PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATOLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

NATÁLIA COELHO SOARES

As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2012

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATOLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Natália Coelho Soares

As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***Mestre em Educação Matemática****, sob a orientação da Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado.*

São Paulo

2012

Banca Examinadora

_____

_____

_____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:_____ **Local e Data:** _____

Aos meus pais que me proporcionaram conforto e tranquilidade para chegar ao fim desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre iluminando meu caminho rumo à meus objetivos, mostrando-me as oportunidades surgidas e por me dar a capacidade de conquistá-las.

À minha orientadora, Professora Doutora Silvia Dias de Alcântara Machado, pela paciência, dedicação, apoio e por estar sempre pronta para me ajudar.

Às professoras, Helena Noronha Cury e Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, por aceitarem o convite para participar da banca deste trabalho e contribuírem com valiosas observações.

À professora Sandra Maria Pinto Magina, pelas relevantes sugestões no exame de qualificação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – pela bolsa concedida que possibilitou maior dedicação ao trabalho.

À coordenação do Grupo de Apoio à Escolarização Trapézio onde desenvolvi as atividades, pela atenção e contribuição a meu trabalho e também aos sujeitos de pesquisa pela colaboração.

A meus pais, por estarem sempre a meu lado, apoiando e incentivando meus estudos.

A todos os professores da Universidade, que contribuíram de alguma forma para que eu pudesse construir meu conhecimento.

A meus colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica - GPEA que, de alguma forma, contribuíram com suas críticas e sugestões.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa de mestrado que teve o objetivo de investigar se e como, alunos do 8º ano do ensino fundamental, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos, quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula. Para a coleta de dados, foram realizadas doze entrevistas semiestruturadas que caracterizaram o estudo de caso, conforme definido por André (2008). As análises das concepções construídas pelos sujeitos basearam-se sobretudo na teoria APOS**.** Concluiu-se que a introdução das tecnologias não usuais, como o ábaco e, principalmente, a calculadora com impressora possibilitaram o aprofundamento e a consequente ressignificação das concepções dos sujeitos sobre as operações dos números naturais.

Palavras-chave: operações com números naturais, aluno em dificuldade de 8º ano do EF, calculadora com impressora.

ABSTRACT

This research aimed to investigate whether and how eighth-grade middle school students who have difficulty in solving mathematical operations with natural numbers deepen their knowledge in this field when they have the opportunity to work with technological tools that are not frequently used in classroom. Data collection was based on twelve semi-structured interviews, which were done according to André (2008) concept of study of case. The students' conceptions about solving mathematical operations with natural numbers were analyzed based mainly on the APOS theory. It was concluded that by introducing technological tools that are not frequently used in classroom, such as abacus and printing calculator, the students were allowed to deepen their knowledge about natural numbers and, consequently, reframe their conceptions about it.

Keywords: operations with natural numbers, 8th-grade middle school student facing difficulties at school, printing calculator.

ÍNDICE

Introdução..... 10
Capítulo I – Justificativa..... 12
Capítulo II - Fundamentos teóricos: leituras e escolhas..... 18
A teoria APOS..... 18
A calculadora..... 22
Algumas pesquisas que ao abordarem o tema das operações com os números inteiros auxiliam nas análises e constituem um quadro coerente..... 23
Capítulo III - Metodologia e Procedimentos..... 28
Capítulo IV – Experimentação..... 32
Caracterização da Instituição..... 33
Contatos da pesquisadora com a Instituição..... 33
Perfil dos sujeitos da pesquisa..... 35
Descrição e análise dos encontros com Renato..... 39
1º encontro..... 40
2º encontro..... 51
3º encontro..... 59
4º encontro..... 63
5º encontro..... 68
6º encontro..... 73
7º encontro..... 81
8º encontro..... 87
9º encontro..... 90
10º encontro..... 94
11º encontro..... 101
Última conversa com Renato..... 107
Considerações Finais..... 110
Questões que surgiram da pesquisa realizada..... 114
Referências..... 118
Anexos..... 122

INTRODUÇÃO

O grupo Bourbaki, composto por matemáticos eminentes do século XX, elaborou um dos livros mais importantes de álgebra, cuja introdução inicia com a seguinte afirmação: “Fazer álgebra, é essencialmente calcular, isto é, efetuar, sobre elementos de um conjunto, ‘operações algébricas’, cujo exemplo mais conhecido é dado pelas “quatro regras” da aritmética elementar.”[1] (BOURBAKI, 1970, p.1, tradução do autor).

A afirmação acima dá respaldo suficiente para o objetivo da pesquisa aqui apresentada: investigar se e como, alunos de 8º ano, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos, quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula.

Desta forma, no primeiro capítulo, procuro situar o interesse pelo tema dentro de minha trajetória, e também no campo da educação algébrica. Em seguida, apresento a problemática e justificativa para delimitação do objetivo acima citado.

No segundo capítulo, apresento os referenciais teóricos que embasaram as análises destacando, como principal referencial a Teoria APOS. Apresento também pesquisas relacionadas ao uso de tecnologias sobretudo a calculadora e outras pesquisas relativas ao objeto de estudo.

O terceiro capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia e os procedimentos metodológicos realizados na obtenção da coleta dos dados.

No quarto capítulo, trago a experimentação propriamente dita, que traz a caracterização da Instituição onde a pesquisa foi realizada e os contatos com a

[1] Faire de l’algèbre, c’est essentiellemente *calculer*, c’est-à-dire effectuer, sur dês éléments d’um ensemble, dês <<opérations algébriques>>, dont l’exemple le plus connu est founi par lês <<quatre régles>> de l’arithmétique élémentaire.

mesma, o perfil dos sujeitos selecionados e, finalmente, a descrição dos encontros do pesquisador e o sujeito, seguida das análises *a posteriores* locais.

Nas considerações finais, sintetizo as análises e reflexões procurando responder ao objetivo da pesquisa.

CAPÍTULO I

JUSTIFICATIVA

Desde o início de minha Licenciatura em Matemática, cursada na Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" – UNESP, no campus de Guaratinguetá, até seu término em 2009, tive a oportunidade de participar de um projeto de iniciação científica – IC no qual participei por mais de 3 anos, que se originou no programa CIÊNCIA NA UNESP da vice-reitoria da Universidade. Esse programa tinha por objetivo geral:

> [...] reunir, institucionalmente e com dotação orçamentária própria, as atividades permanentes de divulgação da ciência nas três grandes áreas do conhecimento – Biológicas, Exatas e Humanidades – que estejam sendo, ou que venham a ser desenvolvidas, em Unidades da UNESP, direcionadas a alunos e professores, de todos os níveis de ensino, das redes pública e privada, bem como à comunidade em geral. (Programa UNESP de divulgação permanente da ciência, 2005[2])

O projeto foi denominado de "Montagem e Manutenção de um Laboratório de Materiais Didático-Pedagógicos para o Ensino-Aprendizagem da Matemática", e integrei-o como uma das duas bolsistas de iniciação científica; a coordenação era de uma professora do curso de Licenciatura em Matemática. Sua descrição explicita o que visava:

- Criar um local de encontro e discussão sobre novas técnicas de ensino-aprendizagem, bem como da disponibilização de materiais concretos para o ensino da Matemática; um local que também sirva para reuniões e como base de apoio para os licenciandos que estejam desenvolvendo seus Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC).
- Estudar, elaborar e disponibilizar manuais didático-pedagógico sobre materiais concretos para o ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica, bem como, disponibilizar para uso, por empréstimo, os próprios materiais visando, com isto, divulgar estes

[2] http://www.unesp.br/vicereitor/ciencianaunesp.php. Acesso em: 10 abr. 2008.

> materiais e assistir aos licenciandos da Matemática e a docentes da Rede Oficial de Ensino (Projeto “Montagem e manutenção de um Laboratório de Materiais Didático-Pedagógicos para o Ensino-Aprendizagem da Matemática”, 2006).

No início das atividades da IC, fomos incumbidas de mapear o material didático para o ensino da Matemática existente em uma sala da Universidade, conhecida como “Laboratório de Ensino de Matemática” – LEM. Na realidade, embora a sala tivesse essa denominação, era usada somente como depósito de materiais. O projeto visava a torná-la um laboratório para o ensino de Matemática que se constituísse em um ambiente propício para discussão de docentes e discentes da Licenciatura em Matemática sobre técnicas de ensino, uso de material didático, desenvolvimento de sequências didáticas e sobre os projetos de TCC (trabalho de conclusão de curso). O projeto pretendia também disponibilizar o espaço do laboratório para professores e alunos da rede pública da cidade.

Na IC, éramos duas bolsistas, dividimos o material existente e pesquisamos como se daria sua utilização. Assim, tive a oportunidade de estudar melhor o uso de diversos materiais didáticos tanto para conteúdos relativos à álgebra como à geometria. Dentre o material destinado ao trabalho com álgebra, investiguei sobretudo o ábaco para trabalho com as operações no conjunto dos números naturais, e um material constituído de peças de madeira para desenvolvimento de produtos notáveis.

Após a organização do material didático existente na sala, elaboramos com a ajuda da coordenadora sequências didáticas que incluíam os materiais didáticos encontrados na sala. Dessa forma, o material didático passou a se constituir em um material didático-pedagógico.

Munidas de carta de apresentação da Faculdade, nós, bolsistas de IC, procuramos escolas da rede estadual e municipal que aceitassem que aplicássemos as sequências didáticas elaboradas no LEM. Uma das sequências que apliquei em alunos do Ensino Fundamental II - EF II – incluía o uso do ábaco.

A participação no projeto, certamente, influiu em minha vontade de iniciar uma pós-graduação *stricto sensu*. Assim, no segundo semestre de 2010, ingressei no Mestrado Acadêmico do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

Dada minha percepção propiciada pela experiência na graduação, do grande destaque dado ao ensino de álgebra na Educação Básica, ao tomar conhecimento dos grupos de pesquisa do Programa, fui encaminhada ao Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA.

Ao participar das reuniões do GPEA e inteirar-me das pesquisas realizadas por seus participantes, e em decorrência de minha experiência anterior de iniciação científica, interessei-me sobretudo pelos estudos ligados ao projeto denominado “A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e Licenciatura” que estava sendo finalizado em 2010.

O projeto “A Teoria Elementar dos Números no Ensino Básico e Licenciatura” iniciado em 2003 teve suas primeiras pesquisas voltadas à teoria dos números no Ensino Médio. A partir de 2008, quando a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP iniciou a implementação de novo Programa para a Educação Básica, as pesquisas desse projeto voltaram-se, em especial, à investigação da abordagem do material disponibilizado a professores e alunos da rede estadual pela SEE/SP e para sua repercussão no corpo docente e discente da rede estadual.

Dentre as conclusões das pesquisas documentais relativas a esse projeto há convergência nas considerações sobre a existência de atividades que se referiam aos elementos básicos da Teoria Elementar dos Números, no material disponibilizado pela SEE/SP. Um desses elementos básicos, a divisibilidade, é assumida pelos membros do GPEA, conforme consta na descrição de Resende (2007):

> Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética. (RESENDE, 2007, p. 227)

É interessante notar que, conforme as pesquisas desse projeto, questões relativas à divisibilidade constam explicitamente do material das 5ª série/6º ano e 6ª série/7º ano, conforme observa D'Almeida (2010), o material da 7ª série/8º ano possibilita a retomada da divisibilidade em vários momentos.

No mesmo projeto, pesquisadores que focaram a aprendizagem sobre a divisibilidade, tanto de alunos do Ensino Fundamental como a de Pizysieznig (2011) quanto de estudantes do Ensino Médio, como a de Chaparin (2010), concluíram que o conhecimento de seus sujeitos de pesquisa sobre esse assunto mostrou-se bastante frágil.

Isto não me surpreendeu, não só pela vivência propiciada na época de minha iniciação científica, quando estive em contato com crianças do Ensino Fundamental II, mas também pelas leituras de relatórios de avaliação, como o do Sistema de Avaliação de Educação Básica – SAEB (2003). Esse relatório aponta que apesar do estudo das operações com os números naturais (adição, subtração, multiplicação e divisão) ser um tema central nos currículos do Ensino Fundamental, muitos alunos chegam ao final desse nível de ensino sem ter desenvolvido o domínio ou a compreensão dos procedimentos algorítmicos relativos a essas operações.

Neste momento, faz-se necessário salientar, que estou adotando operações nos números naturais, utilizando linguagem comum na escola e até previsto pelo grupo de matemáticos denominado Bourbaky, “algumas vezes, é dito, por abuso de linguagem, que uma aplicação E x E é uma lei de composição não em todos os lugares definidos no E” (Bourbaky, 1970, p.AI1, tradução do autor)[3].

Em decorrência dos estudos realizados durante a iniciação científica sobre os materiais didáticos e suas aplicações no ensino de Matemática combinados com minha participação das discussões sobre o significado de tecnologia na Educação Matemática propiciadas pelo grupo do projeto recém-iniciado “Educação algébrica e o uso de tecnologias”, percebi que esse projeto

[3] On dit parfois, par abus de langage, qu’une application d’une partie de E x E dans E est une loi de composition non partout definie dans E.

tinha tudo a ver com minha experiência anterior em IC e com minhas preocupações com o ensino da Álgebra.

O objetivo do projeto “Educação algébrica e o uso de tecnologias” é investigar os conhecimentos da álgebra escolar de alunos e professores em formação continuada, conhecimentos esses possibilitados e construídos pelo uso de tecnologias. Vale ressaltar que as pesquisas do GPEA utilizam o termo tecnologia com o seguinte significado: tecnologia é todo o tipo de instrumento que o professor pode lançar mão para subsidiar seu ensino e que o aluno pode usar em seu processo de aprendizagem para conjecturar, calcular ou validar suas ações.

As situações vividas e suas reflexões; as leituras em geral, especificamente, as pesquisas relativas aos projetos citados e a conclusão apresentada pelo relatório do SAEB de que os alunos *chegam ao final do Ensino Fundamental sem ter desenvolvido o domínio ou a compreensão dos procedimentos algorítmicos relativos a essas operações,* sugeriram-me a seguinte questão:

A retomada das operações com números naturais de aluno de 8º ano da rede estadual de São Paulo permeada pelo uso da tecnologia pode auxiliar o aprofundamento e a compreensão desse aluno sobre as operações com os números naturais?

Desta forma, estabeleci como objetivo de minha pesquisa:

Investigar se e como, alunos do 8º ano, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos, quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS: LEITURAS E ESCOLHAS

Neste capítulo, apresento a teoria APOS (actions, processes, objects, schemas), que escolhi como principal fundamento teórico de minha pesquisa, seguida de algumas considerações sobre o uso da calculadora em sala de aula de matemática, finalizando com alguns elementos de pesquisas reveladas pela revisão bibliográfica realizada e que, de alguma forma, me embasaram tanto na elaboração de atividades como em suas análises.

A teoria APOS

A teoria APOS, cuja sigla significa: actions (ações), processes (processos), objects (objetos), schemas (esquemas) foi desenvolvida por um pequeno número de investigadores do grupo denominado Research in Undergraduate Mathematics Education Community – **RUMEC,** conforme consta em Dubinsky e McDonald (2001). Essa teoria foi desenvolvida na tentativa de entender, sobretudo, a idéia de "abstração reflexionante" de Piaget com o intuito de delinear como os indivíduos constroem as estruturas lógico-matemáticas.

Um dos expoentes desse grupo, com vasta produção de pesquisas embasadas nessa teoria, é Ed Dubinsky da Universidade de Kent dos Estados Unidos da América (EUA). No que segue me baseei, sobretudo em Dubinsky (1991) e Asiala et al. (1996).

Conforme Dubinsky (1991) a **abstração reflexionante** permite ao indivíduo, com base nas ações sobre um objeto matemático, inferir propriedades e relações desse objeto, implicando, assim, na organização e tomada de consciência dessas ações. Dessa forma, a abstração reflexionante relaciona-se às atividades cognitivas do sujeito, atividades essas, em que os

sujeitos podem retirar propriedades e utilizar para outras finalidades, tendo assim um papel importante na construção dos conceitos matemáticos.

As novas construções matemáticas ocorrem por meio da abstração reflexionante, esta em sua forma mais avançada conduz ao pensamento matemático.

Dubinsky considerou cinco tipos de abstração reflexionante como sendo as mais importantes para o desenvolvimento matemático avançado, são elas: interiorização, coordenação, reversibilidade, encapsulação e generalização. É importante observar que a encapsulação não foi contemplada por Piaget.

Nos exemplos apresentados para cada um dos tipos de abstração reflexionante, me baseio em Chaparin (2010).

A **interiorização** sucede quando o indivíduo mostra-se capaz de utilizar símbolos, imagens mentais e linguagens para representar, ou seja, construir processos internos como forma de dar sentido às percepções sobre os fenômenos observados. Por exemplo, se um sujeito quiser saber se um número é divisível por 2, inicialmente, escolherá números quaisquer e dividirá por 2, percebendo que, quando o número for ímpar, o resto será 1; quando for par o resto será zero, posteriormente, interioriza o fato de que todo número par é divisível por 2.

A **coordenação** ocorre e é percebida quando o indivíduo escolhe e usa dois ou mais processos para construir um novo processo. Por exemplo, se o sujeito percebe que quando um número satisfaz o critério de divisibilidade por 3 e ao mesmo tempo obedece ao critério de divisibilidade por 2, então, o número será divisível por 6, ou seja, é divisível pelo produto deles.

A **reversibilidade** ocorre quando o indivíduo é capaz de construir um novo processo no sentido inverso ao original, ou seja, pensar de modo inverso um processo que já existe internamente.

Por exemplo, ao solicitar ao sujeito a tarefa de escrever um número de três dígitos que seja múltiplo de 6, ele precisa considerar quais são as propriedades relevantes que esse número tem de apresentar (o número tem de

ser par, critério de divisibilidade de 2, e ter a soma de seus dígitos divisível por 3, critério de divisibilidade de 3).

A **encapsulação** é, talvez, a mais importante na Matemática e a mais difícil aos estudantes. É a transformação mental de um processo (dinâmico) em um objeto cognitivo (estático), permitindo ao indivíduo verificar certas propriedades matemáticas. A desencapsulação é o processo mental de retroceder o objeto ao processo do qual ele foi encapsulado. Como exemplo, a encapsulação da divisibilidade como objeto pode levar a entender o conceito de divisibilidade como uma propriedade essencial dos números inteiros independente dos procedimentos da divisão.

A **generalização** acontece quando um indivíduo “aplica um esquema existente para uma ou uma vasta coleção de fenômenos” (Dubinsky, 1991 p.18, tradução do autor), ou seja, estende características comuns a um domínio mais amplo com base em suas particularidades. Por exemplo, um sujeito que conhece as propriedades, as relações, o conceito de divisor, múltiplo, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum considerando o conjunto dos números naturais, percebe que tais fatos citados também são válidos para o conjunto dos números inteiros, o sujeito nesse caso dá lugar a um novo objeto matemático: a divisibilidade dos números inteiros.

A teoria APOS considera que os processos envolvidos na construção dos conhecimentos matemáticos estão relacionados, tanto ao pensamento matemático elementar como ao avançado.

Conforme Asiala et al. (1996), a teoria APOS considera que os indivíduos realizam construções mentais para obter significados dos problemas e situações matemáticas. Desta forma, Dubinsky e seus colaboradores apoiam seu trabalho não apenas na análise teórica de um determinado conceito matemático, mas também no desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem. As fases das construções mentais são denominadas: ação, processo, objeto e esquema.

A **ação** é executada pelo indivíduo sobre um objeto matemático, ou seja, é a transformação do objeto, a fim de obter outro objeto. A ação é percebida

pelo indivíduo como uma realização externa em que cada etapa sugere o que vai ser feito na etapa seguinte de forma encadeada. Um indivíduo tem uma concepção ação de um dado conceito se a intensidade da compreensão for limitada pela realização de ações relativas àquele conceito. Por exemplo, quando o indivíduo, para verificar o resultado de alguma operação usa um algoritmo[4]. Ele poderá realizar a ação, mas não estar limitado a ela. Quando mostra estar limitado a ações sobre o objeto se diz que ele tem uma **concepção ação.**

O **processo** é caracterizado por uma construção interna que possibilita ao indivíduo realizar uma ação sem necessitar de um estimulo externo. Um indivíduo tem uma **concepção processo,** quando ele tem controle da transformação realizada sobre um objeto matemático, podendo descrever, refletir sobre as etapas da transformação sem realmente efetuá-las. Por exemplo, quando o indivíduo compreende no caso da multiplicação que o produto de um número vezes o outro, independente da ordem é o mesmo, ou seja, ele não tem a necessidade de efetuar a operação duas vezes.

O **objeto** na Teoria APOS é caracterizado pela encapsulação do mesmo. Um indivíduo tem uma **concepção objeto,** quando é capaz de construir e reconstruir transformações, ou seja, quando o indivíduo reflete sobre as operações realizadas em processos particulares, tornando-se ciente do processo como um todo. Por exemplo, quando é capaz de relacionar as operações, adição e subtração, multiplicação e divisão.

Um **esquema** desenvolve-se de forma dinâmica e inovadora. É uma coleção de ações, processos, objetos relacionados consciente ou inconscientemente, organizados de modo estruturado na mente do indivíduo. Refletindo sobre um esquema, o indivíduo pode transformá-lo em um objeto para executar novas ações.

---

[4] Por exemplo quando o professor solicita a divisão de 227 por 2 e o aluno representa como na figura:

```
 227 | 2
-226 | 113
------
   1
```

Dubinsky (1991) sugere que essa teoria pode ser utilizada não só para descrever a construção de conceitos matemáticos, mas também para sugerir explicações para algumas dificuldades que os alunos apresentam diante desses conceitos ou até mesmo influenciar na elaboração de currículos.

Desta forma, essa teoria permite por meio de atividades propostas pelo pesquisador ou professor, realizadas por um ou mais sujeitos, observar se e como ele(s) supera(m) as dificuldades que porventura tenha(m) em relação a questões de divisibilidade de números inteiros em geral e, mais especificamente, com as operações nos números naturais e inteiros.

A calculadora

Dentre as tecnologias passiveis de serem utilizadas no ensino e na aprendizagem de Matemática, destaco a calculadora, pois ela tem a vantagem de ser um instrumento de fácil aquisição e mobilidade e pelo fato de seu pouco uso pelos professores de Matemática em geral, conforme atestam Bianchini e Machado (2010), constitui um elemento motivador na revisão de conceitos.

Desde 1987, o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM - recomenda o uso da calculadora pelo estudante de Matemática, justificando que ela permite aos estudantes:

> [...] se concentrar mais no processo de resolução do que nos cálculos associados aos problemas; ter acesso a matemática para além da mera capacidade de cálculo; a explorar, desenvolver e reforçar conceitos incluindo estimação, cálculos, aproximação e suas propriedades; fazer experiências com ideias matemáticas e descobrir padrões e leis de formação; efetuar aqueles cálculos fastidiosos que aparecem quando se trabalha com dados de situações reais durante a resolução de problemas (NCTM, 1987).

Ainda em um cenário mundial, em 1989, Ponte já sugeria o uso da calculadora, pois ela "pode ser utilizada para apoiar o desenvolvimento de novos conceitos, para formular conjecturas e explorar relações matemáticas, e para resolver problemas" (PONTE, 1989, p.1).

No Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN, elaborados em 1997, propõem a utilização da calculadora tanto no Ensino Fundamental I como no Ensino Fundamental II. Os PCN provocam uma reflexão sobre sua importância, pois é um recurso eficiente que possibilita "a construção e análise de estratégias que auxiliam na consolidação dos significados das operações e no reconhecimento e aplicação de suas propriedades" (PCN, 1997, p. 115). No Ensino Fundamental I, sugerem que a calculadora:

> [...] é um instrumento que pode contribuir para a melhoria do ensino da Matemática. A justificativa para essa visão é o fato de que ela pode ser usada como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação (...) é também um recurso para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação (BRASIL, 1997, p.34).

Dessa forma, entendo o emprego da calculadora como um dos principais elementos tecnológicos motivadores para a retomada e, talvez ressignificação de conteúdos relacionados às operações com números naturais de sujeitos em risco de fracasso escolar.

