PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Márcia Regina Ramos Costa Ribeiro

Possibilidades e dificuldades no desenvolvimento de situações de aprendizagem envolvendo funções trigonométricas

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2011

Márcia Regina Ramos Costa Ribeiro

Possibilidades e dificuldades no desenvolvimento de situações de aprendizagem envolvendo funções trigonométricas

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Doutor Armando Traldi Júnior.

SÃO PAULO

2011

Banca examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ **Local e Data:** _______________

Dedico esta pesquisa a todos os meus alunos, ex- alunos e futuros alunos, dos mais difíceis de se lidar aos mais apaixonados por Matemática, pois são eles que me motivam a buscar formas mais adequadas de se construir conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas infinitas oportunidades de crescimento em todos os setores de minha vida.

Aos professores do Programa de Estudos Pós Graduados da PUC de São Paulo que muito colaboraram com suas aulas, demonstrando compromisso com a qualidade de nossos trabalhos acadêmicos.

À professora Dra. Sandra Magina e à professora Dra. Rosa de Paulo Monteiro que participaram da banca de qualificação e que muito contribuíram para a realização deste trabalho, com suas observações e indicações de leituras.

Ao querido professor Doutor Armando Traldi Júnior que me orientou neste trabalho, sempre com franqueza, compromisso e uma palavra de incentivo.

Aos colegas do curso de mestrado que partilharam suas dificuldades e vitórias comigo, especialmente à Karina, exemplo de determinação, otimismo e bondade e à Lilian, exemplo de força e serenidade.

Aos amigos queridos que sabem o quanto é importante para mim a realização deste trabalho, em especial à Denise, à Lú, à Sheila, ao Nelson, ao João, ao Ricardo e à Cida Andrade.

Aos meus irmãos Marcos e Mário, que me incentivaram sempre, cada um de seu jeito.

À minha mãe, Marta, exemplo de força e integridade e ao meu pai, Agenor, por me encorajar em todos os momentos difíceis da minha vida, de alguma forma, mesmo não estando entre nós, materialmente.

Ao meu avô Aristides que me ensinou a observar melhor a vida.

Aos meus filhos, Gabriel, estudioso e amante do conhecimento e Fernanda, estudiosa e amante da sabedoria. Sou muito feliz por ser mãe desses dois seres tão maravilhosos.

Ao Edson, meu grande companheiro de jornada, meu amor, que conhece bem a importância da realização deste meu sonho e que sempre foi o maior incentivador de todos.

Agradeço também ao governo do Estado de São Paulo pela Bolsa Mestrado a mim concedida.

RESUMO

Esse trabalho está inserido na linha de pesquisa A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores e no projeto de pesquisa A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de Matemática, em uma perspectiva construtivista; tem como pressuposto que a caracterização dos conhecimentos prévios dos estudantes relacionados aos conteúdos matemáticos que se pretende ensinar contribui para a aprendizagem significativa. Nessa perspectiva, o objetivo desta pesquisa é compreender as possibilidades e dificuldades em utilizar o material distribuído aos alunos da rede pública do Estado de São Paulo, focando conhecimentos prévios desses estudantes em relação ao conteúdo funções trigonométricas, identificando dificuldades que podem surgir durante a execução dessas atividades e verificando as necessidades de intervenções para a promoção da construção de conhecimento relativo ao tema. Para essa investigação, foi utilizada a pesquisa qualitativa e a técnica da observação participante. Foram observadas as ações de um grupo de alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, durante a realização de atividades propostas e contidas no material. A análise está apoiada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, na perspectiva construtivista de Coll (2006) e nos estudos de Pozo (2002) relativos aos conteúdos de ensino e à aprendizagem. Os resultados indicam que os conhecimentos prévios dos alunos relacionados as funções trigonométricas podem ser classificados em uma grande variedade de grupos, dada a sua importante característica de incluir tanto conhecimentos conceituais como procedimentos, valores, normas e atitudes; a caracterização desses conhecimentos prévios dos alunos, por parte do professor, a cada nova experiência educativa, constitui-se em importante ferramenta para a realização de intervenções pedagógicas mais eficientes e geradoras de aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Ensino Médio. Conhecimentos Prévios. Funções Trigonométricas. Construtivismo. Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

This paper is part of an ongoing research on Mathematics in the curriculum, based on the assumption that the characterization of the prior knowledge on Math of the students may help in significant learning. In this perspective, the research focused on the prior knowledge of students in Brazilian “Ensino Médio” (roughly equivalent to American high school) on trigonometric functions, using qualitative research and participant observation. The objective is to understand the possibilities and difficulties in the use of the material given to students of the schools of the State of São Paulo, focusing in these students prior knowledge on trigonometric functions, identifying obstacles that may rise during these activities and checking the need for interventions to promote the build-up of knowledge on the subject. The proposal was to have students do activities proposed on the material supplied by the state of São Paulo. The analysis is based on Ausubel’s theory of significant learning, on Coll’s constructivist perspective (2006) and Pozo’s studies, concerning learning and teaching contents. The results indicate that the prior knowledge of the students may be divided into many groups, given its important characteristic of including conceptual knowledge as well as procedures, values, regulations and attitudes. The ability to identify this prior knowledge is an important tool to create better pedagogical interventions and significant learning.

Keywords: Ensino Médio. Prior Knowledge. Trigonometric Functions. Constructivism. Significant Learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação de mestrado é fruto de inquietações surgidas na minha prática profissional, como professora e formadora de professores da educação básica, na escola pública. Algumas dessas inquietações emergem do suposto desinteresse dos alunos pelo estudo, em geral, e da dificuldade dos alunos na aprendizagem de alguns temas da Matemática, como por exemplo, a Trigonometria. Observo que muitos professores, ao trabalharem com este tema, não privilegiam o estudo das funções trigonométricas. Também noto que muitos professores, com os quais tenho convivido, acreditam na transmissão de conhecimentos do professor para o aluno e demonstram falta de compreensão sobre a perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem.

Essas observações tem me levado a repensar a minha prática profissional. Percebi que tenho me envolvido com a perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem desde os tempos de alfabetizadora, no início de minha carreira profissional. As ideias construtivistas para o desenvolvimento do processo de leitura e escrita das crianças, com base nos estudos de Emília Ferreiro (1985), levaram-me a considerar os conhecimentos que os alunos já possuíam sobre o universo das letras e números. Recordo-me da grande resistência dos professores da época em inovar a forma de se alfabetizar os alunos; muitos daqueles professores demonstravam a forte crença na transmissão de conhecimentos e desconsideravam os conhecimentos que os alunos já possuíam.

Mais tarde, como professora de Matemática do Ensino Médio, tive acesso aos materiais de apoio à implementação do currículo do Estado de São Paulo: o Caderno do Aluno[1] e Caderno do Professor[2]. No início da sua implantação, em 2008, pude perceber que a forma de abordagem do conteúdo de trigonometria é inovadora e tem relações com o modelo pedagógico construtivista que tenho perseguido. No final deste mesmo ano, fui selecionada para trabalhar na formação de professores na Oficina Pedagógica da Diretoria Leste 1 e constatei as

[1] Caderno do Aluno é o material didático fornecido aos alunos da rede pública do Estado de São Paulo.
[2] Caderno do Professor é o material com orientações didático-pedagógicas distribuídos aos professores da rede pública do Estado de São Paulo.

dificuldades dos professores de Matemática em se adaptarem ao uso desse material. Essas dificuldades eram relatadas pelos coordenadores pedagógicos em nossos encontros semanais de formação e pelos próprios professores por meio do curso A Rede Aprende com a Rede[3], do qual participei como mediadora de Matemática.

Nesse curso, percebi que muitos professores eram adeptos da crença na transmissão de conhecimentos. Alguns deles criticaram o material de apoio para a implantação do currículo, citando a sua inadequação à realidade dos alunos da rede pública que, segundo eles, não tem interesse em aprender e não possuem conhecimentos necessários para a aprendizagem dos conteúdos abordados no material. Alguns professores afirmaram que não utilizavam o Caderno do Aluno e que recorriam aos livros didáticos que costumavam utilizar antes da implementação do currículo.

No curso de mestrado, conheci, em nossas reuniões do grupo de pesquisa, o projeto "*A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de matemática, numa perspectiva construtivista*", coordenado pelo prof. Dr. Armando Traldi Júnior. Esse projeto tem o objetivo de caracterizar os conhecimentos prévios dos estudantes relacionados a diferentes conteúdos matemáticos. Com o aprofundamento dos meus estudos sobre construtivismo, conhecimentos prévios dos alunos e aprendizagem significativa, pude verificar a importância do material de estudo para que a aprendizagem se efetive. Assim, direcionei o meu olhar de pesquisa para a utilização, pelo estudante, do material distribuído na rede pública estadual que aborda o conteúdo funções trigonométricas.

O trabalho de pesquisa foi iniciado com a busca de elementos teóricos que nos possibilitasse compreender a perspectiva construtivista. Para tanto, estudamos alguns trabalhos, como o de Pires (2000), o de Coll (2006), o de Pozo (2002), o de Miras (2006) e o de Onrubia (2006). Para compreender o significado de aprendizagem significativa encontramos em Moreira (2001) os esclarecimentos que necessitávamos. Os procedimentos metodológicos foram adotados a partir dos estudos que realizamos de Bogdan e Biklen (1994).

---

[3] A Rede Aprende com a Rede foi um curso à distância oferecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo de 2008 a 2009.

A questão de pesquisa e os elementos teóricos que fundamentam este trabalho são apresentados no primeiro capítulo. Neste capítulo também se discute a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, implantada no início do ano de 2008.

O capítulo 2 apresenta alguns trabalhos acadêmicos que tratam da aprendizagem significativa e dos conhecimentos prévios. Pudemos constatar que, no campo da Educação Matemática, são poucos os trabalhos que discutem estes temas, principalmente relacionados ao ensino médio.

As características da pesquisa qualitativa são enumeradas no capítulo 3. A opção pelo estudo de caso e pela técnica da observação participante é justificada e, ainda neste capítulo, é explicado como emergiram as unidades de análise.

No capítulo 4 são apresentadas as atividades selecionadas do Caderno do Aluno e algumas outras que foram elaboradas para compor intervenções realizadas durante a coleta dos dados; nele, também são apresentadas as habilidades e competências descritas no Caderno do Professor, referentes às quatro situações de aprendizagem que tratam do nosso tema de pesquisa e que, de acordo com o currículo, se pretende que os alunos desenvolvam. Por fim, é apresentada a análise dos dados coletados, tratados em cada unidade de análise, e que nos permitiram concluir nossa pesquisa, à luz do referencial teórico utilizado.

Desejamos que esta pesquisa contribua para que professores do ensino médio investiguem e valorizem os conhecimentos prévios dos seus alunos em relação aos diversos temas da matemática. Acreditamos que essa prática não só pode favorecer a ocorrência de aprendizagens significativas como também melhorar o convívio entre professores e alunos, pois, de acordo com a perspectiva construtivista, essa prática faz com que o professor e o aluno aprendam a cada nova experiência. Com ela, ambos constroem conhecimento; o trabalho do professor e o do estudante torna-se mais enriquecido, criativo e prazeroso.

Capítulo 1 - Apresentação da pesquisa

> O espírito científico proíbe que tenhamos uma opinião sobre o que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular com clareza. Em primeiro lugar é preciso saber formular problemas. E diga o que disserem, na vida científica os problemas não se formulam de modo espontâneo. É justamente esse sentido do problema que caracteriza o verdadeiro espírito científico. Para o espírito científico, todo conhecimento é resposta a uma pergunta. Se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é gratuito. Tudo é construído. (Bachelard,1996, p.18).

1.1 - Objetivos e questão de pesquisa

Este trabalho está inserido na linha de pesquisa A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores e é parte do projeto "A aprendizagem significativa e conhecimentos prévios: investigando o currículo de matemática, numa perspectiva construtivista". Com ele, pretendemos caracterizar os conhecimentos prévios dos estudantes relacionados a funções trigonométricas.

Temos como hipótese que alunos do segundo ano do Ensino Médio possuem um conjunto de conhecimentos prévios de funções e de trigonometria que possibilita a aprendizagem significativa das funções trigonométricas. Esse conjunto de conhecimentos é ampliado a cada nova experiência do estudante. Assim, por exemplo, conceitos como o de número real, função, ângulo, equação, plano cartesiano e outros vem sendo formados e ampliados pelo estudante ao longo de sua vida, fora e dentro do ambiente escolar. Tal conjunto contém os pré-requisitos que alguns professores julgam imprescindíveis para o aprendizado deste conteúdo matemático. Os pré-requisitos são concebidos, nesta pesquisa, como conhecimentos escolares necessários para a aprendizagem deste conteúdo, mas, ao mesmo tempo, como uma das partes deste conjunto.

Esse conjunto de conhecimentos ou conhecimentos prévios a que nos referimos precisa ser acessado a cada tema de estudo que é apresentado ao estudante; sua caracterização poderá auxiliar o professor para que ele encontre formas de realizar intervenções mais eficientes, visando à aprendizagem significativa de um conteúdo matemático. Ainda neste capítulo, apresentaremos o conceito de conhecimentos prévios, segundo Miras (2006), e o de aprendizagem significativa, segundo Ausubel apud Moreira (2001), que estão sendo utilizados neste trabalho de pesquisa, inserido neste período de mudança curricular na rede pública de ensino do Estado de São Paulo.

Essas mudanças no currículo da rede paulista vieram acompanhadas de medidas em conjunto que pudemos vivenciar em nossa prática profissional e tem gerado muitas reflexões por parte dos profissionais envolvidos. Entre essas medidas está a elaboração de um material com orientações didático-pedagógicas, o Caderno de Professor, e o material para uso do aluno, o Caderno do Aluno.

O Caderno do Aluno do 2º ano do Ensino Médio apresenta o conteúdo de funções trigonométricas. Esse conteúdo é um dos mais interessantes do currículo de matemática do ensino médio, devido à relação com outras áreas do conhecimento que estudam movimentos periódicos. São exemplos dessas relações o estudo do movimento das marés, o estudo da pressão nos vasos sanguíneos em função do instante em que a medida da pressão foi realizada, os estudos de movimentos de corpos celestes em Astronomia, o estudo de movimentos que podemos observar num parque de diversões e muitos outros estudos que podem ser feitos a partir de observações de fenômenos naturais e que podem ser modelados por equações trigonométricas envolvendo senos e cossenos.

No entanto, a experiência em sala de aula nos leva a observar que o interesse por este estudo não tem sido demonstrado pelos alunos. Talvez, o professor, em sua prática, ao trabalhar com o conteúdo de trigonometria, não privilegie o estudo das funções trigonométricas. Pode-se perceber que há um percurso cristalizado no ensino de Trigonometria e, provavelmente, influenciado pelos livros didáticos que apresentam uma sequência de estudo da Trigonometria semelhante à seguinte:

1. Estudo do triângulo retângulo e das razões trigonométricas;
2. Estudo das relações fundamentais entre as razões trigonométricas;
3. Estudo da lei dos senos e lei dos cossenos (resolução de triângulos quaisquer);

4. Estudo dos arcos e ângulos e das unidades de medidas de arcos de circunferência;
5. Estudo da circunferência trigonométrica e dos arcos côngruos;
6. Estudo das funções senx, cosx e tgx;
7. Estudo de equações e de inequações trigonométricas;
8. Estudo das funções trigonométricas;
9. Transformações trigonométricas.

As dificuldades e o desinteresse dos alunos no estudo de Trigonometria tem despertado a atenção dos pesquisadores. Segundo Brolezzi (1996), uma das possíveis causas das dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem da Trigonometria é explicada por fatos colhidos da História da Matemática.

> Da carga simbólica forte da Trigonometria advém muito da dificuldade do seu ensino e aprendizagem. A origem grega de boa parte dos seus conceitos e a utilização da linguagem dos ângulos calcada na base 60 dos povos da Mesopotâmia fazem com que os alunos tenham muita dificuldade em aprender Trigonometria. (BROLEZZI,1996, p.70)

No atual currículo de matemática do ensino médio, o conteúdo de trigonometria foi distribuído em dois bimestres, sendo que no último bimestre do 1º ano é feito o estudo da *trigonometria no triângulo retângulo* e no primeiro bimestre do 2º ano é feito o estudo das *funções trigonométricas*. Essa distribuição chama a nossa atenção e parece ressaltar a importância de se desenvolver o trabalho com as funções trigonométricas, em sala de aula, pois destaca a prioridade de sua abordagem no 2º ano.

No entanto, observamos que alguns professores retomam, no 2º ano, o estudo de Trigonometria que deveria ter sido feito no 1º, agindo em desacordo com o atual currículo. A justificativa comum para esta prática, entre alguns professores, tem sido a de que os alunos não conseguem aprender as funções trigonométricas porque faltam a eles os conceitos estudados na *trigonometria no triângulo retângulo.*

Temos nos perguntado sobre quais são esses conceitos que necessitam ser retomados. Concordamos com a idéia de que há a necessidade de retomada de alguns conteúdos do 1º ano, mas essa retomada não pode ser feita de modo a comprometer o processo de ensino e aprendizagem das *funções trigonométricas*, no 2º ano.

Assim, consideramos importante a caracterização dos conhecimentos prévios dos estudantes relacionados a este tema da matemática, pois isso pode contribuir para o planejamento das ações pedagógicas necessárias para a construção desse conhecimento matemático e ampliar a compreensão dos professores sobre a perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem.

Diante do exposto, apresentamos o objetivo desse estudo, que é o de compreender as possibilidades e dificuldades em utilizar o Caderno do Aluno, em uma perspectiva construtivista, focando conhecimentos prévios desses estudantes em relação ao conteúdo funções trigonométricas, identificando dificuldades que possam surgir durante a execução dessas atividades e verificando as necessidades de intervenções para a promoção da construção de conhecimento relativo ao tema, visando a uma aprendizagem significativa.

Este estudo é feito em uma perspectiva construtivista baseada nos estudos de Coll (2006) e na Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel apresentada por Moreira (2001); foi dada ênfase à cooperação entre os alunos para a criação de ZDP, Zona de Desenvolvimento Proximal, conceito definido por Vygotsky (1993). A aprendizagem é compreendida, neste estudo, como resultado de duas formas complementares de se aprender, por associação e por construção, segundo Pozo (2002). Também são considerados os tipos diferentes de conteúdos que, segundo Coll (2000), devem ser levados em consideração no momento de planejar e desenvolver o currículo. Nas páginas seguintes faremos a exposição dessas idéias.

A questão de pesquisa proposta neste estudo é: Quais são as possibilidades e dificuldades em utilizar o Caderno do Aluno, em uma perspectiva construtivista, em relação ao conteúdo Funções Trigonométricas? Essa questão desdobra-se em outras questões que anunciamos a seguir, e que estão relacionadas a situações de aprendizagem a partir da utilização do Caderno do Aluno, material proposto para as escolas do Estado de São Paulo:

- Quais são os conhecimentos prévios revelados por um grupo de estudantes em relação ao conteúdo Funções Trigonométricas?
- Quais são as dificuldades que esse grupo de estudantes apresenta no estudo das Funções Trigonométricas?

- Que intervenções do professor podem promover a construção de conhecimentos relacionados às Funções Trigonométricas, visando a uma aprendizagem significativa?

A pesquisa realizada é denominada qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994) e a estratégia empregada é a do estudo de caso. Foi utilizada, para o levantamento dos dados, a técnica da observação participante, com um grupo de três alunos do segundo ano do ensino médio. Os encontros foram filmados e os diálogos foram transcritos. A justificativa para a escolha dos procedimentos metodológicos será descrita no terceiro capítulo.

1.2 - A perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem

A perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem é uma forma de se conceber o conhecimento. Concepções sobre o conhecimento vem sofrendo modificações com o passar do tempo. Segundo Pires (2000), "há algum tempo, as concepções sobre o conhecimento estão centradas em torno de sua *construtibilidade*, que vem filiando inúmeros adeptos às chamadas *metodologias* construtivistas" (p.72).

Em projetos construtivistas se destacam alguns pontos comuns relacionados ao processo de ensino e aprendizagem, aos quais se refere Pires:

> A obtenção do conhecimento é resultado da atividade do sujeito. Isto implica que a aprendizagem escolar deve ser entendida como um processo ativo de elaboração que supõe que o ensino se realize de modo que favoreça as múltiplas interações entre o aluno e os conteúdos e não como uma recepção passiva do conhecimento (...). O ponto de partida do processo ensino-aprendizagem é sempre o que o aluno já sabe. (PIRES, 2000, p.72)

Segundo Carretero (2009), os enfoques cognitivos ou de aquisição do conhecimento, que haviam tido um desenvolvimento muito intenso desde os anos sessenta, os aportes socioculturais e outras posições passaram a ser referências importantes para a construção de perspectivas teóricas e aplicadas para alcançar uma escola que rompe com o modelo tradicional e resulta mais significativa.

Para Carretero, há diversas posições acerca do construtivismo e elas pertencem a discursos teóricos muito diferentes, em que se mantém posições distintas sobre o que é o ser humano e o que é o conhecimento. É importante a consideração que Carretero faz acerca do construtivismo:

> Trata-se de uma perspectiva aberta que, se tem dentro de si propostas bem estabelecidas, compreende também críticas e autocríticas. Em consequência, entendemos que o construtivismo é um ponto de partida e não um ponto de chegada. (CARRETERO, 2009, p.21)[4]

Por se tratar de uma perspectiva aberta, o conceito de construtivismo suscita dúvidas e equívocos. O construtivismo na Educação não tem como princípio "jogar a responsabilidade de como aprender nos ombros do aluno"; ao contrário, a grande responsabilidade é do professor, que é o gestor das ações de ensino. O professor tem papel decisivo porque é ele quem seleciona atividades propiciadoras de construção de conhecimento, investiga os conhecimentos prévios de seus alunos, propicia a socialização dos conhecimentos e planeja intervenções para a modificação de ideias mal concebidas, ou seja, participa ativamente da construção do conhecimento de seus alunos. Pode-se dizer que, nesta perspectiva, o professor é pesquisador na sala de aula, pois é observador participante da aprendizagem. A prática construtivista na sala de aula exige muito mais envolvimento e compromisso do professor do que a prática tradicional, pois está intimamente relacionada com a aprendizagem significativa, e não memorística. Mais adiante, neste estudo, faremos a distinção entre estes tipos de aprendizagem.

Carretero afirma que, se visitarmos qualquer centro escolar da Europa, América, África ou outros lugares, veremos que os alunos de cinco a dez anos, aproximadamente, realizam jogos semiestruturados e outras atividades em que se utilizam suas habilidades linguísticas e cognitivas de maneira bem mais informal; no entanto, aproximadamente a partir dos dez anos, essa prática se modifica.

[4] O texto foi traduzido por nós. Apresentamos o texto em espanhol: Se trata de una perspectiva abierta que, si bien tiene en su seno propuestas bien establecidas, comprende también críticas y autocríticas. En consecuencia,entendemos que el constructivismo es un punto de partida y no un punto de llegada.(pag.21)

> Em geral pode-se dizer que se produz uma relação adequada entre as capacidades de aprendizagem espontâneas do aluno e os objetivos que se devem alcançar neste segmento da educação. No entanto, esta situação costuma se modificar por volta do período escolar que corresponde, aproximadamente, à idade de dez anos. A partir dessa idade, os conteúdos vão se tornando cada vez mais acadêmicos e formalistas e se produz um claro desinteresse por parte dos alunos (...). Até certo ponto, pode-se dizer que numerosos conteúdos, destinados a alunos entre doze e dezesseis anos e que costumam aparecer em muitos sistemas escolares, são meros resumos de conteúdos universitários. (CARRETERO, 2009, p. 18)[5]

A colocação de Carretero ganha pertinência ao observarmos que, nas aulas de matemática do Ensino Médio, os professores tem se utilizado pouco, ou quase nada, de atividades que evidenciam a participação ativa dos alunos. Os materiais que se costuma utilizar no ensino de funções trigonométricas, por exemplo, tem trazido poucas relações com fenômenos periódicos presentes na natureza. Percebemos que alguns deles podem ser considerados, de fato, resumos de conteúdos universitários.

A perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem pressupõe o compromisso do professor e do aluno com a aprendizagem significativa. Cabe ao professor investigar como se aprende para ensinar melhor, responsabilizando-se pelo ensino, e cabe ao aluno compreender que é sua a responsabilidade de aprender e de se desenvolver.

1.3 - Associação e construção - duas formas complementares de se aprender

Segundo Pozo (2002), há duas formas complementares de se aprender: a associativa e a construtiva. Para ele "a aprendizagem associativa facilita a construção e vice-versa" (p. 53). Para explicar o que é a aprendizagem por

[5] O texto foi traduzido por nós. Apresentamos o texto em espanhol: En general podrís decirse que se produce una relación adecuada entre las capacidades de aprendizaje espontáneas del alumno y los objetivos que se deben alcanzar en este segmento de la educación. Sin embargo, esta situación suele cambiar en cuanto comienza el período escolar que correponde, aproximadamente, a la edad de diez años. A partir de esa edad, los contenidos se van haciendo cada vez más académicos y formalistas y se produce una clara pérdida de interés por parte de los alumnos(...). Hasta cierto punto, puede decirse que numerosos contenidos, destinados a alumnos de entre doce y dieciséis años y que suelen aparecer en muchos sistemas escolares, son meros resúmenes de los contenidos universitarios.

associação, Pozo retoma idéias de Aristóteles para quem a "origem do conhecimento estava na experiência sensorial, que nos permite formar idéias a partir da associação entre as imagens proporcionadas pelos sentidos" (p.44). Pozo afirma que, para Aristóteles, aprendemos mediante as leis da associação: "o semelhante tende a se associar", "o diferente também se associa", "o que acontece junto tende a produzir uma marca comum na tabuinha[6]" (p. 44).

Pozo afirma que as leis ou princípios da aprendizagem associativa foram se reformulando com o tempo e com o surgimento das teorias de aprendizagem por associação; destaca o comportamentalismo[7] no século XX e afirma que "a concepção da aprendizagem como um processo associativo perdurou até os nossos dias" (p.44). Afirma ainda que há dois princípios básicos que constituem o núcleo das teorias da aprendizagem por associação: o princípio da *correspondência*, ou seja, "tudo o que fazemos e conhecemos é um fiel reflexo da estrutura do ambiente, e corresponde fielmente à realidade" e o princípio da *equipotencialidade*, ou seja, "os processos de aprendizagem são universais, são os mesmos em todas as tarefas, em todas as pessoas e inclusive em todas as espécies" (p.45). Fatos citados por Pozo, como, por exemplo, a curiosa experiência de Breland e Breland[8], e principalmente o surgimento das teorias construtivistas, tornaram ultrapassada a idéia de que "toda a aprendizagem podia ser explicada por umas mesmas leis" (p.46).

A aprendizagem por construção, segundo Pozo, está vinculada a "dois processos de construção de conhecimento diferentes, porque implicam teorias de aprendizagem distintas" (p. 49). No primeiro deles, mais difundido nos ambientes educativos, segundo Pozo, a construção do conhecimento ocorre "quando o que se aprende se deve não só à nova informação apresentada, como também aos conhecimentos prévios dos alunos". Esse processo é chamado por Pozo de *construção estática* de conhecimento. O trecho a seguir esclarece essa idéia do autor.

---

[6] Tabuinha na citação se refere à tabula rasa (tabuinha de cera por imprimir; segundo Pozo, como aquela que usavam os sumérios). A expressão é utilizada como uma metáfora para representar nossa mente ao nascer, segundo Aristóteles.

[7] Pozo afirma que o comportamentalismo como teoria psicológica assume que todo comportamento humano é aprendido e que toda a aprendizagem é associativa.

[8] Pozo cita Breland e Breland como o casal de alunos de Skinner que decidiu aproveitar o aprendido com ele para criar uma escola de adestramento de animais em tarefas circenses; a experiência mostra que alguns desses animais se negavam redondamente a se submeter às leis da aprendizagem associativa.

