência e o mapeamento dos fenômenos no MAGIA NATURALIS de Giambattista della Porta (1535-1615): um estudo preliminar**", in XIV Reunião da Rede de Intercâmbios para História e Epistemologia das Ciências Químicas e Biológicas, 2004, São Paulo. Ambiente, Natureza e Cultura na Perspectiva da História e da Epistemologia da Ciência: Ciências Naturais e suas Interfaces / Anais da XIV Reunião da Rede de Intercâmbio para História e Epistemologia das Ciências Químicas e Biológicas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004, p. 59-63.

SAUSSURE, F. **Curso de Linguística Geral**. São Paulo: Cultrix, 2001.

SILVA, C. R. **Conversão de registros de representação**: desenvolvimento de aplicativos para o ensino-aprendizagem de funções, 2009. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) – Programa de Pós-graduação em Ciências da Linguagem, Universidade do Sul de Santa Catarina, 2009.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. **Modelagem matemática e semiótica: algumas relações.** VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática em Londrina, Paraná, 2009.

VIEL, M. J. M.; DIAS, M. A. **Semiótica: a noção do termo semiótica e o registro de representação semiótica na percepção de professores da rede pública de ensino.** Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática de 2006.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.