Algumas pesquisas que ao abordarem o tema das operações com os números inteiros auxiliam nas análises e constituem um quadro coerente

Para qualquer diagnóstico sobre o estado do conhecimento de um aluno sobre determinado assunto matemático, é importante perceber tanto o domínio do aluno sobre aquele assunto como suas dificuldades.

Para detectar algumas dificuldades no trato de frações e compreender a razão das mesmas, apoio-me na "análise de erros" proposta por Helena **Cury** (2007). Nesta obra a autora apresenta as ideias dos precursores no assunto, alguns exemplos de trabalhos sobre análise de erros em questões matemáticas e, a seguir, resultados parciais de uma pesquisa desenvolvida por 14 docentes de cursos de ciências exatas, com 368 alunos de nove instituições de Ensino Superior no Brasil.

O objetivo de sua pesquisa era analisar e classificar os erros dos alunos, bem como desenvolver estratégias que os auxiliassem em suas dificuldades.

Dentre os erros indicados por Cury, destaco aqueles que os alunos cometem ao estudar frações. Conforme a autora, há erros comuns entre os alunos do Ensino Fundamental que também aparecem em alunos até no Ensino Superior. Por exemplo, no trato da adição de frações, o aluno ao somar duas ou mais frações, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ apresenta o resultado como sendo $\frac{a+c}{b+d}$. A autora ressalta que outros pesquisadores observaram o mesmo erro.

A análise das respostas dos alunos auxilia pesquisadores e professores a entenderem como os estudantes apropriam-se do saber. Dada a importância dessa metodologia de pesquisa, Cury recomenda que a análise de erros seja um dos componentes dos planos pedagógicos dos professores levando em conta os objetivos do ensino de cada disciplina. Como atestam os autores do assunto, essa metodologia é uma ferramenta útil para a compreensão de fatores ligados ao ensino e à aprendizagem matemática.

No trato das operações com os números naturais, ao enfocar as operações aditivas, utilizo uma das últimas pesquisas de **Magina et al.** (2010), que teve por objetivo realizar um diagnóstico sobre as estratégias utilizadas por alunos das séries iniciais ao resolverem problemas, envolvendo as operações de adição e subtração, considerando-as operações aditivas. O artigo traz resultados de outras pesquisas de Magina relacionadas ao estudo das operações aditivas, mostrando que o acerto dos problemas do campo aditivo não está apenas relacionado à série, mas, ao grau de complexidade desses problemas.

A autora destaca que esses resultados podem estar indicando que não foi oferecido aos estudantes um trabalho mais diversificado com problemas de adição e subtração, utilizando estratégias e materiais didáticos que possibilitem ao aluno compreender as relações envolvidas nas situações-problema.

Magina ainda propõe um questionamento: Se o percentual de acerto na quarta série é da ordem de 65%, em problemas de adição e subtração

envolvendo números naturais “pequenos”, o que se pode esperar de problemas envolvendo as estruturas multiplicativas?

Com relação às atividades que envolvem a operação de multiplicação dos números naturais, utilizo resultados da pesquisa de **Barreto** (2001). A autora teve como objetivo de sua pesquisa analisar os procedimentos de resolução de problemas verbais multiplicativos elementares, mobilizados por uma população de alunos de 5ª série. Nesse trabalho, Barreto buscou ressaltar o modo como esses procedimentos se expressam, bem como as características das situações-problema sob as quais eles emergem.

“Dentre os procedimentos utilizados pelos alunos, foram observados um grande número de procedimentos não canônicos, como a adição repetida” (BARRETO, 2001, p.84). A explicação para a ocorrência desse procedimento é a seguinte: “Como o ensino da adição precede o da multiplicação, um primeiro contato com esse conceito ocorre por meio da ‘adição repetida’” (FRANCHI, 1995, apud BARRETO, 2001, p.20).

Os outros procedimentos não canônicos destacados por Barreto (2001) foram a “multiplicação com termo desconhecido” e multiplicações sucessivas que foram usadas na resolução de problemas elementares, conforme a autora.

A respeito da divisibilidade, emprego resultados de investigações de **Campbell e Zaskis** (2002) sobre o ensino e aprendizagem da Teoria dos Números. Dentre suas conclusões, os autores destacam que as dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão da Teoria dos Números têm raízes no pensamento da divisão com resto, pois afirmam que este assunto não é tratado na escola básica, como algo fundamental no conjunto dos números inteiros.

Das pesquisas realizadas pelo grupo do qual participo GPEA, destaco a seguir dois trabalhos: a tese de Resende (2007) e a dissertação de Pizysieznig (2011).

Resende (2007) realizou uma pesquisa com o objetivo de compreender a Teoria dos Números, como saber a ensinar, no intuito de buscar elementos para a ressignificar na Licenciatura em Matemática.

Em busca desses elementos Resende analisou as propostas curriculares das disciplinas que tratavam de Teoria dos Números em cursos de doze universidades brasileiras particulares e públicas, analisou dez livros didáticos dentre os mais citados nos programas das disciplinas, e realizou sete entrevistas semiestruturadas com professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática.

Em seus resultados, a pesquisadora alerta que, por falta de uma compreensão mais ampla de sua importância, alguns assuntos de Teoria Elementar dos Números vêm sendo retirados dos currículos.

Na análise dos livros didáticos, Resende afirma que dentre os livros por ela analisados, em nenhum deles há tarefas de investigação e exploração, sugerindo um tipo de ensino expositivo e centrado no professor.

A autora descreve que os pesquisadores entrevistados por ela concebem a Teoria dos Números como sendo uma área matemática fundamental, por estudar sobretudo os números naturais e os números inteiros que constituem o alicerce para a construção de conceitos desenvolvidos na Educação Básica. Com apoio dos dados obtidos, a pesquisadora sugere que na Licenciatura em Matemática haja uma disciplina chamada “Teoria Elementar dos Números”, com “um núcleo constituído dos seguintes temas”:

> **Números Inteiros**: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais; operações, algoritmos e propriedades; definição por recorrência (potências em N, sequências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e princípio da indução finita.
> **Divisibilidade**: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética.
> **Introdução à congruência modula m**: definição, propriedades, algumas aplicações.
> **Equações diofantinas lineares** (RESENDE, 2007, p. 227).

Neste trabalho, restringir-me-ei aos seguintes itens dos dois primeiros temas: representações dos números naturais; operações, algoritmos e propriedades do primeiro e algoritmo da divisão, divisor e múltiplo de um número natural e números primos do segundo tema.

Ainda no trato da divisibilidade, utilizo a pesquisa de **Pizysieznig** (2011) que teve por objetivo investigar a concepção de divisibilidade, de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, explicitada por atividades nas quais puderam recorrer ao uso da calculadora simples.

O autor realizou a aplicação de duas sequências didáticas, focalizando os conceitos de divisor e múltiplo de um número natural, números primos e a operação de divisão, com alunos do 6º ano, voluntários de uma escola pública estadual de São Paulo.

Pizysieznig (2011) constatou que os alunos recorrem igualmente à calculadora e ao cálculo mental para realizar uma divisão, que metade de seus sujeitos de pesquisa apresenta uma concepção equivalente à concepção processo em fase de interiorização do conceito de múltiplo e que nenhum aluno mostrou conhecer o significado matemático de divisor.

Buscando justificar o comportamento dos sujeitos no decorrer da pesquisa, recorro a **Oliveira e Moreira (2010)** que tratam da relação com o saber matemático de alunos em risco de fracasso escolar. Os autores afirmam que compreender a relação dos alunos em situação de risco com o saber matemático pode contribuir para o desenvolvimento de estratégias mais eficazes e que, para isso, devemos considerar elementos importantes como a história escolar do aluno, a representação que ele possui da Matemática e os efeitos da relação familiar em sua história escolar. Os autores ressaltam também que embora haja uma relação entre a origem social da criança e seu sucesso ou fracasso escolar, essa não é uma relação direta, pois nenhum fator isolado é capaz de explicar o sucesso ou fracasso escolar.

Ainda na visão dos autores, a Matemática é uma das disciplinas escolares com característica acumulativa forte, e o bom desempenho em uma série depende do que se aprendeu nas anteriores, o que pode influenciar, em determinado momento, no abandono do aluno por considerar grande seu nível de dificuldades.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Neste capítulo discorro sobre a escolha da metodologia de pesquisa e dos procedimentos adotados para obter os dados necessários para atingir o objetivo almejado: **Investigar se e como, alunos de 8º ano, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos, quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula.**

Com o objetivo da pesquisa determinado, embasei-me, sobretudo, no livro de André (2008) que trata da pesquisa qualitativa do tipo *estudo de caso*. É desse livro que consta o seguinte conselho de Stake (1985 apud ANDRÉ, 2008, p. 29) se o pesquisador quiser entender um caso particular levando em conta seu contexto e complexidade então o estudo de caso se faz ideal. Dessa forma, resolvi aprofundar-me nessa metodologia de pesquisa que me pareceu a mais adequada a meus propósitos.

Merriam (1985 apud ANDRÉ, 2008) destaca quatro características essenciais em um estudo de caso: particularidade, descrição, heurística e indução.

> **Particularidade** significa que o estudo de caso focaliza uma situação, um programa, um fenômeno particular. O caso em si tem importância, seja pelo que revela, seja pelo que representa. É pois, um tipo de estudo adequado para investigar problemas práticos, questões que emergem do dia a dia (p.17).

Nesta pesquisa, a particularidade repousa no fato de que os sujeitos são alunos de 8º ano da rede estadual de ensino de São Paulo, com dificuldades escolares em Matemática.

> **Descrição** significa que o produto final de um estudo de caso é uma descrição "densa" do fenômeno em estudo. Por descrição densa entende-se uma descrição completa e literal da situação investigada. [...] O estudo de caso engloba um grande número de variáveis e retrata suas interações ao longo do tempo (p.18).

Em minha investigação, tenho consciência de que a reconstrução do "real" que deverei fazer não é a única possível ou correta, mas espero oferecer elementos suficientes, para que o leitor julgue a credibilidade do relato e a pertinência das interpretações.

> **Heurística** significa que os estudos de caso iluminam a compreensão do leitor sobre o fenômeno estudado. Podem revelar a descoberta de novos significados, estender a experiência do leitor ou confirmar o já conhecido (p.18).

Em acordo com essa característica, espero com esta pesquisa potencializar a revelação de novos significados e a ampliação tanto de minha como da experiência dos leitores sobre o fenômeno focado:

> **Indução** significa que em grande parte, os estudos de caso se baseiam na lógica indutiva (p.18).

Tenho a intenção de fornecer informações bem detalhadas do contexto em estudo, de modo que o leitor tenha base suficiente para fazer julgamento da possibilidade de transferência para outro contexto.

Neste estudo de caso, o contexto da coleta de dados foi criado de forma a ocorrer em diversas sessões que foram planejadas com base em alguns pressupostos da Engenharia Didática "[...] compreendida como um produto resultante de uma análise a priori*"* conforme Machado (2010, p.234).

A engenharia didática admite dois níveis: o macro e o microdidático. Minha pesquisa está inserida no projeto: *Educação Algébrica e o uso de tecnologias.* O objetivo do projeto maior é investigar as possibilidades criadas pela introdução da calculadora no trato de assuntos algébricos, quando da retomada pelos alunos desses assuntos. O uso da calculadora constitui um elemento essencial e predeterminado de minha pesquisa, a qual, em termos da Engenharia Didática, é de nível macrodidático.

A Engenharia Didática compreende quatro fases: análises preliminares, construção e análise *a priori* de uma sequência didática, experimentação e análise *a posteriori*, e institucionalização.

A seguir, resumo os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, correspondentes às fases inspiradas e adaptadas da Engenharia Didática.

Na primeira fase, as **análises preliminares** consistiram sobretudo de uma revisão bibliográfica sobre a teoria de Piaget e da teoria APOS dela derivada; sobre as pesquisas qualitativas em específico, sobre o estudo de caso e a Engenharia Didática; sobre o uso de tecnologias em geral e, especificamente, da calculadora simples; pesquisas sobre à Teoria Elementar dos Números e, demais pesquisas correlatas a meu tema, como teses e dissertações, artigos e livros de autores sobre os temas citados. Essa revisão não se deu necessariamente nessa ordem estendeu-se também nas outras fases da pesquisa.

Durante o tempo das análises preliminares, entrei em contato com uma Organização Não Governamental – ONG – que acolhia alunos encaminhados por escolas públicas por serem considerados passiveis de fracasso escolar, pois a escola não obteve êxito em recuperá-los.

Em uma reunião com uma das responsáveis pela ONG, ficou acordado entre nós, eu e essa coordenadora, que faria minha pesquisa com, no máximo, três crianças com a finalidade obter dados para minha pesquisa de mestrado. Acordamos ainda, que garantiríamos o anonimato das crianças investigadas e que poderíamos utilizar o nome verdadeiro da Instituição.

As responsáveis pela Instituição reuniram-se e selecionaram os três sujeitos que participariam da pesquisa, de acordo com o ano escolar que estavam cursando, 8º ano, bem como a disponibilidade que possuíam em participar dos encontros com o pesquisador.

Após a seleção dos sujeitos, passei a elaborar os documentos exigidos pelo Comitê de Ética da PUC-SP com a finalidade de obter a permissão de realizar a pesquisa com os “estudantes” com menos de 18 anos.

Dada a aprovação da pesquisa pelo Comitê de Ética, providenciei as assinaturas ao Termo do Consentimento Livre e Esclarecido dos responsáveis dos menores.

Dei inicio então a **segunda fase** da pesquisa, com a elaboração do roteiro do primeiro do encontro e o esquema para os roteiros dos encontros posteriores, constituídos sobretudo por atividades a serem propostas aos sujeitos, de modo a obter elementos sobre a concepção dos sujeitos da pesquisa sobre as operações com os números naturais. Para a análise *a priori* de cada atividade, embasei-me no estudo teórico realizado, relacionando-o às informações obtidas na ONG sobre as dificuldades em Matemática de cada um dos sujeitos.

A terceira fase, a **experimentação**, consistiu de encontros individuais com cada um dos sujeitos. Para o primeiro encontro, preparei o mesmo roteiro, pois as "queixas" eram similares. Após o primeiro encontro com cada um, passei a preparar roteiros específicos de acordo com o objetivo da pesquisa, porém levando em conta a *análise a posteriori "local"* de cada encontro.

Na descrição de cada encontro, apresento a análise *a priori* feita para a elaboração das atividades propostas e a *análise a posteriori "local"* das estratégias observadas.

Durante e logo após cada encontro, tomei o cuidado de anotar as ocorrências além de coletar a produção do sujeito durante o mesmo. Essa coleta e observações anotadas deram condições para a necessária *análise a posteriori local*, que deu fundamentação à elaboração do roteiro e atividades do encontro seguinte.

A *análise a posteriori*, propriamente dita, foi feita no final da experimentação.

Após o exame de qualificação, acatei a sugestão da banca de restringir - me aprofundar somente em um dos casos pesquisados.

CAPÍTULO IV

EXPERIMENTAÇÃO

Inicio este capítulo com a caracterização da Instituição onde a pesquisa foi desenvolvida, Centro de Apoio à Escolarização Trapézio, prossigo com a descrição dos principais contatos com os responsáveis pela ONG, seguida do perfil dos três sujeitos selecionados para participar da investigação. Finalizo com a descrição e análise dos encontros com um dos sujeitos da pesquisa, denominado ficticiamente de Renato.

Caracterização da Instituição

A Instituição é uma ONG sem fins lucrativos que:

> [...] desenvolve ações sociais dirigidas à comunidade escolar, alunos, pais e educadores, e tem por objetivo principal melhorar a qualidade do ensino e do desempenho escolar, para isto, conta com um centro de estudos que organiza, promove, sistematiza e registra o conhecimento gerado a partir de sua experiência, visando o aprimoramento do trabalho, a disseminação do conhecimento, e a inspiração de boas práticas educativas com o consequente benefício de crianças e adolescentes (Sitio da Instituição, 2011)[5].

Os alunos atendidos pela Instituição são encaminhados pelas escolas públicas. Cada criança passa por uma triagem, procedimento de avaliação para definir o encaminhamento aos diferentes "programas" mantidos pela Instituição. Todos os casos atendidos são acompanhados por um profissional da equipe, chamado de "referência", que é responsável por realizar intervenções individuais com o aluno e sua família e pela interlocução com a escola e com os outros profissionais e/ou outras instituições envolvidos no caso.

[5]Disponível em: www.trapezio.org.br. Acesso em: 17 mar. 2011.

As atividades oferecidas aos alunos são realizadas prioritariamente em grupos (oficinas) e, em alguns casos, há atendimento individual (psicológico e/ou fonoaudiológico).

As oficinas são realizadas em grupos e visam a:

> [...] promover trocas de experiências, saberes e dúvidas; incentivar a autonomia e implicação com o aprender; promover também o encontro com as diferenças de estilos, tocando em questões como tolerância e respeito, imprescindíveis a qualquer situação de convívio social (Sitio da Instituição, 2011).

A Instituição oferece as seguintes oficinas: experiências matemáticas, linguagem, roda da leitura e ateliê de artes.

Contatos da pesquisadora com a Instituição

Em dezembro de 2010, convidada por minha orientadora, visitamos a ONG caracterizada acima, que atende crianças com dificuldades de aprendizagem, pois víamos a oportunidade de iniciar uma pesquisa que investigasse a relação de alunos com muita dificuldade escolar em Matemática, especialmente, com a álgebra[6].

Tivemos uma conversa preliminar com uma das coordenadoras da Instituição, quando nos inteiramos de suas atividades e da necessidade que seus dirigentes viam na contribuição de pesquisadores da área de Educação Matemática para complementação e apoio do trabalho dos colaboradores da ONG, doravante denominada Trapézio.

A proposta de "trabalhar" com crianças com dificuldade em Matemática escolar veio ao encontro de meu interesse em investigar a aprendizagem de álgebra com auxílio de tecnologias.

Dessa forma propus-me a trabalhar com os alunos atendidos pelo Trapézio e iniciei as tratativas para tal.

[6] Os membros do GPEA acreditam que o pensamento aritmético está imbricado com o pensamento algébrico desde a mais tenra infância. Assim, para nós do GPEA, desde as séries iniciais quando os alunos começam a estudar as operações já ocorre implicitamente recorrência ao pensamento algébrico.

Por outro lado, garanti minha observância aos horários estabelecidos em comum acordo com dirigentes do Trapézio, bem como minha presença nas reuniões marcadas com a direção e outros membros da Instituição.

Após o primeiro contato com a Instituição, em dezembro de 2010, e a decisão de realizar a pesquisa com aquele perfil de sujeito, a convite da dirigente passei uma tarde nas dependências da Instituição, catalogando o material, disponível em suas dependências, relacionado com o ensino de Matemática.

Dado meu interesse em realizar minha pesquisa na Instituição, as coordenadoras propiciaram uma reunião de toda equipe do Trapézio comigo e minha orientadora com a finalidade de nos conhecer e de fornecer mais elementos, para que conhecêssemos o trabalho desenvolvido pela equipe em relação à matemática.

Essa reunião contou com as dirigentes e toda a equipe de colaboradores, composta em sua maioria por psicólogos e alguns pedagogos e fonoaudiólogos.

Após nossa apresentação, iniciou-se a fase da apresentação de cada um dos presentes, quando tiveram a oportunidade de tocar nos problemas que percebiam estar ligados ao ensino e à aprendizagem de Matemática dos alunos atendidos pela ONG. Dentre esses problemas, sobressaiam-se as dificuldades desses alunos em lidar com operações “simples” (sic) com os números naturais. Foram destacadas também dificuldades no “trato” de frações, *alguns não sabem nem o nome* (sic), e com questões ligadas à divisibilidade.

Além das observações anteriores, os colaboradores listaram as dificuldades deles próprios ao tratar de assuntos matemáticos com os alunos atendidos. As principais questões levantadas pela equipe de colaboradores foram: a dificuldade quanto à elaboração do material de sondagem inicial sobre Matemática para a triagem, tanto às crianças já alfabetizadas como àquelas com dificuldade de leitura e a dificuldade que eles próprios sentiam com a nomenclatura e contextualização dos conceitos matemáticos.

Nessa reunião, explicaram-nos que a oficina de Matemática foi criada em 2009 e emergiu de projetos que eram realizados pela Instituição que remetiam a assuntos relacionados à Matemática. O assunto tratado nas oficinas era determinado pelas dificuldades matemáticas surgidas em outras oficinas. Dentre esses, foram destacados o da investigação com alunos do Fundamental II sobre o surgimento dos números, utilizando *Os números na história da civilização* de Imenes (1999), o do trabalho com jogos[7], como o "ninho das cobras" e o "dominó" para trabalhar estratégias e leitura de dados para estimular a observação, baralho para o estudo de sucessor e antecessor; o relógio de ponteiro para ensinar a ver a hora e também a noção do tempo. Acrescentaram que já haviam realizado a familiarização com a calculadora, seguindo sugestão de texto de autoria de minha orientadora.

Algumas das questões apresentadas foram discutidas e a equipe mostrou-se interessada e mobilizada pelo tema do ensino de Matemática.

Após a primeira reunião, encontrei-me com as duas coordenadoras a fim de estabelecer como iria participar e realizar minha pesquisa. Ficou acordado que eu atenderia três alunos de forma individual, com uma hora semanal cada, com vistas a realizar a pesquisa.

Indicaram-me os alunos atendidos pela Instituição denominados neste texto de Júlia, Gabriel e Renato[8]. As coordenadoras sugeriram que iniciasse minha pesquisa enfocando as frações, pois, de acordo com observação da equipe era um dos assuntos que os três sujeitos indicados para participar do estudo informavam ter mais dificuldade na Matemática.

Perfil dos sujeitos da pesquisa

No que segue, baseei-me nas conversas com as coordenadoras e no prontuário de cada um dos sujeitos, prontuários esses elaborados sobretudo pelas pessoas chamadas pela ONG de "referência" de cada aluno assistido,

[7] Propostos para a oficina de experiências matemáticas das escolas públicas em tempo integral.
[8] Nomes fictícios, para preservar o anonimato dos sujeitos de pesquisa.

para conhecer o perfil de cada um dos sujeitos. Os dados apresentados referem-se àqueles conhecidos em 2011.

Gabriel

No ano da experimentação, Gabriel conta com 13 anos de idade e cursa o 8º ano. É filho único, mora com a mãe que é pedagoga, e não tem contato com o pai.

Gabriel foi encaminhado pela escola estadual que frequenta, com a observação de que *é um aluno que não acompanha a sua turma.* Na Instituição, Gabriel não frequenta as oficinas, mas recebe atendimento psicológico e fonoaudiológico.

Renato

Renato com 13 anos, cursa o 8º ano, foi encaminhado pela escola estadual que frequentava em 2009, época em que realizava o 6º ano/5ª série do Ensino Fundamental. Consta do prontuário do aluno que seu encaminhamento foi feito pelos professores de Português, de Matemática e pela coordenadora da escola com a alegação de que era *um aluno disperso, não se concentrava, realizava parcialmente as tarefas de sala de aula e de casa e não questionava nada* (sic) e que, embora já tivessem feito trabalhos individuais e em grupos com Renato, *ele continuava apresentando conceitos não satisfatórios em Matemática* (sic). Em seu histórico escolar, consta que o aluno frequentou o 5º ano em outra escola estadual, na sala PIC e na "sala de recurso" [9].

Os relatórios da "referência" de Renato no Trapézio trazem informações sobre entrevistas com sua mãe. Desses relatórios, infere-se que até o primeiro

[9] Sala PIC: Programa de Intensivo do ciclo I; "sala de recurso": sala disponível para alunos que apresentam alguma necessidade educacional especial, temporária ou permanente. Entre eles estão os alunos com dificuldades acentuadas de aprendizagem ou limitações no processo de desenvolvimento que dificultam o acompanhamento das atividades curriculares. (BRASIL, 2001, p.50).

contato que tive com Renato, ele vivia com seus pais e uma irmã em uma casa na periferia de São Paulo. O pai estava desempregado e era alcoólatra. A mãe trabalhava como faxineira da escola e a irmã, um ano mais nova que Renato, não “dava trabalho”, pois fazia tudo sozinha. Conforme a fala da mãe, Renato é preguiçoso, prefere brincar a fazer lição e, ela não consegue ajudá-lo, pois é não letrada. Consta também do relatório que rotineiramente mãe e filho chegam em casa por volta de 20h30.