> Nesse sentido estático, todos os organismos, e inclusive os sistemas mecânicos (por exemplo, um programa informático), constroem conhecimentos, com a condição de ter um sistema de memória onde armazenar seus programas (genéticos ou informáticos) e suas experiências anteriores. (POZO, 2002, p.50)

Assim, nesse processo, "o que aprendemos depende em boa parte do que já sabíamos", o que, para Pozo, não permite gerar uma verdadeira teoria da aprendizagem construtivista. Essa seria uma versão estática do construtivismo, segundo ele; o mundo é visto "em função de nossos conhecimentos inatos, prévios a qualquer experiência".

O outro processo de construção de conhecimento é nomeado por Pozo de *construção dinâmica* do conhecimento. Nesse processo a mudança é, além de quantitativa (na probabilidade da resposta), também qualitativa (no significado da resposta); "não é uma mudança originada no mundo externo, mas na própria necessidade interna de reestruturar nossos conhecimentos" (p. 50). Pozo afirma que esse processo requer "um envolvimento ativo, baseado na reflexão e na tomada de consciência, por parte do aprendiz" (p.50)

Para Pozo, "ambos os tipos de processos estão integrados hierarquicamente, constituindo de fato níveis alternativos de análise de uma mesma atividade de aprendizagem" (p. 54).

> Realmente, a formação de pessoas especializadas em domínios concretos, seja programar um computador, exercer direito de família ou montar estantes modulares, costuma implicar, em maior ou menor grau, ambas as formas de aprendizagem. Em termos gerais, quanto mais abertas ou variáveis sejam as condições em que se devam aplicar os conhecimentos e as habilidades adquiridos, mais relevante será a aprendizagem construtiva. Ou, ao contrário, quanto mais repetitivas ou rotineiras forem as condições, mais eficaz se mostrará uma aprendizagem associativa ou reprodutiva. (POZO, 2002, p.54)

As idéias de Pozo acerca da associação e da construção como formas complementares de aprender nos levam a refletir sobre as características dos conhecimentos prévios. Eles são importantes para a aprendizagem de novos conhecimentos porque permitem novas associações e reestruturações na estrutura cognitiva do aprendiz, atendendo à necessidade humana de aprender sempre.

Bachelard (1996) amplia nossa reflexão sobre essa nossa necessidade humana de buscar conhecimento

> (...) as crises de crescimento do pensamento implicam uma reorganização total do sistema de saber. A cabeça bem feita precisa então ser refeita. Ela muda de espécie. Opõe-se à espécie anterior por uma função decisiva. Pelas revoluções espirituais que a invenção científica exige, o homem torna-se uma espécie mutante, ou, melhor dizendo, uma espécie que tem necessidade de mudar, que sofre se não mudar. Espiritualmente, o homem tem necessidade de necessidades. (p. 20)

Nesta pesquisa, concebemos que a aprendizagem significativa vincula-se ao processo de construção dinâmica do conhecimento, de acordo com Pozo, e é o mesmo que aprendizagem construtiva.

A aprendizagem construtiva está relacionada ao material utilizado e à aprendizagem. A figura a seguir mostra essa relação e situa os conhecimentos prévios como condição de aprendizagem construtiva.

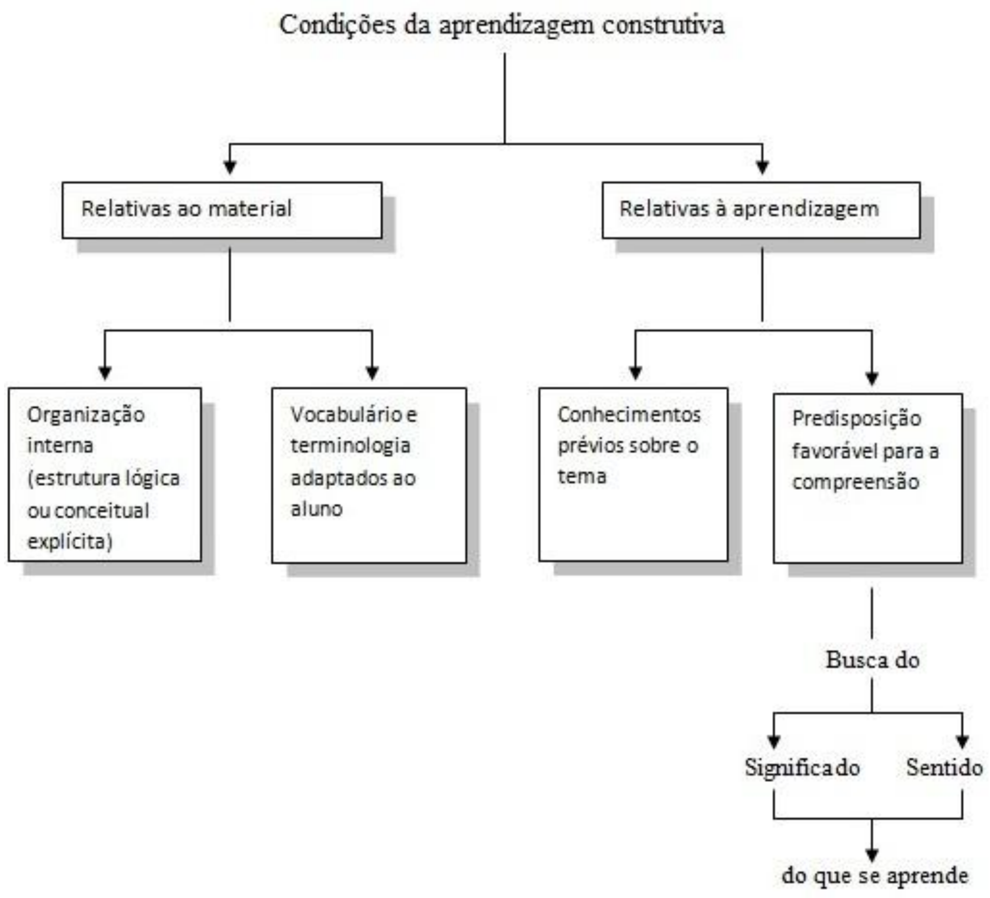


Figura 1 - Condições da aprendizagem construtiva segundo Pozo (2002, p.127)

Esta figura evidencia a importância da postura ativa do aluno como condição da aprendizagem significativa. Cabe a ele buscar o significado e o sentido do que se aprende, associando e construindo conhecimento. Por outro lado, a competência do professor em utilizar o material adequado, com organização interna e vocabulário adaptado ao aluno, bem como identificar os conhecimentos prévios de seus alunos, relativos ao tema que ele propõe a ensinar, é fundamental para a aprendizagem construtiva, ou significativa, do aluno.

1.4 - Os conhecimentos prévios e suas características

Os conhecimentos prévios são formados ao longo da vida do aprendiz. Não são necessariamente inatos, prévios a qualquer experiência; trata-se de um conjunto de conhecimentos que se reestrutura a cada experiência do indivíduo. Neste conjunto de conhecimentos, estão incluídos os conhecimentos escolares e os não escolares; os conhecimentos de ordem cognitiva, afetiva e psicomotora; os conhecimentos de conceitos, de procedimentos, de valores, de normas e de atitudes; os que podem ser adquiridos no meio familiar, no meio escolar ou em outro meio social. Alguns deles podem ser inatos e comuns a outros indivíduos.

Miras (2006) nos esclarece que os conhecimentos prévios "abrangem tanto conhecimentos e informações sobre o próprio conteúdo como conhecimentos que, de maneira direta ou indireta, estão relacionados ou podem relacionar-se com ele" (p.60). Na concepção construtivista de ensino e aprendizagem é necessário, segundo Miras, determinar o estado inicial dos alunos no momento de iniciar qualquer processo de aprendizagem. A autora assinala três elementos básicos desse estado inicial: a disposição dos alunos para realizar a aprendizagem proposta; as capacidades gerais de caráter cognitivo, motor e afetivo; e os conhecimentos que os alunos já possuem sobre o conteúdo concreto que se propõem a aprender, ou seja, os conhecimentos prévios.

> (...) conhecimentos prévios são os fundamentos da construção dos novos significados. Uma aprendizagem é tanto mais significativa quanto mais relações com sentido o aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece, seus conhecimentos prévios e o novo conteúdo que lhe é apresentado como objeto de aprendizagem. (MIRAS,2006,p. 61).

O questionamento sobre a existência dos conhecimentos prévios diante de um novo conteúdo também é considerado por Miras.

> (...) se nos colocamos na perspectiva do aluno, na lógica da concepção construtivista, é possível afirmar que sempre podem existir conhecimentos prévios a respeito de novo conteúdo a ser aprendido, pois, de outro modo, não seria possível atribuir um significado inicial ao novo conhecimento. (MIRAS, 2006, p.62).

Miras (p.67) destaca os critérios necessários para determinar quais são os conhecimentos prévios que devem ser explorados nos alunos. São eles:

- Os conteúdos de aprendizagem;
- os objetivos concretos que perseguimos em relação a esses conteúdos e
- o tipo de aprendizagem que pretendemos que os alunos alcancem.

> Quando levamos em conta nossos objetivos, podemos selecionar de maneira mais precisa, em cada caso concreto, quais são os conhecimentos prévios realmente pertinentes e necessários para desenvolver um determinado processo de ensino e aprendizagem (MIRAS, 2006, p.67)

A mobilização dos conhecimentos prévios dos alunos, segundo Miras, pode depender de muitos fatores, como, por exemplo, a falta de sentido que atribuem à atividade ou a uma escassa motivação para estabelecer relações entre os conhecimentos, optando por um enfoque superficial e uma memorização mecânica do novo conteúdo ou ainda a um problema transitório de falta de atenção. A autora afirma que um recurso útil para decidir os conhecimentos prévios que devem ser explorados é a própria experiência docente, porque proporciona indicações bastante confiáveis sobre as dificuldades mais habituais dos alunos sobre um novo conteúdo.

A seguir apresentamos um esquema referente às características dos conhecimentos prévios apresentados por Pozo (2000, p. 41).

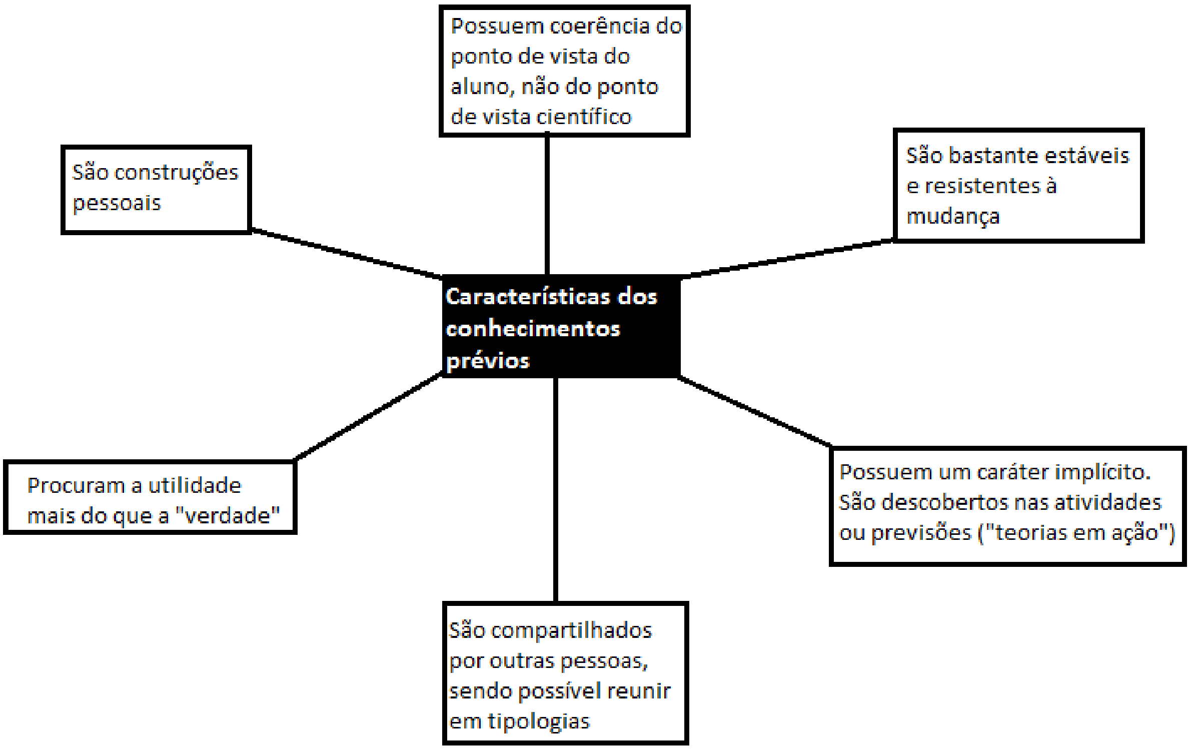


Figura 2: Características dos conhecimentos prévios, segundo Pozo (2000, p.41)

Para uma pessoa compreender algo é necessário, segundo Pozo (2000) ativar um conhecimento prévio que lhe sirva para organizar a situação e dar-lhe sentido. Esse conhecimento prévio é pessoal e elaborado de maneira mais ou menos espontânea na sua interação cotidiana com o mundo, inclusive o escolar. Cada indivíduo percebe de modo único o meio em que vive e com o qual interage; a interação com as pessoas proporciona-lhe "conhecimentos para interpretar os desejos, intenções e sentimentos dos demais" (p. 39). O autor afirma que esses conhecimentos costumam ser incoerentes do ponto de vista científico, mas não do ponto de vista do aprendiz.

> De fato, costumam ser bastante previsíveis em relação a fenômenos cotidianos, embora não sejam cientificamente corretos. O aluno prevê com bastante sucesso, por exemplo, como se movimentam os objetos, mas suas explicações se afastam bastante da mecânica newtoniana. (POZO,2000,p. 39).

Pozo afirma que os conhecimentos prévios são bastante estáveis e resistentes à mudança, persistindo, muitas vezes, apesar de muitos anos de instrução científica. Em matemática é comum presenciarmos alunos usando a lógica dos números naturais ao tratar das frações; assim, não lhes parece possível, por exemplo, que um meio seja maior que um oitavo.

O autor enfatiza que um dos fatos que devem ser levados em consideração para promover a aprendizagem escolar a partir dos conhecimentos prévios é que somente quando os alunos explicitam suas ideias e tomam consciência das mesmas é que conseguem modificá-las. O caráter implícito dos conhecimentos prévios se constitui em uma característica muito importante. Podem, em alguns casos, ser identificados pela linguagem; na maioria das vezes, contudo, são identificados nas atividades, constituindo teorias ou ideias "em ação" que os alunos não conseguem verbalizar. Além disso, os conhecimentos prévios possuem a característica de servirem mais à utilidade do que à "verdade", como supostamente faz a ciência.

> Na sala de aula, proporcionam-se conhecimentos gerais, enquanto que as suas ideias e conhecimentos prévios são *específicos*, referem-se muitas vezes a realidades próximas e concretas às quais o aluno não sabe aplicar as leis gerais que lhe são explicadas em aula. Assim, continua interpretando o comportamento e inclusive o funcionamento orgânico dos animais em termos antropomórficos (por exemplo, dado que os peixes respiram, devem ter pulmões) (POZO, p. 40).

A importância de se caracterizar os conhecimentos prévios dos alunos, relacionados às funções trigonométricas, se deve à contribuição que, acreditamos, isso pode oferecer ao professor; para que ele possa conduzir melhor suas intervenções em prol de aprendizagens significativas para os alunos. Essa caracterização nos leva a procurar respostas para perguntas que nos permitam determinar os conhecimentos pertinentes e necessários para que os alunos aprendam o conteúdo que pretendemos ensinar-lhes, tais como as citadas por Miras (p.68):

- O que pretendo que os alunos aprendam concretamente sobre este conteúdo?
- Como pretendo que o aprendam?
- O que precisam saber para poder entrar em contato e atribuir um significado inicial a estes aspectos do conteúdo que pretendo que aprendam?
- Que coisas já podem saber que tenham alguma relação ou que possam chegar a relacionar-se com esses aspectos do conteúdo?

A exploração dos conhecimentos prévios não é tarefa fácil. Para explorá-los Miras afirma que "parece mais adequado utilizar instrumentos do tipo aberto sempre que possível" (p.73). A autora afirma que a seleção dos instrumentos para esta exploração necessita levar em conta que tipo de conteúdo se investiga. Por exemplo,

> "os questionários, diagramas e mapas podem ser um recurso útil para explorar os conhecimentos prévios do tipo conceitual, enquanto que a avaliação dos conhecimentos prévios do tipo procedimental requer tarefas que permitam observar de maneira mais ou menos direta a sequência dos passos dos alunos em relação ao procedimento que decidimos explorar. Enfim, quanto aos conhecimentos prévios atitudinal e normativo, parece adequado recorrer à exploração mediante instrumentos de caráter mais aberto, como a observação, o diálogo entre professor e alunos a partir de questões mestras ou de situações nas quais os alunos devam trazer soluções ou respostas a um problema recorrendo a atitudes e valores que tenham construído até o momento. (MIRAS, 2006, p.74)

Mais adiante, no final deste capítulo, trataremos dos tipos de conteúdos citados por Miras.

1.5 - A aprendizagem significativa de Ausubel e a noção de ZDP de Vygotsky

A aprendizagem significativa é um termo associado à Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel. Para esta pesquisa, encontramos dificuldades para encontrar livros deste autor traduzidos para o português. Assim, utilizaremos os estudos e as publicações de Moreira (2001), que nos permitem compreender a teoria de Ausubel e reafirmar a importância dos conhecimentos prévios e sua influência na construção de aprendizagem significativa.

Segundo Moreira (2001), Ausubel se preocupa com mecanismos internos da mente e "vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos" (p.7).

Na teoria de Ausubel, o conceito mais importante é o da aprendizagem significativa e este contrasta com o de aprendizagem mecânica.

> Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Ou seja, neste processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como *conceitos subsunçores*, ou simplesmente *subsunçores (subsumers),* existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em *conceitos relevantes* preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende. (MOREIRA, 2001, p.6)

Moreira explica que "estrutura cognitiva é uma estrutura hierárquica de conceitos que são abstrações da experiência do indivíduo" (p.8).

Assim, por exemplo, o conceito do número π (*pi)* se ancora em outros conceitos subsunçores presentes na estrutura cognitiva, como o conceito de circunferência e o de diâmetro. Atividades propostas com a finalidade de colocar o aprendiz diante de experimentações de medições de comprimentos de circunferências e de seus respectivos diâmetros, para relacioná-las, favorecem a compreensão do número irracional π. Esse novo conceito incorporado à estrutura cognitiva se constitui em um novo subsunçor que auxiliará na aquisição do conhecimento de uma forma geral de medir comprimento de circunferências.

Pode-se dizer que os conhecimentos prévios formam um conjunto de subsunçores já existentes na estrutura cognitiva dos alunos e que, quando mobilizados, promovem interações com os novos conhecimentos; estes não só se incorporam aos conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, como também os modificam.

A aprendizagem mecânica é a aprendizagem em que pouca ou nenhuma associação é feita entre uma nova informação e os conceitos existentes na estrutura cognitiva. "O conhecimento assim adquirido fica arbitrariamente distribuído na estrutura cognitiva sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos" (Moreira, p.9)

Um exemplo disso é a aprendizagem, de forma mecânica, da relação trigonométrica $(\text{sen}x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, sem associação, por exemplo, com o conceito da relação de Pitágoras já existente na estrutura cognitiva do aprendiz.

Segundo Moreira, "do ponto de vista ausubeliano, o desenvolvimento de conceitos é facilitado quando os elementos mais gerais, mais inclusivos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar e, posteriormente então, este é progressivamente diferenciado, em termo de detalhe e especificidade" (p. 21).

Considerando que as relações e as interações entre as pessoas são muito importantes para a ocorrência da aprendizagem significativa, buscamos conhecer o objeto de estudo de Vygotsky (1993), a relação entre o pensamento e a linguagem. Para esse autor

> (...) a relação entre pensamento e a palavra é um processo vivo; o pensamento nasce através das palavras. Uma palavra desprovida de pensamento é uma coisa morta, e um pensamento não expresso por palavras permanece uma sombra. A relação entre eles não é, no entanto, algo formado e constante; surge ao longo do desenvolvimento e também se modifica. (VYGOTSKY, 1993, p.131)

Segundo Onrubia (2006), os estudos de Vygotsky surgiram no âmbito de uma posição teórica global que defende a importância da relação e da interação com outras pessoas como origem dos processos de aprendizagem e desenvolvimentos humanos. Vygotsky propôs a noção de ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal), definida como a distância entre o nível de resolução de uma tarefa que uma pessoa pode alcançar atuando independentemente e o nível que pode alcançar com a ajuda de um colega mais competente ou experiente nessa tarefa (Onrubia, 2006, p. 127).

Onrubia ressalta que "o ensino deve ser entendido, necessariamente, na concepção construtivista, como uma *ajuda* ao processo de aprendizagem" (p.123) Essa ajuda é denominada pelo autor de ajuda ajustada e "pressupõe *desafios abordáveis* para o aluno; abordáveis não tanto no sentido de que possa resolvê-los ou solucioná-los sozinho, mas de que possa enfrentá-los graças à combinação entre suas próprias possibilidades e os apoios e instrumentos recebidos do professor." (p.125 e 126).

Dentre esses instrumentos que o professor pode oferecer estão as tarefas oferecidas conjuntamente com um colega mais competente, o que favorece a criação de ZDP.

> De acordo com a caracterização de Vygotsky e seus seguidores, é na ZDP que pode produzir-se o aparecimento de novas maneiras de o participante menos competente entender e enfrentar as tarefas e os problemas, graças à ajuda e aos recursos oferecidos por seu ou seus colegas mais competentes ao longo da interação. (ONRUBIA, 2006, p. 128)

Onrubia apresenta processos e critérios para a criação de zonas de desenvolvimento proximal na interação professor/alunos e faz a seguinte afirmação

> Embora estejamos longe de dispor de um conhecimento completo e detalhado dos processos que interferem na criação de ZDP e no avanço conjunto através delas em situações de interação professor/grupo de alunos em sala de aula, é possível identificar, com o que sabemos atualmente, certo número de elementos relevantes a respeito, suscetíveis de gerar critérios válidos para o desenho da prática habitual e sua análise e interpretação reflexiva. (ONRUBIA, 2006, p.132).

As características principais dos processos de interação/professor em situações de sala de aula que, segundo Onrubia, estão implicadas nos processos de criação de ZDP e de avanço através delas são:

1- "Inserir ao máximo a atividade pontual realizada pelo aluno a cada momento no âmbito de marcos ou objetivos mais amplos, nos quais essa atividade possa adquirir significado da maneira mais adequada." (p.132);
2- "Possibilitar, no grau mais elevado possível, a participação de todos os alunos nas diferentes atividades e tarefas, mesmo se o seu nível de competência, seu interesse ou seus conhecimentos forem em um primeiro momento muito escassos e pouco adequados." (p.134);
3- "Estabelecer um clima de relacionamento afetivo e emocional baseado na confiança, na segurança e na aceitação mútuas, em que caibam a curiosidade, a capacidade de surpresa e o interesse pelo conhecimento em si mesmo." (p.136);
4- "Introduzir, na medida do possível, modificações e ajustes específicos, tanto na programação mais ampla como no desenvolvimento concreto da própria atuação, em função da informação obtida a partir das atuações e produtos parciais realizados pelos alunos." (p.137);
5- "Promover a utilização e o aprofundamento autônomo dos conhecimentos que os alunos estão aprendendo." (p.139);
6- "Estabelecer, no maior grau possível, relações constantes e explícitas entre os novos conteúdos que são objeto de aprendizagem e os conhecimentos prévios dos alunos."(p.141);
7- "Utilizar a linguagem de maneira mais clara e explícita possível, tratando de evitar e controlar possíveis mal-entendidos ou incompreensões." (p.142);
8- "Utilizar a linguagem para recontextualizar e reconceitualizar a experiência." (p. 143).

Para Onrubia, a "*interação cooperativa* entre alunos pode ser, sob certas condições, uma base adequada para a criação de ZDP" (p.144) e apresenta algumas características de interações entre alunos que, segundo o autor, parecem particularmente relevantes:

1- "O contraste entre pontos de vista moderadamente divergentes a propósito de uma tarefa ou conteúdo de resolução conjunta." (p.145);

2- "A explicitação do próprio ponto de vista." (p.145);

3- "A coordenação de papéis, o controle mútuo do trabalho e oferecimento e recepção mútuos de ajuda." (p.147).

É importante ressaltar que, neste trabalho de pesquisa, os termos aprendizagem significativa e aprendizagem construtiva são utilizados com o mesmo sentido, pois entendemos que uma aprendizagem significativa é construída a partir das interações do sujeito com o meio físico ou com o meio social, de forma que o aprendiz identifica o sentido e o significado do que aprende, modificando sua estrutura cognitiva e construindo conhecimento.

A aprendizagem significativa não depende exclusivamente do ensino oferecido pelo professor. Entendemos que conhecimento não se transmite, se constrói, e essa construção depende das condições vistas anteriormente, relativas à aprendizagem e ao material, ou seja, de interações do sujeito com o meio externo. O professor desempenha um papel fundamental nessa interação e na busca do sentido e do significado do que se aprende. No entanto, a responsabilidade pela aprendizagem é do próprio aluno.

1.6 - O Construtivismo e o ensino de Funções Trigonométricas na Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo

Segundo Fini[9] (SÃO PAULO, 2009b), constatava-se, em 2007, a existência de muitos currículos, explícitos ou implícitos, praticados nas escolas da rede estadual paulista. A Secretaria de Estado da Educação tomou, assim, a decisão de unificar o

[9] Maria Inês Fini é coordenadora geral do Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.

currículo das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio. O documento citado indica os cinco princípios estruturais nos quais se baseia o currículo, reestruturado a partir de agosto de 2007:

> (...) a escola que aprende; o currículo como espaço de cultura; as competências como eixo da aprendizagem; a prioridade da competência de leitura e de escrita; a articulação das competências para aprender e a contextualização no mundo do trabalho (...) (SÃO PAULO, SEE, 2009b).

O foco das ações educacionais, em todas as disciplinas, segundo o atual currículo, é a transformação da informação em conhecimento. O currículo de matemática chama a atenção dos educadores para as ideias fundamentais a serem exploradas em cada conteúdo, como, por exemplo, a proporcionalidade, a equivalência, ordem e aproximação.

> Em cada conteúdo devem ser identificadas as ideias fundamentais a serem exploradas. Tais ideias constituem a razão do estudo das diversas disciplinas: é possível estudar muitos conteúdos sem uma atenção adequada às ideias fundamentais envolvidas, como também o é amplificar tais ideias, tendo por base a exploração de alguns poucos conteúdos. (SÃO PAULO, SEE, 2009b, p.36).

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino da Matemática (2008), as ações educacionais são norteadas por três eixos:

- eixo expressão-compreensão,
- eixo argumentação/decisão,
- eixo contextualização/abstração.

> No primeiro eixo, ao lado da língua materna, a Matemática compõe um par complementar como meio de expressão e de compreensão da realidade (...). No eixo argumentação/decisão, o papel da Matemática como instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da análise racional – tendo em vista a obtenção de conclusões necessárias – é bastante evidente (...). No que se refere ao terceiro eixo de competências, a Matemática é um lugar (ou instância) bastante adequado ou mesmo privilegiado para se aprender a lidar com os elementos do par concreto/abstrato. Mesmo sendo considerados especialmente abstratos, os objetos matemáticos são os exemplos mais facilmente imagináveis para se compreender a permanente articulação entre as abstrações e a realidade concreta (SÃO PAULO, 2008d, p. 42).

Com a implantação do Currículo de Matemática no Estado de São Paulo, as *funções trigonométricas* ganham destaque no programa do 2º ano do ensino médio.

Pode-se perceber que a forma de abordagem do conteúdo de trigonometria no atual currículo é inovadora e tem relações com o modelo pedagógico construtivista. Essas funções passaram a ser introduzidas a partir da modelagem de fenômenos periódicos. Os gráficos das funções y = sen x e y = cos x são apresentados antes do estudo das equações e inequações e das relações entre as funções.