A seguir, apresento as atividades diárias semanais de Renato.

De segunda a sexta-feira, Renato saí de casa às 5h e permanece na escola das 7h às 12h30. Nas terças e quintas-feiras o sujeito frequenta a instituição, e na terça-feira permanece das 14h à 16h nas oficinas de linguagem e experiências matemáticas e na quinta-feira das 13h às 16h no encontro com o pesquisador e nas oficinas de artes e leitura. Nas segundas, quartas e sextas-feiras vai à escola de futebol no período da tarde.

Todos os dias, ao encerrar as atividades descritas acima, Renato vai ao trabalho da mãe esperá-la para poderem ir embora, chegando em casa todos os dias às 20h 30.

Conforme pode ser constatado, Renato é uma criança que vivencia uma rotina diária inadequada a sua idade, pois tem apenas 8 horas diárias das 20h30 da noite às 4h30 da manhã seguinte: para dentre outras coisas jantar, dormir, tomar a refeição matinal e fazer suas lições.

Júlia

Júlia tem 17 anos e cursa o 8º ano, desde que foi encaminhada e frequenta a ONG mora em um abrigo em São Paulo com seu único irmão. Ambos estão internados no abrigo por problemas com a mãe, a única responsável por eles. Em 2010, depois de fugir desse abrigo por inúmeras vezes, Júlia decidiu por ela mesma que não iria mais fugir e que buscaria algo significativo para a própria vida.

Assim, foi encaminhada à Instituição pela escola estadual que frequentava, quando realizava o 6º ano/5ª serie do Ensino Fundamental. Consta do prontuário a queixa de que era *uma aluna muito desinteressada.* Na Instituição, frequenta as oficinas de linguagem e experiências matemáticas, ateliê de artes e roda de leitura.

A descrição e análise dos encontros com Gabriel e Júlia não serão apresentados neste texto, pois a banca do exame de qualificação, conforme já dito anteriormente, julgou suficiente aprofundar as análises dos encontros com Renato para ter condições de responder à questão de minha pesquisa.

Dessa forma, limito-me a expor resumidamente o desempenho de Gabriel nos primeiros encontros e a justificativa das inúmeras faltas de Júlia aos encontros.

Gabriel levou ao primeiro encontro seu material escolar de Matemática, constituído de um caderno e uma apostila da escola com atividades de reforço. Após nos apresentarmos e minha tentativa de expor que estava ali como pesquisadora, Gabriel começou a explicar suas dúvidas em Matemática, como se estivesse diante de uma aula particular.

Como suas dúvidas referiam-se aos temas das atividades preparadas, apresentei-lhe a primeira atividade. Em um primeiro momento, ele olhou para o papel da atividade e ficou olhando sem mesmo pegar no lápis disponível. Então, para estimulá-lo, li a questão para ele. Gabriel respondeu a primeira questão e às seguintes corretamente, mostrando que dominava o que foi apresentado. No entanto, é preciso indicar que Gabriel não sentiu necessidade em registrar nada por escrito, fazendo toda a resolução “de cabeça”. Percebi que só resolvia a atividade proposta mentalmente depois que eu a lia em voz alta.

Insisti então que ele lesse o enunciado de uma atividade, o que denunciou sua grande dificuldade, tanto na leitura como no registro escrito da resposta. O próprio Gabriel reconheceu sua dificuldade na leitura e na escrita,

pois afirmou em conversa que, *não tenho problema com a Matemática, só comecei a ir mal quando o português entrou na Matemática!* (sic).

Dessa forma, após os primeiros encontros do semestre dedicados à pesquisa de campo, solicitei uma reunião com a pessoa "referência" de Gabriel na ONG. Nessa reunião, a referência comentou que Gabriel mostrava interesse em continuar com os encontros, conforme ele já havia explicitado em nosso último encontro, o que consideramos como fato positivo; no entanto, chegamos à conclusão que seu problema era fundamentalmente com a leitura e escrita e que seria mais conveniente utilizar seu tempo na ONG com encontros que visassem a um trabalho com leitura e escrita. Assim, depois dessa reunião restringi minha coleta de dados aos encontros com Renato e Júlia.

Desde os primeiros encontros, Julia enfrentava dificuldade para se deslocar até à Instituição, o que fez com que faltasse em muitos deles durante o semestre estabelecido para a realização da pesquisa de campo. No entanto, conforme relato de sua "referência" no Trapézio, ela gostava dos encontros e dizia que já estava entendendo *um pouco de Matemática* (sic). Dado seu interesse, continuei com as reuniões semanais com ela após o semestre dedicado à pesquisa de campo, porém, sem a intenção de coletar dados para minha pesquisa de Mestrado.

Passo agora a descrever e analisar os encontros com Renato, pelas razões já apresentadas anteriormente.

Descrição e análise dos encontros com Renato

Como dispunha de um semestre para a coleta dos dados, realizei doze encontros com Renato, um por semana com uma hora cada.

A seguir, apresento o local onde foram realizados os primeiros encontros e descrevo a elaboração do roteiro destinado ao 1º encontro entre a pesquisadora e o sujeito selecionado. Passo, então, a descrever os encontros com Renato seguidos da respectiva análise a *posteriori* local dos mesmos.

O local destinado pela Instituição para a realização dos encontros da pesquisadora com os sujeitos, desde o início foi a sala de atendimento psicológico. Esta sala possui um sofá, duas poltronas, uma mesa com duas cadeiras e um armário sem tranca. O armário contém jogos e materiais utilizados nas diversas oficinas. Embora a sala tenha uma janela para fora, propicia um ambiente tranquilo sem interferências externas, como buzinas, barulho de trânsito, etc.

A mesa que utilizamos possui uma bandeja repleta de folhas de sulfite em branco e quadriculadas, e um recipiente repleto de lápis preto e de cor, além de canetas e borracha. A partir do segundo encontro, eu acrescentava a esse material da mesa uma calculadora simples e uma calculadora com impressora.

O primeiro encontro foi marcado para inicio da quarta semana de fevereiro, um mês após o início das aulas escolares do sujeito de minha pesquisa.

1º encontro

Objetivo do encontro: Entabular um diálogo com a intenção de nos conhecer (o sujeito da pesquisa e o pesquisador) e realizar um diagnóstico dos conhecimentos do sujeito sobre frações.

Decidi iniciar o primeiro encontro entabulando um diálogo com o sujeito para nos conhecer e criar um ambiente descontraído, facilitando um possível "diagnóstico" sobre as dificuldades de operar com números inteiros e racionais. Assim, descartei utilizar a calculadora nesse primeiro encontro sem conhecer quais as dificuldades que os sujeitos enfrentavam em relação às operações com números inteiros e racionais.

Na elaboração do roteiro, levei em conta tanto o que as coordenadoras haviam sugerido, o assunto frações, como o que era suposto que os sujeitos estivessem estudando em suas respectivas classes de 8º ano.

O *caderno do professor de Matemática* da 7ª série/ 8º ano da SEE/SP[10], que corresponde o respectivo *caderno do aluno* que, em tese, o aluno possui, propõe para esse primeiro bimestre o trabalho com números racionais e potenciação. Em relação a números racionais, o caderno trata da transformação de decimais finitos em fração e de dízimas periódicas em fração geratriz. Desta forma, supostamente, os sujeitos de minha pesquisa deveriam estar imersos no contexto das frações. Com esse fato em mente, elaborei o roteiro do primeiro encontro constante, entre outras coisas, de atividades que possibilitassem um diagnóstico sobre os conhecimentos de cada um sobre o tema.

Ao analisar as questões sugeridas pelos cadernos do professor para serem trabalhadas na primeira semana de aula, verifiquei que as duas primeiras questões tratavam da determinação de classes de equivalências de polígonos e de números inteiros, e só a terceira questão, de equivalência entre as frações, conforme segue:

> Considere o conjunto de todas as frações positivas. Para organizá-lo em classes, consideremos equivalentes todas as frações cuja soma do numerador com o denominador dá sempre o mesmo número. Por exemplo, 2/5 estaria na mesma classe de 1/6 e de 3/4. Nesse caso, quais seriam as classes de equivalência?

Figura 1: Proposta Curricular do Estado de São Paulo, Caderno do Professor de Matemática, 7ª série, 1º bimestre, p.15, 2008.

O enunciado da questão pareceu-me ambíguo quanto à expressão *conjunto de todas as frações positivas*. Como é definida a *fração positiva*? Para

[10] SÃO PAULO, (Estado) Secretaria da Educação*. Caderno do Professor: Matemática*, Ensino Fundamental 7ª série 1º bimestre. Imprensa Oficial do Estado, 2009. Material distribuído a todos os professores da rede pública estadual de São Paulo, paralelamente é distribuído o caderno do aluno aos alunos desta mesma rede de ensino.

o aluno $\frac{-2}{-4}$ é uma fração positiva ou uma fração negativa? Frações negativas já haviam sido objeto de estudo? Outro ponto do enunciado que estranhei foi a frase: *Para organizá-lo em classes, consideremos equivalentes todas as frações cuja soma do numerador com o denominador dá sempre o mesmo número ,* que a meu ver apresenta um equívoco: o fato de se determinar classe de equivalência (assunto de estrutura algébrica) diferente da classe de equivalência usual do conjunto de frações é, no mínimo dispensável nessa idade. O conceito de classe de equivalência é abstrato e aquele aluno que já trabalhou com as frações equivalentes pode confundir com a classe de equivalência estabelecida o que o induzirá em erro.

Assim, acredito que não seja difícil que um aluno e até um bom aluno apresente dificuldade em encontrar as classes de equivalência solicitadas e que suponha que tudo o que pensava saber sobre frações equivalentes esteja errado!

Dadas essas observações, resolvi apresentar essa atividade para verificar no que o sujeito sentia dificuldade: na questão da estrutura de classe de equivalência ou realmente no trato de frações, em geral. Caso o sujeito não demonstrasse dificuldade nessa atividade, o que em princípio eu julgava muito difícil, eu apresentaria outras atividades baseadas nas situações propostas no caderno, para detectar onde se encontravam as alegadas dificuldades com frações. Caso ele mostrasse dificuldade com a compreensão da atividade, eu apresentaria atividades mais simples que possibilitassem o diagnóstico pretendido.

As atividades mais simples foram escolhidas dentre as apresentadas no *site* do “só matemática”[11].

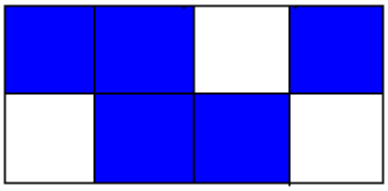
Seguem as atividades “mais simples” selecionadas do site para essa fase.

Selecionei as três atividades seguintes pelo fato de tratarem do esquema relacional parte–todo, que conforme os pesquisadores Berh, Lesh,

[11]Disponível em: http://www.somatematica.com.br/soexercicios/fracoes.php. Acesso em: 20 jan. 2011

Post e Silver (1983), é essencial para o desenvolvimento do conceito de número racional, porque se encontra diretamente relacionado à possibilidade de dividir o todo (contínuo ou discreto) em partes iguais.

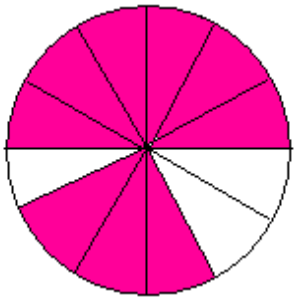
Observe a figura:

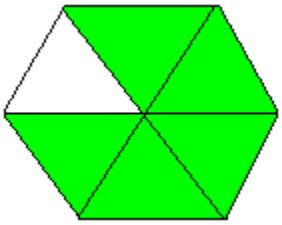


a) Em quantas partes iguais o retângulo foi dividido?
b) Cada uma dessas partes representa que fração do retângulo?
c) A parte pintada representa que fração do retângulo?

Figura 2: atividade 1

Observe as figuras e diga quanto representa cada parte da figura e a parte pintada:

a) 

b) 

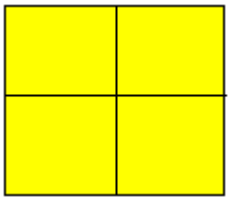
c) 

Figura 3: atividade 2

Um sexto de uma pizza custa 3 reais, quanto custa:

a) $\frac{3}{6}$ da pizza

b) $\frac{5}{6}$ da pizza

c) a pizza toda

Figura 4: atividade 3

Selecionei também uma atividade que permite evidenciar como o sujeito opera com frações.

Encontre o resultado dos cálculos abaixo:

a) $\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=$ b) $\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=$ c) $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}=$

Figura 5: atividade 4

Descrição do encontro com Renato[12]

Meu primeiro contato com Renato ocorre ao chegar à sala de recepção da Instituição, pois observo um adolescente deitado no sofá da recepção. Após me cumprimentar, a secretária chama o "adormecido" e apresenta-me a Renato como "a professora de Matemática". Logo em seguida, subimos para a sala já determinada no horário previsto.

Ao chegar à sala, Renato imediatamente joga-se no sofá, enquanto me sento em uma das cadeiras da mesa.

Renato mostra-me amigável e comunicativo desde o início do encontro e pergunta-me se sempre quis ser professora de Matemática, respondo que sim, e pergunto-lhe o que ele queria se tornar quando adulto, ele diz "motorista", e acrescenta "motorista de rico", pergunto o porquê dessa escolha, Renato responde "porque eu quero dirigir um carrão".

Solicito que venha se sentar, e ele imediatamente levanta do sofá e senta-se à mesa. Então, peço que diga no que sente dificuldade em Matemática.

R: A única coisa que eu não sei de Matemática é divisão.
P: O que você sabe sobre as frações?
R: Não sei te dizer.

Apresento a primeira atividade solicitando que ele a leia. Renato lê em voz alta o enunciado sem dificuldade, mas ao chegar à fração $\frac{2}{5}$ para e diz que não sabe ler aquilo.

[12] Na descrição dos diálogos R é a fala do aluno, P fala da pesquisadora.

P: Leia como você acha que é.
R: dois cinco.

Explico que a forma de leitura dessa fração é dois quintos. E escrevo em um papel as seguintes frações solicitando que ele as leia em voz alta:

$$\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}, \frac{6}{5}, \frac{4}{20}$$

R: Um meio de dois.
O pesquisador aponta para $\frac{2}{5}$ da atividade 1.
P: Como você leu isto?
O sujeito olha para $\frac{1}{2}$.
R: Um meio.

Depois disso, Renato lê em voz alta as demais frações corretamente, inclusive sete doze avos, etc. Questionado sobre o significado de numerador e denominador, o sujeito da pesquisa diz não saber o sentido dessas palavras. Julgo que pelo fato dele não demonstrar compreensão da primeira atividade apresentada como um todo, é melhor apresentar as atividades mais simples, conforme já descritas.

As duas primeiras atividades relativas à parte-todo, são resolvidas com facilidade por Renato, conforme registro das figuras que seguem:

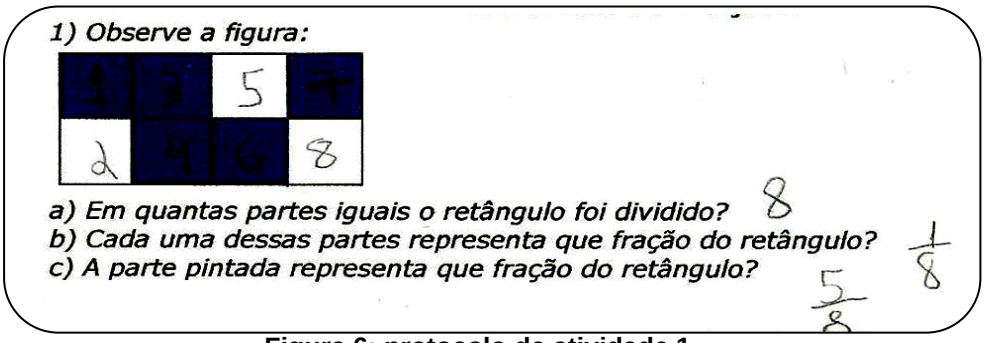


Figura 6: protocolo de atividade 1

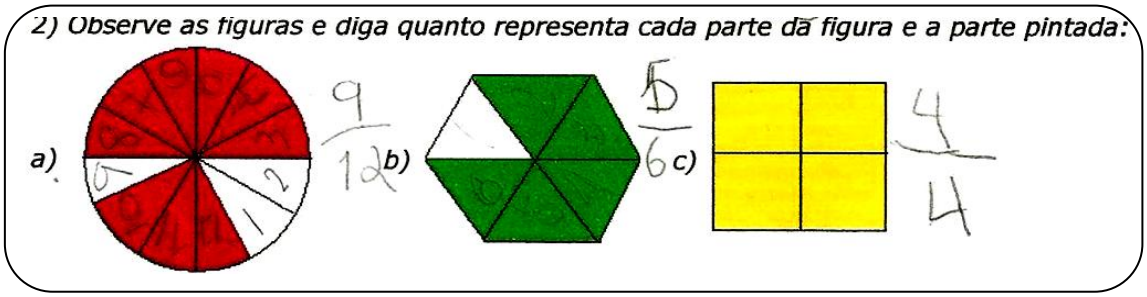


Figura 7: protocolo de atividade 2

Ao observar a *atividade 3,* Renato registra os cálculos relativos aos itens a e b corretamente, porém não registra as respostas requeridas. Quanto ao item c, ele diz que não está entendendo o que é a pizza toda. Peço, então, que observe o item c da atividade anterior e ele fala $\frac{6}{6}$ e faz o calculo corretamente sem novamente responder a questão.

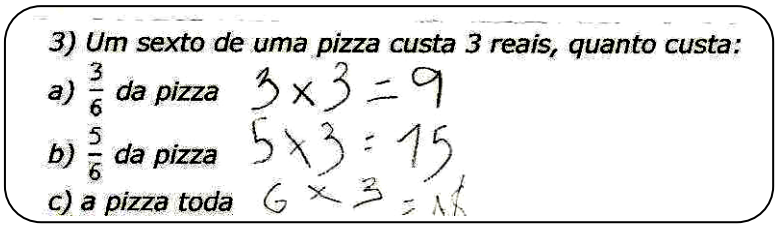


Figura 8: protocolo de atividade 3

Na *atividade 4* nos itens a e b, Renato soma os numeradores e os denominadores. Explico como ele deve somar as frações, retornando aos diagramas dos exercícios acima. Então, ele responde corretamente os itens a e b. O item c ele diz que não sabe fazer. Peço que coloque as duas frações em um denominador comum, mas ele diz que não sabe fazer isso.

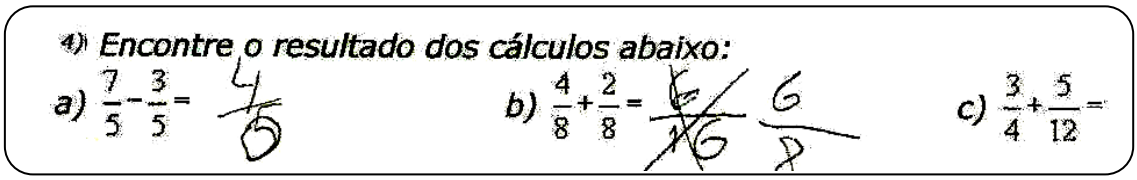


Figura 9: protocolo de atividade 4

Depois de perceber que a atividade exige algo que ele não sabe fazer, pede-me para aprender a “fazer divisão”.

Começo questionando como ele divide dez por dois, ele diz que não sabe, fala vários números sem parar. Então, pega 10 lápis do recipiente e divide entre nós dois e antes de terminar a repartição responde: cinco. Sugiro outras divisões como 8 por 2, 12 por 3, 10 por 5, 18 por 6, em todos os casos ele recorre aos materiais. Peço que guarde os lápis e pergunto novamente quanto é, 10 dividido por 2 e ele diz não sei, pede para pegar os lápis e repete o procedimento de distribuir os lápis em dois conjuntos.

Comento que já está na hora de terminar o encontro, pois sua próxima atividade na ONG já devia estar começando. Renato pede para que eu traga um jogo no próximo encontro, acrescentando que quer o *jogo do curral*. Por minha vez solicito-lhe que traga o caderno da escola, para que eu veja o que está aprendendo.

Ao nos despedirmos, lembro-lhe do próximo encontro.

Análise *a posteriori* "local" do primeiro encontro com Renato

O objetivo estabelecido para esse primeiro encontro foi entabular um diálogo com a intenção de nos conhecer (Renato e a pesquisadora) e fazer um diagnóstico sobre os conhecimentos de Renato sobre as operações com números inteiros e racionais.

O fato da secretaria da ONG ter me apresentado a Renato como professora de Matemática, embora meu papel não fosse exatamente esse, não provocou em Renato nenhuma atitude desfavorável. O que parece indicar que ele não tenha tido nenhum problema maior com algum professor de Matemática em sua vida escolar. Dessa forma, julguei desnecessário explicar-lhe meu papel de pesquisadora.

Como Renato encaminhou-se tranquilamente à sala do encontro e jogou-se no sofá, percebi que ele estava acostumado a frequentar essa sala para ter as sessões de terapia psicológica.

Nesse primeiro contato, Renato mostrou-se espontâneo, receptivo, disposto a iniciar o trabalho com a "professora de Matemática". Durante todo o encontro mostrou-se à vontade, o que propiciou que o encontro fluísse sem maiores dificuldades.

O desejo de ser motorista de rico para dirigir um carrão, evidencia sua "expectativa" de futuro e pode estar influenciando sua relação com o saber em geral e com o saber matemático, especificamente. Explico, Renato não imagina que pode adquirir no futuro um "carrão", mas tão somente deseja guiar o carrão para outrem. Mas, para seu sonho de ser motorista, ele tem a percepção de

que não é preciso aprofundar-se nos conhecimentos que a escola proporciona-lhe isso pode estar influenciando seu desempenho escolar.

O fato de Renato dizer que *só não sei fazer divisão* (sic) leva-me a conjecturar que ele não percebe a relação entre as operações, sobretudo entre a multiplicação e a divisão.

A pronta resposta de Renato à pergunta sobre o que sabia sobre fração: *não sei te dizer*, parece indicar que ele fugiu da reflexão sobre seus conhecimentos para se livrar do questionamento. Essa impressão corrobora a descrição existente em seu prontuário sobre a atitude de: ao ser solicitado a refletir sobre seus conhecimentos, ele tenta "escapar" com uma desculpa.

O fato de realizar a leitura fica evidenciado que ele não apresenta dificuldades com a leitura e interpretação do texto, somente ao se deparar com a fração $\frac{2}{5}$ Renato alegou não saber ler aquele número. Fato que foi desmentido, logo adiante quando, sem auxilio da pesquisadora, Renato leu $\frac{7}{12}$ corretamente: *sete doze avos*. O que reforça a impressão de que Renato embora possua algum conhecimento sobre as frações, a fim de se livrar do questionamento, diz não conhecer.

Há indícios de que o sujeito da pesquisa desconhece ou não dá significado a termos matemáticos usuais no Ensino Fundamental como: frações, numerador, denominador, denominador comum de duas ou mais frações.

Passando a análise das atividades embasadas no site do "só matemática", as resoluções dos quesitos das atividades 1 e 2 levam-me a dizer que Renato já foi exposto a esse tipo de atividade e as domina, o que conforme a teoria APOS de Dubinsky (1991) indica que o sujeito apresenta uma concepção de fração já na fase de processo. E reforça ainda mais a conjectura levantada de que Renato tem o hábito de responder imediatamente *não sei* (sic), antes de refletir sobre uma pergunta, para se livrar de questionamentos.

Nos dois primeiros itens da terceira atividade, as resoluções de Renato indicam que ele compreende a relação entre o preço de uma fração da pizza com o preço de outras frações da pizza. O que reforça a hipótese de que ele tem uma concepção processo de fração em fase de objetificação de acordo com a teoria APOS. É interessante evidenciar que Renato pode ter utilizado também o raciocínio proporcional (se um pedaço custa três reais, três pedaços custam nove reais). No item c dessa atividade, como não aceitei sua afirmação de que não sabia como responder e sugeri que ele observasse a atividade 2 anterior, ele logo relacionou as diferentes representações e respondeu à questão corretamente. No entanto, não posso deixar de evidenciar a omissão das respostas de Renato que parece ignorar a necessidade de reler o enunciado para responder à atividade.

Ao resolver a quarta questão, Renato, nos itens a e b, operou com numeradores e denominadores, separadamente, o que de acordo com Cury (2007) é um erro comum até mesmo no ensino superior, sugerindo que o sujeito pode estar considerando uma fração como dois números naturais separados por um traço e/ou possa estar "sobregeneralizando" a regra do produto de duas frações. Ou ainda, conforme Vergnaud (1990 apud FRANCHI, 2010, p. 207), que o sujeito esteja utilizando um "teorema em ação" [13]. Ao lhe sugerir que utilizasse o mesmo denominador para efetuar as operações, Renato retomou sua atitude de dizer "não sei", porém ao solicitar que observasse novamente a 2ª atividade, e percebesse como seria a representação da soma ou da diferença dessas frações, ele conseguiu "transferir" o que observou nas figuras para a operação puramente matemática, resolvendo corretamente as duas operações com frações que têm o mesmo denominador.

Em relação à afirmação de Renato de que não conhecia como reduzir duas frações ao mesmo denominador, mesmo a pesquisadora tendo sugerido o uso do mínimo múltiplo comum, etc., parece indicar que ele não conhece ou não se recorda o significado desses termos o que provocou sua desistência em

[13] Teorema em ação é uma proposição tida por verdadeira em um determinado domínio.

resolver o problema e sua proposta de querer mudar o assunto para *aprender a dividir*.

Renato recorrendo aos lápis para realizar divisões mostra uma dependência do material concreto, e o não reconhecimento da relação entre a multiplicação e a divisão por 2, por 3, por 5. Enfim, em seu caso parece que a utilização do material concreto foi um empecilho para resolver os cálculos. Isto é, a passagem necessária da situação vivida com o auxiílio do material concreto para a abstração e sistematização não se deu, pelo contrário, para ele divisão é repartição, o que parece impedir de acessar o significado. O que vem reforçar o que destacam Magina e Spinillo (2004):

> [...] o material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão em matemática (MAGINA; SPINILLO, 2004, p.11).

Pelas considerações anteriores, as atividades propiciaram o diagnóstico requerido. As dificuldades apresentadas por Renato com as frações estão embasadas nas dificuldades explicitadas com questões de divisibilidade de números inteiros e racionais, dentre outras, a falta de percepção da relação entre as operações de multiplicação e divisão, pois não recorreu às tabuadas da multiplicação do 2, do 3 e do 5, as mais requeridas, em geral, na escola para calcular a divisão por esses números. Outra dificuldade de Renato evidenciada no encontro foi com a nomenclatura matemática.

Como observamos, Renato mostrou interesse em aprender a “fazer divisão” o que vai ao encontro do objetivo desta pesquisa.

Os conteúdos relacionados à divisibilidade provavelmente já tenham sido estudados pelo sujeito em algum momento de sua escolarização, assim utilizando as considerações de Bianchini e Machado (2010), que atestam que a calculadora constitui um elemento motivador na revisão de conceitos, julgo pertinente propiciar a meu sujeito de pesquisa o uso da calculadora para retomar as questões das operações com os números naturais.

2º encontro

Baseada no diagnóstico decorrente das análises do 1º encontro, e na oportunidade do uso da calculadora, como elemento motivador para a ressignificação das operações dos números inteiros e racionais, considerei necessário familiarizar Renato com o uso da calculadora. Por outro lado, diante da solicitação de Renato no final do 1º encontro de que levasse o jogo o curral para o segundo encontro, fui me informar sobre o mesmo e sobre o objetivo de se trabalhar com esse jogo com a responsável pela oficina de Matemática, na qual Renato teve contato com o mesmo. Diante da explicação de que tal jogo visava a trabalhar a localização espacial do aluno, descartei seu uso. Assim, estabeleci o objetivo do 2º encontro.

Objetivo do encontro: Familiarizar o sujeito com a calculadora simples de mão e a calculadora com impressora.

Com tal objetivo, elaborei o roteiro e as atividades baseando-me em proposta de familiarização criada por Machado (2010). A seguir, apresento o **roteiro** de familiarização com a calculadora adaptado a meus propósitos.

1º momento dedicado às atividades exploratórias das funções da calculadora com a intenção de perceber o nível de familiarização do sujeito com as calculadoras simples.

Solicitar ao sujeito que observe as calculadoras deixando que ele explore livremente as mesmas. As duas calculadoras mostram as mesmas funções: quatro teclas cada uma, com um dos sinais das quatro operações dos números inteiros, uma tecla com o sinal de igual, outra com o sinal da vírgula representado por um ponto, dez teclas cada uma com os dígitos entre 0 a 9, além da tecla OFF para desligar a calculadora. Na calculadora simples, há

ainda a tecla AC para ligar e a tecla CE para apagar o último dígito teclado, conforme Figura 10.

Figura 10: Calculadora utilizada na pesquisa

A calculadora com impressora possui mais teclas do que a simples e, por isso, recobri com fita isolante todas as teclas que não iríamos utilizar menos a tecla que apresenta o 00 que não comportava o recobrimento. O recobrimento das teclas deveu-se à tentativa de evitar que o sujeito da pesquisa se distraísse com elas nas atividades propostas. Além das teclas comuns às duas calculadoras, a calculadora com impressora possui a tecla C/CE que tem a função de ligar e de limpar. Sua aparência ficou conforme a Figura 11.

Figura 11: Calculadora utilizada na pesquisa

Observar como o sujeito da pesquisa manipula as calculadoras (sabe ligar? Qual tecla clica? Faz cálculos? Quais as operações espontaneamente utilizadas? Quais suas perguntas?).

Após um tempo, fazer perguntas que revelem o uso daqueles instrumentos manipulados anteriormente, para qual finalidade, onde era utilizado. Essas observações deveriam dar condições de conhecer o nível de familiaridade com a calculadora do sujeito.

2º momento - Iniciar atividade dirigida visando a uma exploração das possibilidades da calculadora, para tanto solicitar que o sujeito:

- Marque os números 1, 2, assim por diante até o 9 e perguntar o que acontece?
- Conte quantos algarismos “couberam” no visor.
- Marque os números 0, 1, 2 assim por diante até o 9 e perguntar o que acontece?
- Responda se o zero aparece, em seguida porque o zero não aparece?
- Marque os números 5,4,3,2,1 e zero. Perguntar se o zero aparece e por que?
- Observe a diferença entre registrar na calculadora o zero antecedendo os outros digitos e no papel.

Institucionalizar o que já foi percebido pelo sujeito (como se liga, como se desliga, o tipo de teclas que aparece, a quantidade de algarismos que cabe no visor...)

Institucionalizadas as questões, pedir ao sujeito que:

- Marque o 1 na calculadora.
- Não aperte qualquer tecla e responda o que aparecerá se marcar o 3 (o sujeito poderá responder 31).
- Marque o 3. Diga o que aconteceu.
- Responda o que se deve clicar primeiro se quiser escrever o número 31.
- Mostre a tecla que indica a operação de adição.
- Mostre a tecla que indica a operação de subtração.
- Use a calculadora para somar 5+4. O que aparece no visor?

Conforme o ocorrido institucionalizo, as questões abordadas (a questão da precedencia da digitação de números com mais de um digito, e com a função da tecla (=) na realização das operações.

3º momento – exploração da calculadora simples por meio de atividades que envolvem “operações” de adição e subtração com os números naturais. Cada

módulo de questões será intercalado por pausas que indicam a necessidade de retornar ao mesmo tipo de questão ou prosseguir com o previsto.

- Digite na calculadora o número 45.
- Sem apagar o número do visor, quais teclas deverá apertar para que apareça o número 40?
- Registre no papel o que pensou e depois veja se deu certo! Registre no papel o que aconteceu (insistir para que registre no papel o resultado dado independente se for o esperado).

  Pausa
- Digite na calculadora o número 452.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 450.

  Pausa
- Digite o número 450.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 400.

  Pausa

As pausas possibilitam orientar o sujeito a pensar quais comandos deve dar a calculadora antes de realizar as operações requeridas.

Provavelmente nas primeiras situações propostas, irá operar por ensaio e erro. Por exemplo, para transformar 450 em 400, primeiro tirará 5. Ao conferir no visor o resultado, constata que o procedimento está errado, dessa forma, poderá rever seu procedimento e tentar com outros números, provavelmente, tentar o 50.

Manter a proposta anterior, variando os números, alternando a grandeza númerica (números de dois, três e quatro algarismos) e o lugar onde deverá aparecer o zero (na unidade, dezena, centena).

Descrição do 2º encontro com Renato

No dia e hora determinados, encontro Renato à sala de espera, novamente ele está deitado no sofá da recepção, após chamá-lo, acompanha-

me até a sala onde realizamos o 1º encontro. Ao chegarmos na sala pergunto-lhe se trouxe o caderno de Matemática solicitado no final do 1º encontro e ele responde que esqueceu.

Enquanto me dirijo à mesa para depositar as calculadoras, Renato joga-se no sofá. Peço, então, que se sente à mesa, o que ele faz imediatamente. Ao notar que Renato observa as calculadoras, sugiro que ele pegue uma delas.

Renato pega a calculadora com impressora. Pergunto se ele já sabe para que servem as teclas de uma calculadora, ele responde que conhece as teclas *de ligar, de desligar, a de mais* (+)*, de menos* (-)*, de vezes* (x) *e de dividir* (÷) (sic). Quanto a seu conhecimento sobre o uso de calculadora afirma já ter utilizado calculadora diversas vezes, mas não em uma aula de Matemática e imediatamente levanta o adesivo que tampa as teclas explicando que queria saber o que tinha a mais naquela calculadora.

Após digitar os números de 1 em diante na calculadora Renato responde que o visor comporta onze dígitos. Após digitar a tecla 1 responde que se teclasse o 3 apareceria o 13 e comenta que se teclar o 3 e depois o 1 o visor mostraria o 31. Instado a escrever o 31 na calculadora, ele o fez. Indicou também com desenvoltura a tecla das funções de adição e subtração. Além disso, calcula corretamente algumas somas e subtrações, utilizando a tecla = para obter os resultados.

Para as atividades do 3º momento, Renato quis manter a calculadora com a impressora; subtraiu 5 de 45 e 2 de 452, obtendo os resultados solicitados. Ao tentar obter 400, a partir de uma única operação com 450, Renato subtrai 5 de 450 obtendo 445 verificando que não havia chegado ao resultado faz mais tentativas e, por aproximação (450 - 10, 450 - 20,...) chega à subtração requerida.

Ao apresentar outras questões análogas a esta última, Renato continua procedendo por ensaio e erro até obter o número requerido; assim calcula diretamente , isto é, sem ser por meio do ensaio e erro, somente se o número a ser subtraido é menor que 10.

Quase ao término do encontro, Renato pega alguns objetos da sala e propõe: *Agora vamos fazer assim, eu sou o caixa e você vai comprar essas coisas e* anota em um papel:

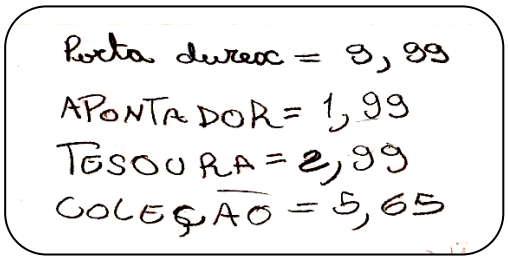


Figura 12: protocolo de atividade

Começa a somar tudo na calculadora com impressora. Observo que ele não coloca a vírgula nos números racionais que representam o preço da mercadoria e digita:

999
+
299
+
199
+
565
=

obtendo no visor e no papel 2062, e diz que o resultado é 20 reais e 62 centavos. Continua somando o preço de dois objetos iguais. Como o tempo do encontro esgota-se, despedimos-nos.

Análise *a posteriori* "local" do segundo encontro

A calculadora com impressora, doravante denominada pela sigla CI, atraiu a atenção e despertou a curiosidade de Renato, o que permite dizer que constituiu nesse 2º encontro um elemento motivador para o trabalho com as operações de adição e subtração.

Ao retirar a fita adesiva da calculadora, Renato mostra seu interesse pelo instrumento embora não explicitasse questões sobre o que observou.

Renato afirmou que já havia utilizado uma calculadora o que foi comprovado pela facilidade com que a manipulou durante o encontro como, por exemplo, quando somou o preço dos objetos recorrendo somente à tecla + entre os diversos números e à tecla =, somente no final para obter o total. No entanto, essa familiaridade parece restringir-se às operações com números naturais.

O fato de Renato ter se "encantado" pela CI e ter declarado que já utilizara a calculadora simples, doravante denominada por CS em outras situações, levou-me a decidir que era melhor continuar as atividades com a CI. Isso naturalmente acarretou que eu não insistisse que Renato fizesse os registros no papel. Assim, as atividades previstas para o 2º momento reduziram-se a observar quantos dígitos o visor da CI comportava e a ordem em que os dígitos dos números maiores que 9 deveriam ser digitados. Percebi também pela descrição desse momento que Renato mostra desenvoltura quanto à nomenclatura matemática usada.

Na atividade do terceiro momento, Renato evidenciou fazer cálculo mental com facilidade somente quando o número a ser subtraído era menor que 10, pois digitava corretamente a subtração requerida para chegar ao número indicado. Caso o cálculo requerido exigisse uma subtração que envolvesse dois números maiores que 9, Renato usava a estratégia de ensaio e erro. No entanto, essas tentativas não eram totalmente aleatórias, tinham uma lógica: por exemplo, de 450 para obter 400, Renato foi subtraindo 5 de 450, depois de 10, depois de 20 até chegar a subtração de 50 de 450. Isso permite inferir que Renato não mostra destreza em cálculo mental e nem segurança com a decomposição dos números inteiros em suas ordens.

O uso da CI parece ter incentivado Renato à simulação "do caso concreto" das lojas de "1,99". É interessante notar a estratégia de soma adotada: somou números racionais, digitando-os sem a vírgula como números naturais, interpretando o resultado inteiro como um racional ao colocar a vírgula no lugar correto. Isso parece indicar sua vivência com problemas do cotidiano

de compras a dinheiro que envolvem racionais na forma decimal. Sua estratégia seria adequada para somas de quaisquer números racionais?

Dessa forma, esse encontro deixa a impressão de que a concepção das operações de adição e subtração dos números naturais de Renato situam-se entre a fase de processo e objeto.

É importante salientar que Renato mostrou familiaridade com a manipulação da calculadora, embora na atividade que inventou no final tenha evidenciado, que não utiliza o ponto para indicar a vírgula que separa a parte inteira de um número racional da parte decimal.

A constatação de que Renato encontra dificuldade para identificar o valor posicional dos números naturais leva-me a concluir que é necessário tratar desse assunto nos próximos encontros, pois esse conhecimento é essencial para dar significado à construção dos conceitos das operações.

3º encontro

Baseada no diagnóstico decorrente das análises do último encontro, decidi criar um roteiro que propiciasse a Renato ampliar seus conhecimentos sobre as operações com números inteiros. Para tal, decidi provocar sua reflexão sobre a decomposição dos números e decorrente valor posicional de cada um de seus algarismos. Para tanto, decidi utilizar como recurso o ábaco que, conforme minha experiência anterior em IC, é indicado para esse tipo de propósito e a CI. Assim, o objetivo do encontro foi:

Objetivo deste encontro: provocar a reflexão de Renato sobre o valor posicional dos números inteiros utilizando atividades com a calculadora e com o ábaco.

Com tal objetivo em mente estabeleci o roteiro para o encontro, iniciando pela retomada da atividade do 3º momento do encontro anterior, finalizando com atividades, utilizando ambos os recursos a calculadora e o ábaco. Resolvi retomar as atividades do terceiro momento, pois julguei que o fato de tê-las

proposto no final do encontro, quando Renato já parecia cansado e estava mais interessado em explorar a CI como instrumento, fez com que ele não tivesse dedicado tempo para uma reflexão sobre as mesmas.[14]

O primeiro momento do roteiro é dedicado às atividades que envolvem "operações" de adição e subtração com os números naturais que se tornam evidente a necessidade de levar em conta o valor posicional dos algarismos dos números envolvidos nas operações. Como no roteiro do último encontro, neste também as pausas indicam a necessidade de retornar ao mesmo tipo de questão ou prosseguir com o previsto.

- Digite na calculadora o número 345.
- Sem apagar o número do visor, quais teclas deve apertar, para que apareça o número 305?
- Registre no papel o que pensou e depois veja se deu certo! Registre no papel o que aconteceu (insistir para que registre no papel o resultado dado independente de se for o esperado).

  Pausa
- Digite na calculadora o número 127.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 120.

  Pausa
- Digite o número 456.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 56.

  Pausa
- Digite o número 9354.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 9054.

  Pausa
- Digite o número 9815.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 9015.

  Pausa
- Digite o número 6275.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 6075.

[14] A fim de não repetir parte do roteiro do 4º encontro por razões explicitadas na descrição deste 3º encontro, não descrevo aqui as atividades que seriam propostas com o ábaco em um segundo momento.

Pausa

- Digite o número 9268.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 9208.

Pausa

- Digite o número 7403.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 7003.

Pausa

Descrição do encontro com Renato

Renato chega às 13h20 à ONG, solicito-lhe que me acompanhe até a sala reservada para o encontro. Como das vezes anteriores ele joga-se no sofá. Deposito os instrumentos, as calculadoras, CI e CS e o ábaco na mesa, e peço para se sentar à mesa. Renato dirige-se à mesa, reclamando que está exausto e com sono porque havia participado de um acampamento da Igreja no carnaval. Conta que não tinha dormido direito, porque as outras crianças passavam pasta de dente no rosto e pintavam as unhas de quem dormia e, por isso, ele só dormiu uma noite durante o acampamento.

Sugiro então que digite o número 345, ele pega a CI imediatamente e usa a estratégia de ensaio e erro para obter o número requerido. Ao usar essa estratégia, observa quais números havia usado nas tentativas anteriores para digitar o próximo número.

Quando solicito que transforme o 9354 em 9054 entabulamos o seguinte diálogo:

R: Posso ver como escreve esse o número?
P: Digite como você acha que se escreve.
R: Repete o número?
P: 9354.
Renato digita 9000300504

Entrego-lhe uma folha em branco e um lápis e peço que escreva alguns números na ordem de milhares. Dentre esses números, por exemplo, sugiro 1025, e ele escreve 100025, 5005, ele escreve 50005. Passo, então, a inverter

a situação, escrevendo números na ordem dos milhares em outro papel em branco e solicito que ele leia o número. Abaixo apresento um exemplo:

> P: Aponto o número 1025 e pergunto: Que número é esse?
> R: Mil e vinte e cinco 1025.
> R: Observa seu registro e diz: Os dois não podem estar certos, então, o meu está errado!
> R: Registra a forma correta em sua folha, conforme protocolo abaixo.

Figura 13: protocolo de atividade

Após, Renato sempre que registra um dos números na ordem do milhar, reflete e se o número registrado não corresponde ao solicitado, espontaneamente, corrige.

Como o tempo da duração do encontro estivesse se esgotando, resolvo certificar-me como Renato reage à decomposição de um número maior que 99.

> P - Decomponha o número 127.
> R - Não sei fazer isso.
> P - Veja: 127 = 100 + 20 + 7.
> R - 127 = 100 + 20 + 7.
> P - Bom. Então agora decomponha 246.
> R - Sem tentar ele repete que não sabe fazer.
> P - Tente decompor.
> R - 246 = 200 + 40 + 6.

O tempo do encontro esgotou-se e despedimo-nos.

Análise *a posteriori* "local" do terceiro encontro

O fato de Renato chegar atrasado e mostrando cansaço, provocou a necessidade de adaptar o roteiro e omitir o 2º momento planejado para o trabalho com o ábaco.

Observa-se a atração de Renato pela CI, pois ele nem ao menos reportou-se aos outros objetos que se encontravam à mesa, apoderando-se diretamente dessa calculadora. É interessante ressaltar que o uso da CI favoreceu um "progresso" na estratégia de ensaio e erro, pois aparentemente ele usou os registros da folha impressa para evitar repetições de cálculos e refletir sobre a próxima tentativa. Ou seja, ele refletiu sobre a operação requerida. Isso revela que Renato já utiliza a CI de uma forma mais competente para atingir seu objetivo.

A escolha do milhar 9354 foi útil para provocar uma reflexão do sujeito, pois a forma que Renato representou-o, provocou-lhe uma perplexidade. O fato também contribuiu para minha decisão de solicitar a Renato que registrasse no papel alguns números, em que não há limitação para os dígitos!

Já tendo "fugido" do roteiro previsto, pude inverter e situação solicitando que ele lesse os números que escrevia. Isso fez com que ele pudesse refletir sobre a "diferença" entre a forma de falar e a de registrar um número.

A frase "decompor um número" não fez sentido para Renato, embora ele tenha mostrado implicitamente conhecer a decomposição de um número composto de, no máximo, dois algarismos. Ficou claro também que Renato não conhecia a decomposição dos números naturais com mais de dois algarismos, conforme já sugerido nos encontros anteriores. O fato aponta que deverei tratar da decomposição dos números naturais no próximo encontro.

4º encontro

Os resultados da análise *a posteriori* do último encontro levam-me a estabelecer como objetivo do 4º encontro:

Objetivo deste encontro: Tratar da decomposição dos números naturais para desenvolver o significado do valor posicional dos algarismos no sistema de numeração decimal e realizar operações utilizando o ábaco.

A seguir, apresento o roteiro das atividades a serem propostas visando ao objetivo determinado.

Na mesa estarão somente o ábaco e as folhas de papel e lápis para os registros requeridos.

Apresentar o ábaco a Renato e verificar sua familiaridade com tal objeto.

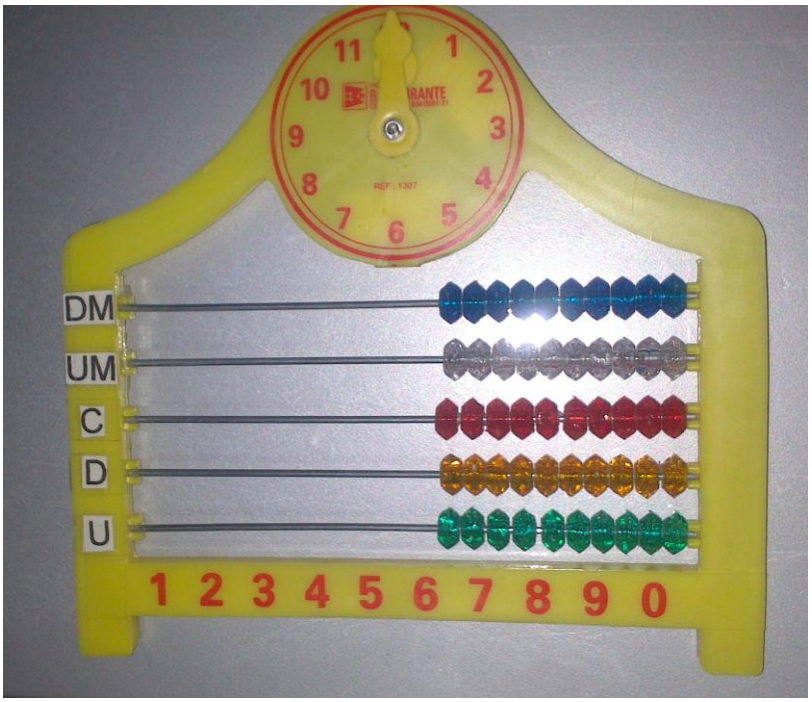


Figura 14: Foto do Ábaco utilizado na atividade

Conforme a familiaridade que Renato declare ter com o instrumento, decido se explico sua utilidade e a forma de utilizá-lo.

Mostrar como são representados os números.

Solicitar a representação de alguns números.