No material destinado ao professor, o Caderno do Professor, há uma explicação sobre a mudança na maneira de se conduzir o estudo das funções trigonométricas e o compromisso com a aprendizagem significativa.

> A inversão, nesse caso, com o estudo das funções sendo realizado concomitantemente ao dos demais conceitos, permitirá associações explícitas entre a periodicidade observada e o modelo matemático escolhido, de maneira que o estudo poderá desenvolver-se sobre contextos significativos para os alunos. (SÃO PAULO, 2008b)

A ênfase dada ao estudo das Funções é também apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2006) em que vemos um alerta para o fato de que o ensino isolado de funções não permite a exploração do caráter integrador que ele possui e que o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações em Trigonometria deve ser evitado. O PCNEM também explicita que deve ser realizada a construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

No material de apoio fornecido aos gestores podemos encontrar a seguinte explicação sobre o construtivismo e sobre a prática construtivista na sala de aula quanto à exigência de uma compreensão ampla, por parte do professor, do aprendiz nos múltiplos aspectos do seu desenvolvimento:

> Ao contrário da visão tradicional, na qual o conhecimento é visto como pronto e acabado, o construtivismo é uma visão de conhecimento que relaciona psicogênese e sociogênese. Psicogênese porque analisa, através de estudos experimentais, como crianças resolvem ou compreendem progressivamente problemas fundamentais ao conhecimento científico. Sociogênese porque estuda na história das ciências como os conceitos e procedimentos relativos a este conhecimento foram sendo construídos e se o que será tomado como referência para avaliar os progressos, mesmo que lentos, das crianças em relação a tais problemas. Piaget chamou o primeiro método de psicogenético e o segundo de histórico-crítico. Nas práticas de sala de aula e em contextos de formação, esses dois modos de construção são fundamentais. O primeiro porque instrumentaliza o professor para que observe e promova formas de realização ou compreensão de seus alunos. A segunda porque instrumentaliza para avaliar as referências teóricas ou metodológicas utilizadas. (SÃO PAULO, 2008a, pág. 16)

A educação matemática está a serviço da educação global do estudante. O desenvolvimento das capacidades citadas nas diretrizes educacionais é de fundamental importância para que o cidadão em formação, concluinte da educação básica, se relacione de forma solidária e justa com outras pessoas em nossa sociedade, para que se desenvolva plenamente como personalidade humana e para que exerça seus direitos humanos e liberdades fundamentais. Essas capacidades são: de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente, tendo em vista que integramos uma sociedade denominada *sociedade de informação* crescentemente globalizada.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o Ensino da Matemática ressalta que, na *sociedade de informação,* o conhecimento é usado de forma intensiva, e a qualidade da educação oferecida nas escolas públicas é um fator decisivo para que as camadas mais pobres da sociedade brasileira tenham uma oportunidade real de aprendizagem e inserção no mundo de modo produtivo e solidário.

> Em um mundo no qual o conhecimento é usado de forma intensiva, o diferencial será marcado pela qualidade da educação recebida. A qualidade do convívio, assim como dos conhecimentos e das competências constituídas na vida escolar, será o fator determinante para a participação do indivíduo em seu próprio grupo social e para que tome parte de processos de crítica e renovação.
> Nesse quadro ganha importância a **qualidade da educação** oferecida nas escolas públicas, pois é para elas que estão acorrendo, em número cada vez mais expressivo, as camadas mais pobres da sociedade brasileira, que antes não tinham acesso à escola. A relevância e a pertinência das aprendizagens escolares nessas instituições são decisivas para que o acesso a elas proporcione uma oportunidade real de aprendizagem para inserção no mundo de modo produtivo e solidário. (SÃO PAULO, 2008d, pág.10).

Consideramos que uma educação de qualidade e um amplo acesso ao conhecimento é um ideal a ser conquistado por todos os cidadãos, apreciadores da Matemática ou não. A Proposta Curricular do Estado de São Paulo parece valorizar este ideal, pois apresenta como valores centrais a democratização do acesso à educação, a autonomia do aluno para gerenciar a própria aprendizagem, a construção da identidade do indivíduo, a inserção cidadã nas dimensões sociais e produtivas de forma solidária. Além disso, considera que um elemento relevante para pensarmos o conteúdo e o sentido da escola é a complexidade da ambiência cultural, das dimensões sociais, econômicas e políticas, a presença maciça de produtos científicos e tecnológicos e a multiplicidade de linguagens e códigos no cotidiano. "Apropriar-se ou não dos conhecimentos exigidos por esta *sociedade de informação* pode ser um instrumento da ampliação das liberdades ou mais um fator de exclusão" (SÃO PAULO, 2008d, pág.11).

Entendemos que a liberdade de cátedra do professor exige uma postura ética e compromissada com o seu aluno; ela deve estar a serviço de uma educação de qualidade e de amplo acesso ao conhecimento. Na concepção construtivista, o professor se ocupa de ensinar seus alunos a construírem conhecimentos e, para isso, ele não pode se furtar a conhecer os avanços nas pesquisas em educação matemática que, certamente, contribuíram para o aprimoramento das propostas curriculares e para a elaboração dos documentos oficiais que norteiam os currículos.

1.7 - Os conteúdos na Educação Escolar

Segundo Coll (2000), a Reforma do sistema educacional espanhol vem influenciando as reformas em vários países da América Latina e introduziu a distinção entre *fatos, conceitos, procedimentos e atitudes* como tipos diferentes de conteúdos que devem ser levados em consideração no momento de planejar e desenvolver o currículo. A seguir apresentaremos as características mais importantes de cada um desses tipos de conteúdo, segundo esses autores.

Os conteúdos referentes a *fatos* são os que tratam de informações sobre nomes, datas, símbolos de objetos ou acontecimentos particulares. O conhecimento de um fato pode ser ampliado com novos fatos, mas o conhecimento de um fato pode ser considerado, em um momento, definitivamente aprendido. As atividades exigidas são geralmente ligadas a atividades de memorização por repetição verbal. O tempo de aprendizagem é diferente para cada aluno e, geralmente, é de curta duração. As atividades de repetição verbal são indicadas para recordação dos conteúdos factuais.

Os conteúdos referentes a *conceitos e princípios* exigem "uma grande dose de compreensão e, consequentemente, uma intensa atividade do aluno para poder estabelecer relações pertinentes entre esses novos conteúdos e os elementos já disponíveis em sua estrutura organizativa" (Zabala, 2006 p. 167). Esses conteúdos requerem certas estratégias didáticas que promovam uma ampla atividade cognoscitiva do aluno, o que implicará, em muitos casos, colocá-los diante de experiências ou situações que induzam ou potencializem essa atividade. As atividades indicadas buscam desenvolver, exclusivamente, a compreensão. A aprendizagem nunca pode ser considerada definitiva, pois novas experiências e novas situações permitirão novas elaborações e enriquecimento do conceito ou princípio. Esses conteúdos exigem estratégias de aprendizagem mais complexas e o tempo necessário para sua aprendizagem é mais dilatado e superior ao tempo de simples aprendizagem por repetição verbal.

Os conteúdos *procedimentais* (técnicas, métodos, destrezas e habilidades) tratam do conjunto de ações ordenadas e destinadas à um fim, como desenhar, ler um mapa, realizar uma medição do crescimento de uma planta ou utilizar o algoritmo da soma. Por estarem configurados por ações, podem ser considerados dinâmicos em relação ao caráter estático dos conceituais. Trata do que "sabemos fazer" em cada situação. As atividades de aprendizagem adequadas são as que envolvem repetições de ações. Há a necessidade de se associar conteúdos conceituais aos conteúdos procedimentais para que seja feito de forma significativa a execução compreensiva. São importantes as repetições significativas e contextualizadas, que nada tem a ver com repetição mecânica.

Há ainda os conteúdos referentes a *valores, normas e atitudes*. Estes exigem atividades muito mais complexas e os processos de aprendizagem devem abranger, ao mesmo tempo, os campos cognoscitivos, afetivos e comportamentais. O componente afetivo adquire importância capital. O tempo necessário para a aprendizagem desses conteúdos é mais dilatado que os demais, sendo quase impossível de se prever.

Apresentamos, a seguir, os tipos de conteúdos e as atividades de aprendizagem que propiciam o desenvolvimento deles, segundo Zabala, dispostos na tabela apresentada pelo autor.

Conteúdos	Atividades de aprendizagem
Fatos	Repetições verbais
Conceitos	Experienciais
Conteúdos procedimentais	Aplicações e exercícios
Conteúdos atitudinais	Experienciais com componentes afetivos

Tabela 1: Tipos de conteúdos e atividades de aprendizagem, segundo Zabala, 2006, p. 171

Vimos que para cada tipo de conteúdo há atividades de aprendizagem mais adequadas. A natureza dos conteúdos são referenciais úteis ao professor no planejamento de suas ações pedagógicas. Mas isso não significa que uma atividade deve contemplar um dos tipos de conteúdo apresentado. Muitas vezes esses tipos de conteúdos costumam ser trabalhados numa mesma atividade. Concordamos com Zabala que afirma que o fazer construtivista em sala de aula implica em considerar os conteúdos escolares nos seus três tipos (conceitos, procedimentos e atitudes), em distingui-los nos diversos momentos do planejamento e em compreender que tais conteúdos "devem ser trabalhados conjuntamente, para que se estabeleça o maior número de vínculos possíveis entre eles". (p. 166).

Capítulo 2 - Trabalhos acadêmicos relacionados à nossa pesquisa

> A laboriosidade prática, sábia e energicamente aplicada, sempre produz seus devidos resultados. Eleva a um homem, põe de manifesto seu caráter individual e estimula ação dos outros. (ATKINSON 1950,p.71)

Neste capítulo, serão apresentados alguns trabalhos acadêmicos cujas leituras contribuíram para a formação da questão de pesquisa, para a seleção dos procedimentos metodológicos utilizados para a coleta de dados e para a elaboração desta dissertação.

A tese de doutoramento de Alegro (2008) intitulada *Conhecimento prévio e aprendizagem significativa de conceitos históricos no ensino médio* é desenvolvida a partir do mesmo pressuposto do qual partimos em nosso trabalho, ou seja, as características dos conhecimentos prévios são determinantes para novas aprendizagens. Alegro fundamenta sua pesquisa na teoria ausubeliana, admitindo a ênfase no processo de aprendizagem como processo de atribuição de significado e sentido. O objetivo da pesquisa de Alegro é analisar conteúdos substantivos de conhecimentos prévios apresentados por ingressantes no Ensino Médio, na disciplina de História, coletados por meio de diagramas aos moldes de mapa conceitual. Esses conhecimentos substantivos, explica a autora, "referem-se a conceitos do campo de História, explorados como conteúdo escolar, como por exemplo, feudalismo, democracia, trabalho". Alegro afirma que considerar os conteúdos substantivos históricos em sua pesquisa

> (...) implica em concebê-los como “conhecimentos prévios”, ou seja, são reconhecidos num processo de (nova) aprendizagem e referem-se a conceitos pré-existentes na estrutura cognitiva do estudante. Para Ausubel, estruturas cognitivas são estruturas hierárquicas de conceitos que explicitam as representações do indivíduo. Assim, os conceitos já aprendidos determinam novas aprendizagens e são por elas modificados. (ALEGRO, 2008, p.19)

Para a coleta de dados, a autora compôs sua amostra com alunos ingressantes do Ensino Médio de escolas gratuitas de diferentes regiões da cidade de Londrina. Dos cinco grupos formados, três são compostos por alunos de educação de jovens e adultos, EJA, uma escola apresenta alunos de baixa renda e advindos de região intermediária entre a zona rural e urbana e a outra escola apresenta alunos parentes de funcionários e de docentes de uma universidade pública, selecionados por meio de concurso. Foi privilegiada a análise do tema Descobrimento do Brasil. O instrumento chamado de “diagrama”, pela autora, é composto por um diagrama bidimensional previamente desenhado, cabendo ao aluno participante organizar hierarquicamente os conceitos e exemplos, estabelecer as relações entre eles, inclusive por meio da complementação do diagrama, se for o caso. (Alegro, p.78)

A autora apresenta as categorias de análise que emergiram da leitura interpretativa dos diagramas. Foi proposta a coleta de informações também entre alunos do terceiro ano do Ensino Médio para se observar os efeitos do processo de ensino e aprendizagem. Os resultados mostram que estudantes ingressantes e concluintes apresentam idéias gerais incorporadoras assemelhadas, apenas com maior diferenciação conceitual ao final do Ensino Médio, e que os estudantes produzem significado e sentido ao construir narrativas sobre o tema.

Outro trabalho de pesquisa consultado é o de Klein (2008) intitulado *O ensino da trigonometria subsidiado pela teoria da aprendizagem significativa e pela teoria dos campos conceituais*. A autora elegeu o tema Trigonometria com o objetivo de investigar se a utilização de uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud promove e facilita a aprendizagem significativa deste tema. A autora justifica sua escolha pelo tema afirmando que o desenvolvimento do conteúdo de trigonometria representa um desafio devido às dificuldades manifestadas pelos alunos e por ser um tema de grande impacto na vida cotidiana dos alunos. A pesquisa apresenta os fundamentos da teoria de Ausubel e da teoria de Vergnaud e considera que, em muitos aspectos, as duas teorias são complementares. Foram elaboradas atividades e desenvolvidas por alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede particular. O trabalho tem como pressuposto que os conhecimentos prévios são chamados de "subsunçores" ou "idéias âncora" por Ausubel e que o conhecimento está organizado em campos conceituais, de acordo com a teoria de Vergnaud. Segundo Klein, os resultados da pesquisa permitem afirmar que a identificação dos conhecimentos prévios e dos conhecimentos em ação, nas situações propostas, resulta em uma significativa mudança de postura, tanto do professor como do aluno. A autora afirma que a metodologia utilizada, baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, contemplando aspectos conceituais, procedimentais e de atitude, provoca uma significativa mudança no processo de ensino e aprendizagem do tema trigonometria pois considera o aluno como um ser ativo, durante todo o processo.

Concordamos com Klein quando se refere aos conhecimentos prévios como os "subsunçores" de Ausubel. Defendemos a importância de caracterizá-los para que o professor possa intervir adequadamente para a incorporação dos novos conhecimentos à estrutura cognitiva já existente do aluno.

O trabalho de Rosenbaum (2010) intitulado *Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista* apresenta o objetivo de verificar como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de funções trigonométricas. Utiliza como fundamentação teórica os trabalhos de Simon (1995) sobre o uso de THA, Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, no ensino de Matemática. Rosenbaum afirma que, para Simon, "o desenvolvimento de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem tem como meta promover mudanças no ensino da Matemática, tendo como base o construtivismo. A autora explica que, para Simon,

> (...) o termo hipotético compreende duas perspectivas: a que entende que o professor tem acesso apenas às hipóteses dos conhecimentos dos alunos, isto é, ele não consegue acessar diretamente o conhecimento dos aprendizes e a outra perspectiva, que utiliza o termo hipótese para fazer referência ao prognóstico, à expectativa do professor, a respeito de como a aprendizagem será processada pelos alunos. (ROSENBAUM, 2010,p. 27)

Rosenbaum afirma que, na elaboração de suas THA, preocupou-se em criar atividades para serem realizadas em duplas, para promover a troca entre os pares de modo que desenvolvessem nos alunos participantes da pesquisa a prática da aprendizagem cooperativa. O tema escolhido por Rosenbaum para a construção de uma THA é o mesmo tema escolhido em nossa pesquisa, porém o foco de interesse da autora é o ensino e o de nossa pesquisa é a aprendizagem. A autora se propõe a elaborar e desenvolver a THA sobre este tema visando à formação de professores. Propõe-se a promover o uso de tecnologias e aproximar os professores das pesquisas; acredita que isso pode contribuir com o desenvolvimento profissional dos docentes. Para a elaboração das THA, a autora parte das dificuldades dos alunos obtidas a partir de estudos consultados, como mostra o trecho a seguir.

> A partir da revisão bibliográfica, fizemos um levantamento a respeito das dificuldades que os alunos apresentam no aprendizado de Funções Trigonométricas. Tais como: na simplificação de notação, no uso de instrumentos, na formulação de hipóteses, no conhecimento de funções e a dificuldade na construção dos gráficos das funções trigonométricas. Estes resultados foram o eixo norteador para a escolha das atividades da THA (ROSENBAUM, 2010, p. 61)

Essa citação de Rosenbaum chama a atenção para as dificuldades dos alunos relacionadas a conteúdos procedimentais como, por exemplo, a simplificação de notação, o uso de instrumentos e a construção de gráficos, embora não tenhamos observado que a autora tenha dado destaque a este tipo de conteúdo.

Foram construídas duas versões de THA. A primeira delas foi discutida com os professores, que sugeriram poucas alterações, segundo a autora. Ela constatou que a elaboração de THA incluindo atividades que envolvam o uso de tecnologia e manipulação de materiais potencializa o aprendizado de funções trigonométricas, mas só a elaboração da THA e sua utilização no processo de ensino e aprendizagem do tema não bastam; segundo a autora, a atuação do professor tem papel decisivo na mediação da construção do conhecimento dos seus alunos, e a interação entre alunos também contribui para a aprendizagem.

Compreendemos que THA se constitui em um modelo de ensino de perspectiva construtivista que tem como um de seus componentes as hipóteses do professor sobre o conhecimento dos alunos e seus processos de aprendizagem. Assim, afirmamos a importância de se caracterizar os conhecimentos prévios dos alunos, relacionados à função trigonométrica, pois essa caracterização forneceria mais elementos ao professor para que ele possa realizar intervenções mais adequadas no processo de ensino aprendizagem de tais funções como também criar THA mais eficientes.

Finalmente, apresentamos o trabalho de Oliveira (2010) intitulado *Trigonometria: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos*. A autora afirma sua intenção de formular atividades "com diferentes metodologias que relacionassem tanto a necessidade do estudo da Trigonometria no Triângulo Retângulo, quanto sua relação com o Ciclo Trigonométrico gerando as Funções Trigonométricas". Oliveira afirma que a pesquisa objetiva provocar no aluno um interesse maior pelo estudo da trigonometria e apresentar um material instrucional para auxiliar o professor; neste material, as dificuldades dos alunos seriam evidenciadas a cada etapa. Este trabalho, assim como o de Rosenbaum, tem como ponto de partida as dificuldades dos alunos para a proposição de ações pedagógicas e valoriza o uso de ferramentas tecnológicas como, por exemplo, o software *Geogebra*. A pesquisa de Oliveira procura responder a questão "Podemos construir uma aprendizagem significativa para o aluno, no conteúdo de Trigonometria, por meio de novos conhecimentos do professor?" Apresenta como um produto final do mestrado profissional um conjunto de atividades com dinâmicas diferenciadas que, segundo a autora, promoveram seu grande aperfeiçoamento profissional.

Esses trabalhos contribuíram para a elaboração desta dissertação pois, com eles, acessamos teorias diversas sobre a aprendizagem, metodologias e muitas referências bibliográficas; eles foram muito importantes para que direcionássemos nosso olhar de pesquisa para a aprendizagem. Porém, observamos em nossa pesquisa bibliográfica, que são poucas as pesquisas que tratam da aprendizagem de conteúdos matemáticos do Ensino Médio, focando os conhecimentos prévios dos alunos, na perspectiva construtivista e visando a uma aprendizagem significativa. Esta pesquisa pode contribuir para preencher esta lacuna existente e incentivar outros pesquisadores a coletar estes conhecimentos prévios dos alunos relativos a outros temas matemáticos.

Capítulo 3 - Fundamentação metodológica

Neste capítulo apresentamos as características dessa pesquisa, denominada qualitativa e cuja estratégia empregada é a do estudo de caso. A técnica empregada para o levantamento de dados da pesquisa é a da observação participante.

3.1- A pesquisa qualitativa e o estudo de caso

A pesquisa qualitativa nem sempre foi bem aceita entre os investigadores educacionais. Segundo Bogdan e Biklen (1994), investigadores quantitativos e qualitativos formavam, nos anos setenta, dois grupos que prosseguiam com os debates metodológicos. Embora fosse possível verificar uma mudança de atitude dos investigadores quantitativos em relação à investigação qualitativa, "defensores de todas as perspectivas participaram nas discussões: 'qualitativos' versus 'quantitativos', 'jornalismo' versus 'investigação' e 'científico' versus 'intuitivo'". (Bogdan e Biklen, p. 39).

Para justificar a opção metodológica empregada nesta pesquisa, apresentamos a tabela abaixo, adaptada da tabela apresentada por Bogdan e Biklen, com algumas características que diferenciam esses dois tipos de investigação.

QUALITATIVA	QUANTITATIVA
Expressões/frases associadas com a abordagem - etnográfico - trabalho de campo - dados qualitativos - interação simbólica - perspectiva interior - naturalista - etnometodológico - descritivo	*Expressões/frases associadas com a abordagem* - experimental - dados quantitativos - perspectiva exterior - empírica - positivista - fatos sociais - estatística

- observação participante - fenomenológico - Escola de Chicago - documentário - história de vida - estudo de caso - ecológico - êmico	- ética - positivista - fatos sociais - estatística - ética
Objetivos - desenvolver conceitos sensíveis; - desenvolver realidades múltiplas - teoria fundamentada - desenvolver a compreensão	*Objetivos* - teste de teorias - encontrar fatos - descrição estatística - encontrar relações entre variáveis - predição
Plano - progressivo, flexível, geral - intuição relativa ao modo de avançar	*Plano* - estruturado, predeterminado, formal, específico - plano detalhado de trabalho
Elaboração de propostas de investigação - breves - especulativas - sugere áreas para as quais a investigação possa ser relevante - normalmente escritas após a coleta de alguns dados - parcas em revisão de literatura - descrição geral da abordagem	*Elaboração de propostas de investigação* - extensas - detalhadas e específicas nos objetivos - detalhadas e específicas nos procedimentos - longa revisão de literatura - escritas antes da recolha dos dados - especificação das hipóteses
Dados - descritivos - documentos pessoais - notas de campo - fotografias - o discurso dos sujeitos - documentos oficiais e outros	*Dados* - quantitativos - codificação quantificável - contagens, medidas - variáveis operacionalizadas - estatística
Amostra - pequena - não representativa - amostragem teórica	*Amostra* - ampla - estratificada - grupos de controle - precisa - seleção aleatória - controle de variáveis extrínsecas
Técnica ou métodos - observação - estudo de documentos vários - observação participante - entrevista aberta	*Técnica ou métodos* - experimentos - inquéritos - entrevista estruturada - observação estruturada

	- conjunto de dados
Análise dos dados - contínua - modelos, temas, conceitos -indutivo - indução analítica - método comparativo constante	*Análise dos dados* - dedutiva - verifica-se após a conclusão dos dados - estatística

Tabela 2: Adaptação da tabela de características das abordagens qualitativa e quantitativa apresentada por Bogdan e Biklen (p. 72)

Como se pode observar, as diferenças entre os dois tipos de pesquisa são muitas. O estudo de caso é, segundo Bogdan e Biklen, uma expressão associada com a abordagem qualitativa. "O estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico" (Merriam, 1998 apud Bogdan e Biklen, 1994).

Para Martins (2008) o Estudo de caso é uma estratégia de pesquisa que pede avaliação qualitativa e apresenta as seguintes opções de técnicas para a coleta de dados em um Estudo de Caso:

> As evidências e a coleta de dados podem ser obtidas através de diversas técnicas (...). Observação, Observação Participante, Entrevista, *Focus Group*, Análise de Conteúdo, Questionário e Escalas Sociais e de Atitudes, Pesquisa Documental e Registro de Arquivos, Pesquisa-Ação, Pesquisa Etnográfica e Análise do Discurso, permitindo combinações de técnicas. (MARTINS, 2008, p.79)

Bogdan e Biklen consideram que algumas questões são frequentes em um contato inicial com a investigação qualitativa. Uma delas chama a atenção pelo fato da pesquisadora, neste trabalho, também ser professora. A pergunta é *Em que é que a investigação qualitativa difere daquilo que pessoas como os professores, jornalistas e artistas fazem?* (p. 64).

A citação, a seguir, apresenta parte da resposta dos autores para esta pergunta, e considera a diferença entre o que o professor e o investigador fazem.

> Em primeiro lugar o dever principal do observador é o de conduzir a investigação; não tem de perder tempo a elaborar currículos, dar aulas e a disciplinar os alunos. O investigador pode, pois, devotar-se à investigação de alma e coração. De igual modo, os investigadores procedem com rigor no que diz respeito ao registro detalhado daquilo que descobrem.

> Conservam os seus dados. Os professores também tem registros, mas estes são muito menos detalhados e de tipos diferentes. Além do mais, os investigadores não tem tanto interesse pessoal nas observações que fazem e nos resultados que obtêm. A vida, carreira e autoconceito do professor estão sempre intimamente ligados ao modo particular como ele desempenha as suas tarefas. Isto não significa que os professores não possam ultrapassar estas questões, de modo a poderem conduzir investigação, ou que os investigadores não tenham qualquer interesse pessoal nos estudos que realizam. Contudo, para os investigadores o sucesso é definido por realizarem o que se caracteriza por boa investigação, e não por conteúdos ou resultados específicos. Outro aspecto em que o investigador e o professor diferem é que o investigador foi treinado no uso de um conjunto de procedimentos e técnicas, desenvolvido ao longo dos anos, com o objetivo de recolher e analisar dados. Finalmente, o investigador baseia-se em teorias e resultados anteriores de investigação que funcionam como um pano de fundo que fornece pistas para dirigir o estudo e permite contextualizar os novos resultados. (BOGDAN E BIKLEN, 1994, P. 64)

O Estudo de Caso exige muita atenção e habilidades do pesquisador para que sejam evitadas análises intuitivas e apresentações de relatos históricos que se afastam de um trabalho científico. Além disso, detalhar as diferenças entre o investigador e o professor é muito pertinente, pois, em Educação Matemática, frequentemente os pesquisadores também são professores.

3.2- A observação participante

Segundo Queiroz (2007), esta técnica foi introduzida pela Escola de Chicago, nos anos 1920, abandonada por décadas por ter sido duramente contestada pelos pesquisadores experimentais e só recentemente foi resgatada. "Seu resgate atual, no entanto, auxilia nas descrições e interpretações de situações cada vez mais globais" (p. 277).

Queiroz afirma que essa técnica

> (...) caiu no esquecimento por alguns anos, até ser novamente introduzida no meio acadêmico na década de 1990, sendo, a partir de então, considerada um processo pelo qual a interação da teoria com a prática concorre para a transformação ou implementação do meio pesquisado (QUEIROZ, 2007, p.278)

A técnica da observação participante exige do investigador algumas habilidades.

> Para a realização da observação participante, o pesquisador deve adquirir algumas habilidades e competências, tais como: ser capaz de estabelecer uma relação de confiança com os sujeitos; ter sensibilidade para pessoas; ser um bom ouvinte; ter familiaridade com as questões investigadas, com preparação teórica sobre o objeto de estudo ou situação que será observada; ter flexibilidade para se adaptar as situações inesperadas; não ter pressa de adquirir padrões ou atribuir significado aos fenômenos observados; elaborar um plano sistemático e padronizado para a observação e registro de dados; ter habilidade em aplicar instrumentos adequados para a coleta e apreensão dos dados; verificar e controlar os dados observados; e relacionar os conceitos e teorias científicas aos dados coletados. (QUEIROZ et al., p. 279)

As etapas essenciais da observação participante para que o trabalho tenha êxito são, segundo Queiroz (p.279):

1. aproximação do pesquisador ao grupo social em estudo;
2. esforço do pesquisador em possuir uma visão de conjunto da comunidade objeto de estudo
3. sistematização e organização dos dados.

Nesta pesquisa procuramos seguir estas etapas e consideramos que a primeira delas é muito importante para investigar os conteúdos do tipo atitudinal.