Realizar as seguintes operações, utilizando o ábaco e registrando as mesmas e os resultados obtidos pela leitura no ábaco:

- adição sem reagrupamento:

21 + 17; 10 + 03; 12 + 14; 35 + 13; 315 + 172; 643 + 231; 1036 + 1263

- subtração sem reagrupamento:

76 – 50; 58 – 16; 34 – 12;53 – 22; 187 – 62; 543 – 231; 1254 – 732

- adição :

27 + 16; 39 + 14; 78 + 35; 52 + 39; 234 + 147; 682 + 431; 1234 + 823

- subtração:

61 – 46; 42 – 19; 35 – 18; 34 – 19; 128 – 79; 345 – 192; 1276 – 986

Descrição do encontro com Renato

No dia e hora determinados, Renato está à sala de recepção e após os cumprimentos nos encaminhamo-nos à sala destinada ao encontro.

Como de hábito Renato joga-se no sofá enquanto me dirijo à mesa e deponho o ábaco.

Ao sentar à mesa, Renato observa o ábaco sem tocá-lo e responde que não sabe para que serve.

Explico que: o ábaco é um tipo de calculadora inventada e usada na China há muitos séculos para fazer cálculos com números naturais; este ábaco é uma adaptação moderna dos que existiam.

Continuo explicando que cada fileira representa uma ordem decimal: fileira das unidades, a das dezenas, a das centenas, etc. Renato diz que não sabe o que significam as palavras unidade, dezena e centena, embora já as tenha ouvido. Explico-lhe o significado matemático dessas palavras e mostro como representar alguns números no ábaco.

Renato representa todos os números sugeridos; o opera as primeiras adições sem reagrupamento sem titubear; no entanto, não consegue “ler” o

resultado no ábaco, tenta fazer os cálculos mentalmente ou no papel. Após o terceiro cálculo, explico-lhe que as bolinhas separadas por ele representam os resultados das operações que ele havia realizado no ábaco. Então, passa a dizer o resultado baseado na "leitura" do ábaco e, rapidamente, realiza as operações e dá o resultado, até o último cálculo da subtração sem reagrupamento.

> Renato depara-se com o cálculo de 27 + 16 e questiona-me:
> R: Como faço para somar o 6 mais o sete se só sobrou 3 bolinhas?
> P: O que você acha que deve fazer?
> R: Posso pegar de outra fileira?
> P: Presta atenção na ordem que cada número ocupa. Troca as dez unidades por uma dezena.

Nas primeiras adições com reagrupamento, Renato atrapalha-se depois realiza as adições com desenvoltura.

Na primeira subtração com reagrupamento, Renato declara que não sabe fazer. Novamente sugiro que troque a dezena por dez unidades. Daí, em diante Renato realiza os últimos cálculos mostrando uma crescente facilidade com as operações e a leitura dos resultados.

Desde as primeiras operações, solicito que Renato registre no papel os cálculos propostos e o resultado obtido no ábaco. Quase ao fim do encontro, ao registrar os cálculos no papel, Renato pergunta-me se as trocas que ele estava fazendo era o "vai um" e o "empresta um" que ele usava para realizar as operações no papel.

O tempo esgota-se e finalizamos o encontro.

Análise *a posteriori* "local" do quarto encontro

Trocar um instrumento com tecnologia informática, como a CI, por um instrumento "antigo", de aparência infantil, como o ábaco, causou-me o temor de que o interesse e participação de Renato nas atividades com o ábaco se

arrefecesse. Esse temor, conforme se observa pela descrição do encontro não se justificou.

O fato de Renato ter declarado não conhecer o ábaco não interferiu em sua atitude interessada e participativa durante todo o tempo do encontro. Isso permite dizer que, nesse encontro, esse instrumento constituiu-se em um elemento motivador para o trabalho com as operações de adição e subtração.

Ao explicitar não conhecer o significado de unidade, dezena, centena, etc. Renato confirma o que, em outro encontro, já havia percebido e mostrou o acerto sobre o objetivo visado no encontro.

Ao representar sem dificuldade no ábaco os números solicitados, Renato mostrou uma desenvoltura que revela que implicitamente ele percebeu como decompor um número natural relativamente à unidade, dezena, centena e unidade de milhar.

Renato realizou as operações de adição e de subtração, ambas sem reagrupamento, sem maiores dificuldades, mas, sempre recorrendo para dizer qual o resultado final no cálculo mental ou escrito. A partir do momento em que insisti que ele “lesse” no ábaco o resultado, seus cálculos tornaram-se mais eficientes e rápidos. No entanto, nas operações de adição e subtração com reagrupamentos que, inicialmente lhe causaram dificuldade, após minha intervenção, ele passou a realizar mais devagar, porém, com facilidade.

Podemos atestar que os algoritmos das operações de adição e subtração passaram a ter mais significado para Renato, o que pode ser observado por meio de sua reflexão sobre as mesmas revelada por sua própria fala: (essas trocas) *é a mesma coisa que o “vai um” e “empresta um” não é?* (sic).

As atividades com o ábaco mostraram-se propicias, para que Renato revisse, ampliasse e compreendesse o valor posicional dos algarismos dos números naturais; bem como para que expressasse sua reflexão sobre as operações e evidenciasse sua capacidade de refletir sobre um assunto matemático.

Renato conseguiu relacionar duas diferentes formas de representação de uma mesma operação, o que possibilita concluir que ele nesse encontro mostrou **uma concepção processo em fase de objeto,** sobre as operações de adição e subtração no conjunto dos números naturais.

Dessa forma , com o intuito de retirar de Renato o recurso ao ábaco para o cálculo das operações de adição e subtração dos números naturais, evitando sua dependência de mais esse material concreto, julguei importante no próximo encontro tratar novamente do valor posicional dos algarismos no sistema de numeração dos números naturais, porém, com atividades para a CI, mantendo o ábaco somente como um apoio.

5º encontro

Conforme a análise a *posteriori* do último encontro com Renato, estabeleci o seguinte objetivo para esse encontro:

Objetivo deste encontro: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução de atividades sobre as operações de adição e subtração com números naturais envolvendo sobretudo os números na ordem das centenas e milhares.

Ao visar tal objetivo, preparei um roteiro que supunha o uso da CI e do ábaco somente como “coadjuvante”, Para elaboração das atividades inspirei-me em Silva, Loureiro e Veloso (1989) e em Machado (2010).

As atividades previstas no roteiro envolvem as operações de adição e subtração nos números naturais, na CI que tornam evidente a necessidade de levar em conta o valor posicional dos algarismos dos números envolvidos nas operações.

Prevendo a possibilidade de que Renato sentisse necessidade de recorrer ao ábaco para realizar as atividades, previ um número limitado delas.

As pausas indicam a necessidade de retornar ao mesmo tipo de questão ou prosseguir com o previsto. Só para “aquecimento”, as duas primeiras atividades solicitavam digitar o número 34(45) e obter por meio de um único comando o 30(65). Com base nas duas, as demais atividades visavam a atingir o objetivo proposto:

- Digite o número 567.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 507.

  Pausa
- Digite o número 345.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 445.

  Pausa
- Digite o número 432.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 402.

  Pausa
- Digite o número 6275.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 6270.

  Pausa
- Digite o número 7403.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 7003.

  Pausa
- Digite o número 9354.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 9054.

  Pausa
- Digite o número 9268.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 268.

  Pausa
- Digite o número 12345.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 12045.

  Pausa
- Digite o número 10843.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 16843.

  Pausa

- Digite o número 22222.
- Sem apagá-lo, transforme-o em 20222.

Descrição do encontro com Renato

No dia e hora determinados, encontro Renato na sala de recepção e após os cumprimentos dirigimo-nos à sala destinada ao encontro.

Como de hábito, ele joga-se no sofá, enquanto me dirijo à mesa e coloco sobre ela a CI e o ábaco.

Ao sentar à mesa, ele apenas observa os instrumentos. Sugiro, então, que pegue a CI e inicio a primeira atividade do roteiro. Ele realiza as duas primeiras propostas de operação sem explicitar dificuldade.

Na realização do terceiro item da atividade, Renato ao tentar transformar 567 em 507, subtrai 6 obtendo 561.

> R: Nossa! Por que não deu?
> P: Represente no ábaco o 567 e observe.
> Rapidamente Renato responde:
> R: É só tirar as 6 bolinhas da dezena, 60. Ah é só fazer isso!

Renato, então, pega a CI e digita 567-60=507.

Todos os outros itens da atividade são realizados do mesmo modo: Renato faz a operação direto na CI, quando o resultado não é o solicitado, ele age da seguinte forma: refaz a conta na calculadora, quando novamente não obtém o número solicitado, usa o ábaco. Assim, encontra o número desejado e transfere-o para o cálculo com a CI, expressando o que está refletindo: Nossa! Não era 70, era 700!

Com base no 4º item da atividade, Renato mesmo percebendo um erro não recorre mais ao ábaco e refaz o cálculo, obtendo o resultado esperado.

Para me certificar de que ele já estava levando em conta a ordem dos algarismos dos números, quando o presencio realizando o cálculo do 6º item

da atividade sem titubear, digitando 9354 - 300 = 9054, provoco o seguinte diálogo:

> P: Como você sabia que devia tirar 300 e não 3 ou 3000?
> R: Porque o 3 estava na posição da centena, então, era 300.

Ao findar os itens previstos para o encontro, percebo que ainda restam 15 minutos para a finalização do encontro. Sugiro, então, mais cálculos com a mesma intenção da atividade prevista no roteiro, variando os números.

Ao término do encontro, Renato comenta:

> R: Consegui fazer todos os cálculos. Você acha que estou indo bem?
> P: Sim, acho que está indo bem.

Pede-me para levar o papel impresso pela CI para mostrar na escola. Entrego-lhe o papel com seus cálculos e despedimo-nos.

Análise *a posteriori* "local" do quinto encontro

O primeiro diálogo transcrito permite afirmar que Renato já domina o cálculo das operações de adição e subtração com o ábaco, pois não sentiu necessidade de nova explicação sobre como é representar um número natural e como fazer as operações citadas com tal recurso.

O fato de refazer a conta na calculadora, quando não encontra o resultado esperado, permite inferir que refletiu sobre a possibilidade do erro de digitação, embora não tenhamos discutido esse assunto.

Renato mesmo percebendo um erro não recorre mais ao ábaco e refaz o cálculo, obtendo o resultado esperado. Essa descrição e a explicação dada: *porque o 3 estava na posição da centena, então, era 300*, sugerem que ele compreendeu o significado do valor posicial dos números naturais e que se desprendeu do ábaco como material concreto, mostrando ter abstraído e pela importância da decomposição dos números naturais nas operações de adição e subtração.

O entusiasmo com que realizou a atividade prevista no roteiro, levou-me a considerar importante continuar com aquele tipo de atividade nos 15 minutos restantes.

A percepção de Renato sobre o seu bom desempenho no encontro, fica evidente o que, certamente, deverá contribuir positivamente em sua relação com o saber matemático. Conclusão esta reforçada pelo seu pedido ao final para levar à escola a prova de seus acertos: o papel impresso com seus cálculos!

Acredito que a decisão de usar os recursos alternadamente, no 3º encontro a CI, no 4º o ábaco, e os dois juntos somente no 5º encontro propiciaram-lhe a compreensão sobre a decomposição dos números naturais e suas operações de adição e subtração e o abandono de sua dependência do recurso ao ábaco.

É importante notar que Renato pode desfrutar do tempo necessário para amadurecer sua compreensão sobre as operações citadas. Magina (2010) considera que a construção do conhecimento é fruto da maturação das estruturas cognitivas dos estudantes e de suas experiências com esse conhecimento. Aqui, ouso aqui ir um pouco mais longe, parodiando os termos próprios da Matemática formal e sugiro que talvez o tempo de maturação não tenha sido somente uma **condição necessária** no caso de Renato, pois neste caso parece ter sido também uma **condição suficiente** para essa maturação.

Pelas considerações anteriores, ele demostrou uma concepção objeto sobre as operações de adição e subtração dos números naturais.

Após o 5º encontro, uma das coordenadoras solicitou-me uma reunião que, de alguma forma, influiu nos próximos encontros e, assim, julguei necessário relatar o acontecido nessa reunião com a coordenadora.

Reunião com uma das coordenadoras

Depois desse encontro, reuni-me com uma das coordenadoras. Apresentei os relatórios sobre o andamento dos quatro primeiros encontros e comentei o que havia feito no 5º encontro.

A coordenadora julgou que o fato de Renato no início dos encontros ter se jogado no sofá, deve estar relacionado ao atendimento psicológico, momento no qual é permitido que ele se deite no sofá, e como ocorre na mesma sala comenta que parece que ele está misturando esses dois momentos e propõe que façamos uma troca de sala. Sugere, então, uma sala de oficinas.

Ainda comentou que, na última oficina de Matemática, da qual é uma das duas orientadoras, notou diferença na participação de Renato: ele mostrou-se mais seguro em suas afirmações e foi o primeiro a sugerir qual o cálculo que deveria ser feito para um problema relativo à receita de pão de queijo, enfatizando que a sugestão estava correta.

Esses comentários parecem confirmar a postura de Renato nos últimos encontros, quando demonstrou estar mais confiante em suas conclusões, parecendo estar construindo uma maior autonomia. Se antes a qualquer pergunta ele respondia: não sei. Agora, ele não só tentava responder como estava se antecipando aos outros na resposta solicitada.

6º encontro

Ao concluir que Renato já estava apresentando uma concepção objeto das operações de adição e subtração com os números naturais, decidi iniciar atividades que envolvessem a operação de multiplicação dos números naturais e, assim, estabeleci como objetivo: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução de atividades sobre as operações de multiplicação de números naturais .

Para elaboração do roteiro, achei importante conhecer como foi orientado o ensino de Renato sobre a as operações de multiplicação e divisão durante o Ensino Fundamental. Desse modo, recorri então ao Guia de Planejamento e Orientações da Secretaria de Educação Municipal de São Paulo, destinado aos professores do 3º ano do Ensino Fundamental de 2007.

No referido guia consta o seguinte:

> É necessário considerar a multiplicação como um instrumento importante na resolução de problemas de contagem, além de oferecer oportunidade às crianças desde as séries iniciais a terem contato com a proporcionalidade. As situações didáticas foram selecionadas de modo a permitirem que os alunos ampliem o trabalho de exploração com os diferentes significados do campo multiplicativo: proporcionalidade, comparação multiplicativa ou divisão comparativa, combinatória e configuração retangular. (SÃO PAULO, 2007, p.310 grifo do autor)

Como no Guia é citado que sua elaboração foi baseada no livro de Nunes et al. (2001), recorri também ao artigo sobre o assunto, liderado pela pesquisadora Sandra Magina, uma das coautoras desse livro.

Decidi basear o roteiro dos próximos encontros nos diferentes significados do campo multiplicativo: 1º multiplicação e divisão comparativas, 2º proporcionalidade, 3º combinatória e 4º configuração retangular.

Assim, estabeleci como objetivo para o 6º encontro:

Objetivo deste encontro: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução das atividades relativas à multiplicação e divisão comparativas.

Ao visar tal objetivo, elaborei o roteiro com oito problemas contextualizados no cotidiano, os quatro primeiros relacionados à chamada multiplicação comparativa e os quatro últimos à divisão comparativa.

Consideramos como problemas relativos à multiplicação comparativa, aqueles nos quais a situação pode ser representada pelos seguintes esquemas:

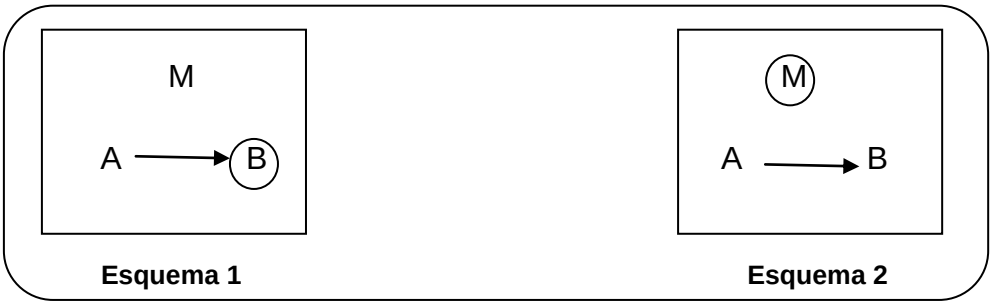


Figura 15: Esquemas relativos à multiplicação comparativa

Onde **A** e **B** são dados do problema, **A** o inicial, **M** representa a relação entre os dados, no caso, a operação de multiplicação. O sujeito deve encontrar o B ou o M circulado.

No caso da divisão comparativa, os esquemas são análogos, somente a relação entre os dados é a operação divisão indicada por **D**.

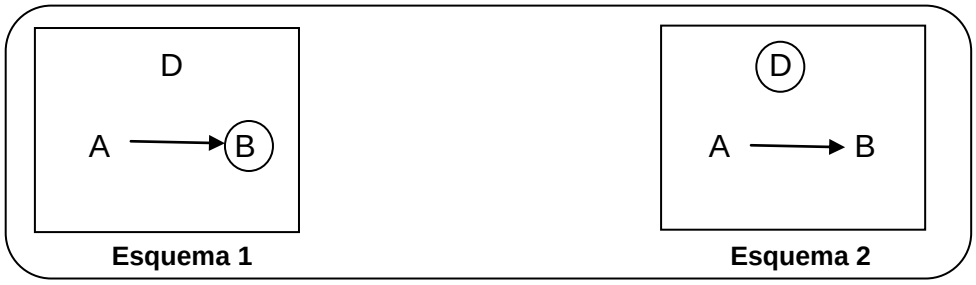


Figura 16: Esquemas relativos à divisão comparativa

Resolvi entregar cada uma das oito atividades em folhas de papel em branco, cada uma encimada pelo enunciado de um dos problemas. Os problemas 2, 3 e 5 foram adaptados de problemas propostos no Guia (2007), e os 4 e 8 são cópias de problemas de Magina et al (2011).

Atividades

1. Em uma caixa de chocolate existem 6 chocolates amargos e 3 vezes mais chocolates brancos. Quantos chocolates brancos existem?
2. Nélson tem R$ 75,00 e Lílian tem o dobro. Quanto tem Lílian?

3. José tem 25 figurinhas e Vivian tem 6 vezes mais. Quantas figurinhas tem Vivian?
4. Na loja um carrinho custa R$ 5,00 e o jogo de memória custa 4 vezes mais que o carrinho. Quanto custa o jogo de memória?
5. Fernando tem 42 anos. Sabendo que ele tem o dobro da idade de seu irmão, quantos anos tem seu irmão?
6. No grupo A, tem 15 meninos. Três vezes menos que no grupo B. Quantos meninos há no grupo B?
7. Ruan tem 54 figurinhas e Pedro tem 18. Quantas vezes menos que Ruan?
8. Seu Pedro vende um quilo de uva por R$ 12,00 e um quilo de laranja por 3 vezes menos. Quanto custa o quilo da laranja?

Descrição do encontro com Renato

No dia combinado Renato chega meia hora atrasado. Ao chegar à recepção Renato encontra-me e diz que o ônibus atrasou. Após os cumprimentos encaminhamo-nos à sala de oficinas, esta não possuí sofá, e sim um armário repleto de jogos e materiais utilizados durante as oficinas, uma mesa com duas cadeiras e outras duas cadeiras distantes da mesa, e a sala é bem silenciosa.

Dirigimo-nos à mesa, sentamo-nos, organizo a mesa com a CI. Entrego a primeira atividade e também um lápis, peço para ele ler e registrar no papel a resolução e a resposta do problema.

Ele lê em voz alta: *Em uma caixa de chocolate existem 6 chocolates amargos e 3 vezes mais chocolates brancos. Quantos chocolates brancos existem?* Então, registra no papel 6+6+6=18, pega a CI e digita 6+6+6= e obtém no visor, 18. Após o que:

> R: É três vezes mais chocolate branco do que o chocolate amargo ou é só três vezes.
> P: Leia o problema novamente.
> R: Só está três vezes então é 18.

P: Existe alguma outra forma de resolver esta atividade?
R: Só sei fazer assim.

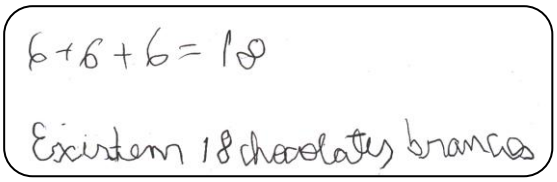


Figura 17: protocolo da atividade 1

Na segunda atividade, Renato lê em voz alta: *Nélson tem R$ 75,00 e Lílian tem o dobro. Quanto tem Lílian?* E questiona:

R: O que é dobro?
P: A palavra dobro significa duas vezes.
Renato calcula 75 vezes 2 na CI e registra no protocolo.
R: Lilian tem 150 reais.

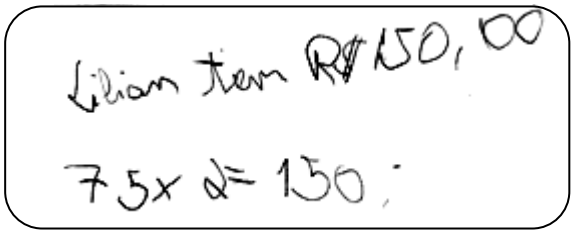


Figura 18: protocolo da atividade 2

A terceira atividade - *José tem 25 figurinhas e Vivian tem 6 vezes mais. Quantas figurinhas tem Vivian?* – que Renato lê em voz alta e digita 25x6= na CI e obtém 150.

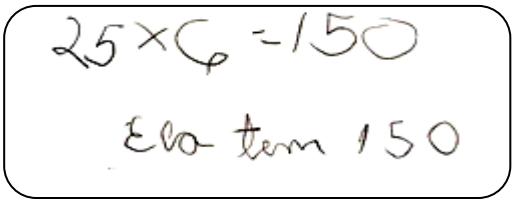


Figura 19: protocolo da atividade 3

A quarta atividade: *Na loja um carrinho custa R$ 5,00 e o jogo de memória custa 4 vezes mais que o carrinho. Quanto custa o jogo de memória?*

Renato lê em voz alta e resolve na CI corretamente.

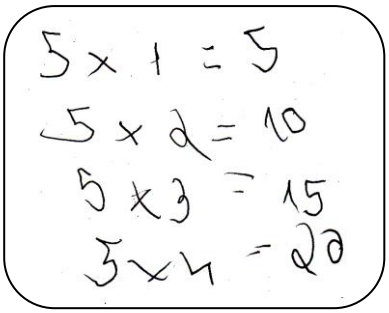


Figura 20: protocolo da atividade 4

Após ler em voz alta a quinta atividade: *Fernando tem 42 anos. Sabendo que ele tem o dobro da idade de seu irmão, quantos anos tem seu irmão?* Renato diz*:*

> R: não sei fazer...
> P: O que você fez para resolver o problema que tratava também do dobro?
> R: Multipliquei por 2.
> P: O que então você deve fazer para descobrir a idade do irmão do Fernando?

Assim, permanece em silêncio e com a CI inicia a estratégia de ensaio e erro, por tentativas, conforme protocolo do anexo 1, consistente dos seguintes cálculos: 7x2=, 30x30=, 3x2=, 30x2=, 15x2=, 9x2=, 3x2=, 32x2=, 19x2=, 17x2=, 25x2=, 28x2=, 26x2=, 23x2=, 2x2=, 22x2=, 21x2=.

> P: Você imagina outra forma de resolver esse problema?
> R: Só sei fazer assim.

Na sexta atividade: *No grupo A, tem 15 meninos. Três vezes menos que no grupo B. Quantos meninos há no grupo B?* Renato usa a mesma estratégia das duas anteriores.

A sétima atividade: *Ruan tem 54 figurinhas e Pedro tem 18. Quantas vezes menos que Ruan?* Renato repete a estratégia de ensaio e erro, conforme afigura abaixo:

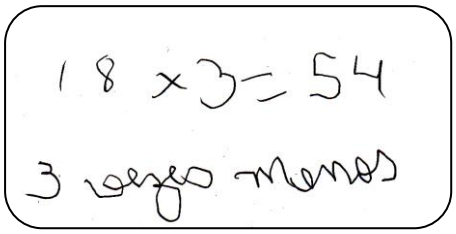


Figura 21: protocolo 1 da at.7

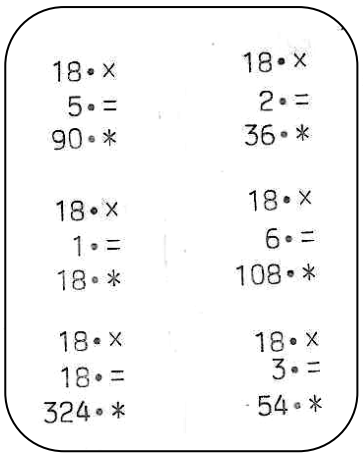


Figura 22: protocolo 2 da at.7

Como o tempo esgota-se, e a oitava atividade constava do problema de mesmo tipo e esquema das 5ª e 6ª atividades, finalizamos o encontro.