3.3 - Procedimentos metodológicos: técnica utilizada; instrumentos para a coleta de dados e critérios para a análise dos resultados

A técnica da observação participante foi revelada ao grupo de alunos. Os discursos dos sujeitos foram muito importantes para guiar as ações de intervenção, além dos ensinamentos advindos do referencial teórico utilizado.

As intervenções ocorreram ora para identificar conhecimentos prévios dos estudantes, ora para identificar possibilidades de construção de conhecimentos que as atividades do material propiciam. Assim, emergiram as seguintes unidades de análise:

- características dos conhecimentos prévios dos alunos

- dificuldades surgidas durante a execução das atividades
- intervenções realizadas para a construção do conhecimento

As respostas imediatas às perguntas dos alunos foram evitadas; assim, as perguntas eram devolvidas para que fossem incentivadas a associação e a construção de conhecimento por eles próprios.

A seleção do grupo de alunos foi feita a partir da indicação de um professor de Matemática da escola em que a pesquisadora trabalha. Esse professor observou a participação desses alunos durante os primeiros meses do ano letivo e identificou as características necessárias para esta investigação: o gosto pelo estudo de Matemática e o compromisso com a aprendizagem, ou seja, a boa disposição para aprender. O grupo integra três alunos: um aluno que será indicado pela letra **C**, e duas alunas indicadas pelas letras **Y** e **E**; essa identificação com letras visa a preservar as identidades dos alunos e será utilizada na descrição dos diálogos, juntamente com a letra **P**, para a pesquisadora.

É importante destacar que, no primeiro encontro, contamos com a participação da aluna identificada pela letra **G**, que foi substituída pela aluna **E**. Essa substituição de deve à transferência de escola da aluna **G**.

Os encontros ocorreram na biblioteca da escola, durante o horário das aulas. O professor de Matemática os liberou de duas aulas semanais, com duração de 50 minutos cada, para a realização desta coleta de dados. Os alunos concordaram em participar e demonstraram-se lisonjeados pelo convite.

Foram propostas atividades do Caderno do Aluno do 2º ano do Ensino Médio e mais algumas elaboradas pela pesquisadora. É importante ressaltar que, nessa fase da coleta, os alunos ainda não haviam recebido o Caderno do Aluno para utilizarem nas aulas de Matemática, devido a atraso na entrega.

A execução de algumas partes das atividades foram filmadas ou fotografadas para posterior análise. Foram coletados materiais escritos como gráficos, tabelas e rascunhos. O Termo de Consentimento Livre e Assistido foi apresentado aos alunos que, por serem menores de idade, tiveram que solicitar consentimento aos seus responsáveis.

Nas transcrições dos diálogos filmados, os gestos e as pausas foram observadas, além das notas de campo. A cada encontro, as intervenções ocorreram de modo a coletar os dados com vistas a responder nossa questão de pesquisa e confirmar nossa hipótese de que os alunos, em geral, possuem um conjunto de conhecimentos prévios, no 2º ano do Ensino Médio, que permite a construção do conhecimento e a aprendizagem significativa das funções trigonométricas.

Tabelas foram elaboradas com o propósito de facilitar a visualização das unidades de análise. Estas tabelas serão apresentadas no capítulo 4 e seus dados serão reunidos em duas novas tabelas que serão apresentadas no final do mesmo capítulo: as tabelas 13 e 14.

Capítulo 4 - Descrição do desenvolvimento das atividades e análise dos dados

4.1 - As atividades selecionadas do Caderno do Aluno

Foram selecionadas dez atividades do caderno do Aluno. Elas foram desenvolvidas nos encontros semanais de duração de uma hora e meia, aproximadamente. Embora o Caderno do Aluno do 1º bimestre do 2º ano do ensino médio seja composto de quatro situações de aprendizagem, foram selecionadas atividades somente das três primeiras situações para que o tempo de coleta não se estendesse muito. O tema da quarta situação surgiu, de modo implícito, no quarto encontro, como já era previsto por nós. Antes de apresentarmos as atividades, indicaremos, na tabela abaixo, elaborada com dados do Caderno do professor, o título das situações de aprendizagem e as competências e habilidades que se espera que o aluno desenvolva.

Situação de aprendizagem e título	**Competências e habilidades**
1ª Situação de aprendizagem: *O reconhecimento da periodicidade*	Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais; representar a periodicidade identificada em situações-problema por intermédio de um gráfico cartesiano.
2ª Situação de aprendizagem: *A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica*	Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais; representar graficamente fenômenos periódicos por intermédio de gráficos cartesianos; identificar as simetrias presentes na circunferência trigonométrica, utilizando-as para a resolução de situações-problema; localizar na circunferência trigonométrica a extremidade final de arcos dados em graus ou em radianos; resolver equações trigonométricas simples.
3ª Situação de aprendizagem: *Gráficos de Funções Periódicas envolvendo Senos e Cossenos*	Construir o gráfico de uma função trigonométrica dada a equação que a representa; identificar alguns parâmetros importantes no modelo ondulatório para

	a descrição matemática de fenômenos periódicos; determinar a equação da função representada por um gráfico dado.
4ª Situação de aprendizagem: *Equações trigonométricas*	Relacionar situações-problema, apresentadas em língua materna, com os significados associados aos fenômenos periódicos; resolver equações trigonométricas envolvendo senos e cossenos; interpretar resultados e fazer inferências.

Tabela 3: Situações de aprendizagem, competências e habilidades que constam no Caderno do Professor.

As atividades extraídas do Caderno do Aluno, bem como suas figuras, serão apresentadas a seguir, juntamente com os *objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios*.

<u>1ª Atividade extraída do Caderno do Aluno: leitura do texto e desenho de gráfico imaginado.</u>

<u>Texto:</u> O movimento aparente do Sol e o comprimento das sombras

O mais elementar fenômeno periódico que podemos observar é o movimento aparente do Sol, do nascente ao poente, durante a passagem dos dias do ano. O registro dessa periodicidade pode ser realizado por intermédio da medição do comprimento da sombra de uma estaca enfiada verticalmente no solo. Essa situação pode ter estimulado as pessoas a elaborarem os primeiros calendários e a reconhecer as estações do ano. Vamos imaginar um experimento em que fôssemos medir o comprimento da sombra de uma estaca durante a passagem de determinado período de tempo, como, por exemplo, dois anos. A figura a seguir ilustra aproximadamente essa situação.

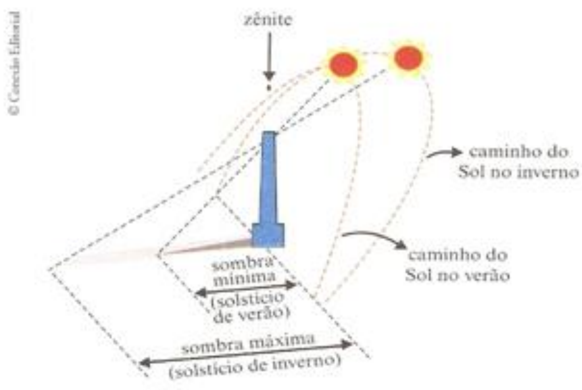


Figura 3: O movimento aparente do sol.

Sabemos que o percurso do Sol durante o inverno é mais inclinado em relação à linha zenital do que o percurso similar realizado durante o verão. O comprimento da sombra da estaca em determinado horário do dia, ao meio-dia, por exemplo, varia durante o ano desde um valor mínimo até um máximo, correspondendo às datas que marcam, respectivamente, o início do inverno (21 de junho) e o do verão (22 de dezembro), denominados solstícios.

<u>Proposta de atividade:</u> Imagine o acompanhar do comprimento da sombra da estaca durante dois anos e que tais comprimentos foram registrados em uma tabela. A tarefa agora será imaginar como seria o formato de um gráfico que representasse o comprimento da estaca em função da passagem dos dias do ano, e desenhar aquilo que imaginou para essa situação.Utilize o espaço seguinte para desenhar seu gráfico, assumindo que o comprimento da sombra máxima é de 1,0 m, e que o comprimenro mínimo é de 0,10m.
Observação: O espaço disponibilizado no Caderno do Aluno é quadriculado. No eixo das abscissas há a indicação "Meses do ano" e no eixo das ordenadas "Comprimento da sombra da estaca (m).

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à relação entre grandezas;
- ao plano cartesiano;
- à periodicidade das estações do ano;

- aos números decimais e sua utilização nas unidades de medida de comprimento;
- à competência leitora do gênero textual: texto narrativo;
- a procedimentos de construção de gráficos (que tipo de gráficos apresentam, se utilizam tabela construída com os dados apresentados, que materiais utilizam na construção, como constroem a escala nos eixos).

<u>2ª Atividade extraída do Caderno do Aluno:</u>
<u>Observação de gráfico e do texto explicativo sobre os conceitos de amplitude e de período e proposta de escrita do período e da amplitude do gráfico da 1ª atividade.</u>

Observe o gráfico seguinte, em formato de onda, obtido a partir da observação de um fenômeno periódico.

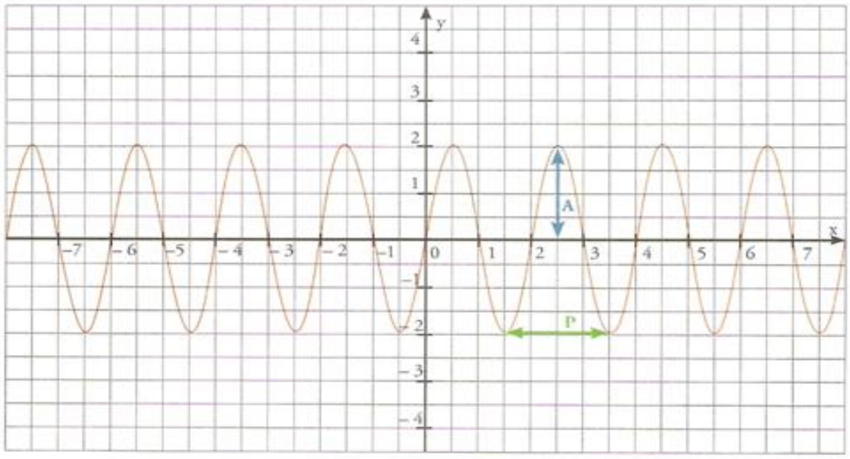


Figura 4: Gráfico que apresenta explicação da amplitude e do período.

Nesse gráfico aparecem em destaque dois conceitos importantes, associados a fenômenos periódicos: a amplitude (A) e o período (P). Período é a distância horizontal entre dois picos sucessivos da "onda", e a amplitude é a metade da distância vertical entre dois picos. No gráfico que você desenhou na atividade anterior, deve ser possível identificar o período e a amplitude, mesmo que ele não tenha o formato semelhante a esse que desenhamos acima. Escreva a seguir o período e a amplitude do fenômeno que você registrou em seu gráfico.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à associação e construção dos conceitos abordados (amplitude e período);
- à competência leitora do gênero textual gráfico;
- à competência escritora na apresentação da resposta.

<u>3ª atividade extraída do Caderno do Aluno: Observação de gráficos e leitura do texto explicativo sobre imagem de uma função.</u>

Imagem de uma função é o conjunto dos valores que a função assume, ou, em outras palavras, é o conjunto dos valores de y correspondentes aos valores de x. Observe a imagem de cada uma das seguintes funções representadas em seus gráficos.

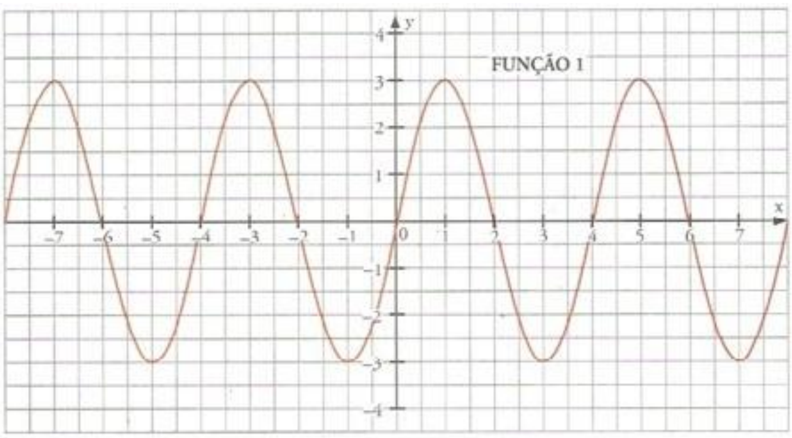


Imagem (Função 1) = $\{y \in \mathbb{R} \,/\, -3 \leq y \leq 3\}$

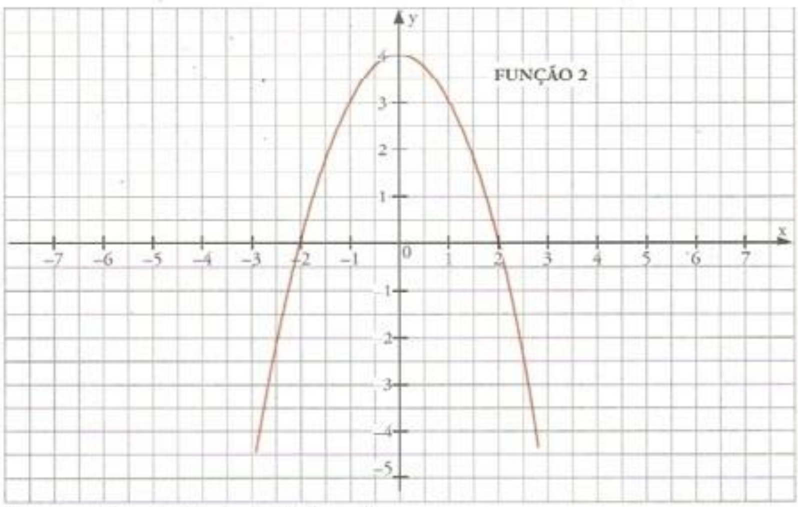


Imagem (Função 2) = $\{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq 4\}$

Figura 5: Gráficos utilizados para explicação do conceito de imagem da função.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à observação e identificação das imagens das funções;

- à representação do conjunto imagem e a utilização da linguagem matemática para representar esse conjunto.

<u>4ª atividade extraída do Caderno do Aluno: Escrita de período, imagem e amplitude das funções a partir de gráficos apresentados.</u>

a)

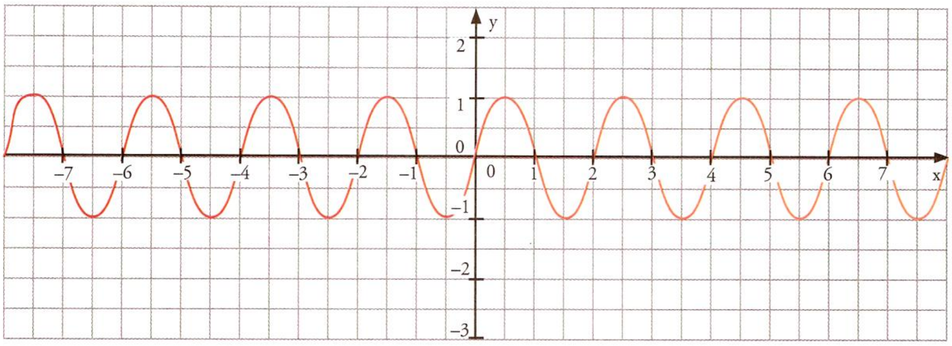


Figura 6: Primeiro gráfico para a indicação do período, imagem e amplitude.

b)

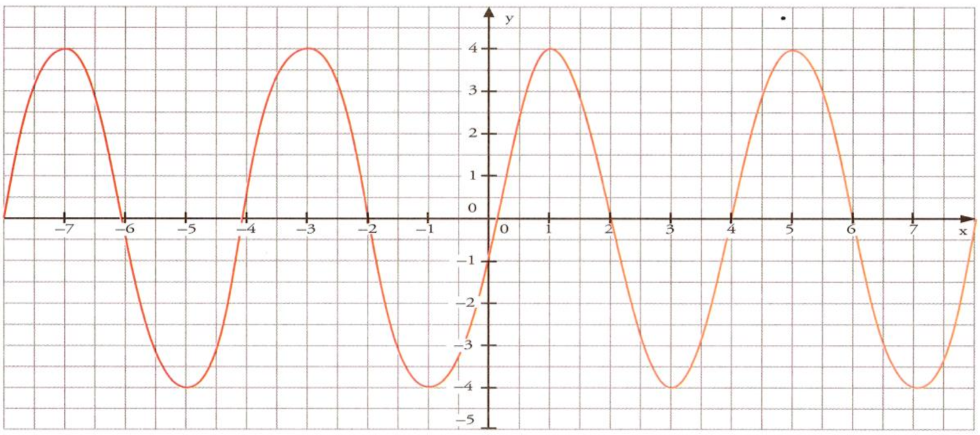


Figura 7: Segundo gráfico para a indicação do período, imagem e amplitude.

c)

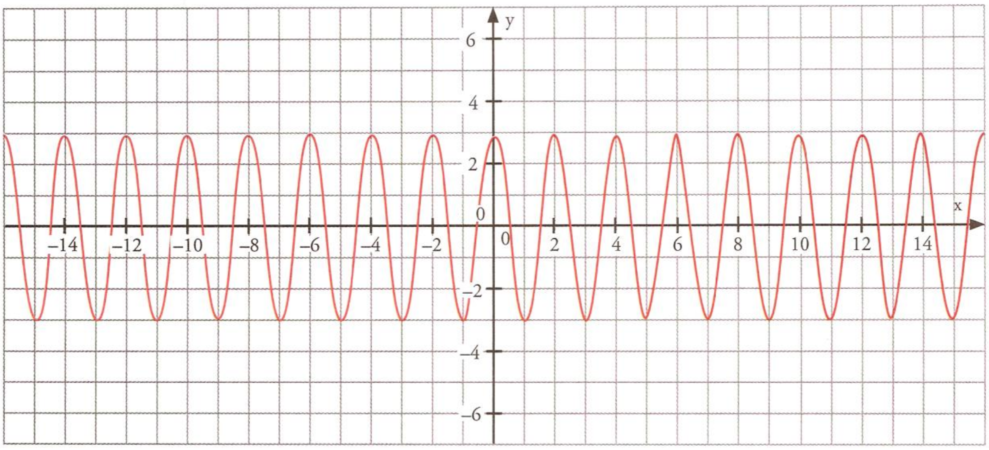


Figura 8: Terceiro gráfico para a indicação do período, imagem e amplitude.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- ao reconhecimento da imagem como um conjunto de valores;
- à competência escritora para responder as atividades;
- à observação das diferentes escalas dos gráficos apresentados.

5ª atividade extraída do Caderno do Aluno: Leitura e análise do texto

Texto: Construindo o modelo

Retomando o experimento imaginário realizado na Situação de Aprendizagem anterior, vamos agora fazer a sobreposição de um sistema de eixos cartesianos sobre a linha em que a sombra da estaca "caminha", de maneira que a origem do sistema coincida com a extremidade final do comprimento da sombra nos equinócios*.

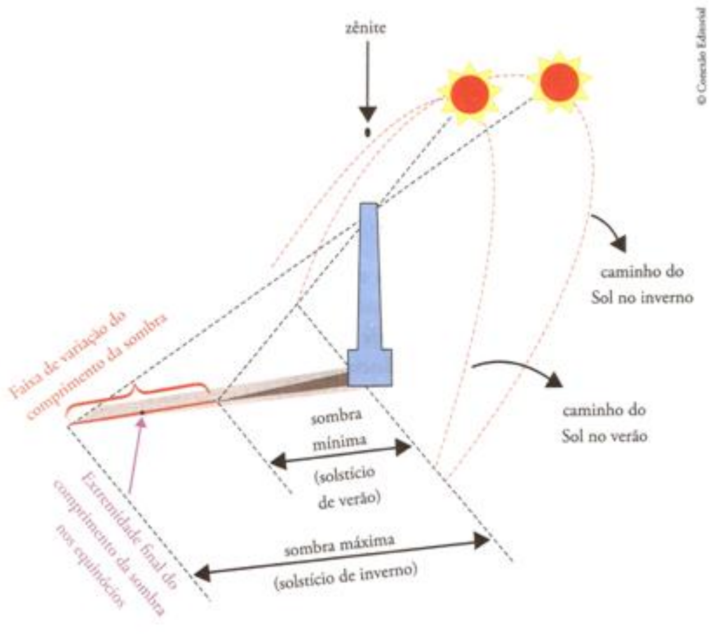


Figura 9: Construindo o modelo.

* Equinócio é o nome que se dá ao dia que marca o início da primavera ou ao dia que marca o início do outono. Segundo o dicionário Michaelis (Michaelis Moderno Dicionário da Língua Portuguesa, São Paulo: Melhoramentos, 2007), equinócio refere-se a cada uma das duas épocas em que o Sol passa pelo Equador, fazendo os dias iguais às noites em todos os países do mundo.

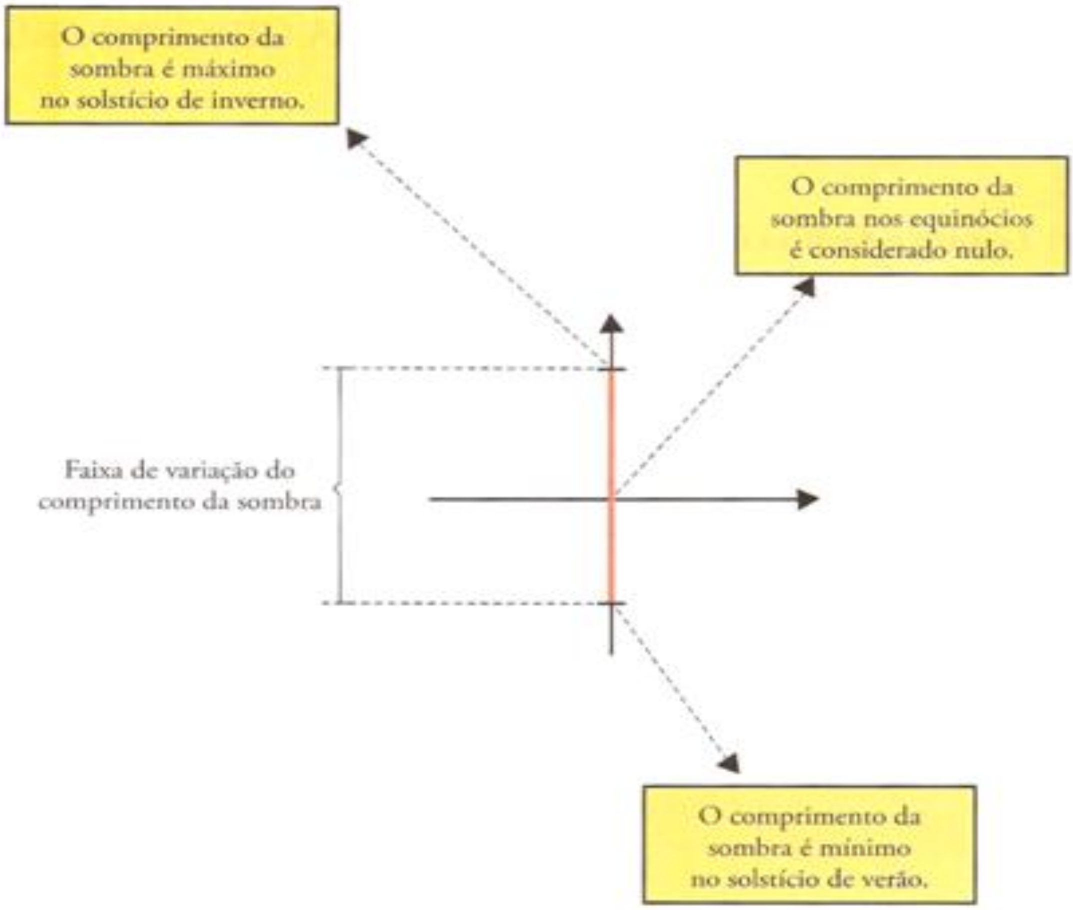


Figura 10: O sistema cartesiano e o modelo construído.

Em seguida, a fim de acompanhar a evolução do comprimento da sombra de um solstício a outro, pode-se associar o movimento do Sol ao movimento de um ponto sobre uma circunferência centrada no sistema de eixos cartesianos, de maneira que o comprimento da sombra seja definido pela distância entre a origem e a projeção do ponto sobre o eixo vertical.

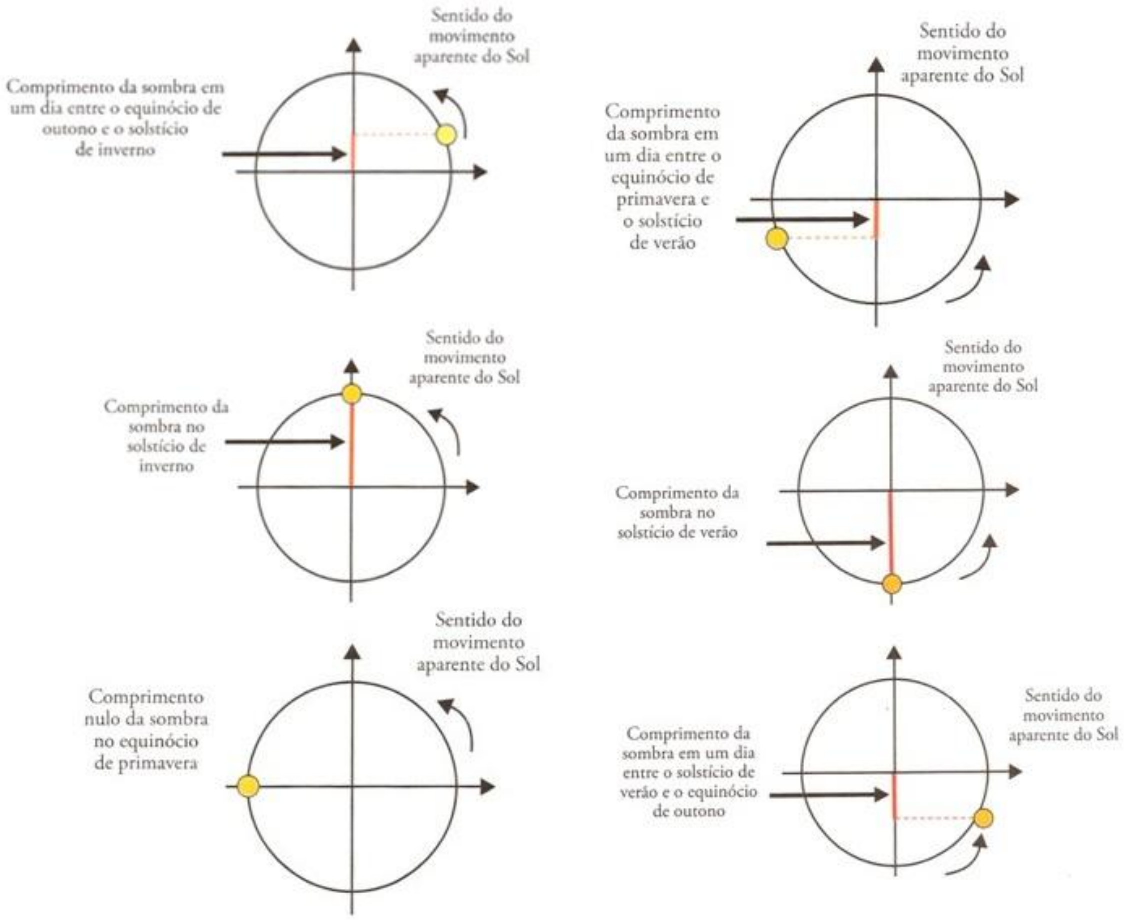


Figura 11: Projeções das sombras da estaca, medidas ao longo do ano, nos eixos cartesianos.

Assim, uma volta completa do Sol em torno da circunferência corresponderá ao período de 1 ano e, desenhando uma escala sobre o eixo vertical,será possível associar ângulos de giro do Sol a medidas de segmentos. Veja como podemos implementar uma escala simplificada no eixo vertical, medida em frações do raio da circunferência (R):

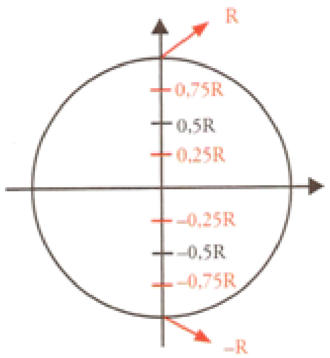


Figura 12: Frações do raio.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à definição de raio;
- à competência leitora dos gêneros textuais apresentados: narrativo e gráfico;
- às frações de um inteiro;
- a projeções.

<u>6ª atividade: Reflexão sobre o cálculo de seno e cosseno dos ângulos notáveis a partir da atividade proposta que traz as seguintes figuras:</u>

a) Ângulo de 45°.

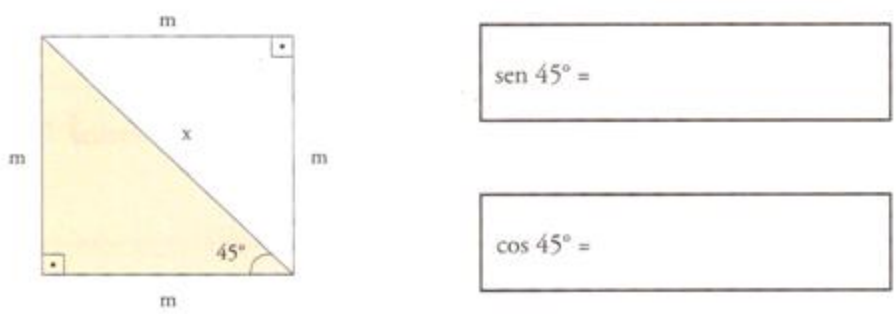


Figura 13: Figura para demonstração do sen 45° e cos 45°.

b) Ângulo de 60°.

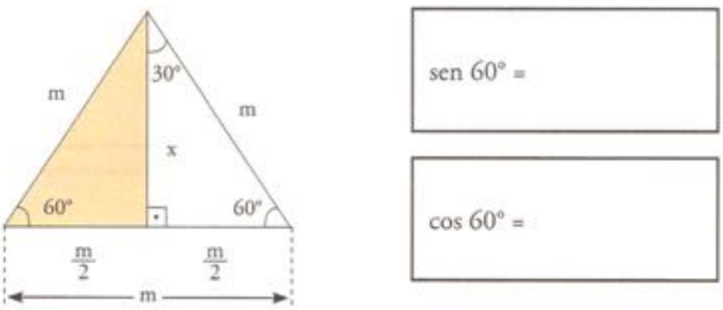


Figura 14: Figura para demonstração do sen 60° e cos 60°.

c) Ângulo de 30°.

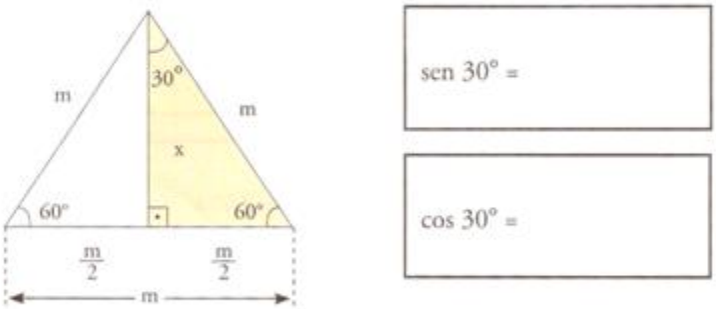


Figura 15: Figura para demonstração do sen 30° e cos 30°.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à idéia de proporcionalidade presente no cálculo das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°;
- às relações métricas no triângulo retângulo.

<u>7ª atividade extraída do Caderno do Aluno: Leitura do texto Os gráficos das funções y = senx e y = cos x</u>

Observe como as razões trigonométricas seno e cosseno podem ser associadas ao ângulo de giro de um ponto sobre a circunferência.

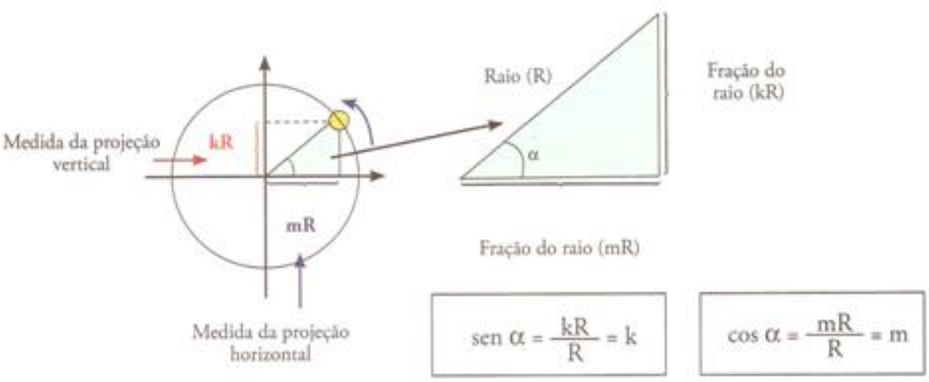


Figura 16: Figura que indica projeções de seno e de cosseno nos eixos cartesianos.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- triângulo retângulo e nomenclaturas associadas a essa figura geométrica;
- a relação das razões trigonométricas dos triângulo retângulo às medidas das projeções do ponto sobre os eixos coordenados;
- relação de Pitágoras;
- associação e construção do modelo apresentado na atividade 5.

<u>8ª atividade extraída do Caderno do Aluno: Desenho de circunferência trigonométrica:</u>

Na folha de papel milimetrado, desenhe uma circunferência trigonométrica de raio 10 cm e, em seguida, faça o que se pede.

a) Adotando a escala 1:10 cm, divida os eixos cartesianos em subunidades, como, por exemplo, de 0,1 e, 0,1.

b) Assinale sobre a circunferência a extremidade final dos arcos 30°, 45° e 60°, bem como os simétricos em relação aos eixos nos demais quadrantes. Para essa tarefa, utilize compasso ou transferidor.

<u>Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:</u>

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à escala utilizada em gráfico;
- à divisão do plano cartesiano em quadrantes;
- à localização da extremidade de arcos na circunferência trigonométrica;
- a arcos e a ângulos;
- a procedimentos de construção de gráficos.

<u>9ª atividade: Construção do gráfico das funções seno e cosseno no mesmo plano cartesiano</u>

Desenhe os gráficos das funções y = senx e de y = cosx em um mesmo sistema de eixos cartesianos.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à construção dos eixos cartesianos;
- à escolha de escala adequada nos eixos;
- à localização das imagens e dos arcos nos eixos correspondentes.

<u>10ª atividade: Leitura do texto e reflexão sobre a figura explicativa sobre o radiano</u>

"Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência."

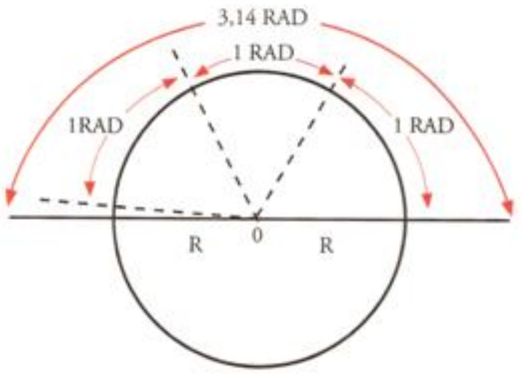


Figura 17: Figura explicativa sobre o radiano.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à competência leitora dos gêneros textuais apresentados;
- à definição de raio, de diâmetro e do número irracional π;
- às unidades de medidas utilizadas na medição do comprimento da circunferência.

As atividades selecionadas do Caderno do Aluno foram desenvolvidas de modo flexível, ou seja, levamos em conta o interesse dos alunos e as dificuldades que poderiam surgir para estender ou encurtar o tempo de execução das atividades.

4.2 - As atividades propostas pela pesquisadora, durante as intervenções

Além das atividades extraídas do Caderno do Aluno, foram elaboradas outras seis atividades que apresentamos a seguir:

a) Preencha a circunferência trigonométrica, indicando os arcos nas marcações indicadas dos demais quadrantes.

Nesta atividade, solicitei que fosse completada a circunferência apresentada abaixo. Inscrevi os triângulos retângulos para verificar se conheciam a relação trigonométricas $(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, associando-a à relação de Pitágoras.

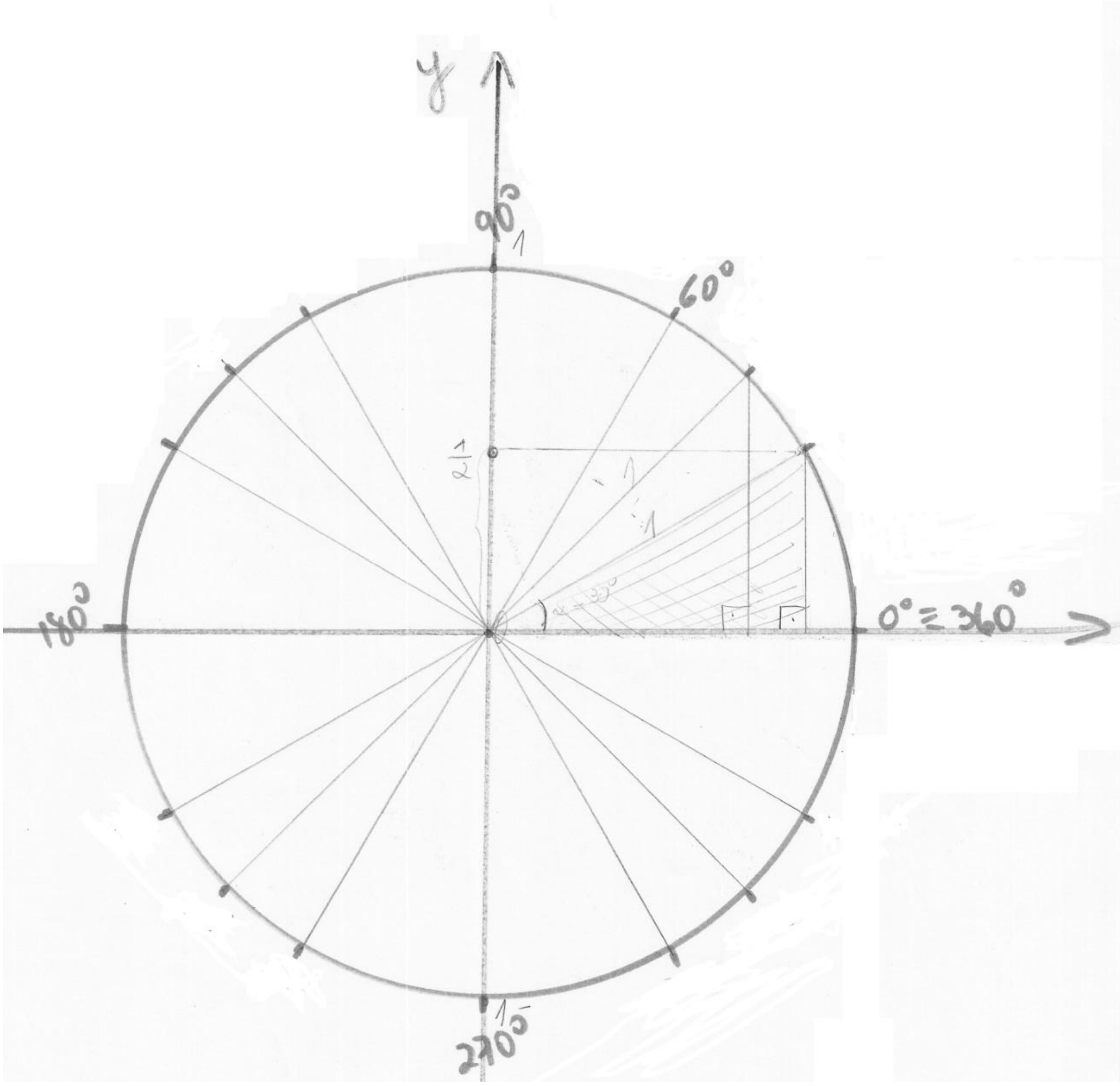


Figura 18: Circunferência trigonométrica.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à localização das extremidades dos arcos na circunferência trigonométrica;
- ao conceito de simetria;
- à relação trigonométrica: $(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

<u>**b)** Responda as perguntas, observando as projeções de seno e de cosseno na circunferência trigonométrica</u>

<u>Perguntas realizadas:</u>

Qual é o valor de seno de 30°?

E o seno de 60°?

Qual é o seno de valor maior, o de 40° ou o de 28°?

Qual é o seno de 0°?

E o de 90°?

E o de 120°?

E o de 150°?

E o de 180°?

Qual é o seno cujo arco é -1°?

Qual é o seno de 300°?

Quais são os quadrantes em que os valores de seno são negativos?

E os que tem valores positivos?

Qual é o maior valor de seno, de 300° ou o seno de 315°?

Esse número "menor raiz de três sobre dois" é maior do que "menos raiz de dois sobre dois"?

Qual número é maior "raiz de dois sobre dois ou raiz de três sobre dois"?

Seno de 300° é maior ou menor que seno de 315°?

Qual é maior, seno de 225° ou 210°?

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- ao plano cartesiano;
- à leitura das projeções dos senos e dos cossenos nos eixos cartesianos;
- a comparação entre medidas;
- a equações trigonométricas.

Verificar o conhecimento da relação trigonométrica: $(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

c) Utilize a calculadora para auxiliar na comparação entre os números irracionais: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- ao conceito de números reais;
- a estimativa;
- a simetria.

d) Utilize o transferidor para localizar o arco de 30°

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:
- a procedimento de construção de ângulos;
- a procedimento de localização de arcos na circunferência trigonométrica.

e) Atividade adaptada do Caderno do Aluno: Preenchimento de tabela que relaciona arcos assinalados às medidas de seus senos e cossenos.

Observação: Foi oferecido um pedaço de papel quadriculado em que foi construída uma tabela em que na primeira linha indicamos os arcos em graus, na segunda linha a função f(x)= sen x, e na terceira linha a função g(x)= cos x.

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:
- aos símbolos empregados na identificação de funções;
- à leitura das projeções dos senos e dos cossenos dos arcos;
- a formas de representação de funções (tabelas, gráficos, expressões matemáticas)

f) Reflexões sobre gráficos de funções trigonométricas e as mudanças nos parâmetros das equações.

y = cos x y = sen x

y = 1 + cos x y = 1 + sen x

y = 2 + sen x

Objetivos específicos de investigação relacionados aos conhecimentos prévios dos alunos:

Investigar conhecimentos prévios dos alunos relacionados:

- à modelagem de situações reais por intermédio de equações que envolvem senos ou cossenos;
- à identificação das características das funções a partir de mudança do parâmetro A dadas funções do tipo $y = A + B$ sen Cx ou $y = A + B \cos Cx$.

4.3 - Desenvolvimento das atividades, dados coletados nos encontros e primeiras análises

Em todas as atividades procurou-se investigar os *conhecimentos prévios dos alunos* em relação aos conteúdos tratados e as possíveis *dificuldades dos alunos.* Ao final da descrição de cada encontro, apresentamos uma tabela com os conhecimentos prévios observados e outra tabela em que reunimos as dificuldades encontradas por eles. Nos encontros estavam presentes a pesquisadora e os três alunos. Por esse motivo, a descrição a seguir será realizada em primeira pessoa.

4.3.1 - Primeiro encontro

Neste encontro foram entregues, aos alunos, os termos de consentimento para a filmagem. Solicitei a assinatura dos seus responsáveis, pelo fato de serem menores de idade.

Somente a primeira atividade foi realizada.

<u>1ª Atividade: Leitura do texto e desenho de gráfico imaginado.</u>

Os alunos leram juntos, em silêncio, e iniciaram um diálogo para se certificarem do que cada um havia entendido da proposta da atividade. A aluna Y tomou a lapiseira na mão e tentou iniciar a construção do gráfico, mas apresentava dúvidas sobre a ação a executar, assim como os demais. O enunciado foi relido em vários momentos deste encontro, evidenciando a dificuldade dos alunos na interpretação do texto. A aluna Y iniciou a construção do eixo das abscissas, começando com o mês de junho, mas os colegas não demonstraram concordância no que ela estava fazendo. No eixo das ordenadas, ela omitiu o intervalo numérico de 0 a 0,10cm. Não fiz qualquer comentário sobre isso e aguardei uma possível observação dos demais alunos. Para a construção do gráfico, os alunos não elaboraram tabela alguma e não utilizaram régua para auxiliar nos registros das medidas no eixo das ordenadas. Incentivei-os a trocarem mais idéias entre si e não fiz sugestão alguma. A seguir, o primeiro gráfico apresentado pelo grupo:

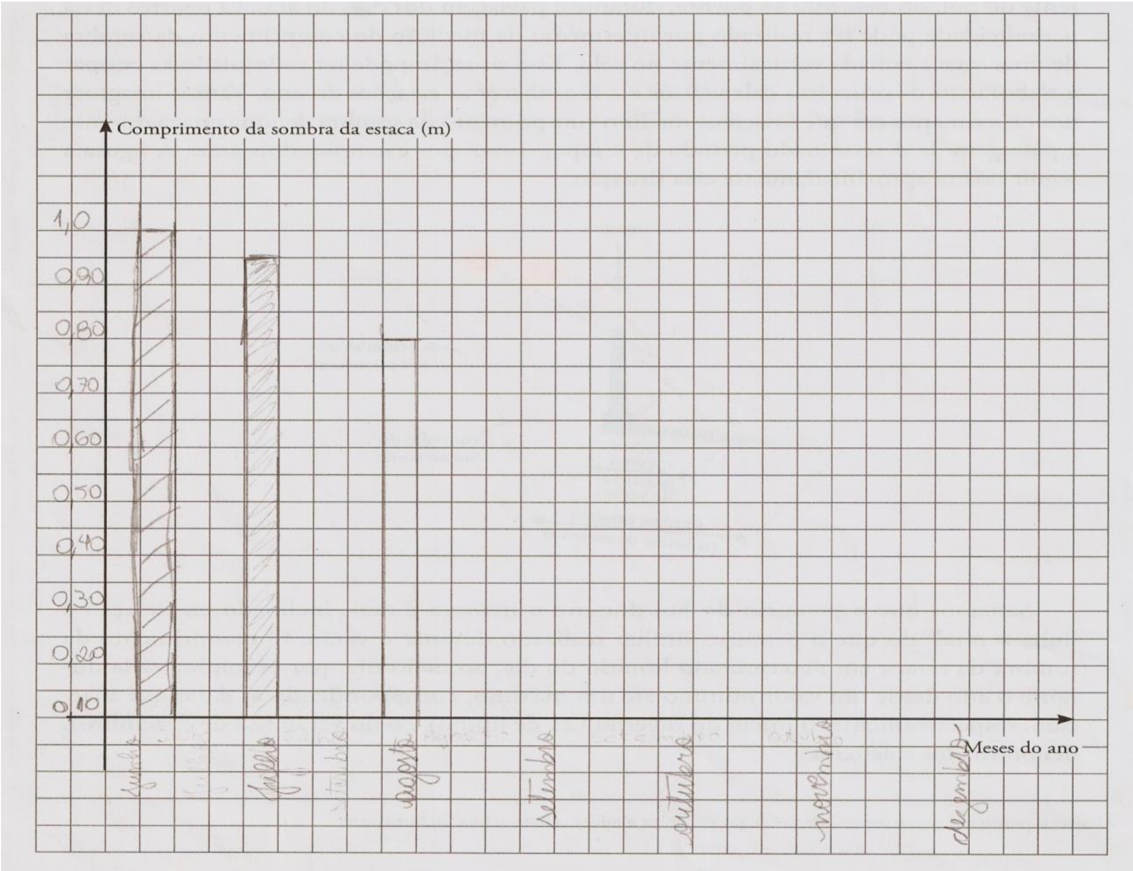


Figura 19: Gráfico de barras realizado pelos alunos.

A aluna G não demonstrava segurança no que o grupo apresentou. Ela expressou discordância quanto ao tipo de gráfico, dizendo que ele deveria ser de linhas e não de barras. Isso levou os outros alunos a refletirem e a concordarem com ela.

Os alunos decidiram fazer um gráfico de linhas; forneci outra folha para que eles não apagassem o que haviam feito e assim iniciaram o segundo gráfico pelo mês de dezembro no eixo das abscissas. Novamente foi omitido o intervalo de 0 a 0,10 m, no eixo das ordenadas.

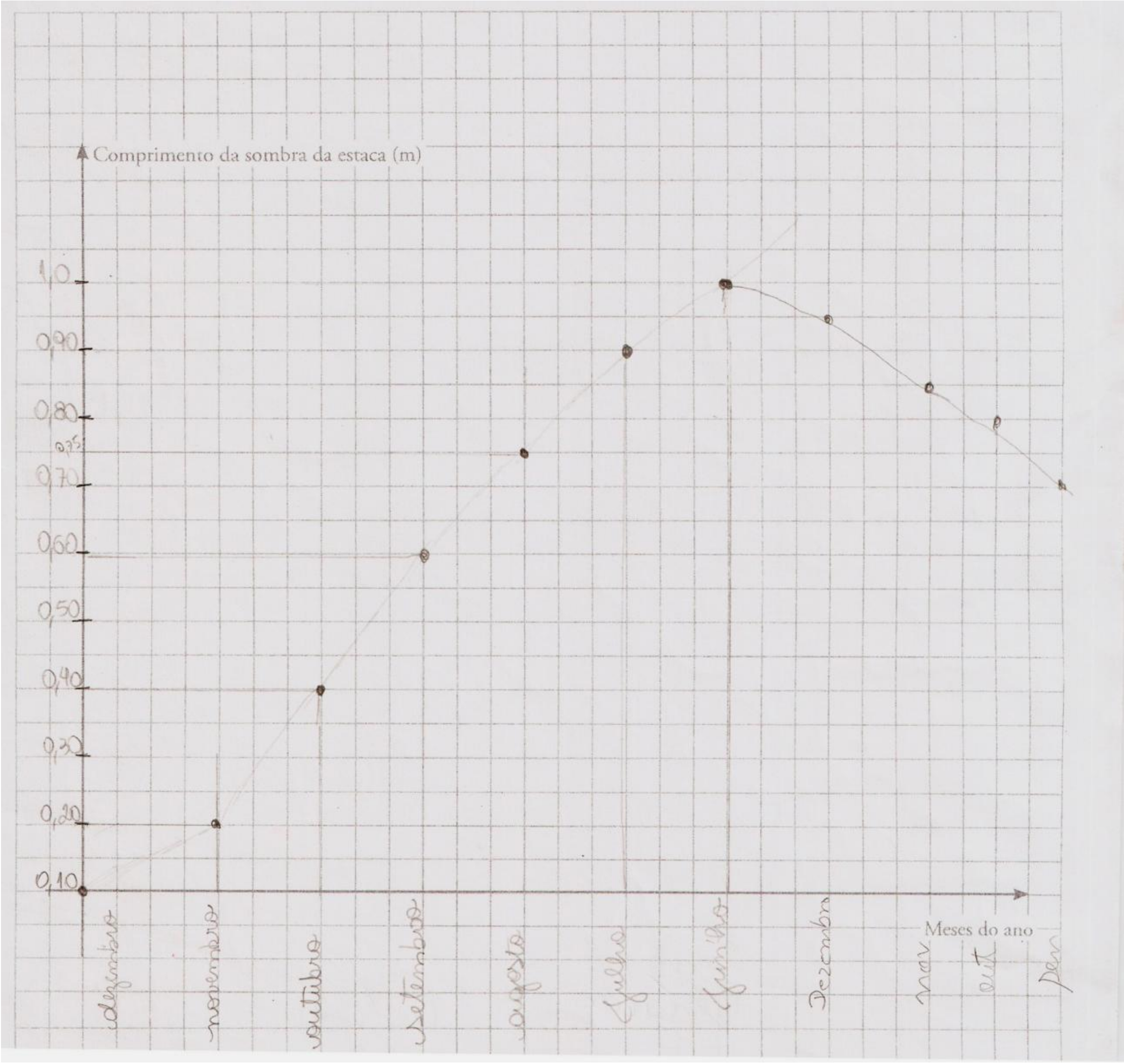


Figura 20: Gráfico de linhas realizado pelos alunos.

O enunciado foi relido mais uma vez e os alunos notaram que o gráfico não correspondia ao que havia sido solicitado, ou seja, não representava o período de dois anos. Tentei valorizar o trabalho deles dizendo que estava correto diante do que eles haviam pensado. Sugeri a eles que elaborássemos juntos um novo enunciado que correspondesse ao gráfico realizado. Essa intervenção permitiria verificar a compreensão dos conceitos envolvidos, o conjunto imagem, o período e a amplitude. Sugeri uma adaptação no enunciado de modo a contemplar o gráfico realizado.

Mas os alunos não concordaram com a minha idéia de modificar o enunciado. Demonstraram que o correto seria atender o que o enunciado do material pede. Assim, forneci a eles outra folha quadriculada e, pela terceira vez, iniciaram o gráfico, omitindo o trecho de 0 a 0,10m no eixo das ordenadas.

Indicaram os meses no eixo das abscissas da mesma forma que no gráfico anterior e reclamaram a falta de espaço para representar o trecho de dois anos. Um dos alunos tentou modificar o eixo das abscissas, mas foi criticado pela colega que o chamou de perfeccionista. Assim, não conseguiram concluir o gráfico.

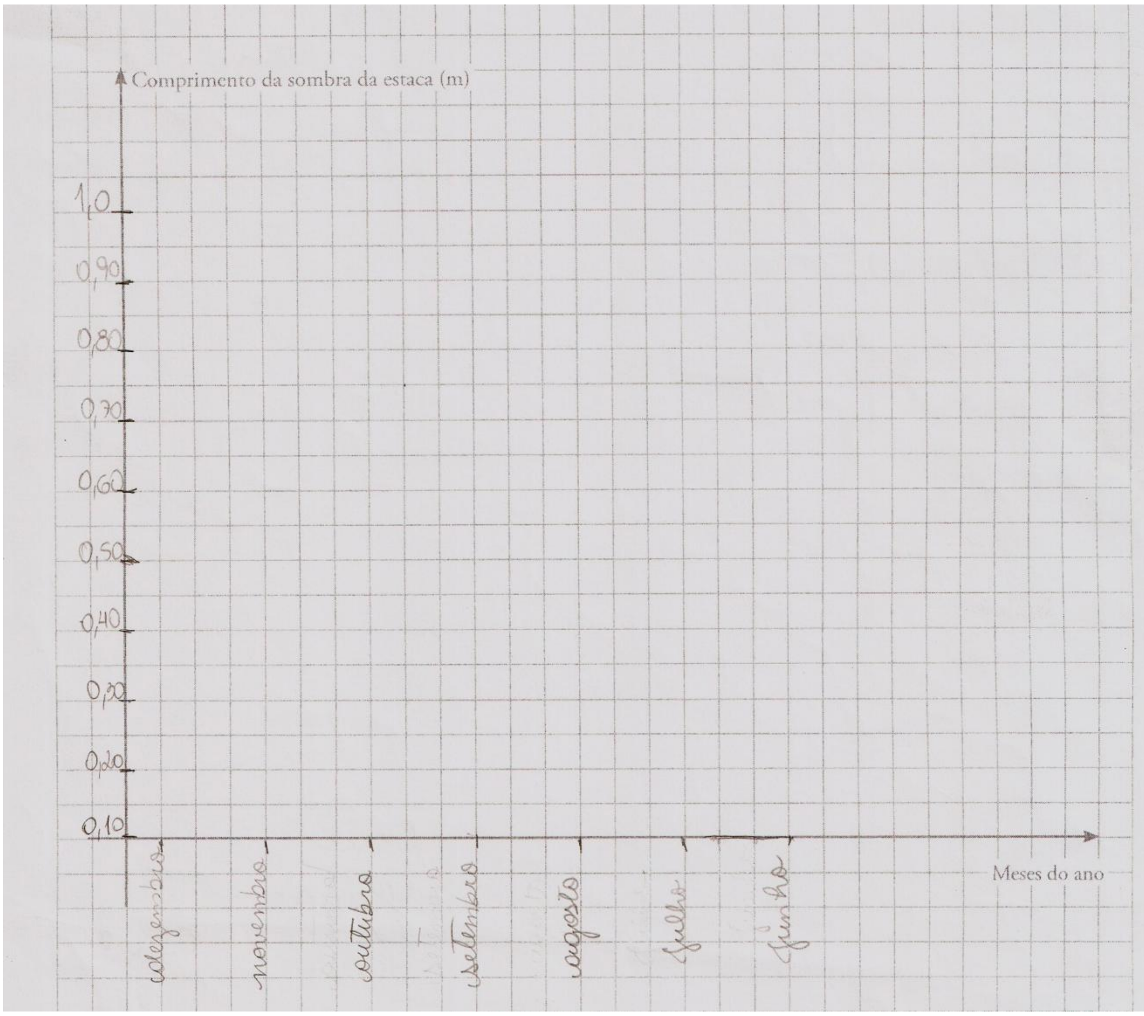


Figura 21: Tentativa, feita pelos alunos, de realização de gráfico.