Análise *a posteriori* "local"[15] do sexto encontro

Durante todo encontro, Renato demonstrou desenvoltura na leitura e compreensão dos problemas constantes nas atividades.

Na realização da primeira atividade, Renato recorreu à soma de parcelas iguais para responder à questão do problema, tanto no registro do papel quanto no registro posterior da CI, em lugar de utilizar a operação de multiplicação. Tal fato permite duas interpretações:

1ª Renato permanece "apegado" ao raciocínio utilizado, quando foi introduzida a operação de multiplicação, pois,conforme Barreto (2001):

> Como o ensino da adição precede o da multiplicação, um primeiro contato com esse conceito ocorre por meio da "adição repetida" (FRANCHI, 1995, apud BARRETO, 2001, p.20, grifo do autor).

2ª O questionamento de Renato sobre se é três vezes mais ou só três vezes, pode significar que "mais" indicasse que a multiplicação deveria ser feita por adição de parcelas. Sobre a compreensão da expressão "vezes mais" nos

[15] As análises *a posteriori* locais deste e dos próximos quatro encontros foram todas realizadas somente, após a realização do 10º encontro.

problemas multiplicativos de comparação, Magina et al (2011) observam que não ser de fácil compreensão e que:

> [...] situações do campo conceitual multiplicativo envolvendo a idéia de comparação multiplicativa podem gerar dificuldades que não residem no fato de efetuar a operação de multiplicação ou de divisão, mas sim na complexidade de compreender o enunciado e traduzi-lo em uma operação matemática adequada para resolução da situação (MAGINA et al., 2011, p.11).

Acredito que a 2ª seja a mais provável, pelo fato dele ter realizado o cálculo na CI pela adição repetida também.

Renato mostrou sua compreensão do problema ao registrar a resposta completa, referindo-se aos 18 chocolates brancos. Aliás, é importante ressaltar que, embora Renato faça os cálculos na CI em todos os problemas, ele ao dar a resposta contextualiza adequadamente o problema.

Sua dificuldade ao compreender na segunda atividade o significado da palavra dobro surpreende, pois tal termo é bastante utilizado no cotidiano. Ao responder-lhe que dobro é o mesmo que duas vezes, posso ter influenciado sua escolha pela operação de multiplicação, fato que pode ter interferido na resolução das próximas atividades.

Na resolução das atividades relativas à divisão comparativa pela estratégia de ensaio e erro, a insistência de Renato indica que ele não relacionou o problema com a possibilidade de resolvê-lo via divisão. Esta conclusão é reforçada pelo fato de que mesmo empregando a calculadora, ele não recorreu à tecla da divisão. Mas, conforme atestam os protocolos das três últimas atividades, a estratégia de ensaio e erro usada não parece ser aleatória, as tentativas mantiveram-se próximas do resultado requerido, e foram sendo aperfeiçoadas: na 5ª atividade, foram 17 tentativas e, na sétima, reduziram-se a seis, fato que lhe permitiu resolver corretamente os problemas.

O fato de sentir necessidade de registrar a tabuada do cinco desde o começo, 5x1,5x2... até o número que ele precisava 5x4, parece indicar que o método de memorização das multiplicações corriqueiras não foi finalizado, isto é, faltou a prática de trabalho com a tabuada “salteada”.

Quadro 1: Atividades e seus respectivos esquemas

Atividades	Multiplicação Comparativa		Divisão Comparativa.	
	Esquema 1	Esquema 2	Esquema 1	Esquema 2
1	X			
2	X			
3	X			
4	X			
5			X	
6			X	
7				X
8			X	

Pelos dados do quadro, só percebi que, dentre os problemas propostos, não incluí um do tipo esquema 2, da multiplicação comparativa, após o 10º encontro, ao aprofundar as análises *a posteriori* locais.

7º encontro

Conforme já indicado anteriormente, segue o objetivo visado neste encontro.

Objetivo deste encontro: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução de atividades relativas a proporcionalidade simples.

Visando tal objetivo, elaborei o roteiro com sete problemas contextualizados no cotidiano que tratam da proporcionalidade simples quando existe uma estratégia de resolução que necessita de uma única operação de multiplicação ou divisão.

No esquema abaixo, **A, B, C, D** representam dados do problema relativos às grandezas envolvidas, os retângulos amarelo e azul representam os domínios de cada uma das duas grandezas, e **R** a relação funcional multiplicativa entre os domínios das grandezas.

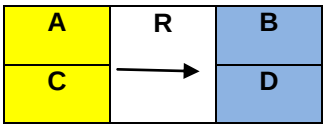


Figura 23: esquema de proporcionalidade simples

Em uma situação que envolve proporcionalidade simples, para que seja realmente um problema: **A** deve ser diferente de **C** e **B** diferente de **D**.

A grandeza amarela é aquela cujos dois valores são dados, no caso indicado por **A** e **C**, e a grandeza azul é aquela em que um dos dados é conhecido e o outro, não.

Figura 24: esquemas de proporcionalidade simples

Desse modo, baseei-me nas considerações de Barreto (2001) sobre as dificuldades relativas aos diferentes tipos de situação problema que envolvem proporcionalidade simples para estabelecer os seguintes níveis de dificuldade desse tipo de problema:

- **Menor nível**: quando um dos dados é a unidade da grandeza, sendo conhecido seu correspondente, e o dado correspondente à grandeza não unitária deve ser encontrado.

- **Nível médio**: quando um dos dados é a unidade da grandeza e não é dado seu correspondente, pelo contrário, é solicitado seu correspondente.

- **Maior nível**: nenhum dos dados: A, B, C, D é igual à unidade da respectiva grandeza.

Além disso, na constatação dos encontros anteriores de que Renato não só explicitou ter dificuldade com a divisão, mas também demonstrou contorná-la em atividades anteriores, elaborei o roteiro do 7º encontro.

Este consta de sete atividades, cada uma delas constituída de um problema contextualizado no cotidiano abordando problemas relacionados aos três níveis de dificuldade.

Decidi entregar cada uma das sete atividades em folhas de papel em branco, cada uma encimada pelo enunciado de um dos problemas. As atividades 1, 3, 5 e 6 são cópias de problemas propostos no Guia (2007).

Atividades

1. Francisco comprou 3 carrinhos, e pagou 10 reais por cada um. Quanto ele pagou pelos três?
2. Sandra tem 6 sacos de bala. Há 4 balas em cada saco. Quantos balas tem?
3. João pagou 60 reais por três carrinhos. Quanto custou cada um?
4. Paguei R$ 18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?
5. Joana vai comprar três caixas de paçoca. Uma caixa custa R$ 12 reais. Quantos reais Joana gastará para comprar as três caixas de paçocas?
6. Na farmácia havia a seguinte oferta: leve 3 sabonetes e pague R$ 2,00. Márcia levou uma dúzia de sabonetes, quanto ela pagou?
7. Sandra pagou R$ 24,00 na compra de pacotes de meias que custavam R$ 4,00 cada um. Quantos pacotes de meias ela comprou?

Descrição do encontro com Renato

No dia e horário combinados, Renato chega à ONG e após os cumprimentos encaminhamo-nos à sala de oficinas. Dirigimo-nos à mesa, sentamo-nos, organizo a mesa com a CI entrego-lhe um lápis com a primeira atividade e peço para ele ler e resolver a atividade 1.

Renato lê a primeira atividade: *Francisco comprou 3 carrinhos, e pagou 10 reais por cada um. Quanto ele pagou pelos três?* Renato pega a CI e digita 3x10=, fala que é 30, então, insisto para que registre seus cálculos e a resposta no papel, Renato faz sem fazer nenhum questionamento.

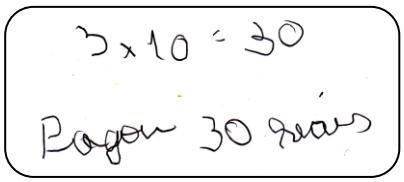


Figura 25: protocolo da atividade 1

A segunda atividade, Renato após a leitura calcula na CI 6x4= e responde sem titubear 24, após o que registra:

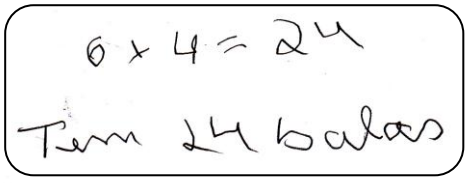


Figura 26: protocolo da atividade 2

Na terceira atividade após a leitura em voz alta, Renato pega a CI e inicia a busca da solução pela estratégia de ensaio e erro, após quatro tentativas, calcula 20 x 3, encontra 60 e registra no papel.

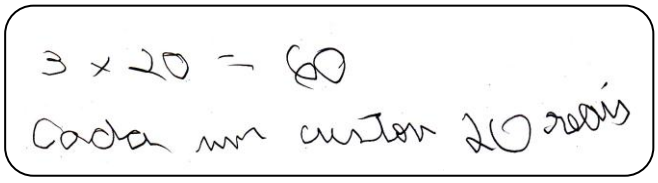


Figura 27: protocolo da atividade 3

Na quarta atividade, ele pega a CI e age como na atividade anterior, buscando a solução pela estratégia de ensaio e erro, após uma tentativa: 2x6=12, calcula 3x6=18 e registra no papel.

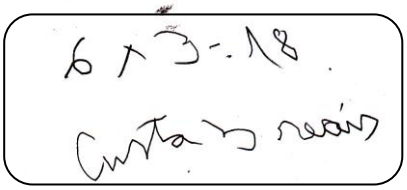


Figura 28: protocolo da atividade 4

Renato lê a quinta atividade e calcula imediatamente na CI: 3x12=36, registrando o cálculo 36 reais no papel.

E lê em voz alta o problema da 6ª atividade: *Na farmácia havia a seguinte oferta: leve 3 sabonetes e pague R$ 2,00. Márcia levou uma dúzia de sabonetes, quanto ela pagou?*E diz:

R: Não sei o que é para fazer.
P: Leia o problema novamente em voz alta.
Renato lê e comenta:
R: Ainda não entendi.
Leio o problema para ele.
R: Não sei como fazer. O que é uma dúzia?
P: Uma dúzia é igual a doze.

Após, faz diversos cálculos na CI, conforme o protocolo abaixo:

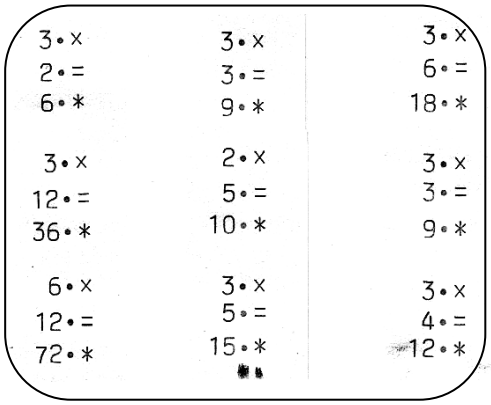


Figura 29: protocolo 1 da at. 6

Depois desses cálculos, registra no papel o seguinte:

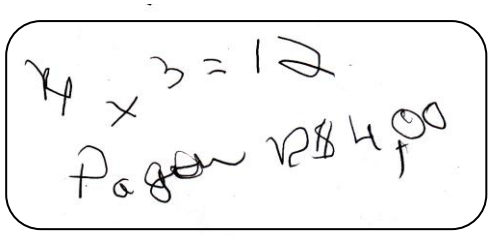


Figura 30: protocolo 2 da at. 6

Entrego-lhe a sétima atividade: *Sandra pagou R$ 24,00 na compra de pacotes de meias que custavam R$ 4,00 cada um. Quantos pacotes de meias ela comprou?* Que é lida em voz alta por Renato, que passa a buscar o resultado por ensaio e erro na CI, observando cada passo por mais tempo do que o utilizado com a mesma estratégia nas atividades anteriores, quando obtém 6x4=24, registra no papel:

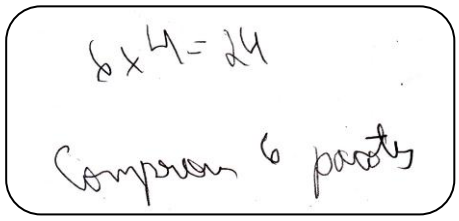


Figura 31: protocolo da atividade 7

Recolho os protocolos e despeço-me de Renato, pois o tempo do encontro já ultrapassava 5 minutos.

Análise *a posteriori* "local" do sétimo encontro

As atividades 1, 2 e 5 correspondentes ao esquema 1 e nível 1, cuja resolução "mais eficiente" é por meio da multiplicação, Renato resolveu correta e rapidamente pela multiplicação requerida.

Na atividade 7 correspondente ao esquema 1 e nível 2, e as atividades 3 e 4 correspondentes ao esquema 2 nível 2, a resolução "mais eficiente" é por meio da divisão, Renato chegou ao resultado correto por meio da estratégia de ensaio e erro baseada na multiplicação. O que parece indicar que nesses três casos a diferença entre os esquemas não fez diferença na estratégia utilizada, e que a mesma deu condições a Renato resolver o problema.

A atividade 6 corresponde ao esquema 2 nível 3, neste caso a estratégia de ensaio e erro não lhe possibilitou encontrar a solução correta.

É importante observar que, embora com a CI em mãos, Renato não realizou nenhum cálculo, utilizando a operação de divisão. Além disso, é preciso evidenciar que, para fazer as operações de multiplicação entre 3x4 e 6x4, ele sentiu necessidade de usar a CI. Isso parece indicar que não domina as tabuadas do 3 e do 6 e, talvez, do 4, pois pode acontecer dele dominar a tabuada do 4, mas não se reportar à propriedade comutativa da multiplicação.

8º encontro

Objetivo deste encontro: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução de atividades relativas a problemas de combinatória.

Para tal objetivo, o roteiro do encontro foi elaborado utilizando cinco atividades exploratórias de problemas de combinatória selecionados do Guia de planejamento da SEE/SP(2007).

Esse tipo de problema pode ser representado por dois tipos de esquema:

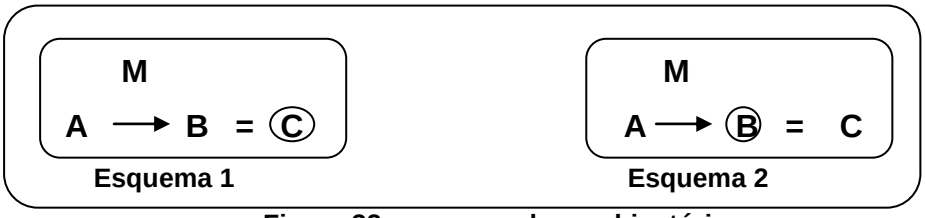


Figura 32: esquema de combinatória

A, B e **C** representam dados do problema **M,** a relação multiplicativa entre **A** e **B.** Os dados circulados são os desconhecidos.

Desse modo, escolhi quatro problemas relativos ao esquema 1 e apenas um relativo ao esquema 2. A escolha baseou-se na questão que já observado, que Renato transforma todo o problema, cuja resolução mais eficaz é por meio da operação divisão em um problema de multiplicação, usando a estratégia de ensaio e erro.

A apresentação das cinco atividades será feita uma a uma conforme a resolução de Renato. As atividades selecionadas são as seguintes:

1. Para vestir um palhaço tem-se 5 chapéus e 12 trajes. De quantas maneiras diferentes se pode vestir o palhaço?
2. Para fazer vitamina tenho 6 tipos de frutas e posso bater com água, leite ou laranja. Para cada vitamina usarei uma fruta e um tipo de líquido. Quantos sabores de vitaminas diferentes eu posso fazer?
3. Vou dar uma festa e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches, comprei 3 tipos de frio e 4 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches com um tipo de pão e um tipo de frios, posso servir?
4. Em uma sorveteria por quilo existem 28 sabores de sorvetes e 12 coberturas. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura?
5. Numa festa foi possível formar 35 pares diferentes para dançar. Se havia 5 rapazes e todos os presentes dançaram, quantas moças estavam a festa?

<u>Descrição do encontro com Renato</u>

Quando chego à sala de recepção, no horário determinado encontro Renato deitado no sofá da sala. Após os cumprimentos dirigimo-nos à sala do encontro, mas no caminho Renato visivelmente abalado conta que o pai havia falecido naquela semana.

Sentamos à mesa e arrumo o material: CI e as cinco atividades. Na mesa, já havia papéis em branco e lápis, preto e de cor.

Renato lê em voz alta o primeiro problema: *Para vestir um palhaço tem-se 5 chapéus e 12 trajes. De quantas maneiras diferentes se pode vestir o palhaço?* Após, começa a contar alto marcando nos dedos:

> R: Um chapéu e um traje, um chapéu e outro traje...

Renato perde as contas e começa, então, a desenhar no papel o palhaço, os cinco chapéus e os doze trajes. O que demanda bastante tempo. Quando pede:

> R: Posso pegar os lápis de cor para pintar?
> P: Agora não. Mas pode levar para casa para pintar quando acabar de resolver o problema.

Sem pegar a CI, Renato usou a árvore de possibilidades para a contagem e registrou no papel: 60 trajes.

Ao tentar resolver a 2ª atividade, usa a mesma estratégia que usou na primeira, o que demandou muito tempo, fazendo com que este se esgotasse, antes de chegar à contagem pela árvore de possibilidades desenhada.

Renato pega os dois protocolos para pintar em casa e despedimo-nos.

Análise *a posteriori* "local" do oitavo encontro

O fato de Renato ter revelado a morte de seu pai naquela mesma semana do encontro, interferiu em minha postura, pois fui surpreendida e fiquei penalizada pelo ocorrido e pelo fato dele ter vindo ao encontro da semana, apesar do falecimento do pai.

Isso seguramente afetou tanto minha conduta de pesquisadora como a de Renato que se deixou entreter pelo desenho muito mais do que pela resolução do problema.

No entanto, o encontro permitiu-me observar que ele relacionou corretamente a resolução dos problemas à "árvore de possibilidades", o que me permite concluir que ele já havia tido contato com problemas de combinatória simples. Mas vale ressaltar que, em nenhum momento, Renato

relacionou o problema com a operação de multiplicação, mesmo tendo a possibilidade da CI a seu alcance.

Dessa forma, decidi compor o roteiro do próximo encontro com as atividades 3,4 e 5; primeiro por não acreditar que Renato traga de volta os dois protocolos desse encontro; segundo, para melhor identificação e análise das estratégias de Renato nesse tipo de problema.

Neste encontro, Renato precisou da CI para obter o resultado de 6x3, o que parece confirmar que ele não domina as tabuadas do 3 e do 6, conforme conjectura da análise do encontro anterior.

9º encontro

De acordo com a análise *a posteriori* local do encontro anterior, permaneci nesse 9º encontro com o mesmo objetivo do 8º.

Objetivo deste encontro: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução de atividades relativas a problemas de combinatória.

O roteiro do encontro constou da apresentação das atividades 3,4 e 5 já citadas anteriormente na página 87.

Descrição do encontro com Renato

Ao chegar à recepção, encontro Renato, e dirigimo-nos à sala do encontro de modo habitual.

Entrego-lhe a folha com o enunciado da atividade 3: *Vou dar uma festa e servirei sanduíches. Para fazer os sanduíches, comprei 3 tipos de frios e 4 tipos de pães. Quantos tipos diferentes de sanduíches com um tipo de pão e um tipo de frios, posso servir?* Após a leitura em voz alta, Renato desenha no protocolo os tipos de frios e os pães. Conforme a figura abaixo:

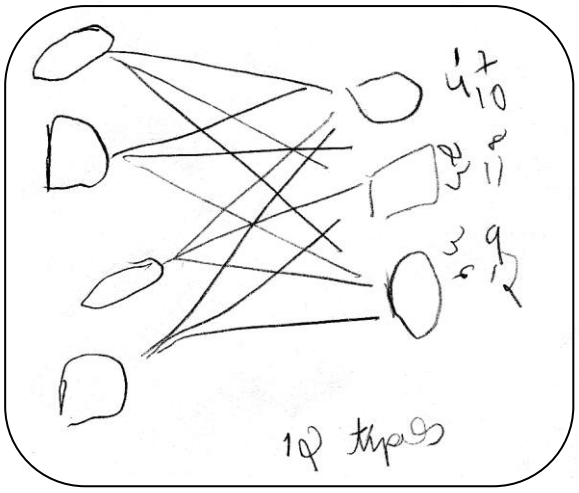


Figura 33: protocolo da atividade

Como no 8º encontro, Renato resolve corretamente o problema usando a estratégia de contagem diretamente da "árvore de possibilidades" desenhada.

Na 4ª atividade: *Em uma sorveteria por quilo existem 28 sabores de sorvetes e 12 coberturas. De quantas maneiras diferentes você pode se servir, sabendo que todos os sorvetes são acompanhados de cobertura?* Ocorreu o seguinte diálogo com Renato, ao iniciar a representação os sorvetes:

> P: Renato, você não sabe uma forma mais simples de resolver esse tipo de problema?
> R: Não , não sei...
> P: Porque para desenhar todos esses sorvetes vai dar muito trabalho...
> Renato continua fazendo os desenhos.

Após desenhar os 28 sorvetes e as 12 coberturas, antes que comece a contagem, pergunto-lhe:

> P: Você conhece uma forma simples de fazer a contagem das possibilidades?
> R: Não.
> P: Pense um pouco...
> R: Posso contar de 12 em 12.
> P: Quantas vezes voce vai contar de 12 em 12?
> R: Não sei...
> P: Pense um pouco.
> Após um tempo
> R: Vou contar o 12 , 28 vezes, porque tem 28 tipos de sorvete.

Renato pega a CI e começa a somar: 12+12+12...
P: Será que não existe uma operação que permita obter a solução de uma só vez?
Renato digita 12x28= na CI, obtendo 336.

Renato pede o protocolo da atividade 3 anterior, observa a resolução e verifica na CI o resultado de 3x4=, validando seu resultado .

Após ler a quinta atividade - *Numa festa foi possível formar 35 pares diferentes para dançar. Se havia 5 rapazes e todos os presentes dançaram, quantas moças estavam na festa?-* Renato sem recorrer a árvore de possibilidades, calcula na CI 5x35=, e registra no protocolo : 175 moças.

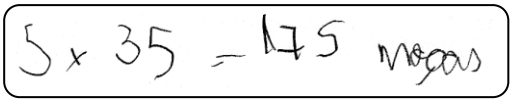


Figura 34: protocolo da atividade

Chamei a atenção de Renato:
P: Leia o enunciado da questão novamente e preste atenção no todo não só nos números!
R:Então eu não sei.

Como não havia mais tempo encerramos o encontro.

Análise *a posteriori* "local" do nono encontro

Renato mostrou a compreensão dos problemas que envolviam combinação simples. Ele soube construir a árvore de possibilidades corretamente. No entanto, associa no início essa representação à operação de adição, pois usa a contagem.

Na quarta atividade instado a refletir sobre a contagem, e talvez por minha pergunta *Quantas vezes você vai contar de 12 em 12?* Renato relaciona "a contagem" com a operação de multiplicação.

O fato evidencia que ele é capaz de refletir quando é estimulado como também por si mesmo, pois volta ao protocolo já entregue para observar e validar o resultado.

É também importante notar o papel que a CI representou, tanto para validação dos resultados como para o cálculo da multiplicação.

Na quinta atividade, a reação de Renato foi intempestiva e causada talvez pelo cansaço, pois o horário do encontro já estava se esgotando ou pelo fato de se tratar de um problema relativo ao esquema 2 depois de 4, do tipo do esquema 1. O que o levou a pensar em utilizar a multiplicação em lugar da divisão.

É preciso comentar que se eu tivesse chamado a atenção de Renato para o número 175 de moças obtido, em lugar de remetê-lo ao enunciado, talvez ele tivesse percebido a incongruência desse resultado.