Forneci uma folha quadriculada maior e pedi a eles que fizessem um esboço, sem muito compromisso com a estética, para mostrar como o gráfico ficaria, mas eles não aceitaram essa idéia. Interpretei que eles estavam cansados e decidi interromper, desligando a câmera. Para minha surpresa, iniciaram uma rica discussão sobre o traçado; tomaram o segundo gráfico na mão e utilizaram-se dele para expor idéias mais elaboradas; indicaram corretamente o período de um ano. Indicaram também o conjunto imagem, relacionando o mês de janeiro como o que teria uma sombra mínima e o mês de junho com sombra máxima. Liguei novamente a câmera e eles nem perceberam. Depois de encerrada a atividade, os alunos afirmaram que era a primeira vez que realizaram um gráfico a partir da imaginação de uma situação e que encontraram dificuldade na atividade porque costumam construir gráficos a partir de tabelas construídas, a partir de cálculo que realizam e diante de um modelo já feito pelo professor.

A seguir apresentamos algumas transcrições dos diálogos em que verifica-se a dificuldade em compreender a proposta da atividade.Os alunos não conseguiram imaginar o acompanhamento da mudança do comprimento da sombra da estaca durante o período de dois anos. Eles pareciam procurar dados no texto, como demonstra o trecho a seguir:

***C**: Vocês estão entendendo alguma coisa?*

***Y**: Tem que medir o comprimento da sombra que no verão muda de posição.*

***Y**: Tem que fazer o crescimento dela.*

***C**: Mas é só para desenhar, só?*

***Y**: Mas tem que desenhar certo né C... dã...*

No trecho a seguir, podemos perceber que era a primeira vez que os alunos faziam um gráfico a partir de algo imaginado.

***C**: É, porque tá difícil entender o enunciado. Aqui tá pedindo... a tarefa será imaginar...*

***P**: Mas, nas aulas de Matemática você nunca fez um gráfico assim a partir de sua imaginação?*

***C**: Não.*

***P**: Quando se pede gráfico que dados são apresentados?*

***C**: Ah, tipo... nunca fizemos um exercício assim...*

Os alunos apresentaram dificuldades em preparar os eixos cartesianos e iniciar o gráfico. A omissão do trecho de 0 a 0,10 m no eixo das ordenadas também chama a atenção, pois ocorreu nas três tentativas realizadas por eles. Observamos que na primeira tentativa de construção do gráfico, os alunos colocaram no eixo das abscissas os meses de junho a dezembro, em ordem crescente; na segunda tentativa, colocaram os meses de dezembro a junho, em ordem decrescente, quando perguntei qual seria o mês depois de junho, indicaram o mês de dezembro.

Para me certificar de que os alunos não tinham cometido um engano, perguntei qual seria o próximo mês e eles foram falando novembro, outubro e setembro, em ordem decrescente. Nenhum dos alunos se espantou com o fato de aparecer o mês de dezembro em seguida ao mês de junho. Já na terceira tentativa de construção do gráfico os alunos indicaram o primeiro mês dezembro e os demais em ordem decrescente, parando no mês de junho. Não me ocorreu, no momento da realização da atividade, perguntar a eles qual seria o primeiro e o último mês a ser indicado no eixo das abscissas. Essa possibilidade de intervenção surgiu no momento da análise e acredito que poderia ter contribuído para que os alunos refletissem melhor sobre o período do gráfico.

No trecho a seguir, os alunos demonstram o reconhecimento da periodicidade:

***P**: G, quer dizer alguma coisa? O que você acha que aconteceria se fossem representados dois anos de movimento?*
***C**: Ah, ele ia aumentar e diminuir...*
***G**: Aqui não tá certo porque aqui tá o gráfico de um ano só e pede de dois anos.*
***C**: Acho que ele vai decaindo e aumentando.*
***P**: Decaindo e aumentando de acordo com o quê?*
***C**: De acordo com o passar dos meses, do horário e de com o verão e o inverno.*

Os alunos demonstram que costumam seguir um modelo padronizado para a construção de gráficos, possivelmente, de forma mecanizada, como mostra o trecho a seguir:

***P**: O que está te incomodando?*
***Y**: Essa coisa de imaginar o gráfico... Não tem conta nenhuma prá fazer... como é que pode saber se está certo?*

No trecho a seguir, observamos o compromisso explícito com a execução da atividade, pois os alunos não aceitaram a idéia de ajustar o enunciado ao gráfico que expressava somente uma parte do período de dois anos; propus o encerramento da atividade, mas os alunos estavam motivados a terminá-la;

percebemos que o conceito de período da função estava em processo de construção e por esse motivo eles não conseguiram construir o gráfico.

***P**: Podemos considerar que não está errado diante do que vocês pensaram, mas diante do enunciado sim, né? Tá certo? Então a gente não vai desprezar este, concorda?... Porque ele está certo, vocês partiram de uma lógica que não era a do enunciado, mas de acordo com o que vocês tinham pensado...*

***C**: Não a gente vai fazer outro gráfico igual a esse daqui só que de dois anos de dezembro até junho e de junho e de dezembro até junho... Não! (o aluno se atrapalha e todos discutem sobre o eixo das abscissas)*

***C**: E depois? Vai fazer dois riscos não é? Junho até dezembro e depois junho até dezembro...*

O aluno C toma o lápis da aluna Y e começa a fazer o gráfico. E quando se vê em dificuldade devolve o lápis para a aluna Y.

Os dados observados neste 1º encontro, relacionados aos conhecimentos prévios, foram reunidos na tabela a seguir:

Conhecimentos prévios	**Tipo de conteúdo**
Competência leitora do texto narrativo	Procedimento
Relação entre grandezas	Conceito
Plano cartesiano, tipos de gráficos, grandezas	Fatos, conceitos e procedimentos
Periodicidade das estações do ano	Fatos e conceitos
Construção de gráfico a partir de um modelo apresentado	Procedimento
Números decimais e medidas de comprimento	Fatos e conceitos
Compromisso com a atividade proposta	Atitudes

Tabela 4: Conhecimentos prévios observados no 1º encontro.

Dificuldades demonstradas pelos alunos	**Tipo de conteúdo**
Representar idéia imaginada em gráfico	Procedimento
Omissão do intervalo de 0 a 0,10cm	Conceito
Interpretação do texto	Procedimento
Construção de gráfico a partir de situação imaginada	Conceito e procedimento

Tabela 5: Dificuldades observadas no 1º encontro.

4.3.2 - Segundo encontro

Neste encontro foram desenvolvidas seis atividades selecionadas do Caderno do Aluno. Deixei sobre a mesa alguns materiais, como régua, calculadora, transferidor, lápis, borracha, papel e a atividade realizada no encontro anterior.

A aluna G se transferiu para outra escola e foi substituída pela aluna E.

Os alunos trouxeram os termos de consentimento para a filmagem, assinados pelos seus responsáveis e cujo modelo consta em nossos anexos.

<u>2ª Atividade:</u>

<u>Observação de gráfico e do texto explicativo sobre os conceitos de amplitude e de período e proposta de escrita do período e da amplitude do gráfico da 1ª atividade.</u>

Antes de apresentarmos a resposta dada pelos alunos, consideramos importante apresentar o diálogo ocorrido. Nele observamos que a aluna Y já demonstra a compreensão do conceito de período e o aluno C ainda não. Pode-se perceber um exemplo de criação de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), proporcionada pela atividade.

Para responder a pergunta os alunos retomam a leitura da 1ª atividade.

***P**: Mas não dá prá imaginar?*

***C**: Mas durante o inverno a sombra da estaca aumenta... durante o verão...*

***Y**: O período são dois anos* (A aluna Y refere-se ao enunciado da 1ª atividade)

***P**: Deixa eu mostrar prá E.*

***C**: É um inverno... não...então ó... o inverno, o verão desce..*

***Y**: São dois anos. Em dois anos tem dois invernos e dois verões!* (A aluna Y reafirma sua compreensão do enunciado)

***C**: Então! Mas o que acontece no inverno?*

Mesmo observando que a aluna Y respondeu corretamente, não fiz comentário algum para que a discussão prosseguisse.

***P**: De que mês a que mês daria um período?* (Fiz essa pergunta para evidenciar o conceito de período de uma função periódica)

***C**: De dezembro até junho ela vai aumentando e de junho...*

***Y**: De dezembro a dezembro ela... dá uma curva.*

***C**: De dezembro até junho ela aumenta e de dezembro até junho de novo ela abaixa... de junho ela levanta até dezembro e ela vai abaixando.* (Aqui, o aluno dá sinais de que ainda está confuso, pois o correto seria o aluno dizer que de junho até dezembro "ela abaixa").

Os alunos apresentaram a seguinte resposta:

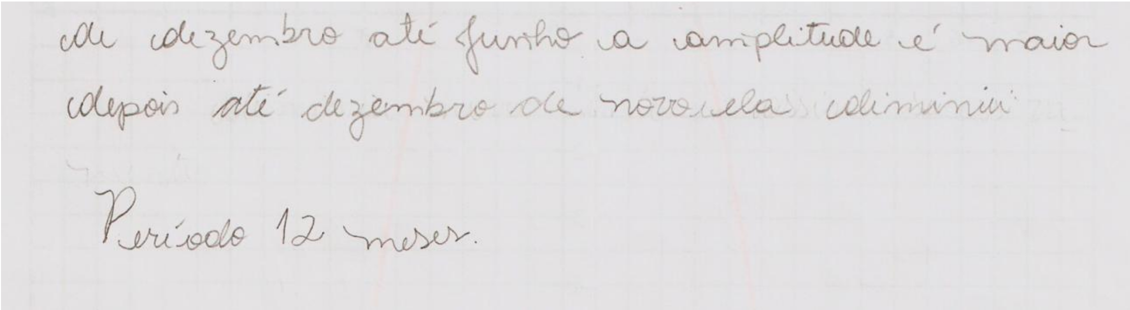


Figura 22: Resposta da segunda atividade, dada pelos alunos.

Esta resposta dos alunos demonstra que o conceito de amplitude não foi compreendido. Solicitei a eles que relessem o texto que define o que é amplitude. Os alunos leram, mas não fizeram alteração alguma na resposta que apresentaram.

Percebo que o significado da palavra *período*, ora empregada para indicar a passagem de tempo de dois anos, ora empregada como um conceito matemático, precisa ser esclarecido aos alunos, pois isso pode ter dificultado a compreensão da proposta da atividade.

3ª atividade: Observação de gráficos e leitura do texto explicativo sobre imagem de uma função.

Nesta atividade os alunos demonstraram familiarização com a forma de identificar o conjunto imagem de uma função. Pareciam associar esse conceito a algo armazenado em suas memórias. A seguir, a transcrição dos diálogos nos auxiliar nessa percepção:

***C**: Então, essa daqui é a conta.* (O aluno apontava para o conjunto imagem indicado abaixo do gráfico da 2ª atividade) *O resultado da conta você vai colocando aqui, ó. Aí que você vai montando o gráfico... pela conta da função... não é?*

***P**: O que você acha, Y?*

***Y**: Eu também acho que é isso.*

***C**: Eu tive isso no ano passado... era assim...*

***Y**: Eu não lembro muita coisa sobre função do ano passado...*

***P**: Não lembra? E esse ano, vocês já começaram a aprender função?*

***C**: Não!*

***Y**: Não, a gente ainda não viu função.*

<u>4ª atividade: Escrita de período, imagem e amplitude das funções a partir de gráficos apresentados.</u>

O trecho a seguir mostra a tentativa dos alunos em associar os conceitos apresentados a algo armazenado em suas estruturas cognitivas. Pode-se perceber que os conceitos estão em construção.

***P**: Onde é que estava o conjunto imagem aí, neste gráfico?*

***C**: Nestas linhas aqui...* (o aluno apontava para o eixo das abscissas)

***P**: Nestas linhas? ... É isso, Y?*

Os alunos silenciam.

P: *E?* (Até este momento do encontro a aluna E não havia se manifestado) *Você lembra o que é conjunto imagem?*

***C**: Eu nunca tive conjunto imagem.*

***P**: Não?*

Eles releram o texto e observaram novamente os gráficos da atividade anterior.

***C**: Aqui é de 1 a 1... é isso? Aqui é de 1 prá 1... y é... Pode fazer a resposta...* (O aluno procurou imitar a apresentação do conjunto imagem da atividade anterior)

***P**: Olha, aí tá pedindo três coisas... período, a imagem e a amplitude...*(O aluno C toma a liderança)

***P**: Meninas, se vocês quiserem falar alguma coisa... quais são os y que entraram na construção desse gráfico?*

***E**: Dois e...*

No trecho a seguir procuro reforçar a idéia de que o conjunto imagem é um intervalo numérico. Observa-se que os alunos expressaram dúvida na utilização do sinal da desigualdade.

P*: Que números y entraram na construção?*

Y*: De menos um e um.*

P*: De menos um até...*

Y*: Um.*

P*: Isso mesmo.*

P*: Aqui faltou um sinal não é? Entre o y e o 1. Qual é o sinal que faltou aí?*

E*: Não, não é do outro lado?*

Os alunos expressaram dúvida para utilizar o símbolo ≤ (menor ou igual a).

C*: Aqui é de menos 1 prá 1.*

A seguir a resposta apresentada por eles.

a)

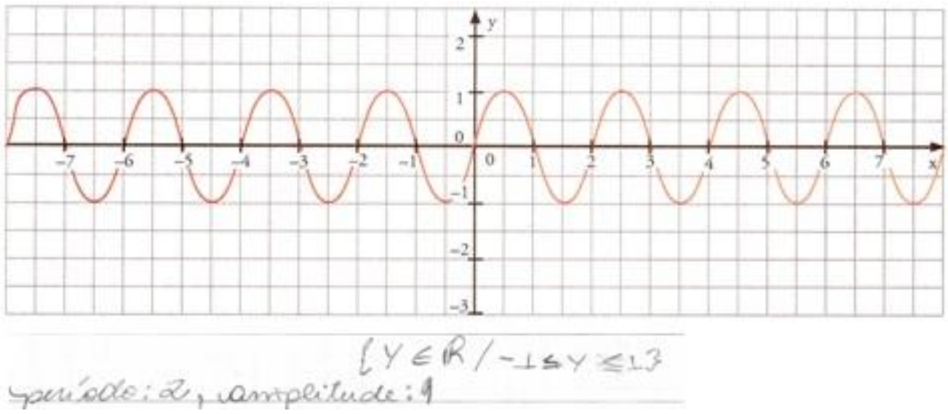


Figura 23: Resposta dos alunos ao primeiro gráfico para a indicação do período, imagem e amplitude

b)

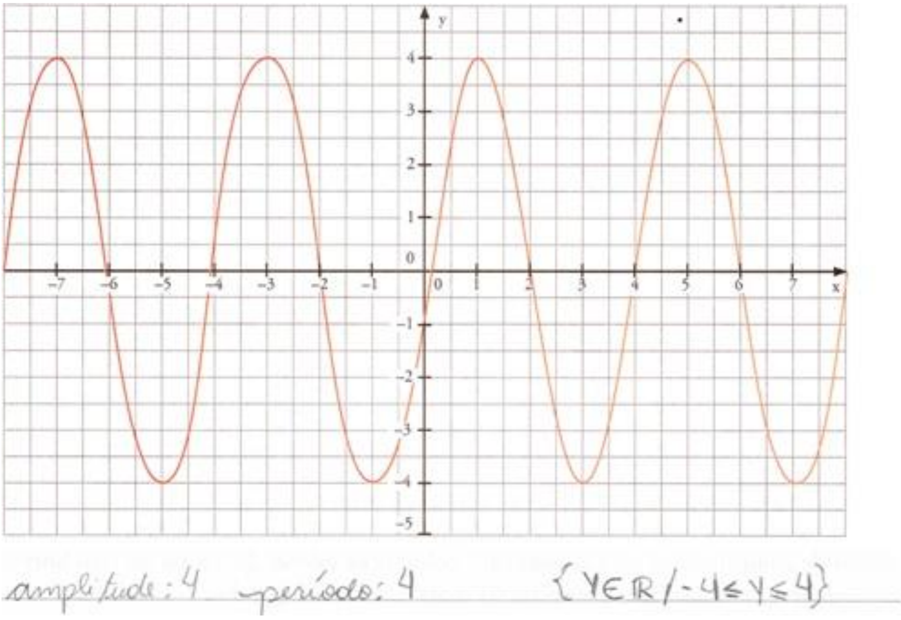


Figura 24: Resposta dos alunos ao segundo gráfico para a indicação do período, imagem e amplitude.

c)

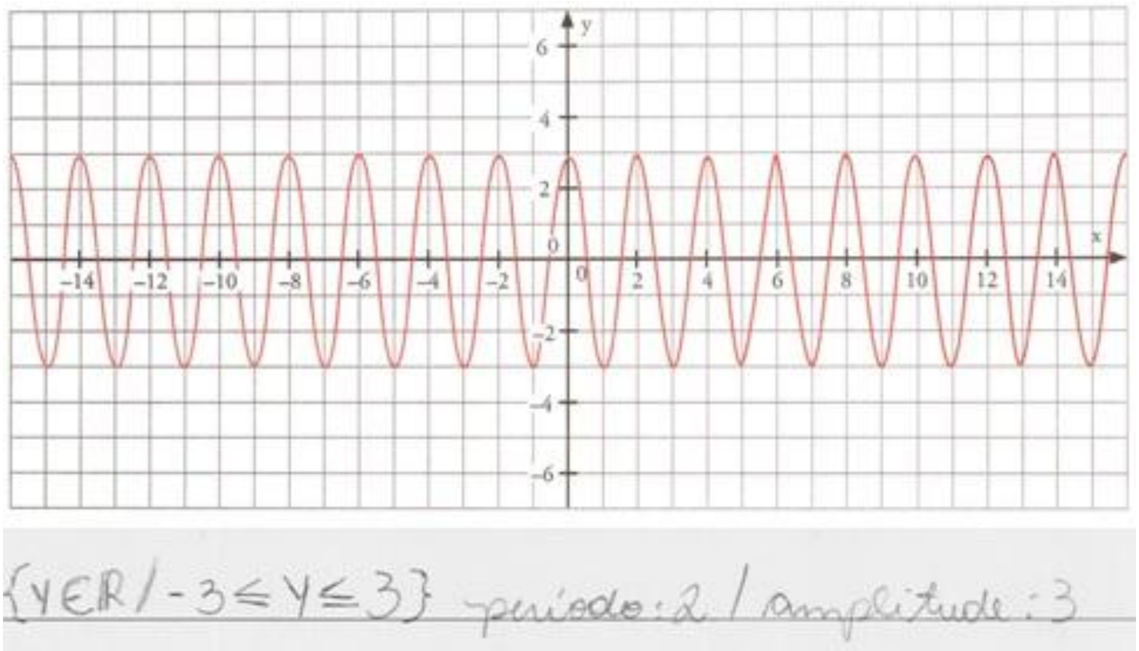


Figura 25: Resposta dos alunos ao terceiro gráfico para a indicação do período, imagem e amplitude.

<u>5ª atividade: Leitura do texto Construindo o modelo</u>

Após a leitura, os alunos silenciaram. Assim, reforcei a idéia do modelo construído e passei para a <u>atividade **a** do item **4.2**</u>.

Os alunos utilizaram-se do transferidor que estava sobre a mesa para medir os ângulos. A seguir, apresentamos o trecho do diálogo estabelecido durante esta intervenção.

P*: A E, falou que era 45, não é E, aonde?*

Y*: Aqui!*

P*: Então põe, marca aí 45!*

E*: E... se... colocasse o transferidor ao contrário... não ficaria melhor?*

Os colegas não acataram a sugestão da E. Preferiam contar de 10 em 10 graus.

P*: O que você sugeriu, E?*

E*: Colocar o transferidor ao contrário, assim eles vêem o valor certo... Só que tá invertido os números... e eles tão calculando... Por que vocês não colocam o transferidor ao contrário?*

Os alunos Y e C aceitaram a sugestão dada e completaram a circunferência.

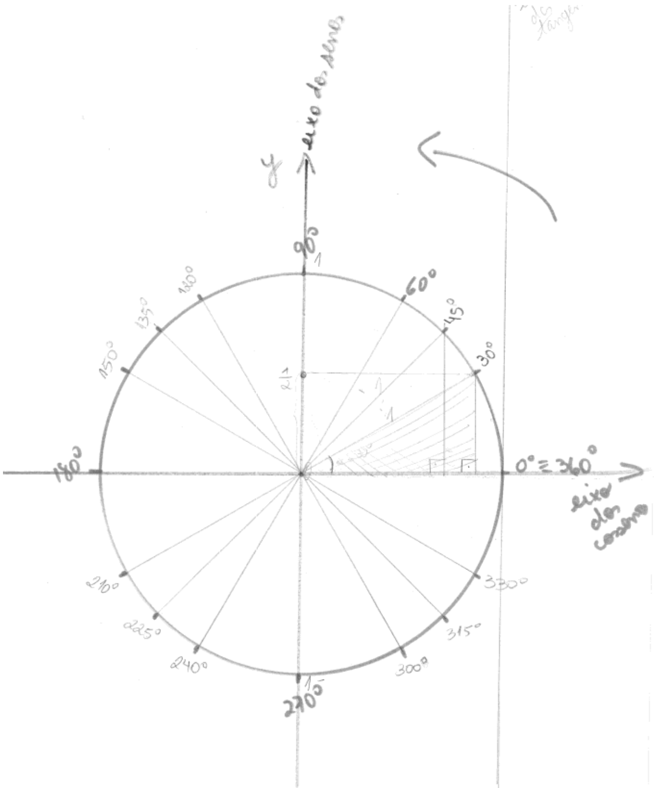


Figura 26: Circunferência trigonométrica completada pelos alunos.

<u>6ª atividade: Reflexão sobre o cálculo de seno e cosseno dos ângulos notáveis a partir da atividade proposta que traz as figuras indicando ângulos de 30°, 45° e 60°.</u>

Folheamos as páginas em que apareciam as três figuras utilizadas para os cálculos e chamei a atenção deles para o fato das medidas estarem indicadas por letras e não números. Os alunos revelaram que nunca haviam calculado da maneira semelhante a da proposta no Caderno do Aluno.

<u>7ª atividade: Leitura do texto Os gráficos das funções y = senx e y = cos x</u>

Fizemos, juntos, a leitura do texto, apresentei uma circunferência cujo centro coincidia com a origem do plano cartesiano, confeccionada em cartolina amarela, como pode ser visto na figura abaixo. Nela, são apresentados os valores dos senos e dos cossenos de alguns arcos da 1ª volta da circunferência trigonométrica.

Figura 27: Fotografia com os materiais utilizados.

Após esta atividade, tomei a circunferência trigonométrica, confeccionada em cartolina, e propus a <u>atividade **b** do item **4.2**</u>. Os alunos responderam corretamente a quase todas essas perguntas. Quando perguntei "Qual é o seno cujo arco é -1°?", encontraram dificuldade em responder. O diálogo a seguir mostra essa dificuldade:

C: *Menos 1?*

P: *É.*

C: *É o 180°, não é?*

P: *180° não tem o seno valendo zero?*

C: *É.*

Y: *Então é o 240...*

P: *240 tem seno valendo menos raiz de três sobre dois... e qual é o arco cujo valor de seno é menos 1? Em qual desses arcos aí o seno vale menos 1?*

C: *270°?*

P: *270°! Tudo bem?*

Perguntei a eles o que significa quadrante. (Eu pretendia utilizar esse conceito em perguntas futuras).

P: *Vocês sabem o que são quadrantes?*

C: *É esse daqui* (o aluno apontou para o 2º quadrante)

Y: *O quadrante tem os quadros?*

P: *Qual é o primeiro quadrante do plano cartesiano?*

C: *É raiz de dois sobre dois ou 1?*

Y: *Não sei... o professor passou isso prá gente a semana passada...*

P: *Mas quadrante... vocês sabem o que é?....É uma região do plano cartesiano... Qual é o primeiro quadrante?* (Apontei para ele na cartolina)

C: *De zero até noventa graus.*

(Os alunos identificaram os demais quadrantes corretamente)

P: *Mas isso o professor passou a semana passada?... ou vocês já sabiam?*

E: *O professor passou prá gente fazer o gráfico.*

Y: *Eu nunca estudei isso.*

P: *Quais são os quadrantes que tem os valores de seno negativos?*

C: *180...*

E: *O 3 e o 4.*

P: *O 3 e o 4. Certo. E quais os quadrantes que tem os valores de seno positivos?*

C: *Do zero até 180.*

P: *Quais quadrantes?*

E: *1 e 2.*

P: *1 e 2, certo. Só mais uma pergunta, qual é o maior valor de seno, seno de 300° ou seno de 315°?*

Y: *Trezentos graus... tem valor negativo... quanto menor o negativo maior o valor.*

Os alunos expressam dúvida.

***P**: Então vou repetir, olha... (repito a pergunta)*
***C, Y, E**: 300°.*
***P**: O maior valor é de 300°?*
***E**: Sim.*
***P**: Esse número menos raiz de três sobre dois é maior que esse daqui menos raiz de dois sobre dois?*

Os alunos silenciam...

***C**: Não... não, sabe por quê...porque aqui é raiz de três e tá abaixo da raiz de dois.*
***Y**: Ah... é verdade...*
***P**: Como é que se olha se uma fração é maior que a outra?*
***C**: Não... porque...porque é assim ó... raiz de três... aí o dois e o três...*

Os alunos apresentam dificuldade em verbalizar o que estão pensando. Então proponho a comparação dos números irracionais na parte positiva do eixo das ordenadas.

***P**: Vamos comparar estes daqui, qual é maior raiz de três sobre dois ou raiz de dois sobre dois?*
***C**: Raiz de três sobre dois.*
***P**: Por que aí raiz de três sobre dois é maior?*
***C**: Porque a raiz de três é nove e a de dois é quatro.*
***P**: Raiz de três é nove?*
***C**: Não!*
***E**: Raiz de três é nove?!*
***C**: Não. (A aluna Y sorri)*
***P**: Vocês tem uma calculadora aí, olha. Se vocês quiserem podem fazer com a calculadora.*

Proponho a atividade de comparação dos números utilizando a calculadora. Atividade **c** do item **4.2**.

P: Como é que a gente faz prá saber o valor aproximado de raiz de três sobre dois?

Y: 1,7 deu um número...

P: O que é 1,7, o que você fez prá achar esse valor?

Y: Eu fiz raiz quadrada de três...

P: Raiz quadrada de três? Mas agora não tem que dividir por dois? Não é raiz de três sobre dois?... Olha que número deu.

C: Zero vírgula oito.

P: 0,86666... não é?

C: Mas só o último número.

P: Como assim?

E: É aproximadamente.

Alguns dados coletados neste encontro.

Conhecimentos prévios	**Tipo de conteúdo**
Conceito de período e imagem de função periódica	Conceito
Construção de gráfico	Procedimento
Adoção de escalas nos gráficos	Conceito e procedimento
Representação de intervalos numéricos por meio de conjuntos	Fato, conceito e procedimento
Uso de símbolos matemáticos	Fatos
Razões trigonométricas de ângulos notáveis	Fatos, conceitos, procedimento
Quadrante	Fato, conceito
Aproximação de números reais com infinitas casas decimais	Conceito e procedimento

Tabela 6: Conhecimentos prévios observados no 2º encontro.

Dificuldades demonstradas pelos alunos	**Tipo de conteúdo**
Emprego correto do símbolo de desigualdade	Fato
Compreensão da fração como divisão em partes	Conceito
Comparar números fracionários	Conceito e procedimento

Tabela 7: Dificuldades observadas no 2º encontro.

4.3.3 - Terceiro encontro

Neste dia, entramos na biblioteca e parecia que o ambiente estava adequado para a nossa coleta. No entanto, fomos surpreendidos com o barulho, que vinha do pátio ao lado, do ensaio de uma dança que seria apresentada por alunos da escola. Mas este barulho não impediu nosso trabalho, embora possa ter interferido. Solicitamos aos alunos que folheassem as páginas do Caderno do Aluno até que chegassem à seguinte atividade:

<u>8ª atividade: Desenho de circunferência trigonométrica</u>

Os alunos releram o enunciado, demonstrando que não sabiam como começar a atividade.

Trecho do diálogo ocorrido durante a atividade:

E: *Uma circunferência...*

P: *Uma circunferência... e a dúvida... qual é?*

Y: *Eu não consigo fazer...*

E: *Faz um círculo em volta dessa linha!* (a aluna apontava para o eixo das abscissas)

P: *Vocês sabem a diferença entre circunferência e círculo?*

E: *Alguém já deve ter me falado, mas eu não lembro.*

P: *Você já viu, C?*

C: *Se eu vi, eu não lembro.*

P: *Circunferência ... é... a "borda do círculo". Círculo tem todo aquele interior e a circunferência é só a borda.*

Y: *Eu tinha falado isso agora há pouco, mas eu achei que tinha errado.*

P: *Você vai fazer a mão livre?!*

Y: *É... perfeito não vai sair, né.*

P: *Mas...*

C: *Deixa eu ver...* (o aluno tomou a folha e o transferidor da mão da aluna Y)

P: *O que vocês acham?*

P: *Se vocês quiserem cada um pode fazer de um jeito... cada um em uma folha...*

O aluno C continuou o desenho e eu ofereci uma folha para cada uma das outras alunas.

P: *O que você apagou aí, E, por que agora você tá mudando?*

***E**: Não... é que eu apaguei... aqui embaixo seriam os negativos.*

Os alunos releram o enunciado.

***P**: O que é arco?*

***E**: Você tinha falado da outra vez* (a aluna se referiu ao encontro passado)

***P**: Você sabe o que é arco?*

***C**: É esse daqui... é uma parte só não é... desse x e y... essa parte aqui, ó.*

***P**: É um pedaço de "borda".*

Propus a atividade **4.2 d.**

***P**: E aí... Onde é que está o arco de 30°?*

***C**: É aqui?*

O aluno encontrou um ponto cruzando 0,3 no eixo das abscissas com 0,3 no eixo das ordenadas.

***P**: Aonde? Como é que você achou esse lugar?*

***C**: Com o três.*

***P**: Como assim, você pegou um ponto?*

***C**: É do eixo x e do eixo y.*

***P**: Aqui!*

***C**: É.*

***P**: Você acha que é aí o 30°? É?*

***C**: Eu acho que é.*

A seguir, a figura desenhada pelo aluno C:

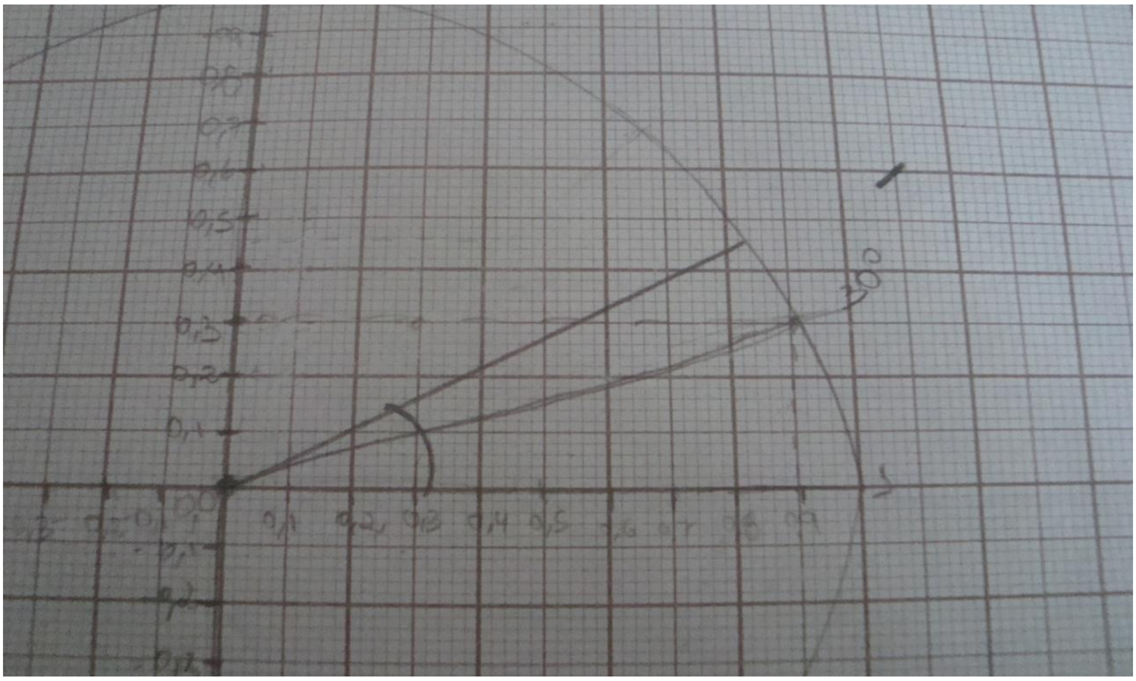


Figura 28: Construção da circunferência feita pelo aluno C.

***P**: E o 45°?*

(O aluno C ficou pensando e não respondeu)

***P**: E você Y, onde você acha que é o 30°?*

***Y**: Olhando pela reguinha aqui eu imaginei que no eixo y é o um e no eixo x é o três... no um não ... no zero... porque tá meio estranho no um* (a aluna queria indicar que deveria sair da origem do sistema de eixos)

***P**: Você já construiu alguma vez assim uma circunferência... indicando os graus, os ângulos?*

***Y**: Não.*

***P**: E você E, já fez?*

***E**: Se eu fiz eu não me lembro. Talvez eu tenha feito sim... no ano passado...*

***P**: Por que você fala muito do ano passado, você viu trigonometria no primeiro ano?*

***E**: É... ou foi no fundamental... eu lembro de ter visto, mas não lembro em que série.*

***P**: Mas e seno, cosseno e tangente. Vocês acham que aí vão aparecer algumas coisas sobre seno, cosseno e tangente?*

***C**: Parece que... tem os ângulos...*

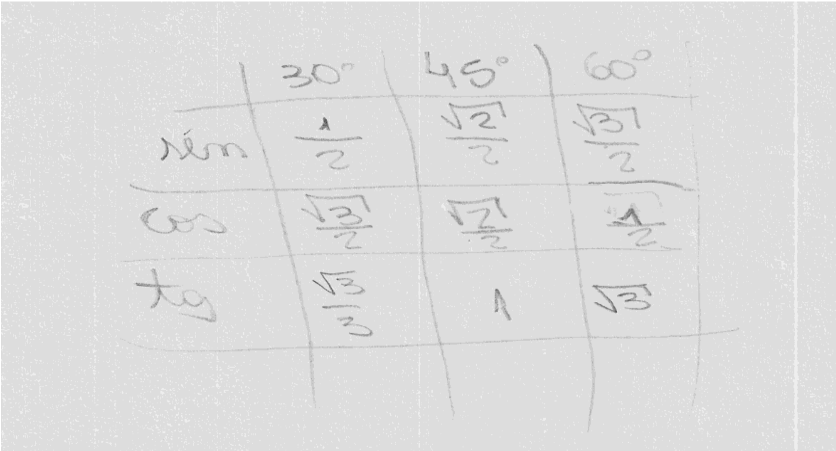
***P**: E vocês lembram alguns desses valores de memória? Por exemplo, seno de 45°...*

***P**: E você E, lembra, qual é o valor de seno de 45°?*

***E**: Só fazendo a tabela...*

***P**: Ah... faz a tabela aqui... por favor.*

A aluna E, apresentou a seguinte tabela:



	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Figura 29: Tabela com razões trigonométricas feita pela aluna.

***P**: Prá lembrar você precisa fazer a tabela?*

***E**: De cabeça eu não sei.*

***P**: Você já viu essa tabela, C? E vocês também precisam fazer a tabela prá lembrar?*

***P**: O que foi, Y?*

***Y**: É que ela fez raiz quadrada sobre dois e é só um sobre dois.* (pareceu-me que a aluna Y também tinha o hábito de fazer essa tabela, pois estava corrigindo a colega)

***E**: É... eu apaguei e coloquei de novo... Isso aqui é mais uma musiquinha que eu tava lembrando...*

A seguir, são apresentadas as circunferências desenhadas pela outras alunas.

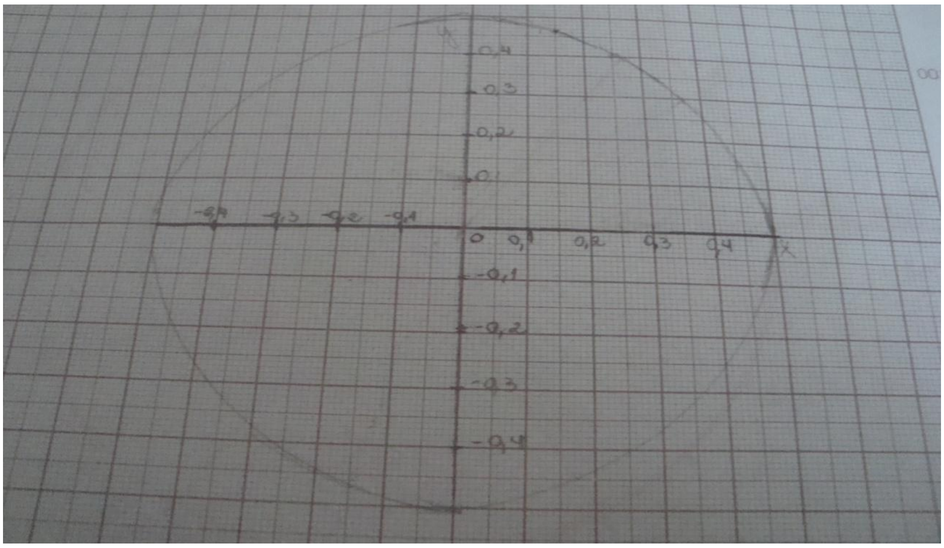


Figura 30: Construção da circunferência feita pela aluna E.

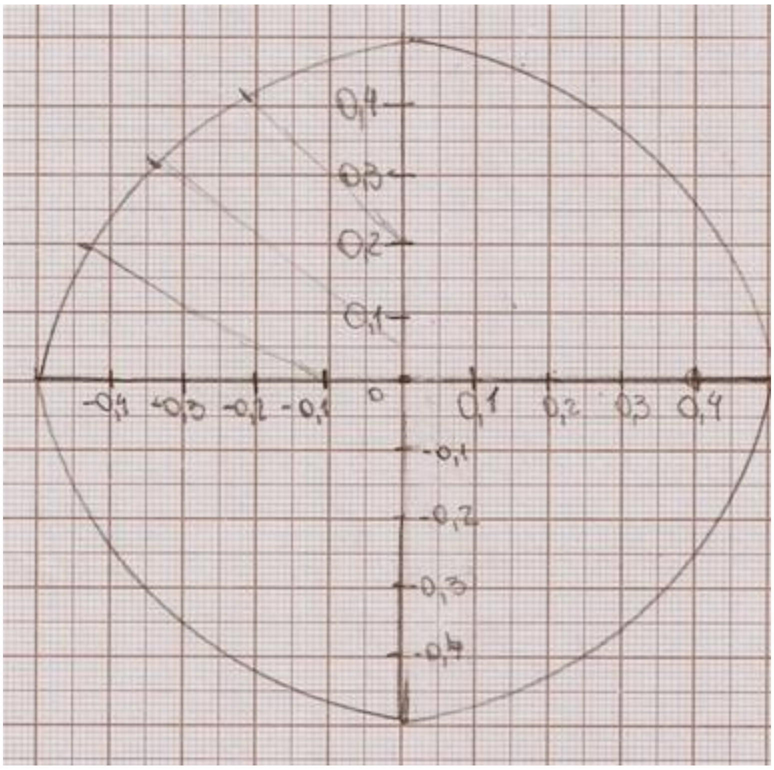


Figura 31: Construção da circunferência feita pela aluna Y.

Os alunos revelaram que não haviam aprendido o procedimento de construção de circunferência com o uso de transferidor. Durante a análise do encontro, percebi que poderia ter oferecido um compasso. Com isso, outros conhecimentos prévios poderiam ser revelados.

Decidi usar o transferidor para mostrar a eles como proceder na construção da circunferência. Iniciei indicando o ponto do centro da circunferência. Depois fiz o traçado delimitando a região do círculo.

<u>Atividade **e** do item **4.2:** Preenchimento de tabela que relaciona arcos assinalados às medidas de seus senos e cossenos.</u>

Figura 32: Tabela preenchida com os valores das funções.

Os alunos preencheram corretamente a tabela a partir da leitura na circunferência trigonométrica, ou seja, das projeções nos quadrantes e nos eixos dos senos e cossenos.

Trechos de diálogos ocorridos durante o preenchimento da tabela:

P: *O que é função? Tenta explicar, E, com as suas palavras... O que é função? Prá ter função o que precisa ter... o que precisa aparecer aí para vocês identificarem: isso é uma função!*

C: *Os ângulos?*

P: *Os ângulos?*

Y: *Um x.*

E: *Um x e um y.*

P: *E esse x e esse y, que relação eles tem... que papel eles desempenham aí...*

Y: *Com o resultado da função dá para fazer... como se fosse um gráfico.*

P: *Com o resultado da função dá prá fazer um gráfico?*

P: *E a função é a mesma coisa que o y? Se eu tiver um parzinho x e y, a função e o y é a mesma coisa? Você acha que é?*

E: *Não sei.*

9ª atividade: Construção do gráfico das funções seno e cosseno no mesmo plano cartesiano

Os alunos realizaram a primeira tentativa de construção dos gráficos.

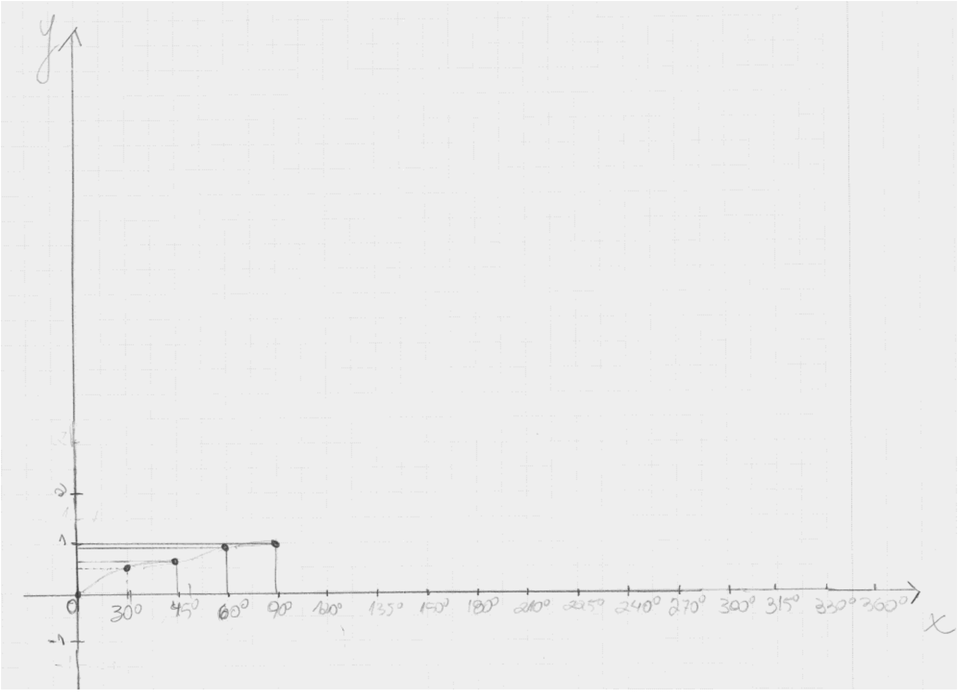


Figura 33: Tentativa de construção do gráfico da função seno.

Nesta figura podemos observar que eles encontraram dificuldade em construir corretamente o eixo das abscissas.

Forneci uma folha milimetrada para que eles refizessem a atividade. Desta vez, fiz alguns questionamentos de modo a auxiliá-los na escolha da escala.

O diálogo a seguir mostra estes questionamentos:

P: *Olha na tabela de vocês... Qual é o maior valor de seno que existe?*

Y: *É um, não é?*

P: *É um! Então combina, olha, de quantos em quantos quadradinhos você vai marcar... para indicar a unidade?*

Y: *De um em um... mas um vai ficar muito pequeno.*

P: *Mas a escala... se você marcou de um em um aqui... você pode marcar de dois em dois... o importante é ficar a distância igual de um inteiro prá outro. Você pode combinar, usar dois quadradinhos prá um...*

P: *Aí você não precisa pôr todos os números... vamos ver a metade...*

P: *Aí mais prá baixo... como seria no eixo y lá prá baixo.*

E: *Seriam os negativos*

P: *Aí já dá para pôr alguns pontos... então... que pontos?... quando o x é zero quem é o y? Então quando o ângulo é zero quem é o seno dele? O valor de seno de zero grau quem é?*

E: *Um.*

P: *Péra aí, x tá aqui... os ângulos estão aqui e os senos deles estão aqui... na linha de baixo f(x) é a primeira linha...o valor de seno de 0° é zero. Então o primeiro ponto (0;0) Depois você vai querer de que grau?*

Y: *de noventa...*

P: *Por que ela não pôs todos... péra aí anda 90 e sobe um.*

Os alunos construíram no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções seno e cosseno no mesmo plano cartesiano, sem grandes dificuldades. Procurei reforçar a noção de função a cada ponto localizado.

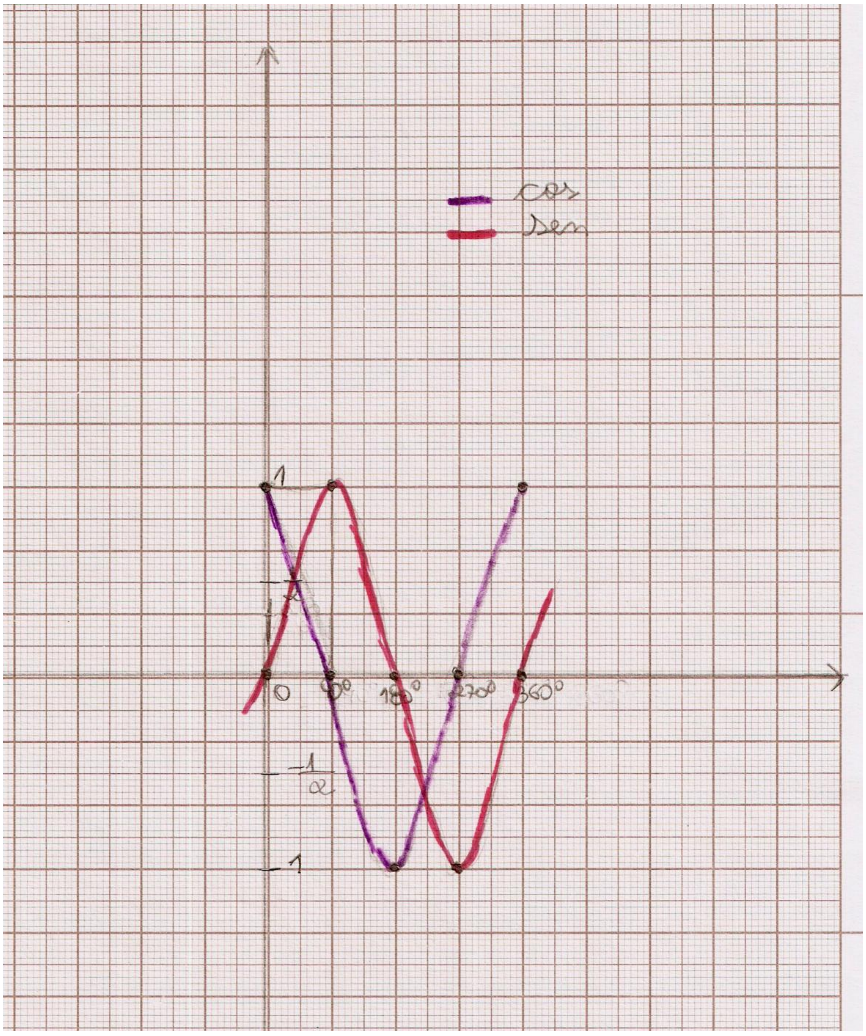


Figura 34: Gráficos das funções seno e cosseno.

Os alunos terminaram a construção do gráfico da função seno com tranquilidade. O diálogo a seguir apresenta o espanto da aluna Y com relação ao nome dado à curva da função seno e indica a tranquilidade da aluna E com relação à construção do gráfico da função cosseno.

P: *Vocês acabaram de construir a senóide... o gráfico da função seno! Agora vamos fazer a cossenóide...*

Y: *Meu Deus!*

E: *Agora quando é zero, o cosseno é 1...*

Alguns dados coletados neste encontro:

Conhecimentos prévios	**Tipo de conteúdo**
Circunferência e círculo	Fatos e conceitos
Ângulo	Fatos e conceitos
Função (conceito, representação)	Fatos e conceitos
Localização de pontos no plano cartesiano	Conceitos e procedimentos

Tabela 8: Conhecimentos prévios observados no 3º encontro.

Dificuldades demonstradas pelos alunos	**Tipo de conteúdo**
Escolha de escala adequada para os eixos	Procedimento
Construção de ângulos com o uso de transferidor	Procedimento
Construção de circunferência	Procedimento

Tabela 9: Dificuldades observadas no 3º encontro.

4.3.4 - Quarto encontro

10ª atividade: Leitura do texto e reflexão sobre a figura explicativa sobre o radiano

Após a leitura do texto os alunos expressaram algumas dúvidas, como mostra a transcrição a seguir:

Y: Isso o professor passou...

E: É...

Y: Radiano é isso, o arco?

P: O que vocês entendem do que é radiano aí.

Y: Radiano tem o mesmo valor do pi?

P: Radiano tem o mesmo valor do raio.

Y: Ah tá... é que eu vi 3,14 e eu achei que tinha o mesmo valor do pi.

Reli o texto prá eles.

Os alunos realizaram a atividade do item **f** do **item 4.2.**

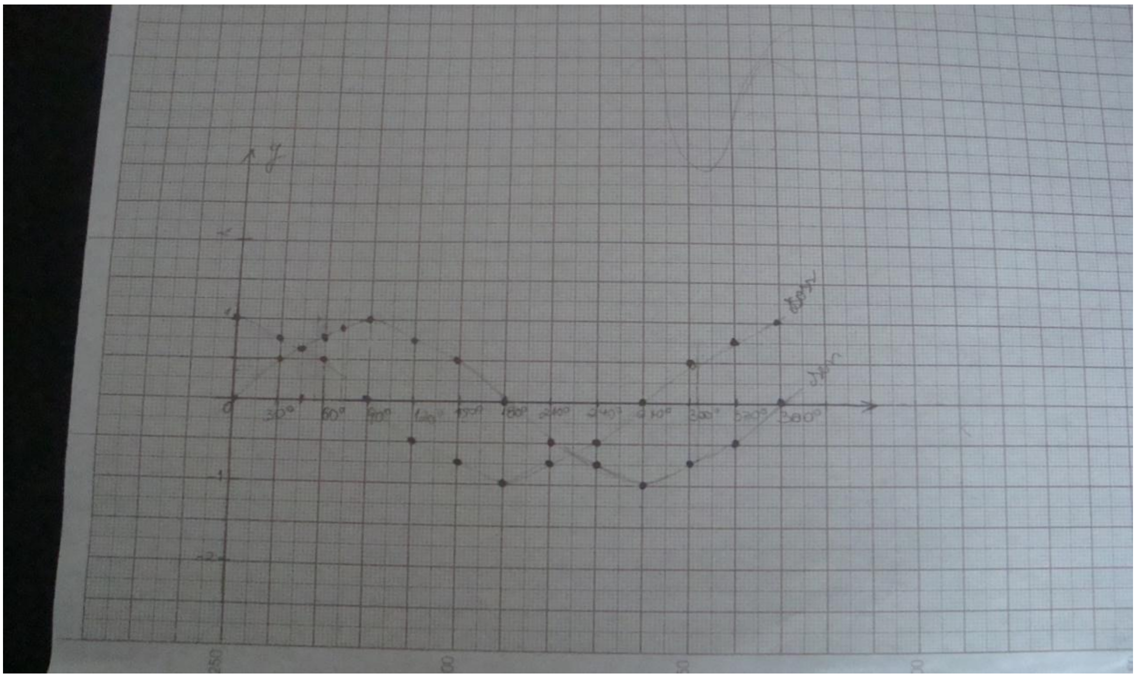


Figura 35: Gráficos das funções seno e cosseno (valores da tabela)

Diálogo ocorrido durante a construção dos gráficos

***P**: Agora eu pergunto, esses pontos pode ligar?*

***Y**: Pode!*

***P**: Por quê?*

(A aluna fala baixinho e não é possível ouvir o que ela disse)

***P**: Mas espera aí... quando você liga o que está mostrando? O que quer dizer isso? Por que pode ligar vocês sabem?*

***Y**: Porque tem um período.*

***E**: Por que é um período?... para ter imagem?*

***P**: Por quê, E?* (a aluna olhava intrigada)

C: *Para ter imagem?*

(Os alunos silenciam)

P: *Para ter imagem?*

P: *Só mais uma pergunta... esse gráfico é da função ...*

Y: *É. Seno!*

P: *E pára aqui?*

Y, E, C: *Não!*

P: *Não? Por quê?*

C: *Porque é infinito?*

P: *Infinito?*

C: *Não!*

P: *Não! Não fica com medo de falar... O que é infinito?*

C: *Não... é que...*

P: *Se eu quisesse achar mais valores para cá (*apontava para o eixo x à direita do arco de 360°*), o que é que eu tinha que fazer aqui? (*apontava para o cartaz da circunferência*).*

E: *Tinha que ir mais de 360°...*

P: *Passar de 360°? Dando voltas?*

E: *É.*

Após a construção desses gráficos apresentei a atividade **f** do item **4.2** e iniciei uma série de perguntas visando à reflexão sobre as mudanças nos parâmetros das equações trigonométricas.

A seguir alguns diálogos referentes a esta atividade:

P: *Se eu apresentasse essas funções para vocês construírem, como vocês acham que ia ficar esse gráfico que vocês fizeram agora? Pensa nisso... Tenta ver no gráfico... o que vocês acham que ia acontecer com o gráfico que vocês fizeram, como seria essa curva?*

Os alunos silenciam e a aluna Y expressa a dúvida.