Nos encontros anteriores, Renato usava a estratégia de ensaio e erro fazendo multiplicações para encontrar o resultado correto da divisão. Isto é, implicitamente, ele percebia que a operação de divisão é o inverso da multiplicação.

Aparentemente, no encontro, Renato parece ter associado a contagem, isto é, a adição à multiplicação em problemas de combinação simples.

Neste encontro, como no sétimo Renato ao usar a CI para calcular 3x4 parece indicar que ele não domina a tabuada do 3 e talvez a do 4.

Reunião com uma das coordenadoras

Após o 9º encontro, a mesma coordenadora com a qual me encontrei depois do 5º encontro com Renato, solicitou que nos reuníssemos para uma conversa.

Nessa reunião, fiz um relato oral resumido sobre como Renato vinha participando de minha pesquisa.

Diante do exposto, e de seu conhecimento sobre Renato, a coordenadora sugeriu-me que insistisse com Renato, para que realizasse as atividades sempre que ele reclamasse estar cansado ou dissesse que não sabia fazer.

Além dessa sugestão, a coordenadora disponibilizou-me um envelope com todos os dados de Renato de posse da Instituição. Dentre eles, o relatório de exame auditivo, a sondagem inicial, o relato de dois encontros com a mãe, o boletim da escola relativo ao 6º ano, um diagnóstico sobre as dificuldades escolares de Renato feito pelo professor e coordenador da escola onde estuda e o diagnóstico de Renato feito por sua "referência" do Trapézio.

10º encontro

Objetivo deste encontro: identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução de atividades relativas a problemas de configuração retangular.

Almejando atingir esse objetivo elaborei o roteiro do encontro com atividades que exploram problemas do campo multiplicativo de "configuração retangular". Selecionei três problemas contextualizados no cotidiano dentre os presentes no guia de planejamento da SEE/SP (2007).

Resolvi ater-me a três atividades somente, pois concluí que um número maior de atividades por encontro nos levava a deixar alguns sem resolução, sobretudo os últimos. Assim limitando a três, supus que haveria tempo para maior reflexão e exploração da resolução.

As atividades selecionadas apresentam as seguintes características:

- As duas primeiras permitem a contagem por meio da representação e diferem somente pelos esquemas:

Figura 35: esquema de configuração retangular

A, B e **C** representam dados do problema **M,** a relação multiplicativa entre **A** e **B.** Os dados circulados são os que são desconhecidos.

- A terceira atividade não permite a contagem, mas pode ser representada pelo Esquema 1 acima.

As três atividades foram apresentadas cada uma em uma folha de papel quadriculado, para facilitar o registro da possível representação. Tais atividades consistiram nos seguintes problemas:

1. No anfiteatro de minha escola, as cadeiras estão dispostas em 9 fileiras horizontais e 7 fileiras verticais. Quantos lugares há no anfiteatro?
2. Em um auditório há 64 cadeiras. Elas estão dispostas em 8 fileiras horizontais. Quantas são as verticais?
3. Um terreno retangular tem 120 metros de largura e 47 metros de comprimento. Qual é sua área?

Descrição do encontro com Renato

Renato e eu encontramo-nos na recepção e após os cumprimentos de praxe, subimos à sala.

Após nos acomodarmos nas cadeiras em frente à mesa, e arrumar as atividades à minha frente à CI na frente de Renato, entrego-lhe a primeira atividade.

Renato não explicita estranhamento sobre o papel quadriculado, lê alto o enunciado do problema da 1ª atividade. Começa, então, a representar as cadeiras na configuração dada, pintando os quadradinhos isolados um do outro por uma casa em branco. No final, conta o número de quadrados pintados e registra:

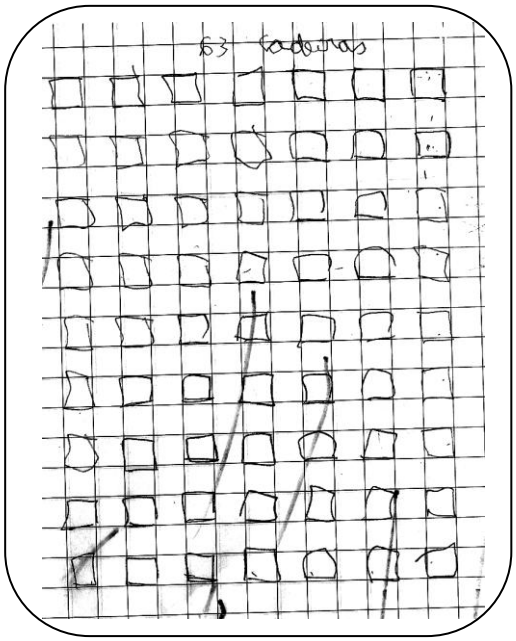


Figura 36: protocolo da atividade

Entrego-lhe a 2ª atividade, e ele lê o enunciado do problema em voz alta e representa as oito fileiras por oito quadradinhos pintados isolados por quadradinhos em branco , de forma horizontal. Após, pergunta:

R: Como vou fazer as outras se não sei quantas são?
P: Pense nisso.

Após refletir um pouco, Renato começa a preencher os quadradinhos de um em um, abaixo da primeira fileira indicada. Em determinado momento para, conta o número de quadradinhos preenchidos e volta a preencher mais até obter os 64 quadradinhos. Daí, conta as fileiras verticais e registra a resposta correta.

Entrego a terceira atividade. Depois de ler em voz alta o enunciado do problema, ele pergunta:

R: E agora? Como vou desenhar?
P: Você já pensou se é razoável toda a vez que eu quiser resolver um problema, eu tiver de desenhar e contar os quadradinhos um por um?
R: Acho que não. Mas não sei outra forma de fazer.
R: É, sempre tem que contar um por um.
P: E se o número for muito grande, como vai fazer?
R: Ah! Isso eu não sei dizer.
Mostro-lhe o protocolo da 1ª atividade e pergunto:
P:Presta atenção no que voce fez aqui no 1º problema! Será que não existe uma forma mais rápida de contar os quadradinhos?
Renato observa em silêncio a atividade
R:Todas as linhas têm nove quadradinhos, então, posso contar de nove em nove.
P: Quantas vezes você vai contar o nove?
R: Ah! posso multiplicar nove vezes sete!

Imediatamente, Renato pega o papel da 3ª atividade e diz:

R: Aqui posso fazer 120 vezes 47.

Renato pega a CI e calcula 120x47=, obtendo o resultado desejado e registrando sua resolução no papel.

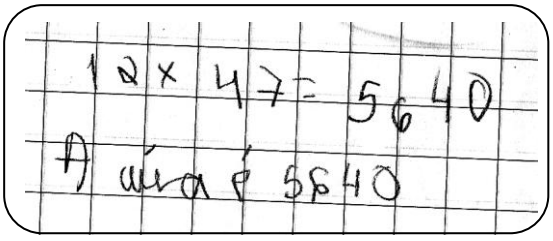


Figura 37: protocolo da atividade

O tempo esgotou-se e despedimo-nos.

Análise *a posteriori* "local" do décimo encontro

Renato resolveu a primeira atividade, representando no papel quadriculado a situação dada no enunciado do problema: cadeiras enfileiradas em sete fileiras verticais e nove horizontais. A representação pode ter sido induzida pelo papel de resolução, que era quadriculado.

Ao ser levado a refletir sobre o método de contagem utilizado para resolver esse problema, Renato acabou expressando que em lugar de contar cada cadeira, poderia ter contado de “9 em 9”. Minha intervenção sobre - *quantas vezes você vai contar o nove?* - teve o efeito de provocar a percepção de Renato, pois, imediatamente ele respondeu - *Ah! posso multiplicar nove vezes sete!*

Não posso deixar de observar que o uso da palavra *vezes* contida em minha interpelação pode ter provocado essa percepção. No entanto, é um fato inegável que essa “percepção” de Renato foi produtiva, pois redundou imediatamente no uso da estratégia desejável, isto é, a multiplicação dos valores dados na terceira atividade, para obter a área. Isso mostra a compreensão de Renato de que ambas as atividades 1 e 3 têm o mesmo esquema (no caso, o esquema 1, da p. 94).

Em uma análise de uma situação “concreta”, a representação da situação por meio de desenho ou quadradinhos, como feita por Renato na primeira atividade, poderá ajudar o aluno a perceber como chegar matematicamente à solução. No entanto, esse “apoio” de representação em situações mais simples como essa, em pouco tempo, deve se tornar desnecessária.

É importante notar que, mais uma vez, Renato “foge” da operação divisão, apelando para a estratégia de ensaio e errro, por meio da operação de multiplicação.

Mais uma vez há evidências de que Renato não domina as tabuadas mais simples, como as do 7, 8 e talvez do 9.

Conforme comentado anteriormente, os últimos cinco encontros pretenderam obter dados sobre a concepção de Renato da operação de multiplicação dos números naturais, pela resolução de problemas referentes aos quatro diferentes tipos: 1º multiplicação e divisão comparativas, 2º proporcionalidade, 3º combinatória e 4º configuração retangular. Assim, a seguir, embasada nas análises a posteriori locais de cada um dos encontros anteriores, apresento uma análise a posteriori dos cinco encontros.

Análise *a posteriori* “local” dos encontros 6, 7, 8, 9 e 10.

A primeira observação importante a ser feita refere-se às análises a *posteriori* locais, de cada um dos cinco encontros, que foram aprofundadas ao término dos cinco encontros e, assim, não tiveram o efeito desejado de afetar o roteiro dos encontros seguintes.

É importante ressaltar que, embora Renato faça cálculos pela CI, nas atividades iniciais de cada encontro, ele dá a resposta contextualizada adequadamente ao problema.

Renato mostrou desconhecer alguns termos como **dobro** e **dúzia,** o que é surpreendente, pois tais expressões são bastante usadas no cotidiano.

A insistência de Renato na resolução das atividades relativas à divisão pela estratégia de ensaio e erro em todos os problemas dos quatro tipos, levando em conta, que ele podia utilizar a CI para tal, parece evidenciar a falta de compreensão do significado da operação divisão de números naturais.

Essa consideração torna-se mais evidente se pensarmos que não havia necessidade de realizar a divisão utilizando o algoritmo, bastava apertar as teclas para obter o resultado.

Mas, conforme atestam os diversos protocolos dos encontros a estratégia de ensaio e erro utilizada para problemas que envolviam a operação divisão não parece ser aleatória: as tentativas mantiveram-se próximas do resultado requerido, e foram sendo aperfeiçoadas ao longo do tempo, fato que lhe permitiu resolver corretamente a maior parte dos problemas.

Durante os encontros, Renato evidenciou que sua memorização das multiplicações corriqueiras não foi finalizada, assim, parece ter faltado em sua prática escolar o trabalho com a tabuada “salteada”. Dessa forma, ele não apresentou recurso ao cálculo mental. No entanto, não mostrou dificuldades com a prática da leitura e compreensão dos problemas, embora não domine as tabuadas mais simples na forma “salteada”, o que não dificultou a resolução dos problemas, pois mostrou que refletiu a respeito do que foi solicitado e

buscou uma solução, até mesmo, pela estratégia de ensaio e erro para os casos de divisão.

Vale observar também que Renato busca quando possível a representação das situações, como observamos nos encontros de combinatória e configuração retangular, inclusive o estudo de combinatória inicia-se pela representação da árvore de possibilidades; entretanto, depois disso é suposto que os alunos passem a identificar a multiplicação na resolução desse tipo de problema. No caso de Renato, fica evidente que ele conhece o assunto, mas ainda se encontra dependente da representação, o que é visto na fase inicial deste estudo.

Dentre as atividades relacionadas com a proporcionalidade, Renato só não resolveu aquela indicada por Barreto (2001), como sendo de maior nível de dificuldade.

Mas, mostrou sua compreensão dos problemas que envolvem combinação simples; e sabe construir a árvore de possibilidades corretamente. No entanto, no início relaciona essa representação à operação de adição, entretanto é preciso ressaltar que, ao ser instado a refletir sobre a contagem, percebe que se trata da operação multiplicação. O fato evidencia que ele é capaz de refletir, tanto quando é estimulado como também por si mesmo, pois volta ao protocolo já entregue para observar e validar o resultado.

É também importante notar o papel que a CI representou, tanto para a validação de resultados como para o cálculo da multiplicação.

Minha observação sobre o uso da palavra *vezes* contida em algumas de minhas interpelações pode ter levado Renato a realizar a operação multiplicação. Mas é um fato inegável que essa “percepção” de Renato foi produtiva pois, geralmente, redundou no uso da estratégia desejável.

As considerações acima levam-me a concluir que Renato mostrou possuir uma concepção processo em vias de objetificação. Creio que a justificativas para minha crença de que se encontra em vias de objetificação é o fato de que ele implicitamente reconhece a relação entre multiplicação e

divisão, ao tentar obter o resultado da divisão por meio da estratégia de ensaio e erro de diferentes multiplicações.

É importante o reconhecimento de que o diagnóstico feito pelo próprio Renato no primeiro encontro de que a única coisa que "*não sabe*" é a divisão foi mais profundo do que inicialmente acreditei, não é apenas relativo à dificuldade com os algoritmos, é com o próprio conceito de divisão que parece estar ainda atrelado ao ato de distribuir material concreto.

Dessa forma decidi preparar um roteiro para o próximo encontro que lhe possibilitasse perceber a relação entre a operação multiplicação e a "operação" divisão nos números naturais.

11º encontro

De acordo com a análise a *posteriori* dos últimos encontros com Renato foi possível perceber que ele encontra dificuldades em relacionar as operações de multiplicação e divisão explicitamente. Desta forma, estabeleci o objetivo deste encontro:

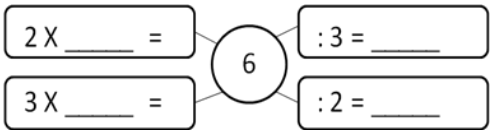
Objetivo deste encontro: Tornar *e*xplícita a relação entre a operação de multiplicação e sua inversa a divisão.

Ao visar tal objetivo, elaborei um roteiro constante de seis atividades nas quais o uso da CI foi previsto apenas para a validação dos resultados.

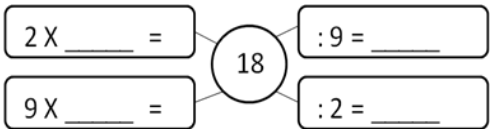
As atividades foram registradas cada uma em uma folha de papel em branco para serem entregues uma após a outra conforme o sujeito fosse terminando.

Nas quatro primeiras atividades coloquei números entre 1 e 9 para facilitar que ele percebesse tanto a propriedade comutativa da multiplicação como a relação entre a multiplicação ea divisão dos três números envolvidos. As duas últimas atividades envolvem números maiores.

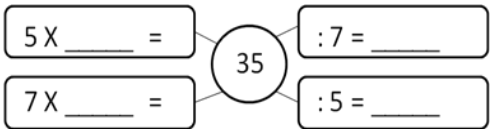
Atividade 1



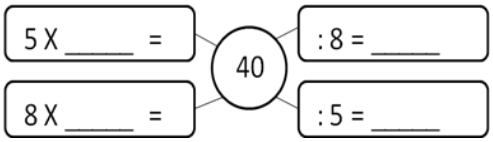
Atividade 2



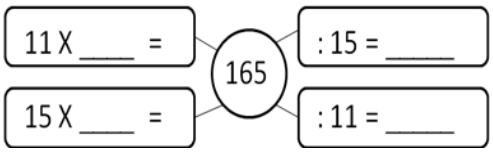
Atividade 3



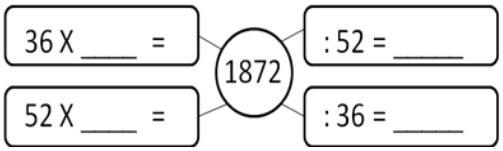
Atividade 4



Atividade 5



Atividade 6



Descrição do encontro com Renato

Chego à sala da recepção e vejo Renato que se levanta, nos cumprimentamos e vamos à sala do encontro como habitualmente.

Sentamo-nos à mesa, coloco sobre a mesma a CI e entrego a Renato a primeira atividade. Explico que, primeiramente, ele vai realizar as operações

usando o lápis para os cálculos e depois, poderá validar o resultado obtido pela CI.

Para resolução da primeira atividade, Renato registra no papel as tabuadas do 2 e do 3 até obter o resultado indicado, o 6, à medida que resolve, valida cada uma delas na CI. Para realizar as divisões de 6 por 2 e de 6 por 3, ele faz menção de pegar os lápis do copo à sua frente, peço então, que utilize somente o lápis dado para o registro no papel.

Renato desenha seis riscos e distribui em três grupos e registra dois no espaço destinado ao resultado de 6:3, após o que valida, utilizando a tecla da divisão na CI. Para calcular 6:2, age analogamente: desenha seis riscos e distribui em dois grupos e valida na CI.

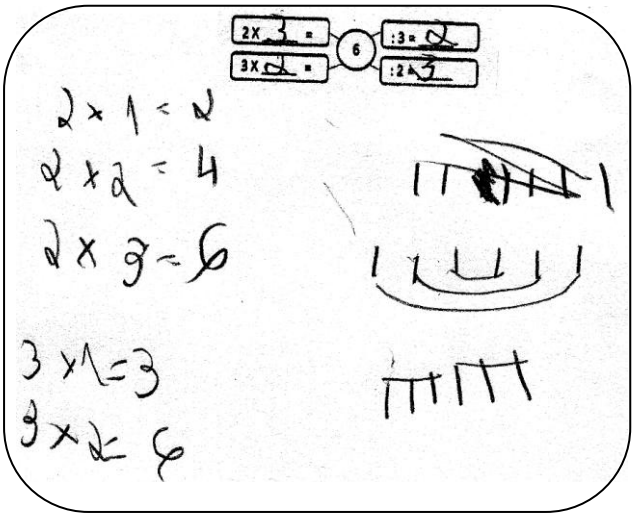


Figura 38: protocolo 1 da at.

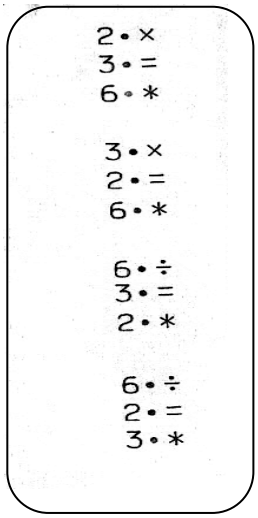
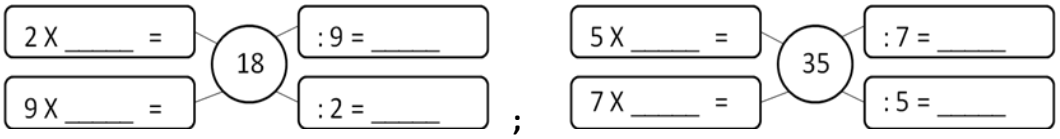


Figura 39: protocolo 2 da at.1

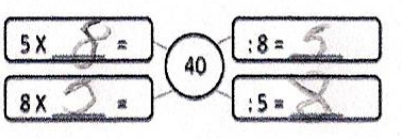
Para resolução das segunda e terceira atividades:



Renato procede da mesma forma que, na atividade 1, escreve as tabuadas até o número envolvido para resolver as multiplicações, desenha

risquinhos, agrupa-os para calcular o resultado das divisões e valida cada cálculo pela CI.

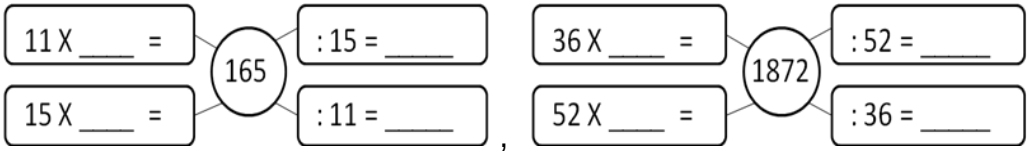
Ao receber a quarta atividade, Renato mostra ter percebido as relações entre os números envolvidos nos esquemas, pois pergunta-me enquanto vai colocando os números corretos nos lugares requeridos:



R: posso só colocar os números?
P: Ah, não! Põe os cálculos no papel.

Renato usa as mesmas estratégias das três primeiras atividades para justificar os números encontrados, após o que valida cada “cálculo” na CI.

Nas duas últimas atividades, 5ª e a 6ª:



Renato realiza as multiplicações, mas ao buscar a validação na CI, ele mesmo observa que procedeu de forma errada, passando a buscar onde está seu erro. Assim, utiliza o resultado da calculadora, pois não encontra o erro em seu algoritmo. Conforme seguem os protocolos:

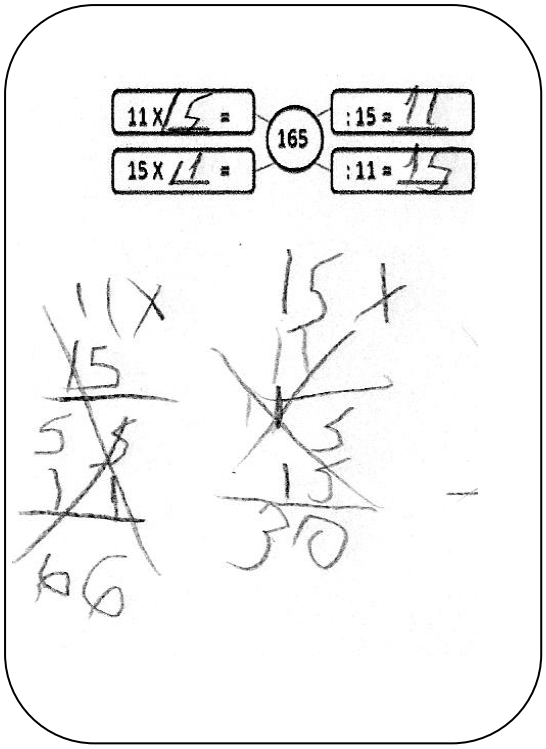


Figura 40: protocolo da at. 5

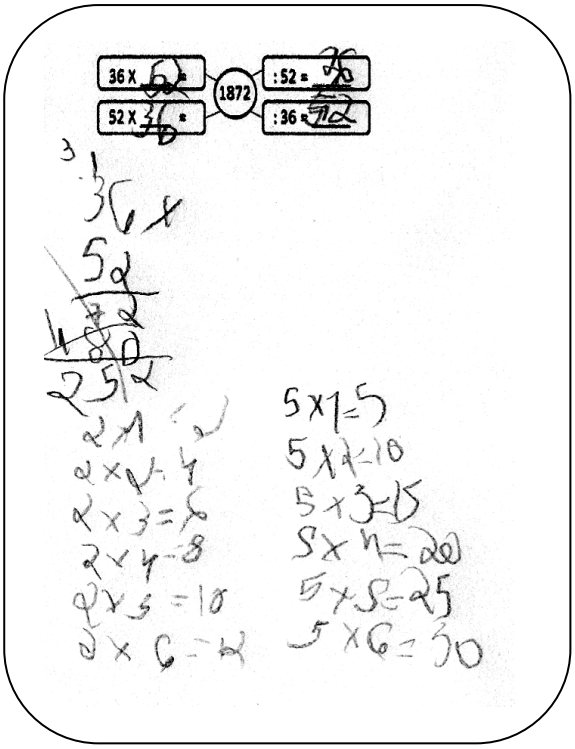


Figura 41: protocolo 2 da at.6

Nestas duas últimas atividades nas divisões constantes, diz que só realizaria na calculadora, pois não sabia fazer de outra forma. O tempo esgota-se e despedimo-nos.

Análise *a posteriori* "local" do décimo primeiro encontro

Na resolução da primeira atividade, é importante notar que Renato pela primeira vez utiliza a tecla de divisão para validar os resultados de 6:2 e 6:3, o que pode ter acontecido, porque o problema estava contextualizado na Matemática e não no cotidiano, e o símbolo da divisão (:) pode ter despertado sua atenção para a possibilidade de utilizar a tecla de divisão.

A estratégia mostrada no protocolo da primeira atividade para resolver a divisão demonstra que Renato embora não utilize os lápis, continuou interpretando a divisão como uma distribuição, cujos riscos representam os lápis já utilizados anteriormente, isto é, como se fossem um material concreto.