Y: *Seria... algo tipo assim...* (ela aponta para o gráfico sinalizando mudança na amplitude)

P: *Ia aumentar alguma coisa? A amplitude, você quer dizer?*

Y: *Ia aumentar o tamanho do gráfico.*

P: *Ia aumentar o tamanho?*

***Y**: Eu acho que sim, pelo que eu estou pensando...*

***P**: E você, tem alguma idéia C do que ia acontecer?*

***C**: Acho que ia aumentar...*

***P**: Mas ia aumentar o quê, a altura, a amplitude, ou o período? Ou nada disso? O que ia aumentar?*

***E**: Acho que o período...*

***P**: Vocês estão fazendo esse estudo na sala de aula?*

***C**: Desse daqui não.*

***P**: Vocês fizeram esse tipo de gráfico assim* (dizia isso mostrando as funções expressas pelas equações)

***Y**: Com esse 1 não.*

***P**: É porque... essa função poderia...*

***E**: A gente faz um quadro para achar os números e depois outro quadro... é isso que o professor estava explicando.*

***P**: E esse quadro aí, em vez de colocar só y = senx, se eu colocar y = 1 + senx? O que será que ia acontecer?*

***Y**: Ia somar mais 1...*

***P**: Ia somar mais 1, certo? Ia somar mais 1 a quê?*

***Y**: Ao seno de x.*

***P**: Isso. Então como será que esse gráfico ia ficar?*

Silêncio.

***P**: O que você acha?*

***Y**: Acho que ia ficar... tipo mais alto...*

***P**: Ia somar 1 e esse pontos...o que é que ia acontecer com eles?*

***Y**: Ia aumentar...* (a aluna Y mostrava com o dedo a subida dos pontos)

***P**: Subir 1, muito bem, isso mesmo... e se aqui fosse y = senx - 1.*

***Y**: Ia descer 1...*

***P**: Vocês já tinham feito esse estudo... tinham pensado nisso?*

***Y**: Tem uma matéria no caderno... mas eu não tinha ouvido a explicação dele...*

***P**: E se a gente colocasse assim, olha, y = 2 + senx, o que será que ia acontecer com esse gráfico?*

***Y**: Ia somar 2, ia subir dois...*

***P**: E vocês estavam fazendo isso lá na sala?*

***E**: Ele tava fazendo isso daqui* (a aluna apontava para as equações)
***Y**: Eu tenho essa matéria no caderno, tipo eu peguei com a minha amiga, mas eu não ouvi a explicação do professor.*
***P**: Mas por que você não ouviu a explicação?*
***Y**: Porque eu tava aqui.*
***P**: Porque você tava aqui? Ah que coisa mais chata, isso é chato demais, eu acho que eu tenho a obrigação de explicar, não é?*

Apesar desta última frase da aluna Y indicar que ela estava sendo prejudicada por não estar assistindo as aulas do professor, podemos perceber que as reflexões propostas por nós não estavam sendo feitas em aula, pois os outros alunos, C e E, não se manifestaram sobre isso. Este comentário da aluna nos alerta para os cuidados que devemos ter ao realizarmos uma pesquisa, ou seja, os alunos não podem ser prejudicados da maneira descrita pela aluna.

Assim, decidi encerrar a fase de coleta, acreditando que os dados coletados até o momento são suficientes para responder nossa questão de pesquisa.

Alguns dados coletados neste encontro

Conhecimentos prévios	**Tipo de conteúdo**
Número irracional π	Fato, conceito
Equação	Conceito
Idéia de continuidade de uma função	Conceito

Tabela 10: Conhecimentos prévios observados no 4º encontro.

Dificuldades demonstradas pelos alunos	**Tipo de conteúdo**
Compreensão de texto com imagem.	Procedimento
Compreensão da medida de arco radiano.	Conceito

Tabela 11: Dificuldades observadas no 4º encontro.

4.4 - Análise dos dados

Os conhecimentos prévios dos alunos, observados durante a realização das atividades propostas nos quatro encontros, foram reunidos na tabela abaixo. Foram destacadas algumas características em cada um deles e apresentadas uma classificação de acordo com os tipos de conteúdos segundo Coll (2000).

Conhecimentos prévios	**Características mais evidenciadas**	**Tipos de conteúdos observados**
Competência leitora dos gêneros textuais: narração e gráfico	Caráter implícito Compartilhada	Procedimento
Relação entre grandezas	Caráter implícito	Conceito
Plano cartesiano, tipos de gráficos, grandezas	Conhecimento escolar Estável	Fatos, conceitos e procedimentos
Periodicidade das estações do ano	Caráter implícito Compartilhada	Fatos e conceitos
Construção de gráfico a partir de um modelo	Conhecimento escolar Compartilhada	Procedimento
Números decimais e medidas de comprimento	Estáveis e resistentes à mudança	Fatos e conceitos
Conceito de período e imagem de função periódica	Conhecimento escolar	Conceito
Compromisso com a atividade	Caráter implícito Compartilhada	Atitude
Adoção de escalas nos gráficos	Conhecimento estável e resistente à mudança	Conceito e procedimento
Representação de intervalos numéricos por meio de conjuntos	Conhecimento escolar	Fato, conceito e procedimento
Uso de símbolos matemáticos	Conhecimento escolar Estável	Fatos
Razões trigonométricas de ângulos notáveis	Conhecimento escolar	Fatos, conceitos, procedimento
Quadrante e sistema cartesiano	Conhecimento escolar Estável	Fato, conceito
Aproximação de números reais com infinitas casas decimais	Conhecimento escolar	Conceito e procedimento
Circunferência e círculo	Conhecimento escolar	Fatos e conceitos
Ângulo	Caráter implícito	Fatos e conceitos
Função (idéia de continuidade)	Conhecimento escolar	Conceito
Localização de pontos no plano cartesiano	Conhecimento escolar Estável	Conceitos e procedimentos
Número irracional π	Conhecimento escolar	Fato, conceito
Equação	Conhecimento escolar	Conceito

Tabela 12: Conhecimentos prévios dos alunos.

Com base nestes dados, identificamos que os diferentes tipos de conteúdos de conhecimentos prévios dos alunos costumam aparecer conjuntamente, principalmente os de fatos e conceitos. Os conhecimentos prévios relacionados às atitudes poderiam ser melhor observados se tivéssemos tido mais encontros. Os conhecimentos relacionados a procedimentos apareceram em grande quantidade , o que reforça a necessidade de se desenvolver atividades de aplicações e exercícios para coletá-los e identificar dificuldades dos alunos.

Ao assinalarmos *conhecimento escolar* à característica observada, queremos evidenciar que este conhecimento prévio pareceu-nos ter sido adquirido através de aprendizagem exclusivamente escolar e que, possivelmente, essas idéias não foram apresentadas em contextos próximos da vida cotidiana do aluno.

Sendo os conhecimentos prévios um conjunto de conhecimentos que se reestrutura a cada nova experiência do indivíduo, entendemos que a cada encontro realizado para a coleta de dados, o conjunto de conhecimentos prévios dos alunos foi sendo reestruturado. Salientamos que os conhecimentos prévios se formam ao longo da vida do aprendiz e podem ser agrupados em diferentes tipologias. Outra possível classificação, por exemplo, seria listá-los em conhecimentos cognitivos, afetivos e psicomotores.

Na construção de gráfico a partir de um modelo apresentado, os alunos revelaram que costuma-se pedir, em aula, uma tabela que relaciona as grandezas, preenchida a partir de cálculos. Esse tipo de atividade exige pouca compreensão do conceito de função e se constitui numa repetição mecânica. Desse modo, este conteúdo procedimental não é trabalhado conjuntamente com os demais tipos e os alunos estabelecer vínculos frágeis que não favorecem a aprendizagem significativa.

A seguir, apresentamos uma tabela que relaciona as dificuldades observadas aos tipos de conteúdos.

Dificuldades observadas	**Tipo de conteúdo**
Construção de gráfico a partir de situação imaginada	Procedimento
Omissão do intervalo de 0 a 0,10cm no eixo	Conceito
Compreensão de texto narrativo	Conceito e procedimento
Emprego correto do símbolo de desigualdade	Fato
Compreensão da fração como divisão em partes	Conceito
Comparação de números fracionários	Conceito e procedimento
Escolha de escala adequada para os eixos	Procedimento
Construção de ângulos com o uso de transferidor	Procedimento
Construção de circunferência	Procedimento
Compreensão de texto com imagem	Conceito e procedimento
Compreensão da medida de arco: radiano.	Conceito

Tabela 13: Dificuldades observadas durante as atividades.

Nesta tabela, atentamos para as dificuldades relativas a conteúdos de procedimentos e de atitudes. Os alunos demonstraram que não sabiam manusear o transferidor durante a atividade de construção de ângulo e na atividade que consistia em identificar extremidades de arcos em uma volta da circunferência trigonométrica. Isso pode significar que os alunos nunca utilizaram o transferidor em sala de aula ou então que as atividades propostas em aulas de Matemática para o desenvolvimento do conceito de ângulos não envolveram a aprendizagem de procedimentos.

Outra observação que nos chamou a atenção é a falta de curiosidade de como surgiu o valor de π. Todos os alunos conheciam o valor aproximado do número irracional π, mas nenhum deles afirmou ter ouvido uma explicação de onde surgiu esse valor. Procuramos instigá-los a conhecer essa origem; fizemos a explicação de que esse valor é encontrado ao se dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e, com isso, esclarecemos outra dúvida deles sobre o que é o diâmetro. Os alunos pareceram ter mais familiarização com a palavra raio e, por isso, lamentamos não ter disponibilizado a eles o compasso. Acreditamos que o uso desse instrumento poderia revelar outros conhecimentos prévios dos alunos.

Quanto à aprendizagem de conceitos, sabemos que nunca pode ser considerada definitiva, assim reforçamos a necessidade de se realizar atividades que promovam elaborações e enriquecimento dos conceitos para que o aluno possa estabelecer relações pertinentes entre esses conhecimentos e os que já possui em sua estrutura cognitiva. Um exemplo de atividade proposta é a de comparar números irracionais com o uso de calculadora. Pudemos perceber que os alunos não tomaram a iniciativa de usá-la nessa comparação dos números; foi necessária nossa sugestão de uso do instrumento.

Acreditamos que a dificuldade dos alunos em expressar o intervalo numérico de 0 a 0,10 cm no eixo das ordenadas se deve ao fato de, ao longo da escolaridade, o aluno trabalhar com o conceito de número, essencialmente pela via do discreto[10]. Entendemos que o conceito de número precisa ser construído também pela via do contínuo, pois concordamos com Brolezzi (1996) quando diz que "não se pode pretender desenvolver uma idéia abrangente de Número sem levar em conta os dois

[10] A via do discreto se relaciona com a contagem e a via do contínuo, com medidas. Brolezzi mostra que contar e medir são operações através das quais se constrói a idéia de número.

aspectos, discreto e contínuo, em suas múltiplas características e implicações" (p.46).

Com relação ao material, constatamos que o Caderno do Aluno apresenta dicas importantes sobre hábitos de estudos e enfatiza que é responsabilidade dos alunos organizar horários de estudo, estabelecer objetivos para essas horas de estudo, fazer anotações do que aprendeu e das dúvidas que surgiram, de conversar com seus professores sobre essas dúvidas, de fazer revisões de conteúdos a cada semana de estudo para se preparar melhor os desafios seguintes. Observamos que as atividades propostas dão ênfase à aprendizagem de conteúdos procedimentais e que estes são trabalhados conjuntamente com os conceitos envolvidos. Assim, identificamos nas atividades do Caderno do Aluno o emprego de verbos que, segundo Coll (2000, p.91), são verbos "procedimentais": *construir, observar, representar.*

Uma visão panorâmica do conteúdo de Funções Trigonométricas é apresentada nas quatro situações de aprendizagem. Percebemos que as atividades são apresentadas de forma integrada, mas são independentes. Por exemplo, na quarta situação de aprendizagem é apresentada uma atividade (Caderno do Aluno, p. 51) que retoma a idéia de imagem da função, amplitude e período. Esta atividade pode ser proposta pelo professor logo após as atividades da primeira situação de aprendizagem em que os alunos trabalharam com estes conceitos envolvidos. Na quarta situação vemos também exemplos de outros fenômenos periódicos possíveis de serem modelados por equações trigonométricas, como, por exemplo, a periodicidade da pressão sanguínea, o fenômeno das marés e a distensão de mola em que foi pendurada determinada massa. Esses exemplos também são possíveis de serem apresentados aos alunos logo no início do estudo. Assim, percebemos que o material possibilita formas diversas de abordagem das quatro situações de aprendizagem. Cabe ao professor determinar o tempo ideal a ser dedicado às atividades, tendo como base sua experiência e o interesse dos alunos pelos temas apresentados.

Destacamos ainda com relação ao material que a ênfase dada ao desenvolvimento da observação dos fenômenos periódicos, seja ela real ou imaginativa, pode conduzir o aluno a exercitar o hábito de relacionar o que se aprende com algo observado no seu cotidiano, de modo a favorecer a aprendizagem com significado. É feita a sugestão de uso, pelo aluno, de software livre, como, por exemplo, o Graphmática ou o Wimplot, para ser utilizado para construir gráficos de funções de vários tipos. Essa sugestão demonstra a intenção de responsabilizá-lo pela própria aprendizagem.

É importante salientar que, na pesquisa qualitativa, a análise dos dados é contínua e podemos dizer que, a cada vez que assistíamos às gravações, mais dados eram observados e analisados.

Chegado o final deste trabalho, refletimos sobre o motivo que impulsionou essa pesquisa. Percebendo a carência de pesquisas no campo da Educação Matemática com o foco na *aprendizagem de conteúdos matemáticos do Ensino Médio* e tendo como hipótese que os alunos do segundo ano do Ensino Médio possuem um conjunto de conhecimentos prévios de funções e de trigonometria que possibilita a aprendizagem significativa das funções trigonométricas, decidimos investigar esses conhecimentos prévios dos alunos. Fizemos isso em contato direto com eles, observando ativamente a execução das atividades do Caderno do Aluno, sob a perspectiva construtivista de ensino e de aprendizagem.

Os estudos de Pires (2000) e de Coll (2006) sobre a perspectiva construtivista ampliaram também os nossos conhecimentos prévios sobre este tema e reforçaram nossa opção por essa perspectiva de ensino. Percebemos que, nessa perspectiva, é fundamental compreender como se dá a aprendizagem, buscando conhecer na própria fonte, ou seja, diretamente com os alunos, como ela se processa. A importância relativa ao material, destacada por Pozo (2000) como uma das condições para a ocorrência da aprendizagem construtiva, direcionou nossa questão de pesquisa para a análise das atividades relativas às funções trigonométricas, contidas no material distribuído na rede pública de ensino paulista.

Para essa investigação fizemos a opção pela pesquisa qualitativa e utilizamos a técnica da observação participante para o estudo de caso que apresentamos. Essa tarefa não é fácil e exige muitas qualidades do investigador como, por exemplo, ter sensibilidade para pessoas.

Assim, retomamos nosso objetivo de pesquisa, que é compreender as possibilidades e dificuldades em utilizar o Caderno do Aluno, em uma perspectiva construtivista, focando conhecimentos prévios desses estudantes em relação ao conteúdo funções trigonométricas, identificando dificuldades que podem surgir durante a execução dessas atividades e verificando as necessidades de intervenções para a promoção da construção de conhecimento relativo ao tema, visando a uma aprendizagem significativa. Para atingi-lo, formulamos a seguinte questão de pesquisa: *Quais são as possibilidades e dificuldades em utilizar o*

Caderno do Aluno, em uma perspectiva construtivista, em relação ao conteúdo Funções Trigonométricas?

Pudemos verificar que são muitas as possibilidades de trabalho que o Caderno do Aluno oferece ao professor. As atividades são independentes, ou seja, não são apresentadas de modo sequencial, não dependem uma da outra. O professor pode aprofundar as questões propostas nas atividades ou tratá-las de modo mais superficial, atendendo às necessidades de seus alunos e respeitando a escala de tempo adotada por ele para o desenvolvimento das idéias fundamentais presentes no conteúdo funções trigonométricas. Isso reforça a necessidade de investigar os conhecimentos prévios dos alunos a cada situação nova de aprendizagem. Quanto às dificuldades, podemos relacioná-las às dificuldades de compreensão da perspectiva construtivista pelo professor.

A seguir, retomamos as questões que se desdobraram da questão de pesquisa:

- *Quais são os conhecimentos prévios revelados por um grupo de estudantes em relação ao conteúdo Funções Trigonométricas?*

Identificamos que os conhecimentos prévios dos alunos são, em sua maioria, relacionados a conteúdos de fatos e de conceitos. Isso pode estar relacionado a uma concepção de aprendizagem em que o aluno é considerado como receptor passivo de conhecimento. Para a mudança dessa concepção, o professor pode cultivar o hábito de perguntar ao aluno o que compreende do tema abordado e como procedeu para a realização das tarefas propostas por ele, de forma a ensiná-lo a construir conhecimento. Além disso, pode oferecer a ele tarefas desafiadoras em que os diferentes tipos de conteúdos sejam, na medida do possível, trabalhados conjuntamente.

- *Quais são as dificuldades que esse grupo de estudantes apresenta no estudo das Funções Trigonométricas?*

Dentre as dificuldades que os alunos apresentaram no estudo das funções trigonométricas, destacam-se as dificuldades relacionadas aos conteúdos de procedimentos e de atitudes. Os alunos revelaram que não costumam trabalhar os conteúdos procedimentais em conjunto com os conceituais; isso foi demonstrado através da falta de habilidade no uso de transferidor para construir ângulos e no uso da calculadora para comparar números reais.

Entre as dificuldades relacionadas às atitudes, destaca-se a postura frente ao erro. Os alunos demonstraram que não encaram o erro de forma construtiva. Alguns trechos de diálogos mostram que os alunos optam pela omissão de um conhecimento correto para, com isso, evitar o erro. Observamos a necessidade de se ensinar alguns valores aos alunos que podem contribuir para a mudança de atitude frente ao erro. O ensino de valores como o respeito a si próprio, respeito pelo outro e a solidariedade podem contribuir para a aprendizagem de atitude favorável frente ao erro, ou seja, o erro passa a ser compreendido, a partir desses valores, como uma oportunidade de construção de conhecimento e não como fracasso. As atividades apropriadas para a aprendizagem desses conteúdos atitudinais são, segundo Zabala "aquelas *atividades experienciais* em que de uma forma clara *são estabelecidos vínculos afetivos"* (p. 170).

- *Que intervenções do professor podem promover a construção de conhecimentos relacionados às Funções Trigonométricas, visando a uma aprendizagem significativa?*

As possibilidades de intervenção do professor são inúmeras, sendo as atividades orais bastante recomendadas, pois permitem coletar de forma mais imediata a compreensão dos conceitos formados ou que estão em construção. Além disso, atividades realizadas em grupo propiciam a relação entre os conhecimentos prévios; a criação de ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal) definida por Vygotsky só é possível na interação entre alunos. Cabe ao professor mediar as situações de aprendizagem de modo a favorecer o processo de criação de ZDP e de avanço através dela para a construção de conhecimento.

Em nossas intervenções procuramos adiar o fornecimento da resposta correta ao aluno. Costumamos devolver as perguntas feitas pelos alunos de modo a ensiná-los a construir conhecimentos. Com Bachelard (1996) aprendemos que "se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico" (p.18).

Concluímos que existem muitas possibilidades de utilização do Caderno do Aluno em uma perspectiva construtivista. A abordagem proposta, a partir da modelagem de fenômenos periódicos, possibilita maneiras diversas de agregar significados tanto conceituais, como procedimentais e de atitudes. É possível recorrer a atividades das quatro situações de aprendizagem sem que se perca a idéia fundamental do tema. Por exemplo, uma atividade da quarta situação em que se aborda equações trigonométricas pode ser utilizada para exemplificar a idéia apresentada na primeira situação sobre o conceito de período. As atividades são apresentadas de modo a permitir agregação de significados construídos ao longo de seu desenvolvimento.

Além de responder as questões de pesquisa, este estudo propiciou à professora pesquisadora mais motivação para o ensino de tais funções. Percebemos que as dificuldades encontradas pelos alunos podem ser sanadas com atividades adequadas para cada tipo de conteúdo. Reafirmamos a idéia de que o professor não transmite conhecimentos e que é *sua* a responsabilidade pelo ensino. O professor precisa se comprometer a estudar e procurar formas cada vez mais adequadas de intervenções, visando à aprendizagem significativa de estudos que propõe aos seus alunos. Porém, a responsabilidade de aprender é do aluno. Cabe a ele participar ativamente deste processo, procurando estabelecer as relações entre o que lhe é apresentado com os conhecimentos prévios dos quais pode disponibilizar. Para construir conhecimento é necessário querer aprender, com significado.

Esse estudo contribuiu para a nossa iniciação na pesquisa acadêmica. Com ele, acessamos vários trabalhos acadêmicos e conhecemos procedimentos metodológicos diversos; com isso pudemos optar pela utilização da técnica da observação participativa em nosso estudo de caso. Consideramos que o procedimento utilizado foi adequado; no entanto, a filmagem apenas de trechos das atividades dificultou a análise dos resultados. A filmagem contínua dos diálogos poderia facilitar a coleta de informações. A opção de filmar alguns trechos foi feita por acreditarmos que, desse modo, os alunos se sentiriam mais à vontade pelo fato de evidenciarmos nosso foco de interesse nas ações deles, relativas aos conteúdos matemáticos. Sugerimos que, em pesquisas semelhantes a esta, seja feita a filmagem de forma contínua e, se possível, com um microfone para cada aluno, pois em alguns momentos as falas dos alunos foram simultâneas e isso dificultou nosso trabalho.

Consideramos que há a necessidade de se realizar pesquisas de investigação de conhecimentos prévios relativos a outros temas da Matemática, especialmente do Ensino Médio. Neste segmento da educação básica, há muito a se pesquisar sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois nossos jovens estão dando sinais, há algum tempo, que a forma de se ensinar não tem sido adequada.

Desejamos que esta pesquisa contribua para a melhoria do ensino de Matemática e que auxilie os professores nessa consideração dos conhecimentos que os alunos trazem para a sala de aula. O ofício de ensinar torna-se empobrecido se o olhar do professor não estiver direcionado para o aprendiz e para as maneiras como este aprende. Essa aproximação do professor com seus alunos é essencial, pois propicia o exercício do respeito, da tolerância e da solidariedade, valores tão necessários de serem incutidos em nossos jovens. Considerar os conhecimentos prévios dos estudantes não é somente uma opção por uma educação baseada em princípios construtivistas, mas também uma opção de valorizar a diversidade, a inclusão do outro e a possibilidade de aprender com as mais variadas situações e pessoas. É arriscar-se a ouvir o que os alunos tem a dizer e assumir o risco de nos enveredarmos por caminhos desconhecidos. É compreender que sempre há o que se aprender sobre o que já se sabe. O conhecimento está em plena construção e expansão.

ALEGRO, R.C. **Conhecimento prévio e aprendizagem significativa de conceitos históricos no Ensino Médio.** Tese de doutoramento. 239f. Universidade Estadual de São Paulo - Unesp de Marília. São Paulo, 2008.

ATKINSON, William W. **De ti depende tua sorte.** Tradução de T. Booker Washington. São Paulo: Empresa Edit. "O Pensamento" Ltda.,1950.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento**.** Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BOGDAN, Roberto C; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em Educação.** Porto: Porto Editora Ltda, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio/** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/vol.2. Brasília: MEC/SEB.2006.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na História da Matemática e no ensino de Matemática.** 1996. 88f.Tese de doutoramento.Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARRETERO, M. **Constructivismo y educación**. Buenos Aires: Paidós, 2009.

COLL, C. et al. **Os conteúdos na reforma:** ensino e aprendizagem de conceitos,procedimentos e atitudes. Porto Alegre: Saraiva, 2000.

COLL, C. et al. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Ática, 2006.

FERREIRO, Emília. **Psicogênese da língua escrita.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

HABERMANN, J.C.A. **As normas da ABNT em trabalhos acadêmicos:** TCC, dissertação e tese; métodos práticos e ilustrações com exemplos dos elementos pré-textuais, textuais e pós-textuais. 2 ed. São Paulo: Globus, 2011.

KLEIN, M. E. Z. **O ensino da trigonometria subsidiado pela teoria da aprendizagem significativa e pela teoria dos campos conceituais.** XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2008.

MACHADO, N.J. - **Conhecimento e valor**. São Paulo: Editora Moderna, 2004.

MARTINS, G.A. **Estudo de caso**: uma estratégia de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2008.

MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2006.

MOREIRA, Marco A. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

OLIVEIRA, T. **Trigonometria:** A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos. 2010. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, UFSCAR- São Paulo.

ONRUBIA, Javier. Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir. In: **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2006.

PIRES, C.M.C. **Currículos de Matemática:** da organização linear à ideia de rede**.** São Paulo: FTD, 2000.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres:** a nova cultura da aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

POZO, J. I. A aprendizagem e o ensino de fatos e conceitos. In: **Os Conteúdos na reforma:** ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Porto Alegre: Saraiva, 2000.

QUEIROZ, D. T. et al. **Observação participante na pesquisa qualitativa:** conceitos e aplicações na área de saúde. Revista de Enfermagem da UERJ. Rio de Janeiro: 2007 abr/jun; 15(2): 276-83.

ROSENBAUM, L.S. - **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.** 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do gestor:** gestão do currículo na escola/Secretaria da Educação. Coordenação, Maria Inês Fini; elaboração, Lino de Macedo, Maria Eliza Fini, Zuleika de Felice Murrie. São Paulo: SEE, 2008a. v. 2, il.

___________**Caderno do professor**: matemática, ensino médio - 2ª série, 1º bimestre/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés, Walter Spinelli. - São Paulo: SEE, 2008b.

___________**Caderno do aluno**: matemática, ensino médio - 2ª série, 1º bimestre/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Roberto Perides Moisés, Walter Spinelli. - São Paulo: SEE, 2008c.

___________**Proposta curricular do Estado de São Paulo:** Matemática/ Coord. Maria Inês Fini. - São Paulo: SEE, 2008d.
___________**Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. - São Paulo: SEE, 2009a.

___________**SARESP 2008**: Matrizes de referência para a avaliação: Matemática/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini. - São Paulo: SEE, 2009b.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 22 ed. São Paulo: Cortez, 2002.

SIMON, M. A. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), 114-145, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** Tradução de Jeferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

ZABALA, A. Os enfoques didáticos. In: **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2006.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhores responsáveis pelo aluno ____

Seu filho está sendo convidado a participar da pesquisa *Conhecimentos prévios de um grupo de estudantes do Ensino Médio relacionados com as Funções Trigonométricas* que está sendo realizada pela mestranda Márcia Regina Ramos Costa Ribeiro,do curso de mestrado acadêmico em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

A finalidade deste estudo é contribuir com as pesquisas em Educação Matemática, auxiliando os professores de Matemática na identificação de conhecimentos prévios dos alunos, considerando a história de conhecimento já percorrida por ele.

Participarão deste estudo a mestranda citada, seu orientador Professor Doutor Armando Traldi Júnior e mais duas alunas de sua atual turma da segunda série da E.E."________________". Serão realizadas filmagens e gravações durante a execução das atividades propostas e que constam no Caderno do Aluno (material distribuído pela Secretaria de Estado da Educação).

Esses encontros ocorrerão na biblioteca da E.E."_________________", durante as aulas de Matemática, no período de aulas. Serão realizados quatro encontros. As filmagens e as gravações destes encontros ficarão sob a custódia da mestranda e estarão disponíveis para consulta dos participantes da pesquisa (os alunos envolvidos), dos seus responsáveis e dos interessados no estudo, ou seja, orientador e professores doutores da banca examinadora.

A participação de seu filho no estudo é voluntária. Ele pode escolher não fazer parte do estudo, ou pode desistir a qualquer momento. Em caso de dúvida poderá entrar em contato com a pesquisadora pelo telefone _____________ou ainda pelo email profmatmarcia@terra.com.br.

Declaro que li e entendi este formulário de consentimento e todas as minhas dúvidas foram esclarecidas e que sou voluntário a tomar parte neste estudo.

Assinatura do voluntário e data:

____

Assinatura da pesquisadora e data:

____

Assinatura do(s) responsável (is) pelo voluntário e data:

____