O fato de Renato ter percebido a configuração dos esquemas:

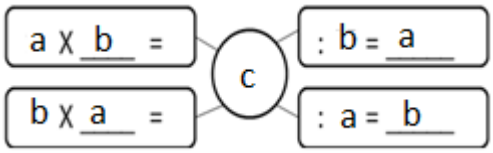


Figura 42: esquema da atividade

indica que ele possui uma boa percepção visual, mas esta não o levou a mudar sua estratégia de cálculo. Pelo contrario as resoluções posteriores indicaram sua dificuldade com o algoritmo da multiplicação entre números de ordem maior que a das unidades, e um aparente desconhecimento de um algoritmo da divisão. Sem esquecer que Renato parece ainda estar enredado na concepção de que dividir é distribuir, criada talvez pelo uso excessivo de material concreto.

Creio que ele pode ter percebido a relação entre as operações de multiplicação e divisão, bem como sobre a propriedade comutativa da multiplicação, porém o fato de precisar basear-me na resolução de seis atividades relativas a um **mesmo esquema** não me dá argumentos para afirmar.

Constatei que ele embora não domine o algoritmo da multiplicação que envolve números de ordem maior que as unidades, já demonstra uma concepção processo em vias de objetificação sobre a operação multiplicação. Tenho elementos suficientes para concluir que Renato aparenta estar “atrelado” à concepção de que a “operação” de divisão é apenas a de distribuição em partes iguais, com o agravante de que não esboça nem mesmo um algoritmo para essa “operação”.

Diante do ocorrido, julgo que os onze encontros foram suficientes para atingir o objetivo estabelecido: **Investigar se e como, alunos de 8º ano, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula.**

Os 12º até o 16º encontros inclusive ocorreram, porém não visaram nem acrescentaram dados relativos ao objetivo da pesquisa aqui descrita.

Dessa forma, deixo de apresentar esses cinco encontros e, a seguir, passo a descrever a última conversa com Renato, seguida da conversa com sua "referência" na ONG.

Última conversa com Renato

No dia em que todos os estudantes atendidos pela ONG participariam de uma atividade de encerramento do semestre, fui até à Instituição para finalizar os 16 encontros com uma conversa sobre o que foi realizado nesses encontros durante o semestre.

Ao chegar, convido Renato para me acompanhar até à sala habitual, nos sentamo-nos à mesa e, imediatamente, Renato entusiasmado exclama:

> R: Sabe que eu não fiquei de recuperação em Matemática ? E a minha mãe vai me dar um celular por isso!
> P: Que bom, parabéns! Então, Renato o que você achou sobre os nossos encontros?
> R: Até a multiplicação, eu estava aprendendo, e gostando, mas quando comecei com a divisão ficou chato, não gosto e não entendo.

Nesse momento, bateram à porta chamando Renato para o início das atividades de encerramento. Despedimo-nos e desejei-lhe uma boa festa de encerramento.

Reunião com a referência de Renato

Após a última conversa com Renato, reuni-me com a referência dele que comentou ter tido uma conversa com o professor de Matemática que lhe explicitou que era a primeira vez, desde o 6º ano, que Renato não ficava de recuperação. O professor ainda acrescentou que pensava que o rendimento de

Renato em Matemática ainda não era satisfatório, mas já representava uma melhora em relação aos anos anteriores.

Julguei importante realizar uma entrevista com esse professor de Matemática, a fim de compreender quais eram os pontos que julgava ter melhorado o desempenho de Renato. No entanto, após cinco tentativas de contato com a coordenadora da escola onde Renato estuda, para solicitar uma entrevista com o professor, não consegui ser atendida. Embora tenha tentado, tanto por telefone como presencialmente na secretaria da escola.

Assim, solicitei a ajuda da “referência” de Renato na ONG para obter essa permissão de entrevista. Ela, após um tempo, contou-me que também tinha sido em vão suas tentativas de viabilizar essa entrevista.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa aqui relatada teve como objetivo geral:

> **Investigar se e como, alunos de 8º ano, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos, quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não usuais em sala de aula** (p. 6).

Para atingir esse objetivo, foram selecionados três sujeitos de uma ONG que acolhe alunos encaminhados por escolas públicas. As escolas indicam tanto alunos com problemas de relacionamento como aqueles que não superaram suas dificuldades em Português e/ou Matemática, apesar das aulas de recuperação.

Inicialmente, realizei um estudo de caso com três sujeitos que frequentavam o 8º ano e foram considerados alunos com dificuldade em Matemática. Após o exame de qualificação, por sugestão da banca, restringi o estudo somente a um dos sujeitos, denominado ficticiamente por Renato.

O estudo de caso foi realizado por meio de uma série de 12 entrevistas semiestruturadas, ocorridas em 11 encontros, cujos roteiros incluíram atividades matemáticas, além de uma última entrevista que teve a finalidade de obter a visão do sujeito sobre o processo ocorrido durante os 11 encontros anteriores.

Para coletar os dados necessários para a análise da introdução da calculadora no trato de atividades relacionadas às operações com números naturais e seu possível efeito no aprofundamento das concepções dos sujeitos sobre cada uma das operações dos números naturais, baseei-me sobretudo nas ideias da teoria APOS conforme descrita em Dubinsky (1991) e Asiala el al. (1996).

Para a elaboração de algumas das atividades propostas aos sujeitos nos encontros, utilizei pesquisas de Barreto (2001) e Magina et al. (2010; 2011) baseadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Como tecnologias não usuais em sala de aula, empreguei a calculadora portátil com impressora – CI (Figura 11, p.53) e o ábaco (Figura 14, p.64) Considerando que, nos 11 primeiros encontros, o sujeito utilizou a CI em 9 deles e o ábaco em dois, e usou ambas as tecnologias somente no quinto encontro.

Foi possível observar que Renato tinha alguma familiaridade com a calculadora, embora tenha afirmado que nunca a havia utilizado em sala de aula. O fato não o impediu de se interessar pela CI, e sua utilização além de motivá-lo permitiu que ele refletisse sobre as operações nos números naturais. É importante enfatizar que, embora Renato tenha dado mostras claras de que não dominava os algoritmos das operações com números naturais, o uso da CI foi fundamental para não só permitir que ele a empregasse como recurso para resolver problemas, envolvendo as operações com os naturais como no final ela foi usada pelo sujeito, como um instrumento de validação de seus resultados. O que lhe deu mais autonomia e confiança em si próprio, sendo constatado pela fala da “referência” de Renato.

Considero que os papéis impressos pela CI, resultado das ações de Renato para resolver as atividades, foram “preciosos”, pois como protocolos possibilitaram-me perceber que as estratégias de ensaio e erro utilizadas pelo sujeito não eram aleatórias, expressavam uma reflexão e tinham um sentido.

Assim, os protocolos relativos à CI auxiliaram e permitiram levantar a concepção de Renato com mais segurança sobre as operações nos números naturais.

Nos três primeiros encontros, Renato mostrou conhecer a decomposição de números naturais apenas até a ordem das dezenas, e não dava significado aos termos: unidade, dezena, centena e milhar. A introdução do ábaco permitiu que se apropriasse do significado desses termos e compreendesse a decomposição dos números naturais, observando o valor posicional de seus

algarismos. Mais que isso, Renato expressou sua compreensão sobre os algoritmos da adição e da subtração. Fato que ficou evidente, quando observou e refletiu sobre as operações que realizava no ábaco e relacionou-as ao algoritmo dizendo: (essas trocas) *é a mesma coisa que o "vai um" e "empresta um" não é?* (sic).

É importante ressaltar que após compreender as operações de adição e subtração pelo uso do ábaco introduzido no 4º encontro; já no 5º encontro, aos poucos Renato deixou de utilizá-lo. Isso me permite concluir que ele abstraiu o significado da decomposição dos números naturais, e sua importância para as operações de adição e subtração, tornando-se independente do uso desse "material concreto".

Além disso, a percepção de Renato sobre seu bom desempenho nas atividades que exigiam as operações de adição e subtração dos números naturais, certamente, contribuiu para melhorar sua relação com o saber matemático. Fato que reverberou em sua atuação na oficina de Matemática da ONG e na escola, conforme observou a coordenadora dessas oficinas ao afirmar que ele se tornou mais participativo e seguro.

Acredito que, embasada nas análises anteriores, Renato mostrou ter adquirido **uma concepção processo em fase de objeto** sobre as operações de adição e subtração no conjunto dos números naturais, conforme a teoria APOS. Isto é, ele ressignificou suas concepções sobre a adição e subtração dos números naturais.

Quanto à operação de multiplicação nos números naturais, inicialmente Renato relacionou a operação de multiplicação à soma de parcelas iguais, fato que pode ter sido influenciado pelo enunciado das atividades que falavam em (vezes mais). No entanto, isso ocorreu somente em um primeiro momento pois logo depois ele mostrou ter compreendido que a operação mais adequada era a da multiplicação. Ao realizar essas atividades, Renato demonstrou não conhecer o significado dos termos dobro e dúzia, expressões bastante empregadas na linguagem comum cotidiana e na linguagem da Matemática escolar.

Durante os encontros Renato evidenciou um conhecimento parcial das tábuas de multiplicação, pois embora tenha mostrado-se capaz de registrá-las nos protocolos "por inteiro", era preciso que ele registrasse 5x1, 5x2,...5x5, para dizer quanto era 5x6. O que me permite dizer que o método utilizado para memorização aparentemente não chegou a incluir a tabuada "salteada", o que parece ter tornado o método ineficiente para o cálculo mental.

Nos encontros relacionados ao campo conceitual multiplicativo, Renato encontrou a solução para os problemas de comparação multiplicativa; resolveu com facilidade os problemas de proporcionalidade simples de níveis 1 e 2; transformou a contagem feita diretamente na árvore de possibilidades à solução por meio da operação de multiplicação nos problemas de combinatória; e percebeu a operação de multiplicação nos problemas de configuração retangular. Assim, embora o sujeito não domine as tabuadas mais simples na forma "salteada", isso não dificultou sua compreensão de problemas do campo multiplicativo.

Ao tentar obter o resultado de uma divisão por meio da estratégia de ensaio e erro, usando diferentes multiplicações, Renato mostrou estabelecer implicitamente a relação entre as operações de multiplicação e divisão nos números naturais, pois, conforme a própria teoria afirma: as fases dos diferentes tipos de concepção não ocorrem de forma linear.

Desta forma, concluo que Renato demonstrou uma **concepção processo em vias de objetificação sobre a operação multiplicação**.

A insistência de Renato na resolução de todas as atividades relativas à divisão nos números naturais pela estratégia de ensaio e erro, apesar de poder utilizar a CI para tal, evidencia que o mesmo não relaciona a ideia de divisão que mostrou ter implicitamente com a operação de divisão. Isso se tornou evidente no último encontro, ao usar o símbolo (:) nos problemas contextualizados na Matemática, ele utiliza espontaneamente pela primeira vez a tecla de divisão da CI para validar os resultados de 6:2 e 6:3 .

No entanto, conforme atestam os diversos protocolos, a estratégia de ensaio e erro utilizada por Renato em problemas que envolviam a operação de

divisão de números naturais não me parecia aleatória: as tentativas mantiveram-se próximas do resultado requerido, e foram sendo aperfeiçoadas ao longo do tempo, por reflexão do sujeito pelo que ia sendo impresso, fato que lhe permitiu resolver corretamente a maior parte dos problemas.

É importante o reconhecimento de que o diagnóstico feito pelo próprio Renato no primeiro encontro de que a única coisa que "*não sabe*", é a divisão, não foi apenas relativo à dificuldade com os algoritmos foi, sobretudo sua dependência da concepção externada de que dividir corresponde a distribuir, atrelada ao uso recorrente a materiais concretos , como lápis utilizados no primeiro encontro.

Assim, julgo ter elementos suficientes para concluir que Renato aparenta estar **"atrelado" à concepção de que a "operação" de divisão e apenas a de distribuição** em partes iguais, com o agravante de não esboçar nem mesmo um algoritmo para essa "operação".

Questões que surgiram da pesquisa realizada

O sujeito desta pesquisa demonstrou possuir desenvoltura na leitura e compreensão dos problemas contextualizados no cotidiano, além de ter mostrado boa percepção visual dos esquemas propostos e ter criado esquemas coerentes para a resolução de problemas de combinatória e de configuração retangular. No entanto, foi considerado desde o 6º ano um aluno com dificuldades em Matemática, não superadas pelas recuperações feitas. O fato levou-o a uma relação com o saber matemático desfavorável e desencorajador, o que justifica que o máximo que ele almeja é ser "motorista de rico".

Por outro lado, é conhecida a queixa de professores de Matemática de que os alunos da Educação Básica frente a um problema que foge do padrão trabalhado pelos professores consideram-se incapazes de resolvê-lo. A menos que o professor resolva um problema análogo para que repitam a ordem dos cálculos empregada. Grande parte deles sente-se imobilizada ou resolve fazendo cálculos aleatórios com os números apresentados. Isso pode ser

constatado, por exemplo, no artigo de Santos (2007) que, ao analisar as estratégias utilizadas por 24 alunos de uma classe de 9º ano de escola pública, concluiu que 13 deles não conseguiram resolver um problema que envolvia divisão de números naturais, por não terem sido capazes de pensar em uma estratégia, e realizarem cálculos envolvendo os números apresentados de forma aleatória.

Estas observações levam-me a sugerir pesquisas que:

- Investiguem como as escolas estão caracterizando e sobretudo tratando as dificuldades de seus alunos e de que forma são realizadas as recuperações em Matemática.

Relembrando o que Magina e Spinillo afirmam:

> [...] o material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão em matemática. (MAGINA; SPINILLO, 2004, p.11)

Levam-me refletir sobre a forma como esses materiais têm sido utilizados nas salas de aula. O que me faz sugerir pesquisas que investiguem:

- A prática de professores de Matemática com o uso de material concreto.
- A questão da dependência dos estudantes em relação a algum material.

Dado o resultado de minha pesquisa sobre as vantagens do trabalho com a CI, sugiro pesquisas que se debrucem sobre:

- O efeito da CI para motivar a reflexão dos alunos sobre as operações em vários conjuntos numéricos.

Finalmente, por meio do estudo realizado sobre as tecnologias, e a dificuldade apresentada pelo sujeito desta pesquisa sobre a divisão, sugiro como questões de pequisas:

- Por meio do jogo NIM, destinado ao estudo da divisão, é possível provocar nos alunos uma reflexão sobre a operação de divisão?
- Que propostas de ensino podem ser desenvolvidas a fim de que os alunos possam ressignificar a divisão?

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. *Estudo de caso em Pesquisa e Avaliação Educacional.* Brasília: Líber Livro Editora, 3ª edição, 2008. (Série Pesquisa, v.13)

ASIALA, M., BROWN A., DEVRIES D., DUBINSKY E., MATHEWS, Y. K. D. THOMAS, A. *Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Research in Collegiate Mathematics Education, v. 2, n. 3, 1996.

AZEVEDO, M. V. R. de. *Jogando e construindo matemática: a influencia dos jogos e matérias pedagógicos na construção dos conceitos em matemática*. S.Paulo: VAP, 1999.2ª Ed.

ATIVIDADES sobre frações: <http://www.somatematica.com.br/soexercicios/fracoes.php>. Acesso em: 20 fev. 2011.

BARRETO, I. M. A. *Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

BEHR, M., LESH, R., POST, T., & SILVER, E. (1983). *Rational number concepts*. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

BIANCHINI, B. L., MACHADO, S. D. A. A sensibilização do professor do ensino fundamental para o uso da calculadora em sala de aula. In: GROENWALD, C. L. O. ; ROSA, M (org.) Educação Matemática e Calculadoras: Teoria e Prática. 1ª Ed. Canoas /RS: ULBRA, 2010, p. 179-192.

BOURBAKI, N. *Algèbre*. Paris: Hermann. 1970. (Éléments de Mathématique)

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes nacionais para a educação especial na educação básical* Secretaria de Educação Especial – MEC; SEESP, 2001.

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais.* 1997. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 31 mar. 2011.

_____, Ministério da Educação. *Parâmetros Circulares Nacionais para o Ensino Fundamental.* 5ª à 8ª série, Brasília, SEF, 1998.

_____Relatório SAEB 2003 – Matemática. Brasília-DF. Disponível em: <http:// www.mec.gov.br.>. Acesso em: 15 out. 2005.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R*. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction.* Westport, CT: Ablex, 2002.

CHAPARIN, R. O. *Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APOS.* Dissertação de mestrado. PUC de São Paulo. São Paulo, 2010.

CURY, H. N. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D'ALMEIDA, J. A. Teoria Elementar dos Números sob o ponto de vista dos Cadernos do Professor de Matemática da Rede Estadual de São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

DUBINSKY, E. *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In: Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991.

DUBINSKY, E., & MCDONALD, M. *APOS:* A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education. In: Holton, D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study,* Dordrecht,The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 275-282, 2001. Disponível em: http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf. Acesso em: 12 de nov. de 2010.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, S.D.A. (Org) *Educação Matemática: Uma Nova Introdução*. S.Paulo: EDUC, 3.ed. 2010.

GPEA. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/. Acesso em: 20 out. de 2010.

IMENES, L. M. P. *Os números na história da civilização.* São Paulo: Scipione, 1999.

MACHADO, S. D. A. *Familiarização de crianças com a calculadora*. 2010. (uso restrito)

_____. *Engenharia Didática*. In: *Educação Matemática: Uma nova introdução*. 3ª ed. Org: Machado, S. D. A. São Pauloa: EDUC, 2010.

MAGINA, S. M. P. ; SPINILLO, A. G. *Alguns 'mitos' sobre a Educação Matemática e suas consequências para o Ensino Fundamental.* In: Regina Maria Pavanello. (Org.). Matemática nas Séries Inicias do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula. 1 ed. São Paulo: Ed. SBEM, 2004, v. 2, p. 7-36.

MAGINA, S. M. P.; SANTANA, E. R. S.; CAZORLA, I. M.; CAMPOS, T. M. M. As *Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro*

Primeiras Séries do Ensino Fundamental. Zetetike (UNICAMP), v. 18, p. 15-50, 2010.

MAGINA, S. M. P, SANTOS, A., MERLINI, V. Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos estudantes. XII CIAEM: Recife, Brasil, 2011.

MONTEIRO, L. H. J*. Iniciação às estruturas algébricas.* São Paulo: Editora LPM. Série Professor. GEEM. n. 6. 5ª ed. 1973.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Calculadoras na Aula de Matemática.* Nonius, n. 7, out/nov/dez 1987. Disponível em <http:/www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius>. Acesso em: 10 fev. 2009.

NUNES,T.; CAMPOS,T.; MAGINA,S.; BRYANT,P. *Introdução à Educação Matemática: Números e Operações.* Ed. PROEM Ltda, São Paulo, 2001.

OLIVEIRA, S. A. C. K.; MOREIRA, P. C. *Relação com o saber matemático de alunos em risco de fracasso escolar.* Disponível em: http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=496. Acesso em: 30 out. 2011.

PIZYSIEZNIG, A. H. *Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

PONTE, J. P. *A calculadora e o processo de ensino- aprendizagem.* Educação Matemática, Lisboa, n.11, p.1-2, 3º trimestre 1989.

PROGRAMA UNESP de divulgação permanente da ciência. 2005. Disponível em: http://www.unesp.br/vicereitor/ciencianaunesp.php. Acesso em: 20 mar. 2010.

PROJETO “Montagem e manutenção de um Laboratório de Materiais Didático-Pedagógicos para o Ensino-Aprendizagem da Matemática”, 2006. (uso restrito)

RESENDE, M. R. *Re-significando a disciplina Teoria Elementae dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura.* Tese. (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SANTANA, E. R. S. *Estruturas Aditivas: o suporte didático influência a aprendizagem do estudante?* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

SANTOS, D. de O. *Uma professora de matemática faz pesquisa na oitava série* In: Revista Prove. v.6. 2007.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Caderno do Professor: Matemática*, Ensino Fundamental 7ª série 1º bimestre. Imprensa Oficial do Estado, 2009.

SÃO PAULO (Cidade). Secretaria Municipal de Educação. Diretoria de Orientação Técnica. *Guia de planejamento e orientações didáticas para o professor do 3º ano do Ciclo 1*. Secretaria Municipal de Educação.– São Paulo : SME / DOT, 2007.

SILVA, A.; LOUREIRO, C.; VELOSO, M.G. *Calculadoras na Educação Matemática – Actividades*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1989.

TRAPÉZIO. Disponível em: <http://www.trapezio.org.br/website/>. Acesso em: 17 mar. 2011.

ANEXO 1: Protocolo da atividade 5 do 7º encontro

7 • x 2 • = 14 • *	3 • x 2 • = 6 • *	26 • x 2 • = 52 • *
30 • x 30 • = 900 • *	32 • x 2 • = 64 • *	23 • x 2 • = 46 • *
3 • x 2 • = 6 • *	19 • x 2 • = 38 • *	2 • x 2 • = 4 • *
30 • x 2 • = 60 • *	17 • x 2 • = 34 • *	22 • x 2 • = 44 • *
15 • x 2 • = 30 • *	25 • x 2 • = 50 • *	21 • x 2 • = 42 • *
9 • x 2 • = 18 • *	28 • x 2 • = 56 • *	

ANEXO 2: Quadro resumo dos encontros

enc	objetivo	Analise a posteriori				
		CI	atitudes	concepção		
				+ e -	x	:
1	Entabular um diálogo com a intenção de nos conhecer e realizar um diagnóstico dos conhecimentos do sujeito sobre frações.		Espontâneo, receptivo, foge da reflexão, lê e interpreta, desconhece termos mat., relaciona diferentes representações.		Não recorre a tabuada de 2, 3 e 5.	Distribui 10 lápis em 2 grupos para dividir 10 por 2. Só não sei fazer divisão
2	Familiarizar o sujeito com a calculadora simples de mão e a calculadora com impressora	X	CI-motivou. Familiaridade com a calculadora.	Não decompõe nº inteiros de ordem > dezena. calculo mental com nº < 10. Com nº > 9 ensaio e erro, não aleatórios. Concepção processo para objeto		
3	Provocar a reflexão de Renato sobre o valor posicional dos números inteiros utilizando atividades com a calculadora e com o ábaco.	X		Ensaio e erro para operação com dois nº de ordem> que dezenas.		
4	Tratar da decomposição dos números naturais para desenvolver o significado do valor posicional dos algarismos no sistema de numeração decimal e realizar operações utilizando o ábaco.		Abaco motivou. Diz não conhecer o significado. dos termos: unidade , dezena, e centena	Vai um,empresta um. Percebe o valor posicional dos algarismos. Concepção processo em fase de objeto.		
5	Identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas na resolução de atividades sobre as operações de adição e subtração com números naturais envolvendo principalmente números na ordem das centenas e milhares.	X	Aos poucos deixou de utilizar o ábaco. Contribuiu positivamente para a sua relação com o saber matemático.	Compreende o valor posicional dos algarismos. Amadureceu a compreensão das operações e suas relações. Concepção objeto sobre as operações adição e subtração.		
6 7 8 9 10	Identificar e analisar as principais estratégias mobilizadas por Renato na resolução dos quatro diferentes tipos de atividade relativos ao campo conceitual multiplicativo: Multiplicação e divisão comparativas; proporcionalidade simples (em 3 níveis), combinatória ; configuração retangular.	X	Desenvoltura na leitura e compreensão dos problemas. Respostas contextualizadas. CI validação e cálculos de multiplicação. Desconhecimento das palavras: dobro e dúzia. Representa no papel as situações. Relaciona multiplicação com divisão implicitamente.		1ª Soma de parcela iguais(vezes mais), as seguintes pela multiplicação. Não conhece as tabuadas de 2 a 9 salteada. Facilidade com proporcionalidade nível 1, resolve as de nível 2. Árvore de possibilidades: passa da contagem à multiplicação. Concepção processo em vias de objetificação..	Ensaio e erro por multiplicação, não aleatórios. Concepção de divisão parece atrelada à de distribuição (materiais concretos)
11	Tornar explícita a relação entre a operação de multiplicação e sua inversa a divisão.	X	Boa percepção visual dos esquemas.		Dificuldade com o algoritmo da multiplicação em nº>10.	Utiliza a tecla de : pela 1ª vez. Concepção de que dividir é distribuir. Não esboça o algoritmo.